

Aritmética Utilizando la Transformada de Fourier Cuántica

Erick Jesús Ríos González

April 29, 2024

1 Prerequisitos

Necesitamos introducir notación para fracciones binarias, lo cual nos ayudará a reescribir la Transformada Cuántica de Fourier (QFT) de manera simplista.

Definition 1.1

Para $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$ definimos

$$0.a_1a_2\dots a_m := \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_m}{2^m} = \sum_{l=1}^m a_l \cdot 2^{-l}.$$

De esta manera, podemos escribir QFT para cualquier vector $|x\rangle$ utilizando el siguiente lema:

Lema 1.1

Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$x = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j, \quad \text{donde } x_j \in \{0, 1\} \text{ para } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Entonces la acción de la transformada cuántica de Fourier F sobre cualquier vector $|x\rangle$ de la base computacional de \mathcal{H}_n puede escribirse como

$$F|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} (|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_j \dots x_0} |1\rangle).$$

2 Ejemplo 1+2

Primero comenzamos por hacer la representación binaria de los números $A = 1$ y $B = 2$, pero como el número A va a ser el que cargué la suma tenemos que agregarle un qbit más para evitar los límites de la suma modular.

$$A = 1 = 001_2$$

$$B = 2 = 10_2$$

Sea $A = a_2a_1a_0$ y $B = b_1b_0$ las representaciones binarias de A y B respectivamente, usando el teorema de representación de Riez, podemos hacer la siguiente representación para nuestro ejemplo:

$$|001_2\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|10_2\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

Para nuestro ejemplo seguiremos el siguiente circuito:

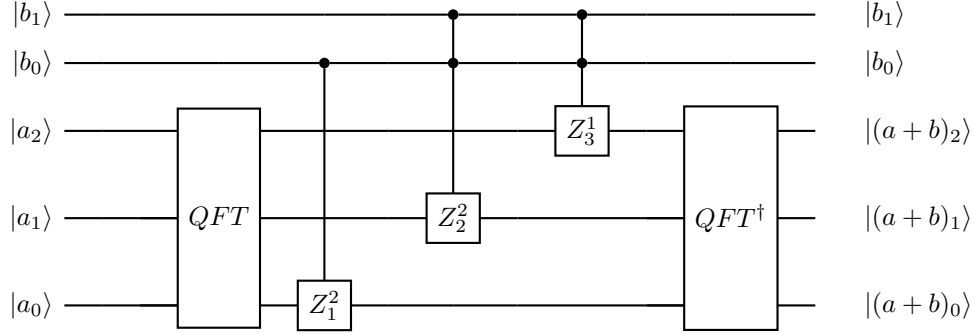


Figure 1: Circuito cuántico para sumar dos números binarios

Ahora que ya sabemos como vamos a operar usaremos el **Lema 1.1** y la **Deficinición 1.1** para aplicar la QFT de nuestro número A:

$$\begin{aligned}
 QFT |A\rangle &= QFT |001\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \bigotimes_{j=0}^2 (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.a_j \dots a_0] |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{8}} [(|0\rangle + \exp[2\pi i 0.a_0] |1\rangle) \otimes (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.a_1 a_0] |1\rangle) \otimes (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.a_2 a_1 a_0] |1\rangle)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.1] |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.01] |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.001] |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + \exp[2\pi i \frac{a}{2}] |1\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + \exp[2\pi i \frac{a}{2^2}] |1\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + \exp[2\pi i \frac{a}{2^3}] |1\rangle \right) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + \exp[2\pi i 0.1] |1\rangle)]}_{|\phi(a_2)\rangle} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + \exp[2\pi i 0.01] |1\rangle)]}_{|\phi(a_1)\rangle} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + \exp[2\pi i 0.001] |1\rangle)]}_{|\phi(a_0)\rangle}
 \end{aligned}$$

Despues de la aplicación de QFT a el número A ahora tenemos que nuestro circuito se ha modificado de la siguiente forma:

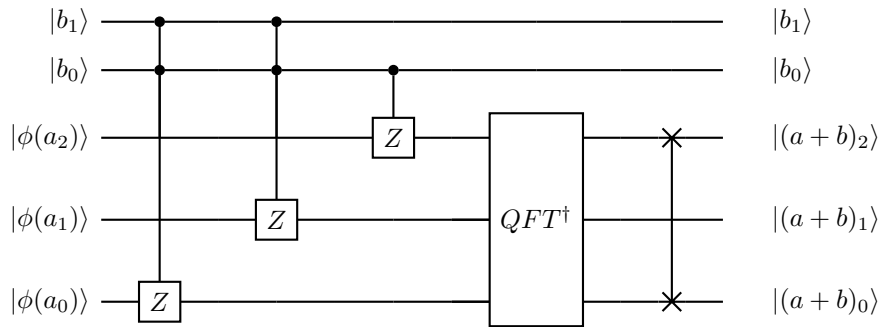


Figure 2: Circuito cuántico para sumar dos números binarios, después de haber aplicado QFT

Ahora procedemos a aplicar la compuerta Z tomando como control los qbits descritos en nuestro diagrama. Comenzando por el qbit $|\phi(a_0)\rangle$ (qbit objetivo) y $|b_0\rangle$ (qbit control) aplicamos Z:

$$\begin{aligned}
Z_3^2 |\phi(a_0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_3^2 (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.001] |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i 0.001] \exp[2\pi i 0.010]) |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.001 + 0.010)]) |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.011)]) |1\rangle)
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido un nuevo elemento, el cual denotamos $|\phi(a_0)''\rangle$:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i (0.011)] |1\rangle)}_{|\phi(a_0)''\rangle}$$

Haciendo un procedimiento análogo con los otros dos qbits, tenemos que para $|\phi(a_1)\rangle$:

$$\begin{aligned}
Z_2^2 |\phi(a_1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_2^2 (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.01] |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.01 + 0.10)]) |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.11)]) |1\rangle)
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido un nuevo elemento, el cual denotamos $|\phi(a_1)''\rangle$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i (0.11)] |1\rangle)}_{|\phi(a_1)''\rangle}$$

Finalmente para $|a_2\rangle$ la rotación nos queda:

$$\begin{aligned}
Z_1^1 |\phi(a_2)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_1^1 (|0\rangle + \exp[2\pi i 0.0] |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.1 + 0.0)]) |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\exp[2\pi i (0.1)]) |1\rangle)
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido un nuevo elemento, el cual denotamos $|\phi(a_2)'\rangle$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp[2\pi i (0.1)] |1\rangle)}_{|\phi(a_2)'\rangle}$$

Vemos que ahora nuestro diagrama se ha modificado a:

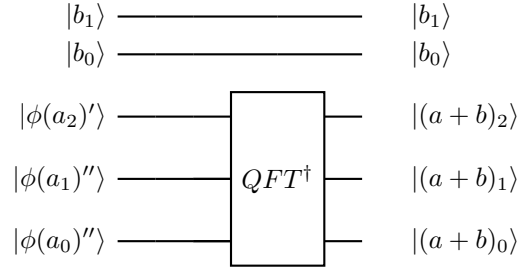


Figure 3: Circuito cuántico para sumar dos números binarios, después de haber aplicado QFT, recordemos que un último paso de QFT^\dagger es hacer un swap entre y las rotaciones correspondientes

Finalmente aplicamos QFT^\dagger al ket conformado por $|\phi(a_2)\phi(a_1)\phi(a_0)\rangle$, esta operación se puede ver como:

$$QFT^\dagger |\phi(a_2)\phi(a_1)\phi(a_0)\rangle = QFT^\dagger |\phi(a_2)\rangle \otimes QFT^\dagger |\phi(a_1)\rangle \otimes QFT^\dagger |\phi(a_0)\rangle$$

Recordemos que QFT^\dagger realiza un swap, para este ejemplo, entre $|\phi(a_2)\rangle$ y $|\phi(a_1)\rangle$. Para de esta manera obtener la componente $|(a+b)_2\rangle$, $|(a+b)_1\rangle$ y $|(a+b)_0\rangle$.

$$\begin{aligned} &= ||0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |011\rangle \\ \implies 011_2 &= 3_{10} = 1 + 2 \end{aligned}$$