Feuille de cours

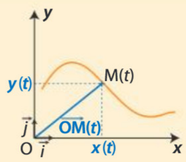
1 Les vecteurs position, vitesse et accélération

On se limite ici à l'étude du mouvement plan d'un point M d'un système dans un référentiel donné.

a. Vecteur position

• Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ lié au référentiel d'étude, la position d'un point M est donnée par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$: $\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$.

• $x(t)$ et $y(t)$ ou plus simplement x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M à l'instant t.



Remarque :
On obtient la valeur du vecteur position à partir de la relation $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b. Vecteur vitesse

• Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_i = \dfrac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{t_{i+1} - t_i}$ s'écrit aussi $\vec{v}_i = \dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i \to i+1}}{\Delta t}$ car $\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_i = (\Delta\overrightarrow{OM})_{i \to i+1}$.

• Le vecteur vitesse d'un point en une position M_i est la limite de $\vec{v}_i = \dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i \to i+1}}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro.
Cette limite est la dérivée par rapport au temps du vecteur position à l'instant t_i : $\vec{v}_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i \to i+1}}{\Delta t} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{t_i}$ (Côté Maths 1 p. 17).

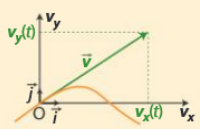
• Dans un référentiel donné, le **vecteur vitesse** d'un point M à l'instant t est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à cet instant :

$$\underbrace{\vec{v}}_{\text{Valeur en m·s}^{-1}}(t) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_t \quad \text{noté plus simplement} \quad \vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

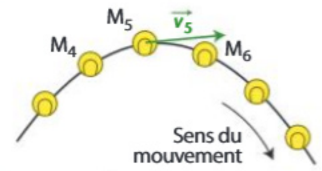
Valeur en m (pour $\overrightarrow{OM}$) ; t en s

• Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont obtenues en dérivant, par rapport au temps, celles $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_t \\ v_y(t) = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_t \end{cases} \quad \text{ou plus simplement} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$



A Vecteur vitesse de M dans la position M_5



> Le vecteur $\vec{v}_5$ est tangent à la trajectoire en M_5.

Remarques :

• v_x est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe $x = f(t)$ tracée à cette date t. Il en est de même pour v_y et la tangente à la courbe $y = g(t)$.

• On obtient la valeur v du vecteur vitesse à partir de la relation : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

• Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement (construction A).

c. Vecteur accélération

• Le vecteur accélération caractérise la variation du vecteur vitesse en fonction du temps.

• Par analogie avec le vecteur vitesse, on peut déterminer le vecteur accélération à un instant t_{i+1} : $\vec{a}_{i+1} = \dfrac{(\Delta\vec{v})_{i \to i+1}}{\Delta t}$ (construction B).

• Lorsque Δt tend vers zéro, le vecteur accélération à l'instant t_{i+1} s'écrit :

$$\vec{a}_{i+1} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{(\Delta\vec{v})_{i \to i+1}}{\Delta t} = \left(\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_{i+1}}.$$

• Dans un référentiel donné, le **vecteur accélération** d'un point M est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse $\vec{v}$ à cet instant :

$$\underbrace{\vec{a}}_{\text{Valeur en m·s}^{-2}}(t) = \left(\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)_t \quad \text{noté plus simplement} \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$$

Valeur en m·s⁻¹ (pour $\vec{v}$) ; t en s

• Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$ sont obtenues en dérivant, par rapport au temps, celles $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

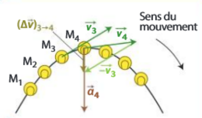
$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)_t \\ a_y(t) = \left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)_t \end{cases} \quad \text{ou plus simplement} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

lycee.hachette-education.com/physique-si/tle

Tracé d'un vecteur accélération

VIDÉO DE COURS

B Vecteur variation de vitesse et vecteur accélération

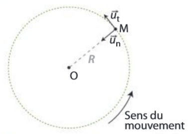


> Le vecteur variation de vitesse $(\Delta\vec{v})_{3\to4}$ et le vecteur accélération $\vec{a}_4$ ont même direction et même sens.

Point maths Côté maths 1 p. 17

Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération peuvent être obtenues à partir de la dérivée seconde des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position :

C Repère de Frenet



> Le repère de Frenet noté $(M ; \vec{u}_n, \vec{u}_t)$ est défini par :
– une origine mobile liée au point M étudié ;
– un vecteur unitaire $\vec{u}_n$ perpendiculaire en M à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la trajectoire ;
– un vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

2 Des exemples de mouvements

a. Mouvements rectilignes

Un système est animé d'un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une portion de droite.

Mouvement	Rectiligne uniforme	Rectiligne uniformément varié
Vecteur accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \vec{0}$	**Direction :** droite support de la trajectoire **Sens :** – celui de $\vec{v}$ si le mouvement est accéléré ; – opposé à $\vec{v}$ si le mouvement est ralenti. **Valeur :** a (m·s⁻²) constante

b. Mouvements circulaires

• Un système est animé d'un mouvement circulaire si sa trajectoire est une portion de cercle.

• Un repère privilégié pour l'étude d'un mouvement circulaire est le repère de Frenet noté $(M ; \vec{u}_n, \vec{u}_t)$ (schéma C).

Dans le repère de Frenet, pour un **mouvement circulaire** de rayon R :
– le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, donc $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$;
– le vecteur accélération a pour expression, $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n + \frac{dv}{dt}\vec{u}_t$ avec :
- $a_n = \frac{v^2}{R}$, accélération normale du système ;
- $a_t = \frac{dv}{dt}$, accélération tangentielle du système.

Mouvement	Circulaire uniforme	Circulaire varié
Vecteur vitesse $\vec{v}$	**Direction :** tangente à la trajectoire. **Sens :** celui du mouvement.	
	Valeur : v (m·s^{-1}) constante	**Valeur :** v (m·s^{-1}) variable
Vecteur accélération $\vec{a}$	**Direction :** variable et perpendiculaire à la trajectoire ($a_t = 0$) **Sens :** vers le centre de la trajectoire **Valeur :** $a\ (\text{m·s}^{-2}) = \frac{v^2\ (\text{m·s}^{-1})^2}{R\ (\text{m})}$ constante	**Direction :** variable et non perpendiculaire à la trajectoire ($a_t \neq 0$) **Sens :** vers l'intérieur de la trajectoire **Valeur :** $a\ (\text{m·s}^{-2}) \neq \frac{v^2\ (\text{m·s}^{-1})^2}{R\ (\text{m})}$ variable

- Dans le cas où l'accélération tangentielle est nulle, alors $\frac{dv}{dt} = 0$, v = constante, le mouvement est circulaire uniforme.

3 La deuxième loi de Newton

a. Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié (documents **D**).

b. Centre de masse d'un système

Le **centre de masse** G d'un système est l'unique point de ce système où peut toujours s'appliquer le principe d'inertie.

Lorsque l'on ramène l'étude du mouvement d'un système à celui de son centre de masse G, on considère que toute la masse du système est concentrée en G. L'étude du mouvement est alors plus simple (schéma **E**).

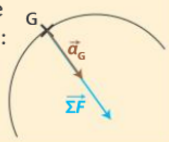
c. Énoncé de la deuxième loi de Newton

- Nous avons vu en Première la relation approchée : $\Sigma\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Si Δt tend vers zéro, $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ et la relation devient $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$.

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces $\Sigma\vec{F}$ appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par l'accélération $\vec{a}_G$ de son centre de masse :

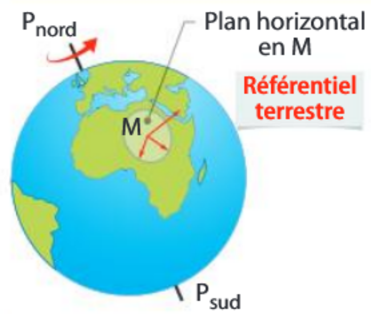
$$\underbrace{\Sigma\vec{F}}_{\text{Valeur en N}} = \underbrace{m}_{m \text{ en kg}}\underbrace{\vec{a}_G}_{\text{Valeur en m·s}^{-2}}$$



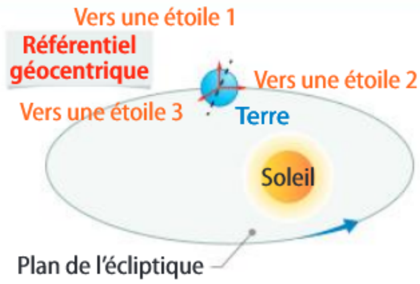
- Dans le cas particulier d'un système **immobile**, $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$.

Il vient alors, de la deuxième loi de Newton, $m\vec{a}_G = \vec{0}$, donc $\vec{a}_G = \vec{0}$ et par suite $\vec{v}_G = \overrightarrow{cte}$. Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) apparaît comme un cas particulier de la deuxième loi de Newton.

D Trois référentiels courants



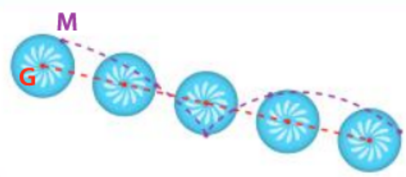
› Origine en un point de la surface de la Terre, axes liés à la surface de la Terre. Peut être considéré comme galiléen, par exemple pour l'étude du mouvement d'un avion.



› Origine au centre de la Terre, axes pointant vers trois étoiles lointaines. Peut être considéré comme galiléen, par exemple pour l'étude du mouvement d'un satellite terrestre.

› Origine au centre du Soleil, axes pointant vers trois étoiles lointaines. Peut être considéré comme galiléen, par exemple pour l'étude du mouvement des planètes du système solaire.

E Centre de masse d'un système



› Au cours du mouvement d'un frisbee, le centre de masse **G** a un mouvement plus simple que celui d'un point **M** à la périphérie.