UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
GRADUAÇÃO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
MATEMÁTICA DISCRETA

UFMG

TRABALHO PRÁTICO

FRACTAIS

Nome: Erick Henrique Campolina da Silva
Matrícula: 2016120309

BELO HORIZONTE
2023

DOCUMENTAÇÃO

Documentação do Trabalho Prático sobre Fractais, da disciplina de Matemática Discreta apresentado ao Programa de Graduação em Sistemas de Informação da Universidade Federal de Minas Gerais.

Professor: Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

BELO HORIZONTE

2023

Introdução

O Trabalho Prático é composto por 5 partes. A primeira parte será desenvolver três programas que geram os caracteres de um fractal: os dois primeiros seguindo uma regra pré-definida, de acordo com o número de matrícula, e o terceiro definido pelo aluno.

A segunda parte consta na decisão de implementação dos fractais, utilizando um método recursivo ou via arquivos.

A terceira parte será a apresentção de duas equações de recorrência para cada fractal: uma para o número de segmentos F gerados, e outra para quantidade de símbolos existentes em cada estágio.

A quarta parte consiste em apresentar a complexidade dos algoritmos considerando a notação assintótica mais precisa possível.

E a quinta e última parte é o desenho dos fractais, mostrando as imagens dos estágios e discutindo o software utilizado para o desenho.

Gerando os fractais

(i) Floco de neve onda quadrada de Von Koch

O primeiro fractal a ser desenhado é o “Floco de neve onda quadrada de Von Koch”, e foi definido pela regra apresentada no enunciado do TP:

∑ **algs. no matrícula mod 4 =** 2 + 0 +1 + 6 + 1 + 2 + 0 + 3 + 0 + 9 mod 4
∑ **algs. no matrícula mod 4 =** 24 mod 4 = 0.

Axioma:	F
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regra:	F → F-F+F+FF-F-F+F

Figura 1 - Definição do Fractal 1

```
char axiomChar = 'F';
int axiomDegree = 90;
char rule[] = "F-F+F+FF-F-F+F";
int phase = 4;
```

Figura 2 - Variáveis de definição do programa 1

Temos 4 variáveis no nosso primeiro programa para definir o fractal. Temos o axioma, o ângulo teta, a regra e o número do estágio que queremos gerar.

```
14  for (int i = 0; i <= phase; i++)
15  {
16    if (i == 0)
17    {
18      previousFilePointer = fopen("result_file_one.txt", "w");
19
20      fputc(axiomChar, previousFilePointer);
21
22      fclose(previousFilePointer);
23
24      continue;
25    }
26
27    previousFilePointer = fopen("result_file_one.txt", "r");
28    currentFilePointer = fopen("intermediate_file_one.txt", "w");
29
30    while ((charBuffer = getc(previousFilePointer)) != EOF)
31    {
32      if (charBuffer == 'F')
33      {
34        fputs(rule, currentFilePointer);
35      }
36      else
37      {
38        fputc(charBuffer, currentFilePointer);
39      }
40    };
41
42    fclose(previousFilePointer);
43    fclose(currentFilePointer);
44
45    remove("result_file_one.txt");
46    rename("intermediate_file_one.txt", "result_file_one.txt");
47  }
48
49  return 0;
```

Figura 3 - Implementação do programa 1

Utilizei a implementação via arquivos (que será discutida na sessão 2). Temos um *for*, que irá fazer a iteração para cada estágio. O primeiro estágio consiste apenas na escrita do axioma no arquivo intermediário. Para as próximas iterações, nós lemos um arquivo de resultado da etapa anterior (chamado de “result_file_one.txt”), e fazemos algumas verificações: se lermos o char F, escrevemos a regra no arquivo intermediário (chamado “intermediate_file_one.txt”), se não escrevemos o próprio caracter, que será um + ou -. Ao final disso, teremos o resultado gerado no arquivo intermediário. Então renomeamos esse arquivo para o nome de arquivo de resultado. Esse arquivo será o resultado definitivo se estivermos na última iteração, ou será o resultado da iteração corrente para calcular estágios futuros.

(ii) Preenchimento de espaço de Peano

O segundo fractal a ser desenhado é o ”Preenchimento de espaço de Peano", definido pela regra apresentada no enunciado do TP (número de matrícula ímpar).

Axioma:	X
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regras:	X $\rightarrow$ XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX
	Y $\rightarrow$ YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY

Figura 4 - Definição do Fractal 2

```
char axiomChar = 'X';
int axiomDegree = 90;
char ruleX[] = "XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX";
char ruleY[] = "YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY";
int phase = 4;
```

Figura 5 - Variáveis de definição do programa 2

Temos 5 variáveis no nosso segundo programa para definir o fractal. Temos o axioma, o ângulo teta, as regras (para X e Y), e o número do estágio que queremos gerar.

```
15  for (int i = 0; i <= phase; i++)
16  {
17    if (i == 0)
18    {
19      previousFilePointer = fopen("result_file_two.txt", "w");
20
21      fputc(axiomChar, previousFilePointer);
22
23      fclose(previousFilePointer);
24
25      continue;
26    }
27
28    previousFilePointer = fopen("result_file_two.txt", "r");
29    currentFilePointer = fopen("intermediate_file_two.txt", "w");
30
31    while ((charBuffer = getc(previousFilePointer)) != EOF)
32    {
33      if (charBuffer == 'X')
34      {
35        fputs(ruleX, currentFilePointer);
36      }
37      else if (charBuffer == 'Y')
38      {
39        fputs(ruleY, currentFilePointer);
40      }
41      else
42      {
43        fputc(charBuffer, currentFilePointer);
44      }
45    };
46
47    fclose(previousFilePointer);
48    fclose(currentFilePointer);
49
50    remove("result_file_two.txt");
51    rename("intermediate_file_two.txt", "result_file_two.txt");
52  }
```

Figura 6 - Implementação do programa 2

A implementação do programa 2 é bem semelhante ao programa 1, porém temos aqui duas regras. Na primeira iteração escrevemos apenas o axioma, e após isso vamos passando pelos caracteres dos arquivos na fase seguinte. Se eu encontrar

um caracter X, escrevo a regra do X, e a mesma coisa para o caracter Y. Ao final disso, teremos o resultado gerado, porém com os caracteres Y e X na string.

```
54    previousFilePointer = fopen("result_file_two.txt", "r");
55    currentFilePointer = fopen("intermediate_file_two.txt", "w");
56
57    while ((charBuffer = getc(previousFilePointer)) != EOF)
58    {
59      if (charBuffer != 'X' && charBuffer != 'Y')
60      {
61        fputc(charBuffer, currentFilePointer);
62      }
63    };
64
65    fclose(previousFilePointer);
66    fclose(currentFilePointer);
67
68    remove("result_file_two.txt");
69    rename("intermediate_file_two.txt", "result_file_two.txt");
```

Figura 7 - Implementação da limpeza de caracteres do programa 2

Essa é a última etapa do programa 2, que ao final da computação dos caracteres, realiza a limpeza dos X's e Y's do arquivo. Então tenho um *if* que me ajuda a escrever apenas os caracteres que não são X nem Y, ou seja, os caracteres F, + ou -, obtendo o resultado final.

(iii) Fractal definido pelo aluno

O terceiro fractal foi definido por mim com a seguinte regra:

Axioma: X
θ: π/4
Regras:
X -> XFY+F+YFX-F-XFY
Y -> YFX-F-XFY+F+YFX

```
char axiomChar = 'X';
int axiomDegree = 45;
char ruleX[] = "XFY+F+YFX-F-XFY";
char ruleY[] = "YFX-F-XFY+F+YFX";
int phase = 4;
```

Figura 8 - Variáveis de definição no programa 3

A implementação do programa 3 é idêntica ao programa 2, porém temos o ângulo teta e as regras de X e Y diferentes. Não temos muito o que discutir aqui. O desenho desse fractal será apresentado na quinta parte.

Estratégia de implementação

A estratégia utilizada foi a iterativa, gravando os estágios intermediários em arquivos texto. Essa estratégia foi escolhida devido à facilidade de implementação. Um ponto negativo dessa estratégia é o custo referente à leitura e escrita de arquivos, sendo uma operação mais lenta que acessar esses dados em memória.

A versão recursiva é interessante, porém é mais difícil de implementar devido à grande possibilidade de ocorrência de estouro de memória, sendo que a cadeia de caracteres para gerar os fractais pode vir a ser bem grande. Seria necessário implementar alocação dinâmica desses dados. Um ponto positivo dessa estratégia seria a velocidade, não tendo o custo de leitura e escrito em arquivo.

Equações de recorrência

(i) Floco de neve onda quadrada de Von Koch

A Tabela 1 mostra a sequência de caracteres (string) dos estágios iniciais do fractal de floco de neve onda quadrada Von Koch:

Estágio	Sequência de caracteres
1	F-F+F+FF-F-F+F
2	F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F
3	F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F +FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF- F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F- F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+ F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF -F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+ F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F -F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+ F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F+F

4	F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF- F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F- F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+ F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF -F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+ F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F -F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+ F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+ F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F +FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F- F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F +F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F- F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+ F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F -F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+ F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F -F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F +F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+F F-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F +FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F- F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F- F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+ F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+ FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF -F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F- F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F +FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F- F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+ F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+ FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF- F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F +F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F- F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F

	F-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF- F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F +F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F +F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF- F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+ F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F- F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+ F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+ F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F +F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F +FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF- F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F +F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F +F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F- F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+ F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+ FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F- F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F -F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F- F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F +F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+F F-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F +F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F- F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F- F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+ F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+ FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF- F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F +F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+ FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F -F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+ F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+F F-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F -F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F +F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F +F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F- F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F +F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F +FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF -F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F- F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+

	F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+FF-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F+F-F+F+FF-F-F+F

Tabela 1: Sequência de caracteres (string) dos primeiros estágios do fractal de floco de neve onda quadrada de Von Koch

n	#F	#Símbolos
1	8	14
2	64	118
3	512	950
4	4096	7606

Tabela 2: Número de segmentos F e símbolos por estágio

A partir dos dados das tabelas, obtemos as equações de recorrência para calcular os segmentos F gerados e a quantidade de símbolos existente para cada estágio:

Número de segmentos: $T(n) = 8 * T(n-1)$, para $n > 0$
$T(0) = 1$, para $n = 0$

Número de símbolos: $T(n) = 8 * T(n-1) + 6$, para $n > 0$
$T(0) = 1$, para $n = 0$

(ii) Preenchimento de espaço de Peano

A Tabela 3 mostra a sequência de caracteres (string) dos estágios iniciais do fractal de preenchimento de espaço de Peano:

Estágio	Sequência de caracteres
1	FF+F+FF-F-FF
2	FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF

3	FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF +F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+ F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF -F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF

4	FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF +F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+ F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF -F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF FFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF FFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF -F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF- F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-F F+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF +F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F +FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF -F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF +F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+ F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF -F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF +F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+ F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF -F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F +FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF -F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F- FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F

	+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F +FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFF FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF FFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF +F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+ FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF +F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF- F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F -FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F +FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF -F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F +FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+ FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF -F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+ FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF -F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF -F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFF F+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F +FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+F F-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF- F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+ F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+F F-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF- F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F- FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-F

	FFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF- F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F +FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+F FFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF- F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F- FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+ F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+ FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F -FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F -FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFF F+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F +FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+F F-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F- FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF +F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+ F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFF F-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+F F-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F- FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF +F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFF FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF -F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF +F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F +FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+F F-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFF FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFF FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+ FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF -F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-F F+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-F FFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FFFFF+F +FF-F-FFFFF-F-FF+F+FF-F-FF+F+FF-F-FFFFF-F-FF+F+FFFFF+F+FF-F-FF

Tabela 3: Sequência de caracteres (string) dos primeiros estágios do fractal de preenchimento de espaço de Peano

n	#F	#Símbolos
1	8	12
2	80	120
3	728	1092
4	6560	9840

Tabela 4: Número de segmentos F e símbolos por estágio

A partir dos dados das tabelas, obtemos as equações de recorrência para calcular os segmentos F gerados e a quantidade de símbolos existente para cada estágio:

Número de segmentos: $T(n) = 9 * T(n-1) + 8$, para $n > 0$
$T(0) = 0$, para $n = 0$

Número de símbolos: $T(n) = 9 * T(n-1) + 12$, para $n > 0$
$T(0) = 0$, para $n = 0$

(iii) Fractal definido pelo aluno

A Tabela 5 mostra a sequência de caracteres (string) dos estágios iniciais do fractal definido pelo aluno:

Estágio	Sequência de caracteres
1	F+F+F-F-F
2	F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F
3	F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F

4	F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+ F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F +F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+ F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F +F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+ F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+ F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F- F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+ F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F -F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F -F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F- F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F- F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F- F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F- F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F- FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+ F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FF F-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F +F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF- F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F- F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+ F+F-F-F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+ F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F -F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F +F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+ F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F -F-FFF-F-F+F+F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+ F+FFF-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F+F+F-F-F+ F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-FFF+F+F-F-FFF-F-F+F+ F+F+F-F-F+F+FFF+F+F-F-F-F-F+F+F-F-FFF-F-F+F+F

Tabela 5: Sequência de caracteres (string) dos primeiros estágios do fractal definido pelo aluno

n	#F	#Símbolos
1	5	9
2	35	63
3	215	387
4	1295	2331

Tabela 6: Número de segmentos F e símbolos por estágio

A partir dos dados das tabelas, obtemos as equações de recorrência para calcular os segmentos F gerados e a quantidade de símbolos existente para cada estágio:

Número de segmentos: $T(n) = 6 * T(n-1) + 5$, para $n > 0$
$T(0) = 0$, para $n = 0$

Número de símbolos: $T(n) = 6 * T(n-1) + 9$, para $n > 0$
$T(0) = 0$, para $n = 0$

Complexidade dos algoritmos

Para o algoritmo recursivo não existirá melhor ou pior caso. Sempre será gerado um número fixo de segmentos para um mesmo n, independente de como está disposta a entrada. Então temos limites superiores e inferiores firmes, fazendo com que a notação Θ seja a mais adequada.

Fórmula fechada (i): $T(n) = (8^n)$
Complexidade (i): $T(n) = Θ(8^n)$

Fórmula fechada (ii): $T(n) = (9^n) - 1$
Complexidade (ii): $T(n) = Θ(9^n)$

Fórmula fechada (iii): $T(n) = (6^n) - 1$
Complexidade (iii): $T(n) = Θ(6^n)$

Desenho do fractal

A biblioteca utilziada para implementação do desenho do fractal 3, foi a biblioteca gratuita Simple DirectMedia Layer (SDL). Ela é uma biblioteca multiplataforma (Windows, Linux, macOS, Android, iOS, etc.), escrita em C, para aplicações multimídia e provê funções para gerenciar vídeo, áudio, controle, entre outras. Foi criada em 1998 (25 anos).

As instruções para desenhar os fractais estão no arquivo “leiame.txt” porém irei comentar a implementação do programa “drawer.c”. A biblioteca SDL2 cria uma janela, onde eu consigo desenhar retas. Basicamente, estou desenhando essas retas entre os pontos de origem e destino. Utilizo a biblioteca “math.h” para calculator seno e cosseno de acordo com os símbolos + ou - encontrados no fractal gerado, e o ângulo teta definido. Dessa forma consigo movimentar meus pontos e desenhar retas entre eles, gerando os desenhos que se seguem:

Figura 9 - Fractal III - Estágio I

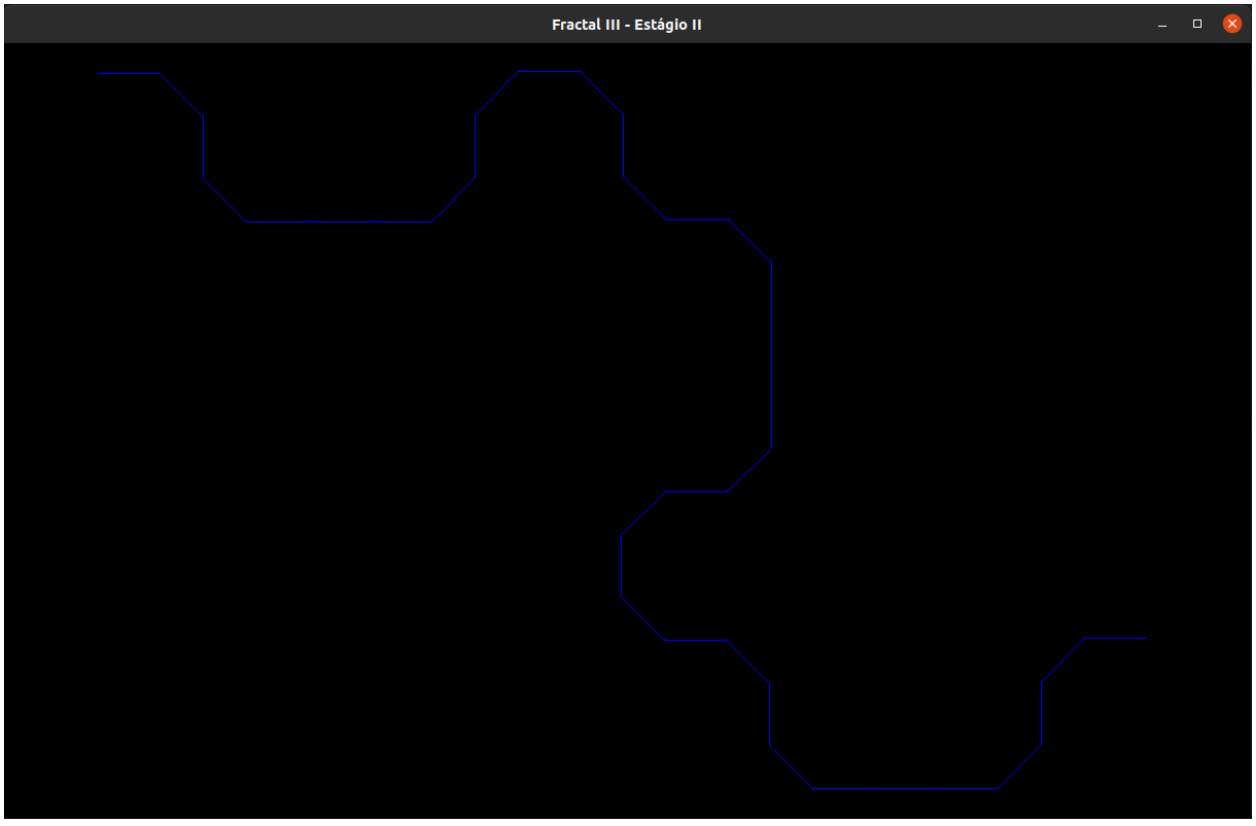

Figura 10 - Fractal III - Estágio II

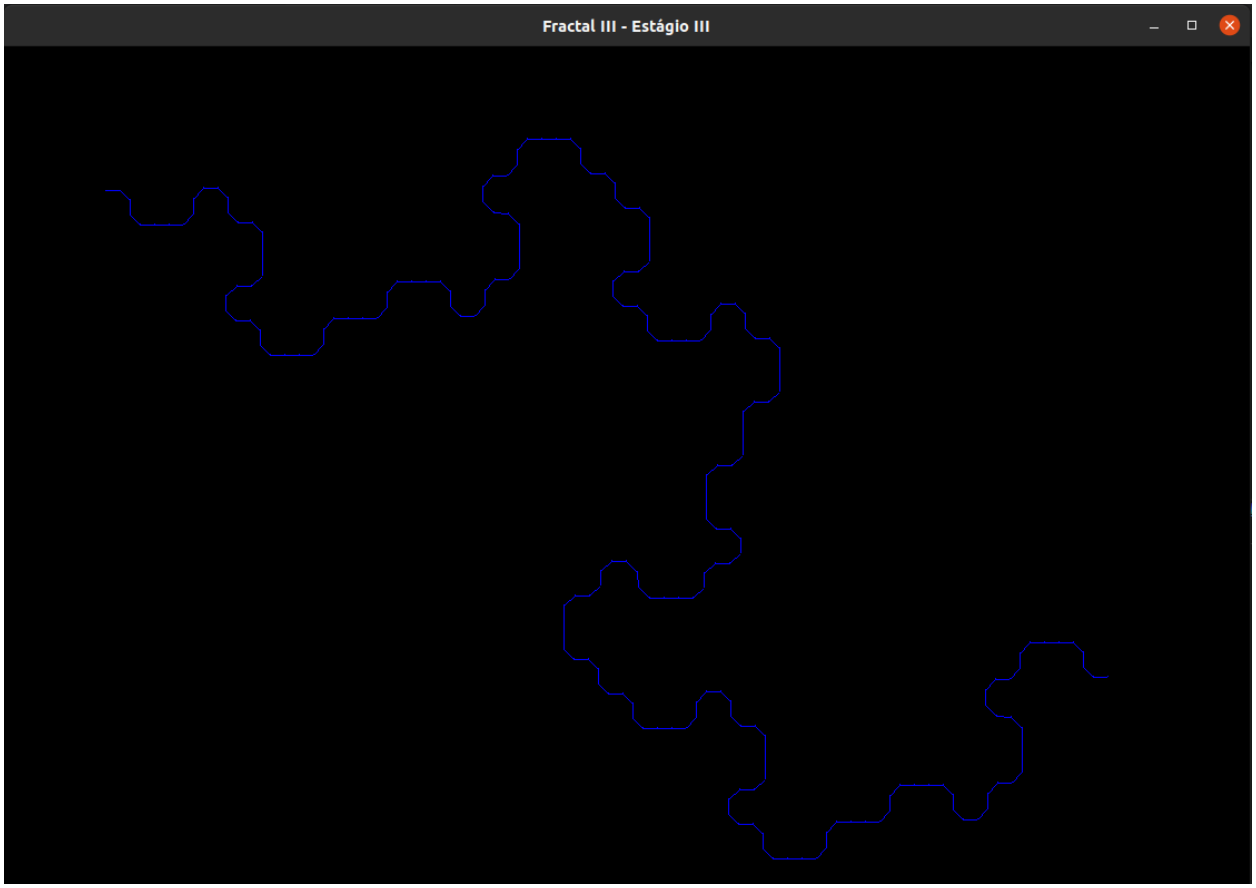

Figura 11 - Fractal III - Estágio III

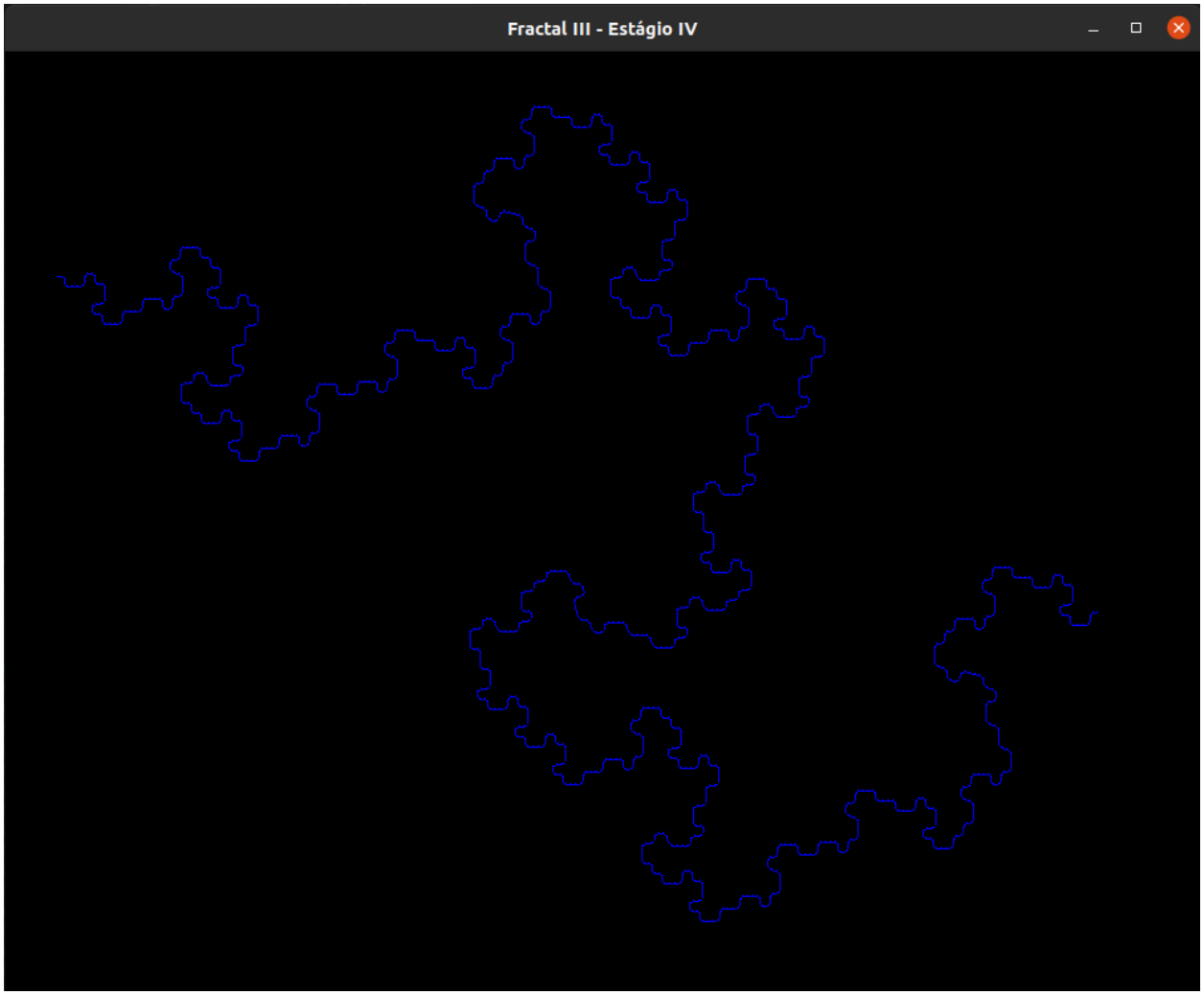

Figura 12 - Fractal III - Estágio IV

Conclusão

O Trabalho Prático desenvolvido nessa documentação compriu de formata efetiva as 5 etapas propostas. Passamos pela implementação dos três fractais propostos, discutindo prós e contras da estratégia utilizada. Escolhemos a estratégia de iteração utilizando arquivos.

Apresentamos as duas equações de recorrência para cada um dos fractais: uma para o número de segmentos F gerados, e outra para quantidade de símbolos existentes em cada estágio. Explicitamos também a complexidade dos algoritmos, utilizando a notação assintótica mais precisa possível.

E finalmente, desenhamos o fractal proposto número 3, utilizando a biblioteca gratuita SDL. A implementação do desenho foi discutida também.

Referências Bibliográficas

ROCHA, Rodrigo. SDL. Disciplinas UFBA, 2018. Disponível em: <https://rodrigorgs.github.io/aulas/mata37/sdl>. Acesso em: 06, junho e 2023.