

Anàlisi de Dades Financeres

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

ENTREGA 2

Informe

Abril Pérez Martí - 1600601

Arnau Perich Iglesias - 1603567

Eric Jiménez Barril - 1599092

Joan González Martínez - 1597201

Laia Escursell Rof - 1600578

20 d'octubre del 2023

Exercici 1:

Executeu el codi que correspon a les dades de tres sèries temporals trimestrals i responeu a les preguntes següents.

a) Dibueixeu el `Tbill` i el `Del.Tbill`. Utilitzeu les sèries temporals i els gràfics ACF i les proves ADF i KPSS per demostrar que les sèries són estacionàries o no. Quin tipus d'heterocedasticitat podeu veure a la sèrie `Del.Tbill`?

Centrem-nos primer de tot en la sèrie `Tbill`; la Figura 1 ens mostra els gràfics de la sèrie i de la funció d'autocorrelació (ACF). Aquestes dues imatges ens indiquen una forta no estacionarietat. La gràfica (a) ens mostra que la sèrie té una tendència ascendent fins a la dècada dels 80 i a partir d'aquest moment mostra una forta tendència descendent, fet que ens porta a pensar que la mitjana no és constant. D'altra banda, a la imatge de la dreta (b), s'observa que les autocorrelacions són altes i persistents, no tenen un descens molt ràpid cap al 0 com hauria de passar si la sèrie fos estacionària.

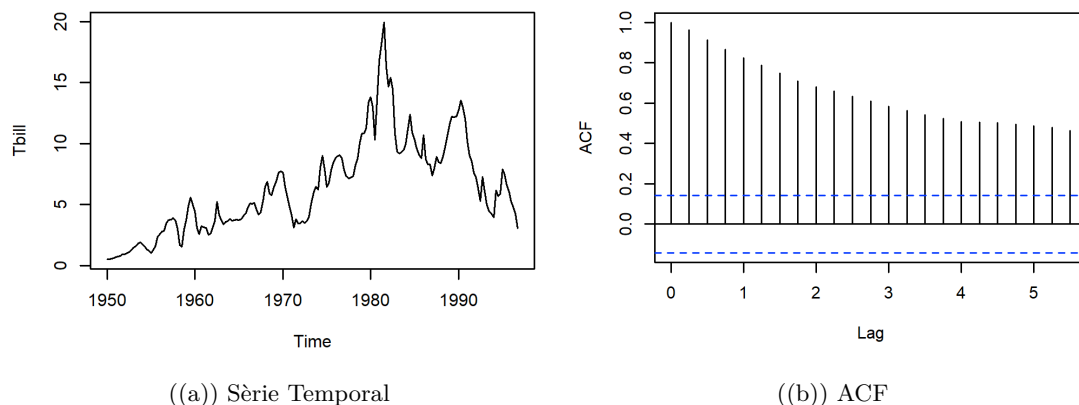


Figura 1: Gràfiques de la sèrie `Tbill` i la seva ACF

Executem ara els tests ADF i KPSS per confirmar la no estacionarietat que hem observat a les dues gràfiques. Pel ADF (*Augmented Dickey-Fuller test*) tenim la hipòtesis nul·la

$$H_0 = \text{La sèrie té una arrel unitaria (i per tant no és estacionària)}$$

contra

$$H_1 = \text{La sèrie és estacionària}$$

amb un nivell de significació del 5%. El p-valor que obtenim al realitzar aquest test és 0.61, i com que aquest valor és més gran que el 0.05 del nostre nivell de significació no podem rebutjar la hipòtesis nul·la, és a dir, que aquest test també ens indica que la sèrie no és estacionària.

Finalment, realitzem el KPSS test per aquestes mateixes dades per intentar provar la hipòtesis nul·la:

$$H_0 = \text{La sèrie temporal és estacionària al voltant d'una tendència determinista}$$

és a dir, que la sèrie té una tendència que es pot descriure amb una funció lineal o constant, contra la hipòtesis alternativa:

$$H_1 = \text{La sèrie té una arrel unitaria (i per tant no és estacionària)}$$

amb un nivell de significació del 5%. Al executar aquest test, s'obté un p-valor inferior a 0.01, de manera que podem rebutjar la hipòtesis nul·la i afirmar que `Tbill` no és estacionària.

Totes les proves, tan visuals com matemàtiques, realitzades per la sèrie temporal `Tbill` ens porten a afirmar que aquesta no és estacionària.

Tot seguit, estudiem l'estacionarietat de la sèrie diferenciada: `Del.Tbill`. Per fer-ho, realitzarem el mateix procediment que en el cas anterior. Comencem representant la sèrie i el gràfic ACF d'aquesta

(veure Figura 2). Si primer ens fixem en la representació de la sèrie (esquerra) veiem que ara sí que oscil·la al voltant d'un valor fix i per tant, podem deduir que té mitjana constant. D'altra banda, i pel que fa a la seva funció d'autocorrelació (b), es pot observar que en aquest cas sí que tenim unes autocorrelacions que descendeixen ràpidament cap al 0. Això ens porta a pensar que la sèrie pot ser estacionària.

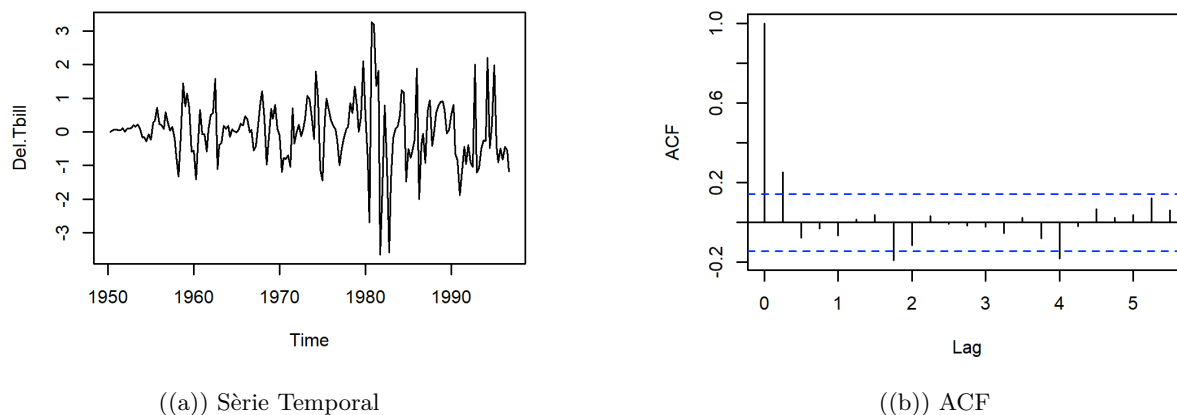


Figura 2: Gràfiques de la sèrie `Del.Tbill` i la seva ACF

Per confirmar aquesta idea, farem els mateixos tests que hem fet per la sèrie `Tbill`: els tests ADF i KPSS. Primer, duem a terme el test ADF, i obtenim un p-valor més petit que 0.01, que és un nombre menor al 0.05 de significació que té el test, i per tant, podem rebutjar la hipòtesis nul·la i adoptar la hipòtesis alternativa: la sèrie és estacionària. Després, realitzem el test KPSS i obtenim un p-valor més gran a 0.1, de manera que en aquest cas no podem rebutjar la hipòtesis nul·la i adoptem que la sèrie és estacionària al voltant d'una tendència determinista, és a dir, que mostra una tendència estacionària. En resum, podem afirmar que la sèrie `Del.Tbill` és una sèrie estacionària.

Finalment, se'ns pregunta sobre la heteroscedasticitat de la sèrie temporal `Del.Tbill`. Recordem que diem que una sèrie presenta heteroscedasticitat quan la varianza dels errors no és constant en totes les observacions realitzades. A priori sembla que la sèrie té aquesta propietat, doncs la varianza és considerablement major als anys 1980-1985 que a la resta.

Tot això ens porta a pensar que les nostres dades s'ajustaran bé a un model $\text{ARMA}(p,q)/\text{GARCH}(P,Q)$

b) Ajusteu un model $\text{ARMA}(1,0)/\text{GARCH}(1,0)$ utilitzant `garchFit` a la sèrie que es creu que és estacionària. Quines són les estimacions dels paràmetres del model?

En l'anterior exercici hem vist que la sèrie que sembla estacionària és `Del.Tbill`. Ajustarem aquesta sèrie segons un model $\text{ARMA}(1,0)/\text{GARCH}(1,0)$, que és de la forma:

$$Y_t = \mu + \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t = \sqrt{\omega + \alpha a_{t-1}^2} \varepsilon_t \quad (1)$$

on $\mu, \phi_1, \omega, \alpha_1$ són constants i ε_t és un soroll blanc.

Fem l'ajust del model d'aquesta sèrie amb la funció `garchFit` d'R i obtenim les següents estimacions dels paràmetres:

$$\mu = 0.08349652 \quad \phi_1 = 0.24163450 \quad \omega = 0.33815662 \quad \alpha_1 = 0.83482811$$

Per decidir si realment aquests paràmetres són estadísticament significatius, provem la hipòtesi nul·la

$$H_0 = \text{el valor del paràmetre és zero}$$

contra l'alternativa

$$H_1 = \text{el valor del paràmetre és diferent de zero}$$

amb un nivell de significació del 5%.

La mateixa funció que hem usat per estimar aquests paràmetres retorna els p-valors d'aquests tests. Notem que tenen un valor inferior a 0.05 (1.21×10^{-1} , 9.02×10^{-4} , 3.73×10^{-8} i 5.90×10^{-4} , respectivament) i per tant podem rebutjar la hipòtesi nul·la. Podem concloure, llavors, que els paràmetres estimats són estadísticament significatius.

c) Què dibuixa $\text{acf}(\text{res})$? Què et diu la gràfica sobre l'ajust del model?

La variable **res** representa els residus “ordinaris” del model $\text{ARMA}(1,0)/\text{GARCH}(1,0)$ ajustat a la sèrie **Del.Tbill**, que esperem que siguin de la forma $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$. El gràfic $\text{ACF}(\text{res})$ mostra l'autocorrelació dels residus a diferents desfasos temporals; i cada barra representa l'autocorrelació entre els residus segons un desfàs temporal indicat a l'eix horitzontal.

En el nostre cas, els nostres residus **res** no són independents, doncs tal i com podem veure a l'equació 1, a_t depèn de a_{t-1} . És per això que esperem que puguin mostrar indicis d'autocorrelació.

En la Figura 3 podem veure que la majoria de barres no s'estenen més enllà de les línies horitzontals discontinües (que representen l'interval de confiança del 95%), exceptuant-ne les que es troben a les posicions 2, 7 i 16. Llavors, a partir dels gràfics no sembla clar si existeix o no autocorrelació, és per això que realitzarem un *Ljung-Box* test; un test que ja hem explicat en pràctiques anteriors i que s'utilitza per determinar si existeix o no autocorrelació entre els residus. Fem el test i obtenim un p-valor de 0.04932, fet que ens permet rebutjar la hipòtesi nul·la i acceptar-ne l'alternativa, que diu que els residus mostren autocorrelació; tal i com esperàvem.

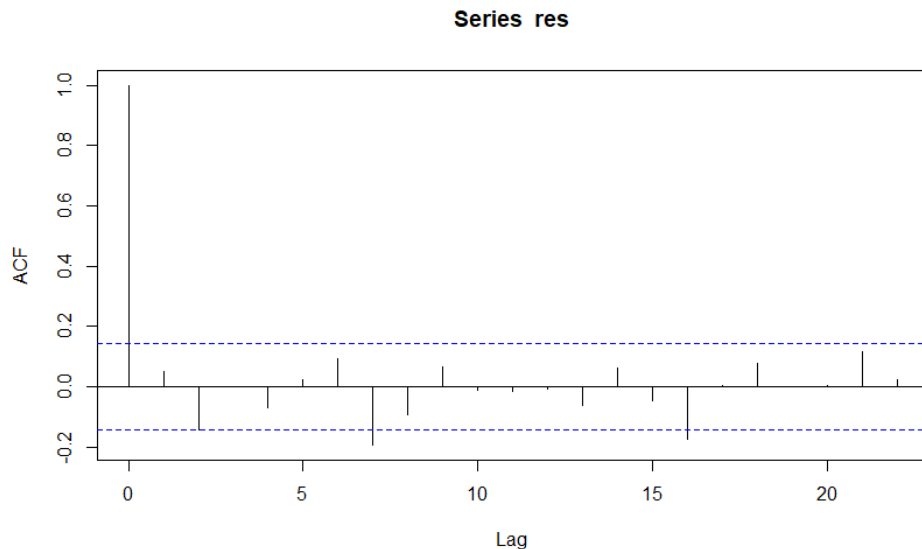


Figura 3: Gràfica del $\text{acf}(\text{res})$

d) Què dibuixa $\text{acf}(\text{res}^2)$? Què et diu la gràfica sobre l'ajust del model?

Aquest gràfic ACF ens permet estudiar si existeix autocorrelació entre els residus al quadrat. De la mateixa manera que hem explicat a l'apartat anterior, esperem que aquests mostrin autocorrelació.

En aquest cas, si observem la Figura 4, sembla més clar que sí que existeix autocorrelació entre els residus al quadrat. En efecte, fem un *Ljung-Box* test i obtenim un p-valor menor a 0.05, és a dir, existeix autocorrelació entre els residus al quadrat.

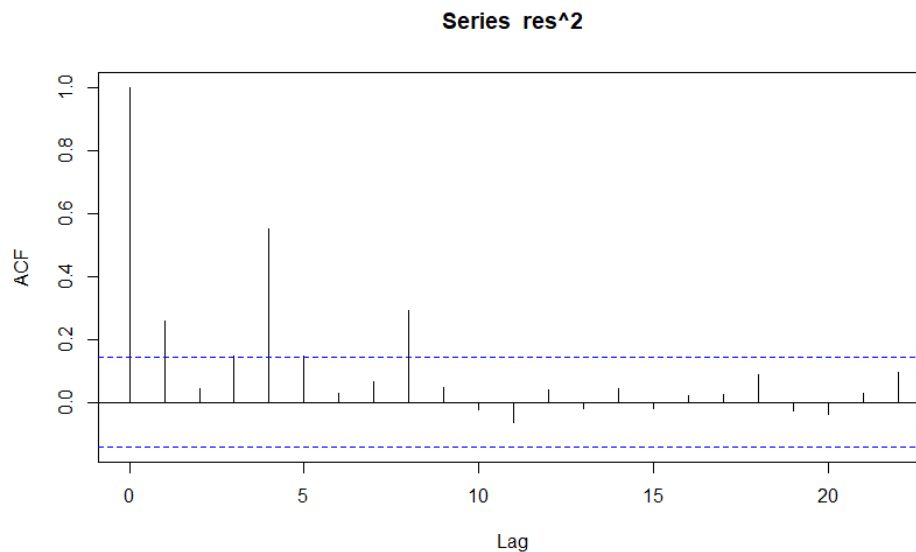


Figura 4: Gràfica del $\text{acf}(\text{res}^2)$

De nou, això és el que esperàvem per un model $\text{ARMA}(1,0)/\text{GARCH}(1,0)$.

e) Què dibuixa $\text{acf}(\text{res_std}^2)$? Què et diu la gràfica sobre l'ajust del model?

Calculem ara els residus estandarditzats res_std dividint els residus per σ_t , de tal manera que esperem que es comportin com ε_t ; que recordem, és un soroll blanc.

En aquest apartat se'ns demana estudiar l'ACF dels residus estandarditzats al quadrat. Ara, a diferència dels apartats anteriors, esperem que els residus (i els residus al quadrat) no tinguin cap mena d'autocorrelació, doncs es tracten d'un soroll blanc al quadrat¹. Podem veure a la Figura 5 que l'autocorrelació que mostren sembla ser nul·la. En efecte, si portem a terme un *Ljung-Box* test, obtenim un p-valor de 0.2059, és a dir, tal i com esperàvem, els residus estandarditzats al quadrat no mostren cap autocorrelació.

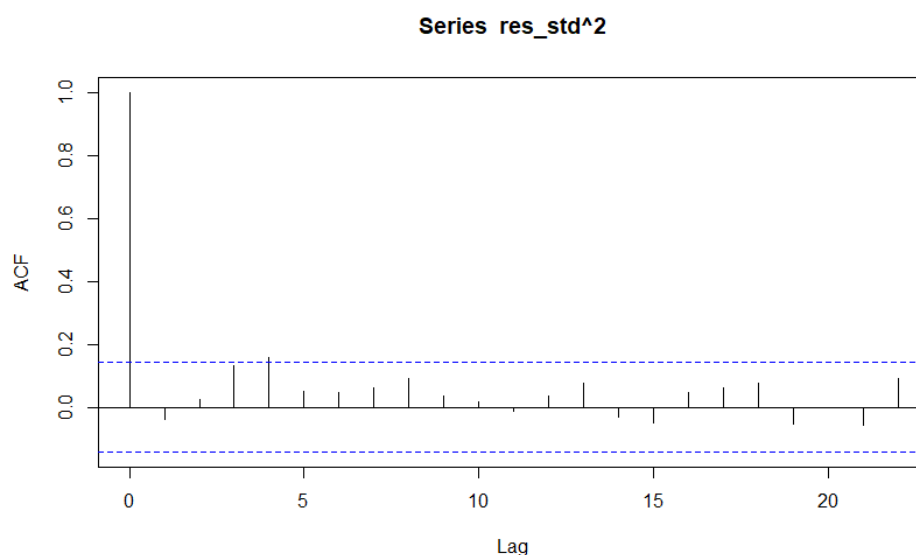


Figura 5: Gràfica del $\text{acf}(\text{res_std}^2)$

¹Recordem que la funció d'autocorrelació d'un soroll blanc és la delta de *Kronecker*, i per tant, la d'un soroll blanc al quadrat també ho serà.

f) Hi ha alguna cosa destacable a la gràfica produïda per `plot(res_std)`?

Ara també esperem que no es mostri cap autocorrelació, pels motius explicats prèviament. En particular, podem veure-ho a la Figura 6, doncs no hi ha cap barra significativament fora de l'interval de confiança del 0 o mitjançant un *Ljung-Box* test, pel qual obtenim un p-valor de 0.3575.

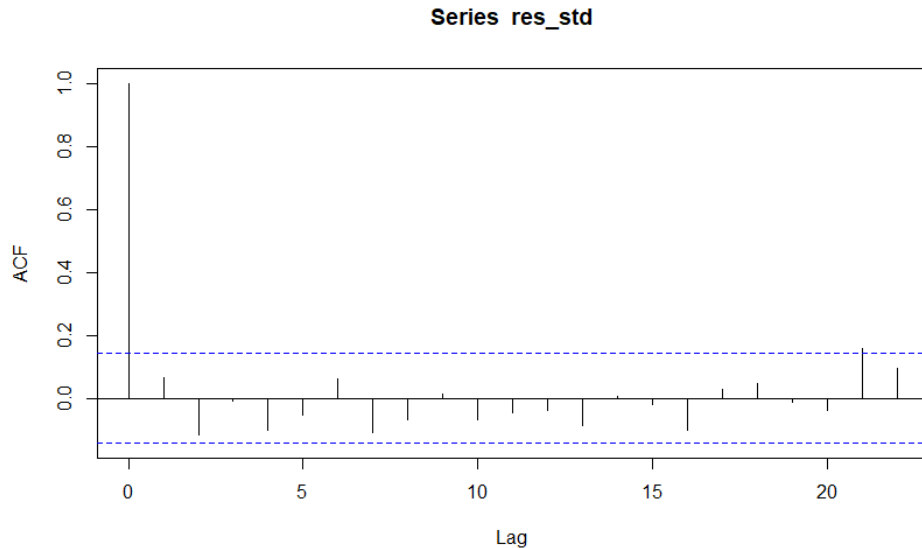


Figura 6: Gràfica del `acf(res_std)`

g) Ara ajusteu un ARMA/GARCH a la sèrie `diff(log(Tbill))`. Veieu algun avantatge de treballar amb la diferència dels logaritmes de la taxa T-bill?

Considerem ara la sèrie temporal `diff(log(Tbill))`; podem veure-la representada a la Figura 7. Si ho comparem amb la sèrie `Del.Tbill`, podem veure com sembla que hem reduït lleugerament la volatilitat de les dades. Tot i així, continua havent-hi *clusters* de volatilitat, motiu pel qual ajustarem la nostra sèrie segons un model ARMA(1,0)/GARCH(1,0).

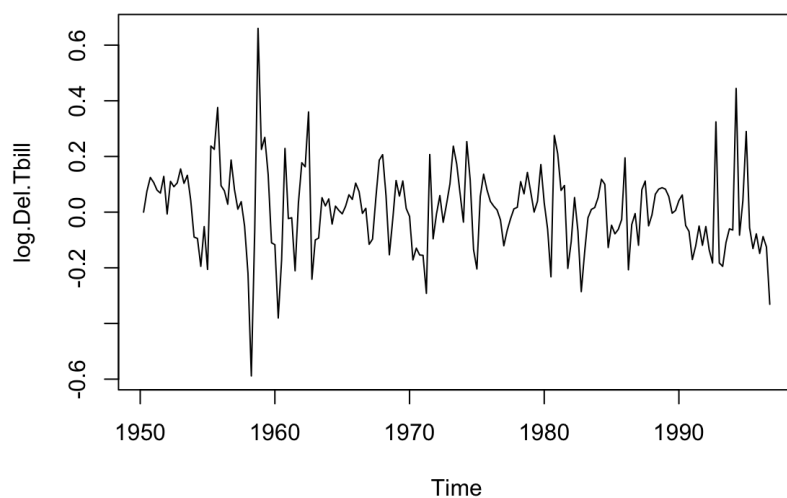


Figura 7: Representació de la sèrie temporal `diff(log(Tbill))`.

A continuació, estudiem l'autocorrelació dels “diferents residus” que podem obtenir de la mostra. Co-

mencem fent-ne un estudi qualitatiu a través dels ACF, que es troben representats a la Figura 8. Veiem com ara sembla que l'únic que mostra indicis d'autocorrelació és el que es correspon amb els residus "ordinaris" al quadrat. En efecte, si realitzem un *Ljung-Box* test per aquests, obtenim un p-valor de 0.02247, que ens permet rebutjar l'hipòtesi nul·la per acceptar-ne l'alternativa, *i.e.*, que existeix autocorrelació. D'altra banda, pel que fa a la resta de residus: els residus ordinaris, els residus estandarditzats i els residus estandarditzats al quadrat, si realitzem un *Ljung-Box* test, obtenim p-valors majors a 0.05, fet que ens confirma que no existeix autocorrelació entre aquests.

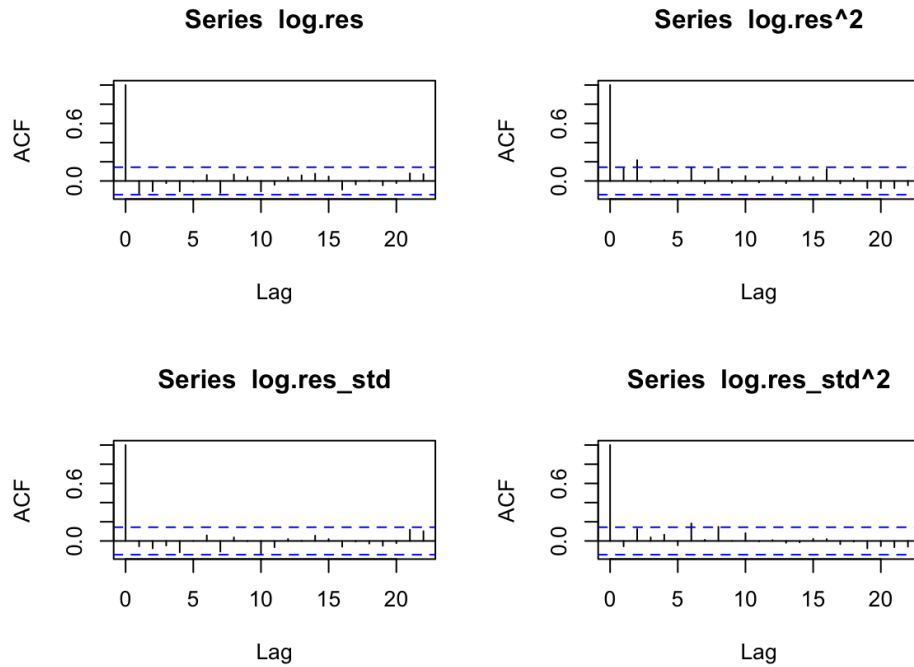


Figura 8: Representació dels diferents residus obtinguts a partir d'un model $\text{ARMA}(1,0)/\text{GARCH}(1,0)$ ajustat a la sèrie $\text{diff}(\log(\text{Tbill}))$

En resum, sembla que considerant el logaritme de la sèrie (i diferenciant-lo) hem aconseguit reduir l'heterocedasticitat de la mostra, *i.e.*, les variacions de la variança en funció del temps.

Exercici 2

El Dilluns Negre, la rendibilitat de l'S&P 500 va ser de -22,8%. Aquest exercici intenta respondre a la pregunta: quina era la probabilitat condicional d'una rendibilitat així de petita el Dilluns Negre? (Condicional significa donada la informació disponible el dia de negoci anterior).

Les rendibilitats de l'SP500 es troben al conjunt de dades SP500 del paquet Ecdat. Les rendibilitats es troben a la variable r500. El Dilluns Negre és la 1850a rendibilitat del conjunt de dades. Aquest codi s'ajusta a un model AR(1)/GARCH(1,1) als últims dos anys de dades abans del Dilluns Negre. La distribució condicional del soroll blanc és la distribució t . Des del gràfic es pot veure que el Dilluns Negre va ser altament inusual. Les estimacions de paràmetres es troben a resultats@fit\$par i el sisè paràmetre són els graus de llibertat de la distribució t . La funció predict es fa servir per predir un pas endavant. L'objecte previsió contindrà, previsió mitjana, error mitjà i desviació estàndard, que és la desviació estàndard condicional de la rendibilitat el Dilluns Negre.

a) Utilitza la informació anterior per calcular la probabilitat condicional d'una rendibilitat menor o igual a -0,228 el Dilluns Negre.

Tal com ens diu l'enunciat, modelitzem el problema amb un AR(1)/GARCH(1,1). Recordem que $\{Y_t\}$ segueix un model d'aquest tipus si per algunes constants Φ , $\mu \in \mathbb{R}$ i $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, podem escriure

$$Y_t = \mu + \Phi Y_{t-1} + a_t$$

on

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}$$

i la distribució condicionada del soroll blanc $\{\varepsilon_t\}$ segueix una t -distribution.

El model és ajustat amb els valors que tenim fins el dia abans del Dilluns Negre. Llavors, el podem fer servir per predir el valor esperat \hat{Y}_{BM} i la desviació estàndard $\hat{\sigma}_{BM}$ pel Dilluns Negre. Ho fem i obtenim els valors:

$$\hat{Y}_{BM} = -0.003155442 \quad \hat{\sigma}_{BM} = 0.01705332$$

D'altra banda, tornant al model inicial, podem modelar la predicció del Dilluns Negre tal com es mostra a continuació:

$$Y_{BM} = \hat{Y}_{BM} + \hat{\sigma}_{BM} \varepsilon_{BM}$$

Si ho reescrivim, aïllant ε_{BM} i substituint els valors que ha predit el nostre model, obtenim:

$$\varepsilon_{BM} = \frac{Y_{BM} - \hat{Y}_{BM}}{\hat{\sigma}_{BM}} = -13.184797$$

En aquests moments ja estem en condicions de calcular la probabilitat condicional que un retorn en el Dilluns Negre Y_{BM} sigui menor o igual a -0.228:

$$\mathbb{P}(Y_{BM} \leq -0.228 | \dots)^2 = \mathbb{P}(\varepsilon_{BM} \leq \frac{-0.228 - \hat{Y}_{BM}}{\hat{\sigma}_{BM}} = -13.184797 | \dots)$$

Reordem el fet que la distribució condicionada de $\{\varepsilon_t\}$ és una t -distribution, en particular ε_{BM} , amb els graus de llibertat estimats corresponents. Compilant aquesta probabilitat aconseguim un valor de 7.688673×10^{-5} .

Cal remarcar que aquest valor és molt petit; pràcticament 0. El valor real de la rendibilitat en el Dilluns Negre tenia casi probabilitat nul·la segons aquest model. És per això que podem concloure que preveure un esdeveniment especial com aquest amb models d'aquest tipus és molt difícil.

²Aquí $\mathbb{P}(Y_{BM} \leq -0.228 | \dots)$ denota la probabilitat condicionada que Y_{BM} sigui menor o igual a -0.228

b) Calcula i representa els residus estandarditzats. També representa l'ACF dels residus i els seus quadrats. Indiquen un ajust del model adequat?

Definim els residus del nostre model **AR(1)/GARCH(1,1)** com la diferència

$$Y_t - \hat{Y}_t = \hat{\sigma}_t \hat{\varepsilon}_t$$

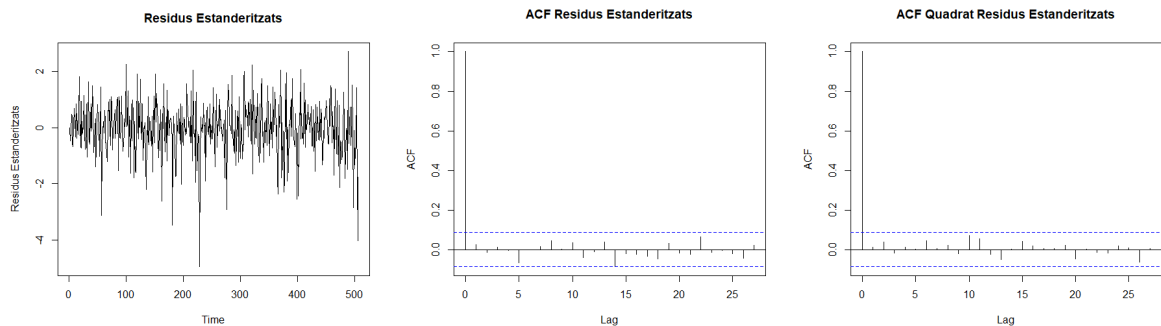
Per altra banda, definim els residus estanderitzats com el quocient

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Per tant, si el nostre model s'ajusta correctament, hauriem d'esperar una gràfica dels residus estanderitzats característica d'un soroll blanc. Efectivament, a la Figura 9(a) podem observar aquesta gràfica i com aquests residus no segueixen cap patró (són independents). A més, el fet que tots els residus oscil·lin respecte el zero i que aquestes oscil·lacions tinguin amplituds semblants, ens fa pensar que tenen mitjana i variància constant, com es propi d'un soroll blanc. Per acabar d'estudiar la correlació entre els residus, podem graficar els ACF plots (Figura 9(b)). Observem que a partir del primer *lag*, la correlació decau dràsticament a zero. Aquest resultat ens acaba d'afirmar que els residus estanderitzats son incorrelacionats, i per tant els podem calificar com a soroll blanc. Per últim, també és important graficar el ACF plot dels quadrats dels residus estanderitzats per trobar autocorrelacions i, en conseqüència, evidències de volatilitat que el model no està captant. A la Figura 9(c) es mostra com la correlació cau a 0 en el primer *lag*.

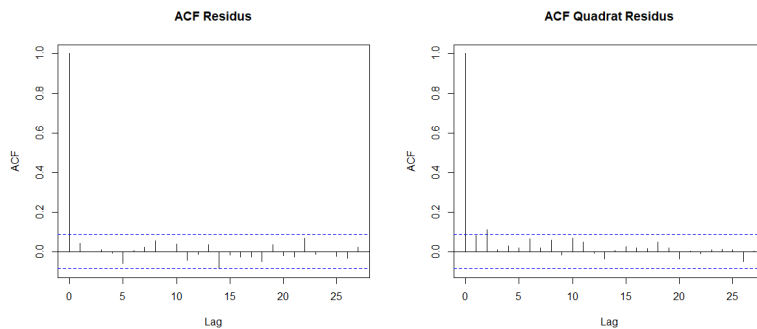
Per altra banda, els ACF plots pels residus i els quadrats dels residus (Figura 10) tenim algun *lag* on la correlació està al límit de l'interval de confiança del 95%. Cosa que ens podriem esperar en un model amb component GARCH, tal i com s'ha explicat a l'exercici 1.

Tota aquesta informació ens porta a pensar que el model escollit s'ajusta correctament a les dades.



((a)) Residus estanderitzats ((b)) ACF residus estanderitzats ((c)) ACF quadrat estanderitzats

Figura 9: Gràfics sobre la sèrie de residus estanderitzats



((a)) ACF residus ((b)) ACF quadrat residus

Figura 10: Gràfics sobre la sèrie de residus

c) Proporcionaria un model AR(1)/ARCH(1) un ajust adequat?

A continuació proposem un model **AR(1)/ARCH(1)**:

$$Y_t = \mu + \Phi Y_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t$$

on

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha a_{t-1}^2}$$

i amb ε_t un soroll blanc.

Un cop els paràmetres del model han estat estimats, podem graficar els mateixos tipus de gràfics que a l'apratat anterior per validar si el model s'ajusta bé a les nostres dades.

A la Figura 11 observem les mateixes característiques pels ACF plots que a l'apartat b): notem una clara no correlació. A partir del primer *lag*, el valor és 0 amb prou significació. Això ens indica que el model sembla ajustar-se bé a les dades. Per assegurar-nos, podem realitzar un *Ljung-Box test*, ja explicat en pràctiques anteriors. Realitzem un test pels residus estanderitzats i els seus quadrats, i obtenim uns p-valors de 0.8674 i 0.2662, respectivament. Com els dos p-valors són més grans que 0.05, no podem descartar la hipòtesi nul·la i per tant concloem que tant els residus estanderitzats i els seus quadrats no estan correlacionats.

Finalment, a la Figura 12 es mostren els ACF plots pels residus i els seus quadrats. Podem veure que segueixen una tendència similar als de l'apartat b).

Per tant podem concloure que aquest model també s'ajusta bé a les nostres dades.

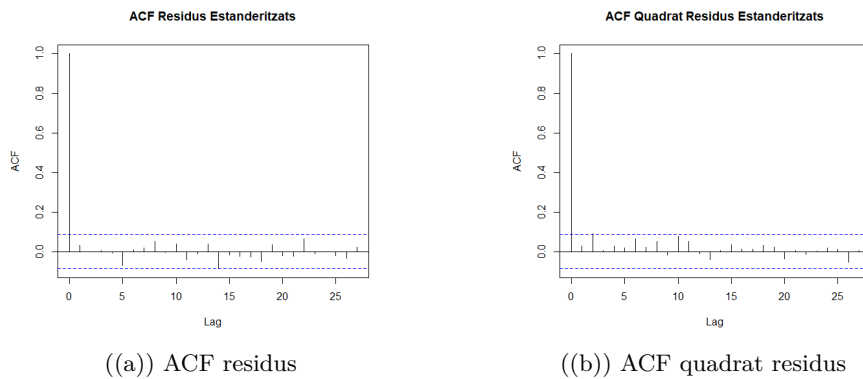


Figura 11: Gràfics sobre la sèrie de residus estanderitzats

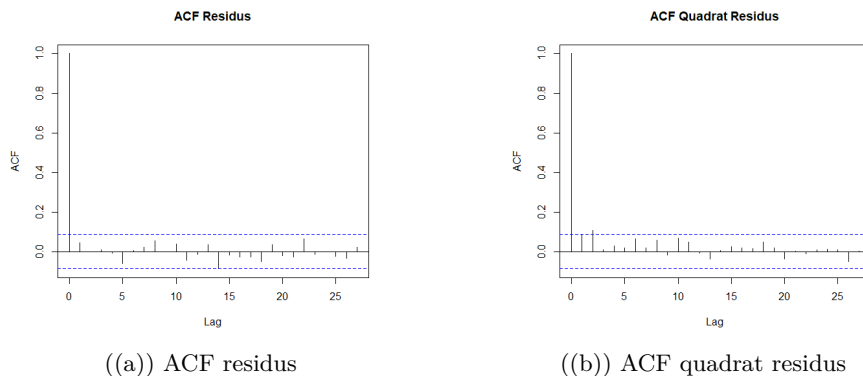


Figura 12: Gràfics sobre la sèrie de residus estanderitzats

d) Proporciona un model AR(1) un ajust adequat?

Per últim, proposem un tercer model **AR(1)**:

$$Y_t = \mu + \Phi Y_{t-1}$$

De la mateixa manera que hem procedit amb anterioritat, un cop ajustat el model, podem estudiar de manera visual els residus i les correlacions d'aquests i els seus quadrats, a la Figura 13.

Observem que la mitjana és zero i que no hi ha cap tendència en les dades. El ACF plot pels residus mostra com a partir del primer *lag*, la correlació és significativament zero. També ho podem acabar de corroborar amb un *Ljung-Box test*, i obtenim un p-valor de $0.9223 > 0.05$; és a dir que les dades tenen correlació zero. La mateixa tendència es mostra al ACF plot pels quadrats dels residus. Tot i que podem observar que el segon *lag* no està exactament a dins (per poc) de l'interval de confiança del 0. Tot i així, un *Ljung-Box test* pels quadrats dels residus ens dona un p-valor de $0.04713 < 0.05$. I per tant, podem concloure que els quadrats sí que estan correlacionats. És a dir que aquest model no s'ajusta bé.

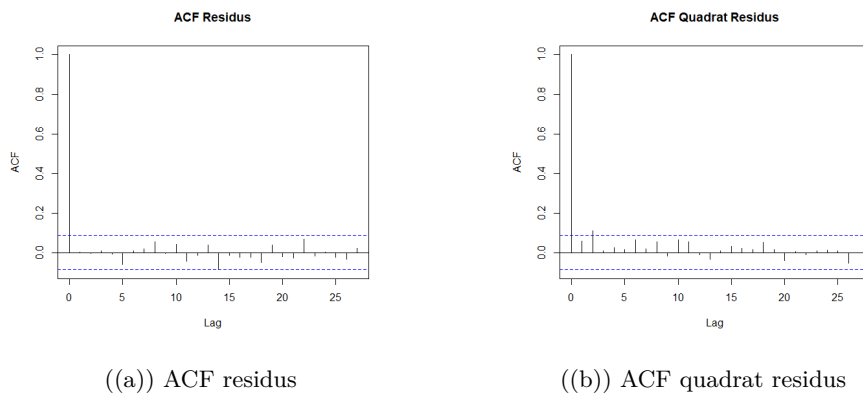


Figura 13: Gràfics sobre la sèrie de residus

Exercici 3

Descarrega el conjunt de dades `data HW 3.RData` de Moodle. Segueix la selecció de models pas a pas per ajustar un model $\text{ARMA}(p,q)/\text{GARCH}(P,Q)$ a aquest. (Pista: $q=0$ i totes les altres ordres són menors o iguals a 2).

Comencem representant el nostre conjunt de dades a la Figura 14. El primer que observem és que es produeix el que es coneix com *mean reversion*, és a dir, que els valors de la mostra oscil·len al voltant de la mitjana, que és 0. D'altra banda, també observem *clusters* de volatilitat, *i.e.*, tenim etapes amb més volatilitat i d'altres amb menys. Aquest fet ens fa pensar que haurem de construir un model de la forma $\text{ARMA}(p,q)/\text{GARCH}(P,Q)$ (tal i com ens diu l'enunciat). Comencem ajustant la part de l' $\text{ARMA}(p,q)$.

Per tal d'ajustar la part $\text{ARMA}(p,q)$ del nostre model, comencem amb un estudi qualitatiu de les dades representant, a la Figura 15, els gràfics ACF i PACF. Comencem veient que al ACF, la correlació no decau bruscament cap a 0, de fet, els primers quatre valors estan fora de l'interval de confiança del 0 i a partir del setè tots tenen una correlació negativa; això ens fa pensar que el nostre model no el podem ajustar segons un $\text{MA}(q)$ i que per tant, $q = 0$ (tal i com ens diu la pista de l'enunciat). D'altra banda, veiem, en el gràfic PACF, com la correlació decau cap a 0 després del segon *lag*, podem intuir que la part $\text{ARMA}(p,q)$ de les nostres dades segueixen un $\text{AR}(2)$, *i.e.*, $p = 2$.

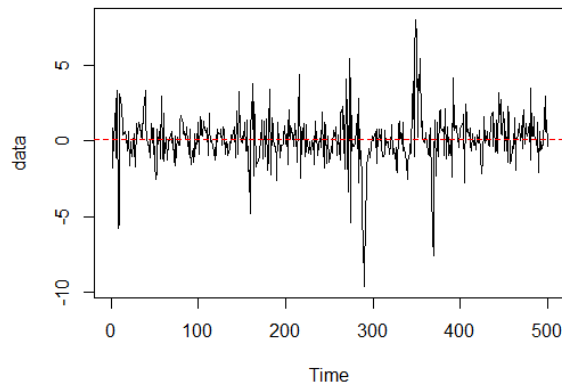


Figura 14: Representació de les dades juntament amb la seva mitjana (en vermell)

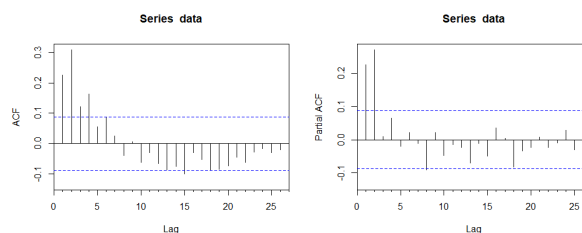


Figura 15: Representació de les funcions ACF i PACF de les dades.

Un cop hem fet l'estudi qualitatiu, el qual ens porta a pensar que $p = 2$ i $q = 0$, calculem els coeficients AIC i BIC per diferents models $\text{ARMA}(p,q)$. Fent servir la pista de l'enunciat, hem decidit provar-ho pels models amb $p = 1, 2$ i $q = 0$. Podem veure a la Taula 1 els valors de l'AIC i el BIC pels dos models possibles. Veiem que, tal i com pensàvem, el model que millor s'ajusta és l' $\text{ARMA}(2,0)$.

	AIC	BIC
ARMA(1,0)	1916.61	1929.256
ARMA(2,0)	1880.08	1896.941

Taula 1: Valors de AIC i BIC pels dos models predits qualitativament.

Veiem per contrastar diferents proves, que la funció *auto.arima()* ens recomana un model **ARMA(2,2)**, però realitzant un test de coeficients, obtenim que 3 dels 4 coeficients no són significatius amb un 5% de significació, a més, el model té un $AIC = 1880.56$ i un $BIC = 1901.51$ per tant podem descartar aquest model i continuem estudiant amb el model per la mitjana **AR(2)**.

Finalment, per assegurar-nos que aquest model és correcte, notem que al realitzar un test de coeficients els dos coeficients **AR** són significatius. A més, si estudiem els residus, veiem com la mitjana d'aquests és 0 (veure Figura 16); mentre que a la Figura 17 veiem com no presenten ni autocorrelació ni autocorrelació parcial. Podem garantir aquest últim fet mitjançant un *Ljung-test*, pel qual obtenim un p-valor de 0.5515. Aleshores, podem afirmar que el nostre model és l'adequat.

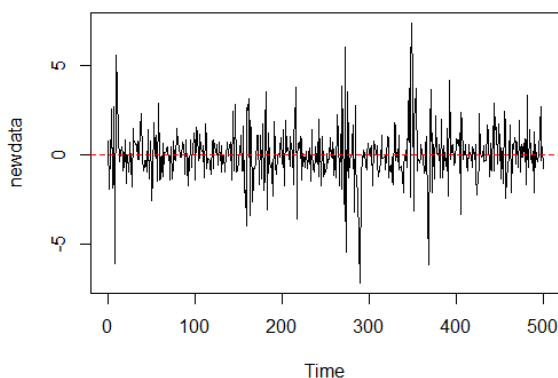


Figura 16: Representació dels residus juntament amb la seva mitjana (en vermell)

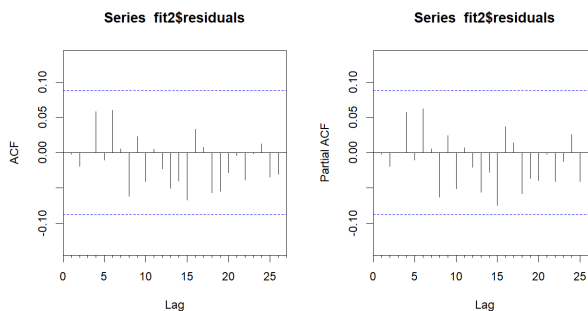


Figura 17: ACF i PACF del quadrat de les dades

Ara que ja hem trobat la part **ARMA(p,q)** del nostre model, passem a buscar la part **GARCH(P,Q)** aplicant el procediment habitual estudiant els quadrats de les dades.

En la Figura 18 podem veure com la ACF mostra un descens sense cap tall brusc, el que podria dir en aquest cas, que no es mostra cap necessitat d'un terme Q a la component **GARCH**, mentre que a la figura de la dreta (PACF) podem veure que l'autocorrelació parcial val zero després del primer *lag*. Per tant, podríem pensar que P està entre 0 i 1.

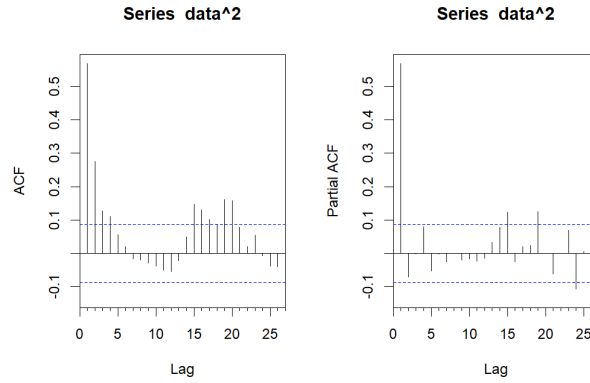


Figura 18: ACF i PACF dels quadrats dels residus

Després de les estimacions qualitatives dels paràmetres, podem pensar que $Q = 0$ i $P \sim 1$. Ajustem llavors diferents models $\text{GARCH}(P, Q)$ amb valors propers a aquests. A la Taula 2 podem veure els resultats dels coeficients AIC i BIC que obtenim del *package* `fGarch` i a la Taula 3 els que obtenim amb el *package* `rugarch`. Del primer ens quedem amb els models $\text{ARCH}(1)$ i $\text{GARCH}(1, 1)$ i del segon amb aquests dos o $\text{ARCH}(2)$.

	P	Q	AIC	BIC
$\text{ARCH}(1)$	1	0	3.185562	3.236138
$\text{ARCH}(2)$	2	0	3.193095	3.252099
$\text{GARCH}(1, 1)$	1	1	3.189535	3.248539
$\text{GARCH}(2, 1)$	2	1	3.197095	3.264529
$\text{GARCH}(1, 2)$	1	2	3.197106	3.264540
$\text{GARCH}(2, 2)$	2	2	3.189535	3.248539

Taula 2: Taula comparativa de models $\text{ARMA}(2, 0)/\text{GARCH}(P, Q)$ calculats amb *package* `fGarch`.

	P	Q	AIC	BIC
$\text{ARCH}(1)$	1	0	3.171588	3.213734
$\text{ARCH}(2)$	2	0	3.175435	3.226011
$\text{GARCH}(1, 1)$	1	1	3.175441	3.226017
$\text{GARCH}(2, 1)$	2	1	3.179435	3.238440
$\text{GARCH}(1, 2)$	1	2	3.179441	3.238446
$\text{GARCH}(2, 2)$	2	2	3.183435	3.250869

Taula 3: Taula comparativa de models $\text{ARMA}(2, 0)/\text{GARCH}(P, Q)$ calculats amb el *package* `rugarch`.

Per tant, per simplicitat, ens quedem amb el model $\text{ARCH}(1)$.

Per tal de veure que el nostre model escollit per ajustar les dades, $\text{ARMA}(2, 0)/\text{ARCH}(1)$, és un bon model observem en primer lloc, a la Taula 4, que els coeficients del model són significatius.

Coefficient	p-valor
ϕ_1	0.000117
ϕ_2	$< 10^{-6}$
ω	$< 10^{-6}$
α_1	$< 10^{-6}$

Taula 4: p-valors dels coeficients del model.

Ara doncs podem començar l'estudi dels residus traçant-los a la Figura 19 i observant que sembla compatible amb el soroll blanc, no presenta dinàmiques de volatilitat variable i la mitja sembla constant. Si

observem a més la Figura 20 els ACF i els PACF dels residus, notem que efectivament són compatibles amb els d'un soroll blanc.

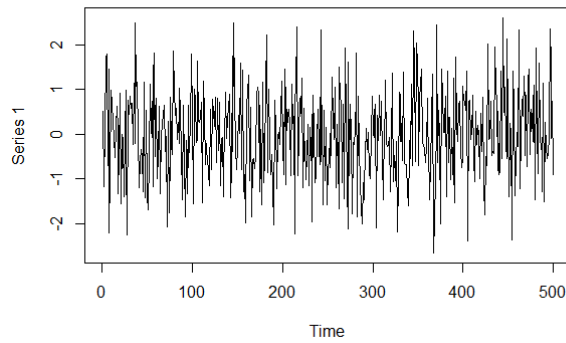


Figura 19: Residus del model

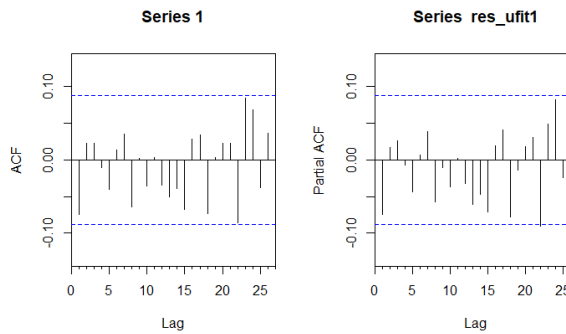


Figura 20: ACF i PACF dels residus del model

A la Taula 5 podem veure que al realitzar un *Augmented Dickey-Fuller Test* rebutgem la hipòtesi nul·la de que hi hagi una arrel unitària i per tant els residus són estacionaris. A més, de les següents 4 proves *Ljung-Test* deduïm que els residus són incorrelacionats i per tant té sentit pensar que són soroll blanc.

Prova	p-valor
ADF test	< 0.01
Ljung-Test ($lag=1$)	0.09742
Ljung-Test ($lag=12$)	0.767
Ljung-Test ($lag=24$)	0.293
Ljung-Test ($lag=36$)	0.6883

Taula 5: p-valors de les proves realitzades als residus.

Veiem per últim si segueixen una distribució en específic. A les Figures 21 i 22 podem apreciar com sembla ser que els nostres residus segueixin una distribució normal.

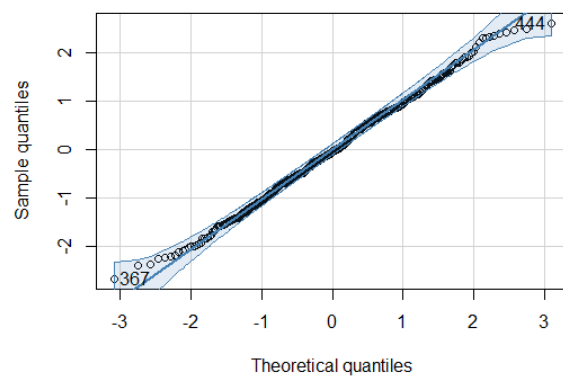


Figura 21: qq-Plot dels residus

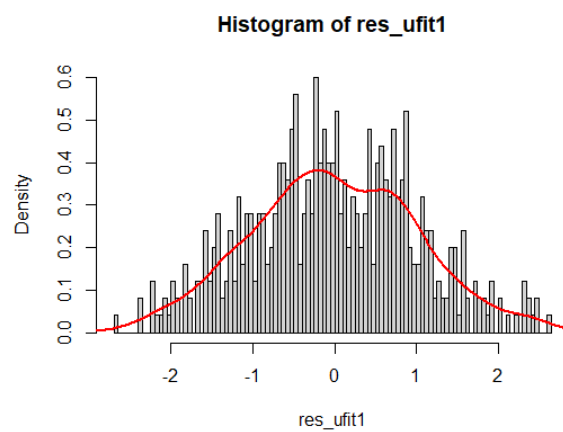


Figura 22: Histograma i línia de densitat dels residus