Лекция 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Линейным пространством* называется множество $V = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$, где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ – элементы пространства (векторы), если для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \in V$ и $\lambda\bar{a} \in V$, и выполняются следующие аксиомы:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ $\quad\quad \forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$

3) $\forall\, \bar{a} \in V$ $\exists$ нулевой вектор

$\bar{o} \in V: \bar{a} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{a} = \bar{a}$

4) $\forall\, \bar{a} \in V$ $\exists$ противоположный вектор

$-\bar{a} \in V: \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{o}$

5) $(\lambda \cdot \mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$

6) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$

7) $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ $\quad\quad \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in V$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

8) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$

1) – 4) – аксиомы по операции сложения элементов

5) – 8) – аксиомы по операции умножения элемента на число

Замечание. Линейное пространство называют также векторным пространством.

Примеры линейных пространств

1) пространства геометрических векторов: V_1 – на прямой; V_2 – на плоскости; V_3 – в пространстве;

2) множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$;

3) множество матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$;

4) множество многочленов степени $\leq n - P_n$;

5) множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b] - C_{[a,b]}$.

6) n-мерное пространство арифметических векторов – $\mathbb{R}^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел, называемых арифметическими векторами.

$\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
Тогда:

1) $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall\, i = 1,2,\dots,n$
2) $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
3) $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Простейшие свойства линейных пространств

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент $\bar{o}$.

Доказательство.

Пусть $\exists\ \bar{o}_1$ и $\bar{o}_2$ – два различных нулевых вектора. Тогда из аксиомы 3) следует, что $\bar{o}_1 + \bar{o}_2 = \bar{o}_1 = \bar{o}_2$.

ч.т.д.

2) Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор.

Доказательство.

Пусть $\bar{a}'$ и $\bar{a}''$ – два различных противоположных элемента к элементу $\bar{a}$. Тогда $\bar{a} + \bar{a}' = \bar{a}' + \bar{a} = \bar{o}$ и $\bar{a} + \bar{a}'' = \bar{a}'' + \bar{a} = \bar{o}$.
$\Rightarrow \bar{a}' = \bar{a}' + \bar{o} = \bar{a}' + (\bar{a} + \bar{a}'') = (\bar{a}' + \bar{a}) + \bar{a}'' =$
$= \bar{o} + \bar{a}'' = \bar{a}''$.

ч.т.д.

3) $0 \cdot \bar{a} = \bar{o}$ (1.1) и $\lambda \cdot \bar{o} = \bar{o}$ (1.2)

Доказательство.

Для доказательства равенства (1.1) достаточно доказать, что $\bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = \bar{b}, \forall \bar{b} \in V$.

$$\bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = \left(\bar{b} + \bar{o}\right) + 0 \cdot \bar{a} = \bar{b} + \left((-\bar{a}) + \bar{a}\right) + 0 \cdot \bar{a} =$$
$$= \left(\bar{b} + (-\bar{a})\right) + 1\bar{a} + 0\bar{a} = \left(\bar{b} + (-\bar{a})\right) + (1 + 0) \cdot \bar{a} =$$
$$= \left(\bar{b} + (-\bar{a})\right) + \bar{a} = \bar{b} + \left((-\bar{a}) + \bar{a}\right) = \bar{b} + \bar{o} = \bar{b}$$

Равенство (1.2) доказывается, используя равенство (1.1) и аксиому 5) :
$\lambda \cdot \bar{o} = \lambda(0 \cdot \bar{a}) = (\lambda \cdot 0)\bar{a} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{o}$

ч.т.д.

4) В линейном пространстве из равенства $\lambda\bar{a} = \bar{o}$ следует, что либо $\lambda = 0$, либо $\bar{a} = \bar{o}$.

Доказательство.

Из равенства (1.1) следует, что случай $\lambda = 0$ возможен, если $\lambda \cdot \bar{a} = \bar{o}$.

Если $\lambda \neq 0$, то $\bar{a} = 1 \cdot \bar{a} = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\bar{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\bar{a}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{o} = \bar{o}$.

ч.т.д.

5) $-\bar{a} = (-1)\bar{a}$

Доказательство.

$$\bar{a} + (-1)\bar{a} = 1\bar{a} + (-1)\bar{a} = (1-1)\bar{a} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{o}$$

ч.т.д.

6) Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в линейном пространстве существует, и притом единственная, разность $\bar{b} - \bar{a}$.

Доказательство.

$$\bar{a} + \left(\bar{b} + (-\bar{a})\right) = \left(\bar{a} + (-\bar{a})\right) + \bar{b} = \bar{o} + \bar{b} = \bar{b} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{b} - \bar{a} = \bar{b} + (-\bar{a})$.

Докажем единственность. Пусть $\exists \bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$ – другая разность, но $\bar{c} = \bar{c} + \bar{o} = \bar{c} + \left(\bar{a} + (-\bar{a})\right) =$
$= (\bar{c} + \bar{a}) + (-\bar{a}) = \bar{b} + (-\bar{a})$.

ч.т.д.

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть дано линейное пространство V и в нем система векторов $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$.

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m \in V$ называется вектор вида

$$\bar{y} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m \qquad (1.3),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – произвольные числа.

Определение. Линейная комбинация (1.3) называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. В противном случае линейная комбинация называется нетривиальной (т.е. если хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$).

Определение. Система векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, одновременно не равные нулю, такие что:

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m = \bar{o}$$

Определение. Система векторов называется *линейно независимой*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов.

Замечание. Краткое определение:

Векторы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ – линейно независимы, если

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m = \bar{o} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

В противном случае векторы линейно зависимы.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

1) Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Линейная зависимость системы из одного вектора равносильна тому, что $\lambda\bar{u} = \bar{o}$, а условие $\lambda\bar{u} = \bar{o} \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{o}$ $(\lambda \neq 0)$ – следствие простейших свойств линейных пространств.

ч.т.д.

2) *Критерий линейной зависимости системы векторов.*

Система векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$, где $m > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие.

Доказательство.

1) Необходимость

Если $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ линейно зависима $\Rightarrow$
$\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m = \bar{o} \quad (1.4)$$

Пусть $\lambda_i \neq 0$. Тогда в силу (1.4)

$$\bar{u}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\bar{u}_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\bar{u}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\bar{u}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}\bar{u}_m$$

2) Достаточность

Пусть, например, $\bar{u}_1 = \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m$. Тогда
$\bar{o} = -\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m$ – это нетривиальная линейная комбинация $\Rightarrow$
$\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ линейно зависима.

ч.т.д.

3) Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

4) Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

5) *Критерий линейной независимости системы векторов.* Система векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам.

Доказательство элементарное. Доказывается методом от противного.

6) Если система векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\} -$ линейно независима, а система векторов $\Sigma' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}\}$ линейно зависима, то вектор $\bar{v}$ линейно выражается через векторы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$.

Доказательство.

$\Sigma' -$ линейно зависима $\Rightarrow$

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_m\bar{u}_m + \lambda_0\bar{v} = \bar{o} \qquad (1.5),$$

где хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_0$ не равно нулю.

Если $\lambda_0 = 0$, то ненулевой коэффициент λ_k находится среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

При этом равенство (1.5) переходит в равенство

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_m\bar{u}_m = \bar{o} \qquad (1.6),$$

где (1.6) $-$ нетривиальная линейная комбинация,
равная нулевому вектору $\Rightarrow$ противоречие линейной независимости системы $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\} \Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow$ вектор $\bar{v}$ линейно выражается из равенства (1.5) через векторы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$.

ч.т.д.

Пример.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n - n$-мерном пространстве арифметических векторов векторы:

$$\bar{e}_1 = (1,\ 0, \ldots,\ 0)$$
$$\bar{e}_2 = (0,\ 1, \ldots, 0)$$
$$\ldots$$
$$\bar{e}_n = (0,\ 0, \ldots, 1)$$

$\Sigma = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} -$ линейно независима, т.к. линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ представляет собой арифметический вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, который равен $\bar{o} = (0, \ldots,\ 0) \Leftrightarrow \lambda_i = 0,\ \ i = 1,2, \ldots, n$.

Пример.

Пространство многочленов.

Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы, т.к. их линейная комбинация с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ представляет собой многочлен, который равен нулю тогда и только тогда, когда все $\lambda_i = 0,\ \ i = 0,1, \ldots, n$.

Геометрический смысл линейной зависимости и линейной независимости для системы геометрических векторов

Теорема. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство.

1) Необходимость.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы $\Rightarrow$ согласно критерию линейной зависимости

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

2) Достаточность.

Пусть $\bar{a} \parallel \bar{b}$ и $\bar{a} \neq \bar{o}$ (если $\bar{a} = \bar{o}$, то согласно свойствам **1)** и **3)** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы)

$\Rightarrow \bar{b} = \lambda\bar{a} \Rightarrow$ согласно свойству **2)** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы.

ч.т.д.

Теорема. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

1) Необходимость.

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимы $\Rightarrow$ один из них линейно выражается через другие. Пусть $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$.

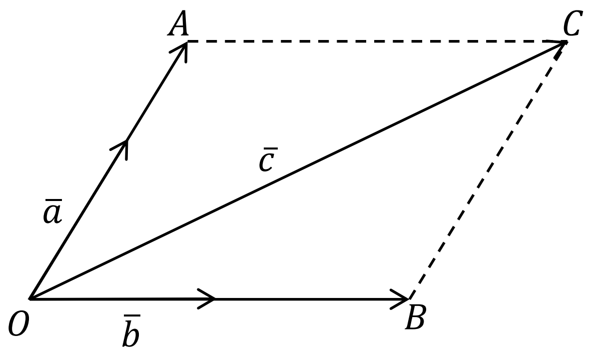
Если $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow$ векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ коллинеарны и тем более компланарны.

Если $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Тогда приведем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к одному началу. Вектор $\bar{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\bar{a}$ и $\beta\bar{b} \Rightarrow$ $\bar{c}$ лежит в той же плоскости, что и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b} \Rightarrow$ векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны

2) Достаточность.

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны и $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ (если $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}$ – линейно зависимы $\Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – линейно зависимы согласно свойству **3)**).

Приведем векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ к одному началу



$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \Rightarrow \bar{c}$ линейно выражается через $\bar{a}$ и $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимы.

ч.т.д.

Теорема. Любые четыре вектора линейно зависимы.

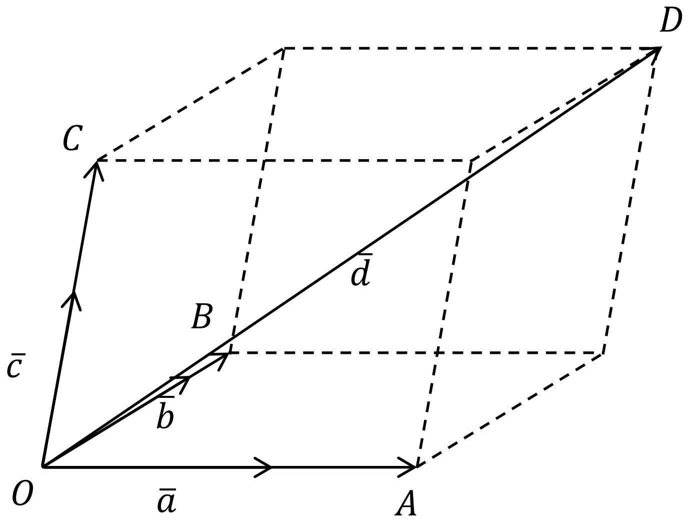
Доказательство.

$\Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$ – линейно зависима.

Рассмотрим $\Sigma' = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$

1) Если $\Sigma' = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ линейно зависима $\Rightarrow \Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$ линейно зависима.

2) Если $\Sigma' = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ линейно независима $\Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – некомпланарны.



$\bar{d} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} =$
$= \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$
$\Rightarrow \bar{d}$ – линейно выражается через $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$ линейно зависима

Пример. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset V_3$, если $\bar{a}(2; -1; 3); \bar{b}(3; 2; 1); \bar{c}(1; 0; 4)$.

Решение.

$\Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ – линейно зависима $\Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$