文章编号: 1671-4229(2015)05-0009-04

一种减少泰勒公式计算误差的数值方法

邵任翔, 万 丽, 邓小成

(广州大学 a. 数学与信息科学学院; b. 数学与交叉科学广东普通高校重点实验室, 广东 广州 510006)

摘 要: 利用泰勒公式计算某些无理数的近似值的时候,经常会把它分解为一些有理分数(这些分数可以是正数,也可以是负数)之和,然后把这些分数转化为有限小数.在分数转化为小数的时候,有些分数的转化是没有误差的,有些有误差.文章分析了这些误差产生的原因,以及怎样减少这些误差.

关键词: 泰勒公式; 数值计算; 误差分析

中图分类号: O 242.2　　**文献标志码:** A

0 引 言

泰勒公式[1]在数值计算中扮演着重要角色.通过泰勒公式进行数值计算,产生的误差有两个原因,一个原因在于舍弃了余项,另一个原因在于每项进行了近似计算,产生了舍入误差,也就是由分数通过除法(四舍五入)转化为有限小数所产生的误差.文献[2-4]讨论了余项所产生的误差,而文献[5-7]讨论了怎样改变余项以减少余项所产生的误差.对于怎样控制舍入误差,讨论的论文较少,本文主要讨论怎样减少舍入误差.

比如通过泰勒公式计算 e 的近似值(要求误差小于 10^{-6}),下面看一般教科书[8]的做法:

已知 e^x 的麦克劳林公式为 $e^x = 1 + x + \frac{x}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$,

令 $x=1$,得 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}(0<\theta<1)$.

由于 $0<e^{\theta}<e<3$,欲使余项 $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<10^{-6}$,由计算可知 n 至少需要为 9.但是,如果考虑分数转化为有限小数,必须考虑舍入误差.本例 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{9!}$,若每项四舍五入到小数点后 6 位,则各项舍入误差之和不超过 $6 \times 0.5 \times 10^{-6}$,总误差为 $6 \times 0.5 \times 10^{-6} + 10^{-6}$,这时不能保证误差不超过 10^{-6}.所以,每项必须四舍五入到小数点后 7 位(这样每项的舍入误差控制在 0.5×10^{-7}),并且余项 $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ 必须小于 10^{-7},则 n 至少要取 10.总误差为 $7 \times 0.5 \times 10^{-7} + 10^{-7} < 10^{-6}$,可以达到要求.$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$,前面 3 项并没有产生误差,后面 7 项中的每项都产生了误差.本文讨论怎样控制舍入误差.

1 预备知识

定义 1 如果一个分数能用有限小数精确表示,则把这个分数称为有限分数,如 1/2、2/5 等等.

定义 2 如果一个分数只能用循环小数精确表示(有限小数只能表示它的近似值),则把这个分数称为无限分数.比如 1/3、2/7 等等.

定义 3 如果一个有限分数的小数点后的总位数在问题所要求的精度范围之内,那么这个有限分数称为可控有限分数,否则称为不可控有限分数.

不可控有限分数虽然可以用有限小数表示,

收稿日期: 2015-03-27; **修回日期:** 2015-04-24

基金项目: 广州市教育局科技计划资助项目(2012A022)

作者简介: 邵任翔(1976-),男,讲师. E-mail: shaorenxiang@163.com

但是精确表示的代价可能太大,需要超过精度范围的位数才可以精确表达.比如上例中误差要求小于 10^{-6},求和分数的项数为7,每项四舍五入到小数点后7位,这样总的舍入误差可以控制在 $7\times 0.5\times 10^{-7}$.本例中的分数如果至多只需要用小数点后面7位数字精确表示,那么这个分数就叫可控有限分数.如果求和的项数较多,为了减少总的舍入误差,则需要提高每个分数的计算精度.一个有限分数是否可控,需要根据具体问题提前给出.因此,一个有限分数是否可控依赖于问题的误差限以及求和的项数.

定义4 设 a、b 是2个无限分数,如果 $a+b$ 是一个有限分数,那么称 a 是 b 的对偶无限分数,或者 b 是 a 的对偶无限分数.显然,一个无限分数的对偶分数不唯一.

定义5 设 a、b 是两个不可控有限分数,如果 $a+b$ 是一个可控有限分数,则称 a 是 b 的对偶不可控有限分数,或者 b 是 a 的对偶不可控有限分数.显然,一个不可控有限分数的对偶分数不唯一.

定义6 2或者5这样的素因子称为平凡素因子,其它素因子称为不平凡素因子.

定义7 分子与分母互质的分数称为既约分数或者最简分数[9].

定理1 一个最简分数为有限分数的充要条件是分母只含有2或5这样平凡的素因子.

证明 显然,一个最简分数 $\frac{q}{p}$ 是否为有限分数和分子 q 没有关系,只和分母 p 有关.将分母因数分解以后,$p=p_1p_2.\ .\ .\ .\ .\ p_n$,素数的倒数只有 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{5}$ 是有限分数,其它素数的倒数全是无限分数.所以 $\frac{1}{p_1p_2\cdots\cdots p_n}$ 是一个有限分数,当且仅当 $p_i=2$ 或 $5(i=1,2\cdots n)$.

定理2 有限分数与有限分数之和还是有限分数.

证明 由于有限分数转化为有限小数以后,相加后还是有限小数,所以也就是有限分数.

推论1 无限分数与有限分数之和一定是无限分数.

证明 反证法,假设无限分数与有限分数之和是有限分数,则无限分数可以写成两个有限分数之差,这与定理2矛盾,所以推论1成立.

需要注意的是,无限分数与无限分数之和可能是无限分数也可能是有限分数.比如 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$,这两个无限分数的和为有限分数.又比如 $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$,这两个无限分数的和为无限分数.

2 基本方法

舍入误差的控制有3种方法:

(1)增加除法的计算精度,也就是增加四舍五入到小数点后面的位数.这种方法在一般的高等数学或者数值计算[1]的书籍中都可以找到.

(2)每项分数先不进行数值运算,而是对分数的和运算进行符号运算,对最后的结果进行数值运算.这种运算的复杂性会随着计算的项数增加而增加,所以不大适合项数很多的运算.这种方法在符号计算或者计算机代数[10]类书籍中有讨论.

(3)寻找不可控有限分数的对偶分数,以及无限分数的对偶分数,然后调整运算的次序,挑出一些分数,让这些分数求和,使它们的和没有误差或者减少误差.

本文重点介绍第3种方法.

有限分数和无限分数之和一定是无限分数.3个或者3个以上的无限分数之和是否为有限分数,情况较复杂,这里暂不讨论.本文只关心2个无限分数(正数或者负数)是否能够凑成一个有限分数,然后判断这个有限分数是否为可控有限分数.2个不可控有限分数能否凑成可控有限分数.

第1步将分数分为3类(见图1):第1类是可控有限分数;第2类是不可控有限分数;第3类是无限分数.2个无限分数组合有以上3种可能.如果可以组合成可控有限分数,则将其和值放入第1类.如果可以组合成不可控有限分数,则将其和值放入第2类.2个不可控有限分数组合有2种可能,如果可以组合成可控有限分数,则将其求和放入第1类.然后将可控有限分数、没有组合的不可控有限分数、没有组合的无限分数转化成小数.最后一步求和.

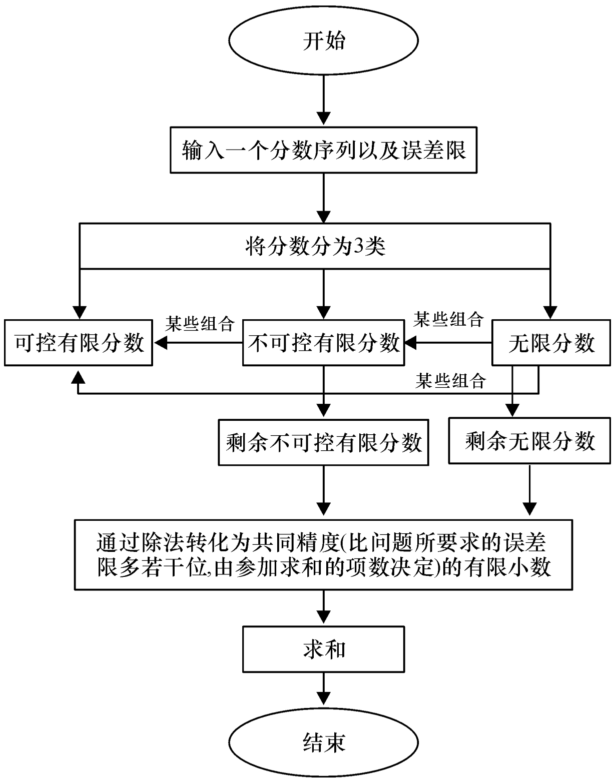

图 1　计算流程图

Fig. 1　The calculation flow chart

现以一个简单例子说明该算法的计算效果: 计算 ln1.2 的值,使误差不超过 10^{-4}.

解　先写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带拉格朗日型余项的麦克劳林展开式:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$ (ξ 在 0 与 x 之间).

令 $x = 0.2$,要使

$$|R_n(x)| = \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} < (0.2)^{n+1} \leqslant 10^{-4} (0 < \xi < 0.2).$$

取 $n = 5$ 可以满足上面的不等式,但是由于舍入误差的影响,必须取 $n = 6$ 才可以保证总误差小于 10^{-4}. 因此,

$$\ln 1.2 \approx 0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4} + \frac{0.2^5}{5} - \frac{0.2^6}{6} \approx \tag{1}$$

$$0.2 - 0.02 + 0.002\ 67 - 0.000\ 40 + 0.000\ 06 - 0.000\ 01 = 0.182\ 32 \text{ 其误差} |R_6| < 10^{-4} \tag{2}$$

上面是一般教科书的做法. 笔者希望分数数项和值式(1) 由小数数项和式(2) 表示没有误差,或者降低误差. 在式(1) 向式(2) 转化的过程中,只有 $\frac{0.2^3}{3} \approx 0.002\ 67$, $\frac{0.2^6}{6} \approx 0.000\ 01$ 产生了误差,而其他项转化为小数的时候并没有产生误差. 但是 $\frac{0.2^3}{3}$ 在分数序列中的对偶分数就是 $-\frac{0.2^6}{6}$, $\frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^6}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{83}{5^6} = 0.002\ 656$,它们在向小数转化的过程中没有出现误差. 因此,式(1) 中的约等号可以改为等号,也就是

$$0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4} + \frac{0.2^5}{5} - \frac{0.2^6}{6} = 0.2 - 0.02 - 0.000\ 40 + 0.000\ 06 + 0.002\ 656 \tag{3}$$

或者说,对于某些分数数项求和,即使以小数表示,也可以不产生舍入误差.

3　结　论

一般数值方法的优点在于有很好的统一性,易于操作. 它较好地考虑了问题的普遍性,但往往忽略了问题的特殊性. 文中提到的数值方法不会对每一个问题都有减少误差的作用,但是只要生成了新的有限分数,就可以减少数值计算的误差. 怎样判断一个分数数项和是否为有限分数以及怎样有效地组合某些无限分数? 2 个无限分数的和是一个有限分数的充要条件是什么? 是否有一个有效的算法存在? 这些问题都需要进一步研究.

致谢　感谢上海数学中心的项征御老师对本论文的贡献.

参考文献:

[1]　华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京: 高等教育出版社,2011: 51-59.
Department of Mathematics, East China Normal University. Mathematical analysis [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011: 51-59.

[2] 安世全.泰勒公式及其应用[J].高等数学研究,2011(9):26-28.
AN S Q. Taylor formula and its application[J]. Stud Coll Math, 2011(9):26-28.

[3] 孔珊珊.泰勒公式在数值计算中的应用[J].济宁学院学报,2011(6):70-72.
KONG S S. Application of Taylor formula in numerical computation[J]. J Jining Univ, 2011(6):70-72.

[4] 朱永生,刘莉.基于泰勒公式应用的几个问题[J].长春师范学院学报,2006(8):30-32.
ZHU Y S,LIU L. Some problems of Taylor formula's applications[J]. J Changchun Norm Univ, 2006(8):30-32.

[5] ANASTASSIOUA G A, DRAGOMIRB S S. On some estimates of the remainder in Taylor's formula[J]. J Math Anal Appl, 2001,263(1):246-263.

[6] AHMAD E A, OMAR A A, MOHAMMED A S. A general form of the generalized Taylor's formula with some applications[J]. Appl Math Comp,256(1):851-859.

[7] PE„ARI, J E, TUDOR G, CRSTICI B,et al. Note on Taylor's formula and some applications[J]. J Appr Thor,51(1):47-53.

[8] 杨一都.数值计算方法[M].北京:高等教育出版社,2008:77-80.
YANG Y D. Numerical calculation method[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008:77-80.

[9] 维基百科. http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%80%E7%AE%80%E5%88%86%E6%95%B0. Wikipedia.[EB/OL] [2015-04-22].

[10] 王东明,夏壁灿,李子明.计算机代数[M].北京:清华大学出版社,2007:34-45.
WANG D M,XIA B C,LI Z M. Computer algebra[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007:34-45.

The improvement of numerical calculation based on Taylor formula

SHAO Ren-xiang, WAN Li, DENG Xiao-chen

(a. School of Mathematics and Information Sciences; b. Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou University,Guangzhou 510006, China)

Abstract: The approximate value calculation of some irrational number by using the Taylor formula is often decomposed into the sum of some rational fraction(These fractions are positive number, or not). Then every fraction is put into a finite decimal. When every fraction transforms into finite decimal, some fractions of the transformation have no error, some have error. This paper analyzes the causes of errors, and how to reduce the errors.

Key words: Taylor formula; numerical calculation; error analysis

【责任编辑:周 全】