Лекция 4

ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО. ПРИМЕРЫ

Пример. Пусть $M-$ множество многочленов степени ≤ 4, которые делятся на t^2+t+1. Доказать, что $M-$ линейное подпространство в линейном пространстве P_4. Найти базис и размерность пространства M. Дополнить базис пространства M до базиса пространства P_4.

Решение.

1) Докажем, что $M-$ линейное подпространство в линейном пространстве P_4.

$M=\{p(t)=(at^2+bt+c)(t^2+t+1); a,b,c\in\mathbb{R}\}$

$p(t)=(at^2+bt+c)(t^2+t+1)=$

$=a(t^4+t^3+t^2)+b(t^3+t^2+t)+c(t^2+t+1)$

Пусть

$$p_1(t)=a_1(t^4+t^3+t^2)+b_1(t^3+t^2+t)+$$
$$+c_1(t^2+t+1)$$
$$p_2(t)=a_2(t^4+t^3+t^2)+b_2(t^3+t^2+t)+$$
$$+c_2(t^2+t+1)$$

$\alpha p_1(t)+\beta p_2(t)=\alpha a_1(t^4+t^3+t^2)+\alpha b_1(t^3+t^2+t)+$
$+\alpha c_1(t^2+t+1)+\beta a_2(t^4+t^3+t^2)+\beta b_2(t^3+t^2+t)+$
$+\beta c_2(t^2+t+1)=(\alpha a_1+\beta a_2)(t^4+t^3+t^2)+$
$+(\alpha b_1+\beta b_2)(t^3+t^2+t)+(\alpha c_1+\beta c_2)(t^2+t+1)=$

$$=\begin{bmatrix}\alpha a_1+\beta a_2=a\\ \alpha b_1+\beta b_2=b\\ \alpha c_1+\beta c_2=c\end{bmatrix}=a(t^4+t^3+t^2)+b(t^3+t^2+t)+c(t^2+t+1)$$

$\Rightarrow \alpha p_1(t)+\beta p_2(t)\in M$

$\forall p_1(t),p_2(t)\in M$ и $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow M-$ линейное подпространство в линейном пространстве P_4

2) Найдем базис и размерность M.

$$p(t)=(at^2+bt+c)(t^2+t+1)=$$
$$=a(t^4+t^3+t^2)+b(t^3+t^2+t)+c(t^2+t+1)$$

Рассмотрим векторы (многочлены):

$$\bar{e}_1=(t^4+t^3+t^2); \bar{e}_2=t^3+t^2+t; \bar{e}_3=t^2+t+1$$

Пусть $\mathcal{B}' = \{t^4; t^3; t^2; t; 1\}$. Найдем координаты векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в базисе $\mathcal{B}'$.

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; rangA = 3$

$\Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ − линейно независимы.

2) $\forall\, p(t) \in M \Rightarrow p(t) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} =$$

$= \{t^4 + t^3 + t^2; t^3 + t^2 + t; t^2 + t + 1\}$ − базис в M

$$\Rightarrow \dim M = 3$$

Дополним базис пространства M до базиса пространства P_4.

Т.к. $\dim P_4 = 5 \Rightarrow$ базис пространства P_4 состоит из пяти элементов. Базис пространства M состоит из трех многочленов. Поэтому нужно добавить к базису пространства M еще два элемента и проверить, что векторы линейно независимы.

Пусть $\mathcal{B}''$ − базис пространства P_4.

Тогда, например $\mathcal{B}'' = \{t^4 + t^3 + t^2; t^3 + t^2 + t; t^2 + t + 1; t; 1\}$, т.к. многочлены $t^4 + t^3 + t^2; t^3 + t^2 + t; t^2 + t + 1; t; 1$ линейно независимы. Доказательство их линейной независимости аналогично тому, как мы это делали для векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Для этого рассматриваем канонический базис пространства P_4: $\{t^4; t^3; t^2; t; 1\}$ и в этом базисе представляем многочлены в виде столбцов координат:

$$t^4 + t^3 + t^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ t^3 + t^2 + t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t^2 + t + 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Далее рассматриваем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; rangB = 5, \text{т.к. } |B| = 1 \neq 0.$$

$\Rightarrow$ многочлены $t^4 + t^3 + t^2; t^3 + t^2 + t; t^2 + t + 1; t; 1$ линейно независимы.

Пример. Пусть $M -$ множество симметричных матриц размера 2×2. Доказать, что $M -$ линейное подпространство в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Найти базис и размерность пространства M.

Решение.

1) Докажем, что $M -$ линейное подпространство в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha c_1 \\ \alpha c_1 & \alpha b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_2 & \beta c_2 \\ \beta c_2 & \beta b_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in M \qquad \forall\, A, B \in M$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M -$ линейное подпространство в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2) Найдем базис и размерность M.

$$X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Рассмотрим векторы (матрицы):

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – линейно независимы

б) $\forall\, X \in M \Rightarrow X = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} - \text{базис в } M$$

$$\Rightarrow \dim M = 3$$

ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Определение. *Отображением* f множества X во множество Y называется закон, посредством которого произвольному элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $y \in Y$.

Обозначение. $f: X \to Y$.

Определение. Элемент y называется *образом* элемента x, а x – *прообразом* элемента y.

Замечание. Запись $y = f(x)$ или $x \xrightarrow{f} y$ означает, что элемент x при отображении f переходит в элемент y.

Определение. Отображение f называется *взаимно однозначным* (или *биективным*), если уравнение $y = f(x)$ (5.1) при $\forall y$ имеет единственное решение, т.е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение. Отображение f называется *отображением на* (или *сюръективным*), если уравнение (5.1) при $\forall y$ имеет хотя бы одно решение.

Определение. Два отображения $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$ называются *равными*, если $f(x) = g(x),\ \forall x \in X$.

Определение. *Тождественным (единичным)* отображением на множестве X называется отображение $e_x: X \to X$, которое переводит каждый элемент $x \in X$ в себя.

Композиция отображений и ее свойства

Определение. *Композицией* (т.е. произведением) отображений $g: X \to Y$ и $f: Y \to Z$ называется отображение $f \cdot g: X \to Z$, определенное правилом

$$(f \cdot g)(x) = f\big(g(x)\big),\ \forall x \in X.$$

Замечание. Композиция отображений не коммутативна.

Свойства композиции отображений

1) $f \cdot e_x = f;\ \ e_y \cdot f = f$ для $\forall f: X \to Y$.

2) Композиция отображений ассоциативна, т.е. если $h: X \to Y;\ g: Y \to Z;$ $f: Z \to U$, то $f(gh) = (fg)h$.

Доказательство.

В соответствии с определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений $f(gh): X \to U$ и $(fg)h: X \to U$ в произвольной точке $x \in X$.

Согласно определению композиции отображений имеем:

$$\big(f(gh)\big)(x) = f\big((gh)(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = (fg)\big(h(x)\big) = \big((fg)h\big)(x)$$

ч.т.д.

3) Композиция биективных (или сюръективных) отображений биективна (соответственно сюръективна).

Обратное отображение

Определение. Пусть $f: X \to Y$. Отображение $f^{-1}: Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если

$$f^{-1} \cdot f = e_x;\quad f \cdot f^{-1} = e_y$$

Определение. Отображение, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым*.

Теорема. *(Критерий обратимости).*

Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство.

1) <u>Необходимость</u>. Пусть $f: X \to Y$ обратимо.

$\Rightarrow\ \exists\ f^{-1}: Y \to X$ такое, что $f^{-1} \cdot f = e_x$ и $f \cdot f^{-1} = e_y$.

Пусть f не биективно $\Rightarrow \exists\ x_1$ и $x_2 \in X : x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$.

$x_1 = e_x(x_1) = (f^{-1} \cdot f)(x_1) = f^{-1}\big(f(x_1)\big) = f^{-1}\big(f(x_2)\big) = (f^{-1} \cdot f)(x_2) =$
$= e_x(x_2) = x_2\ \ \Rightarrow$ противоречие.

2) Достаточность. Пусть f – биективно; $f: X \to Y$, т.е. $y = f(x)$. Тогда для $\forall y \in Y$ существует единственный прообраз $x \in X$.

Построим отображение $g: Y \to X$, положив $g(y) = x$. Тогда для $\forall y \in Y$ имеем: $(f \cdot g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y$, т.е. $f \cdot g = e_y$.

Для $\forall x \in X$ имеем: $(g \cdot f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x$, т.е. $g \cdot f = e_x$.
$\Rightarrow g = f^{-1}$ и f обратимо.

ч.т.д.

Свойства обратимых отображений

1) Обратное отображение единственно.

2) Композиция обратимых отображений обратима, при этом

$$(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$$

Доказательство. Композиция $f \cdot g$ обратима, как композиция биективных отображений, при этом, если $g: X \to Y$ и $f: Y \to Z$, то

$$(f \cdot g)(g^{-1} \cdot f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = fe_yf^{-1} = ff^{-1} = e_z$$
$$(g^{-1} \cdot f^{-1})(f \cdot g) = g^{-1}(f^{-1} \cdot f)g = g^{-1}e_yg = g^{-1}g = e_x$$

ч.т.д.