基于泰勒公式应用的几个问题

朱永生，刘　莉
(哈尔滨师范大学呼兰学院数学系，黑龙江哈尔滨　150500)

[摘　要] 探讨了泰勒公式在定义某些初等函数，讨论某些复杂级数的敛散性，求某些复合函数的极限，对某些定积分进行近似计算，求某些微分方程的通解几个方面的一些应用。

[关键词] 泰勒公式；泰勒级数；非初等函数；极限；定积分
[中图分类号] O172　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1008－178X(2006)04－0030-03

泰勒公式在近似计算某些函数值，定义某些初等函数等方面具有重要作用，本文对以往的成果加以探讨，进一步说明了泰勒公式的应用。

1　定义某些非初等函数

若函数$f(x)$在 R（或某个区间）上连续，则函数$f(x)$在 R 上存在原函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，$x\in R$，而这个原函数 $F(x)$不一定可用初等函数表示，如此仿佛陷入了困境。事实上，若 $f(x)$可运用泰勒公式展成幂级数，则 $F(x)$可表示为幂级数的和函数形式。

例如：函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 R 上连续，因而它在 R 上存在原函数，但它的原函数 $F(x)$是非初等函数，于是可采用下述方法：

由泰勒公式知，$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots$，由于它在任意闭区间上都一致收敛，于是 $\forall x\in R$，它的原函数

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right\}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

2　讨论某些复杂级数的敛散性

易得下述两个结论(证明从略)：

定理 1　若 $u_n>0, v_n>0$ 且 $u_n\sim v_n(n\to\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散性。

定理 2　若$\sum_{n\to\infty}u_n$ 条件收敛，而$\sum_{n\to\infty}v_n$ 绝对收敛，则$\sum_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)$条件收敛。

利用上述两个定理和泰勒公式可以很方便地讨论一些复杂级数的敛散性。

例 1：判别$\sum_{n\to\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$，$(p>0)$的敛散性。

解：此题难度很大，用其他方法几乎无法讨论其敛散性，若用泰勒公式作工具则能轻而易举地得出结论。由泰勒公式得 $\ln(1+x)$的一阶展开式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^2}$，$\xi$ 在 0 与 x 之间，从而

$\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}(1+\xi_n)^2}$，$\xi_n$ 在 0 与$\frac{(-1)^n}{n^p}$之间，

[收稿日期] 2006－04－23
[作者简介] 朱永生（1973－），男，黑龙江哈尔滨人，哈尔滨师范大学呼兰学院数学系讲师，东北师范大学硕士研究生，从事应用数学研究。

于是$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}(1+\xi_n)^2}\right]$。

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$当$0<p\leq 1$时条件收敛，当$p>1$时绝对收敛，又由$0<\frac{1}{2n^{2p}(1+\xi_n)^2}\sim\frac{1}{2n^{2p}}(n\to\infty)$知，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}(1+\xi_n)^2}$，当$p>\frac{1}{2}$时收敛，当$0<p\leq\frac{1}{2}$时发散。所以$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$，当$0<p\leq\frac{1}{2}$时发散，当$\frac{1}{2}<p\leq 1$时条件收敛，当$p>1$时绝对收敛。

3 求某些复合函数的极限

某些复合函数的极限用通常的解法特别复杂或者根本无法求解，而如果考虑运用泰勒公式写出复合函数中包含的某些函数的前几项时，问题则变得豁然开朗了。

例2. 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

解：此题如果运用洛必达法则求解，则变得极其麻烦，因而采用下述解法。

由泰勒公式知 $\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$，$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$

又因为当$x\to 0$时，$\sin x^2\sim x^2$，从而

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[1-\frac{x^2}{2!}-1-x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

例3. 求极限$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

解：由泰勒公式知 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

则 $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right]=\frac{1}{2}$

4 对某些定积分进行近似计算

能够精确计算定积分的函数只是大量函数中很少的一部分，事实上，在实际计算定积分时大量采用的是近似计算的方法，而在这其中运用泰勒公式对某些函数的定积分进行近似计算不失为一种很好的方法。

例4. 求正弦曲线$y=\sin x(0\leq x\leq\pi)$的弧长，并精确到0.01。

解：弧长 $s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x-\cdots\right)dx$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!\cdot n!}$（吉米多维奇数学分析习题题解第2290题），则有

$$s=2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot 2!}{2^4}-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!\cdot 3!}-\cdots)=\pi(1+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{5}{256}-\cdots)$$

如取上述写出的诸项近似表示弧长s的值，则其误差

$0<\Delta<\frac{3\cdot 5\cdot 2\pi}{4!\cdot 2^4}\cdot\frac{8!}{2^9\cdot 4!\cdot 4!}<\frac{1}{10^2}$ 于是 $s\approx 3.14(1+0.25-0.05+0.02)\approx 3.83$。

5　求某些微分方程的解

微分方程的解可能是初等函数或非初等函数，如微分方程

$$y''+r(x)y'+s(x)y=0 \tag{1}$$

的求解问题便是如此，因而解这类方程我们可以设想其解 $y(x)$可以表示成泰勒级数的形式，进一步，我们可以大胆设想可以表示成更为一般的幂级数形式，从而得出了解这类方程的一种重要方法。事实上，若 $r(x)$、$s(x)$在某点 x_0 的邻域 D：$|x-x_0|<R$ 内可以展开关于$(x-x_0)$的泰勒级数（或幂级数），则方程(1)的解在 x_0 的邻域 D 内也能展成关于$(x-x_0)$的泰勒级数（或幂级数），即 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$。

例5. 解微分方程 $y''+xy'+y=0$

解：显然 $r(x)=x$, $s(x)=1$ 可在 $x_0=0$ 的邻域内展成泰勒级数，故原方程有形如

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{2}$$

的幂级数解。将(2)及其导数代入原方程，得$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$

即$(2a_2+a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}]x^{n-2}=0$，令 x 的同次幂系数为零，

得 $2a_2+a_0=0$, $3\cdot 2a_3+2a_1=0$, $\cdots$, $n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}=0(n\geq 4)$

从而　$a_2=-\dfrac{a_0}{2}$, $a_3=-\dfrac{a_1}{3}$, $\cdots$, $a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n}$。

即有　$a_{2n}=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2^n\cdot n!}a_0$, $a_{2n+1}=\dfrac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdots\cdots(2n+1)}a_1\ (n\geq 1)$

所以其通解为　$y(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^n+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdots\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$

即　$y(x)=a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdots\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$。

[参 考 文 献]

[1] 庄　万. 常微分方程习题解[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004，342－348.

[2] 刘玉琏. 数学分析讲义学习指导书[M]. 北京：高等教育出版社，1987，69－73.

[3] 费定晖，同学圣编译. 吉米多维奇数学分析习题集题解(二)[M]. 济南：山东科学技术出版社，1999，383－385.

[4] 龚冬保. 高等数学典型题[M]. 西安：西安交通大学出版社，2003，271－277.

[5] 杨丽. 有关级数敛散性的几个问题[J]. 锦州师范学院学报，2003，24，(2)：63－64

Some Problems of Taylor Formula's Applications

ZHU Yong－Sheng　LIU Li

(Department of Maths, Hulan Teachers' College, Harbin Normal University, Harbin 150500, China)

Abstract: Several aspects of Taylor formula's applications are discussed in this article. The author emphasizes that they are applied to define some non－elementary functions, talks about some complicated series' convergence property, studies some composite functions' limit, estimates some functions' integral, and explores the general integral of some differential equations in this paper.

Key words: Taylor formula; Taylor series; elementary function; limit; integral.