Práctica 4 Métodos Numéricos

ARNAU PERICH IGLESIAS
ERIC JIMÉNEZ BARRIL

Mayo 2022

1 EJERCICIOS OPCIONALES

1.1 Ejercicio 1

Extender las fórmulas de Cuadratura Gaussiana estudiadas en un intervalo [a, b].

1.1.1 Fórmla de Cuadratura de Gauss-Chebishev

En este caso teníamos

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

Como haríamos un cambio de variable en una integral genérica?

$$\int_a^b g(y)dy = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) du$$

En nuestro caso, tenemos:

$$g\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

de donde

$$u = \frac{2y-(b+a)}{b-a}$$

Así, con als ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{1-\frac{(2x-(b+a)^2}{(b-a)^2}}} dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Ahora, pensando de manera similar, para la Fórmula de Cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

tenemos que, con 2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Así, tenemos la fórmula para intervalos arbitrarios $[a, b]$.

1.2 Ejercicio 2

En este problema se muestra un ejemplo práctico del cálculo de integrales de manera numérica. En este caso, el objectivo es calcular la longitud del arco de la elipse

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1 \tag{3}$$

en el intervalo $[-1, 1]$ con 6 decimales de precisión. Para ello hemos empleado la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

donde $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ aislando de (1) $\implies$ $y'(x) = -\frac{x}{4}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Usando la fórmula de Cuadratura de Gauss-Legendre, utilizando el programa en C del ejercicio avanzado obtenemos los siguientes resultados:

n	Valor de la Integral
2	2.005673770264565
3	2.006110647972005
4	2.006142613716895
5	2.006144913541313
6	2.006145077846368
7	2.006145090374655

Observamos que para $n = 7$ obtenemos un valor de 2.006145090374655, que difiere a partir de los 6 decimales con el anterior valor ($n = 6$). Podemos concluir que la longitud del arco de la elipse (1) entre -1 y 1 es 2.006145 ± 10^{-6}.

2 EJERCICIO

2.1 Polinomios de Legendre

2.1.1 Cálculo de los polinomios y sus raíces

Calculemos los polinomios de Legendre para n = 2, 4, 6. Sabemos que:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = x$$
$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Así, tenemos que

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Nos interesa estudiar P_2, P_4 y P_6. En la siguiente tabla, x_i denotarán las n raíces de P_n para $n = 2, 4, 6$.

n	$P_n(x)$	i	x_i
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
		2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	1	-0.8611363115940526
		2	-0.3399810435848563
		3	0.3399810435848563
		4	0.8611363115940526
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$	1	-0.9324695142031519
		2	-0.6612093864662648
		3	-0.2386191860831969
		4	0.2386191860831969
		5	0.6612093864662648
		6	0.9324695142031518

2.1.2 (A2) y (A3) Cálculo de los coeficientes

(A2). Determinación del sistema lineal (A2). Determinar el sistema lineal que han de cumplir los coeficientes a_i en (1) para poder resolver la integral mediante la fórmula de cuadratura Gaussiana.

Una vez calculados los nodos x_i que podemos ver en la tabla (que són las raices de los polinomios de Legendre), como la fórmula de cuadratura con peso ha de ser exacta para polinomios de grado $n-1$, sabemos que esto implica que ha de tener orden de exactitud $n-1$. Además, por definición, tenemos que, si definimos μ_n :=momento n-ésimo respecto de $w(x)$, como toda fórmula de cuadratura de n nodos es exacta para polinomios de grado menor o igual a n-1 (Lema transparencia 99 de los apuntes de Alsedà), por lo que

$$\mu_0 = I[1] = a_1 + a_2 + \cdots a_{n-1}$$
$$\mu_1 = I[x] = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\mu_{n-1} = I[x^{n-1}] = a_1x_1 + a_2x_2 + a_{n-1}x_{n-1}$$

donde n = 2, 4 y 6.

En primer lugar, calculemos los momentos. Tenemos que por definición, són

$$\mu_i = \int_{-1}^{1} x^i dx$$

i	0	1	2	3	4	5
μ_i	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0

Así, tenemos

Por tanto, en primer lugar para n=2 tenemos

$$\begin{gathered} 2=\mu_0=I[1]=a_1+a_2 \\ 0=\mu_1=I[x]=a_1x_1+a_2x_2 \end{gathered}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5773502691896257 & 0.5773502691896257 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora, para n=4

$$\begin{array}{ll} 2=\mu_0=I[1]=a_1+a_2+a_3+a_4 & 0=\mu_1=I[x]=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 \\ \frac{2}{3}=\mu_2=I[x^2]=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2 & 0=\mu_3=I[x^3]=a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+a_4x_4^3 \end{array}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.8611363115940526 & -0.3399810435848563 & 0.3399810435848563 & 0.8611363115940526 \\ -0.8611363115940526^2 & -0.3399810435848563^2 & 0.3399810435848563^2 & 0.8611363115940526^2 \\ -0.8611363115940526^3 & -0.3399810435848563^3 & 0.3399810435848563^3 & 0.8611363115940526^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

y por último para n=6 tenemos

$$\begin{array}{ll} 2=\mu_0=I[1]=a_1+a_2+a_3+a_4 & 0=\mu_1=I[x]=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 \\ \frac{2}{3}=\mu_2=I[x^2]=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2 & 0=\mu_3=I[x^3]=a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+a_4x_4^3 \\ \frac{2}{5}=\mu_4=I[x^4]=a_1x_1^4+a_2x_2^4+a_3x_3^4+a_4x_4^4 & 0=\mu_5=I[x^5]=a_1x_1^5+a_2x_2^5+a_3x_3^5+a_4x_4^5 \end{array}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -0.9324695142031519 & -0.6612093864662648 & \cdots & 0.9324695142031518 \\ -0.9324695142031519^2 & -0.6612093864662648^2 & \cdots & 0.9324695142031518^2 \\ -0.9324695142031519^3 & -0.6612093864662648^3 & \cdots & 0.9324695142031518^3 \\ -0.9324695142031519^4 & -0.6612093864662648^4 & \cdots & 0.9324695142031518^4 \\ -0.9324695142031519^5 & -0.6612093864662648^5 & \cdots & 0.9324695142031518^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde en la posición M_{ij} va la potencia x_i^j para i,j= $0, \cdots, 5$,x$_i$ de la Tabla de raíces de los Polinomios de Legendre. **(A3). Cálculo de los coeficientes** (A3). Calcular los coeficientes a_i de Legendre mediante la fórmula $a_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$. Tenemos que:

n	2	4	6
i	a_i	a_i	a_i
1	1	0.347854845137454	0.1713244923791707
2	1	0.6521451548625462	0.3607615730481386
3		0.6521451548625462	0.467913934572691
4		0.347854845137454	0.467913934572691
5			0.3607615730481386
6			0.1713244923791707

2.2 Polinomios de Chebishev

2.2.1 Cálculo de los polinomios y sus raíces

Ahora, sabemos que los polinomios de Chebishev cumplen

$$T_0 = 1; T_1 = x;$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Así, tenemos que

$$\begin{array}{ll} T_2 = 2x^2 - 1 & T_3 = 4x^3 - 3x \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1 & T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 & \end{array}$$

Nos interesa estudiar T_2, T_4 y T_6. En la siguiente tabla, x_i denotarán las n raíces de T_n para $n = 2, 4, 6$

n	$T_n(x)$	i	x_i
2	$2x^2 - 1$	1	-0.7071067811865475
		2	0.7071067811865475
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	1	-0.9238795325112867
		2	-0.3826834323650897
		3	0.3826834323650897
		4	0.9238795325112867
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	1	-0.9659258262890682
		2	-0.7071067811865477
		3	-0.2588190451025208
		4	0.2588190451025208
		5	0.7071067811865477
		6	0.9659258262890682

2.2.2 (A2) y (A4) Cálculo de los coeficientes

Seguiremos las indicaciones de la sección 2.1.2, en particular, las fórmulas **??** y **??**. **(A2). Sistemas para los polinomios de Txebishev** En primer lugar, calculemos los momentos. Tenemos que por definición, són

$$\mu_i = \int_{-1}^{1} \frac{x^i}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Así, tenemos

i	0	1	2	3	4	5
μ_i	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0

Por tanto, en primer lugar para n=2 tenemos

$$\pi = \mu_0 = I[1] = a_1 + a_2$$
$$0 = \mu_1 = I[x] = a_1x_1 + a_2x_2$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.7071067811865475 & 0.7071067811865475 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ahora, para n=4

$$
\begin{array}{ll}
\pi = \mu_0 = I[1] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & 0 = \mu_1 = I[x] = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\
\frac{\pi}{2} = \mu_2 = I[x^2] = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 & 0 = \mu_3 = I[x^3] = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3
\end{array}
$$

de donde

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-0.9238795325112867 & -0.3826834323650897 & 0.3826834323650897 & 0.9238795325112867 \\
-0.9238795325112867^2 & -0.3826834323650897^2 & 0.3826834323650897^2 & 0.9238795325112867^2 \\
-0.9238795325112867^3 & -0.3826834323650897^3 & 0.3826834323650897^3 & 0.9238795325112867^3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{8}
$$

y por último para n=6 tenemos

$$
\begin{array}{ll}
\pi = \mu_0 = I[1] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & 0 = \mu_1 = I[x] = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\
\frac{\pi}{2} = \mu_2 = I[x^2] = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 & 0 = \mu_3 = I[x^3] = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3 \\
\frac{3\pi}{8} = \mu_4 = I[x^4] = a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + a_3x_3^4 + a_4x_4^4 & 0 = \mu_5 = I[x^5] = a_1x_1^5 + a_2x_2^5 + a_3x_3^5 + a_4x_4^5
\end{array}
$$

de donde

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
-0.9659258262890682 & -0.7071067811865477 & \cdots & 0.9659258262890682 \\
-0.9659258262890682^2 & -0.7071067811865477^2 & \cdots & 0.9659258262890682^2 \\
-0.9659258262890682^3 & -0.7071067811865477^3 & \cdots & 0.9659258262890682^3 \\
-0.9659258262890682^4 & -0.7071067811865477^4 & \cdots & 0.9659258262890682^4 \\
-0.9659258262890682^5 & -0.7071067811865477^5 & \cdots & 0.9659258262890682^5
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ \frac{3\pi}{8} \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{9}
$$

donde en la posición $M2_{ij}$ va la potencia x_i^j para i,j= 0, $\cdots$, 5,x$_i$ de la Tabla de raíces de los Polinomios de Chebishev (no las hemos escrito todas por temas gráficos).

(A4). Cálculo de los coeficientes

(A4). Calcular los coeficientes a_1 de Chebishev mediante la fórmula $a_i = \frac{\pi}{n}$. Tenemos, que estos son:

n	2	4	6
a_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

2.3 (A5) Cálculo de integrales

2.3.1 Primera integral

A continuación calcularemos

$$
\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx \tag{10}
$$

mediante la fórmula de Cuadratura Gaussiana con nodos de Legendre (es decir, cogiendo $w(x) = 1$ y con la regla de los trapecios compuesta para n=2, 4 y 6 nodos.

Recordemos que, dada una función, en este caso $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y un peso $w(x) = 1$, en el intervalo $[-1, 1]$. Podemos encontrar una familia de polinomios ortogonales respecto este peso en dicho intervalo. Este caso, es un caso ya estudiado en teoria (es decir, este peso e intervalo) y sabemos que para cada n podemos coger los nodos de Legendre en $[-1, 1]$. Así, la fórmula de Cuadratura Gaussiana nos queda, para cada n:

$$
\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx \approx \sum_{n=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{11}
$$

donde w_i y x_i son los coeficientes y nodos de Legendre en $[-1, 1]$ (que se pueden encontrar en las tablas de la sección 2.1.

Además, calcularemos también el valor de la integral usando la Regla de Trapezios Compuesta para el mismo número de nodos.

Los resultados obtenidos son

n	$\sum_{n=1}^{n} w_i \frac{1}{1+x_i^2}$	$T_{n-1}(\frac{1}{1+x^2}, -1, 1)$
2	1.5	1
4	1.568627450980392	1.533333333333333
6	1.570731707317074	1.557466063348417

Para comparar que método ess mejor, podemos observar que dicha integral la podemos calcular exacta. Sabemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \times \arctan(1) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57079632679$$

Así, notamos que, como era de esperar por lo estudiado en teoria, la fórmula de Cuadratura Gausiana aproxima mejor la integral que la de los trapecios compuesta.

2.3.2 Segunda Integral

En este caso, usamos la fórmula de Cuadratura Gaussiana con nodos de Chebishev y así poder coger $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $f(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 5$. Notemos que en este caso no podemos aplicar la regla de los trapecios compuesta ya que, en esta, siempre se evaluan $f(a)$ y $f(b)$, valores donde la función no está definida para $a = -1$ y $b = 1$. Los valores obtenidos con la Fórmula de Cuadratura de Gauss-Chebishev son El resultado calculando esta integral

n	$\sum_{n=1}^{n} w_i(x_i^8 - 2x_i^6 + 3x_i^4 - x_i^2 + 5)$
2	15.90431280879833
4	16.54244881655875
6	16.56699250916492

computacionalmente es

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^8 - 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{675}{128}\pi \approx 16.56699251$$

2.3.3 Tercera integral

En este caso, procedemos igual que en la subsección 2.3.1, pero cogiendo $f(x) = |x|$.

Así, obtenemos

n	$\sum_{n=1}^{n} w_i \lvert x_i \rvert$	T_{n-1} (|x|, -1, 1)
2	1.154700538379252	2
4	1.042534857261527	1.111111111111111
6	1.019894093560786	1.04

Además, sabemos que

$$\int_{-1}^{1} |x| dx = 1$$

Por lo que, de nuevo, la fórmula de Cuadratura Gausiana aproxima mejor la integral que la de los trapecios compuesta para el mismo número de puntos.

3 Conclusiones

En esta práctica hemos podido estudiar principalmente las fórmulas de Cuadratura Gaussiana con nodos de Legendre y Chebishev. La práctica es una guia para resolver las tres integrales calculadas.

En primer lugar podemos observar que dependindo la integral que deseemos calcular, hemos usado un tipo de nodos en concreto, en función del peso $w(x)$ que más nos convenía. Esto es importante, no sólo para simplificar los cálculos, sinó para evitar posibles errores numéricos. Un claro ejemplo es la segunda integral: considerando los nodos de Legendre para $n = 4$ pero sobretodo para $n = 6$, la primera y última raíz són muy cercanas a 1 y -1, respectivamente. Al evaluar $f(x_i)$ de la fórmula en estos dos nodos pueden aparecer errores numéricos debido a que el denominador $\sqrt{1 - x_i^2}$ está cerca de 0. Eligiendo adecuadamente los nodos, en este caso los de Chebishev, eliminamos este posible error numérico.

También hemos comparado el resultado obtenido con la fórmula de Cuadratura Gaussiana y la de la Regla de Trapezios Compuesta. En cada integral observamos que el valor con el primer método es más aproximado al valor de la integral que con el segundo. Esto no es de extrañar ya que esta demostrado teóricamente que la fórmula de Cuadratura Gausiana tiene el orden de exactitud más grande posible.