

泰勒公式在数值计算中的应用

孔珊珊

(济宁学院数学系, 山东 曲阜 273155)

摘要: 泰勒(Taylor)公式是“函数逼近”思想的一个重要应用,在数值计算中也有着非常广泛的应用.本文阐述了泰勒(Taylor)公式在数值计算中的几个主要应用,包括近似计算,判定迭代法的收敛速度,导出 Euler 法和 Newton 迭代法及误差分析等.

关键词: 泰勒(Taylor)公式; 收敛速度; 迭代法; 数值计算; 误差

中图分类号: O241

文献标识码: A

泰勒(Taylor)公式是“函数逼近”思想的一个重要体现,不仅在数学分析中有着非常重要的地位和作用,在数值计算中也有着非常广泛的应用.下面介绍泰勒(Taylor)公式在数值计算中的几种重要应用.

1 近似计算

数值计算方法的数值稳定性是计算方法的基本问题. Taylor 公式常用于近似计算,以改善计算方法的数值稳定性. 举例如下:

例 1.1 当 $|x|$ 很小时,用数值稳定的计算公式计算 $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)}\right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)}\right] = \\ &= \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4x}{3}. \end{aligned}$$

构造数值稳定的计算方法要避免两个相近的数相减,以免造成有效数字的损失. 本例就属于这类问题. 利用 Taylor 公式就可以解决这类问题.

2 判定迭代法的收敛速度

一种迭代法具有实用价值,不但需要它是收敛的,而且需要它有较高的收敛速度. 所谓收敛速度,是指收敛的迭代方法在接近收敛时迭代误差的下降速度. 记 $e_k = x^* - x_k$ 为第 k 次迭代误差,若该迭代公式收敛,即 $e_k \rightarrow 0$,且存在正常数 $p \geq 1$,使 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C (C \neq 0)$,则称此迭代公式为 p 阶收敛的. 特别地,当 $p=1$ 时称线性收敛,当 $p=2$ 时称平方收敛.

直接利用收敛速度的定义判定迭代公式的收敛速度很不方便,所以常常借助于泰勒公式. 下面以

求解一元非线性方程的迭代方法为例说明泰勒(Taylor) 公式的应用. 对于迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) 的收敛速度有如下定理:

定理 2.1 如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续, 并且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{2.1}$$

则该迭代公式在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的^[1].

证明: 由于 $\varphi'(x^*) = 0$, 所以迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 具有局部收敛性. 利用泰勒公式, 将 $\varphi(x_k)$ 在 x^* 处泰勒展开, 得

$$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{\varphi''(x^*)}{2!}(x_k - x^*)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p,$$

其中 ξ 介于 x_k 与 x^* 之间. 由条件 (2.1) 有 $\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$.

又因为 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $\varphi(x^*) = x^*$, 由上式可得 $x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$.

因此对迭代误差 $e_k = x^* - x_k$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = (-1)^{p+1} \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0$

由迭代公式的收敛速度的定义知, 该迭代公式在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的.

定理 2.1 就是利用了 Taylor 公式. 利用定理 2.1 判断迭代公式的收敛阶, 只要求迭代函数的各阶导数在 x^* 点的值, 而避免了求函数极限, 更加简便.

下面利用定理 2.1 给出牛顿法的收敛性. 牛顿迭代公式 $x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$ ($f'(x) \neq 0$) 的迭代函数为 $\varphi(x) = x - f(x) / f'(x)$. 设 $f(x)$ 在 x^* 的某邻域内具有连续的二阶导数, 当 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的单根, 即 $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. 且 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻域内连续, 因为 $\varphi'(x) = f(x) f''(x) / [f'(x)]^2$, 所以迭代函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数, 且 $\varphi'(x)(x^*) = 0$. 因此牛顿迭代公式具有局部收敛性, 且由定理 2.1 知至少是线性收敛的. 若 $f''(x)$ 在 x_0 的邻域内存在, 又因为 $\varphi''(x) = \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2[f''(x)]^2 f(x)}{[f'(x)]^3}$, 所以 $\varphi''(x^*) = f''(x^*) / f'(x^*)$. 只要 $f''(x^*) \neq 0$, 就有 $\varphi''(x^*) \neq 0$, 由定理 2.1 可知牛顿迭代公式是平方收敛的. 如果 $f''(x^*) = 0$, 则牛顿迭代公式的收敛速度还会更快.

3 导出 Euler 法和 Newton 迭代法

3.1 导出 Euler 法并分析误差^[2]

Euler 法是求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (x_0 \leq x \leq b), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

的重要方法. 下面由泰勒公式导出 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{3.1.2}$$

用 Taylor 公式将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处展开, 则有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \tag{3.1.3}$$

取右端前两项得 $y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$, 建立 $y(x_n)$ 用的近似值 y_n 计算 $y(x_{n+1})$ 的近似值 y_{n+1} 的公式即可得 Euler 公式 (3.1.2).

因为 Euler 公式可由 Taylor 公式推出, 并且由带有 Peano 余项的 Taylor 公式可知, (3.1.3) 式是舍去了步长 h 的 2 阶无穷小量 $O(h^2)$, 即 Euler 方法的局部截断误差为 $O(h^2)$, 所以 Euler 公式又称为一阶 Taylor 级数法. 同理, 可以由 Taylor 公式推出二阶 Taylor 级数法:

由 Taylor 公式将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处展开至第四项可得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3), \tag{3.1.4}$$

由(3.1.1) 式计算可得 $y'' = f'_x + f'_y f$, 代入(3.1.4) ,舍去高阶小量 $O(h^3)$ 得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}(f''_{xx}(x_n, y(x_n)) + f''_{xy}(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n))).$$

再用 $y(x_n)$ 的近似值 y_n 计算 $y(x_{n+1})$ 的近似值 y_{n+1} 的公式即可得二阶 Taylor 级数法:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f''_{xx}(x_n, y_n) + f''_{xy}(x_n, y_n)f(x_n, y_n)). \tag{3.5}$$

其中 ,比较(3.1.4) 和(3.1.5) 可知公式(3.1.5) 的局部截断误差为 $O(h^3)$,是一个 2 阶方法.

同理 ,可构造出 3 阶、4 阶 Taylor 级数法.

由以上推导过程可以看出 ,利用 Taylor 公式分析截断误差非常方便. 实际上 ,利用 Taylor 公式分析误差是数值计算方法中应用广泛的一种基本思想方法. 教材^[2] 中已经详细介绍 ,这里不再陈述.

3.2 导出 Newton 迭代法^[1]

设 x_0 是方程(1) 的一个近似根 ,把非线性函数 $f(x)$ 处作泰勒展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \tag{3.2.1}$$

取其线性部分 ,作为非线性方程 $f(x) = 0$ 的近似方程 ,记作 $P_0(x) = 0$. 若 $f'(x_0) \neq 0$,解出 $P(x)$ 的根作为 $f(x) = 0$ 的近似根 x_1 ,则有 $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$. 再把 $f(x)$ 在 x_1 处泰勒展开 ,取其线性部分为 $f(x) = 0$ 的近似方程 ,记作 $P_1(x) = 0$. 若 $f'(x_0) \neq 0$,则得 $x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1)$,如此继续下去 ,得到牛顿法的迭代公式:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.2.2}$$

在这里 ,我们是利用线性函数 $P(x)$ 逐步近似非线性函数 $f(x)$. 所以 ,牛顿迭代法实质上是一种逐步线性化方法 .

参考文献:

[1]石瑞民. 数值计算[M]. 北京: 高等教育出版社 2004.
[2]杨一都. 数值计算方法[M]. 北京: 高等教育出版社 2008.

(责任编辑 庞新琴)

Application of Taylor Formula in Numerical Computation

KONG Shanshan

(Mathematics Department of Jining University , Qufu 273155 , China)

Abstract: Taylor formula is an important application of thought of function approximation ,and it is extensively used in numerical computation. In this paper ,several main applications of Taylor formula in numerical computation are illustrated ,including approximate calculation ,decision of convergence rate of iterative method ,and derivation of Newton method and Euler method and its error analysis.

Keywords: Taylor formula; convergence rate; iterative method; numerical computation; error analysis