泰勒公式及其应用*

安世全 (重庆邮电学院 计算机学院, 400065)

在高等数学教材中,一般只讲泰勒公式及几个常用函数的麦克劳林公式,对其在解题中的应用介绍很少。但泰勒公式在解决一些问题中确实有十分重要的作用,下面举例做些介绍,供读者参考。

1. 计算极限

例 1 确定 a,b 使 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$

因当 $x\to\infty$ 时,

$$\sqrt{2x^2+4x-1}=\sqrt{2}x\sqrt{1+(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2})}=\sqrt{2}x(1+\frac{1}{2}(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2})+0(\frac{1}{x^2}))$$

$$\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b=(\sqrt{2}-a)x+(\sqrt{2}-b)+0(\frac{1}{x}).$$

由题设,得 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$.

例 2 证明 $\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi$

证 已知

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n},\ 0<\theta_n<1,\quad e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}},\ 0<\theta_{n+1}<1$$

两式相减,有 $\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}}$,即 $e^{\theta_n}=1+\frac{1}{n+2}e^{\theta_{n+1}}$,令 $n\to\infty$ 得

$\lim_{x\to\infty}e^{\theta_n}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n+2}e^{\theta_{n+1}}=1$,即 $\lim_{x\to\infty}\theta_n=0$ 又

$$2\pi e n!=2\pi(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n})n!=2k\pi+\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n},$$

其中 $k=(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!})n!$,则 $n\sin(2\pi e n!)=n\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}=2\pi\frac{n}{n+1}e^{\theta_n}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n})}{\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}}$。

于是 $\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi$

2. 证明中值公式

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导,试证:存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3。$$

证 设 k 为使下式成立的实数:

$$f(b)-f(a)-f'(\frac{a+b}{2})(b-a)-\frac{1}{24}k(b-a)^3=0$$

令 $g(x)=f(x)-f(a)-f'(\frac{a+x}{2})(x-a)-\frac{1}{24}k(x-a)^3$,则 $g(a)=g(b)=0$ 根据罗尔定理,

* 收稿日期: 2001-02-26

$\exists \in (a,b)$使 $g'(\mathrm{a})=0$,即

$$f'(\mathrm{a})=f'(\frac{a+\mathrm{a}}{2})+f''(\frac{a+\mathrm{a}}{2})(\frac{\mathrm{a}-a}{2})+\frac{1}{2}k(\frac{\mathrm{a}-a}{2})^2$$

而将 $f'(\mathrm{a})$在$\frac{a+\mathrm{a}}{2}$展开有:

$$f'(\mathrm{a})=f'(\frac{a+\mathrm{a}}{2})+f''(\frac{a+\mathrm{a}}{2})(\frac{\mathrm{a}-a}{2})+\frac{1}{2}f'''(c)(\frac{\mathrm{a}-a}{2})^2。$$

其中 $c\in(\frac{a+\mathrm{a}}{2},\mathrm{a})\subset(a,b)$比较得 $k=f'''(c)$,其中 $c\in(a,b)$。

3. 导数中值的估计

例 4　设函数 $f(x)$二阶可导,$f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$,试证 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$。

证　因 $f(x)$在 $[0,1]$上连续,即有最大和最小值。又因 $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$,故最大值在 $(0,1)$内部取得,所以 $\exists\, x_0\in(0,1)$使 $f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$。由费马引理,得 $f'(x_0)=0$,在 $x=x_0$点按泰勒公式展开,$\exists\ \mathrm{a},\mathrm{Y}\in(0,1)$使得

$$0=f(0)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{a})(0-x_0)^2=2+\frac{1}{2}f''(\mathrm{a})x_0^2$$

$$0=f(1)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{Z})(1-x_0)^2=2+\frac{1}{2}f''(\mathrm{Z})(1-x_0)^2$$

因此

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant\min\{f''(\mathrm{a}),f''(\mathrm{Z})\}=\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}。$$

而 $x_0\in[\frac{1}{2},1]$时,上式右端等于 $-\frac{4}{(1-x_0)^2}\leqslant -16$; $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$时, $\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}=-\frac{4}{x_0^2}\leqslant -16$。所以 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$。

例 5　设函数 $f(x)$在 $[a,b]$上二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,试证: 存在 $\mathrm{a}\in(a,b)$使

$$|f''(\mathrm{a})|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证　由泰勒公式,将 $f(\frac{a+b}{2})$分别在 a,b点展开,即 $\exists\ \mathrm{Y},\mathrm{Z}$: $a<\mathrm{Y}<\frac{a+b}{2}<\mathrm{Z}<b$使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{Y})(\frac{b-a}{2})^2,\ f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{Z})(\frac{b-a}{2})^2。$$

相减得 $f(b)-f(a)+\frac{1}{8}[f''(\mathrm{Z})-f''(\mathrm{Y})](b-a)^2=0$,故

$$\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{2}(|f''(\mathrm{Y})|+|f''(\mathrm{Z})|)\leqslant|f''(\mathrm{a})|,其中\ \mathrm{a}=\begin{cases}\mathrm{Y},当|f(\mathrm{Y})|\geqslant|f''(\mathrm{Z})|时\\ \mathrm{Z},当|f''(\mathrm{Y})|<|f''(\mathrm{Z})|时\end{cases}$$

4. 关于界的估计

例 6　设函数 $f(x)$在 $[0,1]$上二阶可导,当 $0\leqslant x\leqslant 1$时,$|f(x)|<1$,$|f''(x)|<2$。试证: 当 $0\leqslant x\leqslant 1$时,$|f'(x)|\leqslant 3$。

证　因

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{a})(1-x)^2,\ f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{Z})(-x)^2$$

所以

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\mathrm{a})(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\mathrm{Z})x^2,$$

$|f'(x)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\alpha)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\zeta)|x^2\leqslant 2+(1-x)^2+x^2\leqslant 3$

例 7 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上三阶可导,并且 $f(x)$和 $f'''(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上有界,证明: $f'(x)$和 $f''(x)$也在 $(-\infty,+\infty)$上有界。

证 因 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)h^3$,取 $h=\pm 1$得

$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)$, $f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{3!}f'''(\zeta)$

两式相减得 $f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\alpha)+f'''(\zeta)]$,所以

$$2|f'(x)|\leqslant 2M_0+M_3,\ \forall x\in(-\infty,+\infty),$$

其中 $M_k=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|$, $(k=0,3)$。同理两式相加得

$$|f''(x)|\leqslant 4M_0+\frac{1}{3}M_3,\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

故 $f'(x)$和 $f''(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上有界。

(上接第 14页)

参 考 文 献

1 梁宗巨. 世界数学史简编. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1980年, 157页

2 [苏] И. И. 普里瓦诺夫,北京大学数学力学系分析教研组译. 复变函数引论. 上海: 商务印务馆, 1953年,上册, 78页

3 王昆扬. 简明数学分析. 北京: 高等教育出版社, 2001年 7月, 37页

(上接第 16页)

° 开放题进入高等数学教学,我们应该改变传统的评价方法与标准,这里应更重视问题产生解决的过程,重视学生主动探索思考的过程,重视学生合作协助的过程,而不看重其结果。从本文所提的开放题来看,不论学生提出的条件如何,强还是弱,只要他在思考,在参与,就应该对他进行鼓励,作出良好的评价。

(上接第 25页)

参 考 文 献

1 复旦大学数学系陈传璋,金福临,朱学炎,欧阳光中. 数学分析(第二版),上册. 北京: 高等教育出版社, 1983, 226-227

2 华东师范大学数学系. 数学分析(第二版),上册. 北京: 高等教育出版社, 1991, 167-169

3 何琛,史济怀,徐森林. 数学分析,第一册. 北京: 高等教育出版社, 1983, 192-193

4 常庚哲,史济怀. 数学分析教程,第一册. 南京: 江苏教育出版社, 1998, 220-221

5 李成章,黄玉民. 数学分析,上册. 北京: 科学出版社, 1999, 146-149, 179

6 张筑生,数学分析新讲,第二册. 北京: 北京大学出版社, 1990, 5-10

7 张一龙. 指数函数 e^x 的特性及其应用. 高等数学研究. 2000,第 3卷(第 2期), 26-27

8 李世金,赵洁. 数学分析解题方法 600例. 长春: 东北师范大学出版社, 1992, 214-215, 208-210

9 华东师范大学数学系郑英元,毛羽辉,宋国栋. 数学分析习题课教程,上册. 北京: 高等教育出版社, 1991, 96-97

10 贾建华,王克芬. 微积分证明方法初析. 天津: 南开大学出版社, 1989, 160-163