Practica 2
Seminario Métodos Numéricos

Arnau Perich & Eric Jimenez
Grupo 16

22 de marzo de 2022

Problema 2

En este problema intentaremos recurrir a otro método iterativo para encontrar la solución de la ecuación del Problema 1. Sea $f(x) = 0$ una ecuación continuamente derivable, $x*$ una raíz simple, $f(x*) = 0$, con $f'(x) \neq 0$ en un entorno de $x*$; podemos considerar la iteración:

$$x_{k+1} = x_k - b_k f(x_k)$$

donde

$$b_{k+1} = b_k(2 - f'(x_{k+1})b_k)$$

partiendo de x_0 lo suficientemente próximo a $x*$ con $b_0 = \frac{1}{f'(x_0)}$.

A continuación usaremos la recurrencia anterior para calcular la solución de $x^3 = x + 400$. Considerando el valor $x_0 = 7$ (importante que esté próximo a la raíz exacta, sino el programa no converge a un valor) obtenemos un valor $\alpha = 7.413302725857898$ que evaluada en la función $f(\alpha) = 0$. Además se necesitan 6 iteraciones para conseguir un resultado con 15 decimales de precisión (de manera que $|x_k - x_{k-1}| < 0.5 \times 10^{-15}$). Es más, si usamos un valor $x_0 = 7.4$ aún más próximo obtenemos un resultado con esta precisión en solo 4 iteraciones.

Para acabar de comparar con los anteriores métodos del problema 1, debemos conocer el orden de convergencia de este método. Definimos $e_k = |x_k - x_{k-1}|$. A continuación se muestra el orden de los cocientes $\frac{e_k}{e_{k-1}}$, $\frac{e_k}{(e_{k-1})^2}$ y $\frac{e_k}{(e_{k-1})^3}$ calculados numéricamente con un programa de C en precisión doble:

$\frac{e_k}{e_{k-1}}$	$\frac{e_k}{(e_{k-1})^2}$	$\frac{e_k}{(e_{k-1})^3}$
0.05599633478693189	0.1277416387326884	0.2914106133589454
0.02064612320129009	0.8411080605928285	34.26613135535406
0.0006181282523679912	1.219700943812003	2406.734179576432
5.131861930606062E-007	1.638215894306534	5229585.972204074

Observamos que:

$$\frac{e_k}{e_{k-1}} \longrightarrow 0 \qquad \frac{e_k}{(e_{k-1})^2} \longrightarrow C \neq 0 \qquad \frac{e_k}{(e_{k-1})^3} \longrightarrow \infty \tag{1}$$

Así que podemos concluir que esta iteración tiene orden de convergencia 2.

Problema 1

En este problema tenemos como primer objectivo estudiar las raices de la ecuación:

$$x^3 = x + 40 \tag{2}$$

Uno de los métodos para el cálculo de dichas raices es la fórmula de Cardano, la cual nos da como único resultado el valor:

$$\alpha = (20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397})^{\frac{1}{3}} + (20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397})^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

Consideramos pues la función:

$$f(x) = x^3 - x - 40$$

y vemos que al evaluar α en f, obtenemos $f(\alpha) = -0.00030899048$, en precisión simple y $f(\alpha) = 1.222133505507372 \times 10^{-12}$, en precisión doble. Vemos que en este caso la fórmula de cardano no nos da una solución a la ecuación, ya que no es raíz de la función f, debidos a posibles errores de cancelacion estudiados en la práctica 1.

Aplicamos ahora el método de newton empezando con $x_0 = 2$ y estudiamos qué resultados nos da en precisión simple y doble para obtener una raíz de la función.

	α	Número de iteraciones
Precisión simple (aproximación con 8 decimales correctos)	3.5173936	6
Precisión doble (aproximación con 15 decimales correctos)	3.517393514052818	8

En este caso obtenemos en precisión simple $f(\alpha) = 3.814697265625 \times 10^{-6}$ i $f(\alpha) = 0$ en precisión doble. Así, podemos concluir que 3.517393514052818 es una buena aproximación de la raíz de la función y por tanto solución de la ecuación.

Ahora consideramos a función

$$f(x) = x^3 - x - 400$$

Usando la fórmula de Cardano para este caso:

$$\alpha = \left(200 + \sqrt{40000 - \frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left((200 - \sqrt{40000 - \frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4}$$

Obtenemos un valor de $\alpha = 7.413302725859883$ que evaluado en $f(\alpha) = 3.253148861404043 \times 10^{-10} \neq 0$, es decir, es un método malo para calcular esta raíz. Así que a continuación se estudian diferentes métodos para conseguir un valor de α lo mas preciso posible y con el mínimo número de cálculos posibles. Observamos que $f(2) \cdot f(8) < 0$ por lo que, el Teorema de Bolzano nos dice que una raíz, está entre 2 y 8. En la próxima tabla podéis observar los resultados en precisión doble obtenidos del valor de la aproximación de β con una fórmula de Cardano, con los métodos de bisección y secante partiendo del intervalo $[2, 8]$ y con el método de Newton partiendo del pivote $x_0 = 2$, obteniendo el valor de la aproximación de β con al menos 15 decimales correctos en las 3 últimas.

	α	Número de iteraciones	Orden de convergencia	Valor de $f(\alpha)$
Fórmula de Cardano	7.413302725859883	–	–	$3.253148861404043 \times 10^{-10}$
Método de la bisección	7.413302725857903	55	1	$9.094947017729282 \times 10^{-13}$
Método de la secante	7.413302725857898	8	$\frac{1+sqrt(5)}{2} \approx 1.618$	0
Método de Newton	7.413302725857898	11	2	0

Observamos en la tabla que el método de la secante es más rápido hablando en términos de número de iteraciones pero, en cambio, el orden de convergencia es más mayor en el método de Newton. Esto es debido a que este último método converge más rápidamente pero si x_0 se encuentra en un entorno suficientemente cerca de la raíz α. Una estrategia para mejorar los resultados anteriores es combinar el método de la secante y Newton: con 2 iteraciones de la secante, restringimos los suficiente el intervalo $[2, 8]$ para que el método de Newton ahora solo necesite 4 iteraciones. Así obtenemos solución de f con 15 decimales de precisión y tan solo con 6 iteraciones.