Anàlisi de Dades Financeres

Universitat Autònoma de Barcelona

Apunts Assignatura

basats en els apunts i les classes de Albert Ferreiro.

Eric Jiménez Barril - Judit de Paz Ramírez

1 de desembre del 2023

Índex

1 INTRODUCCIÓ A L'ENGINYERIA FINANCERA

1.1 Definició de finances

Les finances són la ciència i la tècnica subjacents a la resposta de la pregunta següent:

> Quant val 1 en un any?

En altres paraules, les finances s'ocupen del valor temporal dels diners. Els diners poden canviar el seu valor a causa de:

- **Costos d'oportunitat:** l'excedent de diners s'utilitza per invertir, però el compromís d'una inversió determinada pot impedir que el prestador dels diners assigni aquesta riquesa a altres oportunitats d'inversió que es puguin presentar en el futur. Aquest efecte es capta principalment pels tipus d'interès en el seu format lliure de risc o inflació.
- **Risc de contrapart:** el préstec de diners a algú sempre té un risc incrustat derivat de la incapacitat del prestatari de retornar o afrontar els seus compromisos.
- **Costos associats:** algunes riqueses poden tenir costos associats, per exemple, emmagatzematge i seguretat d'efectiu o costos de lloguer associats a l'emmagatzematge de productes bàsics (com ara oli, blat de moro, soja, ...).
- ...

1.2 Fair Value

Les finances tenen moltes connexions amb la teoria de jocs i, per tant, la probabilitat i el càlcul estocàstic s'han convertit en una de les principals eines per als professionals dels mercats financers.

> Una **transacció financera** és un acord entre dues contraparts i perquè això succeeixi, totes dues han d'assumir que el comerç és just.

Per exemple, imagineu-vos que decidiu anar a un casino i se us demana que pagueu un bitllet d'entrada, perquè tots els jocs del casino són aleatoris, no voldreu pagar una entrada que superi els guanys esperats (en cas contrari, perdràs diners si jugues moltes vegades); en canvi, si us demanen un bitllet que és inferior al guany previst, és evident que el casino tancarà tard o d'hora. Per tant, la transacció (que entreu al casino) només es produeix quan les dues contraparts acorden un valor raonable (preu). A les aplicacions de la vida real hi ha algunes friccions als mercats financers que fan falsa aquesta situació idealitzada, però a l'efecte del curs tindrem en compte que aquesta idea és certa.

Tornant a les qüestions financeres, es pot trobar la següent oportunitat:

> **Exemple**
>
> Imagina que estàs davant d'una oportunitat d'inversió.
> Una inversió de 1.000 avui pot anar molt bé i convertir-se en 1.500 en un any o anar malament i recuperar només 500. Els dos resultats són igualment probables.
> Invertiries?

Com veieu, la pregunta típica de les finances s'assembla molt a un problema de teoria de jocs. En aquesta situació difícil hem d'introduir coneixements addicionals per poder respondre correctament la pregunta, a saber:

- És justa la inversió?
- Quins són els tipus d'interès en un any?
- Hi ha un cost d'oportunitat?

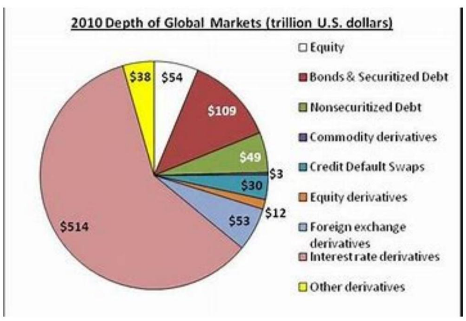
- Hi ha alguna possibilitat que el prestatari vagi a la fallida i no recupereu res de la inversió?

1.3 Productes i mercats

Els mercats financers varien segons les particularitats de l'actiu subjacent que es negocia, encara que els principis segueixen sent els mateixos. Alguns dels mercats financers més importants són:

- **Equity:** l'instrument financer més bàsic també conegut com **accions (*stock* o *share*)**. Aquest actiu representa la propietat d'una petita part d'una empresa, donant dret a part dels seus ingressos. Les empreses emeten accions per augmentar el capital per afrontar els reptes d'inversió.
- **Matèries primeres:** normalment productes en brut com metalls preciosos, petroli, aliments,... Els preus dels productes sovint mostren efectes estacionals i la major part de l'activitat comercial es fa mitjançant contractes futurs.
- **Moneda (FX):** els tipus de canvi, els mercats de divises o els mercats FX són mercats que intercanvien una moneda per una altra. Aquest és un dels mercats preferits per als arbitratges, ja que els mercats de divises haurien de satisfer (majoritàriament) la transitivitat entre triplets de monedes. Aquest també és un dels pocs mercats que sempre estan operatius.
- **Índexs:** són mitjans per mesurar com va el mercat de valors/economia en el seu conjunt. Un índex típic està format per una cistella d'existències o productes representatius (IBEX35, SP500, NSADAQ, ...).
- **Valors/Títols de renda fixa:** són valors/títols que paguen un interès fix durant la vida de l'instrument financer. També conegut com a bons, comprar un bon significa prestar diners a una contrapart que té l'obligació de retornar el principal i els interessos estipulats a l'extracte del bon.
- **Forward i futurs:** un contracte forward és un acord en què una part es compromet a comprar un actiu d'una altra part en un moment determinat del futur a un preu determinat avui. Cap diners canvia de mans fins a la data de lliurament o el venciment. Els contractes futurs són similars, però es negocien a través d'un mercat de canvi i, per tant, estan estandarditzats en els seus termes.
- **Derivats:** instruments els quals el valor depèn de l'evolució del preu d'un altre producte, anomenat subjacent. Pràcticament qualsevol cosa que no s'hagi definit abans.

Durant aquest curs ens centrarem en exemples relacionats només amb accions. El gràfic següent mostra la part dels diferents mercats financers. Els mercats de renda variable poden ser els mercats més coneguts pel públic en general, ja que són citats regularment a les notícies i són el mercat més fàcil d'invertir. D'altra banda, només representen una petita part de l'activitat global del mercat i, per tant, els actors professionals del mercat comercialitzen més volum en altres activitats (per exemple, els derivats de tipus d'interès, principalment els swaps, són, amb diferència, el producte més negociat i solen estar reservats a inversors institucionals).



1.4 Module Disclaimer

Aquest curs pretén ser una introducció suau a les finances, mostrant els elements bàsics de les tècniques modernes d'enginyeria financera. Hi ha una gran bretxa entre la teoria i convertir-se en un practicant en els mercats financers.

2 MATEMÀTICA FINANCERA

2.1 Fonaments

L'objectiu d'aquest capítol és introduir les operacions matemàtiques bàsiques en finances. També introduirem la derivació de les quotes mensuals d'un préstec o d'una hipoteca amb amortització francesa (per a la gran majoria de vosaltres, probablement aquesta serà la inversió més important de la vostra vida).

Els principals conceptes a tractar són:

- Definicions bàsiques
- Tipus de lleis financeres i freqüències de capitalització
  - Capitalització
  - Descomptes
- Préstecs i hipoteques

Alguns d'aquests conceptes no s'utilitzaran fins al capítol 3, però són conceptes bàsics que no s'han d'oblidar.

2.2 Definicions bàsiques

Anomenem **capital financer** al valor d'un actiu en el moment que està disponible. Això vol dir que el valor d'un actiu pot no ser el seu preu actual, sinó el preu esperat sempre que tingueu dret a tenir-lo. Això també vol dir que no podem comparar quantitats de diners en diferents períodes de temps, és a dir, no podem comparar (o sumar, o restar,...) una unitat monetària avui respecte d'una unitat monetària en un any. Per tant, hem d'entendre com transformar qualsevol d'ells perquè sigui comparable i fer operacions amb ells.

En el sentit anterior, el **tipus d'interès** és la rendibilitat exigida per renunciar a consumir un actiu ara, a canvi de la promesa d'un consum futur. Si esteu prestant diners a una altra persona durant un mes, demanareu algun interès a canvi, ja que renuncies a utilitzar aquests diners durant un període d'un mes. A més, esteu incorrent en el risc que el prestatari no pugui tornar aquests diners i, per tant, haureu de cobrar per aquest risc.

Tots els tipus d'interès tenen almenys dos components:

- **Taxa d'interès sense risc:** reflecteix el valor temporal dels diners, que és purament la rendibilitat que es demanaria a una part sense cap mena de dubte de la seva capacitat per atendre el préstec. A la pràctica, aquests tipus estan representats pel tipus d'interès derivat del deute públic de països molt solvents (Alemanya per a EUR, EUA per a dòlars, . . .)
- **Prima de risc:** reflecteix la rendibilitat addicional que s'exigeix per assumir el risc que la promesa de pagament futur no sigui respectada per aquella part en concret. Això depèn en gran mesura de la part concreta, de la durada del contracte o de molts altres aspectes. Per exemple, el deute italià té una prima de risc sobre el deute alemany, ja que els inversors suposen que hi ha una probabilitat de fallida molt més gran per a l'economia italiana que l'alemanya, tot i que aquesta pot ser molt baixa.

Per simplificar aquest curs només tractarem les taxes sense risc i assumirem que no hi ha risc de contrapart.

2.3 Lleis financeres

Les lleis financeres són models per (valorar) moure diners al llarg del temps. Si una unitat de diners val més o menys que la mateixa unitat de diners en un any, com podem comparar els fluxos d'efectiu en diferents períodes de temps? Per exemple, com podem decidir quina és la millor oportunitat d'inversió entre les dues següents:

- 1 avui
- 1,1 en 1 any

Com s'ha dit abans, una manera de fer una certa correspondència entre els fluxos d'efectiu en diferents períodes de temps és mitjançant el tipus d'interès. Per exemple, el problema anterior es podria resoldre de la següent manera: aneu a un banc i pregunteu quin seria l'interès que estan donant per un dipòsit d'1 durant un any; si això és inferior a 0,1, es prefereix la segona opció anterior. El que acabem de fer és comparar les dues opcions anteriors (dos fluxos d'efectiu en períodes de temps diferents) mitjançant un tipus d'interès. Com hem esmentat anteriorment, només considerarem un tipus d'interès conegut, la **taxa lliure de risc**, i per tant podrem comparar els fluxos d'efectiu. A la pràctica, la qüestió és més complexa, però n'hi ha prou amb dir que hi ha unes corbes de tipus d'interès acceptables per ser denominades sense risc i disponibles per a qualsevol consulta.

Una **equivalència financera** és la correspondència entre dos capitals financers segons una llei financera determinada:

- **Capitalització:** avançar els diners en el temps. Determinació del valor final que equival a un determinat valor inicial.
- **Descomptes:** moure diners enrere en el temps. Determinació del valor inicial que equival a un determinat valor final.

De fet, s'apliquen algunes convencions del mercat quan s'utilitzen aquestes lleis i s'utilitza una fórmula lleugerament diferent quan es tracta de terminis inferiors a un any (interès simple) o superiors a un any (interès compost).

Capitalització d'interès simple

$$C_T = C_0(1 + it)$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%) i t és el venciment (anys).

Descompte d'interés simple

$$C_0 = \frac{C_T}{(1 + it)}$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%) i t és el venciment (anys).

Exemple

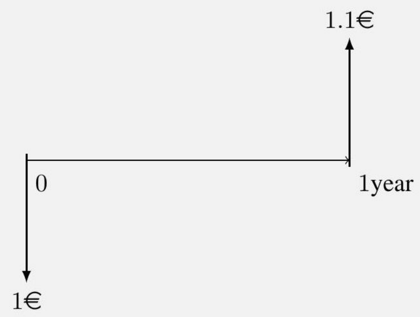
Suposem una taxa d'interès plana de 10%, quin seria el rendiment esperat d'un préstec de 1 amb un venciment a 1 any?

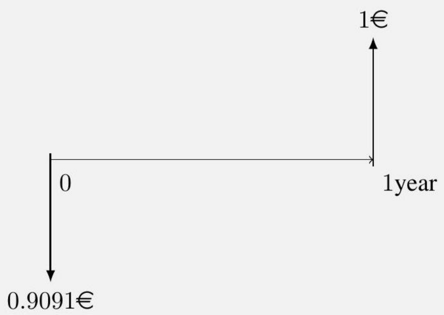
$$\left.\begin{array}{ll} C_0 & = 1 \\ i & = 10\% \\ t & = 1 \text{ year} \end{array}\right\} \Rightarrow C_T = C_0(1 + it) = 1.1$$

Suposem que vull obtenir 1 en un any, quant he d'invertir?

$$\left.\begin{array}{rl} C_T & = 1 \\ i & = 10\% \\ t & = 1 \text{ year} \end{array}\right\} \Rightarrow C_0 = \frac{C_T}{(1 + it)} = 0.9091$$

La primera configuració seria el problema típic per saber quant guanyaria en una inversió i la segona situació és la configuració habitual d'un problema d'assegurança. Per exemple, les companyies d'assegurances prometen certs ingressos en el futur basant-se en una mica d'entrada ara, per tant, haurien de calcular quins són els pagaments que han de fer els clients ara en funció del tipus d'interès actual per guanyar una quantitat específica quan es jubilin.
Gràficament representarem les equivalències financeres anteriors com:





Les fletxes que van cap avall són diners que donem o invertim, i les fletxes que van cap amunt són diners que rebem.

En les fórmules d'interès simples, el tipus d'interès només s'aplica al capital inicial, però en inversions més llargues s'assumeix habitualment que s'aplicaria l'interès sobre l'interès de manera composta.

Capitalització d'interés compost

$$C_T = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{tn}$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%), t és el venciment (anys) i n és la freqüència de pagament d'interessos en un any.

Descompte d'interés compost

$$C_0 = \frac{C_T}{(1 + \frac{i}{n})^{tn}}$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%), t és el venciment (anys) i n és la freqüència de pagament d'interessos en un any.

Exemple

Suposem que una inversió paga un interès semestral de 5 %. Què suposaria una inversió de 1 en 3 anys?

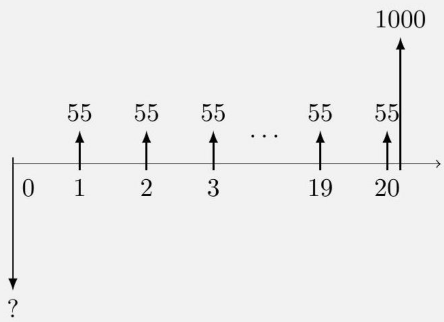
$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ i &= 5\% \\ n &= 2 \\ t &= 3 \text{ year} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_T = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{tn} = 1.1597$$

Exemple

Considereu un bon que fa pagaments regulars més el principal al venciment amb les característiques següents:

- Principal 1000
- Taxa sense risc 6%
- Venciment 20 anys
- Cupó anual de 5,5 %

Quin seria el preu avui? En altres paraules, quina és l'equivalència de preus avui de l'estructura següent:



Hem de descomptar cada flux d'efectiu al valor actual:

$$\text{Preu} = \sum_{i=1}^{20} \frac{55}{(1+0.06)^i} + \frac{1000}{(1+0.06)^{20}} = 942.65$$

Encara hi ha un altre tipus d'interès compost utilitzat per fixar el preu dels derivats (utilitzarem aquest mètode al capítol 3), que és la composició contínua. Suposem que la nostra inversió produeix interès instantani de manera continua, llavors hauríem limitat que la freqüència de pagaments anuals tendeixen a l'infinit com $n \to \infty$, que transforma la fórmula de capitalització anterior en:

$$C_T = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{tn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C_0 e^{it}$$

Capitalització d'interés compost en el temps

$$C_T = C_0 e^{it}$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%) i t és el venciment (anys).

Descompte d'interés compost en el temps

$$C_T = C_0 e^{-it}$$

on C_T és el capital final (), C_0 és el capital inicial (), i és el tipus d'interès anual (%) i t és el venciment (anys).

2.4 Préstecs i hipoteques

Un **préstec** és una operació financera en la qual el prestador atorga una suma, anomenada principal, al prestatari que es compromet a amortitzar el principal i pagar els interessos fins que s'hagi pagat la totalitat del deute.

La definició de bons entra en la categoria anterior, però com ja sabeu, un préstec normal no amortitza el principal de la manera que hem descrit els bons. Els bons tendeixen a amortitzar l'import total del principal al final del termini del contracte, mentre que un préstec a un client minorista s'estructura de manera que les quotes mensuals inclouen l'amortització del principal així com els interessos meritats. Això es fa per tal de minimitzar el risc que el client no pugui pagar els seus deutes.

La forma en què les quotes mensuals de principal i interessos es fan constants durant la vida del préstec s'anomena perfil d'amortització francès i és, amb diferència, l'estructura de pagament de préstecs o hipoteca més habitual disponible.

Suposem que accepteu un préstec de D reemborsable en T anys a una taxa de R% mensual. Cada quota mensual és la suma de tots els interessos meritats durant el mes sobre el principal pendent a principis de mes i una quantitat determinada per amortitzar el principal. Resumim les quotes de la següent manera:

Mes	Deute a l'inici del període	Interés acumulat	Reemborsament de capital
1	D	$D\frac{R}{12}$	x
2	$D-x$	$(D-x)\frac{R}{12}$	y
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La quota mensual és aleshores la suma dels interessos meritats (recordem que per la freqüència de pagaments mensuals, els interessos meritats durant un mes es calculen mitjançant la capitalització d'interessos simples) més la devolució del capital, i ja que volem que la quota mensual sigui constant al llarg del tota la vida del préstec, en particular sosté que:

$$D\frac{R}{12} + x = (D-x)\frac{R}{12} + y$$

i per tant $y = \left(1 + \frac{R}{12}\right)x$. Per tant, la taula anterior es pot reescriure com:

Mes	Deute a l'inici del període	Interés acumulat	Reemborsament de capital
1	D	$D\frac{R}{12}$	x
2	$D-x$	$(D-x)\frac{R}{12}$	$x\left(1+\frac{R}{12}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$12T$	$\vdots$	$\vdots$	$x\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12T-1}$

Atès que la devolució del capital hauria de sumar el deute inicial que tenim

$$\sum_{i=0}^{12T-1} x\left(1+\frac{R}{12}\right)^{i} = D$$

i per tant $x = \frac{D\frac{R}{12}}{\left(\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12T}-1\right)}$. Finalment per derivar la quota mensual hem de sumar els interessos meritats durant el primer període de pagament per acabar amb:

$$\begin{aligned}
\text{Quota mensual } &= D\frac{R}{12} + \frac{D\frac{R}{12}}{\left(\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12T}-1\right)} \\
&= \frac{D\frac{R}{12}\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12T}}{\left(\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12T}-1\right)}
\end{aligned}$$

La fórmula anterior i la construcció de la taula permeten calcular no només la quota mensual, sinó també els interessos pagats durant tota la vida del préstec. Fins i tot podeu simular un canvi en el tipus d'interès R a partir d'un mes específic (només cal que reinicieu el problema com a nou préstec amb el principal pendent en aquest moment i el temps restant fins al venciment per calcular les noves quotes mensuals).

> La derivació anterior dista molt de ser la fórmula més important d'aquest curs, però sens dubte serà la fórmula més important per a la gran majoria de la societat pel que fa a la seva economia familiar.

3 SERIES TEMPORALS I

3.1 Context

L'objectiu d'aquest capítol és introduir les aplicacions dels models *ARMA* i *GARCH* en finances. L'aplicació més habitual d'aquests models és produir prediccions de sèries temporals macroeconòmiques com el PIB, la inflació, les taxes d'atur, els preus de l'habitatge,... Com podeu suposar, aquestes dades són molt importants per a la previsió a llarg termini de les entitats financeres. Aquest tipus d'entitats solen disposar d'un departament dedicat als estudis macroeconòmics per fer el seguiment de l'evolució d'aquestes variables i estimar el comportament futur. Per exemple, les taxes d'atur poden ser un indicador que la morositat en els pagaments dels préstecs pot augmentar en un futur proper i, per tant, l'entitat de crèdit ha d'estar preparada per a aquest esdeveniment. Aquests departaments macroeconòmics utilitzen una barreja d'economistes i estadístics/matemàtics per produir els seus models, i recentment els perfils de ciència de dades s'han demanat cada cop més.

L'objectiu d'aquest capítol és presentar una visió general ràpida dels models matemàtics i utilitzar paquets integrats a R per calibrar dades reals. No pretenem proporcionar la derivació completa dels models utilitzats ni elaborar les millors estimacions per als paràmetres d'un model en particular, d'altra banda presentarem aquests models com a models plausibles per ser utilitzats en aquestes sèries temporals macroeconòmiques i utilitzarem el que tenim disponible a R per construir-los, calibrar-los i predir-los.

3.2 Processos estocàstics i sèries estacionàries

Una sèrie temporal és una seqüència d'observacions en ordre cronològic, per exemple, els rendiments diaris de les accions. Un **procés estocàstic** és una seqüència de variables aleatories i, pel tant, una sèrie temporal es pot veure com una realització (mostra) d'un procés estocàstic.

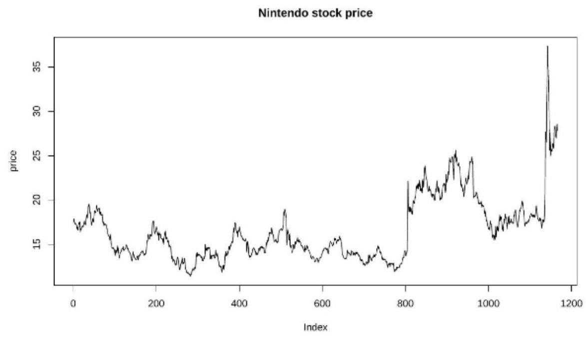
Sempre que s'enfronti a la tasca de construir un model per a dades reals, s'enfrontarà al problema de determinar quins paràmetres es necessiten per ajustar el model correctament. Ajustar massa un model és un problema greu ja que es pot crear un model amb una capacitat de predicció molt limitada i, per altra banda, utilitzar poques variables pot donar lloc a un model inútil. Cal utilitzar tants paràmetres com sigui necessari i no més i, si és possible, donar-los un significat contextual a tots ells. Això significa que els paràmetres utilitzats tenen una interpretació pràctica/qualitativa respecte a les dades que estem calibrant. Això es coneix com a parsimònia del model.

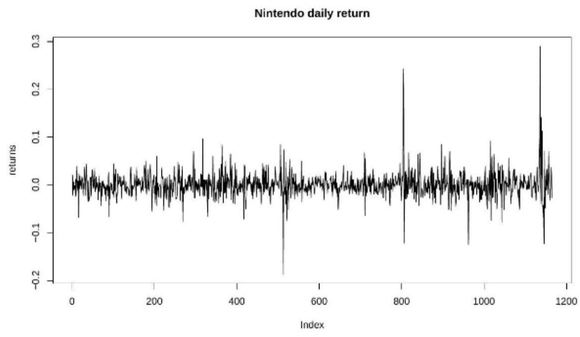
Un dels mètodes més útils per obtenir parsimònia en sèries temporals és assumir estacionarietat. Aquesta propietat s'observa en una sèrie temporal quan les fluctuacions semblen aleatòries però sovint amb el mateix tipus de propietats estocàstiques al llarg de la mostra. Per exemple, els preus de les accions semblen aleatoris d'un període a un altre, però sovint les estadístiques com els mitjans de comunicació i la variació dels seus rendiments semblen comportar-se de manera menys aleatòria.

Un procés estacionari és un model de probabilitat amb comportament invariant en el temps; en altres paraules, tots els aspectes del seu comportament són invariables sota un canvi de temps. La propietat invariable en el temps no permet construir models amb menys paràmetres.

El següent exemple mostra els preus de les accions i els rendiments de les accions de Nintendo:

```
# Stock evolution of Nintendo

rm(list=ls())                          # Removes all variables from workspace
library("quantmod")                    # Library to get prices from Yahoo
options("getSymbols.warning4.0"=FALSE) # set off warnings
cat("\f")                              # Clear console


getSymbols('NTDOY',scr='yahoo',from="2012-01-01",to="2016-08-20")
nint_close=NTDOY$NTDOY.Close

price=as.numeric(nint_close)
returns=log(price[2:length(price)]/price[1:length(price)-1])


pdf("nintendo01.pdf",width=10,height=6)
plot(price, type="l",main="Nintendo stock price")
dev.off()

pdf("nintendo02.pdf",width=10,height=6)
plot(returns,type="l", main="Nintendo daily return")
dev.off()
```





Returns

L'objectiu d'invertir és, per descomptat, obtenir beneficis. Els ingressos depenen tant del canvi de preus com de les quantitats d'actius que es mantenen. Els inversors estan interessats en ingressos que siguin elevats en relació amb la mida de la inversió inicial. Els rendiments ho mesuren perquè els rendiments d'un actiu són canvis de preu expressats com una fracció del preu inicial. Els rendiments són lliures d'escala, és a dir, no depenen de les unitats.

- **Rendiments nets (Net Returns):** Sigui P_t el preu d'un actiu en el moment t, el rendiment net és
$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$
Per tant, els ingressos d'una inversió són simplement la inversió inicial multiplicada pel rendiment net.
- **Registre de retorns (Log Returns):** els rendiments anomenats contínuament compostos es defineixen com:
$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}$$
on $p_t = \log(P_t)$ s'anomena preu log.

Definim correctament aquesta propietat invariant en el temps

Procés estacionari fort

Sigui $\{Y_n\}_n$ un procés estocàstic i $F(Y_{n_1}, Y_{n_2}, \ldots, Y_{n_k})$ sigui la funció de distribució acumulada de $\{Y_n\}_n$ als temps $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Aleshores es diu que $\{Y_n\}_n$ és fortament estacionari si per a qualsevol n i m
$$F(Y_{n_1}, Y_{n_2}, \ldots, Y_{n_k}) = F(Y_{n_1+m}, Y_{n_2+m}, \ldots, Y_{n_k+m})$$

La propietat anterior és realment molt restrictiva i sovint ens sentim prou còmodes com per indicar una versió feble

Procés estacionari feble

Sigui $\{Y_n\}_n$ un procés estocàstic, llavors es diu que $\{Y_n\}_n$ és estacionàriament feble si

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mu$$
$$\mathbb{V}[Y_i] = \sigma^2$$
$$Corr(Y_i, Y_j) = \rho(|i-j|)$$

per a tots els i i j i alguna funció ρ.

La funció $\rho(h)$ s'anomena funció d'autocorrelació. Una altra funció relacionada i rellevant seria la funció d'autocovariància

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \gamma(|i-j|)$$

que és una transformació simple de la funció d'autocorrelació com a $\gamma(h) = \sigma^2 \rho(h)$.

Una sèrie temporal estacionària hauria de mostrar oscil · lacions al voltant del mateix nivell fix, anomenada reversió mitjana. Si la sèrie es pregunta sense tornar repetidament al mateix nivell fix, llavors la sèrie no s'ha de modelar com a estacionària. Com s'ha vist abans, moltes sèries temporals financeres no són estacionàries, però sovint les transformacions ho són, per exemple, la transformació dels preus en rendiments de registre a les accions de Nintendo.

Soroll blanc (White noise)

És l'exemple més senzill de procés estacionari. La seqüència $\{Y_n\}_n$ és un soroll blanc feble, $WN\left(\mu, \sigma^2\right)$, si

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y_i\right] &= \mu \\ \mathbb{V}\left[Y_i\right] &= \sigma^2 \\ Corr(Y_i, Y_j) &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Per definició, la funció d'autocorrelació és:

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho(0) = 1 \\ \rho(h) = 0 \text{ per } h \neq 0 \end{cases}$$

Tingueu en compte que un soroll blanc i.i.d. (independent i distribuït de manera idèntica) és fortament estacionari, ja que la distribució multivariada conjunta és el producte de les seves distribucions marginals que són totes iguals.

3.3 Estimació de paràmetres

Suposem que observem $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ d'un procés estacionari. La mitjana mostral, $\widehat{\mu} = \bar{Y}$, i la variància mostral $\widehat{\sigma}^2 = s^2$, es pot utilitzar per estimar la mitjana i la variància. Per estimar la funció d'autocorrelació podem utilitzar la següent estimació de la funció de autocovariància

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{\sum_{j=1}^{n-h}\left(Y_{j+h} - \bar{Y}\right)\left(Y_j - \bar{Y}\right)}{n}$$

i a partir d'aquí podem estimar la funció d'autocorrelació com

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}$$

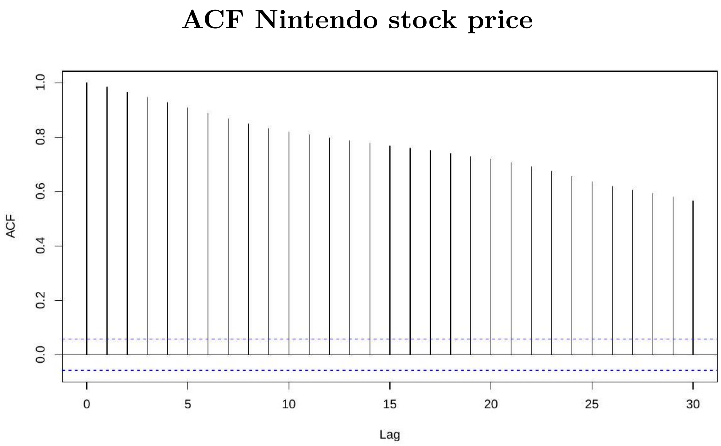
Els **diagrames ACF** i la **prova Ljung-Box** són eines integrades a R per representar la funció d'autocorrelació i provar-la. El diagrama ACF es mostra amb límits de prova, que s'utilitzen per comprovar si un coeficient d'autocorrelació particular és nul. El nivell de confiança habitual és de 0.05 i, per tant, podem esperar 1 de cada 20 coeficients d'autocorrelació de mostra de l'ample de banda simplement per casualitat. L'alternativa és utilitzar una prova simultània on hi ha la hipòtesi nul · la

$$H_0 := \rho(1) = \rho(2) = \cdots = \rho(k)$$

per alguna k. El següent test s'en diu Ljung-Box test.

```
...

pdf("nintendo01_ACF.pdf",width=10,height=6)
acf(price, main="ACF Nintendo stock price")
dev.off()

pdf("nintendo02_ACF.pdf",width=10,height=6)
acf(returns, main="ACF Nintendo daily return")
dev.off()

Box.test (returns, lag = 20, type = "Ljung")
```

```
	Box-Ljung test

data:  returns
X-squared = 29.1, df = 20, p-value = 0.08581
```



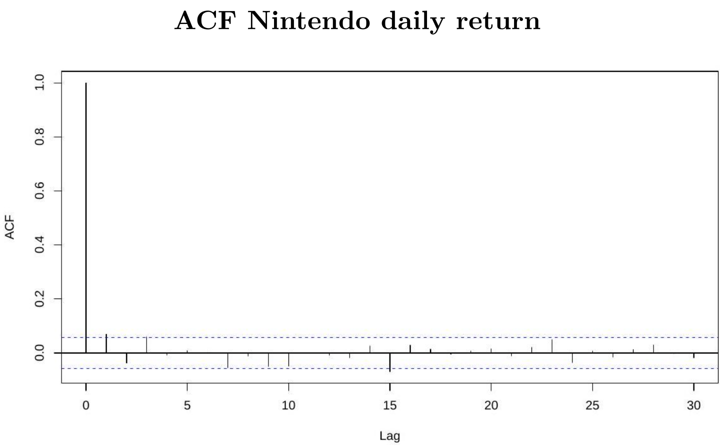


Figura 2: El primer gràfic ACF mostra una lenta decadència fins a zero, que és un signe de memòria de dependència llarga o procés no estacionari. La decadència ràpida cap a zero és coherent amb l'estacionarietat i coincideix amb l'observació feta a les imatges anteriors.

3.4 $AR(p)$ Processos autoregressius

Encara que els processos estacionaris són d'alguna manera parsimoniosos amb els paràmetres, encara en tenen un nombre infinit, és a dir, $\{\rho(i)\}_i$. Necessitem una classe de procés estacionari amb un nombre finit de paràmetres però una àmplia gamma de comportaments perquè es puguin calibrar fàcilment a dades reals i siguin models significatius. Aquests són models $ARIMA$. Per tal de construir els models $ARIMA$ primer mirarem la família més petita de processos AR, que es coneixen pels models autoregressius.

$AR(1)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un $WN\left(0,\sigma^2\right)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $AR(1)$ si per a algun paràmetre constant μ i ϕ, es compleix l'equació següent:

$$Y_t - \mu = \phi\left(Y_{t-1} - \mu\right) + \epsilon_t$$

El paràmetre μ és la mitjana del procés i el terme $\phi\left(Y_{t-1} - \mu\right)$ representa la memòria, en particular la constant ϕ determina la velocitat de la reversió mitjana del procés (com més gran en valor absolut més lent torna el procés a la seva mitjana). Finalment, $\{\epsilon_n\}_n$, s'interpreta com a perturbacions (*shocks*) d'informació en sèries temporals financeres. Més endavant en el curs mostrarem que en algunes teories de formació de preus les notícies i els perturbacions (*shocks*) d'informació són els motors de l'evolució dels preus. En aquest cas, no es pot anticipar informació nova, de manera que els efectes de la informació d'avui haurien de ser independents de les notícies d'ahir i, per tant, l'ús d'un WN.

Observeu que perquè Y sigui un procés feblement estacionari necessitem $|\phi| < 1$. Per derivar aquesta observació, anomenem σ_Y la variància de Y_t, que per independència, segueix

$$\sigma_Y^2 = \phi^2\sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2$$

Podem reescriure la definició de $AR(1)$ com

$$\begin{aligned}
Y_t &= (1-\phi)\mu + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \\
&= (1-\phi)\mu + \phi\left((1-\phi)\mu + \phi Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}\right) + \epsilon_t \\
&= \mu + \phi^2\mu + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi Y_{t-2} \\
&= \mu + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{h=0}^{\infty}\phi^h\epsilon_{t-h}
\end{aligned}$$

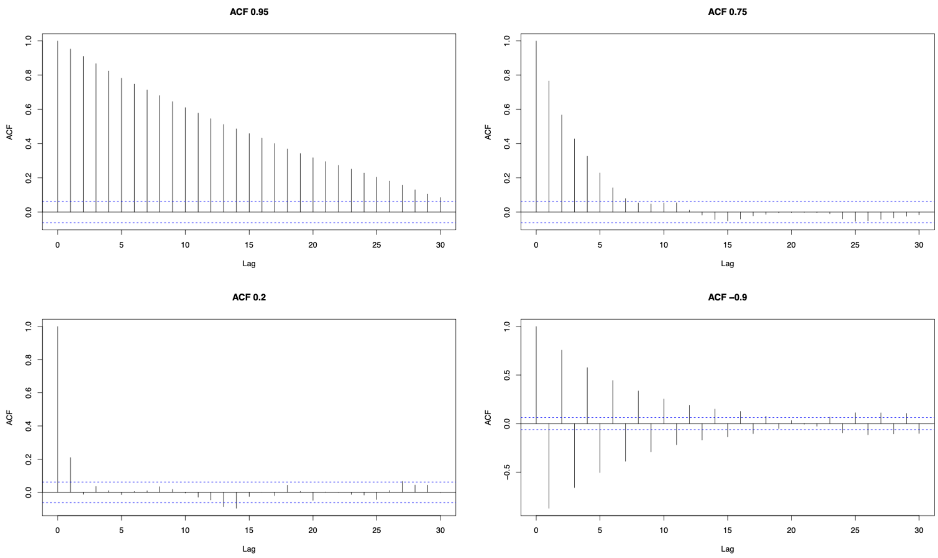
que és una manera de veure un $AR(1)$ com a mitjana ponderada de tots els xocs de soroll blanc passats (o el preu d'un actiu financer com a mitjana ponderada de tota la informació relacionada amb el passat).

Per a un procés $AR(1)$ estacionari, és a dir $|\phi| < 1$, podem derivar fàcilment el següent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_t\right] &= \mu \\
\gamma(0) &= \mathbb{V}\left(Y_i\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\phi^h\epsilon_{t-h}\right) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \\
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i\epsilon_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\epsilon_{t+h-j}\right) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|} \\
\rho(h) &= \phi^{|h|}
\end{aligned}$$

El gràfic ACF per a un $AR(1)$ depèn només d'un paràmetre, és a dir, ϕ. Aquest és un nivell notable de parsimònia però amb un preu elevat. Només s'aconsegueix una quantitat limitada de diferents gràfics ACF amb un $AR(1)$.

```r
rm(list=ls())                                   # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                       # Clear console

y.95 <- arima.sim(model=list(ar=.95), n=1000)

pdf("AR_ACF_1.pdf",width=10,height=6)
acf(y.95, main="ACF 0.95")
dev.off()

y.75 <- arima.sim(model=list(ar=.75), n=1000)

pdf("AR_ACF_2.pdf",width=10,height=6)
acf(y.75, main="ACF 0.75")
dev.off()

y.2 <- arima.sim(model=list(ar=.2), n=1000)

pdf("AR_ACF_3.pdf",width=10,height=6)
acf(y.2, main="ACF 0.2")
dev.off()

y.99 <- arima.sim(model=list(ar=-.9), n=1000)

pdf("AR_ACF_4.pdf",width=10,height=6)
acf(y.99, main="ACF -0.9")
dev.off()
```



Si $|\phi| \geq 1$ el $AR(1)$ no és un procés estacionari, i la variància no és constant. Hi ha un cas especial quan $\phi = 1$ s'anomena Random Walk:

Random Walk

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un $WN\left(0, \sigma^2\right)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és una Random Walk si es compleix l'equació següent:

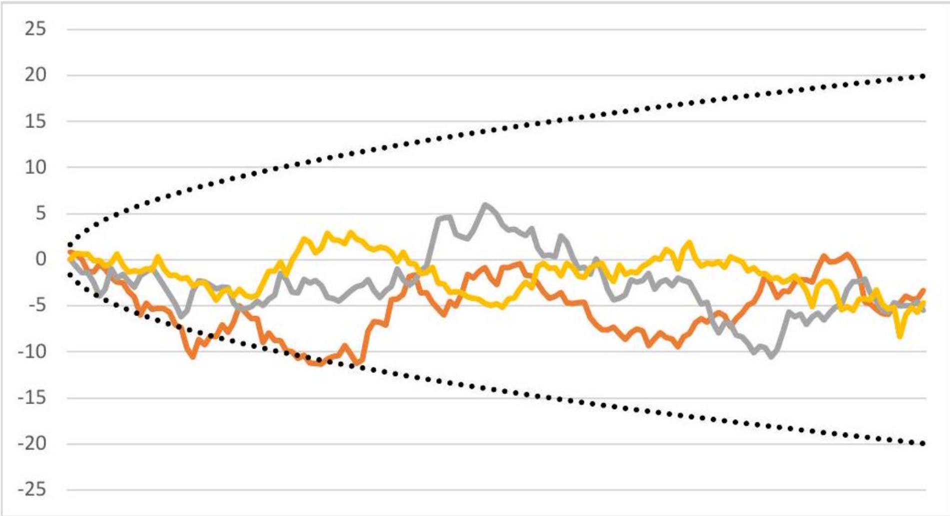
$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Es pot reescriure fàcilment l'anterior com:

$$Y_t = Y_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_t$$

I, per tant, el procés té un comportament de reversió a la mitjana, però també té llargues excursions des de la mitjana

$$\mathbb{E}\left[Y_t \mid Y_0\right] = Y_0$$
$$\mathbb{V}\left(Y_t\right) = t\sigma_\epsilon^2$$



Quan $|\phi| > 1$ el procés té un comportament explosiu.

R té un paquet integrat per estimar processos AR i altres sèries temporals. El mètode utilitza l'estimació de la màxima versemblança amb estimacions de menor quadrat com a punt de partida. En el procés de calibratge del model, normalment s'analitzarà la funció d'autocorrelació dels residus, ja que qualsevol correlació positiva en els residus és una evidència contra $AR(1)$.

L'exemple següent s'adapta a una sèrie temporal de preus de BMW.

```
rm(list=ls())                               # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                   # Clear console
library("evir")
data(bmw,package="evir")                    # Load BMW log prices

pdf("BMW_1.pdf",width=10,height=6)          # ACF for log prices
acf(bmw, main="BMW log reutrns")
dev.off()
Box.test (bmw, lag = 5, type = "Ljung")     # Evidence of not being a white noise
fit <-arima(x=bmw,order=c(1,0,0))           # Fit of AR(1)
fit                                         # Showing the parameters
                                            # Final analysis of the residuals
pdf("BMW_2.pdf",width=10,height=6)
acf(fit$resid , main="BMW AR residuals")
Box.test (fit$resid , lag = 5, type = "Ljung",fitdf = 1)
dev.off()
```

```
     Box-Ljung test
data:  bmw
X-squared = 44.987, df = 5, p-value = 1.46e-08
```

```
Call:
arima(x = bmw, order = c(1, 0, 0))
Coefficients:
         ar1   intercept
      0.0811       3e-04
s.e.  0.0127       2e-04

sigma^2 estimated as 0.0002163:  log likelihood = 17212.34,   aic = -34418.68
```

```
     Box-Ljung test
data:  fit$resid
X-squared = 6.8669, df = 4, p-value = 0.1431
```

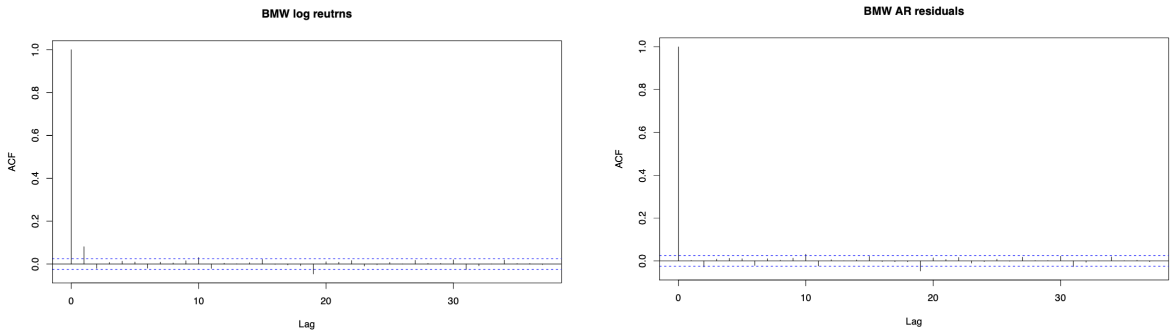


Figura 3: L'exemple s'ajusta als paràmetres següents $\hat{\phi} = 0,0811$ i $\hat{\mu} = 0,00034$. La primera prova mostra un valor p per sota del llindar, el que significa que el procés original no és un soroll blanc, la segona sortida mostra el calibratge i la importància dels coeficients, mentre que la darrera prova realitzada sobre els residus mostra la compatibilitat amb un soroll blanc. En general, l'anàlisi mostra un calibratge decent de les dades a un model $AR(1)$.

Hem vist que l'ACF d'un procés $AR(1)$ decau geomètricament a zero i signes alternatius si $\phi < 0$, però aquest és un rang limitat de comportament per a la funció ACF. Per obtenir una classe estesa de funció d'autocorrelació podem generalitzar els processos $AR(1)$ per retrocedir a valors més antics de la sèrie temporal:

$AR(p)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un $WN\left(0,\sigma^2\right)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $AR(p)$ si per algun paràmetre constant μ i $\{\phi_i\}_{i=1}^{p}$, es compleix l'equació següent:

$$Y_t - \mu = \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu\right) + \cdots + \phi_p\left(Y_{t-p} - \mu\right) + \epsilon_t$$

La fórmula anterior es pot reescriure com

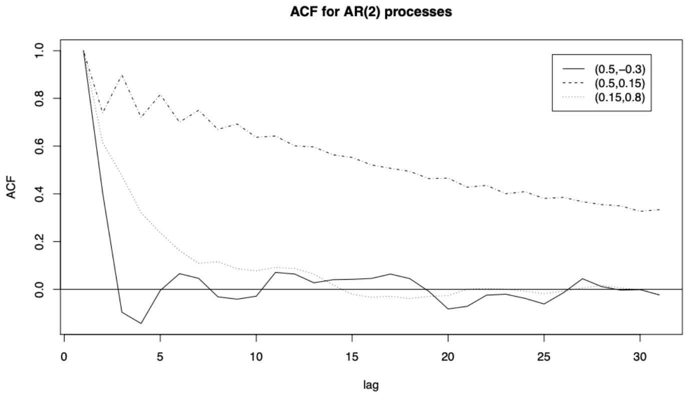
$$Y_t = \beta_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t,$$

on $\beta_0 = [1 - (\phi_1 + \cdots + \phi_p)]\,\mu$. Es pot demostrar que si Y és un procés estacionari, aleshores

$$\frac{\beta_0}{\mu} > 0$$

Encara que les fórmules s'impliquin més, la majoria dels conceptes que hem debatut per a $AR(1)$ generalitzen per a $AR(p)$. Exlotem algunes funcions ACF per $AR(2)$:

```
y <- arima.sim(model=list(order=c(2,0,0), ar=c(0.5,-0.3)), n=1000)
z <- arima.sim(model=list(order=c(2,0,0), ar=c(0.5,0.15)), n=1000)
v <- arima.sim(model=list(order=c(2,0,0), ar=c(0.15,0.8)), n=1000)

yy<-acf(y)
zz<-acf(z)
vv<-acf(v)

pdf("AR2_ACF.pdf",width=10,height=6)
plot(yy$acf, type="l",main="ACF for AR(2) processes",xlab="lag",ylab="ACF")
lines(zz$acf,lty=3)
lines(vv$acf,lty=4)
legend("topright", inset=.05, cex = 1, c("(0.5,-0.3)","(0.5,0.15)","(0.15,0.8)"), horiz=FALSE, lty=c(1,2,3))
abline(h=0,lty=1,lwd=1)
dev.off()
```



3.5 $MA(q)$ Moving Average Processes

Hi ha una necessitat potencial de valors grans de p quan s'ajusta un model $AR(p)$, el remei és introduir un component mitjà mòbil per construir un procés $ARMA$.

Abans d'introduir el procés $ARMA$, mirem els processos MA amb més detall.

$MA(q)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un $WN\left(0,\sigma^2\right)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $MA(q)$ si per algún paràmetre constant μ i $\{\theta_j\}_{j=1}^q$, es compleixen les equacions següents:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

Per un procés $MA(1)$ definit com

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1}$$

podem derivar fàcilment

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_t\right] &= \mu\\ \mathbb{V}\left(Y_t\right) &= \sigma_\epsilon^2\left(1+\theta_1^2\right)\\ \gamma(1) &= \theta_1\sigma_\epsilon^2\\ \gamma(h) &= 0 \qquad \forall|h|>1\end{aligned}$$

En un marc general, es pot demostrar que per al procés $MA(q)$:

$$\gamma(h) = 0 \quad \forall|h|>q.$$

3.6 Procés $ARMA$

Les sèries temporals estacionàries amb un comportament d'autocorrelació complexa sovint es modelen de manera més parsimoniosa mitjançant un procés mixt autoregressiu i mitjà mòbil ($ARMA$) que un procés AR o MA.

$ARMA(p,q)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un $WN\left(0,\sigma^2\right)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $ARMA(p,q)$ si per algun paràmetre constant μ, $\{\phi_i\}_{i=1}^p$ i $\{\theta_j\}_{j=1}^q$, es compleix l'equació següent:

$$Y_t - \mu = \phi_1\left(Y_{t-1}-\mu\right) + \phi_2\left(Y_{t-2}-\mu\right) + \cdots + \phi_p\left(Y_{t-p}-\mu\right) + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

El $ARMA(1,1)$ s'utilitza a la pràctica i, tanmateix, prou senzill per estudiar teòricament, entre altres expressions que es poden derivar:

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{(1+\theta\phi)(\theta+\phi)}{1+\theta^2+2\theta\phi} \text{ for } k=1 \\ \phi\rho(k-1) \text{ for } k \geq 2 \end{cases}$$

En particular, s'observa que després d'un *lag*, la funció d'autocorrelació decau com a $AR(1)$. Això vol dir que el $ARMA(1,1)$ presenta les mateixes característiques que un $AR(1)$ i un $MA(1)$.

El codi següent ajusta diversos processos $ARMA$ a la mateixa sèrie temporal i extreu els seus criteris AIC i BIC. AIC (criteri d'informació d'Akaike) i BIC (criteri d'informació bayesià) són dos criteris similars per a la selecció del model. Tots dos equilibren com de bé s'ajusta el model a les dades i quants paràmetres hi ha al model. En general, és possible augmentar la probabilitat afegint paràmetres, però això pot generar un sobreajust. En ambdós casos, com més baix sigui el criteri, millor és el model. Tingueu en compte que fins i tot quan s'utilitzen criteris AIC o BIC per seleccionar un model particular entre un conjunt finit, cal avaluar el comportament d'aquest model mitjançant gràfics AFC i anàlisis posteriors que introduirem en els apartats següents.

Recapitulem l'exemple de la sèrie temporal de preus de BMW i hi instal·lem un conjunt de models $ARMA$

```r
rm(list=ls())                              # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                  # Clear console

library("evir")
data(bmw, package="evir")                  # Load BMW log prices

aic_bic <-array(dim=c(9,4))
k=1
for (i in 0:2) {
  for (j in 0:2){
    fit <-arima(x=bmw, order=c(i,0,j))
    aic_bic[k,1]=i
    aic_bic[k,2]=j
    aic_bic[k,3]=AIC(fit)+34500
    aic_bic[k,4]=AIC(fit,k=log(length(bmw)))+34500
    k=k+1
  }
}
colnames(aic_bic) <- c("p","q","AIC","BIC")
aic_bic
```

```
aic_bic
      p q       AIC       BIC
[1,] 0 0 119.82867 133.27578
[2,] 0 1  79.21393  99.38461
[3,] 0 2  78.36773 105.26195
[4,] 1 0  81.31575 101.48642
[5,] 1 1  78.25941 105.15364
[6,] 1 2  80.44557 114.06336
[7,] 2 0  78.73415 105.62838
[8,] 2 1  80.58248 114.20026
[9,] 2 2  82.22671 122.56805
```

$ARMA(0,1)$ i $ARMA(1,1)$ semblen els millors ajustos al model. Comprovem el model $ARMA(1,1)$:

```r
rm(list=ls())                              # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                  # Clear console

library("evir")
data(bmw, package="evir")                  # Load BMW log prices

fit <-arima(x=bmw, order=c(1,0,1))

pdf("BMW_res_plot.pdf",width=10,height=6)
plot(fit$residuals, type="l",main="Residuals")
dev.off()

pdf("BMW_res_acf.pdf",width=10,height=6)
acf(fit$residuals, main="Residuals")
dev.off()

pdf("BMW_res_qqplot.pdf",width=10,height=6)
qqnorm(fit$residuals,main="Normal Q-Q plot : Residuals")
qqline(fit$residuals,col=2)
dev.off()
```

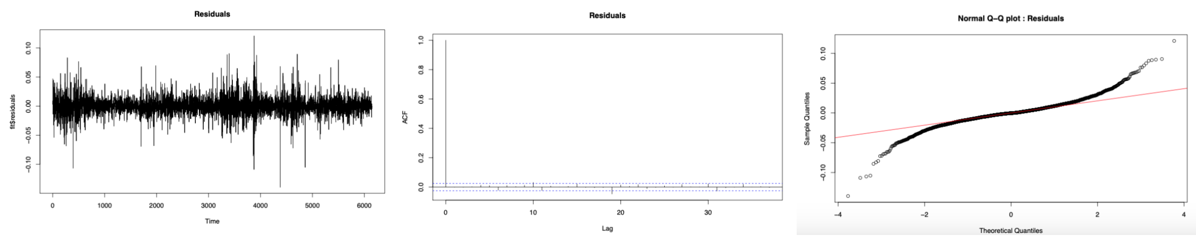


Figura 4: Descripción general de los residuales.

Tot i que l'anàlisi anterior mostra un ajust millor que un $AR(1)$, podem veure que el QQplot dels residus presenta cues fortes i hi ha signes d'agrupament en els residus. Això ens mostra que $ARMA$ pot no ser un model prou complex per adaptar-se a la sèrie temporal. De fet, els efectes de clustering no es poden produir en els models $ARMA$ i hem d'introduir el model de volatilitat al capítol següent.

3.7 Processos $ARIMA$

Sovint, la primera o segona diferència d'una sèrie temporal no estacionària són estacionàries. Els processos de mitjana mòbil integrada autoregressiva ($ARIMA$) s'introdueixen fàcilment amb l'ajuda dels operadors següents:

Operador endarrerit

Es defineix per a $k \geq 0$ per

$$B^k Y_t = Y_{t-k}$$

Operador diferenciador

Es defineix com $\Delta = 1 - B$, per tant

$$\Delta Y_t = (1 - B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta^k Y_t = (1 - B)^k Y_t = \sum_{i=1}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) Y_{t-i}$$

Aleshores

$ARIMA(p, d, q)$

Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés ARIMA(p, d, q) si $\Delta^d Y_t$ és un $ARMA(p, q)$.

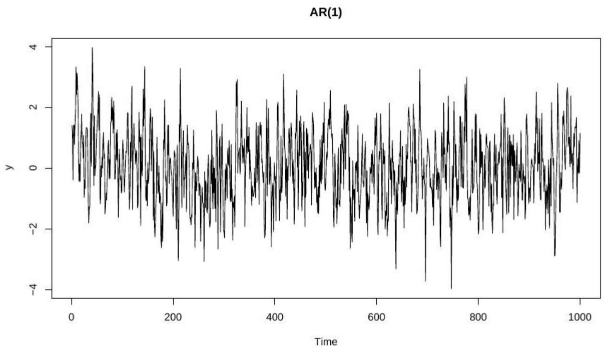
Per definició, establim $ARIMA(p, 0, q)$ com a $ARMA(p, q)$. Per exemple, si els retorns de registre són $ARMA(p, q)$, els preus de log són $ARIMA(p, 1, q)$. Tingueu en compte que si $ARIMA(p, d, q)$ és estacionari, llavors $d = 0$.

La inversa de la transformació és la integració d'un procés. La integració de Y_t és el procés definit per X_t

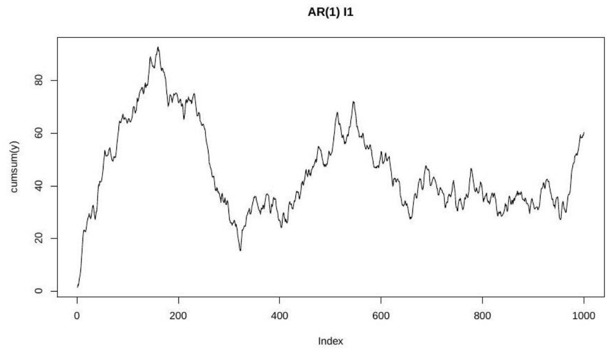
$$X_t = X_0 + Y_{t_0} + Y_{t_1} + \cdots + Y_t$$

de fet $\Delta X_t = Y_t$. Parlar qualitativament, integrar suavitza el procés i diferenciar-lo el fa més dur. En l'exemple següent podeu apreciar com es veu un procés d'integració:

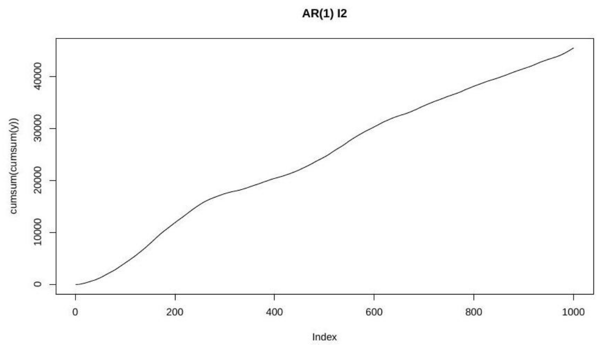
```
rm(list=ls())                                    # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                        # Clear console

y <- arima.sim(model=list(order=c(1,0,0), ar=c(0.5)), n=1000)

pdf("AR1.pdf",width=10,height=6)
plot(y, type="l",main="AR(1)")
dev.off()

pdf("AR1_I1.pdf",width=10,height=6)
plot(cumsum(y), type="l",main="AR(1) I1")
dev.off()

pdf("AR1_I2.pdf",width=10,height=6)
plot(cumsum(cumsum(y)), type="l",main="AR(1) I2")
dev.off()
```



((a)) La sèrie de temps original mostra el comportament de la inversió mitjana.



((b)) La sèrie temporal integrada es comporta com un passeig aleatori.



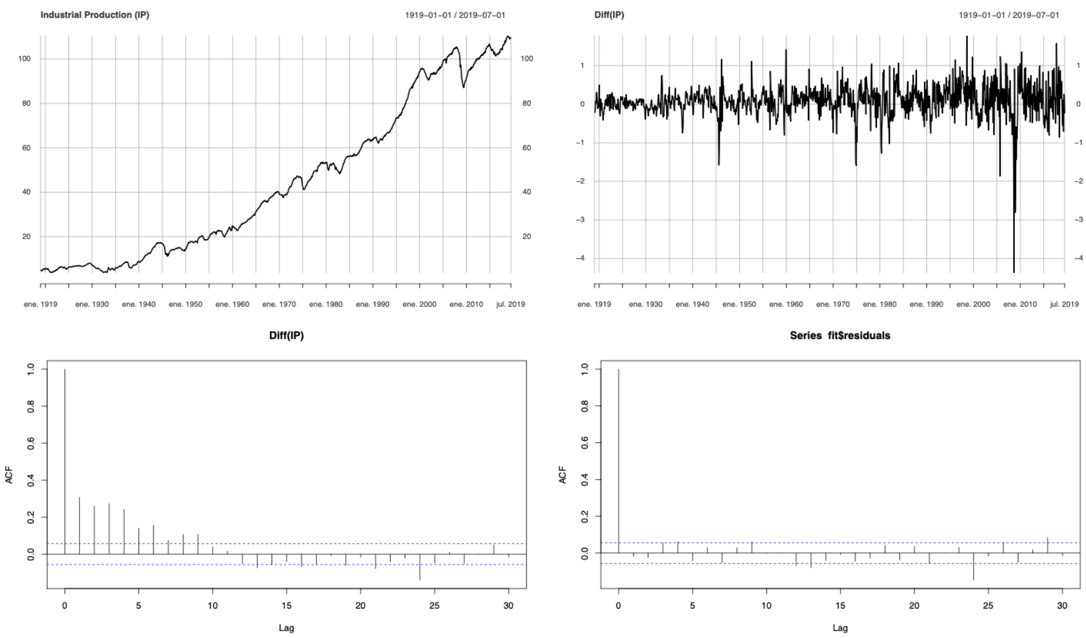
((c)) La sèrie temporal integrada dues vegades mostra el que es coneix com a moment, la tendència a una direcció particular. Això és un clar senyal d'integració de segon ordre.

L'ajust d'un model $ARIMA$ segueix el mateix procediment que el que es mostra amb els processos $ARMA$. L'exemple següent mostra l'ajust d'una sèrie temporal d'índex de producció industrial a un $ARIMA(1,1,1)$:

- Els dos primers gràfics mostren la sèrie original i la transformada.
- El dibuix de l'ACF per a ΔY_t sembla encaixar amb un procés $ARMA$.
- $ARMA(1,1)$ es tria en funció dels criteris BIC.
- Finalment comprovem el gràfic ACF per residus, concloent un ajustament satisfactori.

```r
rm(list=ls())                            # Removes all variables from workspace
cat("\f")                                # Clear console

library("quantmod")                      # Library to get prices from Yahoo
options("getSymbols.warning4.0"=FALSE)   # set off warnings
cat("\f")                                # Clear console

getSymbols.FRED('INDPRO',env=globalenv())

pdf("IP.pdf",width=10,height=6)
plot(INDPRO,main="Industrial Production (IP)")
dev.off()

pdf("IP_diff.pdf",width=10,height=6)
plot(diff(INDPRO),main="Diff(IP)")
dev.off()

pdf("IP_diff_ACF.pdf",width=10,height=6)
acf(diff(INDPRO),na.action = na.pass,main="Diff(IP)")
dev.off()

fit <-arima(x=diff(INDPRO),order=c(1,0,1))
fit

pdf("IP_diff_ACF_res.pdf",width=10,height=6)
acf(fit$residuals,na.action = na.pass)
dev.off()
```

```
Call:
arima(x = diff(INDPRO), order = c(1, 0, 1))

Coefficients:
         ar1      ma1  intercept
      0.8492  -0.6189     0.0857
s.e.  0.0279   0.0398     0.0275

sigma^2 estimated as 0.1399:  log likelihood = -509.76,  aic = 1027.52
```



Si un procés no estacionari té una mitjana constant, aleshores la primera diferència té una mitjana zero. La funció `arima` a R fa aquesta suposició. Per solucionar aquest problema, utilitzeu `auto.arima`.

3.8 Forecasting

El procés de previsió consisteix a utilitzar un model calibrat per fer prediccions del comportament futur de la sèrie temporal. Considereu la predicció de $AR(1)$ i suposeu $Y_1, \ldots, Y_n$ coneguts i $\hat{\mu}$ i $\hat{\phi}$ estimats. Ho sabem

$$Y_{n+1} = \mu + \phi(Y_n - \mu) + \epsilon_{n+1}$$

però com que ϵ_{n+1} és independent del passat i Y_n, la millor predicció de ϵ_{n+1} és la seva mitjana 0 . Per tant, el nostre millor convidat és

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\mu} + \hat{\phi}\left(Y_n - \hat{\mu}\right).$$

A més, el raonament es pot repetir per obtenir l'estimador k-èssim

$$\hat{Y}_{n+k} = \hat{\mu} + \hat{\phi}^k\left(Y_n - \hat{\mu}\right).$$

Tingueu en compte que si $|\hat{\phi}| < 1$, com per als processos estacionaris, a mesura que k augmenta, les previsions del procés convergeixen exponencialment a la mitjana. La mateixa derivació es pot aplicar al procés $MA(1)$, ja que el procés segueix

$$Y_{n+1} = \mu + \epsilon_{n+1} + \theta\epsilon_n$$

la nostra millor estimació és

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\mu} + \hat{\theta}\hat{\epsilon_n},$$

on $\hat{\epsilon_n}$ és l'últim error observat que es pot calcular recursivament

$$\hat{\epsilon_n} = Y_n - \hat{\mu} - \hat{\theta}\epsilon_0$$

i ϵ_0 es pot establir a 0 per a n grans. Finalment, tingueu en compte que,

$$\hat{Y}_{n+k} = \hat{\mu}$$

per $k \geq 2$. Les derivacions anteriors es generalitzen fàcilment als processos $ARMA$, en general, el procés de previsió consisteix a substituir les observacions futures per les seves previsions, els errors futurs amb zero i els errors passats amb els residus corresponents en l'equació rectora corresponent del model.

Per obtenir l'interval d'incertesa de la previsió, simplement calculem la desviació estàndard de la previsió i multipliquem per $z_{\alpha/2}$, assumint que ϵ_i és un soroll blanc gaussià. Aquesta és la sortida típica de la majoria de programari estadístic i R. La funció R `predict` rep un model (com els donats per la funció `arima`) i retorna la predicció.

3.9 Recapitulació

La idea d'aquesta secció era presentar una família de models per adaptar-se a les dades macroeconòmiques. Amb aquesta finalitat hem vist empíricament que aquestes sèries, o transformacions d'aquestes, es podrien considerar estacionàries i, per tant, mirar models estacionaris. Els models estacionaris setmanals es descriuen per la seva funció d'autocorrelació i, per tant, per un conjunt de paràmetres infinits. Per abordar aquest problema hem presentat un conjunt de models parsimoniosos amb un nombre finit de paràmetres, els models $ARMA$. No obstant això, hem vist en els nostres exemples que els models ARMA no poden capturar completament les característiques que veiem a les nostres dades macroeconòmiques, especialment l'heterocedasticitat o l'agrupació de volatilitat que es veu, per exemple, a la sèrie de preus de BMW.

Una manera de procedir és introduir un segon nivell de complexitat per modelar el component de volatilitat de la sèrie temporal. Tot i que la volatilitat incondicional es mantindrà constant, ja que els models seguiran sent estacionaris, podem modelar la volatilitat condicional per capturar períodes de volatilitat alta o baixa persistent, és a dir, períodes de clúster.

4 SERIES TEMPORALS II

4.1 Context

Tal com s'ha comentat al capítol anterior, l'observació empírica suggereix que el procés $ARMA$ podria no ser suficient per modelar dades macroeconòmiques, ja que no tenen la capacitat de modelar l'agrupació de volatilitat. Com que els models $ARMA$ són estacionaris, la seva mitjana incondicional i la seva variància són constants i, per tant, per capturar l'agrupació de volatilitat haurem de modelar la variància condicional del procés.

Per obtenir algun concepte heurístic amb el propòsit de les seccions següents, prenem un model d'autoregressió general com els que hem presentat en el capítol anterior de la forma

$$Y_t = f(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) + \epsilon_t$$

L'esperança condicional i la variància del procés anterior són

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] = f(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$$
$$\mathbb{V}(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) = \mathbb{V}(\epsilon_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) = \sigma_\epsilon^2$$

La derivació anterior mostra que per als processos estacionaris, tot i que la mitjana és constant, la mitjana condicional no ho és i els processos $ARMA$ han establert una funció diferent per a f en altres per presentar les característiques de les dades d'observació. Malauradament, per als processos anteriors, tant la variància com la variància condicional són constants i, per tant, no poden produir un procés amb agrupació de volatilitat.

La manera d'abordar aquest problema és millorar el model amb

$$Y_t = f(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) + \sigma(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})\epsilon_t$$

per al procés modificat, la mitjana condicional no ha canviat (ja que té una mitjana 0), però la variància condicional està impulsada per

$$\mathbb{V}(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) = \sigma^2(Y_{t1}, \dots, Y_{t-p})\epsilon_t^2$$

Finalment, observeu que la variància d'un procés Y_t és capturada pel quadrat del mateix, Y_t^2, per tant, la idea darrere de $GARCH$ és reproduir el mateix tipus de construcció per als diagrames de procés al quadrat Y^2 i per tant les fórmules, els ACF plots , ... es farà referència al procés quadràtic.

Abans d'aprofundir en els models $GARCH$, comencem amb un parell d'eines útils per calibrar aquest tipus de sèries temporals, la prova d'arrel unitària i la funció d'autocorrelació parcial.

4.2 Prova de l'arrel unitària

Hem vist la dificultat de saber si una sèrie temporal es modela millor com a estacionària o no estacionària. Per ajudar a decidir entre ambdues utilitzem una prova d'arrel unitària.

Recordeu que un procés $ARMA(p, q)$ es pot escriure com

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

Resulta que la condició perquè Y_t sigui estacionària és que totes les arrels del polinomi

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p$$

tenen valor absolut major que 1.

Hi ha dues proves principals de l'arrel uniària:

- **Dickey-Fuller:** La hipòtesi nul · la és que hi ha una arrel unitària, i l'alternativa que el procés és estacionari.
- **KPSS:** La hipòtesi nul · la és que el procés és estacionari, i l'alternativa que hi ha una arrel unitària.

La funció *auto.arima* a R executa la prova KPSS de forma recursiva fins que una sèrie diferenciada no pot rebutjar la hipòtesi nul · la i s'adapta a un $ARMA$.

```
rm(list=ls())                          # Removes all variables from workspace
cat("\f")                              # Clear console

library("quantmod")                    # Library to get prices from Yahoo
library("forecast")
options("getSymbols.warning4.0"=FALSE) # set off warnings
cat("\f")                              # Clear console

getSymbols.FRED('INDPRO',env=globalenv())

fit <-auto.arima(x=INDPRO)
fit
```

```
Series: INDPRO
ARIMA(1,1,1) with drift

Coefficients:
         ar1      ma1   drift
      0.8491  -0.6185  0.0860
s.e.  0.0280   0.0399  0.0275

sigma^2 estimated as 0.1403:  log likelihood=-509.76
AIC=1027.52   AICc=1027.56   BIC=1047.78
```

4.3 Funció d'autocorrelació parcial

La funció d'autocorrelació parcial (PACF) pot ser útil per identificar l'ordre d'un procés AR. La k-éssima funció d'autocorrelació parcial $\phi_{k,k}$ per a un procés estacionàri Y_t és la correlació de la condició Y_t i Y_{t+k} en $Y_{t+1}, \cdots, Y_{t+k-1}$.

Per a un procés $AR(p)$, resulta que $\phi_{k,k} = 0$ per a $k > p$.

4.4 $ARCH$

Introduïm el procés d'heteroscedasticitat condicional autoregressiu d'ordre 1, $ARCH(1)$

$ARCH(1)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un gaussià $WN(0, \sigma^2)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $ARCH(1)$ si per algun paràmetre constant $\alpha \geq 0$ i $\omega \geq 0$, es compleix la següent equació

$$Y_t = \sqrt{\omega + \alpha Y_{t-1}^2}\epsilon_t$$

Perquè Y sigui estacionària necessitem $\alpha < 1$. L'equació que condueix el procés $ARCH(1)$ és molt semblant a la del procés $AR(1)$, només que ara tenim un soroll multiplicatiu i l'equació impulsa el procés Y^2. Com que ϵ_t és independent de Y_{t-1} tenim

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1},] = 0$$

i

$$\sigma_t^2 = \mathbb{V}(Y_t | Y_{t-1},) = \omega + \alpha Y_{t-1}^2.$$

A partir de l'última equació anterior podem veure la possibilitat que el procés mostri una agrupació de volatilitat. Aquest és un exemple senzill d'un procés no correlacionat amb dependència.

Tot i que el procés Y_t és incorrelacionat i, per tant, té una funció d'autocorrelació trivial, el procés Y_t^2 té una funció ACF més interessant, de fet la funció d'autocorrelació és de la forma:

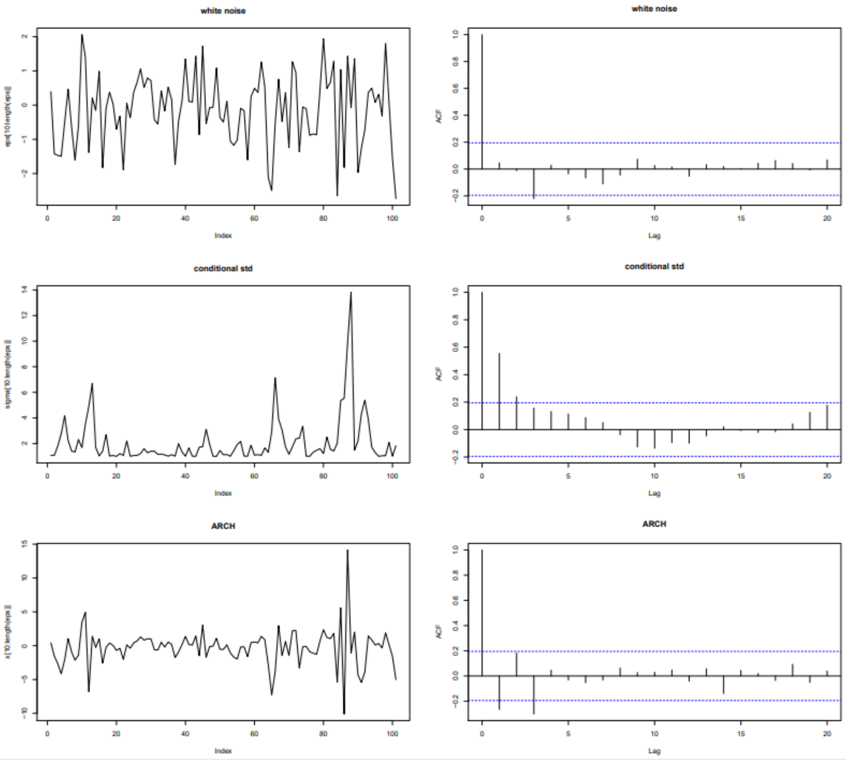
$$\rho(h) = \alpha_1^{|h|}$$

per $\alpha < 1$, en cas contrari el procés no és estacionari i té una variància infinita.

El codi següent mostra un soroll blanc IDD, la desviació estàndard condicional d'un procés ARCH(1) i la sèrie original $ARCH(1)$:

```r
eps=rnorm(110)
x <- vector(mode="numeric", length=110)
sigma <- vector(mode="numeric", length=110)
x[1]<-0
sigma[1]<-0

for (i in 2:110){
  x[i]<-sqrt(1+0.95*(x[i-1])^2)*eps[i]
  sigma[i]<-sqrt(1+0.95*(x[i-1])^2)
}

plot(eps[10:length(eps)],main="white noise",type="l")
acf(eps[10:length(eps)],main="white noise")
plot(sigma[10:length(eps)],main="conditional std",type="l")
acf(sigma[10:length(eps)],main="conditional std")
plot(x[10:length(eps)],main="ARCH",type="l")
acf(x[10:length(eps)],main="ARCH")
```

Codi soroll blanc IID, desviació estàndard condicional i sèrie original de ARCH(1)



Com podeu veure, els gràfics ACF del primer i tercer procés són similars, però els processos són completament diferents. Mentre que $AR(1)$ té una mitjana condicional no constant però una variància condicional constant, el procés $ARCH(1)$ és completament el contrari.

Si tant la mitjana condicional com la variància depenen del passat, podem combinar tots dos processos:

$AR(1)/ARCH(1)$

Sigui $\{a_t\}_t$ un procés $ARCH(1)$. Diem que $\{Y_t\}_t$ és un procés $AR(1)/ARCH(1)$ si per algun paràmetre constant μ i ϕ, es compleix la següent equació

$$Y_t - \mu = \phi(Y_{t-1} - \mu) + a_t$$

El procés de soroll és un soroll blanc feble i, com que no està correlacionat, el gràfic ACF d'un $AR(1)$ té el mateix aspecte que el gràfic ACF d'un $AR(1)/ARCH(1)$.

La construcció anterior es pot generalitzar a ordres superiors:

$ARCH(p)$

Sigui $\{\epsilon_n\}_n$ un gaussià $WN(0, \sigma^2)$. Diem que $\{Y_n\}_n$ és un procés $ARCH(p)$ si per algun paràmetre constant $\{\alpha\}_1^p \geq 0$ i $\omega \geq 0$, es compleix la següent equació

$$Y_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Y_{t-i}^2} \epsilon_t$$

Igual que un procés $ARCH(1)$, l'anterior no està correlacionat i té una mitjana constant (tant condicional com incondicional). Perquè el procés sigui estacionari necessitem $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$.

El procés $ARCH(p)$ té una variància condicional no constant i, de fet, el procés al quadrat té el mateix ACF que per a l'$AR(p)$.

4.5 $GARCH$

L'inconvenient del procés $ARCH(p)$ és que la volatilitat condicional es comporta amb perturbacions (*shocks*). Per mantenir la volatilitat sufocada però encara exhibint clústers, introduïm el model $GARCH(P, Q)$, que alimenta els termes de volatilitat del passat en un procés $ARCH$.

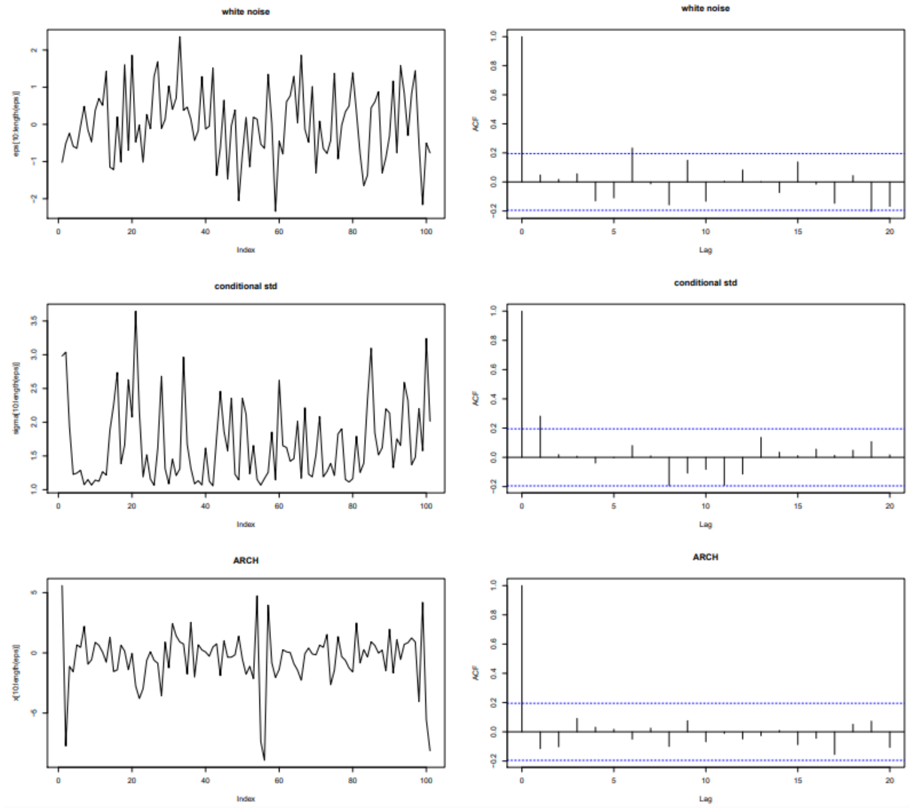
$GARCH(P, Q)$

Sigui $\{\epsilon_t\}_t$ un gaussià $WN(0, \sigma^2)$. Diem que $\{Y_t\}_t$ és un procés $GARCH(P, Q)$ si per alguns paràmetres constants $\{\alpha\}_1^P \geq 0$ i $\{\beta\}_1^Q \geq 0$ i $\omega > 0$, es compleix la següent equació

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^{P} \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \beta_j \sigma_{t-j}^2}$$

Perquè el procés sigui estacionari necessitem $\sum_{i=1}^{P} \alpha_i + \sum_{j=1}^{Q} \beta_j < 1$.

```
rm(list=ls())                                  # Removes all variables from workspace
library(tseries)
cat("\f")

eps=rnorm(110)

x <- vector(mode="numeric", length=110)
sigma <- vector(mode="numeric", length=110)
x[1]<-0
sigma[1]<-0
for (i in 2:110){
  sigma[i]<-sqrt(1+0.8*(x[i-1])^2+0.09*(sigma[i-1])^2)
  x[i]<-sigma[i]*eps[i]
}

plot(eps[10:length(eps)],main="white noise",type="l")
acf(eps[10:length(eps)],main="white noise")
plot(sigma[10:length(eps)],main="conditional std",type="l")
acf(sigma[10:length(eps)],main="conditional std")
plot(x[10:length(eps)],main="GARCH",type="l")
acf(x[10:length(eps)],main="GARCH")
```



El procés Y^2 té funció ACF similar a un procés $ARMA$ i mostra més persistent els períodes de concentració de volatilitat.

4.6 $ARIMA(p, d, q)/GARCH(P, Q)$

Ara, només cal combinar tot el procés anterior que coneixem per crear una família completa i exhaustiva de models per a dades financeres

$ARIMA(p, d, q)/GARCH(P, Q)$

Sigui $\{\epsilon_t\}_t$ un gaussià $WN(0, \sigma^2)$. Diem que $\{Y_t\}_t$ és un procés $ARIMA(p, d, q)/GARCH(P, Q)$ si per alguns paràmetres constants μ,$\{\phi_i\}_{i=1}^p$, $\{\theta_j\}_{j=1}^q$, $\{\alpha\}_1^P \geq 0$ i $\{\beta\}_1^Q \geq 0$ i $\omega > 0$, es compleix la següent equació

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^{P} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \beta_j \sigma_{t}{}_{t-j}^2}$$

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i (Y_{t-i} - \mu) + a_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j}$$

La fórmula anterior descriu essencialment el procés $ARIMA(p, d, q)/GARCH(P, Q)$ com a $ARIMA(p, d, q)$ amb un soroll $GARCH(P, Q)$.

En ajustar $ARIMA(p, d, q)/GARCH(P, Q)$ normalment descobrim que la majoria del programari calcularà dos tipus d'errors:

- Els residus ordinaris, $\hat{a}$, són la diferència entre Y i la seva esperança condicional, és a dir, $\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1},]$.
- Els residus estandaritzats, $\hat{\epsilon}$, es calculen dividint els residus ordinaris per la seva desviació estàndard, $\hat{\sigma}$.

Clarament, en ajustar $ARIMA(p,d,q)/GARCH(P,Q)$ s'ha de comprovar que ni els residus estàndard, $\hat{\epsilon}$, o el seu procés quadrat, $\hat{\epsilon}^2$, mostrin correlació.

El codi següent ajusta un $ARIMA(p,d,q)/GARCH(P,Q)$ a la sèrie temporal de BMW

```
library(fGarch)
data(bmw,package="evir")
fit<-garchFit(formula=~arma(1,0)+garch(1,1),data=bmw,cond.dist="norm")
```

```
Call:
 garchFit(formula = ~arma(1, 0) + garch(1, 1), data = bmw, cond.dist = "norm")

Mean and Variance Equation:
 data ~ arma(1, 0) + garch(1, 1)
<environment: 0x10fd753b8>
 [data = bmw]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):
        mu         ar1        omega       alpha1        beta1
4.0092e-04  9.8596e-02  8.9043e-06  1.0210e-01  8.5944e-01

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      4.009e-04   1.579e-04    2.539   0.0111 *
ar1     9.860e-02   1.431e-02    6.888  5.65e-12 ***
omega   8.904e-06   1.449e-06    6.145  7.97e-10 ***
alpha1  1.021e-01   1.135e-02    8.994   < 2e-16 ***
beta1   8.594e-01   1.581e-02   54.348   < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Log Likelihood:
 17757.16    normalized:  2.889222
```

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  11377.99  0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      NA        NA
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  15.15693  0.1264445
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  20.09345  0.168377
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  30.54788  0.06144917
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  5.032717  0.8889818
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  7.539272  0.9409245
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  9.277229  0.9794681
 LM Arch Test       R    TR^2   6.03254   0.9144329
```

```
library(fGarch)
data(bmw,package="evir")
fit<-garchFit(formula=~arma(1,1)+garch(1,1),data=bmw,cond.dist="std")
```

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  13355.05  0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      NA        NA
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  21.93247  0.01545233
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  26.50076  0.03307727
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  36.7898   0.01239977
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  5.828522  0.8294584
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  8.09067   0.9200962
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  10.73302  0.9528543
 LM Arch Test       R    TR^2   7.009039  0.8570157
```

Observeu que tots els paràmetres són estadísticament significatius i el gran paràmetre $\hat{\beta}_1$ demostra grups de volatilitat persistent. El conjunt final de prova d'hipòtesi s'aplica als residus estandarditzats i el seu quadrat. També hi ha una prova per demostrar si el soroll blanc prové d'una distribució gaussiana, però aquesta característica es rebutja. Un podria provar la funció `garchFit` amb una distribució diferent de la normal per comprovar si s'ajusta millor.

4.7 Regla general per calibrar

El següent apartat pretén donar algunes regles per tal d'identificar l'ordre dels diferents components d'un procés estacionari. Com heu vist, de vegades, diversos models s'ajusten a les mateixes dades i, en aquest cas, haurem d'imposar algun tipus de criteri expert.

4.7.1 Ordre de diferenciació

El primer objectiu en calibrar un model és identificar l'ordre de diferenciació. Ja heu vist la prova d'arrel unitat, però el que segueix són algunes observacions útils més:

- Si l'ACF mostra *lags* significatius d'ordre elevat (10 o més), la sèrie pot necessitar diferenciació.
- Si el primer *lag* de l'ACF és molt negatiu, la sèrie podria estar sobrediferenciada.

4.7.2 Models $ARIMA$

- El *lag* a partir del qual talla el PACF és l'ordre indicatiu del terme AR.
- El *lag* a partir del qual es talla l'ACF és l'ordre indicatiu del terme MA.

4.7.3 Models $GARCH$

Per capturar l'efecte $GARCH$ al vostre model, s'ajustaria al model $ARMA$ i després aplicaria les funcions ACF i PACF als residus quadrats. Seguim les mateixes regles que abans per a la part regressiva i mitjana mòbil del $GARCH$.

4.7.4 Comprovar residus

Una bona calibració és aquella on els residus són compatibles amb un soroll blanc, en cas contrari, el model proposat no captura totes les característiques de la sèrie temporal original.

4.8 Exemple: muntatge de models $ARCH$

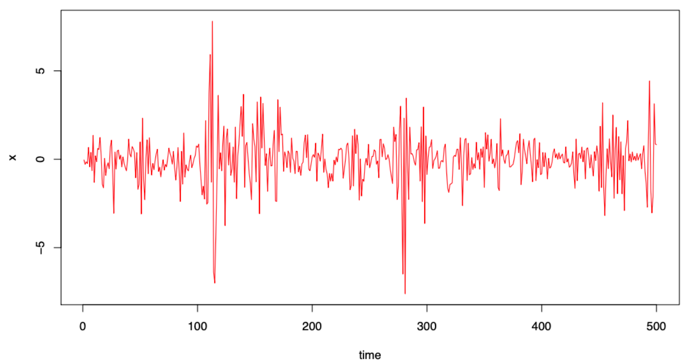
Suposem que se us ofereix una sèrie temporal i se us demana que hi ajusteu un model $ARCH$. Per tal de partir d'una sèrie temporal coneguda simularem el procés $ARCH$ i simularem que no coneixem els paràmetres per intentar estimar-los.

El procediment descriu un procés pas a pas no només aplicable als models $ARCH$ sinó en general a qualsevol tipus de procés d'ajustament de models.

```
#Fitting and Diagnostic Checking for ARCH Models

library("forecast")
library("rugarch")
library("tseries")
require(fBasics)

rm(list=ls())
cat("\f")

n <- 600
arch2.spec = ugarchspec(variance.model = list(garchOrder=c(2,0)),
                        mean.model = list(armaOrder=c(0,0)),
                        fixed.pars=list(mu = 0, omega=0.25, alpha1=0.6, alpha2=0.35))
arch2.sim <- ugarchpath(arch2.spec, n.sim=n)
x <- drop(arch2.sim@path$seriesSim)[101:600]
time <- 1:length(x)
```

Suposarem que la sèrie temporal x està donada i a partir d'un model desconegut. El primer pas és representar la sèrie temporal i analitzar-ne el comportament qualitatiu:

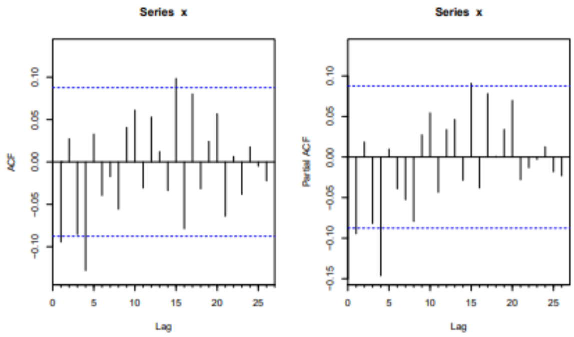
```
plot(time, x, type="l", col=2)
```



El gràfic anterior mostra una sèrie temporal amb un comportament inversor a la mitjana, tot i que no sabem si és estacionària o no sembla que no necessiti diferenciació, no obstant això es pot utilitzar una prova d'arrel unitària per comprovar-ho. També podem apreciar l'agrupació de volatilitat i podem anticipar un component $GARCH$ al model.

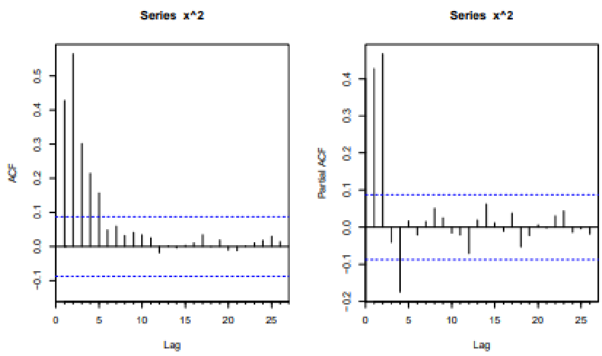
El següent pas seria traçar l'ACF i el PACF per a la sèrie original:

```
par(mfrow=c(1,2))
Acf(x)
Pacf(x)
```



Les figures anteriors mostren un procés incorrelacionat, ja que la funció ACF és trivial i, per tant, es podria suposar que el component $ARMA$ és nul. Com que no tenim necessitat d'ajustar els termes $ARMA$, podem procedir a calcular els diagrames ACF i PACF per al procés quadrat (en cas que tinguem un component $ARMA$, primer encaixem aquesta part i apliquem el següent procediment als residus):

```
par(mfrow=c(1,2))
Acf(x^2)
Pacf(x^2)
```



Podem veure un fort descens en la gràfica PACF, la qual cosa significa que el paràmetre P podria estar al voltant de 2. D'altra banda, la gràfica ACF mostra una decadència lenta sense tall brusc, això és compatible amb una sèrie poc diferenciada si es basa en la sèrie temporal original i no en el quadrat, en aquest cas no es mostra cap necessitat d'un terme Q al component $GARCH$.

Després de les estimacions qualitatives dels paràmetres, $p = d = q = Q = 0$ i $P \sim 2$, podem utilitzar els criteris AIC o BIC per triar entre un conjunt de models similars al voltant dels paràmetres de les suposicions. Fins i tot es podria provar un procés d'ajustament diferent

```r
fit1 <- garch(x, c(0,1), trace=FALSE) # ARCH(1)
fit2 <- garch(x, c(0,2), trace=FALSE) # ARCH(2)
fit3 <- garch(x, c(0,3), trace=FALSE) # ARCH(3)
fit4 <- garch(x, c(0,4), trace=FALSE) # ARCH(4)
fit5 <- garch(x, c(0,5), trace=FALSE) # ARCH(5)

N <- length(x)
loglik1 <- logLik(fit1)
loglik2 <- logLik(fit2)
loglik3 <- logLik(fit3)
loglik4 <- logLik(fit4)
loglik5 <- logLik(fit5)

loglik <- c(loglik1, loglik2, loglik3, loglik4, loglik5)
q <- c(1, 2, 3, 4, 5)
k <- q + 1
aicc <- -2 * loglik  + 2 * k * N / (N - k - 1)

print(data.frame(q, loglik, aicc))
```

```
  q    loglik     aicc
1 1 -705.7442 1415.513
2 2 -666.3854 1338.819
3 3 -729.4100 1466.901
4 4 -734.6751 1479.472
5 5 -729.9601 1472.091
```

Amb el package `tseries` es tria el model $ARCH(1)$ o $ARCH(2)$. Amb el package `rugarch` es tria el

```r
spec1 <- ugarchspec(variance.model = list(garchOrder=c(1,0)),
                    mean.model = list(armaOrder=c(0,0), include.mean=FALSE))
fit1 <- ugarchfit(spec1, x)
loglik1 <- fit1@fit$LLH

q <- c(1, 2, 3, 4, 5)
loglik <- rep(NA, length(q))

for (i in 1:length(q)) {
    spec <- ugarchspec(variance.model = list(garchOrder=c(q[i],0)),
                       mean.model = list(armaOrder=c(0,0), include.mean=FALSE))
    fit <- ugarchfit(spec, x)
    loglik[i] <- likelihood(fit)
}

k <- q + 1
aicc <- -2 * loglik  + 2 * k * N / (N - k - 1)

print(data.frame(q, loglik, aicc))
```

```
  q    loglik     aicc
1 1 -707.5218 1419.068
2 2 -669.4327 1344.914
3 3 -669.2573 1346.595
4 4 -669.1381 1348.398
5 5 -668.1957 1348.562
```

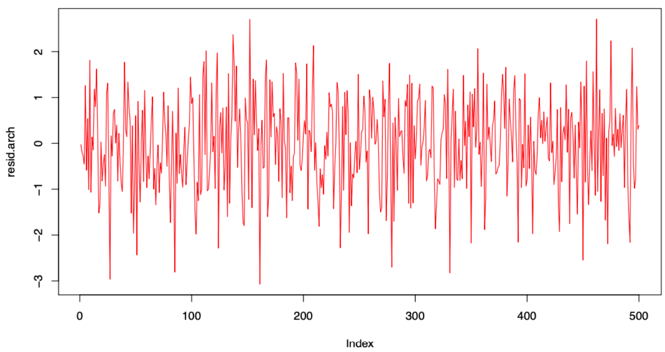
model $ARCH(2)$ o $ARCH(3)$. Per tant, per consens entre ambdós models de calibratge, optaríem per ajustar un ARCH(2).

Primer observem que tots els paràmetres del model són estadísticament significatius. L'últim pas seria comprovar els residus i començar la seva anàlisi traçant-los gràficament

```r
fit.tseries <- garch(x, c(0, 2), trace=FALSE)
summary(fit.tseries)
```

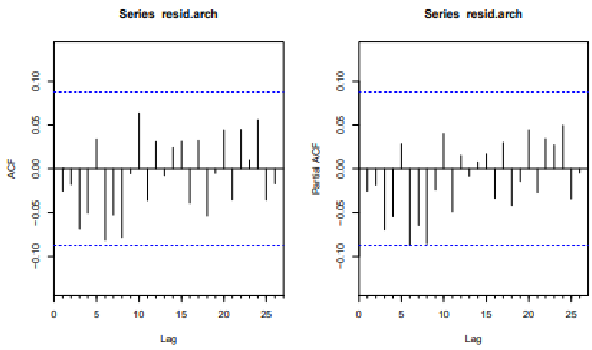
```
Call:
garch(x = x, order = c(0, 2), trace = FALSE)

Model:
GARCH(0,2)

Residuals:
     Min        1Q    Median        3Q       Max
-2.96390  -0.69896  -0.06408   0.66584   2.75127

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
a0   0.23304     0.04186    5.567  2.59e-08 ***
a1   0.57147     0.10637    5.372  7.77e-08 ***
a2   0.37627     0.08302    4.532  5.84e-06 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Diagnostic Tests:
     Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 2.6731, df = 2, p-value = 0.2627


     Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.21612, df = 1, p-value = 0.642
```

```r
# Using tseries package:
resid.tseries <- residuals(fit.tseries)

# Using rugarch package:
resid.rugarch <- as.numeric(residuals(fit.rugarch, standardize=TRUE))

# Note: resid.tseries is equal to (x / sqrt(h.tseries))
#       resid.rugarch is equal to (x / sqrt(h.rugarch))

par(mfrow=c(1,1))
resid.arch <- resid.rugarch
plot(resid.arch, type="l", col=2)
```



El gràfic anterior sembla compatible amb un soroll blanc, almenys no presenta dinàmiques de volatilitat aparent. Comprovem les gràfics ACF i PACF per als residus.

```
par(mfrow=c(1,2))
Acf(resid.arch)
Pacf(resid.arch)
```



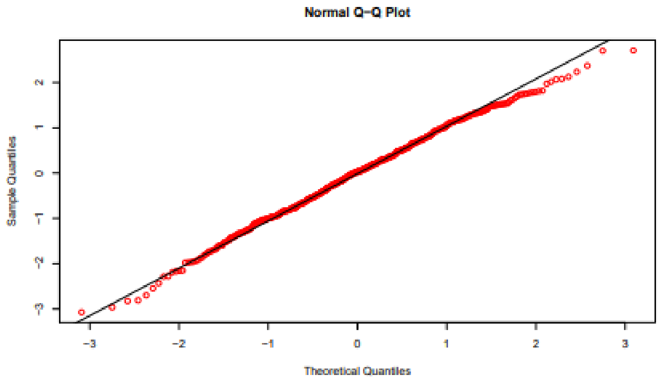
Les ACF i PACF anteriors ara són compatibles amb un soroll blanc. També podem fer algunes proves

```
Box.test(resid.arch, lag=1, type="Ljung-Box", fitdf=0)
Box.test(resid.arch, lag=12, type="Ljung-Box", fitdf=0)
Box.test(resid.arch, lag=24, type="Ljung-Box", fitdf=0)
Box.test(resid.arch, lag=36, type="Ljung-Box", fitdf=0)
```

```
> Box.test(resid.arch, lag=1, type="Ljung-Box", fitdf=0)

        Box-Ljung test

data:  resid.arch
X-squared = 0.0036762, df = 1, p-value = 0.9517

> Box.test(resid.arch, lag=12, type="Ljung-Box", fitdf=0)

        Box-Ljung test

data:  resid.arch
X-squared = 4.7582, df = 12, p-value = 0.9656

> Box.test(resid.arch, lag=24, type="Ljung-Box", fitdf=0)

        Box-Ljung test

data:  resid.arch
X-squared = 13.96, df = 24, p-value = 0.9476

> Box.test(resid.arch, lag=36, type="Ljung-Box", fitdf=0)

        Box-Ljung test

data:  resid.arch
X-squared = 23.563, df = 36, p-value = 0.945
```

Finalment, fins i tot podem comprovar si el soroll blanc del model té una distribució particular, per exemple una distribució normal

```
qqnorm(resid.arch, col=2)
qqline(resid.arch, col=1)
```




```
normalTest(resid.arch,method="jb")
```

```
Title:
 Jarque - Bera Normalality Test

Test Results:
  STATISTIC:
    X-squared: 2.5738
  P VALUE:
    Asymptotic p Value: 0.2761

Description:
 Wed Sep 28 22:33:13 2016 by user:
```

4.9 Recapitulació

En aquest capítol hem completat el nostre model per a sèries temporals estacionàries incloent una família de models que són capaços de capturar l'agrupació de volatilitat.

També introduïm el procés de calibratge del model que es pot resumir com

1. **Fer un gràfic de les dades:** Identifiqueu observacions de dades inusuals.
2. **Transformar i diferenciar:** Transforma les teves dades o diferencia-les per obtenir una sèrie temporal estacionària
   (a) **Prova de l'arrel unitària:** Feu servir una prova per assegurar-vos que la sèrie és estacionària.
3. **Calibrar** $ARMA$**:** Fer el gràfic de les funcions ACF i PACF per a la sèrie temporal transformada i estimeu l'ordre de p i q.
   - **Escolliu el model:** Feu una prova per mostrar quants paràmetres de l'ACF i PACF són rellevants.
   - **Escolliu el model:** Utilitzeu els criteris AIC o BIC per obtenir una estimació final de p i q.
4. **Estimar els coeficients de** $ARMA$**:** Assegureu-vos que tots els coeficients són estadísticament significatius.
5. **Grafiqueu els residus i els residus al quadrat:** Si els residus no semblen un soroll blanc podríem tenir algun efecte $GARCH$ en el model.
   - **Fer el gràfic ACF i PACF per als residus quadrats:** Feu el gràfic de les funcions ACF i PACF i estimeu l'ordre de P i Q.
   - **Estimar els coeficients de l'**$ARMA/GARCH$**:** Assegureu-vos que tots els coeficients siguin estadísticament significatius.
6. **Grafiqueu els residus:** Demostreu que els residus són compatibles amb un soroll blanc.

5 CÀLCUL ESTOCÀSTIC: VALORACIÓ DE DERIVATS FINANCERS I

5.1 Context

L'objectiu d'aquest capítol és presentar-vos les eines bàsiques que s'utilitzen per fixar el preu dels derivats financers. Les tècniques utilitzades aquí són pràctiques habituals als departaments de front-office, divisions de risc de mercat o, en general, qualsevol activitat financera implicada directament en la negociació.

Tot i que ja sabem que els mercats de renda variable són petits en comparació amb els mercats financers generals, és convenient introduir les eines següents mitjançant el simple producte de les accions. No obstant això, les idees explicades aquí es poden aplicar a una varietat més àmplia de productes.

També simplificarem la nostra exposició restringint l'abast dels derivats al que es coneix al mercat com a derivats simples de vainilla.

També introduirem una mica d'argot comercial que s'utilitza en activitats de comerç financer, els conceptes que hi ha darrere són simples, però de vegades els novells poden tenir problemes al principi. Aquesta és només una manera de complicar els conceptes fàcils.

5.2 Productes, Mercats i Derivats

5.2.1 Accions

Les accions seran el nostre instrument financer bàsic en aquest capítol. També es coneixen com *stocks*, participacions, actius o quan es refereixen a opcions sobre accions, subjacents.

Participació (Share)

Posseir una participació en el capital significa la propietat parcial de l'empresa i, per tant, els drets sobre els dividends.

La següent línia de temps representa el procés més comú perquè una empresa entri al mercat:

1. **Una empresa neix:** quan es funda una empresa és propietat del seu fundador, que normalment ha capitalitzat l'empresa amb el seu propi capital privat. Són propietaris i dirigeixen l'empresa.
2. **Una empresa creix:** els fundadors solen fer més inversions o demanen préstecs als bancs per ampliar l'empresa. Si ho sap bé, l'empresa també pot emetre deute que normalment és comprat per fons especialitzats en capital privat.
3. **IPO (oferta pública inicial):** quan una inversió determinada és massa per als propietaris, l'empresa pot sortir a borsa a la borsa i augmentar el capital en contra d'oferir accions.
   - Els accionistes tenen veu en la gestió de l'empresa
   - Reben part dels beneficis de l'empresa en forma de dividends
4. **M&A,Takeovers, ...:** Si un inversor és capaç de comprar totes les accions pendents del mercat, l'empresa pot tornar a ser privada. Aquest és un esdeveniment molt extrany i normalment una empresa acaba amb la seva vida fusionant-se amb una altra empresa o comprada per un competidor o una altra part interessada.

Hi ha moltes teories sobre la formació de preus a les borses, entre les més importants hi ha

- **Flux d'efetiu de dividends:** el preu del mercat reflecteix el consens sobre la previsió de dividends futurs.
- **Valor residual:** el preu de mercat reflecteix el consens sobre el valor comptable de l'empresa, és a dir, el valor residual de tots els actius menys tots els passius.

El primer enfocament tendeix a veure l'empresa com una entitat viva, mentre que l'altre tendeix a ferne una imatge estàtica actual. A la pràctica, els actors del mercat utilitzen ambdues metodologies de valoració i, per tant, els preus del mercat estan formats per una barreja de diferents punts de vista que utilitzen qualsevol de les anteriors.

Encara que poguéssim explicar totes les particularitats del model, hi ha una certa aleatorietat en l'evolució dels preus derivada de les diferents visions sobre l'entrada dels models. En altres paraules, l'aleatorietat dels preus és una manifestació de les diferents opinions dels inversors sobre la imatge o el comportament de l'empresa. Un model de flux d'efectiu per dividends és bastant simple en els seus fonaments matemàtics, però els inversors poden tenir una visió diferent de la previsió de dividends, per exemple. Les diferents estimacions poden derivar de diferents apreciacions de

- Predictibilitat: quina certesa són aquests dividends futurs?
- Litigació: Hi ha algun procés o normativa legal que pugui afectar el rendiment de l'empresa?
- Evolució del mercat: la posició de l'empresa està en perill per algun competidor?
- Resposta del consumidor: els consumidors canviaran la seva preferència?
- Esdeveniments geopolítics: el rendiment de l'empresa està afectat per un conflicte potencial?

L'exemple següent mostra l'efecte sobre el preu de mercat d'una notícia relacionada amb el resultat d'un procés litigiós pel que fa a les comissions que els bancs van demanar als clients a l'hora de constituir les seves hipoteques. Com podeu veure, la notícia va afectar de manera instantània el preu dels bancs (Sabadell i Santander), però no va tenir cap efecte apreciable en els altres dos exemples (Inditex i CIE (fabricant de components d'automòbil)).

5.2.2 Arbitratge i Mercats

Un paradigma més general per a l'equilibri del mercat sorgeix del supòsit que els mercats són eficients en termes d'informació. El paradigma està relacionat amb la informació present en el preu en el moment de fer una inversió. Aquesta hipòtesi es coneix com a Hipòtesi del Mercat Eficient (*Efficient Market Hypothesis* (EMH)).

Hi ha 3 nivells d'eficiència:

- **Eficiència feble:** vol dir que només l'historial de preus del valor (de l'actiu) (*security*) és la informació disponible.
- **Eficiència semiforta:** tota la informació pública coneguda fins al moment està disponible.
- **Forta eficiència:** tota la informació pública i privada coneguda fins al moment està disponible.

A la pràctica, els jugadors professionals del mercat, tenen accés a millors fonts d'informació i també són capaços de negociar més ràpidament que la majoria del mercat i, per tant, no podem dir, encara que es pugui suposar des d'un punt de vista teòric, que el mercat és completament eficient.

Tot i que el mercat pot ser una mica ineficient, és molt difícil trobar el que es coneix com a oportunitats d'arbitratge:

Aribtrage

És el procés de negociar un sol producte en dos mercats diferents amb preus diferents. El comerciant compraria l'acció (el valor) al mercat que mostra el preu més barat i la vendria immediatament al mercat mostrant el preu més alt i, per tant, bloquejaria (asseguraria) un benefici sense risc.

En l'argot, el mercat lliure d'arbitratge es descriu de vegades com: no existeix un dinar gratuït, és a dir, no es pot obtenir beneficis amb cap risc.

De fet, si hi ha una oportunitat d'arbitratge de valor X citant un preu p_1 al mercat M_1 que és diferent del preu del mateix valor al mercat M_2 i això sosté que $p_1 > p_2$ llavors hi ha una oportunitat d'arbitratge. Un cop ho detectin els participants del mercat, intentaran beneficiar-se'n comprant en M_2 i venent en M_1. Òbviament, a mesura que més gent compri en M_2, el preu p_2 augmentarà i viceversa, a mesura que més gent vengui en M_1, el preu p_1 baixarà i finalment $p_1 = p_2$ i l'arbitratge s'esvaeix.

La configuració anterior està idealitzada, i encara que hi ha situacions en què el mateix valor pot operar de manera diferent en dos mercats sense arbitratge, pot ser perquè hi ha una fiscalitat diferent en un mercat que en l'altre que fa que aquesta situació sigui sense benefici.

Com s'ha dit, és molt difícil trobar oportunitats d'arbitratge i quan apareixen tendeixen a desaparèixer a l'instant i, per tant, considerarem (i utilitzarem àmpliament en les següents derivacions) que el mercat està lliure d'arbitratge.

Proposition

Suposant que no hi ha arbitratge, sosté que:

- dues carteres amb el mateix perfil de risc i el mateix valor en el moment T, han de tenir el mateix valor a $t < T$.
- si A i B són dues carteres que valen $V(A,T) > V(B,T)$ a T, també es considera que $V(A,t) > V(B,t)$ per $t < T$

5.3 Forwards and Futures

Entre tot tipus d'estructures financeres, Forwards i Futures són les més senzilles. L'objectiu d'aquest apartat és donar una definició formal d'ambdós contractes i derivar la primera fórmula de preus del curs!

Forward

Un acord en què una part, A, es compromet a comprar un actiu, S, d'una altra part, B, en un moment concret del futur, T, a un preu específic, F avui, t. Cap diners canvia de mans fins a la finalització del contracte i els termes del mateix fan que sigui una obligació tant per A com per B.

Un contracte Forward s'elabora a mida i els termes i condicions d'aquest els acorden A i B. Alguns tipus d'aquests contractes es negocien tan habitualment que s'han normalitzat i es poden liquidar en un mercat organitzat, aquests són els futurs:

Future

Similar a un forward en el seu concepte, però els termes estan estandarditzats (venciment T, S nacional, $\ldots, ..$) i es negocien en un mercat de canvi organitzat. Normalment es liquida en format efectiu.

Com que els futurs es negocien en una borsa, la part A mai coneixerà la part B i el propi mercat serà l'encarregat de la liquidació del contracte. Per això hi ha un procés anomenat *mark to market* que redueix el risc del mercat de canvis fixant diàriament els beneficis i pèrdues del futur.

Exemple

Suposem que tens una cafeteria i actualment compres grans de cafè a CoffeeCo a \$5 per kg, que és suficient per obtenir un marge còmode. Tanmateix, heu llegit d'un diari que la temporada de ciclons podria ser més gran del que s'esperava i estar preocupat perquè el preu dels grans augmentarà a causa del baix subministrament.

- **Forward**: Negocieu directament amb CoffeeCo per comprar 1.200 kg de grans a un preu de \$5 per kg en 6 mesos. CoffeeCo hi està d'acord perquè recentment han actualitzat els seus equips agrícoles i no es preocupen per la temporada de ciclons. Després de 6 mesos:
  - **La temporada de ciclons destrueix les plantacions i el preu dels grans de cafè augmenta a** \$7 **per** kg : esteu obligat a comprar 1.200 kg de grans a un preu de \$5 per kg de CoffeeCo, que al seu torn està obligat a vendre, estalviant per tant \$2.400 en costos a causa del Forward.
  - **La temporada de ciclons no destrueix les plantacions i el preu dels grans de cafè baixa a** \$4per **kg a causa de l'augment de l'oferta**: esteu obligat a comprar 1.200 kg de grans a un preu de \$5perkg de CoffeeCo, que al seu torn està obligat a vendre, per tant, CoffeeCo guanya \$1.200 en benefici sobre el preu de mercat en el moment del Forward.
- **Futur**: aneu al mercat de canvis i observeu els preus dels futurs que vencen en 6 mesos. Cada contracte s'estableix respecte a 100 kg de grans, per tant, haureu de comprar 12 contractes (no sabeu qui ven els grans). El mercat de canvis supervisarà cada dia l'evolució del preu del gra de cafè i us demanarà que liquideu la diferència (per no incórrer en gaire risc):
  1. Dia 1, preu del gra és \$6 per kg: Exchange us enviarà un flux d'efectiu de \$1.200
  2. Dia 2, preu del gra és \$4 per kg: Exchange us demanarà un flux d'efectiu de \$2.400
  3. ...

  6 mesos després:
  - **La temporada de ciclons destrueix les plantacions i el preu dels grans de cafè puja a** \$7per **kg** : l'intercanvi us sortirà \$2.400 i, per tant, podreu comprar grans de cafè al preu de mercat de manera efectiva a un preu de \$5 per kg.
  - **La temporada de ciclons no destrueix les plantacions i el preu dels grans de cafè baixa a** \$4per **kg a causa de l'augment de l'oferta**: heu donat a l'intercanvi una quantitat de \$1.200 i necessiteu comprar els grans al mercat fent un preu rendible de \$5 per kg.

Els principals usos d'ambdós contractes són:

- **Especulació:** tenir una visió del mercat per obtenir beneficis.

- **Cobertura:** bloqueja el preu per evitar la volatilitat dels costos.

5.3.1 Càlcul del preu del Forward

Es podria pensar que el preu d'un contracte a termini F, el preu acordat avui t per les dues contraparts A i B, que serà el preu per comprar/vendre la mercaderia en el futur T té alguna cosa a veure amb l'expectativa de A o B sobre l'evolució del preu de l'actiu S. Clarament, com es mostra en els exemples anteriors, l'evolució del preu de l'actiu farà que sigui A o B per obtenir un benefici o una pèrdua, però el preu no pot dependre de les expectatives de A o B.

En altres paraules, podríeu pensar que el preu del forward és un preu just per participar en un joc aleatori. Diguem A a les entrades de venda per participar en un joc aleatori on podríeu guanyar o perdre segons el resultat d'una moneda justa i B al voler participar. El preu del bitllet hauria de ser el valor esperat, $\mathbb{E}$, del joc; en cas contrari, si el preu és més alt B no hauria de jugar des d'un punt de vista racional i si el preu és més baix, A estarà en fallida a llarg termini. Tingueu en compte que el valor esperat del joc depèn de la distribució del comportament aleatori de la moneda i no de la sort que tingui B aquell dia.

El tipus de derivacions que farem servir són exemples d'aplicacions que no són d'arbitratge.

Recordem que un contracte Forward us obliga a lliurar $\$F$ en el moment T i rebre l'actiu subjacent $S(T)$. El preu actual de l'actiu és $S(t)$ i el benefici o la pèrdua del contracte forward en el moment T és $S(T) - F$. De fet, com es mostra a l'exemple anterior, és $S(T) > F$, llavors podreu rebre un actiu S el valor és $S(T)$ pagant F i, per tant, el podríeu vendre immediatament al mercat i obteniu un benefici de $S(T) - F$ i viceversa, si $S(T) < F$ heu de pagar F per alguna cosa que podríeu comprar al mercat a un preu més baix i per tant, estan fent una pèrdua de $S(T) - F$.

Deduïm ara el preu a termini mitjançant un argument de no arbitratge. Primer celebrem un contracte Forward que avui no ens costa res, perquè té un preu just i té un guany o una pèrdua en el moment T de $S(T) - F$. En altres paraules, el primer comerç de l'estratègia sembla:

Position	**Value at t**	**Value at T**
Forward Contract	0	$S(T) - F$
Short Position on the Stock		
Bank Account		
$\sum$		

El segon *trade* de l'estratègia és demanar prestat l'actiu $S(t)$. Als mercats financers, podríeu quedar-vos a curt en una posició, és a dir, veneu alguna cosa que no posseïu agafant préstec d'una altra persona i retornant-la després. Per contra, ser llarg en una posició vol dir que la tens. Per simplificar assumirem que el préstec no ens costarà res. És evident que si demano prestat un actiu avui d'algú, el valor de l'actiu avui és $S(t)$, però quan torni es valorarà $S(T)$. El signe negatiu següent significa que sóc el propietari de l'actiu d'una altra persona:

Position	**Value at t**	**Value at T**
Forward Contract	0	$S(T) - F$
Short Position on the Stock	$-S(t)$	$-S(T)$
Bank Account		
$\sum$		

Ara que tinc l'actiu $S(t)$, que vaig agafar en préstec, puc vendre'l i obtenir unitats monetàries $S(t)$ que puc dipositar en un compte bancari per guanyar interessos a un tipus de r. Suposem que guanyem interessos en forma composta contínua:

Position	**Value at t**	**Value at T**
Forward Contract	0	$S(T) - F$
Short Position on the Stock	$-S(t)$	$-S(T)$
Bank Account	$S(t)$	$S(t)e^{r(T-t)}$
$\sum$		

Al venciment, T, exercim el contracte Forward i rebem l'actiu S que li donaré a la persona que m'ha prestat l'actiu a t, i per tant màgicament $S(T)$, que és el única font d'aleatorietat, s'elimina de les equacions:

Position	**Value at t**	**Value at T**
Forward Contract	0	$\cancel{S(T)} - F$
Short Position on the Stock	$-S(t)$	$-\cancel{S(T)}$
Bank Account	$S(t)$	$S(t)e^{r(T-t)}$
$\sum$		

Magic

L'estratègia s'ha establert per eliminar tot tipus d'atzar. Els paràmetres, $S(t), r, F$ i T són fixos i es coneixen a l'instant t. L'única incògnita és $S(T)$, que és el preu futur de l'actiu.

Ara calculem el valor total de l'estratègia al moment t i al moment T:

Position	**Value at t**	**Value at T**
Forward Contract	0	$S(T) - F$
Short Position on the Stock	$-S(t)$	$-S(T)$
Bank Account	$S(t)$	$S(t)e^{r(T-t)}$
$\sum$	0	$S(t)e^{r(T-t)} - F$

La configuració de no arbitratge diu que no podeu guanyar diners del no res, és a dir, si teniu alguna cosa que val zero, sempre valdrà zero i, per tant, el preu del contracte Forward és:

$$F = S(t)e^{r(T-t)}$$

Tingueu en compte que el preu del contracte no depèn de l'evolució del preu de l'actiu subjacent $S(T)$ de la mateixa manera que el preu del bitllet per participar en el joc aleatori no depèn del resultat particular de la moneda. En el següent capítol veurem que de fet també es pot derivar:

$$F = S(t)e^{r(T-t)} = \mathbb{E}[S(T)]$$

però per això haurem de mostrar un model per a l'evolució de $S(t)$.

Clarament, $S(t)e^{r(T-t)} > F$ no pot ser, ja que en aquesta situació realitzaré l'estratègia anterior, és a dir, comprar un forward, demanar prestat l'actiu i obrir un compte bancari i obtenir un benefici positiu amb qualsevol inversió. Si per qualsevol motiu es produeix la situació anterior i el participant del mercat intenta treure'n profit, compraran immediatament contractes a termini que faran que F augmenti i que la desigualtat s'esvaeixi. El contrari també és cert, si $S(t)e^{r(T-t)} < F$ vendria un contracte a termini, obtindria un préstec d'un banc i compraria l'actiu revertint totes les operacions de l'estratègia i, per tant, fer un benefici positiu de nou sense cap inversió. Com s'ha explicat abans ambdues situacions són d'arbitratge, les situacions no són possibles o desapareixeran immediatament.

5.4 Derivatives

Els derivats són actius financers el valor dels quals depèn de l'evolució d'un altre actiu. Per exemple, el contracte a termini es pot considerar un derivat perquè el preu del contracte a termini, F, depèn del nivell actual de l'actiu subjacent $S(t)$. La definició sembla molt àmplia i, de fet, és perquè podeu negociar pràcticament qualsevol tipus de dependència d'altres actius. Però els conceptes següents solen ser aspectes comuns de totes les derivades:

- **Premium (prima)** L'import pagat inicialment pel contracte. Com trobar aquest valor és l'objectiu final d'aquest capítol.
- **Subjacent** L'instrument financer del qual depèn el valor de l'opció.
- **Strike** La quantitat per la qual es pot comprar o vendre el subjacent.
- **Expiration** Data en què madura la derivada.
- **Payoff** La funció que descriu el benefici o la pèrdua del derivat en funció del nivell actual del subjacent.

A l'exemple anterior del contracte forward, la prima era zero, el subjacent era S, la *strike* F, la *expiration* T i la funció de pagament (*payoff*) era $f(x) = x - F$. Sovint també fem servir la lletra K per referir-nos a la *strike* a les seccions següents.

5.4.1 Opcions de vainilla normal

Tot i que els termes forward s'escriuen de tal manera que el comerç es converteixi en una obligació per a ambdues parts A i B. El següent tipus de derivats són les opcions que fan obligacions asimètriques per A i B.

Opció de trucada (Call option)

Un acord en el qual una part, A, té el dret, però no l'obligació, de comprar un actiu, S, d'una altra part, B, en un moment específic del futur, T, a un preu específic, K, acordat avui t. Els termes del mateix fan que sigui un dret per A, però una obligació per B si A exerceix el dret.

Opció de posada (Pull option)

Un acord on una de les parts, A, té el dret, però no l'obligació, de vendre un actiu, S, d'una altra part, B, en un moment específic del futur, T, a un preu específic, K, acordat avui t. Els termes del mateix fan que sigui un dret per A, però una obligació per B si A exerceix el dret.

En un contracte Forward, l'obligació és vinculant per a ambdues parts A i B i, per tant, el preu just és 0, cap d'elles coneix el resultat i el preu acordat K o F és el benefici esperat. En calls o puts una part, A, té una posició avantatjosa perquè depenent de l'evolució del subjacent S, A pot decidir exercir l'opció o no, mentre que B és un jugador passiu i en cas de un exercici està obligat a realitzar la venda o la compra. Per tant, està clar que el preu de l'opció mai és 0 i A sempre haurà de pagar B una prima a t.

Les opcions es negocien pels mateixos motius que per a forward, que és cobertura i especulació.

La comprensió de les opcions es veu ajudada per la interpretació visual del valor d'una opció al venciment, és a dir, la funció de pagament.

Comencem amb una opció CALL i suposem que tens una CALL amb subjacent S i strike K, i després en el moment $t = T$:

- $S_T > K$: En aquesta situació exercireu el dret de comprar l'actiu S a un preu K perquè podríeu obtenir un benefici instantani venent-lo al preu de mercat actual, és a dir, un benefici de $S_T - K$.
- $S_T < K$: no exercireu el dret a comprar l'actiu al preu K perquè el podeu comprar al mercat a S_T, que és més barat, per tant, el vostre benefici és 0 .

Per resumir-ho, la funció de pagament a $t = T$ és $\max(S_T - K, 0)$

Figura 6: Funció *Payoff* per a una opció CALL

Òbviament, les opcions donen al titular el dret però no l'obligació i, per tant, les funcions de pagament han d'incorporar la prima per tenir en compte la pèrdua potencial si no hi ha exercici. Com a mínim, saps que no té cap desavantatge tenir una opció, aquesta et dóna dret però sense obligacions.

Figura 7: Funció *Payoff* per una opció CALL incloent la prima. La intersecció amb l'eix x s'anomena punt *Breakeven*.

Tingueu en compte que en ser curta una opció CALL té la mateixa funció de pagament que ara es reflecteix al costat de l'eix x:

Figura 8: Posició curta d'una opció CALL.

De manera similar, es pot acumular el benefici d'una posició llarga en una opció PUT:

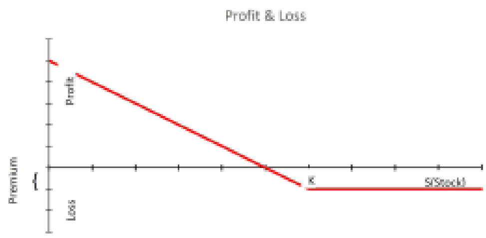


Figure 4. Payoff function for a PUT option

Figura 9: Funció *Payoff* per a una opció PUT.

Premium (Prima)

L'objectiu d'aquest mòdul és obtenir una fórmula per calcular la prima de vainilla i les opcions call i put.

Ara hem vist quant valen les calls i les puts al venciment, però la pregunta central és quant valen abans del venciment a $t < T$.

Figura 10: La línia vermella representa el valor Call a $t = T$ i la línia blava a $t < T$.

Les variables següents semblen determinar el valor d'una opció abans del venciment:

- **Valor del subjacent avui:** com més gran o més baix sigui el valor S_t, més alt o més baix pot ser a S_T.
- **Temps fins al venciment:** si l'opció té una caducitat llarga, S pot tenir més temps per pujar o baixar per arribar a la strike de l'opció.
- **Volatilitat:** de manera semblant a l'efecte del temps de caducitat, com més volàtil és S més possibilitats té el valor S_T per arribar a K.
- **Strike:** en canvi, tenint en compte la resta de constants de paràmetres, les diferents strikes poden canviar la probabilitat de S d'arribar a determinats nivells i, per tant, l'opció d'exercir.
- **Tipus d'interès:** no és evident fins ara, però si penseu que una opció és el resultat esperat descomptat fins al moment, notareu que el tipus d'interès ha de jugar un paper en el càlcul de la prima d'opció.

Exercici

L'objectiu d'aquest mòdul és obtenir una fórmula per calcular la prima de vainilla i les opcions call i put.

- Què val més una opció PUT o CALL (tots els paràmetres comuns són iguals)?
- L'augment de la volatilitat fa que una opció sigui més o menys cara?
- Un temps de venciment més llarg fa que una opció sigui més o menys cara?
- Donades dues opcions CALL idèntiques amb només un toc d'atenció diferent, $K_1 < K_2$, quina opció és més cara? El que té la vaga baixa o la vaga alta?
- Donades dues opcions PUT idèntiques amb només un toc d'atenció diferent, $K_1 < K_2$, quina opció és més cara? El que té la vaga baixa o la vaga alta?

5.5 La paritat Put-Call

Denotem per $C(t, T, K, S)$ el preu d'una opció CALL en el moment t amb stike K de S i venciment T, anàlogament anotem per $P(t, T, K, S)$ el preu d'una opció PUT. A mesura que t s'acosta a T, el preu d'una opció CALL o PUT es converteix en la seva funció de pagament, és a dir:

$$\lim_{t \to T} C(t, T, K, S) = \max(S_T - K, 0)$$

$$\lim_{t \to T} P(t, T, K, S) = \max(K - S_T, 0)$$

Per tant, es pot observar que ser llarga una opció CALL i ser curta una opció PUT produeix el benefici d'un contracte Forward a T, de fet:

$$C(T, T, K, S) - P(T, T, K, S) = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K$$

O gràficament

Com que el costat dret de l'equació té el mateix risc que el costat esquerre, podem aplicar el principi de no arbitratge i argumentar que si ambdues parts de l'equació són iguals a $t = T$, també s'ha de satisfer l'equació a $t < T$:

$$C(T, T, K, S) - P(T, T, K, S) = S_T - K$$
$$C(t, T, K, S) - P(t, T, K, S) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Tot i que no sabem com calcular el preu d'una opció CALL o PUT, sabem per la relació anterior que hi ha una equació respecte a tots dos preus.

5.6 Recapitulació

Hem presentat els fonaments bàsics dels mercats financers i hem introduït el principi de no arbitratge. Utilitzant aquest principi, hem pogut derivar el preu forward al qual dues parts poden entrar en un forward. El preu a termini no té en compte cap de les opinions de les parts i representa l'evolució justa dels preus subjacents. També vam introduir l'opció de vainilla, CALLS i PUTS, i la relació entre ells, la paritat PUT-CALL. L'objectiu dels apartats següents és derivar un model plausible per a l'evolució de S_t que ens permetrà trobar les primes de CALL i PUT.

6 CÀLCUL ESTOCÀSTIC: VALORACIÓ DE DERIVATS FINANCERS II

6.1 Context

L'objectiu d'aquest capítol és presentar un model discret per configurar un model bàsic d'evolució de preus per S i per derivar preus per a les opcions CALL i PUT. Començarem configurant un model molt simplista, el model Binomial, on els preus només poden pujar o baixar una certa quantitat en un pas de temps discret. Aplicant els principis de no-arbitratge, de la mateixa manera que obtenim el preu Forward, obtindrem el preu de qualsevol opció.

El model binomial és un model molt senzill però s'utilitza per fixar el preu d'alguns derivats molt exòtics o en circumstàncies pràctiques on les derivacions sota un marc més complex no són viables.

El model binomial servirà com a primer pas per construir un model continu, és a dir, el moviment Brownià, que és un model ben acceptat per a l'evolució dels preus als mercats financers i utilitzat per a una gran quantitat de situacions pràctiques. La derivació del model continu seguirà com a cas límit del model binomial on els passos de temps van decreixent cap a zero.

6.2 Models binomials i comportament aleatori dels actius

6.2.1 Models binomials

Considerem la configuració següent:

- Tenim un stock, S i una *Call-option* C que caduquen en un dia (suposem l'hora en un format discret i els passos d'un dia) i donem un *strike* $K = 100$ (és a dir, tenim un *100-Call*).
- El stock pot pujar a $S_T = 101$ o baixar a $S_T = 99$ des del seu valor actual de $S_t = 100$.
- A més, suposem que la probabilitat d'un augment del preu és $p = 0,6$ i que la probabilitat d'una caiguda del preu és $q = 1 - p = 0,4$.
- Els tipus d'interès es consideren zero, és a dir, $r = 0$.

Gràficament la situació és la següent:

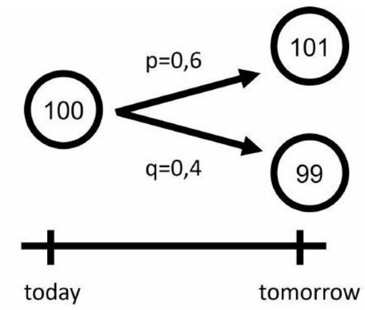


Figura 11: Model binomial d'un pas

La pregunta principal és:

> Quin és el valor de l'opció avui t?

Quin és un preu just per comprar o vendre l'opció anterior tenint en compte el model subjacent per a l'evolució de S? Per respondre a la pregunta hem d'eliminar l'aleatorietat de l'experiment. Com en l'exemple Forward, no hi ha manera que un comprador i un venedor estiguin d'acord en la seva previsió de l'evolució del preu de S i, per tant, hem de derivar el preu just. Essencialment seguirem la mateixa estratègia que es fa per a la derivació del preu a termini, és a dir, trobar una cartera (*portfolio*) (disseny intel · ligent) on el resultat sigui indiferent a l'evolució del preu de S (és a dir, és determinista) i després utilitzar un argument de no-arbitratge per derivar el preu d'aquesta cartera (*portfolio*) avui.

Denotem per Π_t la cartera (*portfolio*) MAGIC, que consisteix en

- Una posició llarga a una *Call-Option* i *strike* $K = 100$ que caduca a $T =$ demà, denotada per $C(t, T, K, S)$
- Una posició curta de $\frac{1}{2}$ de les accions subjacents, i la denotem ΔS on en aquest cas particular $\Delta = \frac{1}{2}$

Per tant, estem establint que Π_t sigui

$$\Pi_t = C(t, T, K, S) - \Delta S_t = C(t, T, K, S) - \frac{1}{2} S_t$$

Per a $t = T$ sabem que S_T pot valer 101 o 99, però quant valdrà Π_T? Bé, sabem definitivament el preu de la *Call-Option* al venciment, $C(T, T, K, S)$, ja que serà la seva funció de pagament:

$$\Pi_T = \begin{cases} \text{si } S_T = 101 \text{ llavors,} & C(T,T,K,S) - \frac{1}{2}S_T = \max(101-100,0) - \frac{1}{2}101 = 1 - \frac{101}{2} = \frac{-99}{2} \\ \text{si } S_T = 99 \text{ aleshores,} & C(T,T,K,S) - \frac{1}{2}S_T = \max(99-100,0) - \frac{1}{2}101 = 0 - \frac{99}{2} = \frac{-99}{2} \end{cases}$$

La cartera anterior, Π, és indiferent a l'evolució dels preus de S_t i, per tant, és determinista, és a dir, és un flux d'efectiu conegut a $t = T$. Sabem com descomptar un flux d'efectiu conegut demà per saber quant de valor té avui amb els tipus d'interès (utilitzant un principi de no arbitratge):

$$\Pi_t = \Pi_T e^{-r(T-t)} = \Pi_T = \frac{-99}{2}$$

ja que $r = 0$. Finalment

$$\frac{-99}{2} = \Pi_t = C(t, T, K, S) - \frac{1}{2} S_t = C(t, T, K, S) - \frac{100}{2} \Rightarrow C(t, T, K, S) = \frac{1}{2}$$

Hi ha un parell de preguntes per respondre:

- Per què aquest preu teòric és correcte?
- Com vam saber $\Delta = 1/2$?

El primer punt es respon ja que no hi ha un dinar gratuït. Com que Π és una estratègia amb un resultat conegut:

- $\boldsymbol{C(t, T, K, S) < \frac{1}{2}}$ significa que $\Pi_t < \Pi_T$ i, per tant, podem comprar la CALL, vendre $\frac{1}{2} S_t$ i obtenir un benefici segur sense risc en un dia de $(\Pi_T - \Pi_t)$.
- $\boldsymbol{C(t, T, K, S) > \frac{1}{2}}$ fem la versió oposada de l'estratègia anterior, venem la CALL i comprem la meitat de l'acció, i tornem a obtenir un benefici segur sense risc. .

Les situacions anteriors no són possibles o desapareixeran immediatament al mercat, per tant només hi ha un preu possible per a l'opció CALL.

En el segon punt, hem escollit Δ per cobrir l'opció. La cobertura significa que comprem o venem una certa quantitat de la posició subjacent per donar resultat a l'aleatorietat de l'evolució del preu. En altres paraules, hem escollit Δ de manera que:

$$\begin{aligned} \Pi_T(101) &= \Pi_T(99) \\ C(T, T, K, 101) - \Delta 101 &= C(T, T, K, 99) - \Delta 99 \\ \max(101 - 100, 0) - \Delta 101 &= \max(101 - 100, 0) - \Delta 99 \\ 1 - \Delta 101 &= 0 - \Delta 99 \\ \frac{1}{2} &= \Delta \end{aligned}$$

El procés per mitigar un derivat comprant o venent una determinada quantitat de les accions subjacents es coneix com a ***delta-hedge*** (cobertura delta).

Exemple

El preu de les accions és de $S_t = 100$ i pot pujar a 103 o baixar a 98 en un dia. Quant val una *Call-option* avui amb un *strike* $K = 100$? Suposem que els tipus d'interès són $r = 0$.

1. Considereu la cartera màgica $\Pi_t = C(t, T, K, S) - \Delta S_t$
2. Trobeu la cobertura Δ resolent $\Pi_T(103) = \Pi_T(98)(\Delta = 0.6)$
3. Resol $\Pi_T = -58, 8$
4. Aplicar el principi de no arbitratge per derivar

$$-58.8 = \Pi_T = \Pi_t = C(t, T, K, S) - 0.6 \times 100 \Rightarrow C(t, T, K, S) = 1.2$$

6.2.2 Les probabilitats Reals i de Risk-Neutral

La pregunta clau és saber: les probabilitats p i q de la figura 24 tenen algun paper en el preu de l'opció de compra? La resposta és no; les probabilitats p i q són el que es coneix com a probabilitats reals, són probabilitats que es poden inferir o estimar a partir d'observacions reals. No obstant això, també es podrien generar altres probabilitats en el mateix espai, en particular es podrien construir el que es coneix com a probabilitats de risc neutral sota alguna hipòtesi menor.

Probabilitats de Risc-Neutral

Possiblement un dels conceptes més difícils de les finances matemàtiques per a principiants.

Les diferències entre les Probabilitats Reas i les de Risc-Neutral són:

- **Probabilitats Reals**
  - Sabem com cobrir delta i eliminar el risc
  - Som sensibles al risc, esperem una major rendibilitat per assumir riscos addicionals
  - Només importen els preus de les accions, no les probabilitats
- **Probabilitats de Risc-Neutral**
  - No ens importa el risc del que es pot cobrir, és a dir, les probabilitats de risc neutral són probabilitats de possibles resultats futurs que s'han ajustat pel risc.
  - No estimem les probabilitats d'un esdeveniment
  - Creiem que tot és preu utilitzant expectatives simples (recordem la idea de preu just)

És molt poc probable que dues parts estiguin d'acord en probabilitats reals, ja que cadascuna pot tenir un enfocament diferent de càlcul o simplement utilitzar inputs diferents. D'altra banda, les probabilitats neutres de risc són les mateixes per a tothom, ja que es basen en un preu just.

Un inversor amb un enfocament de risc-neutral és indiferent si una inversió té un resultat segur o és una aposta per resultats diferents sempre que el rendiment de dues inversions sigui igual. En el nostre exemple, això vol dir que seria indiferent tenir S_t, i després no saber si $S_T = 101$ o $S_T = 99$, o tenir S_t unitats monetàries i dipositar-les en un compte bancari per guanyar el tipus d'interès r, que seria una inversió sense risc (un resultat segur). En altres paraules, les dues inversions següents haurien de ser les mateixes per a un inversor de risc-neutral:

- **Inversor A**: Posició llarga en S_t
- **Inversor B**: Import en efectiu S_t dipositat en un compte bancari amb tipus d'interès r

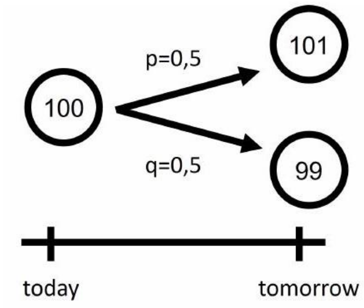
Si aquest és el cas, el resultat de A i B hauria de ser igual, és a dir:

$$\mathbb{E}[S_T] = S_t e^{r(T-t)}$$

Considerem $r = 0$ per simplicitat, aleshores s'ha de complir l'equació següent

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = 101 \times p + 99 \times (1 - p) = 100 = S_t$$

i, per tant, les probabilitats de risc-neutral per al nostre exemple binomial són:



Ara, ja que l'inversor en el món del risc neutral creu que tot hauria de ser preu utilitzant expectatives simples, ell valoraria una *Call Option* de la següent manera:

$$C(t, T, K, S) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[C(T, T, K, S)] = e^{-r(T-t)} \sum_{S_T \in \Omega} \max(x - 100, 0)\mathbb{P}\left\{x = S_T\right\}$$

on Ω és l'espai de tots els resultats possibles. Com que $r = 0$ acabem amb

$$C(t, T, K, S) = \max(101 - 100, 0) \times 0.5 + \max(99 - 100, 0) \times 0.5 = 0.5$$

EXACTAMENT el mateix preu que hem trobat abans. Les probabilitats del risc-neutral són diferents de les probabilitats reals, però donen el preu correcte utilitzant les expectatives:

Probabilitats de risc-neutral

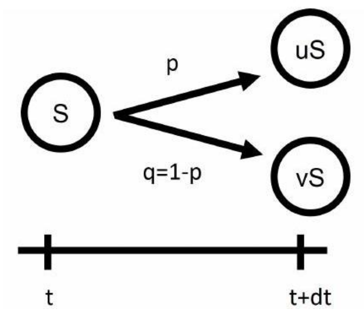
Utilitzem les probabilitats incorrectes per obtenir el preu correcte utilitzant els beneficis esperats.

L'existència d'una probabilitat de risc-neutral és equivalent o similar a considerar un marc no arbitral

6.3 Models Binomials Generalitzats

Ara generalitzarem el model binomial simple presentat per obtenir un marc general per a les opcions de preu en processos de diversos passos.

Sigui S un actiu que pot augmentar $u \times S$ en un pas, dt, o baixar a $v \times S$ en el mateix període de temps, és a dir, $0 < v < 1 < u$. Suposem que p és la probabilitat del resultat uS, doncs



Suposem que coneixem el valor d'una opció V a $t + dt$, que és V^u o V^v depenent de l'evolució subjacent (la funció de pagament) i volem derivar el valor de l'opció a t. Per a això elaborem el següent portfoli

$$\Pi = V - \Delta S$$

Utilitzant la mateixa notació que s'ha descrit abans, el valor de Π a $t + dt$ pot ser:

$$\begin{aligned}\Pi^u_{t+dt} &= V^u - \Delta u S \\ \Pi^v_{t+dt} &= V^v - \Delta v S\end{aligned}$$

Cobertura: El valor Δ és la quantitat que cobreix la cartera Π, això vol dir que fa que la cartera Π_{t+dt} sigui igual independentment de l'evolució de S. En altres paraules, Δ és tal que:

$$\begin{aligned}\Pi^u_{t+dt} &= \Pi^v_{t+dt} \\ V^u - \Delta u S &= V^v - \Delta v S \\ \Delta &= \frac{V^u - V^v}{(u-v)S}\end{aligned}$$

Aleshores, el valor de la cartera (*porfolio*) al venciment es deriva com

$$\begin{aligned}\Pi_{t+dt} &= \Pi^u_{t+dt} \left(= \Pi^v_{t+dt}\right) \\ &= V^u - \Delta u S \quad (= V^v - \Delta v S) \\ &= V^u - \frac{u\left(V^u - V^v\right)}{u-v} \left(= V^v - \frac{v\left(V^u - V^v\right)}{u-v}\right)\end{aligned}$$

No arbitratge: com que no hi ha aleatorietat a la cartera al venciment, el valor de la cartera a l'inici només descompta un flux determinista:

$$\Pi_t = \Pi_{t+dt} e^{-r(dt)}$$

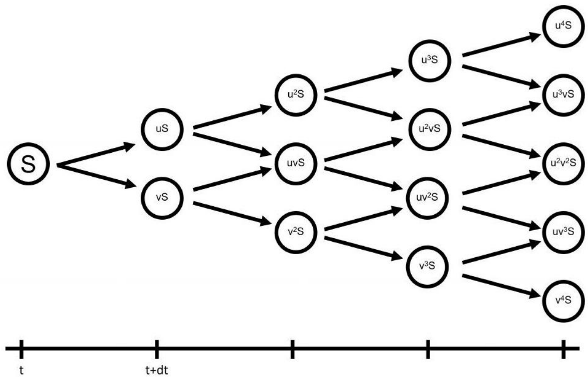
Suposem per simplicitat que $r = 0$, doncs

$$\begin{aligned}\Pi_t &= \Pi_{t+dt} \\ V - \Delta S &= V^u - \frac{u\left(V^u - V^v\right)}{u-v} \\ V - \left(\frac{V^u - V^v}{(u-v)\cancel{S}}\right)\cancel{S} &= V^u - \frac{u\left(V^u - V^v\right)}{u-v} \\ V &= V^u + (1-u)\frac{V^u - V^v}{u-v}\end{aligned}$$

Finalment hem derivat una solució de forma tancada per calcular el valor de V a t ja que el costat esquerre són totes les quantitats conegudes a t. De nou, tornem a subratllar que el preu de V no depèn de la direcció de les accions S i no té res a veure amb la probabilitat que es creu que impulsi el moviment de les accions. Una altra manera de veure-ho és pensar-ho com que el risc cobert no té valor.

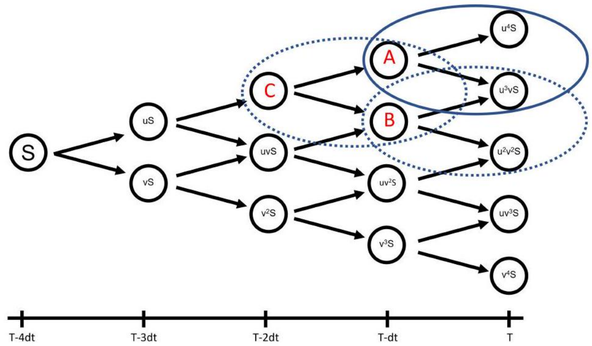
6.3.1 El model Binomial Ampliat (Extès)

Definitivament, podem ampliar el model binomial descrit per permetre múltiples passos de temps:

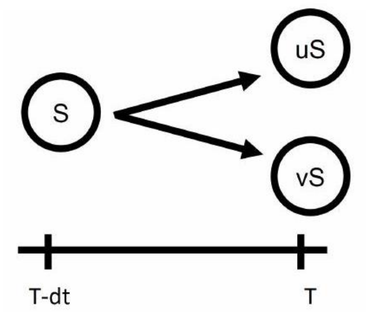


Ara hem de descriure el procés per fixar el preu de les opcions en grans arbres binomials. És evident que hem descrit com posar el preu de l'opció en arbres petits, per la qual cosa hem de repetir recursivament el procés que acabem de descriure.

Tingueu en compte que cadascun dels cercles blaus del gràfic següent



és un petit arbre de la forma:

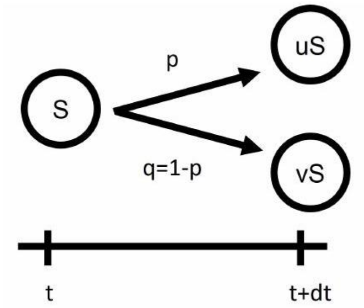


i per tant podríem trobar, seguint el procés descrit a l'apartat anterior, el valor d'una opció als punts A i B. I de nou, si coneixem els valors d'una opció a A i B, podem calcular el valor de la opció a C. Un argument iteratiu conduirà a calcular el valor d'una opció a $t = T - 4dt$.

6.4 Aproximació Algebraica vs Probabilística

La secció anterior descrivia un algorisme per trobar el preu d'una opció sota un model binomial que és una expressió algebraica de forma propera. Atès que el descansa en l'aplicació d'un principi de no arbitratge. No obstant això, també sabem que podríem seguir un camí alternatiu invocant les probabilitats de risc neutral i derivant el preu d'una opció com una simple expectativa; fem-ho.

Recordeu el model senzill



i assumim $r = 0$ per simplicitat. En un món neutral en risc, el comportament d'una inversió en S hauria de ser el mateix com dipositar els diners en un banc:

$$\mathbb{E}\left[S_{t+dt}\right] = S_t e^{r(dt)}$$
$$puS_t + (1-p)vS_t = S_t \quad (r = 0)$$
$$p = \frac{1-v}{u-v}$$

Finalment

$$V = \mathbb{E}\left[V_{t+dt}\right] = V^u p + V^v(1-p) = V^u \frac{1-v}{u-v} + V^v \frac{u-1}{u-v} = V^u + (1-u)\frac{V^u - V^v}{u-v}$$

que és exactament la mateixa expressió que hem trobat a l'apartat anterior.

En termes generals, les derivacions que apliquen el principi de no arbitratge conduiran a una solució algebraica del problema, mentre que les derivacions que segueixen un marc de risc neutral conduiran a solucions com a expectatives descomptades.

Veurem aquest mateix efecte de dualitat en el proper capítol quan es derivi un model continu d'evolució dels preus. Els preus de les opcions es derivaran com a solucions d'una PDE determinista (enfocament algebraic) o com a expectatives (enfocament probabilístic). De fet, aquesta observació és només un exemple particular del teorema general de Feynman-Kac.

6.5 Δ-hedge

Recordeu la fórmula de Δ en el model binomial, considereu V en funció de S i observeu que

$$\Delta = \frac{V^u - V^v}{(u-v)S} = \frac{V(uS) - V(vS)}{uS - vS} \cong \frac{\partial V}{\partial S}$$

I, per tant, definint Π com

$$\Pi = V - \Delta S = V - \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{S_t} S$$

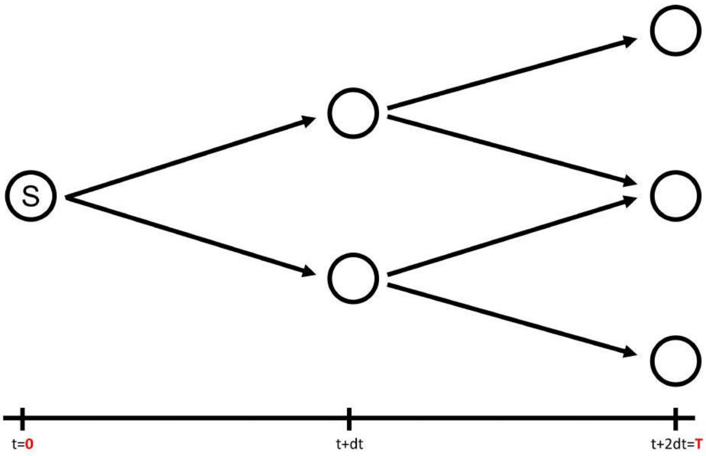
estem construint una funció que és indiferent a l'evolució de S en el sentit que:

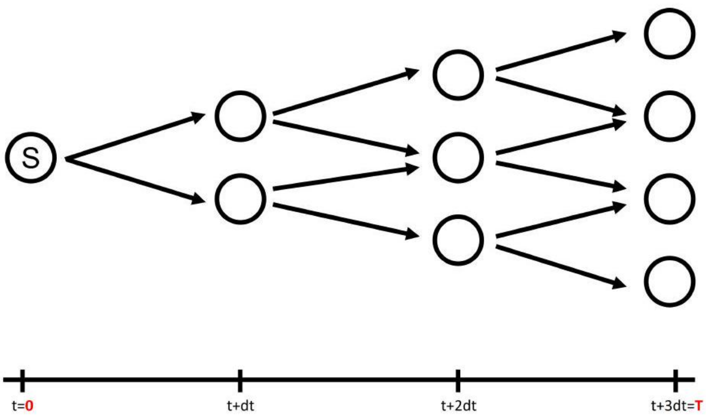
$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = 0$$

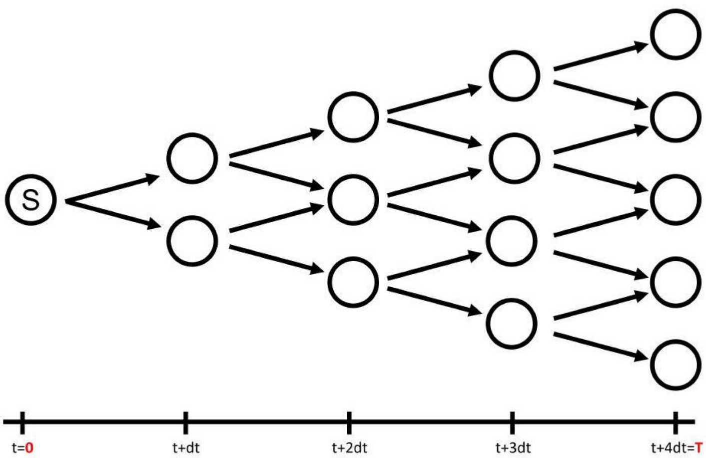
6.6 Recapitulació

Tingueu en compte que tota la derivació del capítol considera $r = 0$, òbviament els mateixos principis s'apliquen per a $r \neq 0$ només que les fórmules seran més complexes.

Hem presentat un model binomial i hem derivat dues maneres alternatives, però equivalents, de derivar el preu d'una derivada. La primera és una derivació algebraica i la segona és el valor esperat descomptat d'aquesta derivada. El següent pas és transformar el model discret en un model continu i fer un seguiment de les dues maneres alternatives de derivar els preus de les opcions. La manera de procedir serà construir arbres binomials cada cop més densos en un interval de temps donat $[0, T]$:







Quan deixem $dt \to 0$ construirem un model continu, és a dir, un moviment Brownià.

7 CÀLCUL ESTOCÀSTIC: VALORACIÓ DE DERIVATS FINANCERS III

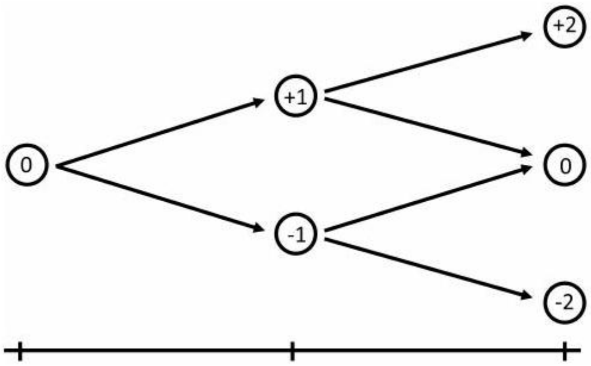
7.1 Context

L'objectiu del capítol és presentar un model continu per a l'evolució dels preus de les accions S. Introduirem alguns conceptes bàsics del càlcul estocàstic i presentarem l´equació de Black-Scholes. La derivació de l'equació de BlackScholes va ser una fita a les finances matemàtiques que va valer el premi Nobel d'Economia el 1997 per a Robert C. Merton i Myron S. Scholes.

Consulteu el Capítol 6 a [1] per obtenir més informació.

7.2 Llançar monedes en un model binomial

Comencem configurant un experiment en què llancem una moneda perfecta i guanyem +1 si surt cara o -1 si surt creu, on cada llançament és independent. Aquest experiment es pot representar mitjançant un arbre binomial, de fet:



Considereu R_i la variable aleatòria que fa un seguiment de la quantitat guanyada al i -èssim llançament, llavors

$$\mathbb{E}[R_i] = 0$$
$$\mathbb{E}\left[R_i^2\right] = 1$$
$$\mathbb{E}[R_i R_j] = 0, \forall i \neq j$$

i sigui

$$S_i := \sum_{j=1}^{i} R_j$$

llavors

$$\mathbb{E}[S_i] = 0$$
$$\mathbb{E}\left[S_i^2\right] = i$$

Les propietats següents es poden comprovar fàcilment

Propietat de Markov

El valor esperat de la variable aleatòria S_i condicionada al camí de S només depèn del darrer estat S_{i-1}. El procés no té memòria:

$$\mathbb{E}[S_i \mid S_0, S_1, \ldots, S_{i-1}] = \mathbb{E}[S_i \mid S_{i-1}]$$

Propietat Martingala

Els teus guanys esperats després de qualsevol nombre de llançaments són la quantitat que ja tens:

$$\mathbb{E}\left[S_i \mid S_{i-1}\right] = S_{i-1}$$

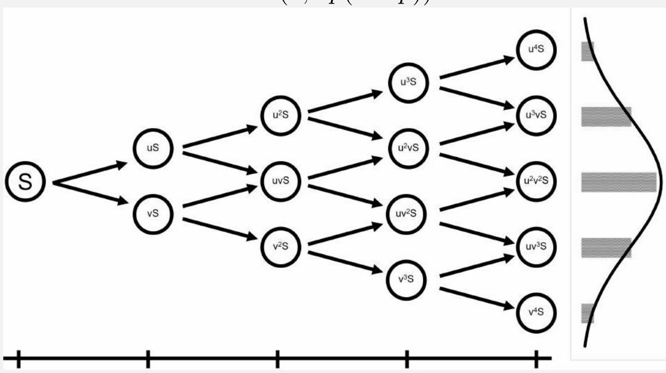
Variació Quadràtica

L'esperança del procés al quadrat és finita :

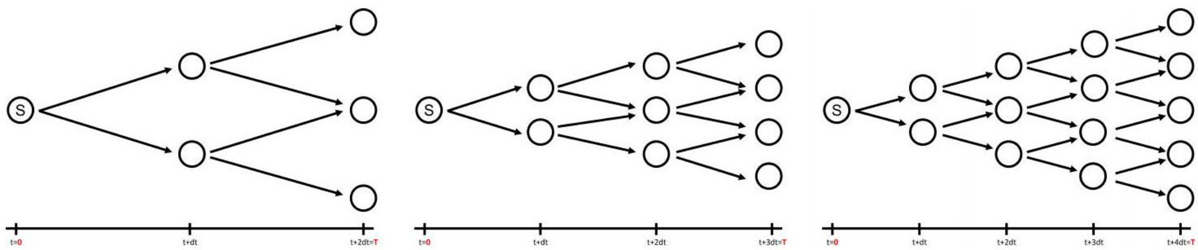
$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{j}\left(S_i - \mathbb{E}(S_i|S_{i-1})\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{j}\left(S_i - S_{i-1}\right)^2\right] = j$$

Normalitat

La distribució després de n iteracions segueix una distribució Binominal $\sim B(n,p)$, i a mesura que n augmenta, la distribució límit és $\sim N(0, np(1-p))$



Canviem ara lleugerament el joc jugant fins al temps T. Jugarem al llançament de n i, per tant, necessitarem fer-los cada $dt = T/n$ unitats de temps. També modifiquem la quantitat guanyadora i perdedora perquè depengui de n com a $\sqrt{T/n}$. El nou joc estableix una malla creixent d'arbres binomials a $[0, T]$ quan $n \to \infty$:



Observem que

$$\mathbb{E}\left[S_n\right] = \mathbb{E}\left[S_T\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{j}\left(S_i - S_{i-1}\right)^2\right] = n\left(\sqrt{\frac{T}{n}}\right)^2 = T$$

En particular, la distribució límit ara és $\sim \sqrt{T/n}N(0, np(1-p)) \sim N(0, Tp(1-p))$

Distribució Límit

Suposem que X es una variable aleatoria amb domini $\{-\sqrt{\frac{T}{N}}, \sqrt{\frac{T}{N}}\}$ amb probabilitat p i $1-p$ respectivament. (Suposem per simplicitat que són $\pm$ 1 per la següent deducció.

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = (-1)p + 1(1-p) = 2p - 1 =: \mu \\ \mathbb{V}[X] = ((-1-\mu)^2 p) + ((1-\mu)^2(1-p)) = 4p(1-p) \end{cases}$$

Per tant tenim que pel nostre cas, tenim:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{T}{N}}(2p-1) \\ \mathbb{V}[X] = \frac{T}{N}4p(1-p) \end{cases}$$

Si ara considerem la suma de n variables que establim al "joc", com que em fixat que cada "pas" és independent de l'anterior, son n variables *iid*. Ara definim aquesta suma i tindrem:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \mathbb{E}[Y] = n\mu \mathbb{V}[Y] = n\sigma^2$$

i ara pel teorema central del límit tenim que

$$Z = \frac{Y - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

quan $n \to \infty$. Per tant, la distribució límit es

$$Y \sim N(N\mu, N\sigma^2) = N(\sqrt{NT}(2p-1), 4Tp(1-p))$$

El que crec que es volia dir als apunts del professor es que $p = \frac{1}{2}$, que només se substitueix a la mitja però no a la varianza i el resultat quedaria ($posant S_N := Y$):

$$S_N \sim N(0,T)$$

(que es més bonic i té més sentit amb el que es pretés veure). A més, coincideix amb les dues observacions prèvies tant de la esperança com la variació quadràtica.
Nota 7.1 *Obviament seguint el mateix raonament el quadre de "Normalitat" tampoc seria correcte i en aquest cas seria una Normal* $\sim N(0,n)$.

El procés limitant, $\{B_t\}$, té les propietats següents (fins a un possible factor d'escala):

1. Procés Markovià

$$\mathbb{E}\left[f\left(B_t\right) \mid B_u, 0 \leq u \leq s\right] = \mathbb{E}\left[f\left(B_t\right) \mid B_s\right] \quad s < t \text{ i prou regular } f$$

2. Propietat Martingala

$$\mathbb{E}\left[B_t \mid B_u, 0 \leq u \leq s\right] = B_s \quad s < t$$

3. Té variació quadràtica finita

$$\lim_{dt \to 0} \sum_{t_k \leq t} \left|B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right|^2 = T$$

4. Normalment distribuït [1]

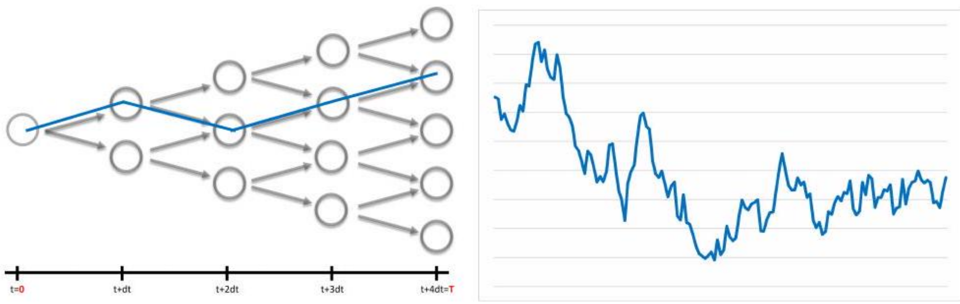
$$B_{t+u} - B_t \sim N(0,u)$$

[1] Recordem que els retorns ja vam veure que no eren normals però ho suposàvem.

5. Continu (... en algun sentit probabilístic)

Per als propòsits d'aquest curs, prenem això com una definició de moviment Brownià, encara que la caracterització correcta del moviment Brownià (també conegut com a procés de Weiner) requereix conceptes addicionals de càlcul estocàstic. De fet, les dues primeres propietats anteriors deriven de la caracterització d'un moviment Brownià com un procés amb increments estacionaris i independents.

El que volem reunir és una intuïció sobre el comportament d'un moviment Brownià i, per tant, com apropar-nos a la realització del camí. Observeu que la realització d'una malla intermèdia d'un arbre binomial tendeix qualitativament a la trajectòria d'un moviment Brownià per a n grans:



7.3 Moviment Brownià i rendibilitat de les accions

El model que proposem és que els rendiments R_t del preu de les accions S_t segueixen un moviment Brownià. En altres paraules, estem proposant una extensió de l'arbre binomial, en què

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = R_t = \sigma\sqrt{dt}\epsilon_t$$

on $\epsilon_t \sim N(0,1)$ i $\sigma \in \mathbb{R}^+$(en el model binomial $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ però podem deixar que sigui un paràmetre general per al model). Això també es pot veure com

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = R_t = \sigma\left(B_{t+dt} - B_t\right). \tag{1}$$

D'altra banda, si l'actiu S_t no fos aleatori, necessitaria guanyar almenys la taxa d'interès r al llarg del temps, és a dir, en absència d'aleatorietat, l'evolució dels preus continuarà

$$S_{t+dt} = S_t(1 + rdt) \tag{2}$$

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = rdt. \tag{3}$$

Atès que tenim evidència empírica d'aleatorietat en l'evolució dels preus, proposem el model combinat, equacions (1) i (3), per impulsar el preu S:

$$\begin{aligned}\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} &= rdt + \sigma\sqrt{dt}\epsilon_t \\ &= rdt + \sigma\left(B_{t+dt} - B_t\right)\end{aligned}$$

Permeteu-me utilitzar un abús de notació (encara que existeix una derivació formal que condueix a la següent equació):

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\sqrt{dt}dB_t \tag{4}$$

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_t dB_t \tag{5}$$

L'equació anterior (5) és una equació diferencial estocàstica, però per a nosaltres serà una nomenclatura de la següent equació discreta:

$$S_{t+dt} = S_t + rS_t dt + \sigma S_t \sqrt{dt}\epsilon_t, \tag{6}$$

que és equivalent a

$$R_t = rdt + \sigma\sqrt{dt}\epsilon_t.$$

Si els rendiments es comportessin com l'equació anterior, aleshores la seva distribució seria normal, simètrica, centrada en $r, \ldots$. Ja hem demostrat en els fulls de probleme HW0 que aquestes suposicions no són certes, però també hem observat que la distribució de devolucions no difereix molt d'elles qualitativament i per tant prenem el model de moviment Brownià com una bona aproximació de l'evolució dels preus.

Des del punt de vista dels professionals, el moviment Brownià és simplement el model més simple a partir del qual es poden fer millores per millorar el rendiment. Per exemple, en eliminar la normalitat de la caracterització del moviment Brownià, acabem amb processos de Levy que exhibeixen una distribució de cua més gruixuda i fins i tot poden permetre salts en la seva realització.

7.3.1 Regla de la cadena per a processos estocàstics

Considerem el següent procés estocàstic S_t que satisfà

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

i sigui $V(t, S_t)$ una funció suficientment suau, aleshores

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)\, dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t)\, dt$$

Això es coneix com el Lema d'Itô i no és més que la regla de cadena habitual a la qual afegim un terme final addicional. La prova del lema d'Itô es pot trobar a [2].

7.4 Fórmula de preus de Black-Scholes

Ara que hem establert un model per a l'evolució dels preus, podem procedir com ho vam fer amb el model binomial i derivar el preu d'una opció $V(t, S_t)$. Per fer-ho, necessitarem crear una cartera amb cobertura Δ. Deixeu-nos considerar

$$\Pi(t, S_t) = V(t, S_t) - \Delta S_t$$

i assumir que el S_t subjacent segueix l'equació

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Usant el lema d'Itô podem derivar l'equació determinant per a Π com

$$d\Pi(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)\, dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t)\, dt - \Delta dS_t$$

Els únics termes a l'equació anterior que són aleatoris són $\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)\, dS_t$ i ΔdS_t, ja que la resta dels termes són deterministes i no tenen el terme dS_t que és la font de l'aleatorietat. De manera anàloga al que hem fet en el model binomial establim

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)$$

Per tant, $d\Pi$ se segueix d'una banda

$$d\Pi\left(t, S_t\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(t, S_t\right) dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(t, S_t\right) dt \tag{7}$$

i per altra banda també ha de seguir

$$d\Pi\left(t, S_t\right) = r\Pi dt \tag{8}$$

per un argument de no-arbitratge i pel fet que Π és indiferent de l'evolució de S_t (és determinista). Ara podem fusionar les dues equacions impulsores, les equacions (7) i (8), per obtenir la següent PDE determinista:

$$\frac{\partial V}{\partial t}\left(t, S_t\right) dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(t, S_t\right) dt = r\left(V\left(t, S_t\right) - \frac{\partial V}{\partial S}\left(t, S_t\right) S_t\right) dt \tag{9}$$

que s'escriu més comunament en la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

i té una condició inicial coneguda a $t = T$ ja que $V(T, x)$ és la funció de pagament coneguda.

L'equació (9) és anàloga a la derivació aritmètica per fixar preus d'opcions en models binomials, ja que procedim mitjançant un enfocament sense arbitratge. Tot i això, hi ha un enfocament equivalent: trobar una probabilitat neutral al risc i calcular el preu de l'opció com una expectativa simple.

7.5 Simulació de Montecarlo i fixació de preus d'opcions

Si no volem resoldre PDE, podem transformar l'espai de probabilitat de

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{10}$$

per calcular $V\left(t, S_t\right)$ com una expectativa. Tot i que la derivació formal és fora de l'abast del curs, a partir del teorema de Girsanov (consulteu [2]) la probabilitat neutral al risc es pot aconseguir substituint la deriva de l'SDE per la taxa lliure de risc r, és a dir

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Segons el model anterior, el preu de l'opció es pot calcular com

$$V\left(t, S_t\right) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[V\left(T, S_T\right)\right] \tag{11}$$

Una forma de calcular una aproximació de (11) és fent una simulació de Monte-Carlo, és a dir

$$\mathbb{E}\left[V\left(T, S_T\right)\right] \cong \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \tilde{V}\left(T, S_T\right)_i$$

per a M grans i realitzacions $\tilde{V}\left(T, S_T\right)_i \sim V\left(T, S_T\right)$. Òbviament necessitem poder simular $V\left(T, S_T\right)$ i això es pot fer avaluant la funció coneguda $V(T, x)$ sobre simulacions de S_T i això últim es pot fer usant una discretització d'Euler de (**??**).

7.5.1 Discretització d'Euler

Considerem la configuració general d'una SDE:

$$dX_t = a\left(X_t\right) dt + b\left(X_t\right) dB_t \tag{12}$$

per a algunes funcions regulars a i b. L'objectiu és simular una ruta d'aproximació pel procés en $[0, T]$:

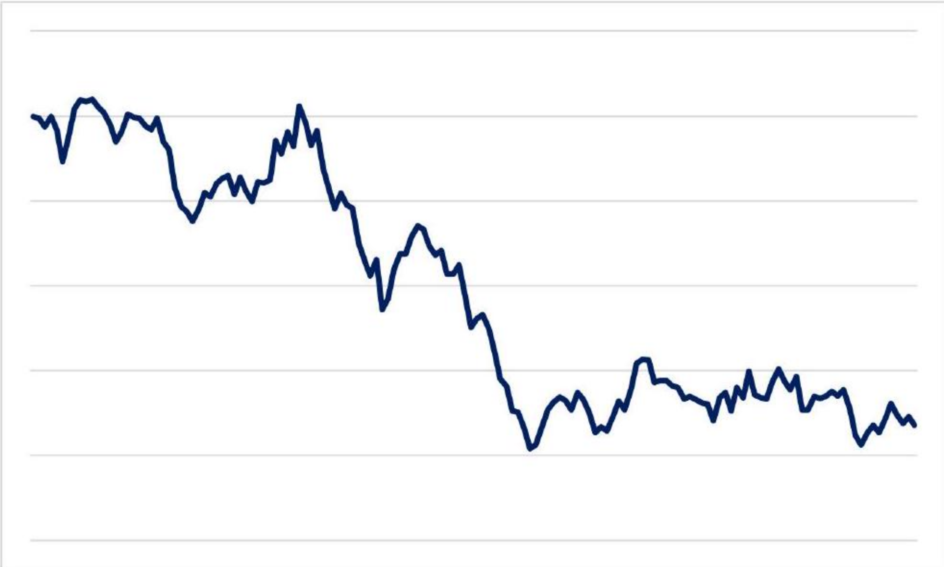


Figura 12: El camí d'un moviment Brownià.

Denotem per $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$, on $t_j = j\Delta T, \Delta T = T/n$ i $n \in \mathbb{N}$. La discretizació d'Euler de (12) és:

$$X_{t+\Delta T} = X_t + \int_t^{t+\Delta t} a\left(X_s\right) ds + \int_t^{t+\Delta t} b\left(X_s\right) dB_s$$

i $X_{t_0} = x_0$. Per a funcions prou regulars a i b es compleix el següent:

$$\int_t^{t+\Delta t} a\left(X_s\right) ds \approx a\left(X_t\right) \int_t^{t+\Delta t} ds = a\left(X_t\right) \Delta t$$
$$\int_t^{t+\Delta t} b\left(X_s\right) dB_s \approx b\left(X_t\right) \int_t^{t+\Delta t} dB_s = b\left(X_t\right)\left(B_{t+\Delta t} - B_t\right) \sim b\left(X_t\right) \sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

on $\epsilon_t \sim N(0,1)$.

Resumint tots plegats acabem amb l'algorisme de l'esquema d'Euler

$$\begin{cases} X_{t_0} = x_0 \\ X_{t+\Delta T} = X_t + a\left(X_t\right) \Delta t + b\left(X_t\right) \sqrt{\Delta t} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0,1) \end{cases} \tag{13}$$

La funció lineal per parts que sorgeix de l'algorisme és un esquelet de trajectòria del moviment Brownià:

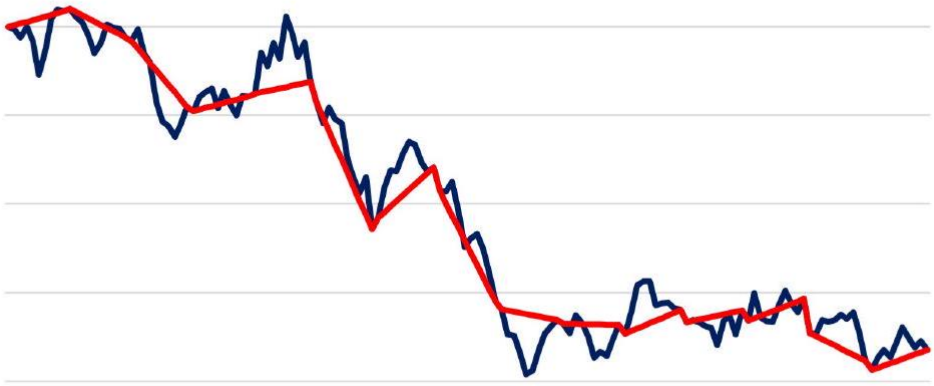


Figura 13: La línia vermella és una aproximació constant lineal per trams de la trajectòria aproximada d'un moviment Brownià en blau.

Preus de opcions

Considerem que volem fixar el preu d'una opció Call segons el model

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Algorisme de Montecarlo:

1. Simular una ruta per a S aplicant l'esquema d'Euler (13) amb
   - $S_{t_0} = S_0$
   - $a(S) = rS$
   - $b(S) = \sigma S$

   per a una malla de discretització donada$N \in \mathbb{N}$
2. Apliqueu la funció de pagament, V, a S_{t_N}
3. Repetiu els passos 1 i 2 per $M \in \mathbb{N}$ vegades
4. El preu de l'opció és

$$\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} V\left(S_N^i\right) \right) e^{-r(T-t)} \quad \text{quan } N, M \to \infty$$

7.6 Recapitulació

Aquest capítol finalitza el mòdul sobre càlcul estocàstic. Hem completat un model continu per a l'evolució del preu de les accions que és àmpliament acceptat a la indústria i mostrem dues formes equivalents de valorar les opcions segons el model. La primera opció és resoldre la coneguda PDE de Black-Scholes i la segona opció és fer una simulació de Monte-Carlo.

L'avantatge dels mètodes de simulació Monte-Carlo és clar en aquest tipus de problemes i són, amb diferència, l'enfocament més popular entre els professionals. També hi ha altres avantatges que no són tan clars en aquest context, però són suficients per esmentar que els mètodes de Monte-Carlo són més fàcils d'escalar que els mètodes numèrics de PDE.

8 OPTIMITZACIÓ MATEMÀTICA: GESTIÓ DE CARTERES

8.1 Context

L'objectiu d'aquest capítol és presentar les tècniques d'optimització de carteres, és a dir, el tipus de problemes als quals s'enfrontarà un gestor de carteres en les seves tasques. En aquest entorn tindrem en compte que podem invertir una riquesa determinada en nombrosos actius diferents i se'ns demana que realitzem la tasca d'obtenir un conjunt òptim d'actius i quantitats en cada actiu a invertir.

Harry Markovitz va presentar l'any 1952 les idees bàsiques de la selecció de carteres, és a dir, trobar una combinació d'actius que en un període de temps determinat produeixi la major rendibilitat possible amb el menor risc possible. Va rebre el premi Nobel l'any 1990 [2].

8.2 El problema d'optimització

Introduïm el problema d'optimització amb un exemple de joguina:

> Imagineu-vos que esteu a una illa tropical i només teniu 100 USD per invertir. Les oportunitats d'inversió són molt limitades i només es pot invertir en paraigües o gelats.

El rendiment o el retorn de la inversió és incert i depèn de l'evolució del temps com:

Weather/Investment	Ice cream	Umbrella
Sunny	120	90
Rainy	90	120

Suposem que la probabilitat que el temps sigui assolellat o plujós és la mateixa i considerem les dues estratègies d'inversió següents:

1. Inverteix tot el que tens en qualsevol dels dos productes
2. Dividiu la inversió en parts iguals entre productes

La primera opció de rendiment esperat és la mateixa tant si opteu per invertir-ho tot en gelats o paraigües i segueix, per exemple, optem per invertir-ho tot en gelats, i després:

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\mathbb{P}(\text{ assolellat }) \times 120 + \mathbb{P}(\text{ plujós }) \times 90}{100} - 1 = \frac{0.5 \times 120 + 0.5 \times 90}{100} - 1 = 5\%, \tag{14}$$

però hi ha la possibilitat que guanyis més o menys d'aquests 5% en la situació real.

D'altra banda, si repartim la inversió a parts iguals entre ambdós productes el resultat no dependrà de l'evolució del temps. De fet, guanyareu 45 USD en un producte i 60 USD en l'altre producte, per tant:

$$\mathbb{E}[R] = R = \frac{45 + 60}{100} - 1 = 5\% \tag{15}$$

i el resultat no és aleatori sinó determinista.

Tot i que el resultat en la primera i la segona situació és el mateix, les equacions (14) i (15), la diferència és que la segona opció és sense risc.

El concepte principal d'optimització de cartera es recull en aquest exemple. A partir de la correlació entre els productes d'inversió podem reduir el risc de la cartera i, tot i així, obtenir la rendibilitat desitjada.

> La diversificació entre inversions redueix el risc.

Aquí entenem el risc com la variància o la incertesa en el resultat d'una inversió.

[2] Consulteu el capítol 8 a [1] i els capítols 11 i 16 a [2] per a més informació

Formulem la idea anterior deixant que X i Y siguin dues variables aleatòries amb variàncies σ_X^2 i σ_Y^2 respectivament. Aleshores, la variància de la combinació lineal és:

$$\mathbb{V}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Per a diferents valors de la covariància o correlació, ρ, entre X i Y obtenim diferents valors per a la variància de la combinació lineal:

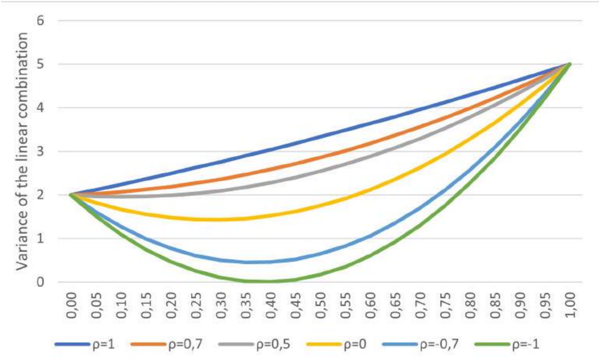


Figura 14: Per a $\alpha \in [0,1]$ i diferents valors de ρ. Tingueu en compte que per a un determinat α els punts de les diferents corbes tindran el mateix rendiment esperat i un risc diferent. De fet, el retorn esperat només depèn de α, però no de ρ, és a dir, $\mathbb{E}[\alpha X + (1-\alpha)Y] = \alpha\mathbb{E}[X] + (1-\alpha)\mathbb{E}[Y]$.

La variància de la combinació es pot eliminar completament si i només si la correlació entre X i Y és 1 o -1 i el $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

L'optimització de carteres és la teoria que estudia la correlació entre actius per construir carteres amb baix risc i alt rendiment.

8.3 Model de variació mitjana

La hipòtesi de partida de la teoria de Markovitz és que:

1. Els inversors haurien de considerar els rendiments esperats com a desitjables;
2. Els inversors haurien d'evitar la variació (risc) dels rendiments.

Aquesta regla general té una primera conseqüència, coneguda pels inversors com la importància de la diversificació.

Sigui un conjunt de N actius de risc, per exemple, accions, i definiu la cartera següent

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i$$

on $\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$ són els pesos i a_i és el rendiment de l'actiu i-è amb rendiment esperat $R_i = \mathbb{E}[a_i]$. La condició imposada en les ponderacions és assegurar-se que no es pot invertir més del que es té, una situació que no sempre passa, ja que es pot invertir en una posició apalancada.

A partir de l'equació anterior, la rendibilitat esperada és la cartera

$$\mu = \mathbb{E}[\mathcal{P}] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mathbb{E}[a_i] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i R_i$$

i la variància segueix l'equació

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i\omega_j\sigma_{ij}, \quad \text{on } \sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\,(a_i, a_j)$$

Considereu els casos extrems següents:

- **Opció A:** La rendibilitat dels actius no està correlacionada per parelles, és a dir,

$$\mathrm{Cov}\,(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_i^2 & i = j \end{cases}.$$

  Per tant

$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2\sigma_i^2$$

  a més considerem que la cartera està igualment ponderada, és a dir $\omega_i = 1/N$. Per tant, simplement podem avançar i obtenir el següent límit superior

$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 \leq \frac{\max\left\{\sigma_i^2 \mid i = 1, \dots, N\right\}}{N}$$

  Considerant plausible que hi hagi un límit en la variància de qualsevol actiu, a mesura que $N \to \infty$ la variància de la cartera disminueix a zero.

- **Opció B:** Suposem ara que els rendiments de la cartera estan correlacionats de manera similar, per exemple, igualment cartera ponderada amb $\mathbb{V}\,(a_i) = \sigma^2$ i correlació $0 \leq c \leq 1$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i\omega_j\sigma_{ij} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii} + \sum_{i\neq j}\sigma_{ij}\right) = \frac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)c\sigma^2 \\
&= \frac{1-c}{N}\sigma^2 + c\sigma^2
\end{aligned}$$

  Això mostra la situació oposada a l'opció anterior, ja que per molt gran que sigui N, és impossible reduir la variància per sota d'un determinat llindar.

La conclusió dels exemples anteriors és:

- Com més gran sigui el nombre d'actius no correlacionats per parells, menor serà el risc de la cartera.
- Com més gran és la presència d'actius similars correlacionats, més proper s'acosta el risc de la cartera al risc estructural dels actius.

Per tant, la diversificació en un món de variància mitjana s'aconsegueix considerant actius altament no correlacionats en un nombre raonable.

8.4 Conjunt d'inversions factibles

Aprenem a formular i derivar la solució del problema d'optimització. Donada una cartera d'actius de risc N, considereu les matrius següents:

- vector de pesos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)^t$;
- matriu de variància-covariància $C = [\sigma_{ij}]_{1<\leq i,j\leq N}$ on $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\,(a_i, a_j)$;

- vector de rendiments esperats $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)^t$ on $\mu_i = \mathbb{E}[a_i]$.

Sota la notació vectorial anterior tenim:

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \omega^t \mu$$
$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \omega^t C \omega$$

Segons el raonament de Markovitz, l'objectiu de l'inversor és obtenir un cert nivell de rendibilitat amb el menor risc. El problema d'optimització de la variància mínima es formula com:

Trobeu ω^* de manera que

$$\omega^* = \min_{\omega} \left\{ \omega^t C \omega \right\}$$

agafat a

$$\omega^t \mu = r^* \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$$

per a un nivell donat de rendiment esperat r^*.

Aquest és un problema de programació quadràtica que es pot resoldre mitjançant multiplicadors de Lagrange. Tanmateix, abans de donar la solució analítica, observeu el següent:

- no hi ha cap restricció en el signe dels pesos ω_i, per tant podríem tenir posicions llargues i curtes a la cartera;
- utilitzem tots els nostres diners per invertir, és a dir, la suma dels pesos és igual a 1.

Aleshores, la funció lagrangiana es defineix com:

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{\omega^t C \omega}_{\text{funció objectiu}} \underbrace{- \lambda_1 \left(\omega^t \mu - r^* \right) - \lambda_2 \left(\omega^t \mathbb{1} - 1 \right)}_{\text{restriccions}} \\ &= \sum_{1 \le i,j \le N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i - r^* \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i - 1 \right), \end{aligned}$$

on $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)^t$. Aleshores hem de resoldre un extrem mínim local:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{array}\right\} \text{això garanteix el compliment de la restricció}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0 \ \right\} \text{troba un extrem local per } \omega_i$$

acabant amb $N + 2$ equacions:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{N} \omega_i \sigma_{ij} - \lambda_1 \mu_j - \lambda_2 = 0 \quad j = 1, \ldots, N \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i - r^* = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i - 1 = 0 \end{cases}$$

que es pot resumir en notació matricial com:

$$\begin{pmatrix} 2C & \mu & \mathbb{1} \\ \mu^t & 0 & 0 \\ \mathbb{1}^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema anterior es resol fàcilment per qualsevol mètode lineal.

Aquesta solució s'anomena eficient en el sentit de ser la cartera amb el rendiment esperat, r^* i la variància mínima. Qualsevol altra cartera amb aquest rendiment r^* tindrà un risc més elevat.

8.4.1 La frontera eficient

Per a un conjunt de N actius, considerem un rendiment objectiu donat r^*, aleshores el problema d'optimització de Lagrange troba els pesos òptims $\{\omega_i\}_i$ per a la cartera de variància mínima σ^*.

Si tracem el parell (σ^*, r^*) per a diferents valors de r^* obtenim la frontera eficient:

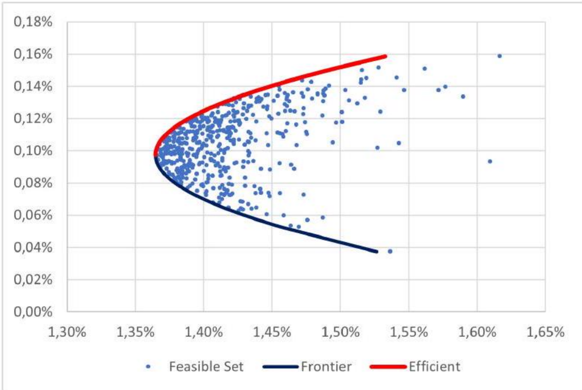


Figura 15: Conjunt factible de carteres, solucions frontereres i eficients de frontera.

- **Conjunt factible:** la regió dins de la hipèrbola és el conjunt factible que consisteix en totes les combinacions possibles dels N actius de risc, és a dir, totes les possibles carteres existents.
- **Frontera eficient:** la branca superior de la hipèrbola és la frontera eficient, és a dir, per a un determinat nivell de risc us ofereix la cartera de rendiment més alta possible.
- **Cartera de variància mínima:** el lloc geogràfic de la hipèrbola correspon a la cartera de variància mínima, la cartera menys arriscada possible.

No es pot aconseguir res fora de la hipèrbola amb combinacions dels actius N donats.

- **Branca inferior:** la branca inferior de la hipèrbola no és clarament eficient i, per tant, no és desitjable des del punt de vista de l'inversor.

8.5 Optimització de la cartera amb un actiu sense risc

Per completar la teoria de l'optimització de carteres ens agradaria incloure un actiu sense risc sobre les possibilitats d'inversió; d'aquesta manera podríem crear carteres amb qualsevol quantitat de risc objectiu i, per tant, per a qualsevol apetit dels inversors potencials.

Suposem que l'univers de les inversions potencials es redueix a un actiu de risc i un actiu sense risc.

	Return μ	**Risk** σ
Risky	0.15	0.25
Risk-free	0.06	0.0

i assumim que ω és la fracció de la nostra riquesa invertida en actius de risc. Aleshores

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \omega \times 0.15 + (1-\omega) \times 0.06 = 0.06 + 0.09\omega$$
$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \omega^2 \times 0.25^2 = 0.0625\omega^2$$

Per decidir quina part ω invertir en l'actiu de risc es tria:

- **Return:** el nivell de rendiment desitjat $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$ i resol per ω;
- **Risc:** el nivell de risc desitjat $\mathbb{V}(\mathcal{P})$ i resol per ω.

La idea és que podeu configurar qualsevol nivell de risc o rendibilitat que desitgeu i, per tant, hi ha una combinació per a cada inversor. Més endavant en aprofundirem en aquesta secció, però tingueu en compte que es pot triar $\omega > 1$ mitjançant un préstec de diners per aconseguir el nivell de rendiment desitjat.

La fórmula generalitzada per a un actiu sense risc i un actiu amb risc és:

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \omega \times \mu_r + (1-\omega) \times \mu_{rf} \tag{16}$$
$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \omega^2 \times \sigma_r^2 \tag{17}$$

on μ_r i σ_r^2 són la rendibilitat i la variació de l'actiu de risc i μ_{rf} la rendibilitat de l'actiu sense risc.

Sembla una simplificació extraordinària de la nostra configuració anterior, però de fet mostrarem que existeix una cartera de risc característica en l'univers de totes les carteres possibles que reduirà la decisió d'inversió en quanta riquesa volem invertir en aquesta cartera característica i en l'actiu sense risc, tal com hem mostrat a l'exemple anterior. Denotarem la cartera característica per la cartera tangent.

8.5.1 Dos actius de risc i la cartera tangent

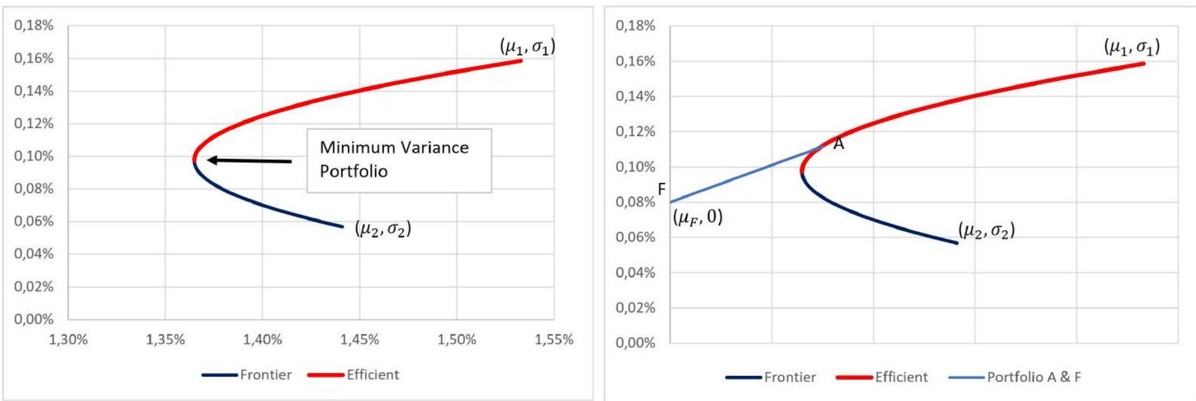
La matemàtica de considerar N actius de risc i un actiu sense risc s'entén fàcilment quan establim $N = 2$ i no imposa més dificultats a la configuració general.

Sigui a_1 i a_2 dos actius de risc i rendibilitat μ_1 i μ_2 i desviacions estàndard σ_1 i σ_2 respectivament. Les mètriques de qualsevol combinació de a_1 i a_2 són:

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \omega\mu_1 + (1-\omega)\mu_2$$
$$\mathbb{V}(\mathcal{P}) = \omega^2\sigma_1^2 + (1-\omega)^2\sigma_1^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_{12}$$

on σ_{12} és la funció de covariància de a_1 i a_2.

Per a cada cartera de la frontera, la podem combinar amb un actiu sense risc, F. Prenem una cartera arbitrària A, en el conjunt factible de combinacions de a_1 i a_2, i la combinem amb l'actiu sense risc segons les fórmules generalitzades (16) i (17). Tingueu en compte que (16) i (17) descriuen una línia recta en forma paramètrica per al pla (σ, μ), que llavors es pot representar com la subFigura 16(b):



((a)) Combinacions de cartera de dos actius de risc.

((b)) Combinacions de cartera de A i F.

Figura 16: Representació de la Frontera i Frontera eficient del Portfolio.

El punt F del gràfic representa l'actiu sense risc i la línia des d'aquest a A representa una distribució diferent de la riquesa, $\omega \in [0, 1]$.

Podríem construir diferents combinacions d'una cartera formada per l'actiu sense risc i un punt de la frontera generada pels actius de risc:

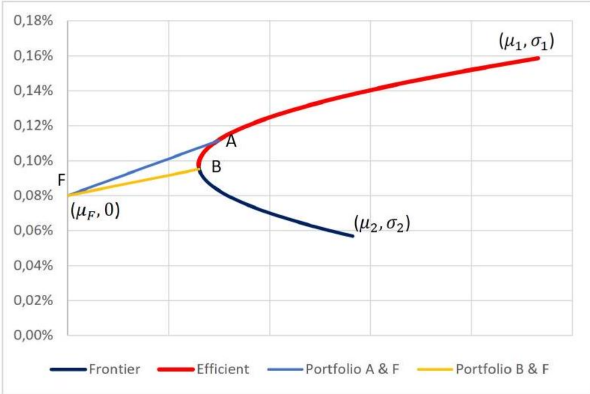


Figura 17: Combinacions de cartera de A i F i B i F.

encara que no totes les combinacions semblen eficients. En l'exemple anterior, per a un nivell de risc donat, totes les combinacions que es troben en la línia entre F i B són menys eficients que les carteres amb el mateix risc que es troben a la línia entre F i A, perquè després tindran més retorn. Es pot endevinar que hi ha una cartera característica a la frontera eficient que és la cartera tangent, ja que, per definició, cap altra combinació de F i cap cartera de la frontera eficient obtindrà una millor rendibilitat pel mateix nivell de risc:

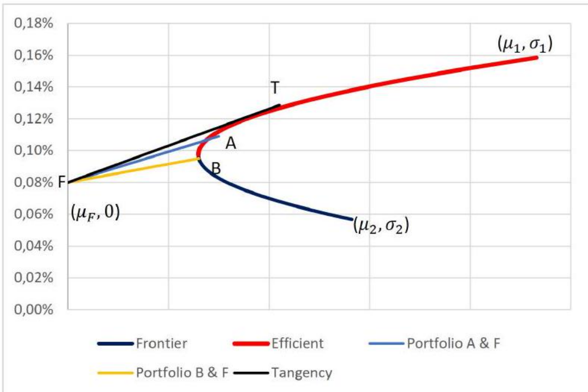


Figura 18: Cartera tangent T.

El pendent de les inversions que resideix en la combinació entre l'actiu sense risc i l'actiu amb risc es coneix com a relació de Sharpe:

$$\frac{\mu_r - \mu_{rf}}{\sigma_r}$$

La relació de Sharpe es pot pensar com una relació risc-recompensa, en el sentit que us ofereix la recompensa de rendiment per unitat de risc.

Tingueu en compte que amb la inclusió de l'actiu sense risc a l'univers de les inversions potencials, totes les carteres òptimes resulten ser una combinació de l'actiu sense risc i una cartera de risc particular anomenada cartera tangent.
Per tant, totes les carteres òptimes tenen la mateixa combinació d'actius de risc i l'únic paràmetre que pot variar és la quantitat de riquesa assignada a l'actiu sense risc.

8.5.2 Inversions de palanquejament

De vegades, el rendiment esperat objectiu de l'inversor no s'aconsegueix en cap punt entre la línia de l'actiu sense risc i la cartera tangent. En aquests casos, cal demanar diners prestats per invertir més en l'actiu de risc, en una posició coneguda com a palanquejament.

El gràfic següent mostra la regió de la posició de palanquejament sota la hipòtesi que la taxa sense risc també és la taxa demanada pel prestador dels diners. Si no és cert, la línia posterior a la cartera tangent tindria un pendent més baix en comparació amb la línia anterior a la cartera tangent.

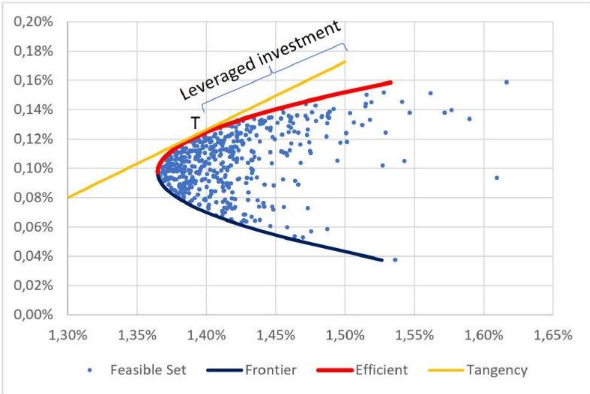


Figura 19: Aprofitar les inversions.

8.6 Recapitulació

L'optimització de la cartera resulta ser l'últim pas en el procés de gestió de la cartera i, tal com es presenta en aquest capítol, resulta ser un procés senzill. No obstant això, la dificultat d'aquest enfocament es basa no només en la hipòtesi del model, que es va discutir anteriorment, sinó també en el supòsit que coneixem o podem calcular els rendiments esperats i les matrius de variància-covariància. Aquestes quantitats estan lluny de ser conegudes i cada equip directiu diferent pot utilitzar un enfocament diferent per estimar-les. Alguns poden utilitzar dades anteriors, mentre que altres poden utilitzar la previsió basada en un model determinat o fins i tot la freqüència de les dades utilitzades pot donar resultats diferents notables.

La següent secció segueix un altre aspecte dels gestors de carteres o gestors que es dediquen a activitats de M&A. La idea és establir els criteris pels quals una inversió crea valor o la destrueix i, per tant, quan s'ha d'introduir o no una inversió determinada.

9 OPTIMITZACIÓ MATEMÀTICA: GESTIÓ DE CARTERES II

9.1 Context

L'objectiu d'aquest capítol és presentar algunes aplicacions dels fluxos d'efectiu descomptats. Per als analistes d'inversions i gestors de carteres, gran part del seu treball implicarà l'avaluació dels fluxos d'efectiu presents i futurs. En el primer capítol vam exposar les regles bàsiques per calcular el valor temporal dels diners i en aquesta lectura tocarem la base amb algunes aplicacions.

En particular, presentarem dues tècniques per avaluar la validesa d'un projecte o inversió: el valor actual net (VAN) (*net present value, NPV*) i la taxa interna de rendibilitat (TIR) (*internal rate of return, IRR*).

Les tècniques anteriors s'utilitzen habitualment per decidir entre diferents oportunitats d'inversió o per valorar la rellevància d'una oportunitat financera concreta. Als efectes d'aquesta secció ens centrarem en el pressupost de capital, que és el problema de l'elecció de l'assignació de fons a projectes i inversions d'abast relativament llarg.

Consulteu el capítol 1 a [1] per a més informació.

9.2 NPV

El valor actual net descriu una manera de caracteritzar el valor d'una inversió i la regla associada al càlcul un mètode per triar entre inversions alternatives. El valor actual net d'una inversió és el valor actual de totes les seves entrades d'efectiu menys el valor actual de totes les seves sortides d'efectiu. El concepte net aquí representa la resta de costos de tots els guanys potencials. Els passos per calcular el NPV són:

1. Identificar tots els fluxos d'efectiu associats al projecte, entrades i sortides;
2. Determineu la taxa de descompte adequada que s'ha d'utilitzar per a cada flux d'efectiu, r;
3. Calculeu el factor de descompte i assigneu el signe adequat per a les entrades i sortides;
4. La suma de totes les quantitats del pas anterior seria el NPV;
5. La regla del NPV estableix que:
    - Si una inversió té un NPV positiu, s'hauria de dur a terme;
    - Per a projectes mútuament exclusius, l'inversor hauria d'agafar el que tingui un NPV més alt.

Per calcular el NPV hauríem d'utilitzar una estimació del cost d'oportunitat del capital com a taxa de descompte. El cost d'oportunitat del capital seria la rendibilitat alternativa de l'inversor si no s'assignen fons a l'oportunitat d'inversió. Per tant, una empresa que emprèn un projecte amb NPV positiu crearà valor per als accionistes. Un NPV negatiu fa el contrari.

La fórmula general per calcular el NPV és:

$$\text{NPV} = \sum_{t=0}^{N} \frac{CF_i}{(1+r)^t}$$

on

$$\begin{aligned} CF_i &= \text{el flux d'efectiu net esperat en el temps } t. \\ N &= \text{la vida projectada de la inversió.} \\ r &= \text{la taxa de descompte o el cost d'oportunitat del capital.} \end{aligned}$$

Exemple

Suposem que esteu analitzant el projecte X per a l'empresa A, que recentment ha anunciat la seva intenció d'invertir 1 milió d'euros en X. Les estimacions internes preveuen un flux de efectiu net anual de 150.000 euros anuals a perpetuïtat. El cost del capital d'A és del 10%.

- El projecte meteorològic estatal X beneficiarà els accionistes.
- Avalueu què passaria si el cost del capital d'A fos del 15%.

Solució 1 Segons l'equació 1 hem d'avaluar:

$$\text{NPV} = CF_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CF_i}{(1+r)^t} = -1.000.000 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{150.000}{(1+0.1)^t} = -1.000.000 + \frac{150.000}{0.1} = 500.000$$

Amb un cost d'oportunitat del 10%, el NPV és un valor positiu i, per tant, genera valor per als accionistes

Solució 2 Substituir el cost del capital pel 15% en la derivació anterior donarà un NPV $= 0$. Això vol dir que el projecte no genera valor per als accionistes de l'empresa però tampoc el destrueix, per tant, emprendre el projecte farà que l'empresa sigui més gran però res més.

9.3 IRR

La taxa interna de rendibilitat representa en un sol número el rendiment de la inversió generat per un projecte. Per definició, la taxa interna de rendibilitat serà la taxa de descompte que fa que el valor actual net sigui igual a zero. Com que és una taxa interna, no necessitem més informació que els fluxos d'efectiu del projecte.

Hi ha una hipòtesi important quan es tracta de la IRR i és que la interpretació de la IRR és una taxa composta que representa la rendibilitat del projecte només si som capaços de reinvertir tots els fluxos d'efectiu intermedis exactament a la IRR. Suposem que la IRR d'un projecte és del 15%, donant fluxos d'efectiu anuals durant 3 anys, però no podem reinvertir els fluxos d'efectiu dels anys 1 i 2 amb un rendiment superior al 10%, aleshores el rendiment global del projecte serà inferior al la IRR del 15%. La fórmula general per calcular la IRR seria

$$\text{NPV} = \sum_{t=0}^{N} \frac{CF_i}{(1+\text{IRR})^t} \tag{18}$$

La regla de decisió utilitzant la IRR seria acceptar projectes i inversions per als quals la IRR sigui més gran que el cost d'oportunitat del capital. Tornant a l'exemple anterior:

Exemple

Suposem que esteu analitzant el projecte X per a l'empresa A, que recentment ha anunciat la seva intenció d'invertir 1 milió d'euros en X. Les estimacions internes preveuen un flux de efectiu net anual de 150.000 euros anuals a perpetuïtat. El cost del capital d'A és del 10%. **Solució 1** D'acord amb l'equació 2 hem de fer per a la IRR:

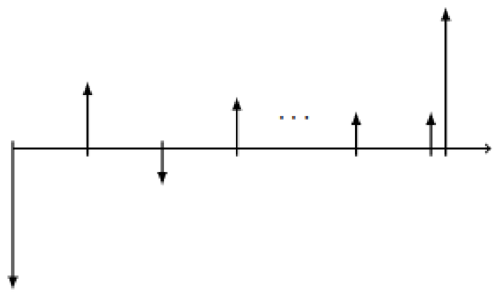
$$0 = CF_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CF_i}{(1+\text{IRR})^t} = -1.000.000 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{150.000}{(1+\text{IRR})^t} = -1.000.000 + \frac{150.000}{\text{IRR}}$$

i per tant IRR $= 15\%$ **Solució 2** Com que el cost d'oportunitat del capital, un 10%, és inferior a la IRR, creem valor per als accionistes en dur a terme el projecte.

9.3.1 Resolució de IRR per a projectes complexos

De vegades, les inversions o projectes es configuren de manera que les sortides no es produeixen una vegada i a l'inici del projecte, sinó que es poden produir en diversos períodes de temps. En aquests casos, les entrades i sortides poden alternar en el temps com:

Project	Cash Flow at $t = 0$	Cash Flow at $t = 1$	IRR	NPV at 8%
A	-10.000	15.000	50%	3.888,89
B	-30.000	42.000	40%	8.888,89



Resoldre l'equació (18) per a un diagrama de flux d'efectiu com l'anterior, és equivalent a resoldre les arrels d'un polinomi N amb coeficients reals. Ara la regla dels signes de Descartes estableix que el nombre d'arrels reals estrictament positives (multiplicitat de comptatge) d'un polinomi és igual al nombre de canvis de signe en els coeficients. Per a projectes de model de flux d'efectiu senzills només hi ha una solució possible i no hi ha cap dubte sobre la IRR, però per a inversions més complexes podria ser el cas que hi ha múltiples solucions positives que indueixen a error l'anàlisi.

Un altre punt a tenir en compte és que pel que fa a la IRR, la inversa dels fluxos d'efectiu generarà el mateix resultat, mentre que és evident que si un disseny crea valor positiu, el contrari crearà valor negatiu.

9.4 NPV vs IRR

En general, la IRR i el NPV donen la mateixa decisió d'acceptació o de rebutja quan els projectes són independents. Però quan una empresa no pot finançar tots els projectes i necessita classificar-los de més rendible a menys, la classificació pot ser diferent si s'utilitza la IRR o el NPV. La IRR i el NPV classifiquen els projectes de manera diferent quan:

- La mida o l'escala dels projectes és diferent;
- El moment del flux de efectiu dels projectes és diferent.

En cas de conflicte, sempre hem de seguir les conclusions del VAN ja que és la que recull l'afegit de valor del projecte.

Per il·lustrar aquesta situació considereu el següent, considereu aquests dos projectes amb diferents escales:

Pel que fa a la riquesa dels accionistes o la rendibilitat de la inversió, el projecte B s'hauria de dur a terme abans del projecte A si tots dos s'exclouen mútuament.

El mateix passa quan el flux d'efectiu difereix molt en períodes de temps:

Project	CF_0	CF_1	CF_2	CF_3	IRR	NPV at 8%
A	-10.000	15.000	0	0	50%	3.888,89
B	-10.000	0	0	21.220	28%	6.845,12

De nou, la regla general és actuar en conseqüència amb el NPV si sorgeix un conflicte entre ambdós mètodes.

9.5 Recapitulació

En aquest capítol hem aplicat els conceptes de valor actual, valor actual net i taxa interna de rendibilitat per valorar les inversions. S'utilitzen habitualment per a inversions i anàlisis corporatives o per problemes de pressupostos de capital.

El NPV és una mesura del valor actual de tots els fluxos d'efectiu d'un projecte determinat, mentre que la IRR és la taxa de descompte a la qual el NPV és igual a 0. Aquest darrer es pot considerar el rendiment esperat on tots els fluxos d'efectiu del projecte es podrien reinvertir al mateix temps. tornar.

La regla del NPV per a la presa de decisions és acceptar tots els projectes amb NPV positiu o quan dos projectes s'exclouen mútuament, el que tingui el NPV més alt. La IRR es pot veure afectada per problemes d'escala i temps amb els fluxos d'efectiu projectats.

10 GESTIÓ DE RISCOS

10.1 Context

Les institucions financeres tenen la necessitat de controlar el risc d'una cartera o grup d'actius determinats. La tasca dels departaments de riscos es resumeix principalment en supervisar l'activitat financera de la institució i assegurar-se que el risc individual o agregat es troba dins de l'apetit al risc de la direcció.

El Comitè de Basilea és un comitè que reuneix els reguladors bancaris mundials. Una de les primeres activitats del comitè va ser establir els termes en què els bancs han de calcular la reserva de capital per risc de crèdit. La reserva de capital permetrà mitigar les pèrdues en períodes de crisi. Una de les mesures utilitzades per calcular el capital seria Value at Risk (VaR). El VaR és una mètrica que resumeix el risc total d'un grup d'actius. Els primers llibres de normes del comitè han evolucionat incloent la necessitat de tenir en compte el risc de mercat, el risc operacional i és cada cop més complex.

L'objectiu d'aquest capítol és presentar la mesura VaR i mostrar un parell d'enfocaments diferents per calcular-la.

El mapa de riscos és la il · lustració o identificació de tots els riscos que afecten una activitat concreta, en el context de les inversions financeres es podrien identificar sense limitació els següents riscos principals

- **Risc de mercat**: reflectit en l'evolució dels preus de mercat de les operacions subjacents en renda variable, divises, bons, ... Aquest seria el risc més important en el nostre marc.
- **Risc de crèdit**: es refereix a la capacitat d'una contrapart per afrontar les seves obligacions en un contracte financer.
- **Risc de balanç**: Per a les entitats de crèdit, com els bancs, aquest risc sorgeix de l'asimetria entre el tipus d'interès a curt termini dels dipòsits i el tipus d'interès a llarg termini dels préstecs o hipoteques.
- **Risc de capital**: Aquest risc prové de l'efecte potencial sobre les mètriques de solvència que pot tenir una assignació normativa, econòmica o de capital.
- **Risc operacional**: Present en totes les activitats es refereix a errors humans o tecnològics en el procés.

Consulteu el capítol 22 a [1] per a més informació.

10.2 La mesura del VaR

Quan utilitzem VaR pretenem fer una declaració de la forma:

> Hi ha un α per cent de certesa que no hi haurà una pèrdua de més de V unitats de diners en els propers N dies.

No cal dir que el terme "certesa" anterior es dóna en un marc de significat estadística. La variable V és el VaR i depèn del nivell de confiança α i de l'horitzó temporal N i, per tant, el VaR és el percentil $(100 - \alpha)$-è de la distribució de la pèrdua de la cartera durant els N dies següents. Per tant, la funció VaR se centra a la cua esquerra de la distribució de guanys i pèrdues.

Tot i que el VaR aconsegueix resumir el risc d'una cartera, pot ser massa senzill ja que pot dificultar el risc real de determinades inversions. A la Figura 20 hi ha dues distribucions amb el mateix VaR però una distribució de pèrdues és molt més arriscada que l'altra. Per dir-ho en termes estadístics, una cosa és calcular el percentil x-è d'una distribució i una altra seria calcular la pèrdua condicional esperada, és a dir, $\mathbb{E}[X|X < x]$ i normalment conegut com a VaR de cua.

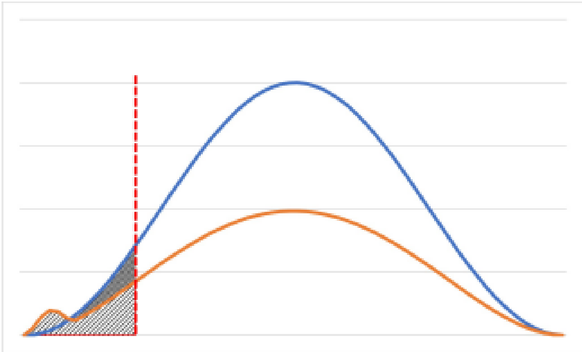


Figura 20: Tot i que dues distribucions poden tenir el mateix VaR, una pot ser més arriscada que l'altra.

El segon paràmetre que afecta el càlcul del VaR és N. L'horitzó temporal hauria de ser el propòsit de la mesura del risc, per exemple, el risc de l'activitat del mercat de negociació sovint es mesura amb $N = 1$, mentre que les activitats de gestió de carteres se centren en finestres temporals més grans com $N = 10$. Una aproximació habitual per comparar el VaR entre diferents períodes de temps és:

$$\text{VaR}_{N-\text{day}} = \text{VaR}_{1-\text{day}} \times \sqrt{N} \tag{19}$$

L'equació 19 es compleix exactament quan el valor de la cartera en dies successius té una distribució independent i idènticament normal.

Abans d'intentar calcular qualsevol mètrica de risc, cal identificar les fonts de risc de la seva cartera. Per exemple, si estem supervisant una cartera d'accions, és evident que els preus de les accions afectaran el valor de la cartera, però hi pot haver altres fonts de risc relacionades amb els preus, com ara dades macroeconòmiques, risc geopolític, . . .

Per fixar idees sobre la següent derivació ens centrarem en el seguiment del risc d'una cartera formada per un conjunt d'accions de renda variable que l'única font de risc prové dels preus directes del subjacent.

10.3 Simulació Històrica

Assumim la tasca de simular el VaR d'una cartera d'instruments financers de risc amb un 99% de confiança i un horitzó temporal d'un dia, i disposem d'una base de dades històrica de dades de mercat de 500 dies. El primer pas en qualsevol procés de seguiment del risc és identificar les fonts del risc, però en aquest escenari hem acordat que siguin els preus dels actius subjacents. Per tant, necessitem l'evolució dels preus de cada actiu en cartera durant els darrers 500 dies.

Per cada dia podem calcular el valor de la nostra cartera i la rendibilitat que tindria per a l'horitzó d'un dia, és a dir, l'endemà. Aquest càlcul de la rendibilitat generarà una distribució de rendiments diaris i per calcular el VaR amb una confiança del 99% hem de calcular el percentil 99 de la distribució empírica.

En aplicacions de la vida real sovint la identificació dels factors de risc i la seva dependència del valor de la cartera no és tan senzilla. Sovint cal establir una fórmula per a determinats paràmetres que afecten el valor dels actius. Per exemple, quan es realitza un seguiment del risc d'una cartera de renda fixa o d'una cartera de derivats o contractes a termini, caldria incorporar corbes de tipus d'interès i establir la relació entre preus a termini i tipus, per exemple.

El principal inconvenient d'aquest enfocament és que ningú pot assegurar que el comportament futur dels actius s'assemblarà al passat.

10.4 Enfocament basat en models

La principal alternativa a la simulació històrica és l'enfocament de construcció de models. Depenent de la complexitat del model que s'ha d'utilitzar, pot ser que calgui calibrar diferents dades, però per a l'enfocament més senzill es podria suposar que els rendiments de la cartera donada segueixen una distribució normal multivariant i es volatilitzen i les correlacions estan disponibles o es poden calcular.

En aquesta situació, estimaríem a partir de la base de dades anterior la matriu de covariància-variància i els rendiments esperats i en derivaríem una distribució normal multivariant que després es podria convertir en una distribució analítica dels rendiments. Mitjançant la funció inversa es podria calcular el percentil 99. No obstant això, l'enfocament està lluny de ser senzill, ja que ja afirmem que és difícil donar una bona estimació de:

$$C = [\sigma_{ij}]_{1 \leq i,j \leq N} \text{ on } \sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}(a_i, a_j)$$

Consulteu el capítol 23 a [1] per obtenir més informació sobre l'estimació de volatilitats i correlacions per a dades financeres.

Evidentment, aquest enfocament ha de considerar que determinades hipòtesis sobre el comportament dels actius són plausibles, com ara la distribució normal dels rendiments. Com ja vam mostrar en capítols anteriors, això és només una aproximació i hi ha algunes característiques estilitzades en dades reals que ho mostren. No obstant això, en aplicacions de la vida real podem utilitzar models més complexos i el marc general s'aplica de manera similar.

10.5 Simulació Monte Carlo

Una alternativa a la solució de forma propera per a l'enfocament basat en el model, es podria extreure diverses vegades de la distribució analítica i obtenir una aproximació del percentil. Clarament, per al simple exemple d'una distribució normal multivariant presentat abans, aquest enfocament no és molt avantatjós, però les aplicacions reals d'aquest enfocament es troben en carteres molt complexes. Per exemple, penseu en les opcions que depenen del camí, com ara una opció binària. En aquest derivat s'obtindria una unitat de diners si l'acció arriba a un nivell de preu predefinit durant la vida de l'opció o zero en cas contrari. En aquests casos sovint caldria simular camins per calcular la distribució de pèrdues i guanys, ja que les formes analítiques per a la distribució del màxim poden no estar disponibles.

Figura 21: Les opcions de barrera tenen un benefici en funció de la trajectòria de l'actiu subjacent fins al venciment

De manera similar a l'enfocament anterior, la simulació de Montecarlo necessita certes hipòtesis sobre l'evolució dels actius i aquí s'aplica la mateixa conclusió sobre el model, així com el fet que en situacions aplicades s'utilitzen models dinàmics molt complexos per obtenir millors aproximacions.

10.6 Anàlisi de components principals

Sovint les carteres o grups d'actius a motoritzar són molt complexos i no de la mateixa naturalesa, és a dir, normalment es disposa d'una cartera que és una barreja de derivats, bons, futurs, accions, posicions de divises, . . . en aquests casos, pot ser difícil identificar les fonts reals dels factors de risc, ja que algunes posicions de la vostra cartera poden estar actuant com a cobertures d'una part d'aquest risc per a altres posicions. Per exemple, penseu en una posició de bons i en un intercanvi de tipus d'interès que cobreix les variacions de la taxa sense risc però no el risc de crèdit. En aquests casos, primer voldríem reduir les fonts de risc als principals o principals factors que afecten la nostra cartera. L'anàlisi de components principals només fa això i és una eina estadística estàndard.

La importància d'un determinat factor es mesura en quant la variància d'aquest factor afecta la variància del valor de la cartera i els diferents factors es classifiquen segons aquesta puntuació. El resultat del procés és un conjunt ortogonal de factors i sovint els primers 4 o 5 són capaços d'explicar el 99% de la variabilitat de la cartera.

El component principal s'utilitza per calcular el VaR de la puntuació de variació dels primers factors per donar una estimació de la variació del valor de la cartera.

10.7 Recapitulació

Aquest capítol ha mostrat una de les mètriques de risc més utilitzades, però moltes empreses realitzen mètriques addicionals per provar la robustesa i el risc de les seves inversions. Una de les proves addicionals més habituals és la que es coneix com a prova d'estrès, que consisteix a simular el comportament d'una determinada cartera sota els escenaris financers i macroeconòmics més greus dels darrers 20 o 30 anys.

Independentment de la mètrica de risc utilitzada, una de les característiques clau per garantir una metodologia exhaustiva seria la prova posterior de les mètriques. El procés de *backtesting* consisteix a utilitzar un conjunt de dades històriques per a les quals el càlcul de la mètrica de risc es fa dins d'una finestra continuada per avaluar si la mètrica és realment capaç de controlar el risc real.

Figura 22: Disseny esquemàtic per a una anàlisi de *backtest*. Per a un conjunt de dades històriques, només es fa un calibratge de la mètrica de risc amb la informació del conjunt blau i es prova la seva importància al conjunt vermell en una finestra rotativa.

11 LA TITULACIÓ I LA CRISI DEL 2007

11.1 Context

A hores d'ara hauria de quedar clar que la inversió i el rendiment comporta un risc. Molts dels instruments que hem presentat aquí en aquest curs, són instruments que transfereixen el risc d'una part a una altra.

Per finalitzar el curs, resumim una de les crisis financeres més recents i grans coneguda com la crisi creditícia que va començar l'any 2007. L'instrument financer implicat en aquesta crisi van ser les titulitzacions.

En aquest capítol introduirem breument el producte de les titulitzacions, examinarem el seu paper en la crisi creditícia i relacionarem els aspectes clau de la crisi amb el contingut anterior del curs.

11.2 Titulització

El negoci principal d'una entitat de crèdit o més concretament dels bancs consisteix a posar en contacte l'oferta i la demanda de diners, és a dir, les persones amb oferta de diners dipositaran la seva riquesa al banc a canvi d'un tipus d'interès i el banc prestarà aquests diners. als prestataris en forma d'hipoteques, per exemple. L'esquema inicial es va desequilibrar en els 60 s i hi havia més demanda que oferta.

Una de les solucions seria titulitzar paquets d'hipoteques i vendre'ls a inversors privats, d'aquesta manera el banc augmentarà capital per generar nous préstecs i tot i que les hipoteques s'originaven al banc no les guardaven en els seus llibres. Poc després que es van establir els títols de garantia d'hipoteques residencials (RMBS) inicials, l'actiu subjacent per a les titulitzacions es va estendre a altres tipus de crèdit com ara targetes de crèdit, préstecs per a automòbils, ... generant una classe general de valors amb garantia d'actius (ABS), augmentant la seva activitat als anys 80.

La figura següent mostra un marc senzill per a un RMBS. Formant el llibre de préstecs total del banc es fa una selecció d'hipoteques per valor de 100 EURMM. Els interessos i la recaptació principal d'aquest pool ja no són propietat del banc sinó que estan segregats en el que es coneix com a vehicle especial (SPV). L'SPV emetrà i vendrà bitllets o bons a inversors privats, normalment 3 bons o trams coneguts com a tram sènior, entresòl i junior. Els ingressos de la venda dels bitllets es transfereixen al banc a canvi dels drets per rebre els pagaments dels clients, anomenem-lo C.

L'import total dels fluxos d'efectiu, C, rebuts per l'SPV s'utilitzarà per pagar interessos i principal als titulars de notes en forma de cascada, és a dir, primer pagarà als titulars de bitllets del tram sènior, si queda alguna cosa després pagarà als anotadors de l'entresolat thanche, i finalment als anotadors júniors la resta. A l'exemple de la figura 1, sembla que la millor oferta és mantenir el tram júnior, ja que el bon paga un interès de 20 % anuals, que és molt superior als $0,60\%$ promesos als titulars de notes del bon sènior. El problema és que els fluxos d'efectiu no estan garantits (vegeu la figura 23), depenen dels cobraments del conjunt d'hipoteques:

- Si tots els clients paguessin les seves obligacions, és evident que tots els abonats rebran el que se'ls ha promès;
- Si no tots els clients paguen les seves obligacions, es produeixen pèrdues en el pool i la quantitat de efectiu rebuda per l'SPV no serà suficient per pagar a tots els abonats, però com que els pagaments segueixen un esquema de cascada, el primer titular de la nota a patir pèrdues serà qui va comprar el tram júnior.

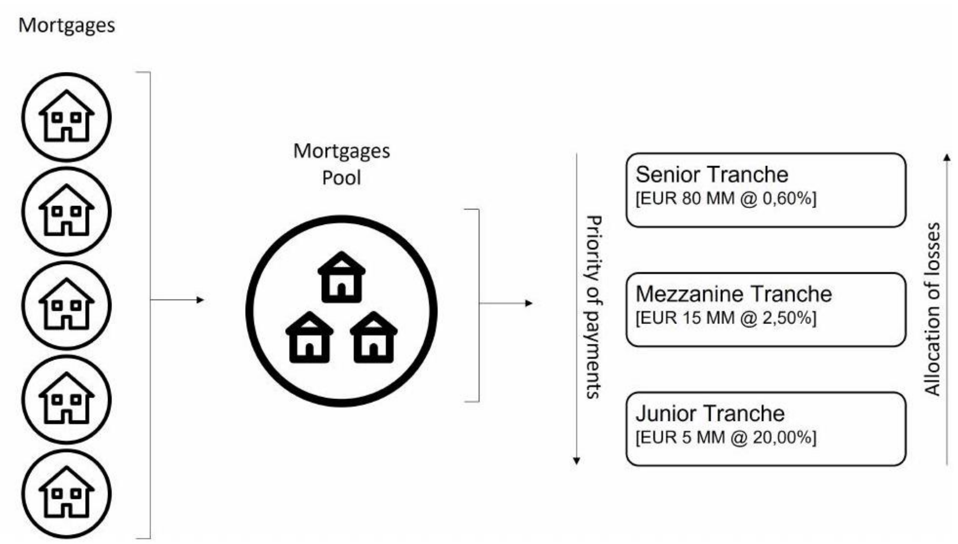


Figura 23: Diagrama esquemàtic d'un RMBS

Per tant, és més probable que el tram júnior perdi part del seu principal i, per tant, rebi menys flux d'efectiu que el promès, i per tant té un tipus d'interès més gran. L'assignació de pèrdues és aleshores a l'alça, en el sentit que quan les pèrdues del conjunt d'hipoteques superen els 5 % el tram junior desapareix i les pèrdues comencen a assignar-se al tram entresòl.

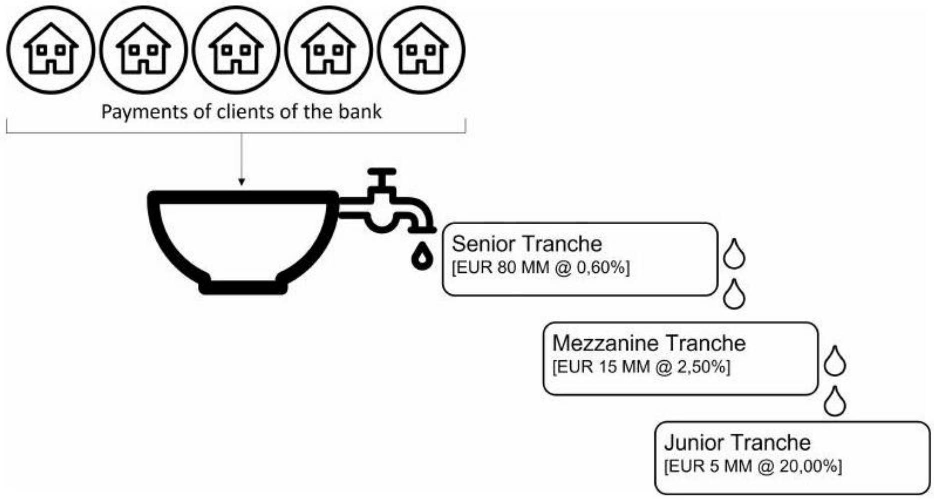


Figura 24: Diagrama esquemàtic de la cascada de pagament

L'esquema anterior és una simplificació excessiva d'un RMBS i diverses altres característiques juguen un paper en transaccions reals que es formalitzen en contractes que contenen diversos centenars de pàgines de disposicions legals.

11.2.1 Agències de qualificació

L'alta complexitat d'aquests instruments financers es veu simplificada per la tasca de les agències de qualificació. Les principals agències de qualificació són Moody's, S&P i Fitch que es remunten a més de 100 anys. Aquestes agències valoren emissors i emissions per qualificar el risc de crèdit associat i s'han convertit en una font universal d'anàlisi des de:

- Independència de l'avaluació;

- Facilitat de comparació entre originadors i instruments financers;
- Confiança normativa;
- Pagament de l'emissor per les qualificacions.

Les qualificacions són una avaluació del risc d'incompliment per part d'un determinat instrument o entitat de crèdit codificada en símbols. La figura 25 mostra la comparació i la descripció d'alt nivell del risc a cada notch i agència de qualificació. Aquestes osques es poden segmentar per tipus d'instruments financers, regions, venciment, ... La figura 1 és un exemple que mostra la probabilitat d'incompliment durant un període de temps determinat i diferents instruments:

Moody's	S&P	Fitch	Description
Aaa	AAA	AAA	Highest credit quality, minimum credit risk
Aa1, Aa2, Aa3	AA+, AA, AA-	AA+, AA, AA-	Very high credit quality, very low credit risk
A1, A2, A3	A+, A, A-	A+, A, A-	High credit quality (upper-medium grade)
Baa1, Baa2, Baa3	BBB+, BBB, BBB-	BBB+, BBB, BBB-	Good credit quality, currently low credit risk
Ba1, Ba2, Ba3	BB+, BB, BB-	BB+, BB, BB-	Speculative elements, issuer faces major uncertainties and adverse conditions
B1, B2, B3	B+, B, B-	B+, B, B-	High credit risk, but issuer still able to meet its financial commitments
Caa1, Caa2, Caa3	CCC+, CCC, CCC-	CCC	Issuer currently vulnerable, default likely
Ca	CC	CC	Issuer currently highly vulnerable, near default
C	R, SD, D	C, RD, D	Lowest rating, typically in default on some (SD, RD) or all of its financial obligations

Figura 25: Comparació entre diferents agències de qualificació

Rating	Sovereigns			Corporate		
	1 year	5 years	10 years	1 year	5 years	10 years
Aaa	0.00	0.00	0.00	0,00	0.00	0.07
Aa	0.00	0.00	0.00	0.02	0.20	0.43
A	0.00	0.00	0.00	0.03	0.56	10.21
Baa	0.00	0.00	0.00	0.19	2.16	4.70
Ba	1.56	12.62	40.59	1.39	12.99	23.13
B	7.89	22.22	53.38	6.44	33.18	51.14
Caa, Ca, C	0.00[2]	*n.s.*[3]	*n.s.*[3]	22,82	59,44	82.51
Investment Grade	0.00	0.00	0.00	0.07	0.87	1.82
Speculative Grade	3.87	16.59	45.39	5.45	25.06	37.77
Total Sovereigns/Companies	1.19	4.68	9.34	1.86	8.25	11.76

Taula 1: Les osques de qualificació es poden convertir en probabilitats d'incompliment

La informació integrada a les qualificacions creditícies és molt complexa, inclosa l'anàlisi de probabilitats d'incompliment creuat, matrius de transició de qualificació creditícia, etc. D'altra banda, proporciona una eina que pot comparar la solvència creditícia d'un bon a 10 anys d'un banc alemany i el tram sènior de 3 anys d'un RMBS emès per un banc italià, sense la necessitat d'entendre i analitzar el sistema bancari alemany o el conjunt de préstecs subjacents al RMBS a Itàlia.

Els trams superiors reben els millors nivells de qualificació, ja que la prioritat dels pagaments garanteix una rendibilitat mínima, i els trams inferiors, com l'entresol o el júnior, tenen una qualificació inferior.

11.2.2 ABS CDOs

En general, per als mercats d'ABS, el tram sènior és el primer o el més fàcil de col · locar o vendre, mentre que l'entresolat és més difícil de vendre i el júnior normalment es ven a fons de cobertura o es manté per l'originador. Per superar aquesta dificultat es van crear obligacions de deute col · lateral (CDO). Bàsicament, són ABS d'altres ABS entresòl i júnior, tal com es mostra a la figura 26:

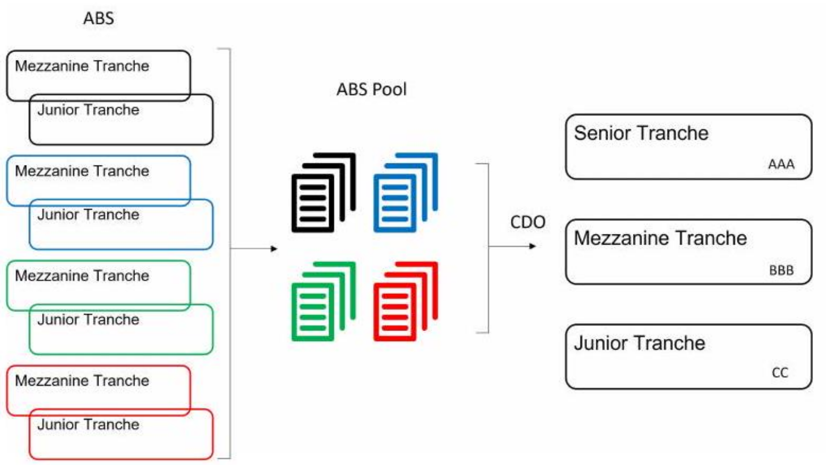


Figura 26: Esquema ABS CDO

Com que aquí s'aplica el mateix principi de cascada, el gruix del tram sènior per al CDO es calcula per obtenir la qualificació més alta possible i, per tant, comparable amb el tram sènior original d'ABS en termes de qualificacions. És evident que el gruix d'aquesta nova estructura no pot tornar a ser de 80% del conjunt total, però depenent del conjunt de trams ABS pot arribar a uns 65 %f el conjunt total, cosa que significa que s'ha trobat. una manera de vendre la majoria dels trams més difícils de col · locar.

L'estructura es pot accentuar encara més creant CDO^2, és a dir, un CDO del deute.

11.3 Seqüència d'esdeveniments

Després del 2002, el baix nivell dels tipus d'interès va facilitar als compradors contractar una hipoteca per comprar una casa i, simultàniament, els preus de l'habitatge van començar a pujar. Va ser una part molt expansiva del cicle econòmic.

11.3.1 Hipoteques subprime

En termes generals, les hipoteques són probablement l'última fallida del client amb l'obligació de deute, el que significa que és més probable que passin les quotes de les targetes de crèdit o dels préstecs per a automòbils en primer lloc. Això al seu torn significa que l'impagament de les hipoteques tendeix a produir-se després d'un període de temps posterior a la concessió del préstec.

En aquesta situació, el mercat d'augment de RMBS era pràcticament un mercat molt rendible, ja que hi havia pocs impagaments al principi. La demanda de més productes RMBS per part de la comunitat inversora internacional estava creixent i el mercat RMBS o CDO no va poder satisfer.

En aquesta circumstància, els bancs es van inclinar a emetre més hipoteques, ja que guanyaran les comissions generades i després emetran un RMBS perquè altres inversors assumiran el risc. Quan es va esgotar el conjunt de clients habituals, comencen a concedir més préstecs relaxant els seus estàndards de risc, per exemple, l'import prestat com a percentatge del preu de l'habitatge augmentava, els tipus d'interès es van fixar en un percentatge baix durant els primers dos anys i després superar els estàndards del mercat, ... El terme subprime es refereix al fet que aquest tipus de préstecs eren de segona garantia o de segona qualitat.

L'activitat de préstec de crèdit es va transformar a partir de quin risc vull tenir? pot aquest risc entrar en un RMBS? Aquest efecte va ser, al seu torn, un incentiu per part de les polítiques governamentals per ampliar la propietat de l'habitatge. La situació va augmentar ràpidament fins al punt que alguns dels grups de préstecs utilitzats a RMBS eren coneguts com a préstecs NINJA, per tenir en compte els no ingressos, sense feina i sense actius.

11.3.2 Esclat de bombolles

L'any 2007 els tipus d'interès comencen a pujar i molts titulars d'hipoteques tenen dificultats per pagar les seves quotes. La conseqüència va ser un gran augment de les execucions hipotecàries que, inevitablement, fan que un gran nombre d'habitatges es posin al mercat per vendre. L'impacte sobre el preu de l'habitatge va ser immediat i els prestataris que van cobrar una hipoteca per 100 % del valor de la seva llar es van adonar que tenien un patrimoni negatiu, és a dir, que la seva casa tenia un preu de mercat inferior al principal de la hipoteca que estaven pagant. Atès que molts estats tenen una legislació sense recurs, el que significa que els prestataris declarats en mora podrien tornar les claus de casa als bancs i tancar el seu deute.

La característica de no recurs de les hipoteques dels EUA significa que el prestatari té una opció de venda integrada al seu préstec, en qualsevol moment podria tornar la casa al prestador pel principal restant del préstec. Aquesta característica va crear algunes situacions peculiars per als especuladors, suposant que el préstec A té una casa, α, i té una hipoteca de 200.000 EUR; El prestatari B té una hipoteca de 250.000 EUR sobre una casa β. I suposem que en les crisis financeres els preus de l'habitatge baixen de tal manera que les cases α i β tenen un preu equivalent de mercat de 170.000 euros. Aleshores, els especuladors A i B haurien d'exercir les seves opcions PUT hipotecàries, que faran que el banc intenti vendre la casa al mercat i, per tant, A i B haurien de comprar la casa del seu veí per un preu més barat. En aquesta situació, la pèrdua corre amb el venedor del PUT que és el banc.

Val a dir que la gran majoria dels casos van ser persones amb dificultats econòmiques que van patir molt quan van haver de cedir la seva casa, però no s'ha de subestimar l'impacte dels jugadors especulatius.

11.3.3 Pèrdues

El valor dels trams d'ABS amb qualificació BBB va perdre inicialment uns 80 % del seu valor el 2007 i 97 % del seu valor l'any següent. El valor de l'ABS CDO creat a partir de BBB ABS i qualificat AAA va perdre uns 80 % del seu valor el 2008. Els grans bancs d'inversió tenien posicions enormes en aquests actius i van patir grans pèrdues, alguns d'ells van haver de ser rescatats. Algunes institucions es van veure obligades a incorporar-ne d'altres per salvar el mercat financer, com Bear Stearns, fundada el 1923, presa per JP Morgan Chase.

A causa de la situació, els bancs centrals comencen a augmentar els tipus d'interès i demanen als bancs una millor capitalització, cosa que al seu torn crea un entorn més difícil per a l'activitat financera i es va iniciar una gran recessió que va durar diversos anys fins a la dècada del 2020.

11.4 La recepta d'una crisi?

Molts factors van contribuir a la crisi creditícia, però els més rellevants es podrien resumir en:

- Relaxació de l'estàndard de crèdit per part dels bancs;
- Agències de qualificació implicades en la qualificació de nous productes estructurats per als quals tenien molt poca experiència i mancaven de dades històriques;
- Productes complexos sense informació rellevant per avaluar correctament el risc subjacent;
- Manca d'anàlisi de correlació i dependència;

L'anterior es va magnificar pel pensament predominant que els preus de l'habitatge mai baixarien, que podrien ser reajustaments localitzats aquí i allà, però l'escenari era una caiguda de preus de l'habitatge de més de 35 % procedent d'altres CDO. L'anàlisi del risc subjacent es fa cada cop més complexa a mesura que incloem més capes de titulitzacions.

11.5 Les conseqüències

Les conseqüències de la crisi creditícia són ben conegudes, però centrem-nos en els aspectes clau relacionats amb el contingut del curs que canvien després.

- La regulació de la titulització va establir regles explícites per garantir que els bancs mantenen un aspecte determinat en el joc, és a dir, no se'ls permet incloure tot el principal d'un préstec en una titulització i han de mantenir una certa part sense cobertura en la seva titulització. full de balanç. Això pretén evitar una possible relaxació dels estàndards de risc en l'origen.

- Només hi ha poques excepcions a la regla que indica que una titulització no pot estar composta per posicions titulitzades, és a dir, només hi ha molt poques excepcions on es permeten crear CDO.
- Les agències de qualificació han desenvolupat nous estàndards i anàlisis fets a mida per al producte estructurat.

11.6 Recapitulació

En conjunt, podem enllaçar els diversos factors que donen lloc a la crisi creditícia amb els diferents capítols del curs:

- **Quotes hipotecàries:** la gran majoria dels prestataris no van poder estimar les quotes futures de la hipoteca si el tipus d'interès es mogués dels valors actuals i, per tant, no van poder avaluar el propi risc en el pagament dels seus préstecs.
- **Estudis macroeconòmics:** hi va haver una sobreestimació de les projeccions macroeconòmiques, especialment els preus de l'habitatge i la seva relació amb el tipus d'interès i el cicle econòmic.
- **Valoració dels derivats financers:** els models per fixar el preu d'un producte estructurat tan complex eren molt senzills, especialment pel que fa als CDO.
- **Gestió de carteres:** es va subestimar les correlacions entre els actius i l'impacte d'un canvi macroeconòmic sobre aquest.
- **Gestió del risc:** les agències de qualificació no tenen experiència en l'avaluació dels riscos d'aquests productes i subestimen alguns dels factors de risc que afecten el seu preu.