Anàlisi de Dades Financeres

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

ENTREGA 6

Informe

Abril Pérez Martí - 1600601

Arnau Perich Iglesias - 1603567

Eric Jiménez Barril - 1599092

Joan González Martínez - 1597201

Laia Escursell Rof - 1600578

1 de desembre del 2023

Exercici 1

La primera tasca consisteix en representar un conjunt ampli de portfolis possibles.

(a) **Descàrrega de dades : Utilitza la biblioteca `quantmod` per descarregar els preus ajustats de Meta (META), Apple (AAPL), Microsoft (MSFT) i Google (GOOG) entre el 01/01/2015 i el 31/12/2015**.

En aquest apartat només se'ns demana carregar les dades. Notem, però, que les dades descarregades amb `quantmod` són preus, així que cal transformar-les a rendiments. Per fer-ho, farem servir l'expressió que vam veure a la pràctica 1:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

(b) **Rendiments i covariàncies: Calcula la mitjana dels rendiments diaris i la matriu de covariància dels rendiments diaris. Anomenem el vector de rendiments mitjos com μ i la matriu de covariància com C. Així doncs, μ és un vector de dimensió 4×1 i C té dimensió 4×4.**

Començarem fixant el següent ordre: *Meta*, *Apple*, *Microsoft* i *Google*. De tal manera que qualsevol vector o matriu que calculem a partir d'ara, seguirà aquesta ordenació.

Un cop fixat aquest ordre, tenim que la matriu on es mostren els rendiments mitjans de cadascuna d'aquestes accions és:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.001124361 \\ -0.00009579593 \\ 0.0007149364 \\ 0.001421940 \end{pmatrix}$$

Mentre que la matriu de covariàncies en l'ordre donat és:

$$C = \begin{pmatrix} 0.0002634723 & 0.0001508084 & 0.0001379056 & 0.0001666981 \\ 0.0001508084 & 0.0002854309 & 0.0001581441 & 0.0001171636 \\ 0.0001379056 & 0.0001581441 & 0.0003117926 & 0.0001676163 \\ 0.0001666981 & 0.0001171636 & 0.0001676163 & 0.0003149573 \end{pmatrix}$$

(c) **Simulació de pesos de portfoli: Tira quatre nombres aleatoris uniformes de [0,1] i normalitza'ls. Això significa que has de treure $W_i \sim U[0,1]$ per a $i = 1, \dots, 4$ i calcular els pesos normalitzats com**

$$\omega_i = \frac{W_i}{\sum_{j=1}^{4} W_j}$$

En altres paraules, tenim $\sum_{i=1}^{4} \omega_i = 1$. Així, ω representa la quantitat de diners invertida en cadascuna de les 4 accions. Calcula la mitjana i la variància del portfoli associat amb els pesos ω:

$$\mu_P = \omega^t \mu, \quad \sigma_P^2 = \omega^t C \omega$$

on t representa la transposició.

En aquest apartat el que fem és generar un vector W donat per quatre nombres a l'atzar W_i en $[0,1]$ i normalitzar-lo per obtenir un vector w tal que $\sum_{i=1}^{4} \omega_i = 1$. Posteriorment, identifiquem aquest vector ω amb les proporcions de cada actiu al nostre portfoli P i calculem el retorn μ_P i la variança σ_P^2 d'aquest.

Per exemple, per $w^t = (0.1214495, 0.3329164, 0.1727188, 0.3729152)$, obtenim que:

$$\mu_P = 0.0007584069, \qquad \sigma_P^2 = 0.0001905736$$

(d) **Conjunt possible: Repeteix el càlcul anterior tirant 1000 vectors aleatoris ω i representa els parells (σ_P, μ_P) en un gràfic.**

Finalment, generem 1000 vectors w aleatoris i calculem, per cadascun d'ells, el seu retorn μ_P i la seva desviació σ_P. A la figura 1 trobem el conjunt de dades obtingut. A partir d'ara, ens centrarem en estudiar la frontera d'aquest.

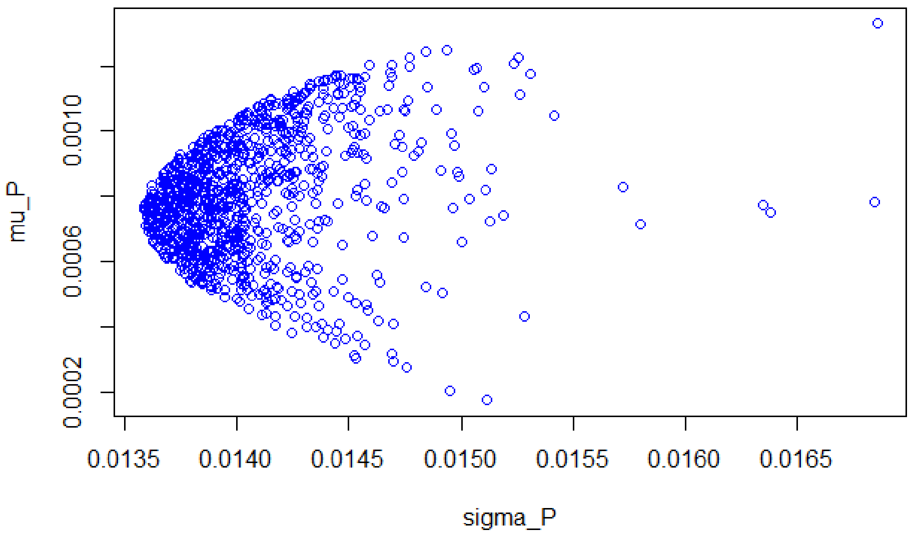

Figura 1: Conjunt de tuples (σ_P, μ_P) dels 1000 vectors aleatoris

Exercici 2

Ara anem a representar la frontera eficient utilitzant els multiplicadors de Lagrange derivats a les notes de classe.

(a) **Construeix el següent vector r_{base}:**

```
rbase <-  seq(min(mu),max(mu),length=N)
```

on N és un nombre gran, diguem-ne 500.

Construïm el vector que se'ns demana. Aquest vector no es més que una discretització de l'interval en el qual es trobaran els retorns de tots els portfolis possibles.

(b) **Construcció del model lineal: Per a cada element en $r \in r_{\mathbf{base}}$, construeix la següent matriu Q i el vector b:**

$$Q = \begin{pmatrix} 2C & \mu & \mathbb{1} \\ \mu^t & 0 & 0 \\ \mathbb{1}^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\mathbb{1}$ és el vector unitari de longitud 4. (Suggeriment: utilitza les funcions `rbind` i `cbind` per formar una matriu a partir d'una col·lecció de matrius).

La matriu Q la podem obtenir fàcilment a partir de les matriu ja calculades en apartats anteriors i és:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.0005269447 & 3.016167e-04 & 0.0002758112 & 0.0003333961 & 1.124361e-03 & 1 \\ 0.0003016167 & 5.708618e-04 & 0.0003162881 & 0.0002343273 & -9.579593e-05 & 1 \\ 0.0002758112 & 3.162881e-04 & 0.0006235852 & 0.0003352326 & 7.149364e-04 & 1 \\ 0.0003333961 & 2.343273e-04 & 0.0003352326 & 0.0006299146 & 1.421940e-03 & 1 \\ 0.0011243605 & -9.579593e-05 & 0.0007149364 & 0.0014219396 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre que podem obtenir la matriu b associada a cada $r \in r_{base}$ mitjançant un bucle `for`.

(c) **Resol el model lineal: Utilitza la funció `solve(Q,b)` per resoldre el model lineal dels multiplicadors de Lagrange:**

$$\begin{bmatrix} \omega_r \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \textbf{solve}(Q, b)$$

on ω_r és un vector de 1×4 que representa els pesos del portfoli òptim amb un cert nivell de rendiment $r \in r_{base}$, és a dir, el portfoli amb menor risc pel que podem aconseguir un rendiment r. Els paràmetres λ_1 i λ_2 són els multiplicadors de Lagrange i no els utilitzarem per res en aquesta pràctica.

En aquest apartat resolem el sistema esmentat per a cada $r \in r_{base}$. Posteriorment, calculem, pel portfoli w_r (solució del sistema), el seu retorn i la seva desviació. Sabem que aquests punts son els que formaran la frontera de la figura 1.

(d) **Representa la frontera eficient: Utilitza ω_r per a cada $r \in r_{\mathbf{base}}$ per calcular el rendiment i la volatilitat com es va fer a la secció c de l'exercici anterior. Representa els parells resultants en un gràfic.**

En aquest apartat representem únicament els punts de la frontera de la figura 1. Els podem veure representats a la figura 2. Notem que aquesta frontera es pot dividir en dos parts: la frontera eficient (vermell) i la frontera no eficient (negra). Aquestes dues fronteres son simètriques respecte l'horitzontal, i reben el nom d'eficient i no eficient perquè per un mateix nivell de risc donen un retorn més gran i un retorn més petit, respectivament.

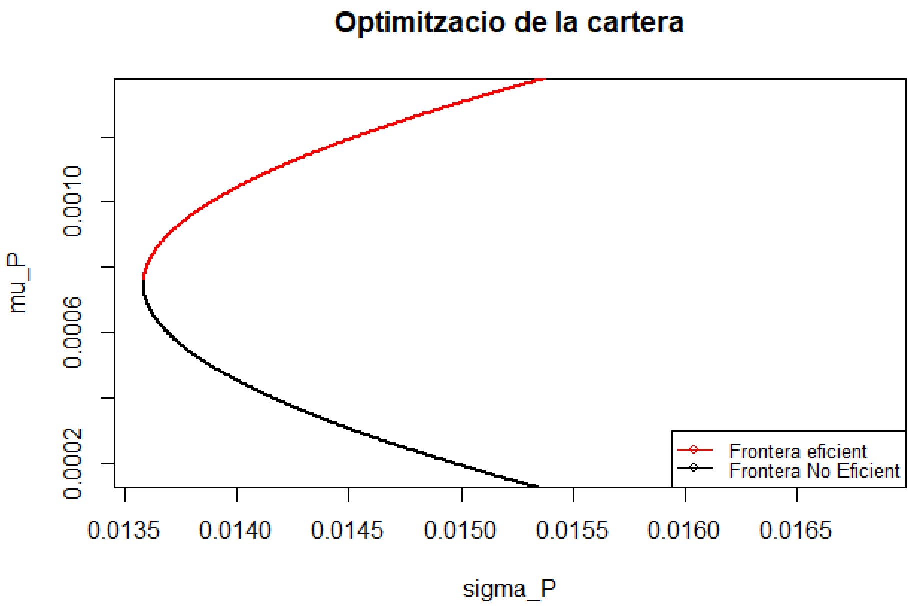

Figura 2: Representació de la frontera eficient (vermell) i la frontera no eficient (negre).

Exercici 3

Optimització de portfolis: Representa en una única figura els gràfics resultants de la última secció de l'exercici 1 i de l'última secció de l'exercici 2. Mostra el conjunt possible de portfolis, el portfoli eficient i el portfolis de mínima variància en la figura.

Ara, ajuntem les dues figures 1 i 2 en una sola figura, i obtenim la figura 3. Podem observar com, efectivament, els punts estudiats a l'exercici 2 es corresponen als punts de la frontera del conjunt de tots els portfolis possibles. Notem també que hem representat (en verd) el portfoli de mínima variança; aquest, com el seu nom indica, fa referència al vèrtex de la paràbola que constitueix la frontera i és el portfoli amb menor risc possible.

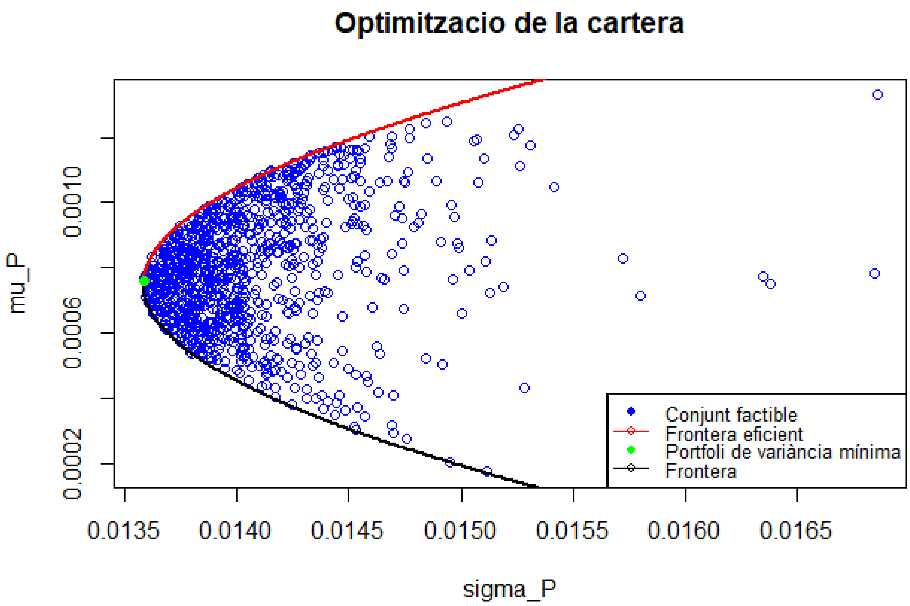

Figura 3: Representació de les fronteres eficient (en vermell) i no eficient (en negre), juntament amb les tuples dels valors de retorn i volatilitat dels portfolis (en blau) i el portfoli de variancia mínima (en verd)