

Pràctica 3. Dissolucions i dipòsits.

Equacions Diferencials i Modelització I

25 d'octubre de 2022

Al llarg de la pràctica suposarem que les dissolucions es fan de manera instantània i que la concentració és homogènia en tot el dipòsit. Així mateix suposarem que els filtres considerats redueixen la concentració de tint però no el volum de líquid que els travessa.

1 Instruccions de Sagemath

Solució explícita, si existeix, d'un sistema d'equacions diferencials, com per exemple:

$$x' = -2x + y + \sin(t), y' = \frac{7}{4}x + y + \cos(t), x(0) = 1, y(0) = 2$$

```
var('t');x=function('x',t);y=function('y',t);
eq1=diff(x,t)==-2*x+y+sin(t);eq2=diff(y,t)==7/4*x+y+cos(t);
sols=desolve_system([eq1,eq2],[x,y],ics=[0,1,2]);show(sols)
```

Per a fer la gràfica de la solució, per components,

```
plot(sols[0].rhs(),t,0,100,color='red',linestyle='-')+
plot(sols[1].rhs(),t,0,100,color='red',linestyle='--');
```

```
plot(sols[1].rhs(),t,0,100,color='red',linestyle=':');
```

o paramètricament

```
parametric_plot((sols[0].rhs(),sols[1].rhs()),(t,0,10),aspect_ratio='automatic')
```

o el camp vectorial de $x' = -2x + y, y' = \frac{7}{4}x + y$:

```
var('x,y');plot_vector_field((-2*x+y,7/4*x+y),(x,-2,2),(y,-2,2))
```

Instruccions per a la solució numèrica d'una equació diferencial:

```
var('t');x=function('x',t);
sol=desolve_rk4(diff(x,t)==0.3*x-0.01*x*(x-1)/2,x,ics=[0,10],step=1,end_points=40);
show(sol)
```

```
points(sol)
desolve_rk4(diff(x,t)==0.3*x-0.01*x*(x-1)/2,x,ics=[0,10],step=1,end_points=40,
output='slope_field');
```

2 Models de dissolucions

En els problemes de barreges es requereix calcular la quantitat d'una substància, $x(t)$, que hi ha en un dipòsit en cada instant de temps t . Usant que la derivada de $x(t)$ respecte de t representa la raó de canvi de la substància existent en el dipòsit, es compleix la relació:

$$\frac{dx}{dt} = \text{Velocitat d'entrada} - \text{Velocitat de sortida}.$$

Donada la velocitat a la que un fluid que conté la substància que entra en el dipòsit i la concentració de la substància, es compleix la relació:

$$\text{Velocitat del flux entrant} \times \text{concentració} = \text{Velocitat d'entrada}.$$

Suposem que la concentració de la substància és homogènia en el dipòsit. Per a calcular la concentració en el dipòsit es divideix la quantitat de substància, $x(t)$, entre el volum del dipòsit en l'instant t , que denotem per $V(t)$. Així tenim que:

$$\text{Velocitat del flux sortint} \times \frac{x(t)}{V(t)} = \text{Velocitat de sortida}.$$

3 Dissolucions d'un producte en un dipòsit

Tenim un dipòsit de 1000 litres de capacitat màxima amb tres aixetes, dues d'entrada i una de sortida. Per una de les aixetes d'entrada fem entrar 6 l/m d'aigua neta i per l'altra 3 l/m de tint. La barreja surt a raó de 9 l/m.

1. Quina és la concentració de tint al dipòsit al cap de 10 minuts, si en el moment d'obrir les aixetes el dipòsit conté 100 litres d'aigua?
2. Fes la gràfica de la concentració al llarg del temps. Cap on tendeix la concentració per a temps prou llargs?
3. Fes el mateix en el cas que el cabal de sortida sigui de 10 l/m. Explica la validesa del model i quant de temps el pots fer servir.

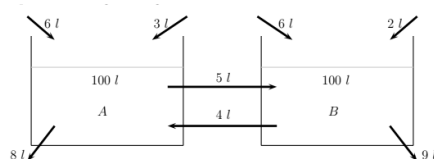
4 Dissolucions d'un producte en dipòsits connectats en cadena

Suposem que tenim dos dipòsits A i B amb dues entrades i una sortida, i amb la mateixa quantitat d'aigua neta inicial. Els cabdals per al dipòsit A són els de l'apartat anterior. La sortida del dipòsit A es connecta amb una de les entrades del dipòsit B, el cabdal de l'altra entrada del dipòsit B és de 2 l/m d'aigua neta i el cabal de sortida és 11 l/m.

1. Quina és la concentració de tint als 10 minuts a cada dipòsit?
2. Fes la gràfica de la concentració al llarg del temps a cada dipòsit. Cap on tendeix la concentració per a temps prou llargs?
3. Fes el mateix en el cas que els cabdals de sortida dels dipòsits A i B siguin de 10 l/m i 16 l/m, respectivament. Explica la validesa del model i quant de temps el pots fer servir.

5 Dissolucions d'un producte en dipòsits interconnectats

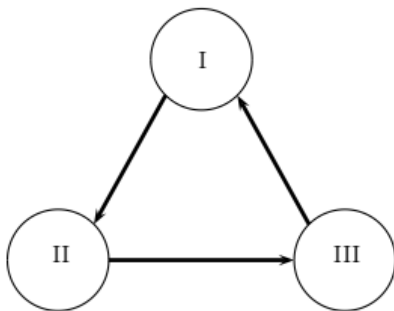
Tenim dos dipòsits A i B segons la figura



1. Si les entrades de 6 l/m corresponen a entrada d'aigua neta:
 - (a) Quina és la concentració de tint als 10 minuts, a cada dipòsit?
 - (b) Fes la gràfica de la concentració al llarg del temps a cada dipòsit.
 - (c) Cap on tendeix la concentració per a temps prou llargs?
2. Respon les mateixes preguntes si ara es posa un filtre al pas de A a B que deixa passar només un 50% del tint i un altre de B a A que deixa passar un 25%.

6 Dissolucions de diversos productes en dipòsits interconnectats

Disposem de tres dipòsits interconnectats com s'indica a la figura.



Els cabals d'intercanvi són de 4 l/m. Inicialment el dipòsit I conté 20 litres de pintura vermella, el II 40 litres de pintura groga i el III 60 de pintura blava.

1. Al cap de 5 minuts quina és la quantitat de pintura en cada dipòsit?
2. Fes la gràfica de l'evolució de les concentracions, de cada pintura, en cada un dels dipòsits.

7 INFORME:

Treballem per una empresa química, i el director industrial us planteja el següent problema: L'empresa produeix en una part de la fàbrica un cert àcid, i com a subproducte tenim un element B de molt baix PH que cal eliminar barrejat en aigua fins a una proporció suficientment baixa com per que sigui inofensiu. Per altra costat, en un altre punt de la fàbrica es produeix un altre element que deixa un residu A de molt alt PH i que també cal eliminar barrejat en aigua. Això provoca un consum d'aigua excessiu, car i insostenible.

Tenim un dipòsit d'aigua a cada zona amb una capacitat màxima de 100 litres on es barreja el residu amb aigua fins a proporcions del 1% per poder-ho abocar al exterior. Quanta aigua necessitem per eliminar 1.2 litres de B i 1 de A per minut? Això no és un problema d'equacions diferencials, és una simple regla de tres, així que ningú es complicitat la vida aquí.

Per tal de reduir el cost en aigua, es proposa connectar els dos dipòsits a un tercer C que reculli la sortida dels dos primers. Els tubs que connecten el dipòsit B amb el C suporten un percentatge d'àcid en aigua del 15%. Els tubs que connecten el dipòsit A amb el C suporten un percentatge de base en aigua del 10%. Volem usar només el mínim possible de litres d'aigua per minut que haurem de repartir segons convingui entre els dos dipòsits A i B . A cadascun d'ells li afegirem el residu (1 del A i 1.2 del B respectivament) i farem sortir de cada dipòsit la mateixa quantitat que entra de manera que el volum dels dipòsits ha de ser constant. La sortida de cada dipòsit no pot superar els marges de resistència dels respectius tubs.

PREGUNTA: Quin és el mínim d'aigua per minut que hem d'utilitzar per que es compleixin les condicions fins a aquest punt? Justifiqueu la resposta.

Un cop arriben al dipòsit C , cada unitat de residu A anul·la DUES unitats de residu B i crea una barreja de aigua i sal que manté el volum. A efectes pràctics, no cal que penseu en que això és converteix en aigua (això complicaria molt l'equació diferencial i només és podria resoldre numèricament). L'únic que necessitem controlar és que la proporció entre la quantitat d'àcid (o base) que no s'ha combinat respecte al total del líquid que hi ha al dipòsit C . Necessitem que aquesta proporció que surt del dipòsit C no sobrepassi el 1% en cap sentit.

El dipòsit C també té un volum màxim de 100 litres i la quantitat que surt d'ell ha de ser igual a la que entra.

Determineu si la quantitat d'aigua per minut que heu contestat en la pregunta anterior és suficient. Si no ho és, determineu la quantitat d'aigua mínima per complir aquesta segona condició i doneu una distribució d'aigua entre els dos dipòsits A i B de manera que la sortida final estigui dins el rang permès en el llarg plaç, és a dir, encara no que es compleixi durant els primers moments.

Si volem que en cap moment s'incompleixi la condició del 1%, quina quantitat d'aigua per minut necessitem?

Proposeu altres maneres de complir amb la condició del 1% sense augmentar la quantitat d'aigua.

No demano resultats exactes. Es poden donar resultats aproximats a partir d'estimacions numèriques, o per aproximació.

NOTA 1: El problema tal i com està plantejat, no necessitaria d'equacions diferencials. Es podria fer com un simple problema de proporcions (sempre en el llarg termini). Però un cop plantejat com a problema en equacions diferencials, això ens permet un munt de possibilitats, com per exemple, controlar les proporcions en cada dipòsit en cada moment, considerar variable el caudal total d'aigua, o les aportacions de residus, o el volum dels dipòsits, o les sortides de cada dipòsit. En fi, una pila de detalls que un problema de proporcions no podria contemplar i que ens permeten adaptar el nostre model a moltes circumstàncies diferents.

NOTA 2: No tinc cap certesa de que el problema plantejat correspongui a un cas real. En qualsevol cas, les unitats i proporcions són inventades.

Nota: L'informe ha de tenir les gràfiques i les dades que cregueu necessàries, així com adjuntar els codis que hagueu creat (només els codis que heu utilitzat per a aquesta part, no els de tota la pràctica). Es puntuarà la correcció dels càlculs i la optimització dels resultats, així com l'originalitat en els models triats. L'informe s'ha de fer en grups d'un màxim de 3. Si us és més convenient fer-ho sols, cap problema.

Data límit d'entrega: 13 de novembre de 2022.

Nom de l'arxiu: NIU-3.ipynb.