METODO SIMPLEX

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

RESUMEN METODO SIMPLEX

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso de maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que máx z equivale a mín $(-z)$. En cuanto a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila z. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la relación mínima no negativa con el denominador *estrictamente positivo.* Los vínculos se rompen arbitrariamente.

RESUMEN METODO SIMPLEX

Operaciones de filas de Gauss-Jordan

1. *Fila pivote*

- **a.** Reemplace la variable de entrada en la columna *Básica* con la variable de entrada.
- **b.** Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todas las demás filas, incluida la z*
Nueva fila = (Fila actual) − (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nueva fila pivote).

Los pasos del método simplex son

Paso 0. Determine la solución factible básica inicial.

Paso 1. Seleccione una *variable de entrada* utilizando la condición de optimalidad. Deténgase si no hay variable de entrada; la última condición es óptima. De otro modo, prosiga con el paso 2.

Paso 2. Seleccione una *variable de salida* utilizando la condición de factibilidad.

Paso 3. Aplique los cálculos de Gauss-Jordan para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1.

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL

La programación lineal en las que todas las restricciones son (≤) con los lados derechos no negativos ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones (=) o (≥) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar las programaciones lineales de ¨mal comportamiento¨ con restricciones (=) o (≥) es utilizar variables artificiales que desempeñan el papel de las holguras en la primera iteración, y que luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: El método M, y el método de las dos fases.

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M

El método M, una de las técnicas de programación lineal mas antiguas, nunca se utiliza en códigos comerciales debido a su inherente error de redondeo. En su lugar se prefiere el método de las dos fases. Sin embargo, el uso de penalizaciones, como lo anticipa el método M, es un importante concepto en muchas instancias de modelado.

El método M se inicia con la programación lineal en forma de ecuación. Si la ecuación i no tiene holgura (o variable que pueda desempeñar el papel de una), se agrega una variable artificial, Ri, para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere de un artificio de modelado para igualarlas a cero en el momento que se alcance la iteración optima (suponiendo que el problema tenga solución factible). La meta deseada se logra penalizando estas variables en la función objetivo utilizando la siguiente regla:

Regla de penalización para variables artificiales

Dado M, un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente ($M \to \infty$), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** apropiada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

Si utilizamos x_3 como variable de superávit en la segunda restricción y x_4 como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\quad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, x_4, pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y las penalizamos en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + R_1 \qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica inicial es $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$

Desde un punto de vista de cálculo, la solución del problema con la computadora requiere que reemplace M con un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, incluidas las siete ediciones de este libro, M se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad agregada innecesaria la cual puede evitarse sustituyendo

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

un valor numérico apropiado en lugar de M (lo que de cualquier modo tenemos que hacer cuando usamos la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar M algebraicamente y utilizar una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de M debemos utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización M debe ser lo bastante grande *con respecto a los coeficientes objetivos originales* para forzar a las variables originales a ser cero en la solución óptima. Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PLs, no es conveniente que M sea innecesariamente grande ya que ello nos puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de x_1 y x_2 son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer $M = 100$.[5]

Utilizando $M = 100$, la tabla simplex de inicio se da como sigue (por comodidad, la columna z se elimina porque no cambia en todas las iteraciones):

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila z debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila z en la tabla en este momento muestra $z = 0$. Sin embargo, dada la solución no básica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la solución básica actual es $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$, la cual da $z = 100 \times 3 + 100 \times 6 + 4 \times 0 = 900$. Esta inconsistencia se deriva del hecho de que los coeficientes de R_1 y R_2 no son cero $(-100, -100)$ en la fila z (compare con la solución de inicio de total holgura en el ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes en la fila z de las holguras son cero).

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M
CASO PRACTICO

Para eliminar la inconsistencia, tenemos que sustituir R_1 y R_2 en la fila z por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (100 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

(Convénzase de que esta operación es la misma que sustituir $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ y $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$ en la fila z.)

Por tanto, la tabla modificada (¡compruébelo!) es:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	696	399	−100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO M CASO PRACTICO

El resultado es que R_1 y R_2 ahora se sustituyen (tienen coeficientes cero) en la fila z con $z =$ 900, como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex, tal como se explicó en la sección 3.3.2. Dado que la función objetivo se minimiza, la variable x_1 que tiene el coeficiente más *positivo* en la fila z (=696) entra en la solución. La relación mínima de la condición de factibilidad especifica a R_1 como la variable de salida (¡compruébelo!).

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las conocidas operaciones de Gauss-Jordan.

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	0	167	−100	−232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	−1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que x_1 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $z = \frac{17}{5}$ (¡compruébelo con TORA!).

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

Método de dos fases

En el método M, el uso de la penalización, M, puede conducir a un error de redondeo. El método de dos fases elimina el uso de la constante M. Como su nombre lo indica, el método resuelve la PL en dos fases; en la fase I se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Resumen del método de dos fases

Fase I. Ponga el problema en forma de ecuación y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones (exactamente como en el método M), para tener la certeza de una solución básica. A continuación, determine una solución básica de la ecuación resultante que *siempre* minimice la suma de las variables artificiales, independientemente de si la PL es de maximización o minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, si el valor mínimo es cero, prosiga con la fase II.

Fase II. Use la solución factible de la fase I como una solución factible básica inicial para el problema *original*.

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si utilizamos x_3 como variable de superávit en la segunda restricción y x_4 como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, x_4, pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y las penalizamos en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + R_1 \qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

Fase I

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + R_1 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

La tabla asociada es

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M, R_1 y R_2 se sustituyen en la fila r mediante las siguientes operaciones de filas:

$$\text{Nueva fila } r = \text{Anterior fila } r + (1 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

La nueva fila r se utiliza para resolver la fase I del problema, la cual da por resultado la siguiente tabla óptima (compruébelo con la opción Iterations ⇒ Two fase Method): de TORA:

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	-1	1	1

Como el mínimo $r = 0$, la fase I produce la solución factible básica $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ y $x_4 = 1$. En este punto, las variables artificiales ya completaron su misión, y podemos eliminar sus columnas de la tabla y continuar con la fase II.

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

Fase II

Después de eliminar las columnas artificiales, escribimos el problema *original* como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 &= \tfrac{3}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 &= \tfrac{6}{5} \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En esencia, la fase I ha transformado las ecuaciones de restricciones originales de tal forma que proporciona una solución factible básica inicial para el problema, si es que existe una. La tabla asociada con la fase II del problema es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

SOLUCION ARTIFICIAL INICIAL, METODO 2 FASES CASO PRACTICO

Una vez más, como las variables básicas x_1 y x_2 tienen coeficientes diferentes a cero en la fila z, deben ser sustituidas, mediante las siguientes operaciones.

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (4 \times \text{fila } x_1 + 1 \times \text{fila } x_2)$$

La tabla inicial de la fase II es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Como estamos minimizando, x_3 debe entrar en la solución. La aplicación del método simplex producirá el óptimo en una iteración (compruébelo con TORA).