

Pràctica 6. Sistemes d'equacions

Equacions Diferencials i Modelització I

13 de desembre de 2022

1 Introducció a sistemes

Quan els problemes d'equacions diferencials no tenen solució analítica, aleshores entra en joc la TEORIA QUALITATIVA i el càlcul numèric.

0) Dibuixar el retrat de fase al seu voltant del punt singular $(0, 0)$ dels següents sistemes:

1. a) $x' = x \quad y' = 2y$.

2. b) $x' = -x \quad y' = -2y$.

3. c) $x' = x \quad y' = -y$.

4. d) $x' = -y \quad y' = 2x + y$.

5. e) $x' = -y \quad y' = x$.

0.ex) Exercicis a entregar:

1. a) El punt singular del sistema $x' = x \quad y' = y$ s'anomena un node estrella repulsor. Per què creus que es diu així?

2. El punt singular del sistema $x' = x + y \quad y' = y$ s'anomena un node d'una sola direcció repulsor. Per què creus que es diu així? Quina diferència hi ha entre el Jacobià d'aquest sistema i el del anterior?

3. b) Com ha de ser el sistema que doni un focus atractor? Dona un exemple.

Aquests són tots els diferents tipus de punts singulars simples. Després hi ha una infinitat de punts múltiples que poden tenir retrats de fase al seu voltant molt més complicats.

1) Calcular els punts singulars i dibuixar el retrat de fase al seu voltant dels següents problemes:

1. a) $x' = 3x + 2y \quad y' = x - y$.

2. b) $x' = x + 2y - 1 \quad y' = x + 3y + 2$.

1.ex) Calcular els punts singulars i dibuixar el retrat de fase al seu voltant dels següents problemes:

1. a) $x' = 5x + 9y - 1 \quad y' = -x - y + 2$.

2. b) $x' = x + 2y - 1 \quad y' = -4x - 3y + 1$.

2) Calcular els punts singulars i dibuixar el retrat de fase al seu voltant dels següents problemes:

1. $x' = y(x + 2y - 2) \quad y' = x(-4x - 3y + 1)$.

2. $x' = y + x^2 \quad y' = -x - x^2 - y^2$.

2.ex) Calcular els punts singulars i dibuixar el retrat de fase al seu voltant del problema:

1. $x' = -y + 2xy + y^2 \quad y' = x + x^2 + 2xy - y^2$.

Aquest problema té tres selles, així que haureu d'ampliar el programa que us he donat.

3) Calcular els punts singulars i dibuixar el retrat de fase al seu voltant de la família de sistemes:

$$x' = -\alpha + x^2 + 2y^2 \quad y' = y + y^2.$$

Feu-ho per $\alpha = 1$, $\alpha = 1/10$ i $\alpha = -1/10$.

3.ex) Que creieu que passarà amb $\alpha = 0$?

4) Calcular els punts singulars, dibuixar el retrat de fase i interpreteu els resultats del model predador-presa següent:

$$\begin{aligned} x' &= -2x^2 - 3xy + x \\ y' &= 3xy - y. \end{aligned} \tag{1}$$

5) Calcular els punts singulars, dibuixar el retrat de fase i interpreteu els resultats del model predador-presa següent:

$$\begin{aligned} x' &= -2x^2 - 3xy + x \\ y' &= 3xy - 4y. \end{aligned} \tag{2}$$

EXERCICI: Feu un dels problemes 6 a 8.

6) Calcular els punts singulars, dibuixar el retrat de fase i interpreteu els resultats del model predador-presa següent:

$$\begin{aligned} x' &= x \left(-xy - \frac{5x}{4} - 4y^2 + \frac{5y}{4} + \frac{5}{4} \right) \\ y' &= y \left(\frac{33x^2}{5} + \frac{7xy}{5} - \frac{19x}{8} - y^2 + \frac{19y}{8} - \frac{7}{4} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Aquest problema, apart dels punts singulars trivials que podeu trobar vosaltres, té un únic punt singular en el primer quadrant que és $(1/2, 1/2)$.

7) Calcular els punts singulars, dibuixar el retrat de fase i interpreteu els resultats del model predador-presa següent:

$$\begin{aligned} x' &= x \left(-\frac{13x^2}{188} + \frac{3xy}{8} + \frac{399x}{752} - \frac{y^2}{4} - \frac{315y}{752} - \frac{63}{376} \right) \\ y' &= y \left(-\frac{12x^2}{47} + \frac{19xy}{32} + \frac{7x}{94} - \frac{y^2}{4} + \frac{77y}{752} - \frac{399}{1504} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Aquest problema, apart dels punts singulars trivials que podeu trobar vosaltres, té un únic punt singular en el primer quadrant que és $(1, 1)$.

8) Calcular els punts singulars, dibuixar el retrat de fase i interpreteu els resultats del model predador-presa següent:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{12} (36 - 20\sqrt{3}) x^2 - \frac{5xy}{4} + \frac{1}{12} (54 - 30\sqrt{3}) x \\ y' &= \frac{1}{6} (18 + 2\sqrt{3}) xy - \frac{y^2}{2} - 2\sqrt{3}y. \end{aligned} \tag{5}$$

NOM DEL FITXER: NIU-6.ipynb

DATA D'ENTREGA: 8 de gener. Es pot fer en grups de fins a 3 persones.