Лекция 2

РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Говорят, что линейное пространство V имеет размерность n, если в пространстве V существует n линейно независимых векторов, а любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.

Определение. Размерность линейного пространства $-$ это наибольшее число линейно независимых векторов в этом пространстве.

Обозначение. $\dim V -$ размерность линейного пространства V.

Первое определение базиса

Определение. Пусть $V-$ n-мерное линейное пространство. Базисом $\mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ \dots,\bar{e}_n\}\subset V$ называется любая система из n линейно независимых векторов в этом пространстве.

Пример. В линейном пространстве матриц размера $2\times 2\ -\ \mathbb{R}^{2\times 2}$ рассмотрим векторы (матрицы):

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\ \bar{e}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\ -$ линейно независимы, т.к.

$$\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\lambda_3\bar{e}_3+\lambda_4\bar{e}_4=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{pmatrix}=O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

Любые 5 матриц размера 2×2 линейно зависимы

$\Rightarrow\dim\mathbb{R}^{2\times 2}=4$ и $\mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$ – базис

Пример. В линейном пространстве многочленов степени $\leq 2-$ $P_2=\{p(t)=at^2+bt+c;a,b,c\in\mathbb{R}\}$ рассмотрим многочлены:

$t^2,t,1\ -$ линейно независимы, т.к.

$$\lambda_1t^2+\lambda_2t+\lambda_3\cdot 1=0\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Любые 4 многочлена линейно зависимы

$\Rightarrow\dim P_2=3$ и $\mathcal{B}=\{t^2,t,1\}$ – базис

Пример. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n - n$-мерном пространстве арифметических векторов рассмотрим векторы:

$$\bar{e}_1 = (1,\ 0, \dots,\ 0)$$
$$\bar{e}_2 = (0,\ 1, \dots, 0)$$
$$\dots$$
$$\bar{e}_n = (0,\ 0, \dots, 1)$$

$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\} -$ линейно независима, т.к. линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ представляет собой арифметический вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, который равен $\bar{o} = (0, \dots,\ 0) \Leftrightarrow \lambda_i = 0,\ \ i = 1,2, \dots, n$.

Любые $n + 1$ векторов линейно зависимы.

$\Rightarrow \dim\mathbb{R}^n = n$ и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\} -$ базис в пространстве $\mathbb{R}^n$

Теорема. *(О разложении вектора по базису).*

Пусть V – линейное пространство и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2,\ \dots, \bar{e}_n\}$ – базис в V. Тогда любой вектор $\bar{u} \in V$ есть линейная комбинация векторов базиса, т.е. $\forall\ \bar{u} \in V\ \ \exists$ числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$ (2.1) и разложение (2.1) единственно.

Доказательство.

1) Докажем существование разложения (2.1)

Возьмем любой вектор $\bar{u} \in V$. Рассмотрим систему векторов $\Sigma = \{\bar{u}, \bar{e}_1, \bar{e}_2,\ \dots, \bar{e}_n\}$. Система Σ состоит из $n + 1$ вектора. Т.к. $\dim V = n$, то Σ – линейно зависима, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_0\bar{u} + \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \dots + \lambda_n\bar{e}_n = \bar{o} \quad (2.2),$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отличен от нуля.

Предположим, что $\lambda_0 = 0\ \Rightarrow \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \dots + \lambda_n\bar{e}_n = \bar{o}$

Но $\bar{e}_1, \bar{e}_2,\ \dots, \bar{e}_n$ – линейно независимы

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ противоречие и $\lambda_0 \neq 0$

Из равенства (2.2) получим:

$$\bar{u} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\bar{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\bar{e}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\bar{e}_n =$$
$$= x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n\ -\ \text{разложение (2.1)}$$

2) Докажем единственность разложения (2.1)

Пусть существуют два различных разложения:

$$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n \quad (2.1)$$

и

$$\bar{u} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \dots + y_n\bar{e}_n \quad (2.3)$$

Вычитаем из равенства (2.1) равенство (2.3):

$$\bar{o} = (x_1 - y_1)\bar{e}_1 + (x_2 - y_2)\bar{e}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\bar{e}_n \ (2.4)$$

Т.к. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \ldots, \bar{e}_n$ − линейно независимы, то линейная комбинация (2.4) тривиальна

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n \Rightarrow \text{противоречие}$$

⇒ разложения (2.1) единственно

ч.т.д.

Замечание. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\bar{u}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Обозначение. Если $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \ldots, \bar{e}_n\}$ − базис в V, то

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n$$

Пусть V − линейное пространство и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \ldots, \bar{e}_n\}$ − базис в V.

Теорема. Если $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ и $\bar{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, то

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ и } \lambda\bar{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Доказательство.

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i; \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \ \bar{u} + \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Аналогично для $\lambda\bar{u}$:

$$\lambda\bar{u} = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i\bar{e}_i \quad \Rightarrow \lambda\bar{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

ч.т.д.

Линейное подпространство

Определение. Подмножество $M \subset V$ называется линейным подпространством линейного пространства V, если оно само является линейным пространством относительно операции сложения элементов и умножения элемента на число.

Замечание. Подмножество $M \subset V$ есть линейное подпространство в линейном пространстве V тогда и только тогда, когда
1) $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in M \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \in M$
2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall\ \bar{a} \in M \Rightarrow \lambda\bar{a} \in M$

Замечание. Подмножество $M \subset V$ есть линейное подпространство в линейном пространстве V тогда и только тогда, когда
$\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in M$ и $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in M$

Линейная оболочка

Пусть $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m\}$ − система векторов линейного пространства V.

Определение. Линейной оболочкой системы векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m\}$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов.

Обозначение. $L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$ − линейная оболочка системы векторов $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m\}$.

Таким образом,

$$L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) = \{\bar{u} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m; \lambda_i \in \mathbb{R}; i = 1, \dots, m\}$$

Теорема. Если $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m$ − векторы линейного пространства V, то $L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$ является линейным подпространством пространства V.

Теорема вытекает из определения линейного подпространства.

Теорема. Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пространства. Линейное подпространство той же размерности, что и все пространство, совпадает с пространством.

Доказательство.

Первая часть формулировки теоремы очевидна.

Пусть M – линейное подпространство в линейном пространстве V $\Rightarrow M \subset V$.

Пусть $\dim M = \dim V = n$.

Возьмем в M линейно независимую систему векторов $\Sigma = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$. Система векторов Σ является базисом для обоих пространств M и V.

$$\Rightarrow \ \forall \bar{u} \in V \Rightarrow \bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n \Rightarrow \ \bar{u} \in M$$

$$\Rightarrow V \subset M \Rightarrow M = V$$

ч.т.д.

Теорема. Если $\bar{x} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m$, то

$$L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) = L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m).$$

Доказательство.

Очевидно, что $L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) \subset L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$

$$\forall \bar{v} \in L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \alpha_0\bar{x} + \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \dots + \alpha_m\bar{u}_m =$$

$$= \alpha_0(\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_m\bar{u}_m) +$$

$$+\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \dots + \alpha_m\bar{u}_m =$$

$$= \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 + \dots + \beta_m\bar{u}_m \in L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$$

$$\Rightarrow L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) \subset L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$$

$\Rightarrow L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) = L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m)$

ч.т.д.

Определение. Система $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m\}$ называется системой образующих линейного пространства V, если ее линейная оболочка совпадает с пространством: $L(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m) = V$.

Теорема. *(Теорема Штейница)*.

Пусть $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_m\}$ – система образующих линейного пространства V и $\Sigma_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ \dots, \bar{v}_n\}$ – линейно независимая система в пространстве V. Тогда

1) $m \geq n$

2) какие-то n векторов системы Σ можно заменить на векторы системы Σ_1 так, что полученная система останется системой образующих пространства V.

Теорема. Любая линейно независимая система образующих линейного пространства V является его базисом.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ линейно независимая система образующих пространства V. Покажем, что $\dim V = n$.

В пространстве V существует n линейно независимых векторов. Покажем, что любые n+1 векторов линейно зависимы.

Берем любую систему из n+1 вектора $\Sigma = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \dots, \bar{u}_{n+1}\}$. Предположим, что Σ $-$ линейно независима.

Но т.к. $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ система образующих пространства $V \Rightarrow$ по теореме Штейница $n \geq n + 1$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \Sigma$ $-$ линейно зависима

$\Rightarrow \dim V = n$ и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ базис в V

ч.т.д.

Второе определение базиса

Определение. $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ базис в линейном пространстве V, если

1) $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ линейно независима;

2) $\mathrm{L}(\mathcal{B}) = V$, т.е. $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ система образующих пространства V.

Определение базиса, удобное для решения задач

Определение. $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n\}$ $-$ базис в линейном пространстве V, если

1) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots, \bar{e}_n$ $-$ линейно независимы;

2) $\forall\, \bar{x} \in V \ \Rightarrow \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$.

Пример. Пусть $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $-$ линейное пространство матриц размера 2×2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, где $M = \left\{X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$. Доказать, что $M -$ линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Найти базис и размерность пространства M.

Решение.

1) Докажем, что $M -$ линейное подпространство в $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1+b_1+c_1 \end{pmatrix}$

Тогда $\forall\, X, Y \in M$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in M$

$\Rightarrow M -$ линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2) Найдем базис и размерность пространства M.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

а) Рассмотрим векторы (матрицы):

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 =$$

$$= \lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ $-$ линейно независимы

б) $\forall\, X \in M \Rightarrow X = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} -$ базис в M

$$\Rightarrow \dim M = 3$$