Pràctica 2. Llei del Refredament

Equacions Diferencials i modelització I

5 d'octubre de 2021

1 El problema del café

Estem prenent un café a la terrassa d'un bar de la rambla de Barcelona el dia de Tots Sants. La temperatura exterior és de $T_e = 15^oC$. Casualment portem un termòmetre de butxaca i mesurem la temperatura del café cada 30 segons. Volem saber quant de temps hem d'esperar per a prendre'l sense cremar-nos, per exemple, a 35^oC. La taula següent mostra la temperatura, $T(t)$, en graus centígrads.

t	$T(t)$
0	85
30	73
60	64
90	58

És natural pensar que la temperatura decreix fins a la temperatura a l'exterior del local, que si ja està a aquesta temperatura es manté constant i que s'escalfa si és menor. Per tant, podem pensar en un model que depengui de la diferència $T(t) - T_e$ i plantejar una equació diferencial del tipus

$$T' = f(T - T_e).$$

La condició de temperatura constant, si inicialment tenim $T(0) = T_e$, és equivalent a prendre $f(0) = 0$. El model més senzill que respecta aquesta estructura és el següent:

$$T' = -k(T - T_e),\ T(0) = T_0,$$

on la constant k depèn del medi, del líquid i la tassa (forma i material) del nostre experiment. No és senzill de calcular la k per molt be que coneguem els materials i formes d'aquests elements. Per tant, és millor calcular la k a partir d'algunes observacions. És natural prendre la k positiva. Aquesta llei es coneix com la *llei del refredament de Newton*.

- Aproxima el valor de $T'(t)$ per als valors de la taula anterior i omple la taula següent:

t	$T(t)$	$T'(t)$	$-\frac{T'(t)}{T(t)-T_e}$
0	85		
30	73		
60	64		
90	58		

- Fes la mitjana dels valors de la última columna per a aproximar k.

- Troba la solució explícita del model i fes la gràfica.
- Donat que la solució no sembla massa accurada, busca diferents maneres de calcular la constant k i escolleix la que dongui uns resultats més acurats a les observacions.
- Demostra que si $T(0) \neq T_e$ la temperatura tendeix a T_e de manera monòtona.
- Respecta aquesta llei les afirmacions efectuades anteriorment?
- Resol l'equació plantejada inicialment per a saber quina és la temperatura del café al cap de 5 minuts.
- Quant de temps ha de passar per a poder-nos-el prendre a la temperatura indicada a l'inici?

2 El problema de mantenir el café calent

Ara volem mantenir el café a una temperatura de més de 30^oC almenys durant els primers 10 minuts. Triant el model anterior podríem aconseguir fer això triant un altre model de tassa de manera que el valor de k ens ho permeti.

- Quin és aquest valor de k?

Si no podem canviar de tassa llavors es pot pensar en posar la tassa sobre un escalfador que dóna escalfor de manera constant. Un model senzill d'aquest fenomen és

$$T' = q - k(T - T_e),\ T(0) = T_0.$$

on q denota la font de calor constant. En aquest model:

- Quin és el mínim valor de q tal que als 10 minuts ens podem prendre el café a 30^oC?
- Quin és el mínim valor de q que ens manté el café sempre per sobre de 30^oC? És el mateix que el de la pregunta anterior?

3 El problema del café amb gel

En el model de la Secció 2 s'ha pensat un valor de q constant. Si afegim un glaçó de gel al café es pot pensar en un model amb una q no constant, $q(t)$.

- Dóna una funció $q(t)$ que permeti descriure aquest nou model.
- Troba la solució i fes la gràfica de la temperatura del café en funció de t.

4 La temperatura d'un habitatge amb calefacció

En els models anteriors no s'ha tingut en compte la dependència de la temperatura exterior en funció del temps. En el cas d'un habitatge és convenient pensar que T_e és una funció periòdica, per exemple

$$T_e(t) = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} + \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \sin \omega t,$$

on T_{max} i T_{min} són les temperatures màxima i mínima respectivament. A més podem pensar que l'habitatge té una calefacció que dóna escalfor de manera constant. Així el model plantejat és el següent:

$$T' = q - k(T - T_e(t)), \; T(0) = T_0.$$

- A quina hora aproximada correspon el temps $t = 0$?
- Com cal modificar la funció per que les hores t coincideixin amb les hores del dia?
- Troba la solució explícita del model i fes-ne la gràfica si $T_{max} = 20$, $T_{min} = 8$, $q = 0.05$, $k = 1.6$, i $T_0 = 17$. Si pensem que el període d'oscil·lació és de 24 hores llavors es pot prendre $\omega = \pi/12$.
- Dibuixa en el mateix gràfic les diverses solucions variant el valor de T_0. Què succeeix?
- Quin és el valor de T_0 que dóna una solució periòdica? És únic? Demostra que aquest fet no depèn del valor de q, k, T_{max}, T_{min} i T_0.

En general la solució de l'equació plantejada té una part que tendeix a zero, coneguda com a "règim transitori", la resta es coneix com a "règim permanent".

- Demostra que el règim permanent coincideix amb la solució periòdica trobada a l'apartat anterior.
- Quina és l'amplitud màxima que presenta el règim permanent?
- Usant els valors inicials, deixant k lliure, dibuixa l'amplitud màxima en funció de k. Quin és l'efecte sobre l'amplitud d'un augment de l'aïllament tèrmic? Què passa quan k tendeix a zero? I quan tendeix a infinit?
- La temperatura de l'interior i la de l'exterior tenen la mateixa freqüència d'oscil·lació, però estan desfasades. Comprova-ho gràficament per alguns valors de k. Quin és l'angle de desfasament? Com a l'apartat anterior, fes la gràfica del desfasament en funció de k. Què passa quan k tendeix a zero? I quan tendeix a infinit?

5 INFORME: La temperatura d'un habitatge amb calefacció regulada per un temporitzador

Imagina que el teu cap vol fer un estudi de despesa energètica i que et demana un informe que contingui una comparativa entre diversos models d'evolució de la temperatura d'un habitatge o oficina. Els models estudiats fins ara no consideren la dependència en t de la funció q que regula la incorporació de calor. Per tant, cal afegir un model més realista triant un valor de $q(t)$:

$$T' = q(t) - k(T - T_e(t)),\ T(0) = T_0.$$

Planteja i estudia l'evolució de la temperatura a partir de diversos models de temporitzador per la calefacció, per exemple mantenint-la encesa tot el dia, apagant-la només a la nit, engegant-la només les estones que estem a casa, o altres models que se t'acudeixin.

Nota: L'informe ha de tenir les gràfiques i les dades que cregueu necessàries, així com adjuntar els codis que hagueu creat (només els codis que heu utilitzat per a aquesta part, no els de tota la pràctica). Es puntuarà la correció dels càlculs i la optimització dels resultats, així com l'originalitat en els models triats. L'informe s'ha de fer en grups d'un màxim de 3. Si us és més convenient fer-ho sols, cap problema. Al fitxer SAGE que he publicat al Campus Virtual teniu un exemple i exercicis i modls propossats. Mireu al final del fitxer.

Data límit d'entrega: 17 d'octubre de 2020.

6 Recordatoris sobre Sagemath

- Recordeu-vos que heu de declarar totes les variables que fas servir sense valor concret; per exemple si t ha de ser una variable i T una funció, escrivim en sagemath:

```
var(‘‘t’’);function(‘‘T’’)(t)
```

- El punt i coma serveix per separar diferents ordres en una sola línea; no és necessari al final d'una línea.

- Després d'una assignació mathsage no ensenya el resultat; si el vols veure, hem de cridar el resultat pel seu nom com a ordre individual.

- Sagemath pot calcular límits on apareixen altres paràmetres, però de vegades és necessari fer-ne un hipòtesi, com en l'exemple següent. Calculem el límit de e^{-kt} per $t \to \infty$; aleshores en sagemath escrivim

```
assume(k>0); limit(e^(-k*t),t=oo)
```

- Resolem una equació diferencial, sense donar condicions inicials a priori:

```
var(‘‘Te,t,k’’); function(‘‘T’’)(t);
sol=desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te),[T(t),t]);sol
```

  Aleshores, a l'hora de cridar 'sol,' sagemath introdueix una constant

```
_C,
```

  que sabem que podem resoldre en termes de la condició inicial. Ara bé no podem escriure

```
_C
```

en sagemath perquè no el vol reconeixer. El que sí que podem fer, és canviar

```
_C
```

per una altra variable (per exemple u) així:

```
var('u');sol1=sol(Te,u)
```

Ara podem determinar u en termes de la condició inicial $T(0) = T_0$.

```
equ=solve(sol1.subs(t=0)==T0,u);u0=equ[0].rhs()
```

Per tant, la solució particular amb condició inicial $T(0) = T_0$ està donada per

```
sol2=sol1.subs(u=u0);sol2.expand()
```

- Resolem una equació diferencial, donant condicions inicials a priori:

```
sol=desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te),[T,t],[0,T0]);sol.expand()
```

- Si volem veure diferents solucions particulars en una gràfica, es pot fer així:

```
 var(``i'');
sum(plot(sol.subs(k=k0,T0=5*i,Te=15),(t,0,90)) for i in range(0,10))
```