Práctica 2 de Métodos Numéricos: Ceros de funciones

Prof. Susana Serna
Curso 2020-2021

Práctica para trabajar en las sesiones de las semanas del 7/3, 14/3 y 21/3.
Se evaluará el trabajo en clase y un informe breve que incluya los comentarios correspondientes a cada problema. El informe tendrá una extensión máxima de una página por problema. La entrega se hará en dos partes. Cada una antes de las 10:00 y cada grupo en una fecha diferente.

Problemas 1 y 2: entrega el 21, 22 y 25 de Marzo los grupos 3, 2 y 1 respectivamente.

Problemas 3, 4 y 5: entrega 1 de Abril todos los grupos.

Únicamente se admitirán prácticas entregadas a traves del **CAMPUS VIRTUAL**.

Problema 1

Considerar la ecuación polinómica

$$x^3 = x + 40 \tag{1}$$

y la fórmula para el cálculo de sus raices (que se obtiene a partir de las fórmulas de Cardano)

$$\alpha = \left(20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3} + \left(20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3}$$

(a) Comprobar que se produce error de cancelación al evaluar en doble y simple precision la expresión de la raiz real de la ecuación anterior.

(b) Aplicar el método de Newton a la función

$$f(x) = x^3 - x - 40$$

empezando con $x_0 = 2$ utilizando precision simple y doble. Estimar el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación de la raiz con 8 y 15 decimales correctos respectivamente.

(c) Considerar la ecuación polinómica, $x^3 = x + 400$

Obtener una fórmula de Cardano para el calculo de la raiz real, β. Comprobar que dicha raiz cumple

$$2 \le \beta \le 8$$

Estimar el error de cancelación calculando la fórmula explicita en doble precisión.

Aplicar los siguientes métodos iterativos para obtener 15 decimales correctos de la raiz.

(c1) Método de la bisección partiendo del intervalo $[2, 8]$
(c2) Método de la secante partiendo del intervalo $[2, 8]$
(c3) Método de Newton partiendo del pivote $x_0 = 2$

Comparar el orden de convergencia numérica y determina una estrategia para calcular las raices de este tipo de equaciones.

Problema 2

Sea la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x)$ continuamente derivable, x^* una raiz simple, $f(x^*) = 0$, con $f'(x) \neq 0$ en un entorno de x^*. Considerar la iteración

$$x_{k+1} = x_k - b_k f(x_k)$$

donde

$$b_{k+1} = b_k(2 - f'(x_{k+1})b_k)$$

partiendo de un pivote x_0 suficientemente próximo a x^* con $b_0 = \frac{1}{f'(x_0)}$.

(a) Aplicar la iteración a la ecuación polinómica del Problema 1, $x^3 = x + 400$, tomando $b_0 = \frac{1}{3x_0^2 - 1}$. Estudiar el orden de convergencia numérico: sugerencia, calcular $e_k = |x_k - x_{k-1}|$ y compara los cocientes $\frac{e_k}{e_{k-1}}$, $\frac{e_k}{(e_{k-1})^2}, \cdots$

Problema 3

Sea la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x)$ continuamente derivable, x^* una raiz simple, $f(x^*) = 0$, y $f'(x) \neq 0$ en un entorno de x^*. Considerar la iteración (conocida como método de Halley),

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

(a) Aplicar la iteración a la ecuación polinómica del Problema 1, $x^3 = x + 400$.

(b) Comprobar numéricamente que la convergencia es de orden 3.

Problema 4

Definimos la iteración para $k = 1, 2, 3, \cdots$, $p_k = \frac{2a_k^2}{s_k}$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \qquad b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$$

$$c_k = a_k^2 - b_k^2 \qquad s_k = s_{k-1} - 2^k c_k$$

tomando $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $s_0 = \frac{1}{2}$.

Teóricamente p_k converge al número π. Verificar numéricamente que la convergencia es cuadrática (mientras converge). Determinar cuantas iteraciones debemos realizar para que el error absoluto comience a crecer y la convergencia numérica degenere (debido a la precisión finita). Explicar la razón de este comportamiento.

Problema 5 Escribir conclusiones sobre lo observado y aprendido en esta práctica. Extensión máxima de media página.

Cálculo aproximado de raíces cuadradas.

Problema OPCIONAL muy interesante!

Este problema solo puntuará para subir nota a partir de 9.

El objetivo es obtener una aproximación de la raíz cuadrada de un número utilizando la expresión

$$\sqrt{1+x} = f(x)\sqrt{1+g(x)},$$

donde g es un infinitésimo de orden más pequeño que x para x tendiendo a 0. Si elegimos $f(x)$ como una aproximación de $\sqrt{1+x}$ entonces se puede calcular $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{1+x}{f(x)^2} - 1,$$

(a) La función $f(x)$ puede elegirse como una función racional $p(x)/q(x)$, tal que p y q tienen el mismo grado y su desarrollo de MacLaurin coincide con el de $\sqrt{1+x}$ hasta cierto grado. Hallar una función racional, $f(x) := p(x)/q(x)$, cociente de dos lineales, tal que el desarrollo de MacLaurin de $p(x) - \sqrt{1+x}\,q(x)$ tenga los tres primeros términos nulos. Esta función f se conoce como el aproximante de Padé de la función $\sqrt{1+x}$.

(b) Siendo $a_0 = x$, $a_{n+1} = g(a_n)$ y $b_n = f(a_n)$. Comprobar que

$$\sqrt{1+x} = \left(\prod_{j=0}^{k} b_j\right)\sqrt{1+a_{k+1}}$$

(c) Realizar programas en C para experimentar con el algoritmo anterior para una eleción de f como el cociente de dos polinomios de tercer grado.

(d) Hallar el $n > 0$ tal que la función, g, calculada mediante $g(x)$ a partir de la racional f obtenida en el apartado (a), cumpla que $g(x) = O(x^n)$.

(e) Comprobar que la función $g(x)$ es contractiva para $x > 0$.

(f) Comprobar la desigualdad

$$\left|\sqrt{1+x} - \prod_{j=0}^{k} b_j\right| \leq \frac{a_{k+1}}{2}\sqrt{1+x}.$$

(g) Comprobar los apartados anteriores para una elección de f como el cociente de dos polinomios de tercer grado. Para este caso ver que

$$|\sqrt{2} - b_0 b_1 b_2| < 5 \times 10^{-255}$$

(h) Discutir resultados. Conclusiones.