Лекция 5

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Линейным оператором в линейном пространстве V называется отображение $\hat{A}: V \to V$, обладающее свойствами:

1) $\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}\bar{x} + \hat{A}\bar{y}$

2) $\hat{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda\hat{A}\bar{x}$ для $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание. $\hat{A}$: V → V– линейный оператор, если
$\hat{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha\hat{A}\bar{x} + \beta\hat{A}\bar{y}$ для $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Замечание. Два линейных оператора $\hat{A}: V \to V$ и $\hat{B}: V \to V$ равны, если $\hat{A}\bar{x} = \hat{B}\bar{x},\ \forall \bar{x} \in V$.

Примеры.

1) Пусть P_n – линейное пространство многочленов с действительными коэффициентами степени $\leq n$.

Отображение $\hat{D}: P_n \to P_n$, заданное формулой $\hat{D}p(t) = \frac{d}{dt}\big(p(t)\big)$, является линейным оператором дифференцирования, т.к.

$$\hat{D}\big(\alpha p(t) + \beta g(t)\big) = \big(\alpha p(t) + \beta g(t)\big)' = \alpha p'(t) + \beta g'(t) = \alpha\hat{D}p(t) + \beta\hat{D}g(t)$$

$\forall\, p(t), g(t) \in P_n$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Отображение $\hat{O}$: V → V, которое каждый вектор $\bar{x} \in V$ переводит в нулевой вектор $\bar{o} \in V$, является нулевым линейным оператором.

3) Отображение $\hat{E}$: V → V, которое каждый вектор $\bar{x} \in V$ переводит в вектор $\bar{x} \in V$, является тождественным (единичным) линейным оператором.

Матрица линейного оператора

Пусть $\hat{A}$: V → V– линейный оператор в линейном пространстве V.
Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис в V.

Тогда для $\forall\ \bar{x} \in V \ \Rightarrow\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\hat{A}\bar{x} \in V \quad \Rightarrow\ \hat{A}\bar{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \bar{y}$

Подействуем линейным оператором на базисные векторы:

Пусть

$$\begin{cases} \hat{A}\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \cdots + a_{n1}\bar{e}_n \\ \hat{A}\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \cdots + a_{n2}\bar{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{A}\bar{e}_n = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \cdots + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица A называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Замечание. Чтобы найти матрицу линейного оператора, нужно подействовать оператором на базисные векторы. Столбцы матрицы линейного оператора — это координаты образов базисных векторов.

$$\hat{A}\bar{x} = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\hat{A}\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,x_i\right)\bar{e}_j$$

С другой стороны

$$\hat{A}\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j$$

Поэтому в силу единственности разложения вектора по базису имеем:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,x_i\,; \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (5.1)$$

(5.1) – преобразование координат вектора $\bar{x}$ при действии оператора $\hat{A}$.

В матричной форме равенства (5.1) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad (5.2)$$

Композиция линейных операторов

Пусть $\hat{A}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ и $\hat{B}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ – линейные операторы в линейном пространстве V. Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис в V. Пусть A и B – матрицы линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в базисе $\mathcal{B}$ соответственно.

Тогда $\hat{A} \cdot \hat{B}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ – композиция (произведение) операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.
Пусть D – матрица композиции $\hat{A} \cdot \hat{B}$ в базисе $\mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\hat{B}} \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\hat{A}} \bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} =$$

$$= A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right) = (A \cdot B) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \Rightarrow D = AB$$

Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть $\hat{A}: V \to V$ – линейный оператор.
Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис в V и $\mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n\}$ – новый базис в V.
Пусть C – матрица перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$.
Пусть A и A'– матрицы оператора $\hat{A}$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ соответственно.

Пусть $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ и $\bar{x} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ – связь координат вектора $\bar{x}$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$.

Пусть $\hat{A}\bar{x} = \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$$\hat{A}\bar{x} = \bar{y} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = C^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = C^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = C^{-1} A C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\Rightarrow A' = C^{-1} A C \quad (5.3)$$

(5.3) – формула для нахождения матрицы линейного оператора в новом базисе