Лекция 9

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Билинейные функции и билинейные формы в линейном пространстве

Определение. *Билинейной функцией* в линейном пространстве V называется функция $B(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}$ двух векторных аргументов $\bar{x} \in V$ и $\bar{y} \in V$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $B(\bar{x}_1+\bar{x}_2,\bar{y}) = B(\bar{x}_1,\bar{y}) + B(\bar{x}_2,\bar{y})$;
2) $B(\lambda\bar{x},\bar{y}) = \lambda B(\bar{x},\bar{y})$;
3) $B(\bar{x},\bar{y}_1+\bar{y}_2) = B(\bar{x},\bar{y}_1) + B(\bar{x},\bar{y}_2)$;
4) $B(\bar{x},\lambda\bar{y}) = \lambda B(\bar{x},\bar{y})$.

Таким образом, $B(\bar{x},\bar{y})\colon V \times V \to \mathbb{R}$.

Пример. Рассмотрим V^3 – пространство геометрических векторов. Пусть $B(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x},\bar{y})$ – скалярное произведение. Пользуясь свойствами скалярного произведения, заключаем, что $B(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x},\bar{y})$ – билинейная функция.

Координатное выражение билинейной функции в заданном базисе

Пусть V – линейное пространство и $B(\bar{x},\bar{y})$– билинейная функция.

Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ – базис в V.

Тогда $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = X;\ \ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = Y$

Тогда

$$B(\bar{x},\bar{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(\bar{e}_i,\bar{e}_j) =$$

$$= \left[\text{ Пусть } B(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = a_{ij} \quad (9.1)\right] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \qquad (9.2)$$

$$\Rightarrow B(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (9.3)$$

Определение. Функции вида (9.3) называется *билинейными формами* от переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

Таким образом, любая билинейная функция в данном базисе выражается (с помощью формул (9.1) и (9.3)) через билинейную форму, зависящую от координат исходных векторов.

И обратно, каждой билинейной форме (9.3) соответствует билинейная функция, действие которой в базисе $\mathcal{B}$ определяется формулой (9.1).

Обозначим $A = (a_{ij})$ – матрица билинейной функции $B(\bar{x}, \bar{y})$ в базисе $\mathcal{B}$, где $a_{ij} = B(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.

Равенство (9.3) можно записать в векторно-матричном виде:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = X^T A Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (9.4)$$

(9.4) – векторно-матричная запись билинейной формы.

Преобразование матрицы билинейной функции при переходе к другому базису

Пусть в пространстве V, кроме базиса $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, задан другой базис $\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$.

Тогда в базисе $\mathcal{B}'$:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = X'; \ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = Y'.$$

Пусть C – матрица перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$, тогда $X = C \cdot X'$ и $Y = C \cdot Y'$.

$B(\bar{x}, \bar{y}) = X^T A Y = (C \cdot X')^T \cdot A \cdot C \cdot Y' = X'^T \cdot C^T \cdot A \cdot C \cdot Y' = X' \cdot A' \cdot Y'$ – выражение билинейной функции в базисе $\mathcal{B}'$.

Следовательно, матрица билинейной функции в базисе $\mathcal{B}'$ имеет вид:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C$$

Квадратичные функции и квадратичные формы в линейном пространстве

Определение. *Квадратичной функцией* в линейном пространстве V, соответствующей данной билинейной функции $B(\bar{x}, \bar{y})$, называется функция $\Phi(\bar{x})$ одного векторного аргумента $\bar{x} \in V$, определяемая формулой $\Phi(\bar{x}) = B(\bar{x}, \bar{x})$.

Определение. Билинейная функция $B(\bar{x}, \bar{y})$ называется *симметричной*, если $B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{y}, \bar{x})$.

Теорема. Матрица симметричной билинейной функции в любом базисе симметрична.

Доказательство.

$$a_{ij} = B(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = B(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = a_{ji} \Longrightarrow A^T = A$$

ч.т.д.

Теорема. Существует единственная симметричная билинейная функция, порождающая данную квадратичную функцию.

Доказательство. Пусть $B(\bar{x}, \bar{y})$ – симметричная билинейная функция, порождающая данную квадратичную функцию: $\Phi(\bar{x}) = B(\bar{x}, \bar{x})$. Для доказательства единственности функции $B(\bar{x}, \bar{y})$ достаточно доказать формулу:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\Phi(\bar{x} + \bar{y}) - \Phi(\bar{x}) - \Phi(\bar{y})\right) \qquad (9.5)$$

Формула (9.5) позволяет вычислить значения функции $B(\bar{x}, \bar{y})$ для любой пары векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, зная значения функции Φ для каждого из векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{x} + \bar{y}$.

$$\Phi(\bar{x}) = B(\bar{x}, \bar{x});\ \Phi(\bar{y}) = B(\bar{y}, \bar{y})$$

$$\Phi(\bar{x} + \bar{y}) = B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x}) + B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{y}) =$$

$$= B(\bar{x}, \bar{x}) + B(\bar{y}, \bar{x}) + B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{y}, \bar{y}) = B(\bar{x}, \bar{x}) + 2B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{y}, \bar{y});$$

$\Rightarrow$ формула (9.5) очевидна.

ч.т.д.

Определение. *Матрицей* квадратичной функции в данном базисе называется матрица ее порождающей билинейной функции в этом базисе.

Пусть V – линейное пространство; $B(\bar{x},\bar{y})$ – билинейная функция и $\Phi(\bar{x}) = B(\bar{x},\bar{x})$ – квадратичная функция.

Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис в V. Используя формулу (9.3), получим:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (9.6)$$

Определение. Функции вида (9.6) называются *квадратичными формами* от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Таким образом, квадратичная функция в данном базисе $\mathcal{B}$ выражается в виде квадратичной формы.

$A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной функции (квадратичной формы) в базисе $\mathcal{B}$; A – симметричная матрица.

Согласно формуле(9.4) имеем:

$$\Phi(\bar{x}) = X^T A X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (9.7),$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $X^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$.

(9.7) – векторно-матричная запись квадратичной формы.

Запишем (9.7) подробнее:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

(т.к. $a_{ij} = a_{ji}$).

Пример. Пусть $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 11x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 10x_2x_3$. Найти матрицу квадратичной формы.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & -11 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Преобразование матрицы квадратичной функции при изменении базиса

Пусть A – матрица квадратичной функции $\Phi(\bar{x})$ в базисе $\mathcal{B}$;

A' – матрица квадратичной функции $\Phi(\bar{x})$ в базисе $\mathcal{B}'$;

C – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

Тогда

$$A' = C^T \cdot A \cdot C$$

Замечание. Ранг матрицы билинейной функции не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ – базисы; C – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

Тогда $\mathcal{B}'$

$$A_{\mathcal{B}'} = C^T \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot C$$

Т.к. C – невырожденная матрица, то

$$rangA_{\mathcal{B}'} = rang(C^T \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot C) = rangA_{\mathcal{B}}$$

(т.к. ранг матрицы не меняется при ее умножении на невырожденную)

ч.т.д.

Определение. *Рангом* билинейной функции называется ранг ее матрицы в произвольном базисе.