

# Pràctica 4. Construcció de models

## Equacions Diferencials i Modelització I

15 de novembre de 2022

### 1 Problemes a modelitzar

- (1) Mostrar que la corba que té la propietat de que totes les seves normals passen per un punt fix, és una circumferència.
- (2) Trobar una corba tal que a cada punt la subtangent sigui igual al doble de l'abscissa (s'anomena la subtangent a  $y/y'$ ).
- (3) La pèrdua de velocitat d'un disc girant dins un líquid és proporcional a la velocitat angular. Trobar la relació si la velocitat ha baixat de 100 r.p.m. a 60 r.p.m., en un minut.
- (4) Es suposa que la pressió d'una columna d'aire vertical en una secció donada depèn només de la pressió de les capes superiors. Trobar la relació entre la pressió i l'altitud si es sap que la pressió al nivell del mar és de 1 Kg./cm<sup>2</sup>, i de 0.94 Kg./cm<sup>2</sup> a 500 metres d'alçada. Indicació: La llei de Marriot diu que la densitat d'un gas és proporcional a la seva pressió. Quina pressió hi ha al cim del Everest?
- (5) Neva amb regularitat. A les 12 hores surten les màquines de treure la neu, que treuen la mateixa quantitat de neu per espai de temps. Si en la primera hora de treball recorren el mateix espai que en les dues hores següents, a quina hora ha començat a nevar? I si la dada fos que en la segona hora ha recorregut la meitat de la primera?
- (6) Admetent que la resistència que l'aire oposa a la caiguda d'un paracaigudes és proporcional al quadrat de la seva velocitat, calculeu l'expressió de la velocitat en funció del temps, i el límit d'aquesta quan el temps tendeix a infinit.
- (7) Demostrar que les rectes tangents a totes les corbes integrals de l'equació diferencial  $y' + y \tan x = x \tan x + 1$  en els punts d'intersecció amb l'eix d'ordenades són paral·leles entre elles. Determineu l'angle amb el que les corbes tallen amb l'eix. Indicació: L'exercici és molt més senzill del que pot semblar.  
  
Si tot i amb la indicació no us en sortiu, proveu de demostrar el mateix amb les equacions diferencials  $y' = xy + x$  i  $y' = xy + k$ .
- (8) Determineu la família de corbes ortogonals al feix  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{cx+5}, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (9) Segons la llei d'acció de masses de Guldberg-Waage, la velocitat d'una reacció, és a dir, la quantitat de substància obtinguda o transformada per unitat de temps, és proporcional al producte de les quantitats de substàncies que reaccionen en cada moment. Suposem que es combinen 60 grams d'una determinada substància  $A$  amb 30 grams d'una substància  $B$  per formar-ne un compost  $C$ . Suposem que, perquè es formin 5 grams de  $C$ , es necessiten tres grams de  $A$  i dos de  $B$ . Determineu la quantitat de substància  $C$  que hi ha en funció del temps. Quina quantitat màxima de substància  $C$  s'obtindrà?

Què canvia si augmenten la quantitat de  $A$ ?

## 2 INFORME:

Tasques a fer:

- (1) Determineu la família de corbes ortogonals al feix  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = c, c > 0\}$ .
- (2) Les corbes equipotencials i les línies de força d'un camp elèctric formen famílies de trajectòries ortogonals. Trobeu les línies de força del camp elèctric corresponents a les corbes equipotencials  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y = ae^{-x}, x, y > 0, a > 0\}$ .
- (3) Plantegeu i resoleu un problema com el (9) en que es combinen 3 elements per crear un quart. Inventeu vosaltres mateixos les proporcions que reaccionen i les quantitats que teniu de cada element.

Què canvia si augmenten la quantitat del element més restrictiu?

Mantenim que es pugui fer en grups de fins a tres persones.

**Data límit d'entrega:** 4 de desembre de 2022.