Лекция 8

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР ПРОСТОГО ТИПА. ПРИМЕРЫ

Теорема. Собственные векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Доказательство. Применим метод математической индукции по k.

1) Для $k = 1$ утверждение верно, т.к. собственный вектор является ненулевым по определению (а система из одного вектора линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой).

2) Пусть утверждение верно для любой системы из $k - 1$ векторов. Докажем его для k векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_k \bar{x}_k = \bar{o} \qquad (8.1)$$

Под действием оператора $\hat{A}$ равенство (8.1) перейдет в равенство:

$$\alpha_1 \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \bar{x}_k = \bar{o} \qquad (8.2)$$

Умножим обе части равенства (8.1) на λ_k и вычтем полученное равенство из (8.2). В результате получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\bar{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\bar{x}_{k-1} = \bar{o} \qquad (8.3)$$

В силу индуктивного предположения, из (8.3) следует, что

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0.$$

Тогда из (8.1) следует, что $\alpha_k \bar{x}_k = \bar{o}$. Т.к. $\bar{x}_k \neq \bar{o} \;\Rightarrow\; \alpha_k = 0$.
$\Rightarrow \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ – линейно независимы (т.к. линейная комбинация (8.1) – тривиальная).

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

Определение. Линейный оператор $\hat{A}: V \to V$ называется *оператором простого типа*, если в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$.

Теорема. Линейный оператор $\hat{A}: V \to V$ является оператором простого типа тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором оператор $\hat{A}$ имеет диагональную матрицу.

Доказательство. Пусть $dimV = n$. Согласно определению оператор $\hat{A}$ является оператором простого типа тогда и только тогда, когда он имеет n линейно независимых собственных векторов $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Это равносильно существованию базиса $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, в котором матрица оператора $\hat{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (8.4),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения, соответствующие собственным векторам $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Действительно

$$\hat{A}\bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \hat{A}\bar{e}_2 = \lambda_2 \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \dots, \hat{A}\bar{e}_n = \lambda_n \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$\mathcal{B}$ – собственный базис.

ч.т.д.

Таким образом, в собственном базисе матрица линейного оператора имеет диагональный вид, причем по диагонали стоят его собственные значения.

Следствие. В n-мерном линейном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простого типа.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. не всякий оператор простого типа имеет n различных собственных значений.

Замечание. В соответствии с (8.4) оператор простого типа называют также диагонализуемым оператором.

Геометрический смысл определителя матрицы линейного оператора в пространстве геометрических векторов V^3

Пусть $\hat{A}: V^3 \to V^3$ – линейный оператор. Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ – базис в V^3.
Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$.
Возьмем произвольные векторы:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \bar{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Возьмем образы этих векторов:

$$\hat{A}\bar{a} = \bar{a}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \ \hat{A}\bar{b} = \bar{b}' = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A}\bar{c} = \bar{c}' = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \\ z_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Эти три равенства можно записать одним матричным равенством:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \qquad (8.5)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix} = |A| \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (8.6)$$

Вспоминая понятие смешанного произведения векторов, равенство (8.6) запишем в виде:

$$\left(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\right) = |A| \cdot \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) \qquad (8.7)$$

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ не компланарны. Тогда $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) \neq 0$.

$\Rightarrow\ |A| = \dfrac{\left(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\right)}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \dfrac{\pm V'}{\pm V}$, т.е. $\big||A|\big| = \dfrac{V'}{V}$,

где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$;

V' – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}', \bar{b}'$ и $\bar{c}'$.

$\big||A|\big|$ – коэффициент искажения объемов.

Чем определяется знак $|A|$**?**

$|A| > 0$ – ориентация отображенной тройки векторов сохраняется (т.е. если тройка векторов $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ – правая, то и $\left(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\right)$ − правая тройка и наоборот);

$|A| < 0$ − ориентация отображенной тройки векторов меняется;

$|A| = 0$ – отображение вырождено.