Лекция 7

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение. Пусть $\hat{A}: V \to V$ – линейный оператор в линейном пространстве V. Ненулевой вектор $\bar{x} \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\hat{A}$, соответствующим *собственному значению* λ, если $\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ (7.1) (т.е. если при действии оператора $\hat{A}$ вектор $\bar{x}$ переходит сам в себя, в λ раз растянутый).

Замечание. (краткое определение). Если $\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}, \bar{x} \neq \bar{o}$, то $\bar{x}$ – *собственный вектор* оператора $\hat{A}$ с *собственным значением* λ.

Примеры.

1) $\hat{A}: V^3 \to V^3, \bar{a} \neq \bar{o}$ – фиксированный вектор; $\hat{A}\bar{x} = [\bar{x}, \bar{a}]$.
$\hat{A}\bar{a} = [\bar{a}, \bar{a}] = \bar{o} = 0 \cdot \bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{a}$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda = 0$.

2) Для оператора $\hat{P}: V^3 \to V^3$ проектирования на плоскость Q любой ненулевой вектор $\bar{x} \parallel Q$ будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$, т.к. $\hat{P}\bar{x} = \bar{x}$; а любой ненулевой вектор $\bar{y} \perp Q$ будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$, т.к. $\hat{P}\bar{y} = \bar{o}$.

3) $\hat{A}: V^2 \to V^2$; $\hat{A}$ – оператор поворота на угол $\varphi = 15°$ – не имеет ни одного собственного вектора, т.к. ни один ненулевой вектор после такого поворота не останется коллинеарным самому себе.

Пример. $\hat{A}: V^3 \to V^3$ – оператор зеркального отражения относительно плоскости Q.

Рассмотрим три вектора: $\bar{e}_1 \perp Q;\ \bar{e}_2 \parallel Q;\ \bar{e}_3 \parallel Q;\ \bar{e}_2 \nparallel \bar{e}_3$.

$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – базис в V^3, т.к. векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ линейно независимы (т.к. они не компланарны). Кроме того, $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – собственный базис, т.к.

$$\hat{A}\bar{e}_1 = -\bar{e}_1 = -1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3$$
$$\hat{A}\bar{e}_2 = \bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3$$
$$\hat{A}\bar{e}_3 = \bar{e}_3 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть $\hat{A}: V \to V$ – линейный оператор и $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ – базис в линейном пространстве V.

Пусть $\bar{x}$ – собственный вектор оператора $\hat{A}$ с собственным значением λ, т.е. $\bar{x} \neq \bar{o}$ и $\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ (7.2).

Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Пусть $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Тогда

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

(7.3) – равенство (7.2) в матричном виде.

Из (7.3) $\Rightarrow$ $(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O \qquad (7.4)$

(7.4) – система линейных однородных уравнений.

Нужно найти ненулевое решение системы (7.4). Система (7.4) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$rang(A - \lambda E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0 \quad (7.5)$$

Таким образом, для того, чтобы линейный оператор $\hat{A}$ имел собственный вектор $\bar{x}$ с собственным значением λ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (7.5). Запишем равенство (7.5) подробнее:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.6)$$

Определитель в равенстве (7.6) представляет собой многочлен степени n от λ. Его называют *характеристическим многочленом*, а равенство (7.6) называют *характеристическим уравнением*.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – корни характеристического многочлена (7.6). В силу вышесказанного $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – собственные значения линейного оператора $\hat{A}$.

Правило нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора

1) Находим собственные значения линейного оператора, т.е. решаем характеристическое уравнение (7.6).

2) Для каждого собственного значения λ_i решаем однородную систему линейных уравнений:

$$(A-\lambda_i E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.7)$$

Любое ненулевое решение системы (7.7) – собственный вектор линейного оператора $\hat{A}$, соответствующий собственному значению λ_i.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $\hat{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в каноническом базисе линейного пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^2$. Найти собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{A}$.

Решение.

1) Находим собственные значения.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)-6 = \lambda^2-9\lambda+14 = 0$$

$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 7$ – собственные значения.

2) Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы.

1. $\lambda_1 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim (1 \quad 1|0) \ \Rightarrow x_1 + x_2 = 0;\ x_2 = c; x_1 = -c$$

$$\Rightarrow X(c) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c$$

$\Rightarrow\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c$ – собственные векторы для собственного значения $\lambda_1 = 2$

2. $\lambda_2 = 7$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim (2 \quad -3|0) \quad \Rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0; x_2 = c_1; x_1 = \frac{3}{2}c_1$$

$$\Rightarrow X(c_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} c$$

$\Rightarrow\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} c$ – собственные векторы для собственного значения $\lambda_2 = 7$

Проверка.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \lambda_1 = 2;\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \lambda_2 = 7;\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Замечание.

При выполнении проверки собственные векторы можно брать без множителя c. На результат это не влияет.

Теорема. (Инвариантность характеристического многочлена и определителя матрицы линейного оператора).

Характеристический многочлен не меняется при переходе к другому базису. В любом базисе определитель матрицы линейного оператора имеет одно и то же значение.

Доказательство. Пусть $\hat{A}: V \to V$ – линейный оператор в линейном пространстве V. Пусть $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ и $\mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n\}$ – базисы в V.

Пусть A и A' – матрицы оператора $\hat{A}$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ соответственно. Тогда $A' = C^{-1}AC$, где C – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

$\Rightarrow\ |A'| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = |A|$, т.к. $|C^{-1}| \cdot |C| = 1$.

$\Rightarrow\ |A'| = |A|$.

Далее в базисе $\mathcal{B}'$ имеем:

$|A' - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| =$

$= |C^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |A - \lambda E|$ – характеристический многочлен в базисе $\mathcal{B}$

ч.т.д.

Определение. Две матрицы A и B называются *подобными*, если существует невырожденная матрица C такая, что $A = C^{-1}BC$.

Обозначение. $A \sim B$.

Следствие 1. Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

Следствие 2. $A \sim A$, т.к. $A = E^{-1}AE$.

Следствие 3. Если $A \sim B$ и $B \sim D$, то $A \sim D$.