Лекция 3

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ДРУГОМУ БАЗИСУ

Пусть $V -$ линейное пространство и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ и $\mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ $-$ базисы в V.

$\mathcal{B}$ $-$ исходный базис; $\mathcal{B}'$ $-$ новый базис

Пусть $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ и $\bar{u} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Пусть векторы нового базиса раскладываются по векторам старого базиса:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}'_2 = c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + \dots + c_{n2}\bar{e}_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ \bar{e}'_i = c_{1i}\bar{e}_1 + c_{2i}\bar{e}_2 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ \bar{e}'_n = c_{1n}\bar{e}_1 + c_{2n}\bar{e}_2 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

$$\Rightarrow \bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Введем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$

Систему (3.1) можно записать в матричном виде:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cdot C \qquad (3.2),$$

где $\mathcal{E} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \dots\ \bar{e}_n)$; $\mathcal{E}' = (\bar{e}'_1\ \bar{e}'_2\ \dots\ \bar{e}'_n)$

Т.к. $\bar{u} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$; $\bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ и $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$$\Rightarrow \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \bar{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x'_i c_{ji} \right) \bar{e}_j$$

С другой стороны

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j$$

В силу единственности разложения вектора по базису получим

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' c_{ji}, \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (3.3)$$

Запишем равенства (3.3) подробно

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n' \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n' \\ \cdots \\ x_j = c_{j1}x_1' + c_{j2}x_2' + \dots + c_{jn}x_n' \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n' \end{cases} \qquad (3.4)$$

Запишем систему (3.4) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \qquad (3.5), \text{ где}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$

Теорема. Матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ не вырождена.

Доказательство.

Используем формулу (3.2):

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cdot C \qquad (3.2),$$

где $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$; $\mathcal{E}' = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n')$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}' \cdot C' = \mathcal{E} \cdot C \cdot C' = \mathcal{E} \cdot D, \text{ где}$$

$$D = C \cdot C'$$

Покажем, что $D = \left(d_{ij}\right) = E$ − единичная матрица

$$\bar{e}_i = \bar{e}_1 \cdot d_{1i} + \bar{e}_2 \cdot d_{2i} + \dots + \bar{e}_i \cdot d_{ii} + \dots + \bar{e}_n \cdot d_{ni}$$

$$\Rightarrow \ \bar{o} = \bar{e}_1 \cdot d_{1i} + \dots + \bar{e}_i \cdot (d_{ii} - 1) + \dots + \bar{e}_n \cdot d_{ni} \qquad (3.6)$$

Т.к. векторы $\bar{e}_1, \ \dots, \bar{e}_n$ − линейно независимы

$\Rightarrow$ линейная комбинация (3.6) − тривиальная

$$\Rightarrow d_{1i} = 0, \dots, d_{ii} - 1 = 0, \dots, d_{ni} = 0$$

$\Rightarrow d_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j \\ 0, \text{ при } i \neq j \end{cases}$ − символ Кронекера

$$\Rightarrow D = C \cdot C' = E \Rightarrow C' = C^{-1}$$

$\Rightarrow C$ − не вырождена

ч.т.д.

Т.к. C − не вырождена, то из формулы (3.5) получим:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad (3.7)$$

(3.7) − преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Пример. В пространстве геометрических векторов V^3 заданы два базиса $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Даны два вектора: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\mathcal{B}'$ и координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Решение.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{e}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где C − матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

Замечание. Найдя матрицу C^{-1}, мы знаем как векторы базиса $\mathcal{B}$ выражаются через векторы базиса $\mathcal{B}'$:

$$\begin{cases} \vec{i} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{j} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{k} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Таким образом, матрица C^{-1} − это матрица перехода от базиса $\mathcal{B}'$ к базису $\mathcal{B}$.

1) Найдем координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\mathcal{B}'$:

$$\vec{a}_{\mathcal{B}'} = C^{-1}\vec{a}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверка.

$$\vec{a}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = 5(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) - (-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) +$$

$$+5(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = 5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} - 5\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k} =$$

$$= \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$ −верно;

2) Найдем координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\mathcal{B}$:

$$\vec{b}_{\mathcal{B}} = C\vec{b}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Проверка.

$$\vec{b}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{\imath} - \vec{k} = 2(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_1 - \vec{e}_3 =$$

$$= 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$ − верно.