

# Manual do Programador Competitivo

Antti Laaksonen

Rascunho de 19 de Agosto de 2019

Versão da tradução: v1.3



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>Nota da Tradução</b>	<b>xi</b>
<b>I Técnicas básicas</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
1.1 Linguagens de programação . . . . .	3
1.2 Entrada e saída . . . . .	4
1.3 Trabalhando com números . . . . .	6
1.4 Encurtando código . . . . .	8
1.5 Matemática . . . . .	10
1.6 Competições e recursos . . . . .	15
<b>2 Complexidade de tempo</b>	<b>19</b>
2.1 Regras de cálculo . . . . .	19
2.2 Classes de complexidade . . . . .	22
2.3 Estimar a eficiência . . . . .	23
2.4 Soma máxima de subvetor . . . . .	24
<b>3 Ordenação</b>	<b>27</b>
3.1 Teoria da ordenação . . . . .	27
3.2 Ordenação em C++ . . . . .	32
3.3 Busca binária . . . . .	34
<b>4 Estruturas de Dados</b>	<b>39</b>
4.1 Vetores Dinâmicos . . . . .	39
4.2 Estruturas de Conjunto . . . . .	41
4.3 Estruturas de Mapa . . . . .	42
4.4 Iteradores e Intervalos . . . . .	43
4.5 Outras Estruturas . . . . .	46
4.6 Comparação com Ordenação . . . . .	50
<b>5 Busca completa</b>	<b>53</b>
5.1 Gerando subconjuntos . . . . .	53
5.2 Gerando permutações . . . . .	55
5.3 Backtracking . . . . .	56

5.4	Podando a busca . . . . .	58
5.5	Encontro no meio . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Algoritmos gulosos</b>	<b>63</b>
6.1	Problema das moedas . . . . .	63
6.2	Escalonamento . . . . .	64
6.3	Tarefas e prazos . . . . .	66
6.4	Minimizando somas . . . . .	67
6.5	Compressão de dados . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Programação dinâmica</b>	<b>71</b>
7.1	Problema das moedas . . . . .	71
7.2	Maior subsequência crescente . . . . .	76
7.3	Caminhos em uma grade . . . . .	77
7.4	Problemas da mochila . . . . .	79
7.5	Distância de edição . . . . .	80
7.6	Contando os ladrilhos . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Análise amortizada</b>	<b>85</b>
8.1	Método dos dois ponteiros . . . . .	85
8.2	Elementos menores mais próximos . . . . .	87
8.3	Mínimo da janela deslizante . . . . .	89
<b>9</b>	<b>Consultas de intervalo</b>	<b>91</b>
9.1	Consultas de vetor estático . . . . .	92
9.2	Árvore binária indexada . . . . .	94
9.3	Árvore de segmentos . . . . .	97
9.4	Técnicas adicionais . . . . .	101
<b>10</b>	<b>Manipulação de bits</b>	<b>103</b>
10.1	Representação de bits . . . . .	103
10.2	Operações de bits . . . . .	104
10.3	Representando conjuntos . . . . .	106
10.4	Otimizações de bits . . . . .	108
10.5	Programação dinâmica . . . . .	110
<b>II</b>	<b>Algoritmos de grafos</b>	<b>115</b>
<b>11</b>	<b>Conceitos básicos sobre grafos</b>	<b>117</b>
11.1	Terminologia de grafos . . . . .	117
11.2	Representação de grafos . . . . .	121
<b>12</b>	<b>Travessia de Grafos</b>	<b>125</b>
12.1	Busca em Profundidade . . . . .	125
12.2	Busca em Largura . . . . .	127
12.3	Aplicações . . . . .	129

<b>13 Caminhos mínimos</b>	<b>133</b>
13.1 Algoritmo de Bellman–Ford . . . . .	133
13.2 Algoritmo de Dijkstra . . . . .	136
13.3 Algoritmo de Floyd–Warshall . . . . .	139
<b>14 Algoritmos em Árvores</b>	<b>143</b>
14.1 Travessia de Árvore . . . . .	144
14.2 Diâmetro . . . . .	145
14.3 Todos os Caminhos Mais Longos . . . . .	147
14.4 Árvores Binárias . . . . .	149
<b>15 Árvores geradoras</b>	<b>151</b>
15.1 Algoritmo de Kruskal . . . . .	152
15.2 Estrutura Union-Find . . . . .	155
15.3 Algoritmo de Prim . . . . .	157
<b>16 Grafos direcionados</b>	<b>161</b>
16.1 Ordenação topológica . . . . .	161
16.2 Programação dinâmica . . . . .	163
16.3 Caminhos sucessores . . . . .	166
16.4 Detecção de ciclo . . . . .	167
<b>17 Conectividade forte</b>	<b>169</b>
17.1 Algoritmo de Kosaraju . . . . .	170
17.2 Problema 2SAT . . . . .	172
<b>18 Consultas em Árvores</b>	<b>175</b>
18.1 Encontrando Ancestrais . . . . .	175
18.2 Subárvores e Caminhos . . . . .	176
18.3 Ancestral Comum Mais Baixo . . . . .	179
18.4 Algoritmos Offline . . . . .	182
<b>19 Caminhos e circuitos</b>	<b>187</b>
19.1 Caminhos Eulerianos . . . . .	187
19.2 Caminhos Hamiltonianos . . . . .	191
19.3 Sequências de De Bruijn . . . . .	192
19.4 Passeio do Cavalo . . . . .	193
<b>20 Fluxos e cortes</b>	<b>195</b>
20.1 Algoritmo de Ford–Fulkerson . . . . .	196
20.2 Caminhos disjuntos . . . . .	200
20.3 Emparelhamentos Máximos . . . . .	201
20.4 Coberturas por Caminhos . . . . .	205

<b>III</b>	<b>Tópicos avançados</b>	<b>209</b>
<b>21</b>	<b>Teoria dos Números</b>	<b>211</b>
21.1	Primos e Fatores . . . . .	211
21.2	Aritmética Modular . . . . .	215
21.3	Resolvendo Equações . . . . .	218
21.4	Outros Resultados . . . . .	219
<b>22</b>	<b>Combinatória</b>	<b>221</b>
22.1	Coeficientes Binomiais . . . . .	222
22.2	Números de Catalan . . . . .	224
22.3	Inclusão-Exclusão . . . . .	227
22.4	Lema de Burnside . . . . .	228
22.5	Fórmula de Cayley . . . . .	229
<b>23</b>	<b>Matrizes</b>	<b>233</b>
23.1	Operações . . . . .	233
23.2	Recorrências Lineares . . . . .	236
23.3	Grafos e Matrizes . . . . .	238
<b>24</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>241</b>
24.1	Cálculo . . . . .	241
24.2	Eventos . . . . .	242
24.3	Variáveis aleatórias . . . . .	244
24.4	Cadeias de Markov . . . . .	246
24.5	Algoritmos aleatorizados . . . . .	247
<b>25</b>	<b>Teoria dos Jogos</b>	<b>251</b>
25.1	Estados do Jogo . . . . .	251
25.2	Jogo Nim . . . . .	253
25.3	Teorema de Sprague–Grundy . . . . .	254
<b>26</b>	<b>Algoritmos de string</b>	<b>259</b>
26.1	Terminologia de string . . . . .	259
26.2	Estrutura Trie . . . . .	260
26.3	Hashing de string . . . . .	261
26.4	Algoritmo Z . . . . .	264
<b>27</b>	<b>Algoritmos de raiz quadrada</b>	<b>269</b>
27.1	Combinando algoritmos . . . . .	270
27.2	Partições de inteiros . . . . .	272
27.3	Algoritmo de Mo . . . . .	273
<b>28</b>	<b>Árvores de segmentos revisitadas</b>	<b>275</b>
28.1	Propagação preguiçosa . . . . .	276
28.2	Árvores dinâmicas . . . . .	279
28.3	Estruturas de dados . . . . .	281
28.4	Bidimensionalidade . . . . .	282

<b>29 Geometria</b>	<b>285</b>
29.1 Números Complexos . . . . .	286
29.2 Pontos e Linhas . . . . .	288
29.3 Área do Polígono . . . . .	291
29.4 Funções de Distância . . . . .	293
<b>30 Algoritmos de linha de varredura</b>	<b>295</b>
30.1 Pontos de interseção . . . . .	296
30.2 Problema do par mais próximo . . . . .	297
30.3 Problema do fecho convexo . . . . .	298
<b>Bibliografia</b>	<b>301</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>307</b>





# Prefácio

O propósito deste livro é oferecer uma introdução completa à programação competitiva. Pressupõe-se que você já conheça o básico de programação, mas não é necessário ter experiência prévia em programação competitiva.

O livro é especialmente direcionado a estudantes que desejam aprender algoritmos e, possivelmente, participar da Olimpíada Internacional de Informática (IOI) ou da Competição Internacional de Programação Universitária (ICPC). Claro, o livro também é adequado para qualquer pessoa interessada em programação competitiva.

Leva tempo para se tornar um bom programador competitivo, mas é também uma oportunidade de aprender muito. Você pode ter certeza de que adquirirá uma boa compreensão geral de algoritmos se dedicar tempo para ler o livro, resolver problemas e participar de competições.

O livro está em desenvolvimento contínuo. Você pode sempre enviar feedback sobre o livro para [ahslaaks@cs.helsinki.fi](mailto:ahslaaks@cs.helsinki.fi).

Helsinque, Agosto de 2019  
Antti Laaksonen



# Nota da Tradução

Este livro foi traduzido para o português com o intuito de oferecer um recurso acessível e compreensível para a comunidade de programação competitiva de língua portuguesa. A tradução inicial foi concluída e está disponível para a comunidade, mas o processo de aprimoramento continua.

É importante destacar que a tradução de um livro técnico é um processo complexo, e é possível que alguns erros ou imprecisões tenham passado despercebidos. Por isso, incentivamos a participação da comunidade na revisão contínua deste material. Seu feedback é essencial para garantir que esta tradução se torne um recurso cada vez mais valioso.

A versão mais recente da tradução pode ser baixada na seção **releases** do repositório do projeto no Github<sup>1</sup>.

## Contribuidores

Usuário do GitHub	Contribuição
@filipemsilv4	21 capítulos traduzidos
@natanlimaz	9 capítulos traduzidos
@fer22f	Configurações iniciais do projeto

Agosto de 2024  
Equipe de Tradução

---

<sup>1</sup>Disponível em [https://github.com/natanlimaz/cphb\\_ptbr/](https://github.com/natanlimaz/cphb_ptbr/)



# **Parte I**

## **Técnicas básicas**



# Capítulo 1

## Introdução

Programação competitiva combina dois tópicos: (1) o design de algoritmos e (2) a implementação de algoritmos.

O **design de algoritmos** consiste em solução de problemas e pensamento matemático. São necessárias habilidades para analisar problemas e resolvê-los de forma criativa. Um algoritmo para resolver um problema deve ser tanto correto quanto eficiente, e o cerne do problema muitas vezes é inventar um algoritmo eficiente.

O conhecimento teórico de algoritmos é importante para programadores competitivos. Tipicamente, uma solução para um problema é uma combinação de técnicas bem conhecidas e novas ideias. As técnicas que aparecem na programação competitiva também formam a base para a pesquisa científica de algoritmos.

A **implementação de algoritmos** requer boas habilidades de programação. Na programação competitiva, as soluções são avaliadas testando um algoritmo implementado usando um conjunto de casos de teste. Portanto, não é suficiente que a ideia do algoritmo seja correta, mas a implementação também deve ser correta.

Um bom estilo de codificação em competições é direto e conciso. Os programas devem ser escritos rapidamente, porque não há muito tempo disponível. Ao contrário da engenharia de *software* tradicional, os programas são curtos (geralmente com no máximo algumas centenas de linhas de código) e dispensam manutenção após a competição.

### 1.1 Linguagens de programação

Atualmente, as linguagens de programação mais populares usadas em competições são C++, Python e Java. Por exemplo, no Google Code Jam 2017, entre os 3.000 melhores participantes, 79% usaram C++, 16% usaram Python and 8% usaram Java [29]. Alguns participantes também usaram outras linguagens.

Muitas pessoas pensam que C++ é a melhor escolha para um programador competitivo, e o C++ está quase sempre disponível nos sistemas de competição. Os benefícios de usar C++ são ser uma linguagem muito eficiente e contar com uma biblioteca padrão com uma grande coleção de estruturas de dados e algoritmos.

Por outro lado, é bom dominar várias linguagens e entender suas forças. Por exemplo, se inteiros grandes são necessários para um problema, Python pode ser uma boa escolha, porque contém operações embutidas para cálculos com inteiros grandes. Ainda assim, a maioria dos problemas em competições de programação são definidos de forma que o uso de uma linguagem de programação específica não crie uma vantagem injusta.

Todos os exemplos de programas neste livro são escritos em C++ e as estruturas de dados e algoritmos da biblioteca padrão são frequentemente usados. Os programas seguem o padrão C++11, que pode ser usado na maioria das competições hoje em dia. Se você ainda não consegue programar em C++, agora é um bom momento para começar a aprender.

## Esboço de código em C++

Um esboço de código típico em C++ para programação competitiva se parece com isso:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    // solucao vai aqui
}
```

A linha `#include` no início do código é uma funcionalidade do compilador g++ que nos permite incluir toda a biblioteca padrão. Assim, não é necessário incluir separadamente bibliotecas como `iostream`, `vector` e `algorithm`, mas elas ficam disponíveis automaticamente.

A linha `using` declara que as classes e funções da biblioteca padrão podem ser usadas diretamente no código. Sem a linha `using`, teríamos que escrever, por exemplo, `std::cout`, mas agora basta escrever `cout`.

O código pode ser compilado usando o seguinte comando:

```
g++ -std=c++11 -O2 -Wall test.cpp -o test
```

Este comando produz um arquivo binário `test` a partir do código-fonte `test.cpp`. O compilador segue o padrão C++11 (`-std=c++11`), otimiza o código (`-O2`) e exibe avisos sobre possíveis erros (`-Wall`).

## 1.2 Entrada e saída

Na maioria das competições, comandos padrões são usados para ler a entrada e escrever a saída. Em C++, os comandos padrões são `cin` para entrada e `cout` para saída. Além disso, as funções em C `scanf` e `printf` podem ser usadas.

A entrada para o programa geralmente consiste de números e strings que são separados por espaços e novas linhas. Eles podem ser lidos pelo comando `cin` da



seguinte forma:

```
int a, b;  
string x;  
cin >> a >> b >> x;
```

Esse tipo de código sempre funciona, assumindo que há pelo menos um espaço ou uma quebra de linha entre cada elemento da entrada. Por exemplo, o código acima pode ler ambas as entradas a seguir:

```
123 456 monkey
```

```
123    456  
monkey
```

O comando `cout` é usado para saída da seguinte forma:

```
int a = 123, b = 456;  
string x = "monkey";  
cout << a << " " << b << " " << x << "\n";
```

As entradas e saídas às vezes são um gargalo no programa. As seguintes linhas no início do código **tornam as entradas e saídas mais eficientes**.

```
ios::sync_with_stdio(0);  
cin.tie(0);
```

Note que a quebra de linha `"\n"` é mais rápida do que o `endl`, porque o `endl` sempre força uma operação de *flush*.

As funções `scanf` e `printf` da linguagem C, são uma alternativa aos comandos padrões do C++. Elas são geralmente um pouco mais rápidas, mas também são mais difíceis de usar. O código seguinte lê dois números inteiros da entrada:

```
int a, b;  
scanf("%d %d", &a, &b);
```

O código seguinte imprime dois números inteiros:

```
int a = 123, b = 456;  
printf("%d %d\n", a, b);
```

Às vezes, o programa deve ler uma linha inteira da entrada, possivelmente contendo espaços. Isso pode ser feito usando a função `getline`:

```
string s;  
getline(cin, s);
```

Se a quantidade de dados for desconhecida, o seguinte laço é útil:

```
while (cin >> x) {
    // código
}
```

Este laço lê elementos da entrada um após o outro, até que não haja mais dados disponíveis na entrada.

Em alguns sistemas de competições, arquivos são usados para entrada e saída. Uma solução simples para isso é escrever o código como de costume usando comandos padrões, mas adicionar as seguintes linhas no início do código:

```
freopen("input.txt", "r", stdin);
freopen("output.txt", "w", stdout);
```

Depois disso, o programa lê a entrada do arquivo "input.txt" e escreve a saída para o arquivo "output.txt".

## 1.3 Trabalhando com números

### Inteiros

O tipo inteiro mais utilizado em programação competitiva é o `int`, que é um tipo de 32 bits com uma faixa de valores de  $-2^{31} \dots 2^{31}-1$ , ou cerca de  $-2 \cdot 10^9 \dots 2 \cdot 10^9$ . Se o tipo `int` não for suficiente, o tipo de 64 bits `long long` pode ser utilizado. Ele possui uma faixa de valores de  $-2^{63} \dots 2^{63}-1$ , ou aproximadamente  $-9 \cdot 10^{18} \dots 9 \cdot 10^{18}$ .

O código a seguir define uma variável do tipo `long long`:

```
long long x = 123456789123456789LL;
```

O sufixo `LL` significa que o tipo do número é `long long`.

Um erro comum ao usar o tipo `long long` é que o tipo `int` ainda é usado em algum lugar do código. Por exemplo, o seguinte código contém um erro sutil:

```
int a = 123456789;
long long b = a*a;
cout << b << "\n"; // -1757895751
```

Embora a variável `b` seja do tipo `long long`, ambos os números na expressão `a*a` são do tipo `int` e o resultado também é do tipo `int`. Devido a isso, a variável `b` conterá um resultado incorreto. O problema pode ser resolvido alterando o tipo de `a` para `long long` ou alterando a expressão para `(long long)a*a`.

Normalmente, os problemas de competição são definidos de forma que o tipo `long long` seja suficiente. Ainda assim, é bom saber que o compilador `g++` também oferece um tipo de 128 bits chamado `__int128_t` com uma faixa de valores de  $-2^{127} \dots 2^{127}-1$ , ou aproximadamente  $-10^{38} \dots 10^{38}$ . No entanto, este tipo não está disponível em todos os sistemas de competição.

## Aritmética modular

Denotamos por  $x \bmod m$  o resto da divisão de  $x$  por  $m$ . Por exemplo,  $17 \bmod 5 = 2$ , porque  $17 = 3 \cdot 5 + 2$ .

Às vezes, a resposta para um problema é um número muito grande, mas é suficiente para imprimir o "módulo  $m$ ", ou seja, o resto quando a resposta é dividida por  $m$  (por exemplo, "módulo  $10^9 + 7$ "). A ideia é que, mesmo que a resposta real seja muito grande, é suficiente usar os tipos `int` e `long long`.

Uma propriedade importante do resto é que, na adição, subtração e multiplicação, o resto pode ser obtido antes da operação:

$$\begin{aligned}(a + b) \bmod m &= (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m \\(a - b) \bmod m &= (a \bmod m - b \bmod m) \bmod m \\(a \cdot b) \bmod m &= (a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m\end{aligned}$$

Assim, podemos obter o resto após cada operação e os números nunca se tornarão muito grandes.

Por exemplo, o código seguinte calcula  $n!$ , o fatorial de  $n$ , módulo  $m$ :

```
long long x = 1;
for (int i = 2; i <= n; i++) {
    x = (x*i)%m;
}
cout << x%m << "\n";
```

Normalmente, queremos que o resto esteja sempre entre  $0 \dots m-1$ . No entanto, em C++ e em outras linguagens, o resto de um número negativo é zero ou negativo. Uma maneira fácil de garantir que não haja restos negativos é primeiro calcular o resto como de costume e depois adicionar  $m$  se o resultado for negativo:

```
x = x%m;
if (x < 0) x += m;
```

No entanto, isso só é necessário quando há subtrações no código e o resto pode se tornar negativo.

## Números com ponto flutuante

Os tipos usuais de números de ponto flutuante em programação competitiva são o `double` de 64 bits e, como uma extensão no compilador g++, o `long double` de 80 bits. Na maioria dos casos, o tipo `double` é suficiente, mas o `long double` é mais preciso.

A precisão necessária da resposta geralmente é fornecida no enunciado do problema. Uma maneira fácil de imprimir a resposta é usar a função `printf` e fornecer o número de casas decimais na string de formatação. Por exemplo, o código seguinte imprime o valor de  $x$  com 9 casas decimais:

```
printf("%.9f\n", x);
```

Uma dificuldade ao usar números de ponto flutuante é que alguns números não podem ser representados com precisão como números de ponto flutuante, o que resultará em erros de arredondamento. Por exemplo, o resultado do código seguinte é surpreendente:

```
double x = 0.3*3+0.1;
printf("%.20f\n", x); // 0.99999999999999988898
```

Devido a um erro de arredondamento, o valor de  $x$  é um pouco menor do que 1, enquanto o valor correto seria 1.

É arriscado comparar números de ponto flutuante com o operador `==`, pois é possível que os valores devam ser iguais, mas não são devido a erros de precisão. Uma maneira melhor de comparar números de ponto flutuante é assumir que dois números são iguais se a diferença entre eles for menor que  $\epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um número pequeno.

Na prática, os números podem ser comparados da seguinte forma ( $\epsilon = 10^{-9}$ ):

```
if (abs(a-b) < 1e-9) {
    // a e b sao iguais
}
```

Observe que, embora os números de ponto flutuante sejam imprecisos, inteiros até um certo limite ainda podem ser representados com precisão. Por exemplo, usando `double`, é possível representar com precisão todos os inteiros cujo valor absoluto é no máximo  $2^{53}$ .

## 1.4 Encurtando código

Códigos curtos são ideais em programação competitiva, porque os programas devem ser escritos o mais rápido possível. Por causa disso, os programadores competitivos geralmente definem nomes mais curtos para tipos de dados e outras partes do código.

### Nomes para tipos

Usando o comando `typedef` é possível dar um nome mais curto para um tipo de dados. Por exemplo, o nome `long long` é longo, então podemos definir o nome mais curto `ll`:

```
typedef long long ll;
```

Depois disso, o código

```
long long a = 123456789;
long long b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

pode ser encurtado como segue:

```
ll a = 123456789;
ll b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

O comando **typedef** pode também ser usado com tipos de dados mais complexos. Por exemplo, o código seguinte dá o nome **vi** para um vetor de inteiros e o nome **pi** para um **pair** que contém dois inteiros.

```
typedef vector<int> vi;
typedef pair<int,int> pi;
```

## Macros

Outro jeito de encurtar o código é definindo **macros**. Um macro significa que certas strings no código serão mudadas antes da compilação. Em C++, **macros** são definidos usando a palavra-chave **#define**.

Por exemplo, podemos definir os seguintes macros:

```
#define F first
#define S second
#define PB push_back
#define MP make_pair
```



Depois disso, o código

```
v.push_back(make_pair(y1,x1));
v.push_back(make_pair(y2,x2));
int d = v[i].first+v[i].second;
```

pode ser encurtado como segue:

```
v.PB(MP(y1,x1));
v.PB(MP(y2,x2));
int d = v[i].F+v[i].S;
```

Um macro pode também ter parâmetros que possibilitam encurtar laços e outras estruturas. Por exemplo, podemos definir o seguinte macro:

```
#define REP(i,a,b) for (int i = a; i <= b; i++)
```

Depois disso, o código

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    search(i);
}
```

pode ser encurtado como segue:

```
REP(i,1,n) {  
    search(i);  
}
```

De vez em quando, macros causam bugs que podem ser difíceis de detectar. Por exemplo, considere o seguinte macro que calcula o quadrado de um número:

```
#define SQ(a) a*a
```

O macro *nem sempre* funciona como esperado. Por exemplo, o código

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

corresponde ao código

```
cout << 3+3*3+3 << "\n"; // 15
```

Uma versão melhor do macro é como segue:

```
#define SQ(a) (a)*(a)
```

Agora o código

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

corresponde ao código

```
cout << (3+3)*(3+3) << "\n"; // 36
```

## 1.5 Matemática

A matemática desempenha um papel importante nas competições de programação, e não é possível se tornar um programador competitivo de sucesso sem ter boas habilidades matemáticas. Essa seção discute alguns conceitos matemáticos importantes e fórmulas que serão necessárias mais adiante no livro.

### Fórmulas de soma

Cada soma da forma

$$\sum_{x=1}^n x^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k,$$

onde  $k$  é um inteiro positivo, tem uma fórmula de forma fechada que é um polinômio de grau  $k + 1$ . Por exemplo<sup>1</sup>,

$$\sum_{x=1}^n x = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

<sup>1</sup> Existe uma fórmula mais geral para somas, chamada de **fórmula de Faulhaber**, mas ela é muito complexa para ser apresentada aqui.

e

$$\sum_{x=1}^n x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Uma **progressão aritmética** é uma sequência de números onde a diferença entre quaisquer dois números consecutivos é constante. Por exemplo,

$$3, 7, 11, 15$$

é uma progressão aritmética com constante 4. A soma de uma progressão aritmética pode ser calculada usando a fórmula

$$\underbrace{a + \dots + b}_{n \text{ números}} = \frac{n(a+b)}{2}$$

onde  $a$  é o primeiro número,  $b$  é o último número e  $n$  é a quantidade de números. Por exemplo,

$$3 + 7 + 11 + 15 = \frac{4 \cdot (3 + 15)}{2} = 36.$$

A fórmula é baseada no fato que a soma consiste de  $n$  números e o valor de cada número é  $(a+b)/2$  em média.

A **progressão geométrica** é uma sequência de números onde a razão entre quaisquer dois números consecutivos é constante. Por exemplo,

$$3, 6, 12, 24$$

é uma progressão geométrica com constante 2. A soma de uma progressão geométrica pode ser calculada usando a fórmula

$$a + ak + ak^2 + \dots + b = \frac{bk - a}{k - 1}$$

onde  $a$  é o primeiro número,  $b$  é o último número e a razão entre números consecutivos é  $k$ . Por exemplo,

$$3 + 6 + 12 + 24 = \frac{24 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 45.$$

Esta fórmula pode ser derivada como segue. Seja

$$S = a + ak + ak^2 + \dots + b.$$

Multiplicando ambos os lados por  $k$ , obtemos

$$kS = ak + ak^2 + ak^3 + \dots + bk,$$

e resolvendo a equação obtemos a fórmula.

$$kS - S = bk - a$$

Um caso especial da soma de progressão geométrica é a fórmula

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

A **soma harmônica** é uma soma da forma

$$\sum_{x=1}^n \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Um limite superior para uma soma harmônica é  $\log_2(n) + 1$ . Ou seja, podemos modificar cada termo  $1/k$  para que  $k$  se torne a potência de dois mais próxima que não excede  $k$ . Por exemplo, quando  $n = 6$ , podemos estimar a soma como segue:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Este limite superior consiste de  $\log_2(n) + 1$  partes ( $1, 2 \cdot 1/2, 4 \cdot 1/4$ , etc.), e o valor de cada parte é no máximo 1.

## Teoria dos conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de elementos. Por exemplo, o conjunto

$$X = \{2, 4, 7\}$$

contém os elementos 2, 4 e 7. O símbolo  $\emptyset$  denota um conjunto vazio, e  $|S|$  denota o tamanho do conjunto  $S$ , ou seja, o número de elementos no conjunto. Por exemplo, no conjunto acima,  $|X| = 3$ .

Se um conjunto  $S$  contém um elemento  $x$ , nós escrevemos que  $x \in S$ , e senão escrevemos que  $x \notin S$ . Por exemplo, no conjunto acima

$$4 \in X \quad \text{e} \quad 5 \notin X.$$

Agora conjuntos podem ser construídos usando operações de conjuntos:

- A **intersecção**  $A \cap B$  consiste dos elementos que estão em ambos  $A$  e  $B$ . Por exemplo, se  $A = \{1, 2, 5\}$  e  $B = \{2, 4\}$ , então  $A \cap B = \{2\}$ .
- A **união**  $A \cup B$  consiste dos elementos que estão em  $A$  ou  $B$  ou em ambos. Por exemplo, se  $A = \{3, 7\}$  e  $B = \{2, 3, 8\}$ , então  $A \cup B = \{2, 3, 7, 8\}$ .
- O **complemento**  $\bar{A}$  consiste dos elementos que não estão em  $A$ . A interpretação de um complemento depende do **conjunto universo**, que contém todos os elementos possíveis. Por exemplo, se  $A = \{1, 2, 5, 7\}$  e o conjunto universo é  $\{1, 2, \dots, 10\}$ , então  $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ .
- A **diferença**  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  consiste dos elementos que estão em  $A$  mas não estão em  $B$ . Note que  $B$  pode conter elementos que não estão em  $A$ . Por exemplo, se  $A = \{2, 3, 7, 8\}$  e  $B = \{3, 5, 8\}$ , então  $A \setminus B = \{2, 7\}$ .

Se cada elemento de  $A$  também pertence a  $S$ , dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $S$ , denotado por  $A \subset S$ . Um conjunto  $S$  sempre tem  $2^{|S|}$  subconjuntos, incluindo o conjunto vazio. Por exemplo, os subconjuntos do conjunto  $\{2, 4, 7\}$  são

$$\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\} \text{ e } \{2, 4, 7\}.$$



Alguns conjuntos usados frequentemente são  $\mathbb{N}$  (números naturais),  $\mathbb{Z}$  (inteiros),  $\mathbb{Q}$  (números racionais) e  $\mathbb{R}$  (números reais). O conjunto  $\mathbb{N}$  pode ser definidos de duas maneiras, dependendo da situação: como  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  ou  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Podemos também criar um conjunto usando uma regra da forma

$$\{f(n) : n \in S\},$$

onde  $f(n)$  é alguma função. O conjunto contém todos os elementos da forma  $f(n)$ , onde  $n$  é um elemento em  $S$ . Por exemplo, o conjunto

$$X = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

contém todos os inteiros pares.

## Lógica

O valor de uma expressão lógica é ou **verdadeiro** (1) ou **falso** (0). Os operadores lógicos mais importantes são  $\neg$  (**negação**),  $\wedge$  (**conjunção**),  $\vee$  (**disjunção**),  $\Rightarrow$  (**implicação**) e  $\Leftrightarrow$  (**equivalência**). A seguinte tabela mostra o significado destes operadores:

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

A expressão  $\neg A$  tem valor oposto do valor de  $A$ . A expressão  $A \wedge B$  é verdadeira se ambos  $A$  e  $B$  são verdadeiros, e a expressão  $A \vee B$  é verdadeira se  $A$  ou  $B$  ou ambos são verdadeiros. A expressão  $A \Rightarrow B$  é verdade se quando  $A$  for verdadeiro,  $B$  também for verdadeiro. A expressão  $A \Leftrightarrow B$  é verdadeira se  $A$  e  $B$  ambos forem verdadeiros ou ambos falsos.

Um **predicado** é uma expressão que é verdadeira ou falsa dependendo de seus parâmetros. Predicados são geralmente denotados por letras maiúsculas. Por exemplo, podemos definir um predicado  $P(x)$  que é verdadeira exatamente quando  $x$  é um número primo. Usando esta definição,  $P(7)$  é verdadeiro mas  $P(8)$  é falso.

Um **quantificador** conecta uma expressão lógica a elementos de um conjunto. Os quantificadores mais importantes são  $\forall$  (**para todos**) e  $\exists$  (**existe**). Por exemplo,

$$\forall x(\exists y(y < x))$$

significa que para cada elemento  $x$  no conjunto, existe um elemento  $y$  no conjunto de tal forma que  $y$  é menor que  $x$ . Isso é verdadeiro no conjunto dos inteiros, mas falso no conjunto dos números naturais.

Usando a notação descrita acima, podemos expressar muitos tipos de proposições lógicas. Por exemplo,

$$\forall x((x > 1 \wedge \neg P(x)) \Rightarrow (\exists a(\exists b(a > 1 \wedge b > 1 \wedge x = ab))))$$

significa que se um número  $x$  é maior que 1 e não é um número primo, então existem números  $a$  e  $b$  que são maiores que 1 e cujo produto é  $x$ . Esta proposição é verdadeira no conjunto dos inteiros.

## Funções

A função  $\lfloor x \rfloor$  arredonda o número  $x$  para baixo, e a função  $\lceil x \rceil$  arredonda o número  $x$  para cima. Por exemplo,

$$\lfloor 3/2 \rfloor = 1 \quad \text{e} \quad \lceil 3/2 \rceil = 2.$$

As funções  $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$  retornam os menores e maiores valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por exemplo,

$$\min(1, 2, 3) = 1 \quad \text{e} \quad \max(1, 2, 3) = 3.$$

O **fatorial**  $n!$  pode ser definido como

$$\prod_{x=1}^n x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

ou recursivamente

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= n \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

Os **números de Fibonacci** aparecem em várias situações. Eles podem ser definidos recursivamente como segue:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \end{aligned}$$

Os primeiros números de Fibonacci são

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Existe também uma fórmula de forma fechada para calcular os números de Fibonacci, que é algumas vezes chamada de **fórmula de Binet**:

$$f(n) = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

## Logaritmos

O **logaritmo** de um número  $x$  é denotado  $\log_k(x)$ , onde  $k$  é a base do logaritmo. De acordo com esta definição,  $\log_k(x) = a$  exatamente quando  $k^a = x$ .

Uma propriedade útil dos logaritmos é que  $\log_k(x)$  é equivalente ao número de vezes necessário para dividir  $x$  por  $k$  para alcançar o número 1. Por exemplo,  $\log_2(32) = 5$  porque 5 divisões por 2 são necessárias:

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Logaritmos são frequentemente usadas na análise de algoritmos, porque muitos algoritmos eficientes dividem alguma coisa em cada passo. Então, podemos estimar a eficiência destes algoritmos usando logaritmos.

O logaritmo de um produto é

$$\log_k(ab) = \log_k(a) + \log_k(b),$$

e conseqüentemente,

$$\log_k(x^n) = n \cdot \log_k(x).$$

Além disso, o logaritmo de um quociente é

$$\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b).$$

Outra fórmula útil é

$$\log_u(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(u)},$$

e usando isso, é possível calcular logaritmos para qualquer base se existe uma maneira de calcular logaritmos para uma base fixa.

O **logaritmo natural**  $\ln(x)$  de um número  $x$  é um logaritmo cuja base é  $e \approx 2.71828$ . Outra propriedade de logaritmos é que o número de dígitos de um inteiro  $x$  na base  $b$  é  $\lfloor \log_b(x) + 1 \rfloor$ . Por exemplo, a representação de 123 na base 2 é 1111011 e  $\lfloor \log_2(123) + 1 \rfloor = 7$ .

## 1.6 Competições e recursos

### IOI

A Olimpíada Internacional de Informática (IOI) é um concurso anual de programação para alunos do ensino médio. Cada país pode enviar uma equipe de quatro alunos para o concurso. Geralmente há cerca de 300 participantes de 80 países.

O IOI consiste em dois concursos de cinco horas de duração. Em ambos os concursos, os participantes são convidados a resolver três tarefas algorítmicas de várias dificuldades. As tarefas são divididas em subtarefas, cada uma das quais tem uma pontuação atribuída. Mesmo que os competidores sejam divididos em equipes, eles competem como indivíduos.

O programa da IOI [41] regula os tópicos que podem aparecer em tarefas da IOI. Quase todos os tópicos do programa IOI são cobertos por este livro.

Os participantes do IOI são selecionados por meio de concursos nacionais. Antes do IOI, muitos concursos regionais são organizados, como a Olimpíada Brasileira de Informática (OBI), a Olimpíada Báltica de Informática (BOI), a Olimpíada da Europa Central em Informática (CEOI) e a Olimpíada de Informática da Ásia-Pacífico (APIO).

Alguns países organizam concursos de prática online para futuros participantes do IOI, como o Concurso Aberto da Croácia em Informática [11] e a Olimpíada de Computação dos EUA [68]. Além disso, uma grande coleção de problemas de concursos poloneses está disponível online [60].

## ICPC

O Concurso Internacional de Programação Colegiada (ICPC) é um concurso anual de programação para estudantes universitários. Cada equipe do concurso é composta por três alunos, e ao contrário do IOI, os alunos trabalham juntos; há apenas um computador disponível para cada equipe.

O ICPC é composto por várias etapas, e finalmente o melhores equipes são convidadas para as Finais Mundiais. Embora existam dezenas de milhares de participantes no concurso, há apenas um pequeno número<sup>2</sup> de vagas para as finais disponíveis, assim, avançar para as finais é uma grande conquista em algumas regiões.

Em cada prova do ICPC, as equipes têm cinco horas para resolver cerca de dez problemas de algoritmos. Uma solução para um problema só é aceita se resolver todos os casos de teste de forma eficiente. Durante a competição, os competidores poderão visualizar os resultados de outras equipes, mas na última hora o placar fica congelado e não é possível ver os resultados das últimas submissões.

Os temas que podem aparecer no ICPC não são tão bem especificados como aqueles no IOI. De qualquer forma, é claro que mais conhecimento é necessário no ICPC, especialmente mais habilidades matemáticas.

## Competições online

Existem também muitos concursos online abertos a todos. No momento, o site de concursos mais ativo é o Codeforces, que organiza concursos semanais. No Codeforces, os participantes são divididos em duas divisões: iniciantes competem em Div2 e programadores mais experientes em Div1. Outros sites de concursos incluem AtCoder, CS Academy, HackerRank e Topcoder.

Algumas empresas organizam concursos online com finais presenciais. Exemplos de tais concursos são Facebook Hacker Cup, Google Code Jam e Yandex.Algorithm. Claro, as empresas também usam esses concursos para recrutamento: ter um bom desempenho em uma competição é uma boa maneira de provar suas habilidades.

## Books

Já existem alguns livros (além deste) que focam em programação competitiva e resolução algorítmica de problemas:

- S. S. Skiena and M. A. Revilla: *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual* [59]
- S. Halim and F. Halim: *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests* [33]
- K. Diks et al.: *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions* [15]

---

<sup>2</sup>O número exato de vagas para as finais variam de ano para ano; em 2017, havia 133 vagas para a final.

Os primeiros dois livros são voltados para iniciantes, enquanto que o último livro contém material avançado.

Claro, livros de algoritmos gerais também são adequados para programadores competitivos. Alguns livros populares são:

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein: *Introduction to Algorithms* [13]
- J. Kleinberg and É. Tardos: *Algorithm Design* [45]
- S. S. Skiena: *The Algorithm Design Manual* [58]



# Capítulo 2

## Complexidade de tempo

A eficiência dos algoritmos é importante na programação competitiva. Normalmente, é fácil projetar um algoritmo que resolve o problema lentamente, mas o verdadeiro desafio é inventar um algoritmo rápido. Se o algoritmo for muito lento, ele receberá apenas pontos parciais ou nenhum ponto.

A **complexidade de tempo** de um algoritmo estima quanto tempo o algoritmo irá utilizar para determinada entrada. A ideia é representar a eficiência como uma função cujo parâmetro é o tamanho da entrada. Ao calcular a complexidade de tempo, podemos descobrir se o algoritmo é suficientemente rápido sem precisar implementá-lo.

### 2.1 Regras de cálculo

A complexidade de tempo de um algoritmo é denotada por  $O(\dots)$  onde os três pontos representam alguma função. Normalmente, a variável  $n$  denota o tamanho da entrada. Por exemplo, se a entrada é uma matriz de números,  $n$  será o tamanho da matriz, e se a entrada é uma string,  $n$  será o comprimento da string.

#### Laços de repetição

Uma razão comum pela qual um algoritmo é lento é porque ele contém muitos laços que percorrem a entrada. Quanto mais laços aninhados o algoritmo contém, mais lento ele é. Se houver  $k$  laços aninhados, a complexidade de tempo é  $O(n^k)$ .

Por exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é  $O(n)$ :

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // código  
}
```

E a complexidade de tempo do seguinte código é  $O(n^2)$ :

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

```
}
```

## Ordem de magnitude

A complexidade de tempo não nos fornece o número exato de vezes que o código dentro de um laço é executado, mas apenas mostra a ordem de magnitude. Nos exemplos a seguir, o código dentro do laço é executado  $3n$ ,  $n+5$  e  $\lceil n/2 \rceil$  vezes, mas a complexidade de tempo de cada código é  $O(n)$ .

```
for (int i = 1; i <= 3*n; i++) {  
    // código  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n+5; i++) {  
    // código  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n; i += 2) {  
    // código  
}
```

Como outro exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é  $O(n^2)$ :

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = i+1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

## Fases

Se o algoritmo consiste em fases consecutivas, a complexidade de tempo total é a maior complexidade de tempo de uma única fase. A razão para isso é que a fase mais lenta geralmente é o gargalo do código.

Por exemplo, o seguinte código consiste em três fases com complexidades de tempo  $O(n)$ ,  $O(n^2)$  e  $O(n)$ . Portanto, a complexidade de tempo total é  $O(n^2)$ .

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // código  
}  
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}  
}
```



```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    // código
}
```

## Várias variáveis

Às vezes, a complexidade de tempo depende de vários fatores. Nesse caso, a fórmula da complexidade de tempo contém várias variáveis.

Por exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é  $O(nm)$ :

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= m; j++) {
        // código
    }
}
```

## Recursão

A complexidade de tempo de uma função recursiva depende do número de vezes que a função é chamada e da complexidade de tempo de uma única chamada. A complexidade de tempo total é o produto desses valores.

Por exemplo, considere a seguinte função:

```
void f(int n) {
    if (n == 1) return;
    f(n-1);
}
```

A chamada  $f(n)$  causa  $n$  chamadas de função, e a complexidade de tempo de cada chamada é  $O(1)$ . Assim, a complexidade de tempo total é  $O(n)$ .

Como outro exemplo, considere a seguinte função:

```
void g(int n) {
    if (n == 1) return;
    g(n-1);
    g(n-1);
}
```

Nesse caso, cada chamada de função gera outras duas chamadas, exceto quando  $n = 1$ . Vamos ver o que acontece quando  $g$  é chamada com o parâmetro  $n$ . A tabela a seguir mostra as chamadas de função produzidas por essa única chamada:

chamada da função	número de chamadas
$g(n)$	1
$g(n-1)$	2
$g(n-2)$	4
...	...
$g(1)$	$2^{n-1}$

Com base nisso, a complexidade de tempo é

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = O(2^n).$$

## 2.2 Classes de complexidade

A lista a seguir contém complexidades de tempo comuns de algoritmos:

$O(1)$  O tempo de execução de um algoritmo de **tempo constante** não depende do tamanho da entrada. Um algoritmo de tempo constante típico é uma fórmula direta que calcula a resposta.

$O(\log n)$  Um algoritmo **logarítmico** frequentemente reduz pela metade o tamanho da entrada em cada etapa. O tempo de execução de tal algoritmo é logarítmico, porque  $\log_2 n$  equivale ao número de vezes que  $n$  precisa ser dividido por 2 para obter 1.

$O(\sqrt{n})$  Um **algoritmo de raiz quadrada** é mais lento do que  $O(\log n)$ , mas mais rápido do que  $O(n)$ . Uma propriedade especial das raízes quadradas é que  $\sqrt{n} = n/\sqrt{n}$ , então a raiz quadrada  $\sqrt{n}$  está, em certo sentido, no meio da entrada.

$O(n)$  Um algoritmo **linear** percorre a entrada um número constante de vezes. Isso muitas vezes é a melhor complexidade de tempo possível, porque geralmente é necessário acessar cada elemento da entrada pelo menos uma vez antes de obter a resposta.

$O(n \log n)$  Essa complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo ordena a entrada, pois a complexidade de tempo dos eficientes algoritmos de ordenação é  $O(n \log n)$ . Outra possibilidade é que o algoritmo utilize uma estrutura de dados em que cada operação leva tempo  $O(\log n)$ .

$O(n^2)$  Um algoritmo **quadrático** muitas vezes contém dois laços aninhados. É possível percorrer todos os pares de elementos da entrada em tempo  $O(n^2)$ .

$O(n^3)$  Um algoritmo **cúbico** frequentemente contém três laços aninhados. É possível percorrer todos os trios de elementos da entrada em tempo  $O(n^3)$ .

$O(2^n)$  Esta complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo itera por todos os subconjuntos dos elementos de entrada. Por exemplo, os subconjuntos de  $\{1, 2, 3\}$  são  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  e  $\{1, 2, 3\}$ .

$O(n!)$  Esta complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo itera por todas as permutações dos elementos de entrada. Por exemplo, as permutações de  $\{1, 2, 3\}$  são  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  e  $(3, 2, 1)$ .

Um algoritmo é **polinomial** se sua complexidade de tempo for no máximo  $O(n^k)$ , onde  $k$  é uma constante. Todas as complexidades de tempo acima, exceto  $O(2^n)$  e  $O(n!)$ , são polinomiais. Na prática, a constante  $k$  geralmente é pequena, e portanto, uma complexidade de tempo polinomial significa que o algoritmo é *eficiente*.

A maioria dos algoritmos neste livro é polinomial. No entanto, existem muitos problemas importantes para os quais nenhum algoritmo polinomial é conhecido, ou seja, ninguém sabe como resolvê-los de forma eficiente. Problemas **NP-difíceis** são um conjunto importante de problemas para os quais nenhum algoritmo polinomial é conhecido<sup>1</sup>.

## 2.3 Estimar a eficiência

Ao calcular a complexidade de tempo de um algoritmo, é possível verificar, antes de implementá-lo, se ele é suficientemente eficiente para o problema. O ponto de partida para as estimativas é o fato de que um computador moderno pode realizar algumas centenas de milhões de operações em um segundo.

Por exemplo, vamos supor que o limite de tempo para um problema seja de um segundo e o tamanho da entrada seja  $n = 10^5$ . Se a complexidade de tempo for  $O(n^2)$ , o algoritmo executará cerca de  $(10^5)^2 = 10^{10}$  operações. Isso levaria pelo menos algumas dezenas de segundos, então o algoritmo parece ser muito lento para resolver o problema.

Por outro lado, dado o tamanho da entrada, podemos tentar *adivinhar* a complexidade de tempo necessária do algoritmo que resolve o problema. A tabela a seguir contém algumas estimativas úteis, assumindo um limite de tempo de um segundo.

tamanho da entrada	complexidade de tempo necessária
$n \leq 10$	$O(n!)$
$n \leq 20$	$O(2^n)$
$n \leq 500$	$O(n^3)$
$n \leq 5000$	$O(n^2)$
$n \leq 10^6$	$O(n \log n)$ ou $O(n)$
$n$ é grande	$O(1)$ ou $O(\log n)$

Por exemplo, se o tamanho da entrada for  $n = 10^5$ , é provável que se espere que a complexidade de tempo do algoritmo seja  $O(n)$  ou  $O(n \log n)$ . Essa informação facilita o projeto do algoritmo, pois descarta abordagens que resultariam em um algoritmo com uma complexidade de tempo pior.

<sup>1</sup>Um livro clássico sobre o assunto é *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* de M. R. Garey e D. S. Johnson [28].

Ainda assim, é importante lembrar que a complexidade de tempo é apenas uma estimativa de eficiência, pois ela oculta os *fatores constantes*. Por exemplo, um algoritmo que roda em tempo  $O(n)$  pode realizar  $n/2$  ou  $5n$  operações. Isso tem um efeito importante no tempo real de execução do algoritmo.

## 2.4 Soma máxima de subvetor

Frequentemente, existem vários algoritmos possíveis para resolver um problema, sendo que suas complexidades de tempo são diferentes. Esta seção discute um problema clássico que possui uma solução direta com complexidade de tempo  $O(n^3)$ . No entanto, ao projetar um algoritmo melhor, é possível resolver o problema em tempo  $O(n^2)$  e até mesmo em tempo  $O(n)$ .

Dado um vetor de  $n$  números, nossa tarefa é calcular a **soma máxima de subvetor**, ou seja, a maior soma possível de uma sequência de valores consecutivos no vetor<sup>2</sup>. O problema é interessante quando pode haver valores negativos no vetor. Por exemplo, no vetor

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

o subvetor a seguir produz a soma máxima de 10:

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

Nós assumimos que um subvetor vazio é permitido, então a soma máxima do subvetor é sempre pelo menos 0.

### Algoritmo 1

Uma maneira direta de resolver o problema é percorrer todos os subvetores possíveis, calcular a soma dos valores em cada subvetor e manter a soma máxima. O código a seguir implementa esse algoritmo:

```
int best = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    for (int b = a; b < n; b++) {
        int sum = 0;
        for (int k = a; k <= b; k++) {
            sum += array[k];
        }
        best = max(best, sum);
    }
}
cout << best << "\n";
```

<sup>2</sup>O livro *Programming Pearls* de J. Bentley [8] tornou o problema popular.

As variáveis  $a$  e  $b$  fixam o primeiro e último índice do subvetor, e a soma dos valores é calculada na variável  $sum$ . A variável  $best$  contém a soma máxima encontrada durante a busca.

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n^3)$ , pois consiste em três laços aninhados que percorrem a entrada.

## Algoritmo 2

É fácil tornar o Algoritmo 1 mais eficiente removendo um laço dele. Isso é possível calculando a soma ao mesmo tempo em que o final direito do subvetor se move. O resultado é o seguinte código:

```
int best = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    int sum = 0;
    for (int b = a; b < n; b++) {
        sum += array[b];
        best = max(best, sum);
    }
}
cout << best << "\n";
```

Após essa alteração, a complexidade de tempo é  $O(n^2)$ .

## Algoritmo 3

Surpreendentemente, é possível resolver o problema em tempo  $O(n)^3$ , o que significa que apenas um loop é necessário. A ideia é calcular, para cada posição do vetor, a soma máxima de um subvetor que termina nessa posição. Em seguida, a resposta para o problema é o máximo dessas somas.

Considere o subproblema de encontrar o subvetor de soma máxima que termina na posição  $k$ . Existem duas possibilidades:

1. O subvetor contém apenas o elemento na posição  $k$ .
2. O subvetor consiste em um subvetor que termina na posição  $k - 1$ , seguido pelo elemento na posição  $k$ .

No último caso, uma vez que queremos encontrar um subvetor com a soma máxima, o subvetor que termina na posição  $k - 1$  também deve ter a soma máxima. Portanto, podemos resolver o problema de forma eficiente calculando a soma máxima do subvetor para cada posição final da esquerda para a direita.

O código a seguir implementa o algoritmo:

```
int best = 0, sum = 0;
for (int k = 0; k < n; k++) {
```

---

<sup>3</sup>Em [8], este algoritmo de tempo linear é atribuído a J. B. Kadane, e o algoritmo é às vezes chamado de **algoritmo de Kadane**.

```
    sum = max(array[k], sum+array[k]);  
    best = max(best, sum);  
}  
cout << best << "\n";
```

O algoritmo contém apenas um laço que percorre a entrada, portanto, a complexidade de tempo é  $O(n)$ . Essa também é a melhor complexidade de tempo possível, porque qualquer algoritmo para o problema precisa examinar todos os elementos do vetor pelo menos uma vez.

## Comparação de eficiência

É interessante estudar como os algoritmos são eficientes na prática. A tabela a seguir mostra os tempos de execução dos algoritmos acima para diferentes valores de  $n$  em um computador moderno.

Em cada teste, a entrada foi gerada aleatoriamente. O tempo necessário para ler a entrada não foi medido.

tamanho do vetor $n$	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
$10^2$	0.0 s	0.0 s	0.0 s
$10^3$	0.1 s	0.0 s	0.0 s
$10^4$	> 10.0 s	0.1 s	0.0 s
$10^5$	> 10.0 s	5.3 s	0.0 s
$10^6$	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s
$10^7$	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s

A comparação mostra que todos os algoritmos são eficientes quando o tamanho da entrada é pequeno, mas tamanhos maiores de entrada evidenciam diferenças notáveis nos tempos de execução dos algoritmos. O Algoritmo 1 se torna lento quando  $n = 10^4$ , e o Algoritmo 2 se torna lento quando  $n = 10^5$ . Apenas o Algoritmo 3 é capaz de processar até mesmo as maiores entradas instantaneamente.

# Capítulo 3

## Ordenação

**Ordenação** é um problema fundamental no design de algoritmos. Muitos algoritmos eficientes utilizam a ordenação como uma sub-rotina, pois frequentemente é mais fácil processar os dados quando os elementos estão ordenados.

Por exemplo, o problema "um array contém dois elementos iguais?" é fácil de resolver usando ordenação. Se o array contiver dois elementos iguais, eles estarão um ao lado do outro após a ordenação, então é fácil encontrá-los. Além disso, o problema "qual é o elemento mais frequente em um array?" pode ser resolvido de forma semelhante.

Existem muitos algoritmos para ordenação, e eles também são bons exemplos de como aplicar diferentes técnicas de design de algoritmos. Os algoritmos de ordenação eficientes funcionam em tempo  $O(n \log n)$ , e muitos algoritmos que usam a ordenação como sub-rotina também têm essa complexidade de tempo.

### 3.1 Teoria da ordenação

O problema básico na ordenação é o seguinte:

Dado um array que contém  $n$  elementos, sua tarefa é ordenar os elementos em ordem crescente.

Por exemplo, o array

1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---

ficará da seguinte forma após a ordenação:

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

#### Algoritmos $O(n^2)$

Algoritmos simples para ordenar um array operam em tempo  $O(n^2)$ . Tais algoritmos são curtos e geralmente consistem em dois loops aninhados. Um famoso

algoritmo de ordenação em tempo  $O(n^2)$  é o **bubble sort** onde os elementos "flutuam" no array de acordo com seus valores.

O Bubble sort consiste em  $n$  rodadas. Em cada rodada, o algoritmo percorre os elementos do array. Sempre que dois elementos consecutivos são encontrados que não estão na ordem correta, o algoritmo os troca. O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

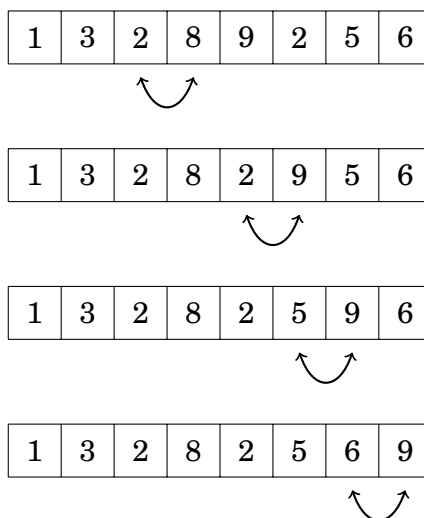
```
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    for (int j = 0; j < n-1; j++) {  
        if (array[j] > array[j+1]) {  
            swap(array[j], array[j+1]);  
        }  
    }  
}
```

Após a primeira rodada do algoritmo, o maior elemento estará na posição correta, e em geral, após  $k$  rodadas, os  $k$  maiores elementos estarão nas posições corretas. Portanto, após  $n$  rodadas, o array inteiro estará ordenado.

Por exemplo, no array

1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---

na primeira rodada do bubble sort, os elementos são trocados da seguinte forma:



## Inversões

O Bubble sort é um exemplo de um algoritmo de ordenação que sempre troca elementos *consecutivos* no array. Acontece que a complexidade de tempo de tal algoritmo é *sempre* pelo menos  $O(n^2)$ , porque no pior caso, são necessárias,  $O(n^2)$  trocas para ordenar o array.

Um conceito útil ao analisar algoritmos de ordenação é uma **inversão**: um par de elementos de array ( $array[a], array[b]$ ) tal que  $a < b$  and  $array[a] > array[b]$ , ou seja, os elementos estão na ordem errada. Por exemplo, o array



1	2	2	6	3	5	9	8
---	---	---	---	---	---	---	---

tem três inversões: (6,3), (6,5) e (9,8). O número de inversões indica o quanto de trabalho é necessário para ordenar o array. Um array está completamente ordenado quando não há inversões. Por outro lado, se os elementos do array estiverem em ordem reversa, o número de inversões é o máximo possível:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$$

A troca de um par de elementos consecutivos que estão na ordem errada remove exatamente uma inversão do array. Portanto, se um algoritmo de ordenação só pode trocar elementos consecutivos, cada troca remove no máximo uma inversão, e a complexidade de tempo do algoritmo é pelo menos  $O(n^2)$ .

## Algoritmos $O(n \log n)$

É possível ordenar um array de forma eficiente em tempo  $O(n \log n)$  usando algoritmos que não estão limitados a trocar elementos consecutivos. Um desses algoritmos é o **merge sort**<sup>1</sup>, que é baseado em recursão.

Merge sort ordena um subarray  $\text{array}[a \dots b]$  da seguinte forma:

1. Se  $a = b$ , não faça nada, pois o subarray já está ordenado..
2. Calcule a posição do elemento do meio:  $k = \lfloor (a + b)/2 \rfloor$ .
3. Ordene recursivamente o subarray  $\text{array}[a \dots k]$ .
4. Ordene recursivamente o subarray  $\text{array}[k + 1 \dots b]$ .
5. Junte os subarrays ordenados  $\text{array}[a \dots k]$  e  $\text{array}[k + 1 \dots b]$  em um subarray ordenado  $\text{array}[a \dots b]$ .

O merge sort é um algoritmo eficiente porque ele reduz pela metade o tamanho do subarray a cada passo. A recursão consiste em  $O(\log n)$  níveis, e processar cada nível leva tempo  $O(n)$ . Juntar os subarrays  $\text{array}[a \dots k]$  e  $\text{array}[k + 1 \dots b]$  é possível em tempo linear, porque eles já estão ordenados.

Por exemplo, considere ordenar o seguinte array:

1	3	6	2	8	2	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

O array será dividido em dois subarrays da seguinte forma:

1	3	6	2
---	---	---	---

8	2	5	9
---	---	---	---

Então, os subarrays serão ordenados recursivamente da seguinte forma:

<sup>1</sup>De acordo com [47], o merge sort foi inventado por J. von Neumann em 1945.

1	2	3	6
---	---	---	---

2	5	8	9
---	---	---	---

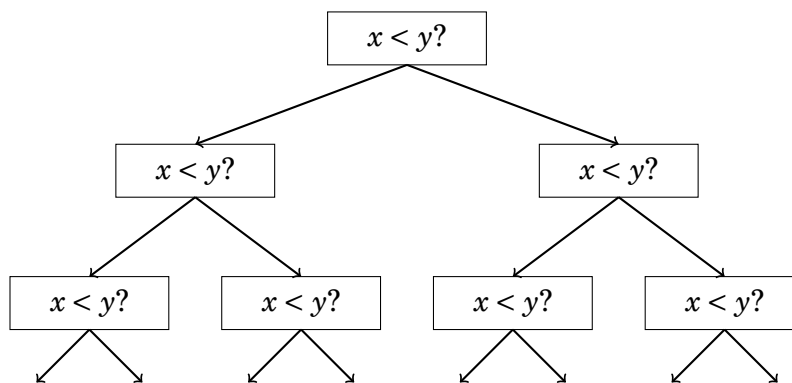
Finalmente, o algoritmo junta os subarrays ordenados e cria o array final ordenado:

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

## Limite Inferior de Ordenação

É possível ordenar um array mais rápido do que em tempo  $O(n \log n)$ ? Acontece que isso *não* é possível quando nos limitamos a algoritmos de ordenação baseados na comparação de elementos do array.

O limite inferior para a complexidade temporal pode ser demonstrado considerando a ordenação como um processo no qual cada comparação de dois elementos fornece mais informações sobre o conteúdo do array. O processo cria a seguinte árvore:



Aqui " $x < y?$ " significa que alguns elementos  $x$  e  $y$  são comparados. Se  $x < y$ , o processo continua para a esquerda e, caso contrário, para a direita. Os resultados do processo são as possíveis maneiras de ordenar o array, um total de  $n!$  maneiras. Por essa razão, a altura da árvore deve ser pelo menos

$$\log_2(n!) = \log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n).$$

Obtemos um limite inferior para esta soma escolhendo os últimos  $n/2$  elementos e alterando o valor de cada elemento para  $\log_2(n/2)$ . Isso nos dá uma estimativa

$$\log_2(n!) \geq (n/2) \cdot \log_2(n/2),$$

portanto, a altura da árvore e o número mínimo possível de etapas em um algoritmo de ordenação no pior caso é pelo menos  $n \log n$ .

## Counting sort

O limite inferior  $n \log n$  não se aplica a algoritmos que não comparam elementos de array, mas usam alguma outra informação. Um exemplo de tal algoritmo

é o **counting sort** que ordena um array em tempo  $O(n)$  assumindo que cada elemento no array é um inteiro entre  $0 \dots c$  e  $c = O(n)$ .

O algoritmo cria um *array de contagem*, cujos índices são elementos do array original. O algoritmo itera pelo array original e calcula quantas vezes cada elemento aparece no array.

Por exemplo, o array

1	3	6	9	9	3	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

corresponde ao array de contagem a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	2	0	1	1	0	0	3

Por exemplo, o valor na posição 3 no array de contagem é 2, porque o elemento 3 aparece 2 vezes no array original.

A construção do array de contagem leva tempo  $O(n)$ . Depois disso, o array ordenado pode ser criado em tempo  $O(n)$  porque o número de ocorrências de cada elemento pode ser recuperado do array de contagem. Portanto, a complexidade temporal total do counting sort é  $O(n)$ .

O counting sort é um algoritmo muito eficiente, mas só pode ser usado quando a constante  $c$  é pequena o suficiente, de modo que os elementos do array possam ser usados como índices no array de contagem.

## 3.2 Ordenação em C++

Quase nunca é uma boa ideia usar um algoritmo de ordenação feito em casa em uma competição, porque existem boas implementações disponíveis em linguagens de programação. Por exemplo, a biblioteca padrão de C++ contém a função `sort` que pode ser facilmente usada para ordenar arrays e outras estruturas de dados.

Há muitos benefícios em usar uma função de biblioteca. Primeiro, isso economiza tempo porque não há necessidade de implementar a função. Segundo, a implementação da biblioteca é certamente correta e eficiente: é improvável que uma função de ordenação feita em casa seja melhor.

Nesta seção, veremos como usar a função `sort` em C++. O código a seguir ordena um vetor em ordem crescente:

```
vector<int> v = {4,2,5,3,5,8,3};  
sort(v.begin(),v.end());
```

Após a ordenação, o conteúdo do vetor será: [2,3,3,4,5,5,8]. A ordem de classificação padrão é crescente, mas uma ordem reversa é possível da seguinte forma:


```
sort(v.rbegin(),v.rend());
```

Um array comum pode ser ordenado da seguinte forma:

```
int n = 7; // tamanho do array  
int a[] = {4,2,5,3,5,8,3};  
sort(a,a+n);
```

O seguinte código ordena a string s:

```
string s = "monkey";  
sort(s.begin(), s.end());
```

Ordenar uma string significa que os caracteres da string são ordenados. Por exemplo, a string "monkey" se torna "ekmn"

## Operadores de comparação

A função `sort` requer que um **operador de comparação** seja definido para o tipo de dados dos elementos a serem ordenados. Ao ordenar, esse operador será usado sempre que for necessário determinar a ordem de dois elementos.

A maioria dos tipos de dados em C++ tem um operador de comparação integrado, e elementos desses tipos podem ser ordenados automaticamente. Por exemplo, números são ordenados de acordo com seus valores e strings são ordenadas em ordem alfabética.

Pares (pair) são ordenados principalmente de acordo com seus primeiros elementos (first). No entanto, se os primeiros elementos de dois pares forem iguais, eles são ordenados de acordo com seus segundos elementos (second):

```
vector<pair<int,int>> v;  
v.push_back({1,5}); 2  
v.push_back({2,3}); 3  
v.push_back({1,2}); 1  
sort(v.begin(), v.end());
```

Após isso, a ordem dos pares é: (1,2), (1,5) e (2,3).

De forma semelhante, tuplas (tuple) são ordenadas principalmente pelo primeiro elemento, secundariamente pelo segundo elemento, etc.<sup>2</sup>:

```
vector<tuple<int,int,int>> v;  
v.push_back({2,1,4}); 3  
v.push_back({1,5,3}); 1  
v.push_back({2,1,3}); 2  
sort(v.begin(), v.end());
```

Após isso, a ordem das tuplas é: (1,5,3), (2,1,3) e (2,1,4).

## Structs definidas pelo usuário

As structs definidas pelo usuário não possuem um operador de comparação automaticamente. O operador deve ser definido dentro da struct como uma função `operator<`, cujo parâmetro é outro elemento do mesmo tipo. O operador deve retornar `true` se o elemento for menor que o parâmetro, e `false` caso contrário.

---

<sup>2</sup>Note que em alguns compiladores mais antigos, a função `make_tuple` deve ser usada para criar uma tupla em vez de chaves (por exemplo, `make_tuple(2,1,4)` em vez de `{2,1,4}`).

Por exemplo, a seguinte struct P contém as coordenadas x e y de um ponto. O operador de comparação é definido de forma que os pontos sejam ordenados principalmente pela coordenada x e secundariamente pela coordenada y.

```
struct P {
    int x, y;
    bool operator<(const P &p) {
        if (x != p.x) return x < p.x;
        else return y < p.y;
    }
};
```

## Funções de comparação

Também é possível fornecer uma **função de comparação** externa para a função sort como uma função de callback. Por exemplo, a seguinte função de comparação comp ordena strings principalmente por comprimento e secundariamente por ordem alfabética:

```
bool comp(string a, string b) {
    if (a.size() != b.size()) return a.size() < b.size();
    return a < b;
}
```

Agora um vetor de strings pode ser ordenado da seguinte forma:

```
sort(v.begin(), v.end(), comp);
```

## 3.3 Busca binária

Um método geral para buscar um elemento em um array é usar um loop for que itera pelos elementos do array. Por exemplo, o seguinte código busca por um elemento *x* no array:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (array[i] == x) {
        // x encontrado no indice i
    }
}
```

A complexidade temporal desta abordagem é  $O(n)$ , porque no pior caso é necessário verificar todos os elementos do array. Se a ordem dos elementos for arbitrária, esta também é a melhor abordagem possível, pois não há informações adicionais disponíveis sobre onde no array devemos procurar pelo elemento *x*.

No entanto, se o array estiver *ordenado*, a situação é diferente. Neste caso, é possível realizar a busca muito mais rapidamente, porque a ordem dos elementos

no array orienta a busca. O seguinte algoritmo de **busca binária** efetua a busca por um elemento em um array ordenado de forma eficiente em tempo  $O(\log n)$ .

## Método 1

A maneira usual de implementar a busca binária se assemelha a procurar uma palavra em um dicionário. A busca mantém uma região ativa no array, que inicialmente contém todos os elementos do array. Em seguida, um número de passos é executado, cada um dos quais divide pela metade o tamanho da região.

Em cada etapa, a busca verifica o elemento do meio da região ativa. Se o elemento do meio for o elemento alvo, a busca termina. Caso contrário, a busca continua recursivamente para a metade esquerda ou direita da região, dependendo do valor do elemento do meio.

A ideia acima pode ser implementada da seguinte forma:

```
int a = 0, b = n-1;
while (a <= b) {
    int k = (a+b)/2;
    if (array[k] == x) {
        // x encontrado no índice k
    }
    if (array[k] > x) b = k-1;
    else a = k+1;
}
```

Nesta implementação, a região ativa é  $a \dots b$ , e inicialmente a região é  $0 \dots n-1$ . O algoritmo divide o tamanho da região pela metade a cada etapa, então a complexidade temporal é  $O(\log n)$ .

## Método 2

Um método alternativo para implementar a busca binária é baseado em uma maneira eficiente de iterar pelos elementos do array. A ideia é fazer saltos e diminuir a velocidade quando estivermos mais perto do elemento alvo.

busca percorre o array da esquerda para a direita, e o comprimento inicial do salto é  $n/2$ . Em cada etapa, o comprimento do salto será dividido pela metade: primeiro  $n/4$ , depois  $n/8$ ,  $n/16$ , etc., até que finalmente o comprimento seja 1. Após os saltos, ou o elemento alvo foi encontrado ou sabemos que ele não aparece no array.

O código a seguir implementa a ideia acima:

```
int k = 0;
for (int b = n/2; b >= 1; b /= 2) {
    while (k+b < n && array[k+b] <= x) k += b;
}
if (array[k] == x) {
    // x encontrado no índice k
}
```

Durante a busca, a variável  $b$  contém o comprimento atual do salto.. A complexidade temporal do algoritmo é  $O(\log n)$ , porque o código no loop `while` é executado no máximo duas vezes para cada comprimento de salto.

## Funções em C++

A biblioteca padrão de C++ contém as seguintes funções que são baseadas em busca binária e funcionam em tempo logarítmico:

- `lower_bound` retorna um ponteiro para o primeiro elemento do array cujo valor é pelo menos  $x$ .
- `upper_bound` retorna um ponteiro para o primeiro elemento do array cujo valor é maior do que  $x$ .
- `equal_range` retorna ambos os ponteiros acima.

As funções assumem que o array está ordenado. Se não houver tal elemento, o ponteiro aponta para o elemento após o último elemento do array. Por exemplo, o seguinte código verifica se um array contém um elemento com valor  $x$ :

```
auto k = lower_bound(array, array+n, x) - array;
if (k < n && array[k] == x) {
    // x encontrado no índice k
}
```

Então, o seguinte código conta o número de elementos cujo valor é  $x$ :

```
auto a = lower_bound(array, array+n, x);
auto b = upper_bound(array, array+n, x);
cout << b-a << "\n";
```

Usando `equal_range`, o código fica mais curto:

```
auto r = equal_range(array, array+n, x);
cout << r.second-r.first << "\n";
```

## Encontrando a menor solução

Um uso importante para a busca binária é encontrar a posição onde o valor de uma função muda. Suponha que desejamos encontrar o menor valor  $k$  que é uma solução válida para um problema. Temos uma função  $ok(x)$  que retorna `true` se  $x$  é uma solução válida e `false` caso contrário. Além disso, sabemos que  $ok(x)$  é `false` quando  $x < k$  e `true` quando  $x \geq k$ . A situação é a seguinte:

$x$	0	1	...	$k-1$	$k$	$k+1$	...
$ok(x)$	false	false	...	false	true	true	...

Agora, o valor de  $k$  pode ser encontrado usando busca binária



```

int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (!ok(x+b)) x += b;
}
int k = x+1;

```

A busca encontra o maior valor de  $x$  para o qual  $ok(x)$  é false. Assim, o próximo valor  $k = x + 1$  é o menor valor possível para o qual  $ok(k)$  é true. O comprimento inicial do salto  $z$  deve ser grande o suficiente, por exemplo, algum valor para o qual sabemos de antemão que  $ok(z)$  é true.

O algoritmo chama a função `ok`  $O(\log z)$  vezes, então a complexidade temporal total depende da função `ok`. Por exemplo, se a função funciona em tempo  $O(n)$ , a complexidade temporal total é  $O(n \log z)$ .

## Encontrando o valor máximo

A busca binária também pode ser usada para encontrar o valor máximo de uma função que é primeiro crescente e depois decrescente. Nossa tarefa é encontrar uma posição  $k$  tal que

- $f(x) < f(x+1)$  quando  $x < k$ , e
- $f(x) > f(x+1)$  quando  $x \geq k$ .

A ideia é usar busca binária para encontrar o maior valor de  $x$  para o qual  $f(x) < f(x+1)$ . Isso implica que  $k = x + 1$  porque  $f(x+1) > f(x+2)$ . O seguinte código implementa a busca:

```

int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (f(x+b) < f(x+b+1)) x += b;
}
int k = x+1;

```

Note que, ao contrário da busca binária comum, aqui não é permitido que valores consecutivos da função sejam iguais. Nesse caso, não seria possível saber como continuar a busca.



# Capítulo 4

## Estruturas de Dados

Uma **estrutura de dados** é uma forma de armazenar dados na memória de um computador. É importante escolher uma estrutura de dados apropriada para um problema, porque cada estrutura de dados tem suas próprias vantagens e desvantagens. A questão crucial é: quais operações são eficientes na estrutura de dados escolhida?

Este capítulo apresenta as estruturas de dados mais importantes na biblioteca padrão do C++. É uma boa ideia usar a biblioteca padrão sempre que possível, porque isso economizará muito tempo. Mais adiante no livro, aprenderemos sobre mais sofisticadas estruturas de dados que não estão disponíveis na biblioteca padrão.

### 4.1 Vetores Dinâmicos

Um **vetor dinâmico** é um vetor cujo tamanho pode ser alterado durante a execução do programa. O vetor dinâmico mais popular em C++ é a estrutura **vector**, que pode ser usada quase como um vetor comum.

O código a seguir cria um vetor vazio e adiciona três elementos a ele:

```
vector<int> v;  
v.push_back(3); // [3]  
v.push_back(2); // [3,2]  
v.push_back(5); // [3,2,5]
```

Depois disso, os elementos podem ser acessados como em um vetor comum:

```
cout << v[0] << "\n"; // 3  
cout << v[1] << "\n"; // 2  
cout << v[2] << "\n"; // 5
```

A função **size** retorna o número de elementos no vetor. O código a seguir itera através do vetor e imprime todos os elementos nele:

```
for (int i = 0; i < v.size(); i++) {  
    cout << v[i] << "\n";  
}
```

```
}
```

Uma maneira mais curta de iterar através de um vetor é a seguinte:

```
for (auto x : v) {  
    cout << x << "\n";  
}
```

A função `back` retorna o último elemento no vetor, e a função `pop_back` remove o último elemento:

```
vector<int> v;  
v.push_back(5);  
v.push_back(2);  
cout << v.back() << "\n"; // 2  
v.pop_back();  
cout << v.back() << "\n"; // 5
```

O código a seguir cria um vetor com cinco elementos:

```
vector<int> v = {2,4,2,5,1};
```

Outra maneira de criar um vetor é fornecer o número de elementos e o valor inicial para cada elemento:

```
// tamanho 10, valor inicial 0  
vector<int> v(10);
```

```
// tamanho 10, valor inicial 5  
vector<int> v(10, 5);
```

A implementação interna de um vetor usa um vetor comum. Se o tamanho do vetor aumenta e o vetor se torna muito pequeno, um novo vetor é alocado e todos os elementos são movidos para o novo vetor. No entanto, isso não acontece com frequência e a complexidade de tempo média de `push_back` é  $O(1)$ .

A estrutura `string` também é um vetor dinâmico que pode ser usado quase como um vetor. Além disso, há uma sintaxe especial para strings que não está disponível em outras estruturas de dados. Strings podem ser combinadas usando o símbolo `+`. A função `substr(k,x)` retorna a substring que começa na posição *k* e tem comprimento *x*, e a função `find(t)` encontra a posição da primeira ocorrência de uma substring *t*.

O código a seguir apresenta algumas operações com strings:

```
string a = "hatti";  
string b = a+a;  
cout << b << "\n"; // hattihatti  
b[5] = 'v';  
cout << b << "\n"; // hattivatti
```

```
string c = b.substr(3,4);
cout << c << "\n"; // tiva
```

## 4.2 Estruturas de Conjunto

Um **conjunto** é uma estrutura de dados que mantém uma coleção de elementos. As operações básicas de conjuntos são inserção de elemento, pesquisa e remoção.

A biblioteca padrão do C++ contém duas implementações de conjunto: A estrutura **set** é baseada em uma árvore binária balanceada e suas operações funcionam em tempo  $O(\log n)$ . A estrutura **unordered\_set** usa hashing, e suas operações funcionam em tempo  $O(1)$  em média.

A escolha de qual implementação de conjunto usar é frequentemente uma questão de gosto. O benefício da estrutura **set** é que ela mantém a ordem dos elementos e fornece funções que não estão disponíveis em **unordered\_set**. Por outro lado, **unordered\_set** pode ser mais eficiente.

O código a seguir cria um conjunto que contém inteiros, e mostra algumas das operações. A função **insert** adiciona um elemento ao conjunto, a função **count** retorna o número de ocorrências de um elemento no conjunto, e a função **erase** remove um elemento do conjunto.

```
set<int> s;
s.insert(3);
s.insert(2);
s.insert(5);
cout << s.count(3) << "\n"; // 1
cout << s.count(4) << "\n"; // 0
s.erase(3);
s.insert(4);
cout << s.count(3) << "\n"; // 0
cout << s.count(4) << "\n"; // 1
```

Um conjunto pode ser usado principalmente como um vetor, mas não é possível acessar os elementos usando a notação `[]`. O código a seguir cria um conjunto, imprime o número de elementos nele e então itera por todos os elementos:

```
set<int> s = {2,5,6,8};
cout << s.size() << "\n"; // 4
for (auto x : s) {
    cout << x << "\n";
}
```

Uma propriedade importante dos conjuntos é que todos os seus elementos são *distintos*. Assim, a função **count** sempre retorna 0 (o elemento não está no conjunto) ou 1 (o elemento está no conjunto), e a função **insert** nunca adiciona um elemento ao conjunto se ele já estiver lá. O código a seguir ilustra isso:

```
set<int> s;
```

```
s.insert(5);
s.insert(5);
s.insert(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 1
```

C++ também contém as estruturas `multiset` e `unordered_multiset` que, de outra forma, funcionam como `set` e `unordered_set` mas podem conter várias instâncias de um elemento. Por exemplo, no código a seguir, todas as três instâncias do número 5 são adicionadas a um multiconjunto:

```
multiset<int> s;
s.insert(5);
s.insert(5);
s.insert(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 3
```

A função `erase` remove todas as instâncias de um elemento de um multiconjunto:

```
s.erase(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 0
```

Frequentemente, apenas uma instância deve ser removida, o que pode ser feito da seguinte forma:

```
s.erase(s.find(5));
cout << s.count(5) << "\n"; // 2
```

## 4.3 Estruturas de Mapa

Um **mapa** é um vetor generalizado que consiste em pares chave-valor. Enquanto as chaves em um vetor comum são sempre os inteiros consecutivos  $0, 1, \dots, n-1$ , onde  $n$  é o tamanho do vetor, as chaves em um mapa podem ser de qualquer tipo de dados e não precisam ser valores consecutivos.

A biblioteca padrão do C++ contém duas implementações de mapa que correspondem às implementações de conjunto: a estrutura `map` é baseada em uma árvore binária balanceada e acessar elementos leva tempo  $O(\log n)$ , enquanto a estrutura `unordered_map` usa hashing e acessar elementos leva tempo  $O(1)$  em média.

O código a seguir cria um mapa onde as **chaves** são strings e os **valores** são inteiros:

```
map<string, int> m;
m["monkey"] = 4;
m["banana"] = 3;
m["harpsichord"] = 9;
cout << m["banana"] << "\n"; // 3
```

Se o valor de uma chave for solicitado mas o mapa não o contém, a chave é adicionada automaticamente ao mapa com um valor padrão. Por exemplo, no código a seguir, a chave "aybabbtu" com valor 0 é adicionada ao mapa.

```
map<string,int> m;  
cout << m["aybabbtu"] << "\n"; // 0
```

A função `count` verifica se uma chave existe em um mapa:

```
if (m.count("aybabbtu")) {  
    // a chave existe  
}
```

O código a seguir imprime todas as chaves e valores em um mapa:

```
for (auto x : m) {  
    cout << x.first << " " << x.second << "\n";  
}
```

## 4.4 Iteradores e Intervalos

Muitas funções na biblioteca padrão do C++ operam com iteradores. Um **iterador** é uma variável que aponta para um elemento em uma estrutura de dados.

Os iteradores frequentemente usados `begin` e `end` definem um intervalo que contém todos os elementos em uma estrutura de dados. O iterador `begin` aponta para o primeiro elemento na estrutura de dados, e o iterador `end` aponta para a posição *após* o último elemento. A situação é a seguinte:

```
    { 3, 4, 6, 8, 12, 13, 14, 17 }  
      ↑                               ↑  
    s.begin()                       s.end()
```

Observe a assimetria nos iteradores: `s.begin()` aponta para um elemento na estrutura de dados, enquanto `s.end()` aponta para fora da estrutura de dados. Assim, o intervalo definido pelos iteradores é *semiaberto*.

### Trabalhando com Intervalos

Iteradores são usados em funções da biblioteca padrão do C++ que recebem um intervalo de elementos em uma estrutura de dados. Normalmente, queremos processar todos os elementos em uma estrutura de dados, então os iteradores `begin` e `end` são fornecidos para a função.

Por exemplo, o código a seguir ordena um vetor usando a função `sort`, então inverte a ordem dos elementos usando a função `reverse`, e finalmente embaralha a ordem de os elementos usando a função `random_shuffle`.

```
sort(v.begin(), v.end());  
reverse(v.begin(), v.end());  
random_shuffle(v.begin(), v.end());
```

Essas funções também podem ser usadas com um vetor comum. Nesse caso, as funções recebem ponteiros para o vetor em vez de iteradores:



```
sort(a, a+n);
reverse(a, a+n);
random_shuffle(a, a+n);
```

## Iteradores de Conjunto

Iteradores são frequentemente usados para acessar elementos de um conjunto. O código a seguir cria um iterador `it` que aponta para o menor elemento em um conjunto:

```
set<int>::iterator it = s.begin();
```

Uma maneira mais curta de escrever o código é a seguinte:

```
auto it = s.begin();
```

O elemento para o qual um iterador aponta pode ser acessado usando o símbolo `*`. Por exemplo, o código a seguir imprime o primeiro elemento no conjunto:

```
auto it = s.begin();
cout << *it << "\n";
```

Iteradores podem ser movidos usando os operadores `++` (para frente) e `--` (para trás), o que significa que o iterador se move para o próximo ou anterior elemento no conjunto.

O código a seguir imprime todos os elementos em ordem crescente:

```
for (auto it = s.begin(); it != s.end(); it++) {
    cout << *it << "\n";
}
```

O código a seguir imprime o maior elemento no conjunto:

```
auto it = s.end(); it--;
cout << *it << "\n";
```

A função `find(x)` retorna um iterador que aponta para um elemento cujo valor é `x`. No entanto, se o conjunto não contém `x`, o iterador será `end`.

```
auto it = s.find(x);
if (it == s.end()) {
    // x nao foi encontrado
}
```

A função `lower_bound(x)` retorna um iterador para o menor elemento no conjunto cujo valor é *pelo menos* `x`, e a função `upper_bound(x)` retorna um iterador para o menor elemento no conjunto cujo valor é *maior que* `x`. Em ambas as funções, se tal elemento não existe, o valor de retorno é `end`. Essas funções

não são suportadas pela estrutura `unordered_set` que não mantém a ordem dos elementos.

Por exemplo, o código a seguir encontra o elemento mais próximo a  $x$ :

```
auto it = s.lower_bound(x);
if (it == s.begin()) {
    cout << *it << "\n";
} else if (it == s.end()) {
    it--;
    cout << *it << "\n";
} else {
    int a = *it; it--;
    int b = *it;
    if (x-b < a-x) cout << b << "\n";
    else cout << a << "\n";
}
```

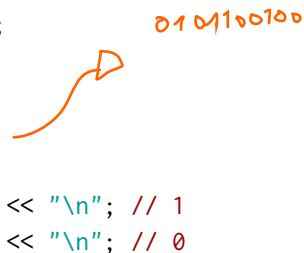
O código assume que o conjunto não está vazio, e passa por todos os casos possíveis usando um iterador `it`. Primeiro, o iterador aponta para o menor elemento cujo valor é pelo menos  $x$ . Se `it` for igual a `begin`, o elemento correspondente está mais próximo de  $x$ . Se `it` for igual a `end`, o maior elemento no conjunto está mais próximo de  $x$ . Se nenhum dos casos anteriores for válido, o elemento mais próximo a  $x$  é o elemento que corresponde a `it` ou o elemento anterior.

## 4.5 Outras Estruturas

### Bitset

Um **bitset** é um vetor cujo cada valor é 0 ou 1. Por exemplo, o código a seguir cria um `bitset` que contém 10 elementos:

```
bitset<10> s;
s[1] = 1;
s[3] = 1;
s[4] = 1;
s[7] = 1;
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```



O benefício de usar bitsets é que eles requerem menos memória do que vetores comuns, porque cada elemento em um `bitset` apenas usa um bit de memória. Por exemplo, se  $n$  bits são armazenados em um vetor `int`,  $32n$  bits de memória serão usados, mas um `bitset` correspondente requer apenas  $n$  bits de memória. Além disso, os valores de um `bitset` podem ser manipulados eficientemente usando operadores de bits, o que torna possível otimizar algoritmos usando conjuntos de bits.

O código a seguir mostra outra maneira de criar o `bitset` acima:

```
bitset<10> s(string("0010011010")); // da direita para a esquerda
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```

A função `count` retorna o número de uns no bitset:

```
bitset<10> s(string("0010011010"));
cout << s.count() << "\n"; // 4
```

O código a seguir mostra exemplos de uso de operações de bits:

```
bitset<10> a(string("0010110110"));
bitset<10> b(string("1011011000"));
cout << (a&b) << "\n"; // 0010010000
cout << (a|b) << "\n"; // 1011111110
cout << (a^b) << "\n"; // 1001101110
```

## Deque

Um **deque** é um vetor dinâmico cujo tamanho pode ser eficientemente alterado em ambas as extremidades do vetor. Como um vetor, um deque fornece as funções `push_back` e `pop_back`, mas também inclui as funções `push_front` e `pop_front` que não estão disponíveis em um vetor.

Um deque pode ser usado da seguinte forma:

```
deque<int> d;
d.push_back(5); // [5]
d.push_back(2); // [5,2]
d.push_front(3); // [3,5,2]
d.pop_back(); // [3,5]
d.pop_front(); // [5]
```

A implementação interna de um deque é mais complexa do que a de um vetor, e por esta razão, **um deque é mais lento que um vetor**. Ainda assim, adicionar e remover elementos leva tempo  $O(1)$  em média em ambas as extremidades.

## Pilha

Uma **pilha** é uma estrutura de dados que fornece duas operações de tempo  $O(1)$ : adicionar um elemento ao topo, e remover um elemento do topo. Só é possível acessar o topo elemento de uma pilha.

O código a seguir mostra como uma pilha pode ser usada:

```
stack<int> s;
s.push(3);
s.push(2);
s.push(5);
```

```
cout << s.top(); // 5
s.pop();
cout << s.top(); // 2
```

## Fila

Uma **fila** também fornece duas operações de tempo  $O(1)$ : adicionar um elemento ao final da fila, e remover o primeiro elemento da fila. Só é possível acessar o primeiro e último elemento de uma fila.

O código a seguir mostra como uma fila pode ser usada:

```
queue<int> q;
q.push(3);
q.push(2);
q.push(5);
cout << q.front(); // 3
q.pop();
cout << q.front(); // 2
```

## Fila de Prioridade

Uma **fila de prioridade** mantém um conjunto de elementos. As operações suportadas são inserção e, dependendo do tipo de fila, recuperação e remoção de o elemento mínimo ou máximo. A inserção e remoção levam tempo  $O(\log n)$ , e a recuperação leva tempo  $O(1)$ .

Enquanto um conjunto ordenado suporta eficientemente todas as operações de uma fila de prioridade, o benefício de usar uma fila de prioridade é que ela tem fatores constantes menores. Uma fila de prioridade é geralmente implementada usando uma estrutura de heap que é muito mais simples do que uma árvore binária balanceada usada em um conjunto ordenado.

Por padrão, os elementos em uma fila de prioridade C++ são classificados em ordem decrescente, e é possível encontrar e remover o maior elemento da fila. O código a seguir ilustra isso:

```
priority_queue<int> q;
q.push(3);
q.push(5);
q.push(7);
q.push(2);
cout << q.top() << "\n"; // 7
q.pop();
cout << q.top() << "\n"; // 5
q.pop();
q.push(6);
cout << q.top() << "\n"; // 6
q.pop();
```

Se quisermos criar uma fila de prioridade que suporte encontrar e remover o menor elemento, podemos fazê-lo da seguinte forma:

```
priority_queue<int,vector<int>,greater<int>> q;
```

## Estruturas de Dados Baseadas em Políticas

O compilador `g++` também suporta algumas estruturas de dados que não fazem parte da biblioteca padrão C++. Tais estruturas são chamadas de estruturas de dados *baseadas em políticas*. Para usar essas estruturas, as seguintes linhas devem ser adicionadas ao código:

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
```

Depois disso, podemos definir uma estrutura de dados `indexed_set` que é como `set` mas pode ser indexada como um vetor. A definição para valores `int` é a seguinte:

```
typedef tree<int,null_type,less<int>,rb_tree_tag,
            tree_order_statistics_node_update> indexed_set;
```

Agora podemos criar um conjunto da seguinte forma:

```
indexed_set s;
s.insert(2);
s.insert(3);
s.insert(7);
s.insert(9);
```

A especialidade deste conjunto é que temos acesso a os índices que os elementos teriam em um vetor ordenado. A função `find_by_order` retorna um iterador para o elemento em uma determinada posição:

```
auto x = s.find_by_order(2);
cout << *x << "\n"; // 7
```

E a função `order_of_key` retorna a posição de um determinado elemento:

```
cout << s.order_of_key(7) << "\n"; // 2
```

Se o elemento não aparecer no conjunto, obtemos a posição que o elemento teria no conjunto:

```
cout << s.order_of_key(6) << "\n"; // 2
cout << s.order_of_key(8) << "\n"; // 3
```

Ambas as funções funcionam em tempo logarítmico.

## 4.6 Comparação com Ordenação

Muitas vezes é possível resolver um problema usando estruturas de dados ou ordenação. Às vezes, existem diferenças notáveis na eficiência real dessas abordagens, que podem estar ocultas em suas complexidades de tempo.

Vamos considerar um problema onde recebemos duas listas  $A$  e  $B$  que contêm  $n$  elementos. Nossa tarefa é calcular o número de elementos que pertencem a ambas as listas. Por exemplo, para as listas

$$A = [5, 2, 8, 9] \quad \text{e} \quad B = [3, 2, 9, 5],$$

a resposta é 3 porque os números 2, 5 e 9 pertencem a ambas as listas.

Uma solução direta para o problema é percorrer todos os pares de elementos em tempo  $O(n^2)$ , mas a seguir vamos nos concentrar em algoritmos mais eficientes.

### Algoritmo 1

Construímos um conjunto dos elementos que aparecem em  $A$ , e depois disso, iteramos pelos elementos de  $B$  e verificamos para cada elemento se ele também pertence a  $A$ . Isso é eficiente porque os elementos de  $A$  estão em um conjunto. Usando a estrutura `set`, a complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n \log n)$ .

### Algoritmo 2

Não é necessário manter um conjunto ordenado, então, em vez da estrutura `set` também podemos usar a estrutura `unordered_set`. Esta é uma maneira fácil de tornar o algoritmo mais eficiente, porque só temos que mudar a estrutura de dados subjacente. A complexidade de tempo do novo algoritmo é  $O(n)$ .

### Algoritmo 3

Em vez de estruturas de dados, podemos usar a ordenação. Primeiro, ordenamos as listas  $A$  e  $B$ . Depois disso, iteramos pelas duas listas ao mesmo tempo e encontramos os elementos comuns. A complexidade de tempo da ordenação é  $O(n \log n)$ , e o resto do algoritmo funciona em tempo  $O(n)$ , então a complexidade de tempo total é  $O(n \log n)$ .

## Comparação de Eficiência

A tabela a seguir mostra a eficiência dos algoritmos acima quando  $n$  varia e os elementos das listas são inteiros aleatórios entre  $1 \dots 10^9$ :

$n$	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
$10^6$	1.5 s	0.3 s	0.2 s
$2 \cdot 10^6$	3.7 s	0.8 s	0.3 s
$3 \cdot 10^6$	5.7 s	1.3 s	0.5 s
$4 \cdot 10^6$	7.7 s	1.7 s	0.7 s
$5 \cdot 10^6$	10.0 s	2.3 s	0.9 s

Os algoritmos 1 e 2 são iguais, exceto que eles usam estruturas de conjunto diferentes. Neste problema, esta escolha tem um efeito importante sobre o tempo de execução, porque o Algoritmo 2 é 4 a 5 vezes mais rápido que o Algoritmo 1.

No entanto, o algoritmo mais eficiente é o Algoritmo 3 que usa ordenação. Ele usa apenas metade do tempo em comparação com o Algoritmo 2. Curiosamente, a complexidade de tempo do Algoritmo 1 e do Algoritmo 3 é  $O(n \log n)$ , mas apesar disso, o Algoritmo 3 é dez vezes mais rápido. Isso pode ser explicado pelo fato de que a ordenação é um procedimento simples e é feito apenas uma vez no início do Algoritmo 3, e o resto do algoritmo funciona em tempo linear. Por outro lado, o Algoritmo 1 mantém uma árvore binária balanceada complexa durante todo o algoritmo.





# Capítulo 5

## Busca completa

**Busca completa** é um método geral que pode ser usado para resolver quase qualquer problema algorítmico. A ideia é gerar todas as soluções possíveis para o problema usando força bruta, e então selecionar a melhor solução ou contar o número de soluções, dependendo do problema.

A busca completa é uma boa técnica se houver tempo suficiente para verificar todas as soluções, porque a busca é geralmente fácil de implementar e sempre fornece a resposta correta. Se a busca completa for muito lenta, outras técnicas, como algoritmos gulosos ou programação dinâmica, podem ser necessárias.

### 5.1 Gerando subconjuntos

Consideramos primeiro o problema de gerar todos os subconjuntos de um conjunto de  $n$  elementos. Por exemplo, os subconjuntos de  $\{0, 1, 2\}$  são  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$  e  $\{0, 1, 2\}$ . Existem dois métodos comuns para gerar subconjuntos: podemos realizar uma busca recursiva ou explorar a representação de bits de inteiros.

#### Método 1

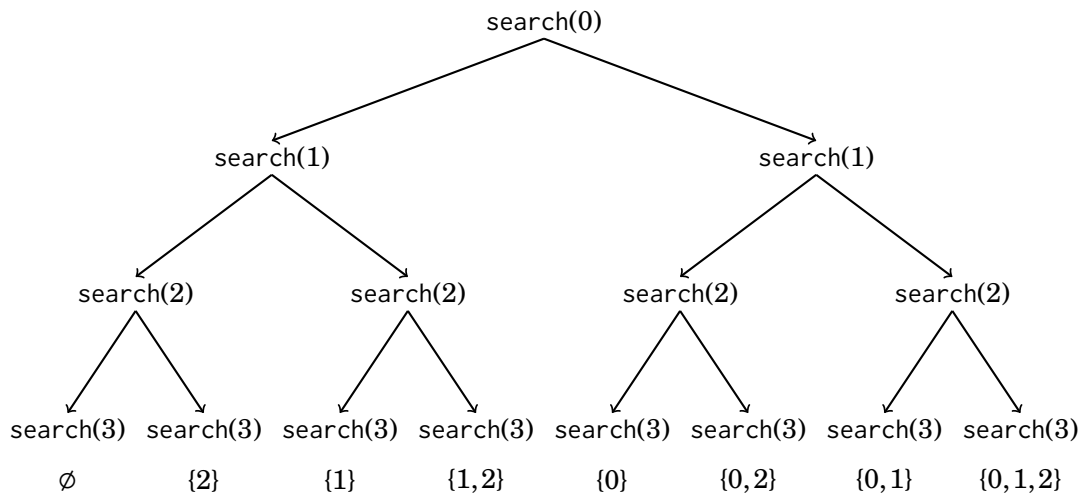
Uma maneira elegante de percorrer todos os subconjuntos de um conjunto é usar recursão. A seguinte função `search` gera os subconjuntos do conjunto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . A função mantém um vetor `subset` que conterá os elementos de cada subconjunto. A busca começa quando a função é chamada com o parâmetro 0.

```
void search(int k) {
    if (k == n) {
        // processa subconjunto
    } else {
        search(k+1);
        subset.push_back(k);
        search(k+1);
        subset.pop_back();
    }
}
```

}

Quando a função `search` é chamada com o parâmetro  $k$ , ela decide se inclui o elemento  $k$  no subconjunto ou não, e em ambos os casos, então chama a si mesma com o parâmetro  $k + 1$ . No entanto, se  $k = n$ , a função percebe que todos os elementos foram processados e um subconjunto foi gerado.

A seguinte árvore ilustra as chamadas de função quando  $n = 3$ . Podemos sempre escolher o ramo esquerdo ( $k$  não está incluído no subconjunto) ou o ramo direito ( $k$  está incluído no subconjunto).



## Método 2

Outra maneira de gerar subconjuntos é baseada na representação de bits de inteiros. Cada subconjunto de um conjunto de  $n$  elementos pode ser representado como uma sequência de  $n$  bits, que corresponde a um inteiro entre  $0 \dots 2^n - 1$ . Os uns na sequência de bits indicam quais elementos estão incluídos no subconjunto.

A convenção usual é que o último bit corresponde ao elemento 0, o penúltimo bit corresponde ao elemento 1, e assim por diante. Por exemplo, a representação de bits de 25 é 11001, que corresponde ao subconjunto  $\{0, 3, 4\}$ .

O seguinte código percorre os subconjuntos de um conjunto de  $n$  elementos:

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {  
    // processa subconjunto  
}
```

O seguinte código mostra como podemos encontrar os elementos de um subconjunto que corresponde a uma sequência de bits. Ao processar cada subconjunto, o código constrói um vetor que contém os elementos no subconjunto.

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {  
    vector<int> subset;  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        if (b & (1<<i)) subset.push_back(i);  
    }  
}
```

```
}
```

## 5.2 Gerando permutações

A seguir, consideramos o problema de gerar todas as permutações de um conjunto de  $n$  elementos. Por exemplo, as permutações de  $\{0, 1, 2\}$  são  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 1)$  e  $(2, 1, 0)$ . Novamente, existem duas abordagens: podemos usar recursão ou percorrer as permutações iterativamente.

### Método 1

Assim como os subconjuntos, as permutações podem ser geradas usando recursão. A seguinte função `search` percorre as permutações do conjunto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . A função constrói um vetor `permutation` que contém a permutação, e a busca começa quando a função é chamada sem parâmetros.

```
void search() {
    if (permutation.size() == n) {
        // processa permutacao
    } else {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (chosen[i]) continue;
            chosen[i] = true;
            permutation.push_back(i);
            search();
            chosen[i] = false;
            permutation.pop_back();
        }
    }
}
```

Cada chamada de função adiciona um novo elemento a `permutation`. O array `chosen` indica quais elementos já estão incluídos na permutação. Se o tamanho de `permutation` for igual ao tamanho do conjunto, uma permutação foi gerada.

### Método 2

Outro método para gerar permutações é começar com a permutação  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  e repetidamente usar uma função que constrói a próxima permutação em ordem crescente. A biblioteca padrão C++ contém a função `next_permutation` que pode ser usada para isso:

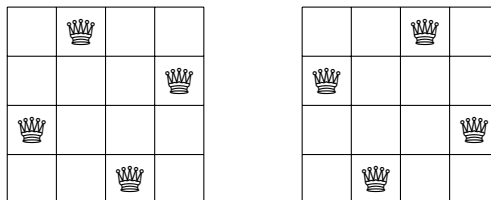
```
vector<int> permutation;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    permutation.push_back(i);
}
do {
```

```
// processa permutacao
} while (next_permutation(permutation.begin(), permutation.end()));
```

## 5.3 Backtracking

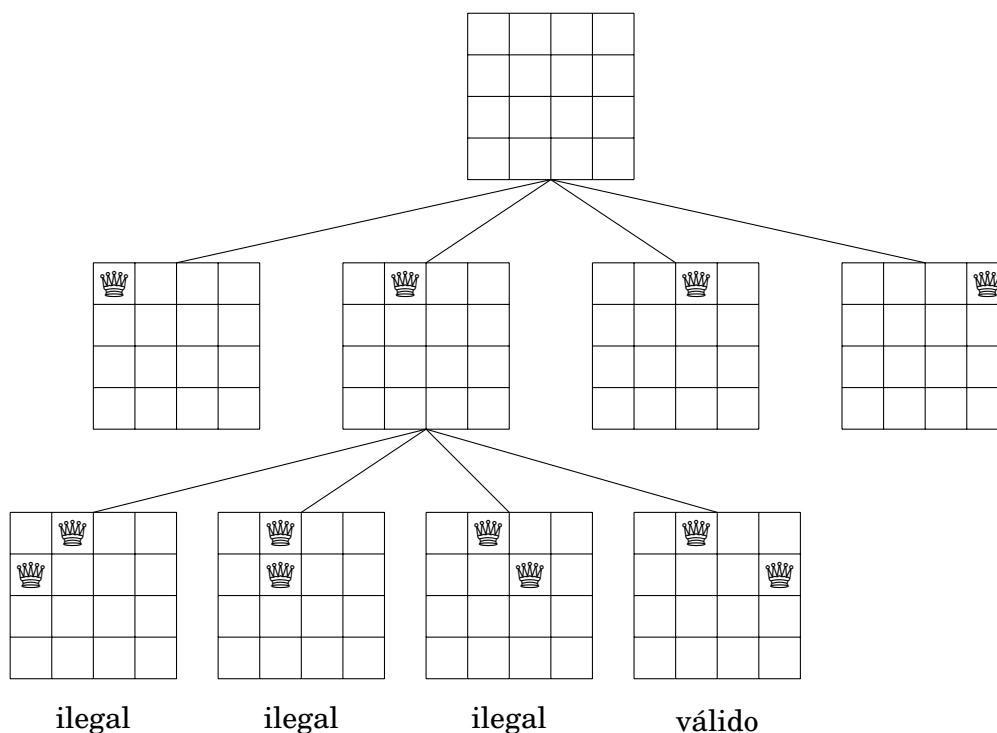
Um algoritmo de **backtracking** começa com uma solução vazia e estende a solução passo a passo. A busca percorre recursivamente todas as maneiras diferentes de como uma solução pode ser construída.

Como exemplo, considere o problema de calcular o número de maneiras pelas quais  $n$  rainhas podem ser colocadas em um tabuleiro de xadrez  $n \times n$  para que nenhuma rainha ataque a outra. Por exemplo, quando  $n = 4$ , existem duas soluções possíveis:



O problema pode ser resolvido usando backtracking colocando rainhas no tabuleiro linha por linha. Mais precisamente, exatamente uma rainha será colocada em cada linha para que nenhuma rainha ataque qualquer uma das rainhas colocadas anteriormente. Uma solução foi encontrada quando todas as  $n$  rainhas foram colocadas no tabuleiro.

Por exemplo, quando  $n = 4$ , alguma solução parcial gerada pelo algoritmo de backtracking é a seguinte:



No nível inferior, as três primeiras configurações são ilegais, porque as rainhas se atacam. No entanto, a quarta configuração é válida e pode ser estendida para uma solução completa por colocando mais duas rainhas no tabuleiro. Existe apenas uma maneira de colocar as duas rainhas restantes.

O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

```
void search(int y) {
    if (y == n) {
        count++;
        return;
    }
    for (int x = 0; x < n; x++) {
        if (column[x] || diag1[x+y] || diag2[x-y+n-1]) continue;
        column[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 1;
        search(y+1);
        column[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 0;
    }
}
```

A busca começa chamando `search(0)`. O tamanho do tabuleiro é  $n \times n$ , e o código calcula o número de soluções para `count`.

O código assume que as linhas e colunas do tabuleiro são numeradas de 0 a  $n - 1$ . Quando a função `search` é chamada com o parâmetro  $y$ , ela coloca uma rainha na linha  $y$  e então chama a si mesma com o parâmetro  $y + 1$ . Então, se  $y = n$ , uma solução foi encontrada e a variável `count` é incrementada em um.

O array `column` mantém o controle das colunas que contêm uma rainha, e os arrays `diag1` e `diag2` mantêm o controle das diagonais. Não é permitido adicionar outra rainha a uma coluna ou diagonal que já contém uma rainha. Por exemplo, as colunas e diagonais do tabuleiro  $4 \times 4$  são numeradas da seguinte forma:

0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3

column

0	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

diag1

3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3

diag2

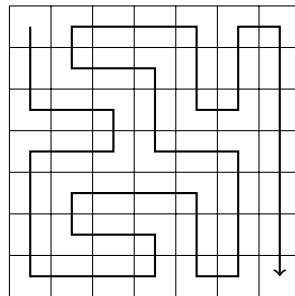
Seja  $q(n)$  o número de maneiras de colocar  $n$  rainhas em um tabuleiro de xadrez  $n \times n$ . O algoritmo de backtracking acima nos diz que, por exemplo,  $q(8) = 92$ . Quando  $n$  aumenta, a busca rapidamente se torna lenta, porque o número de soluções aumenta exponencialmente. Por exemplo, calcular  $q(16) = 14772512$  usando o algoritmo acima já leva cerca de um minuto em um computador moderno<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Não há maneira conhecida de calcular com eficiência valores maiores de  $q(n)$ . O recorde atual é  $q(27) = 234907967154122528$ , calculado em 2016 [55].

## 5.4 Podando a busca

Muitas vezes podemos otimizar o backtracking podando a árvore de busca. A ideia é adicionar "inteligência" ao algoritmo para que ele perceba o mais rápido possível se uma solução parcial não pode ser estendida para uma solução completa. Essas otimizações podem ter um tremendo efeito na eficiência da busca.

Vamos considerar o problema de calcular o número de caminhos em uma grade  $n \times n$  do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, de forma que o caminho visite cada quadrado exatamente uma vez. Por exemplo, em uma grade  $7 \times 7$ , existem 111712 tais caminhos. Um dos caminhos é o seguinte:



Vamos nos concentrar no caso  $7 \times 7$ , porque seu nível de dificuldade é apropriado às nossas necessidades. Começamos com um algoritmo de backtracking direto, e então o otimizamos passo a passo usando observações de como a busca pode ser podada. Após cada otimização, medimos o tempo de execução do algoritmo e o número de chamadas recursivas, para que possamos ver claramente o efeito de cada otimização na eficiência da busca.

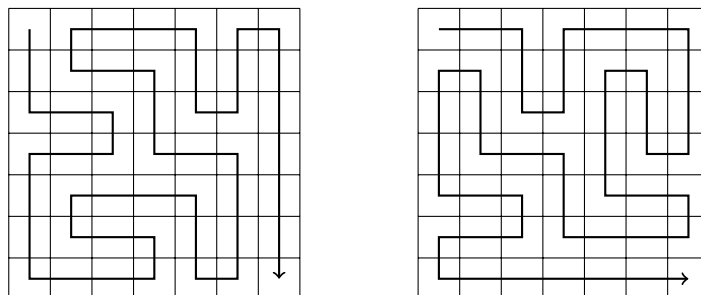
### Algoritmo básico

A primeira versão do algoritmo não contém nenhuma otimização. Nós simplesmente usamos backtracking para gerar todos os caminhos possíveis do canto superior esquerdo para o canto inferior direito e contamos o número de tais caminhos.

- tempo de execução: 483 segundos
- número de chamadas recursivas: 76 bilhões

### Otimização 1

Em qualquer solução, primeiro nos movemos um passo para baixo ou para a direita. Há sempre dois caminhos que são simétricos sobre a diagonal da grade após o primeiro passo. Por exemplo, os seguintes caminhos são simétricos:

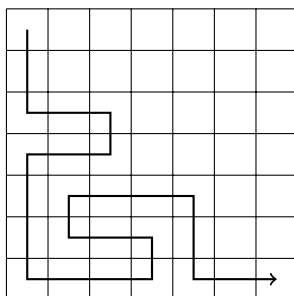


Portanto, podemos decidir que sempre nos movemos um passo para baixo (ou para a direita), e finalmente multiplicamos o número de soluções por dois.

- tempo de execução: 244 segundos
- número de chamadas recursivas: 38 bilhões

## Otimização 2

Se o caminho atingir o quadrado inferior direito antes de visitar todos os outros quadrados da grade, é claro que não será possível completar a solução. Um exemplo disso é o seguinte caminho:

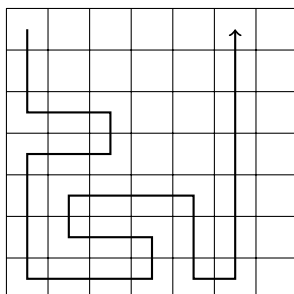


Usando essa observação, podemos encerrar a busca imediatamente se atingirmos o quadrado inferior direito muito cedo.

- tempo de execução: 119 segundos
- número de chamadas recursivas: 20 bilhões

## Otimização 3

Se o caminho tocar uma parede e puder virar à esquerda ou à direita, a grade se divide em duas partes que contêm quadrados não visitados. Por exemplo, na seguinte situação, o caminho pode virar à esquerda ou à direita:

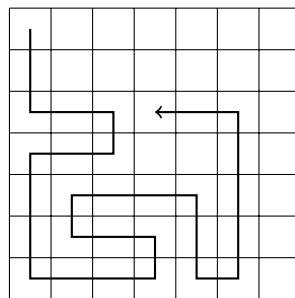


Neste caso, não podemos mais visitar todos os quadrados, então podemos encerrar a busca. Esta otimização é muito útil:

- tempo de execução: 1.8 segundos
- número de chamadas recursivas: 221 milhões

## Otimização 4

A ideia da Otimização 3 pode ser generalizada: se o caminho não puder continuar em frente mas pode virar à esquerda ou à direita, a grade se divide em duas partes que contêm quadrados não visitados. Por exemplo, considere o seguinte caminho:



É claro que não podemos mais visitar todos os quadrados, então podemos encerrar a busca. Após esta otimização, a busca é muito eficiente:

- tempo de execução: 0.6 segundos
- número de chamadas recursivas: 69 milhões

Agora é um bom momento para parar de otimizar o algoritmo e ver o que alcançamos. O tempo de execução do algoritmo original foi de 483 segundos, e agora, após as otimizações, o tempo de execução é de apenas 0.6 segundos. Assim, o algoritmo se tornou quase 1000 vezes mais rápido após as otimizações.

Este é um fenômeno usual em backtracking, porque a árvore de busca é geralmente grande e até mesmo observações simples podem efetivamente podar a busca. Especialmente úteis são as otimizações que ocorrem durante as primeiras etapas do algoritmo, ou seja, no topo da árvore de busca.

## 5.5 Encontro no meio

**Encontrar no meio** é uma técnica onde o espaço de busca é dividido em duas partes de tamanho aproximadamente igual. Uma busca separada é realizada para ambas as partes, e finalmente os resultados das buscas são combinados.

A técnica pode ser usada se houver uma maneira eficiente de combinar os resultados das buscas. Nessa situação, as duas buscas podem exigir menos tempo



do que uma busca grande. Tipicamente, podemos transformar um fator de  $2^n$  em um fator de  $2^{n/2}$  usando a técnica de encontro no meio.

Como exemplo, considere um problema onde recebemos uma lista de  $n$  números e um número  $x$ , e queremos descobrir se é possível escolher alguns números da lista de modo que sua soma seja  $x$ . Por exemplo, dada a lista  $[2, 4, 5, 9]$  e  $x = 15$ , podemos escolher os números  $[2, 4, 9]$  para obter  $2 + 4 + 9 = 15$ . No entanto, se  $x = 10$  para a mesma lista, não é possível formar a soma.

Um algoritmo simples para o problema é percorrer todos os subconjuntos dos elementos e verificar se a soma de qualquer um dos subconjuntos é  $x$ . O tempo de execução de tal algoritmo é  $O(2^n)$ , porque existem  $2^n$  subconjuntos. No entanto, usando a técnica de encontro no meio, podemos alcançar um algoritmo de tempo  $O(2^{n/2})$  mais eficiente<sup>2</sup>. Observe que  $O(2^n)$  e  $O(2^{n/2})$  são complexidades diferentes porque  $2^{n/2}$  é igual a  $\sqrt{2^n}$ .

A ideia é dividir a lista em duas listas  $A$  e  $B$  tais que ambas as listas contêm cerca de metade dos números. A primeira busca gera todos os subconjuntos de  $A$  e armazena suas somas em uma lista  $S_A$ . Da mesma forma, a segunda busca cria uma lista  $S_B$  a partir de  $B$ . Depois disso, basta verificar se é possível escolher um elemento de  $S_A$  e outro elemento de  $S_B$  tal que sua soma seja  $x$ . Isso é possível exatamente quando há uma maneira de formar a soma  $x$  usando os números da lista original.

Por exemplo, suponha que a lista seja  $[2, 4, 5, 9]$  e  $x = 15$ . Primeiro, dividimos a lista em  $A = [2, 4]$  e  $B = [5, 9]$ . Depois disso, criamos as listas  $S_A = [0, 2, 4, 6]$  e  $S_B = [0, 5, 9, 14]$ . Neste caso, a soma  $x = 15$  é possível de formar, porque  $S_A$  contém a soma 6,  $S_B$  contém a soma 9, e  $6 + 9 = 15$ . Isso corresponde à solução  $[2, 4, 9]$ .

Podemos implementar o algoritmo de modo que sua complexidade de tempo seja  $O(2^{n/2})$ . Primeiro, geramos listas *ordenadas*  $S_A$  e  $S_B$ , o que pode ser feito em tempo  $O(2^{n/2})$  usando uma técnica semelhante à da mesclagem. Depois disso, como as listas estão ordenadas, podemos verificar em tempo  $O(2^{n/2})$  se a soma  $x$  pode ser criada a partir de  $S_A$  e  $S_B$ .

---

<sup>2</sup>Esta ideia foi introduzida em 1974 por E. Horowitz e S. Sahni [39].



# Capítulo 6

## Algoritmos gulosos

Um **algoritmo guloso** constrói uma solução para o problema sempre fazendo a escolha que parece ser a melhor no momento. Um algoritmo guloso nunca volta atrás em suas escolhas, mas constrói diretamente a solução final. Por esta razão, os algoritmos gulosos são geralmente muito eficientes.

A dificuldade em projetar algoritmos gulosos está em encontrar uma estratégia gulosa que sempre produza uma solução ótima para o problema. As escolhas localmente ótimas num algoritmo guloso devem ser também globalmente ótimas. Muitas vezes é difícil argumentar que um algoritmo guloso funciona.

### 6.1 Problema das moedas

Como primeiro exemplo, consideramos um problema onde nos é dado um conjunto de moedas e nossa tarefa é formar uma soma de dinheiro  $n$  usando as moedas. Os valores das moedas são  $\text{moedas} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , e cada moeda pode ser usada quantas vezes quisermos. Qual é o número mínimo de moedas necessárias?

Por exemplo, se as moedas forem as moedas de euro (em centavos)

$$\{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200\}$$

e  $n = 520$ , precisamos de pelo menos quatro moedas. A solução ótima é selecionar as moedas  $200 + 200 + 100 + 20$  cuja soma é 520.

#### Algoritmo guloso

Um algoritmo guloso simples para o problema seleciona sempre a maior moeda possível, até que a soma de dinheiro necessária seja construída. Este algoritmo funciona no caso de exemplo, porque primeiro selecionamos duas moedas de 200 centavos, depois uma moeda de 100 centavos e finalmente uma moeda de 20 centavos. Mas será que este algoritmo funciona sempre?

Acontece que se as moedas são as moedas de euro, o algoritmo guloso *sempre* funciona, i.e., ele produz sempre uma solução com o menor número possível de moedas. A correção do algoritmo pode ser mostrada da seguinte forma:

Primeiro, cada moeda de 1, 5, 10, 50 e 100 aparece no máximo uma vez numa solução ótima, porque se a solução contivesse duas moedas dessas, poderíamos

substituí-las por uma moeda e obter uma solução melhor. Por exemplo, se a solução contivesse as moedas  $5 + 5$ , poderíamos substituí-las pela moeda 10.

Da mesma forma, as moedas de 2 e 20 aparecem no máximo duas vezes numa solução ótima, porque poderíamos substituir as moedas  $2 + 2 + 2$  pelas moedas  $5 + 1$  e as moedas  $20 + 20 + 20$  pelas moedas  $50 + 10$ . Além disso, uma solução ótima não pode conter as moedas  $2 + 2 + 1$  ou  $20 + 20 + 10$ , porque poderíamos substituí-las pelas moedas 5 e 50.

Usando estas observações, podemos mostrar para cada moeda  $x$  que não é possível construir de forma ótima uma soma  $x$  ou qualquer soma maior usando apenas moedas que são menores que  $x$ . Por exemplo, se  $x = 100$ , a maior soma ótima usando as moedas menores é  $50 + 20 + 20 + 5 + 2 + 2 = 99$ . Assim, o algoritmo guloso que seleciona sempre a maior moeda produz a solução ótima.

Este exemplo mostra que pode ser difícil argumentar que um algoritmo guloso funciona, mesmo que o próprio algoritmo seja simples.

## Caso geral

No caso geral, o conjunto de moedas pode conter quaisquer moedas e o algoritmo guloso *não* produz necessariamente uma solução ótima.

Podemos provar que um algoritmo guloso não funciona mostrando um contraexemplo onde o algoritmo dá uma resposta errada. Neste problema podemos facilmente encontrar um contraexemplo: se as moedas são  $\{1, 3, 4\}$  e a soma alvo é 6, o algoritmo guloso produz a solução  $4 + 1 + 1$  enquanto que a solução ótima é  $3 + 3$ .

Não se sabe se o problema geral das moedas pode ser resolvido usando algum algoritmo guloso<sup>1</sup>. No entanto, como veremos no Capítulo 7, em alguns casos, o problema geral pode ser eficientemente resolvido usando um algoritmo de programação dinâmica que dá sempre a resposta correta.

## 6.2 Escalonamento

Muitos problemas de escalonamento podem ser resolvidos usando algoritmos gulosos. Um problema clássico é o seguinte: Dados  $n$  eventos com seus horários de início e fim, encontre um escalonamento que inclua o maior número possível de eventos. Não é possível selecionar um evento parcialmente. Por exemplo, considere os seguintes eventos:

evento	hora de início	hora de fim
<i>A</i>	1	3
<i>B</i>	2	5
<i>C</i>	3	9
<i>D</i>	6	8

Neste caso, o número máximo de eventos é dois. Por exemplo, podemos selecionar os eventos *B* e *D* da seguinte forma:

---

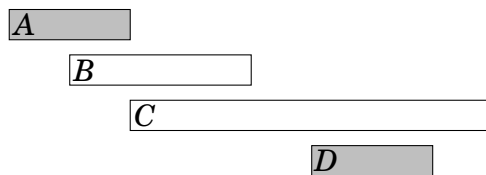
<sup>1</sup>No entanto, é possível *verificar* em tempo polinomial se o algoritmo guloso apresentado neste capítulo funciona para um dado conjunto de moedas [53].



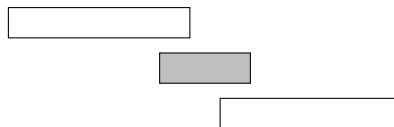
É possível inventar vários algoritmos gulosos para o problema, mas qual deles funciona em todos os casos?

## Algoritmo 1

A primeira ideia é selecionar os eventos *mais curtos* possíveis. No caso de exemplo, este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



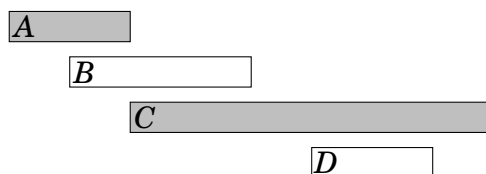
No entanto, selecionar eventos curtos nem sempre é uma estratégia correta. Por exemplo, o algoritmo falha no seguinte caso:



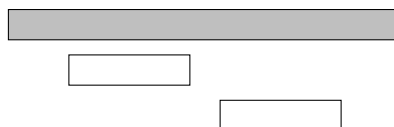
Se selecionarmos o evento curto, só podemos selecionar um evento. No entanto, seria possível selecionar ambos os eventos longos.

## Algoritmo 2

Outra ideia é selecionar sempre o próximo evento possível que *começa* o mais cedo possível. Este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



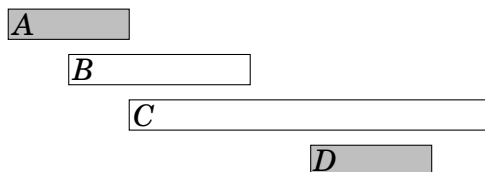
No entanto, podemos encontrar um contraexemplo também para este algoritmo. Por exemplo, no seguinte caso, o algoritmo seleciona apenas um evento:



Se selecionarmos o primeiro evento, não é possível selecionar quaisquer outros eventos. No entanto, seria possível selecionar os outros dois eventos.

### Algoritmo 3

A terceira ideia é selecionar sempre o próximo evento possível que *termina* o mais cedo possível. Este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



Acontece que este algoritmo *sempre* produz uma solução ótima. A razão para isso é que é sempre uma escolha ótima selecionar primeiro um evento que termina o mais cedo possível. Depois disso, é uma escolha ótima selecionar o próximo evento usando a mesma estratégia, etc., até não podermos selecionar mais eventos.

Uma forma de argumentar que o algoritmo funciona é considerar o que acontece se selecionarmos primeiro um evento que termina mais tarde do que o evento que termina o mais cedo possível. Agora, teremos no máximo um número igual de escolhas para selecionar o próximo evento. Portanto, selecionar um evento que termina mais tarde nunca pode resultar numa solução melhor, e o algoritmo guloso está correto.

## 6.3 Tarefas e prazos

Vamos agora considerar um problema onde nos são dadas  $n$  tarefas com durações e prazos e nossa tarefa é escolher uma ordem para realizar as tarefas. Para cada tarefa, ganhamos  $d - x$  pontos onde  $d$  é o prazo da tarefa e  $x$  é o momento em que terminamos a tarefa. Qual é a maior pontuação total possível que podemos obter?

Por exemplo, suponha que as tarefas são as seguintes:

tarefa	duração	prazo
<i>A</i>	4	2
<i>B</i>	3	5
<i>C</i>	2	7
<i>D</i>	4	5

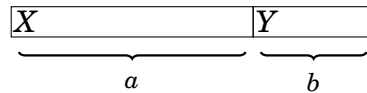
Neste caso, um escalonamento ótimo para as tarefas é o seguinte:



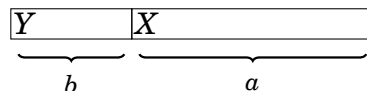
Nesta solução, *C* rende 5 pontos, *B* rende 0 pontos, *A* rende  $-7$  pontos e *D* rende  $-8$  pontos, então a pontuação total é  $-10$ .

Surpreendentemente, a solução ótima para o problema sequer depende dos prazos, uma estratégia gulosa correta é simplesmente executar as tarefas *ordenadas por suas durações* em ordem crescente. A razão para isso é que se alguma vez

executarmos duas tarefas, uma após a outra, de tal forma que a primeira tarefa demore mais tempo do que a segunda tarefa, podemos obter uma solução melhor se trocarmos as tarefas. Por exemplo, considere o seguinte escalonamento:



Aqui  $a > b$ , então devemos trocar as tarefas:



Agora  $X$  dá  $b$  pontos a menos e  $Y$  dá  $a$  pontos a mais, então a pontuação total aumenta em  $a - b > 0$ . Numa solução ótima, para quaisquer duas tarefas consecutivas, deve verificar-se que a tarefa mais curta vem antes da tarefa mais longa. Assim, as tarefas devem ser executadas ordenadas pelas suas durações.

## 6.4 Minimizando somas

Consideramos agora um problema onde nos são dados  $n$  números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e nossa tarefa é encontrar um valor  $x$  que minimize a soma

$$|a_1 - x|^c + |a_2 - x|^c + \dots + |a_n - x|^c.$$

Vamos focar nos casos  $c = 1$  e  $c = 2$ .

### Caso $c = 1$

Neste caso, devemos minimizar a soma

$$|a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|.$$

Por exemplo, se os números são  $[1, 2, 9, 2, 6]$ , a melhor solução é selecionar  $x = 2$  o que produz a soma

$$|1 - 2| + |2 - 2| + |9 - 2| + |2 - 2| + |6 - 2| = 12.$$

No caso geral, a melhor escolha para  $x$  é a *mediana* dos números, i.e., o número do meio após a ordenação. Por exemplo, a lista  $[1, 2, 9, 2, 6]$  torna-se  $[1, 2, 2, 6, 9]$  após a ordenação, então a mediana é 2.

A mediana é uma escolha ótima, porque se  $x$  é menor que a mediana, a soma torna-se menor ao aumentar  $x$ , e se  $x$  é maior que a mediana, a soma torna-se menor ao diminuir  $x$ . Portanto, a solução ótima é que  $x$  seja a mediana. Se  $n$  é par e existem duas medianas, ambas as medianas e todos os valores entre elas são escolhas ótimas.

## Caso $c = 2$

Neste caso, devemos minimizar a soma

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2.$$

Por exemplo, se os números são  $[1, 2, 9, 2, 6]$ , a melhor solução é selecionar  $x = 4$  o que produz a soma

$$(1 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (9 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (6 - 4)^2 = 46.$$

No caso geral, a melhor escolha para  $x$  é a *média* dos números. No exemplo, a média é  $(1 + 2 + 9 + 2 + 6)/5 = 4$ . Este resultado pode ser derivado apresentando a soma da seguinte forma:

$$nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

A última parte não depende de  $x$ , portanto podemos ignorá-la. As partes restantes formam uma função  $nx^2 - 2xs$  onde  $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ . Esta é uma parábola com a concavidade voltada para cima com raízes  $x = 0$  e  $x = 2s/n$ , e o valor mínimo é a média das raízes  $x = s/n$ , i.e., a média dos números  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

## 6.5 Compressão de dados

Um **código binário** atribui para cada caractere de uma string uma **palavra de código** que consiste em bits. Podemos *comprimir* a string usando o código binário substituindo cada caractere pela palavra de código correspondente. Por exemplo, o seguinte código binário atribui palavras de código para os caracteres A–D:

caractere	palavra de código
A	00
B	01
C	10
D	11

Este é um código de **comprimento constante** o que significa que o comprimento de cada palavra de código é o mesmo. Por exemplo, podemos comprimir a string AABACDACA da seguinte forma:

000001001011001000

Usando este código, o comprimento da string comprimida é de 18 bits. No entanto, podemos comprimir a string melhor se usarmos um código de **comprimento variável** onde as palavras de código podem ter comprimentos diferentes. Então podemos dar palavras de código curtas para caracteres que aparecem frequentemente e palavras de código longas para caracteres que aparecem raramente. Acontece que um código **ótimo** para a string acima é o seguinte:



caractere	palavra de código
A	0
B	110
C	10
D	111

Um código ótimo produz uma string comprimida que é o mais curta possível. Neste caso, a string comprimida usando o código ótimo é

001100101110100,

então são necessários apenas 15 bits em vez de 18 bits. Assim, graças a um código melhor, foi possível poupar 3 bits na string comprimida.

Exigimos que nenhuma palavra de código seja um prefixo de outra palavra de código. Por exemplo, não é permitido que um código contenha ambas as palavras de código 10 e 1011. A razão para isso é que queremos ser capazes de gerar a string original a partir da string comprimida. Se uma palavra de código pudesse ser um prefixo de outra palavra de código, isso nem sempre seria possível. Por exemplo, o seguinte código *não* é válido:

caractere	palavra de código
A	10
B	11
C	1011
D	111

Usando este código, não seria possível saber se a string comprimida 1011 corresponde à string AB ou à string C.

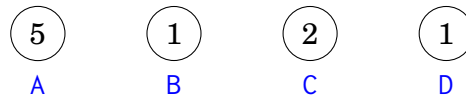
## Codificação de Huffman

**Codificação de Huffman**<sup>2</sup> é um algoritmo guloso que constrói um código ótimo para comprimir uma dada string. O algoritmo constrói uma árvore binária com base nas frequências dos caracteres na string, e a palavra de código de cada caractere pode ser lida seguindo um caminho desde a raiz até ao nó correspondente. Um movimento para a esquerda corresponde ao bit 0, e um movimento para a direita corresponde ao bit 1.

Inicialmente, cada caractere da string é representado por um nó cujo peso é o número de vezes que o caractere ocorre na string. Então, em cada passo, dois nós com pesos mínimos são combinados criando um novo nó cujo peso é a soma dos pesos dos nós originais. O processo continua até que todos os nós tenham sido combinados.

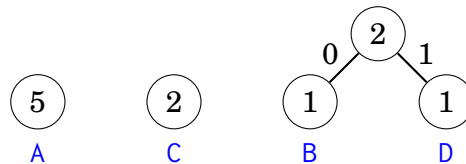
A seguir, veremos como a Codificação de Huffman cria o código ótimo para a string AABACDACA. Inicialmente, existem quatro nós que correspondem aos caracteres da string:

<sup>2</sup>D. A. Huffman descobriu este método ao resolver um trabalho de um curso universitário e publicou o algoritmo em 1952 [40].

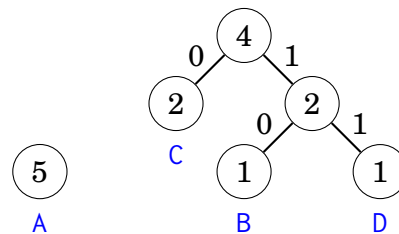


O nó que representa o caractere A tem peso 5 porque o caractere A aparece 5 vezes na string. Os outros pesos foram calculados da mesma forma.

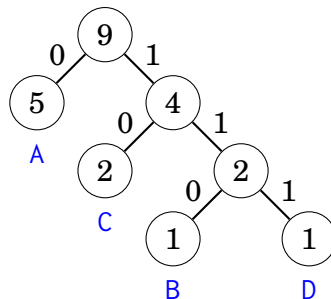
O primeiro passo é combinar os nós que correspondem aos caracteres B e D, ambos com peso 1. O resultado é:



Depois disso, os nós com peso 2 são combinados:



Finalmente, os dois nós restantes são combinados:



Agora todos os nós estão na árvore, então o código está pronto. As seguintes palavras de código podem ser lidas a partir da árvore:

caractere	palavra de código
A	0
B	110
C	10
D	111

# Capítulo 7

## Programação dinâmica

**Programação dinâmica** é uma técnica que combina a corretude da busca completa com a eficiência dos algoritmos gulosos. A programação dinâmica pode ser aplicada se o problema puder ser dividido em subproblemas sobrepostos que podem ser resolvidos independentemente.

Existem dois usos para a programação dinâmica:

- **Encontrar uma solução ótima:** Queremos encontrar uma solução que seja a maior possível ou a menor possível.
- **Contar o número de soluções:** Queremos calcular o número total de soluções possíveis.

Veremos primeiro como a programação dinâmica pode ser usada para encontrar uma solução ótima, e então usaremos a mesma ideia para contar as soluções.

Entender a programação dinâmica é um marco na carreira de todo programador competitivo. Enquanto a ideia básica é simples, o desafio é como aplicar a programação dinâmica a diferentes problemas. Este capítulo apresenta um conjunto de problemas clássicos que são um bom ponto de partida.

### 7.1 Problema das moedas

Vamos primeiro nos concentrar em um problema que já vimos no Capítulo 6: Dado um conjunto de valores de moedas  $\text{moedas} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  e uma soma alvo de dinheiro  $n$ , nossa tarefa é formar a soma  $n$  usando o menor número possível de moedas.

No Capítulo 6, resolvemos o problema usando um algoritmo guloso que sempre escolhe a maior moeda possível. O algoritmo guloso funciona, por exemplo, quando as moedas são as moedas de euro, mas no caso geral, o algoritmo guloso não produz necessariamente uma solução ótima.

Agora é hora de resolver o problema de forma eficiente usando programação dinâmica, para que o algoritmo funcione para qualquer conjunto de moedas. O algoritmo de programação dinâmica é baseado em uma função recursiva que percorre todas as possibilidades de como formar a soma, como um algoritmo de

força bruta. No entanto, o algoritmo de programação dinâmica é eficiente porque usa *memoização* e calcula a resposta para cada subproblema apenas uma vez.

## Formulação recursiva

A ideia da programação dinâmica é formular o problema recursivamente para que a solução do problema possa ser calculada a partir de soluções para subproblemas menores. No problema das moedas, um problema recursivo natural é o seguinte: qual é o menor número de moedas necessário para formar uma soma  $x$ ?

Seja  $\text{resolver}(x)$  o número mínimo de moedas necessárias para uma soma  $x$ . Os valores da função dependem dos valores das moedas. Por exemplo, se  $\text{moedas} = \{1, 3, 4\}$ , os primeiros valores da função são os seguintes:

$\text{resolver}(0)$	$=$	0
$\text{resolver}(1)$	$=$	1
$\text{resolver}(2)$	$=$	2
$\text{resolver}(3)$	$=$	1
$\text{resolver}(4)$	$=$	1
$\text{resolver}(5)$	$=$	2
$\text{resolver}(6)$	$=$	2
$\text{resolver}(7)$	$=$	2
$\text{resolver}(8)$	$=$	2
$\text{resolver}(9)$	$=$	3
$\text{resolver}(10)$	$=$	3

Por exemplo,  $\text{resolver}(10) = 3$ , porque pelo menos 3 moedas são necessárias para formar a soma 10. A solução ótima é  $3 + 3 + 4 = 10$ .

A propriedade essencial de  $\text{resolver}$  é que seus valores podem ser calculados recursivamente a partir de seus valores menores. A ideia é focar na *primeira* moeda que escolhemos para a soma. Por exemplo, no cenário acima, a primeira moeda pode ser 1, 3 ou 4. Se escolhermos primeiro a moeda 1, a tarefa restante é formar a soma 9 usando o número mínimo de moedas, que é um subproblema do problema original. Claro, o mesmo se aplica às moedas 3 e 4. Assim, podemos usar a seguinte fórmula recursiva para calcular o número mínimo de moedas:

$$\begin{aligned}\text{resolver}(x) = \min(\text{resolver}(x-1) + 1, \\ \text{resolver}(x-3) + 1, \\ \text{resolver}(x-4) + 1).\end{aligned}$$

O caso base da recursão é  $\text{resolver}(0) = 0$ , porque nenhuma moeda é necessária para formar uma soma vazia. Por exemplo,

$$\text{resolver}(10) = \text{resolver}(7) + 1 = \text{resolver}(4) + 2 = \text{resolver}(0) + 3 = 3.$$

Agora estamos prontos para fornecer uma função recursiva geral que calcula o número mínimo de moedas necessárias para formar uma soma  $x$ :

$$\text{resolver}(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \min_{c \in \text{moedas}} \text{resolver}(x - c) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Primeiro, se  $x < 0$ , o valor é  $\infty$ , porque é impossível formar uma soma negativa de dinheiro. Então, se  $x = 0$ , o valor é 0, porque nenhuma moeda é necessária para formar uma soma vazia. Finalmente, se  $x > 0$ , a variável  $c$  percorre todas as possibilidades de como escolher a primeira moeda da soma.

Uma vez encontrada uma função recursiva que resolve o problema, podemos implementar diretamente uma solução em C++ (a constante INF denota infinito):

```
int resolver(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    int melhor = INF;
    for (auto c : moedas) {
        melhor = min(melhor, resolver(x-c)+1);
    }
    return melhor;
}
```

Ainda assim, esta função não é eficiente, porque pode haver um número exponencial de maneiras de construir a soma. No entanto, a seguir veremos como tornar a função eficiente usando uma técnica chamada memoização.

## Usando memoização

A ideia da programação dinâmica é usar **memoização** para calcular eficientemente valores de uma função recursiva. Isso significa que os valores da função são armazenados em um array após o cálculo. Para cada parâmetro, o valor da função é calculado recursivamente apenas uma vez e, depois disso, o valor pode ser recuperado diretamente do array.

Neste problema, usamos arrays

```
bool pronto[N];
int valor[N];
```

onde `pronto[x]` indica se o valor de `resolver(x)` foi calculado, e se foi, `valor[x]` contém esse valor. A constante  $N$  foi escolhida de forma que todos os valores necessários caibam nos arrays.

Agora a função pode ser eficientemente implementada da seguinte forma:

```
int resolver(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    if (pronto[x]) return valor[x];
    int melhor = INF;
    for (auto c : moedas) {
        melhor = min(melhor, resolver(x-c)+1);
    }
    valor[x] = melhor;
    pronto[x] = true;
}
```

```
    return melhor;
}
```

A função lida com os casos base  $x < 0$  e  $x = 0$  como anteriormente. Então a função verifica em `pronto[x]` se `resolver(x)` já foi armazenado em `valor[x]`, e se foi, a função o retorna diretamente. Caso contrário, a função calcula o valor de `resolver(x)` recursivamente e o armazena em `valor[x]`.

Esta função funciona de forma eficiente, porque a resposta para cada parâmetro  $x$  é calculada recursivamente apenas uma vez. Depois que um valor de `resolver(x)` é armazenado em `valor[x]`, ele pode ser recuperado de forma eficiente sempre que a função for chamada novamente com o parâmetro  $x$ . A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(nk)$ , onde  $n$  é a soma alvo e  $k$  é o número de moedas.

Observe que também podemos construir o array `valor` *iterativamente* usando um loop que simplesmente calcula todos os valores de `resolver` para os parâmetros  $0 \dots n$ :

```
valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    valor[x] = INF;
    for (auto c : moedas) {
        if (x-c >= 0) {
            valor[x] = min(valor[x], valor[x-c]+1);
        }
    }
}
```

Na verdade, a maioria dos programadores competitivos prefere esta implementação, porque é mais curta e tem menores fatores constantes. De agora em diante, também usaremos implementações iterativas em nossos exemplos. Ainda assim, geralmente é mais fácil pensar em soluções de programação dinâmica em termos de funções recursivas.

## Construindo uma solução

Às vezes, somos solicitados a encontrar o valor de uma solução ótima e dar um exemplo de como essa solução pode ser construída. No problema das moedas, por exemplo, podemos declarar outro array que indica para cada soma de dinheiro a primeira moeda em uma solução ótima:

```
int primeiro[N];
```

Então, podemos modificar o algoritmo da seguinte forma:

```
valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    valor[x] = INF;
    for (auto c : moedas) {
        if (x-c >= 0 && valor[x-c]+1 < valor[x]) {
```

```

        valor[x] = valor[x-c]+1;
        primeiro[x] = c;
    }
}
}

```

Depois disso, o seguinte código pode ser usado para imprimir as moedas que aparecem em uma solução ótima para a soma  $n$ :

```

while (n > 0) {
    cout << primeiro[n] << "\n";
    n -= primeiro[n];
}

```

## Contando o número de soluções

Vamos agora considerar outra versão do problema das moedas, onde nossa tarefa é calcular o número total de maneiras de produzir uma soma  $x$  usando as moedas. Por exemplo, se moedas = {1,3,4} e  $x = 5$ , existem um total de 6 maneiras:

- 1 + 1 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 3
- 1 + 3 + 1
- 3 + 1 + 1
- 1 + 4
- 4 + 1

Novamente, podemos resolver o problema recursivamente. Seja  $\text{resolver}(x)$  o número de maneiras de formarmos a soma  $x$ . Por exemplo, se moedas = {1,3,4}, então  $\text{resolver}(5) = 6$  e a fórmula recursiva é

$$\begin{aligned} \text{resolver}(x) = & \text{resolver}(x-1) + \\ & \text{resolver}(x-3) + \\ & \text{resolver}(x-4). \end{aligned}$$

Então, a função recursiva geral é a seguinte:

$$\text{resolver}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \sum_{c \in \text{moedas}} \text{resolver}(x-c) & x > 0 \end{cases}$$

Se  $x < 0$ , o valor é 0, porque não há soluções. Se  $x = 0$ , o valor é 1, porque só há uma maneira de formar uma soma vazia. Caso contrário, calculamos a soma de todos os valores da forma  $\text{resolver}(x-c)$  onde  $c$  está em moedas.

O código a seguir constrói um array contagem tal que  $\text{contagem}[x]$  é igual ao valor de  $\text{resolver}(x)$  para  $0 \leq x \leq n$ :

```

contagem[0] = 1;
for (int x = 1; x <= n; x++) {

```

```

for (auto c : moedas) {
    if (x-c >= 0) {
        contagem[x] += contagem[x-c];
    }
}

```

Muitas vezes, o número de soluções é tão grande que não é necessário calcular o número exato, mas é suficiente fornecer a resposta módulo  $m$  onde, por exemplo,  $m = 10^9 + 7$ . Isso pode ser feito alterando o código para que todos os cálculos sejam feitos módulo  $m$ . No código acima, basta adicionar a linha

```
contagem[x] %= m;
```

após a linha

```
contagem[x] += contagem[x-c];
```

Agora discutimos todas as ideias básicas da programação dinâmica. Como a programação dinâmica pode ser usada em muitas situações diferentes, vamos agora passar por um conjunto de problemas que mostram outros exemplos sobre as possibilidades da programação dinâmica.


## 7.2 Maior subsequência crescente

Nosso primeiro problema é encontrar a **maior subsequência crescente** em um array de  $n$  elementos. Esta é uma sequência de comprimento máximo de elementos do array que vai da esquerda para a direita, e cada elemento na sequência é maior que o elemento anterior. Por exemplo, no array

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3

a maior subsequência crescente contém 4 elementos:

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3



Seja  $\text{tamanho}(k)$  o comprimento da maior subsequência crescente que termina na posição  $k$ . Assim, se calcularmos todos os valores de  $\text{tamanho}(k)$  onde  $0 \leq k \leq n - 1$ , descobriremos o comprimento da maior subsequência crescente. Por



exemplo, os valores da função para o array acima são os seguintes:

tamanho(0)	=	1
tamanho(1)	=	1
tamanho(2)	=	2
tamanho(3)	=	1
tamanho(4)	=	3
tamanho(5)	=	2
tamanho(6)	=	4
tamanho(7)	=	2

Por exemplo,  $\text{tamanho}(6) = 4$ , porque a maior subsequência crescente que termina na posição 6 consiste em 4 elementos.

Para calcular um valor de  $\text{tamanho}(k)$ , devemos encontrar uma posição  $i < k$  para a qual  $\text{array}[i] < \text{array}[k]$  e  $\text{tamanho}(i)$  seja o maior possível. Então sabemos que  $\text{tamanho}(k) = \text{tamanho}(i) + 1$ , porque esta é uma maneira ótima de adicionar  $\text{array}[k]$  a uma subsequência. No entanto, se não houver tal posição  $i$ , então  $\text{tamanho}(k) = 1$ , o que significa que a subsequência contém apenas  $\text{array}[k]$ .

Como todos os valores da função podem ser calculados a partir de seus valores menores, podemos usar programação dinâmica. No código a seguir, os valores da função serão armazenados em um array `tamanho`.

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    tamanho[k] = 1;
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (array[i] < array[k]) {
            tamanho[k] = max(tamanho[k], tamanho[i]+1);
        }
    }
}
```

Este código funciona em tempo  $O(n^2)$ , porque consiste em dois loops aninhados. No entanto, também é possível implementar o cálculo de programação dinâmica de forma mais eficiente em tempo  $O(n \log n)$ . Você consegue encontrar uma maneira de fazer isso?

## 7.3 Caminhos em uma grade

Nosso próximo problema é encontrar um caminho do canto superior esquerdo para o canto inferior direito de uma grade  $n \times n$ , de forma que só nos movamos para baixo e para a direita. Cada quadrado contém um inteiro positivo, e o caminho deve ser construído de forma que a soma dos valores ao longo do caminho seja a maior possível.

A figura a seguir mostra um caminho ideal em uma grade:

3	7	9	2	7
9	8	3	5	5
1	7	9	8	5
3	8	6	4	10
6	3	9	7	8

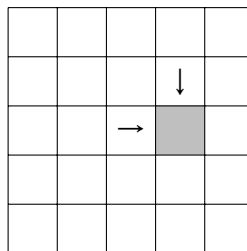
A soma dos valores no caminho é 67, e esta é a maior soma possível em um caminho do canto superior esquerdo para o canto inferior direito.

Assuma que as linhas e colunas da grade são numeradas de 1 a  $n$ , e  $\text{valor}[y][x]$  é igual ao valor do quadrado  $(y, x)$ . Seja  $\text{soma}(y, x)$  a soma máxima em um caminho do canto superior esquerdo para o quadrado  $(y, x)$ . Agora  $\text{soma}(n, n)$  nos diz a soma máxima do canto superior esquerdo para o canto inferior direito. Por exemplo, na grade acima,  $\text{soma}(5, 5) = 67$ .

Podemos calcular recursivamente as somas da seguinte forma:

$$\text{soma}(y, x) = \max(\text{soma}(y, x - 1), \text{soma}(y - 1, x)) + \text{valor}[y][x]$$

A fórmula recursiva é baseada na observação de que um caminho que termina no quadrado  $(y, x)$  pode vir do quadrado  $(y, x - 1)$  ou do quadrado  $(y - 1, x)$ :



Assim, selecionamos a direção que maximiza a soma. Assumimos que  $\text{soma}(y, x) = 0$  se  $y = 0$  ou  $x = 0$  (porque tais caminhos não existem), então a fórmula recursiva também funciona quando  $y = 1$  ou  $x = 1$ .

Como a função soma possui dois parâmetros, o array de programação dinâmica também possui duas dimensões. Por exemplo, podemos usar um array

```
int soma[N][N];
```

e calcular as somas da seguinte forma:

```
for (int y = 1; y <= n; y++) {
    for (int x = 1; x <= n; x++) {
        soma[y][x] = max(soma[y][x-1], soma[y-1][x]) + valor[y][x];
    }
}
```

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n^2)$ .

## 7.4 Problemas da mochila

O termo **mochila** refere-se a problemas onde um conjunto de objetos é dado, e subconjuntos com algumas propriedades precisam ser encontrados. Os problemas da mochila podem ser resolvidos usando programação dinâmica.

Nesta seção, vamos focar no seguinte problema: Dada uma lista de pesos  $[w_1, w_2, \dots, w_n]$ , determine todas as somas que podem ser construídas usando os pesos. Por exemplo, se os pesos forem  $[1, 3, 3, 5]$ , as seguintes somas são possíveis:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

Neste caso, todas as somas entre  $0 \dots 12$  são possíveis, exceto 2 e 10. Por exemplo, a soma 7 é possível porque nós podemos selecionar os pesos  $[1, 3, 3]$ .

Para resolver o problema, vamos focar em subproblemas onde usamos apenas os primeiros  $k$  pesos para construir somas. Seja  $\text{possivel}(x, k) = \text{verdadeiro}$  se podemos construir uma soma  $x$  usando os primeiros  $k$  pesos, e caso contrário  $\text{possivel}(x, k) = \text{falso}$ . Os valores da função podem ser calculados recursivamente da seguinte forma:

$$\text{possivel}(x, k) = \text{possivel}(x - w_k, k - 1) \vee \text{possivel}(x, k - 1)$$

A fórmula é baseada no fato de que podemos usar ou não o peso  $w_k$  na soma. Se usarmos  $w_k$ , a tarefa restante é formar a soma  $x - w_k$  usando os primeiros  $k - 1$  pesos, e se não usarmos  $w_k$ , a tarefa restante é formar a soma  $x$  usando os primeiros  $k - 1$  pesos. Como casos base,

$$\text{possivel}(x, 0) = \begin{cases} \text{verdadeiro} & x = 0 \\ \text{falso} & x \neq 0 \end{cases}$$

porque se nenhum peso for usado, só podemos formar a soma 0.

A tabela a seguir mostra todos os valores da função para os pesos  $[1, 3, 3, 5]$  (o símbolo "X" indica os valores verdadeiros):

$k \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	X												
1	X	X											
2	X	X		X	X								
3	X	X		X	X		X	X					
4	X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

Após calcular esses valores,  $\text{possivel}(x, n)$  nos diz se podemos construir uma soma  $x$  usando *todos* os pesos.

Seja  $W$  a soma total dos pesos. A seguinte solução de programação dinâmica em tempo  $O(nW)$  corresponde à função recursiva:

```
possivel[0][0] = true;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
```

```

for (int x = 0; x <= W; x++) {
    if (x-w[k] >= 0) possivel[x][k] |= possivel[x-w[k]][k-1];
    possivel[x][k] |= possivel[x][k-1];
}
}

```

No entanto, aqui está uma implementação melhor que usa apenas um array unidimensional `possivel[x]` que indica se podemos construir um subconjunto com soma  $x$ . O truque é atualizar o array da direita para a esquerda para cada novo peso:

```

possivel[0] = true;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
    for (int x = W; x >= 0; x--) {
        if (possivel[x]) possivel[x+w[k]] = true;
    }
}

```

Observe que a ideia geral apresentada aqui pode ser usada em muitos problemas de mochila. Por exemplo, se recebermos objetos com pesos e valores, podemos determinar para cada soma de peso o valor máximo soma de um subconjunto.

## 7.5 Distância de edição

A **distância de edição** ou **distância de Levenshtein**<sup>1</sup> é o número mínimo de operações de edição necessárias para transformar uma string em outra. As operações de edição permitidas são as seguintes:

- inserir um caractere (por exemplo,  $ABC \rightarrow ABCA$ )
- remover um caractere (por exemplo,  $ABC \rightarrow AC$ )
- modificar um caractere (por exemplo,  $ABC \rightarrow ADC$ )

Por exemplo, a distância de edição entre `LOVE` e `MOVIE` é 2, porque podemos primeiro realizar a operação  $LOVE \rightarrow MOVE$  (modificar) e então a operação  $MOVE \rightarrow MOVIE$  (inserir). Este é o menor número possível de operações, porque é claro que apenas uma operação não é suficiente.

Suponha que recebemos uma string  $x$  de comprimento  $n$  e uma string  $y$  de comprimento  $m$ , e queremos calcular a distância de edição entre  $x$  e  $y$ . Para resolver o problema, definimos uma função  $distancia(a, b)$  que retorna a distância de edição entre os prefixos  $x[0 \dots a]$  e  $y[0 \dots b]$ . Assim, usando esta função, a distância de edição entre  $x$  e  $y$  é igual a  $distancia(n-1, m-1)$ .

<sup>1</sup>A distância recebe o nome de V. I. Levenshtein, que a estudou em conexão com códigos binários [49].

Podemos calcular os valores de distancia da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{distancia}(a, b) = \min(&\text{distancia}(a, b-1) + 1, \\ &\text{distancia}(a-1, b) + 1, \\ &\text{distancia}(a-1, b-1) + \text{custo}(a, b)). \end{aligned}$$

Aqui  $\text{custo}(a, b) = 0$  se  $x[a] = y[b]$ , e caso contrário  $\text{custo}(a, b) = 1$ . A fórmula considera as seguintes maneiras de editar a string x:

- $\text{distancia}(a, b-1)$ : inserir um caractere no final de x
- $\text{distancia}(a-1, b)$ : remover o último caractere de x
- $\text{distancia}(a-1, b-1)$ : combinar ou modificar o último caractere de x

Nos dois primeiros casos, uma operação de edição é necessária (inserir ou remover). No último caso, se  $x[a] = y[b]$ , podemos combinar os últimos caracteres sem editar, e caso contrário, uma operação de edição é necessária (modificar).

A tabela a seguir mostra os valores de distancia no caso de exemplo:

		M	O	V	I	E
L O V E	0	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	4	5
	2	2	1	2	3	4
	3	3	2	1	2	3
	4	4	3	2	2	2

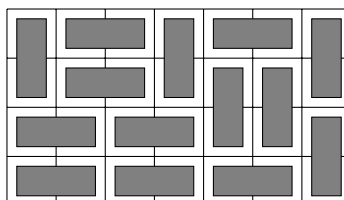
O canto inferior direito da tabela nos diz que a distância de edição entre LOVE e MOVIE é 2. A tabela também mostra como construir a menor sequência de operações de edição. Neste caso, o caminho é o seguinte:

		M	O	V	I	E	
		0	1	2	3	4	5
L		1	1	2	3	4	5
O		2	2	1	2	3	4
V		3	3	2	1	2	3
E		4	4	3	2	2	2

Os últimos caracteres de LOVE e MOVIE são iguais, então a distância de edição entre eles é igual à distância de edição entre LOV e MOVI. Podemos usar uma operação de edição para remover o caractere I de MOVI. Assim, a distância de edição é um a mais que a distância de edição entre LOV e MOV, etc.

## 7.6 Contando os ladrilhos

Às vezes, os estados de uma solução de programação dinâmica são mais complexos do que combinações fixas de números. Como exemplo, considere o problema de calcular o número de maneiras distintas de preencher uma grade  $n \times m$  usando ladrilhos de tamanho  $1 \times 2$  e  $2 \times 1$ . Por exemplo, uma solução válida para a grade  $4 \times 7$  é



e o número total de soluções é 781.

O problema pode ser resolvido usando programação dinâmica percorrendo a grade linha por linha. Cada linha em uma solução pode ser representada como uma string que contém  $m$  caracteres do conjunto  $\{\sqcup, \sqcup, \sqcup, \sqcup\}$ . Por exemplo, a solução acima consiste em quatro linhas que correspondem às seguintes strings:

- $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$
- $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$
- $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$
- $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$

Seja  $\text{contar}(k, x)$  o número de maneiras de construir uma solução para as linhas  $1 \dots k$  da grade, de modo que a string  $x$  corresponda à linha  $k$ . É possível usar a programação dinâmica aqui, porque o estado de uma linha é restringido apenas pelo estado da linha anterior.

Uma solução é válida se a linha 1 não contiver o caractere  $\sqcup$ , a linha  $n$  não contiver o caractere  $\sqcup$ , e todas as linhas consecutivas forem *compatíveis*. Por exemplo, as linhas  $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$  e  $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$  são compatíveis, enquanto as linhas  $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$  e  $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$  não são compatíveis.

Como uma linha consiste em  $m$  caracteres e existem quatro opções para cada caractere, o número de linhas distintas é no máximo  $4^m$ . Assim, a complexidade de tempo da solução é  $O(n4^{2m})$  porque podemos percorrer os  $O(4^m)$  estados possíveis para cada linha, e para cada estado, existem  $O(4^m)$  estados possíveis para a linha anterior. Na prática, é uma boa ideia girar a grade para que o lado mais curto tenha comprimento  $m$ , porque o fator  $4^{2m}$  domina a complexidade de tempo.

É possível tornar a solução mais eficiente usando uma representação mais compacta para as linhas. Acontece que é suficiente saber quais colunas da linha anterior contêm o quadrado superior de um ladrilho vertical. Assim, podemos representar uma linha usando apenas caracteres  $\sqcup$  e  $\sqcup$ , onde  $\sqcup$  é uma combinação de caracteres  $\sqcup$ ,  $\sqcup$  e  $\sqcup$ . Usando esta representação, existem apenas  $2^m$  linhas distintas e a complexidade de tempo é  $O(n2^{2m})$ .

Como nota final, há também uma fórmula direta surpreendente para calcular o número de ladrilhos<sup>2</sup>:

$$\prod_{a=1}^{\lceil n/2 \rceil} \prod_{b=1}^{\lceil m/2 \rceil} 4 \cdot \left( \cos^2 \frac{\pi a}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi b}{m+1} \right)$$

Esta fórmula é muito eficiente, pois calcula o número de ladrilhos em tempo  $O(nm)$ , mas como a resposta é um produto de números reais, um problema ao usar a fórmula é como armazenar os resultados intermediários com precisão.

---

<sup>2</sup>Surpreendentemente, esta fórmula foi descoberta em 1961 por duas equipes de pesquisa [43, 67] que trabalharam de forma independente.





# Capítulo 8

## Análise amortizada

A complexidade de tempo de um algoritmo é, muitas vezes, fácil de analisar apenas examinando a estrutura do algoritmo: quais laços o algoritmo contém e quantas vezes os laços são executados. No entanto, às vezes, uma análise direta não fornece uma imagem verdadeira da eficiência do algoritmo.

A **análise amortizada** pode ser usada para analisar algoritmos que contêm operações cuja complexidade de tempo varia. A ideia é estimar o tempo total usado para todas essas operações durante a execução do algoritmo, em vez de focar em operações individuais.

### 8.1 Método dos dois ponteiros

No **método dos dois ponteiros**, dois ponteiros são usadas para iterar pelos valores do vetor. Ambos os ponteiros podem se mover para uma única direção, o que garante que o algoritmo funcione de forma eficiente. A seguir, discutiremos dois problemas que podem ser resolvidos usando o método de dois ponteiros.

#### Soma de subvetor

Como primeiro exemplo, considere um problema em que recebemos um vetor de  $n$  inteiros positivos e uma soma alvo  $x$ , e queremos encontrar um subvetor cuja soma seja  $x$  ou relatar que não existe tal subvetor.

Por exemplo, o vetor

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

contém um subvetor cuja soma é 8:

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Este problema pode ser resolvido em tempo  $O(n)$  usando o método de dois ponteiros. A ideia é manter ponteiros que apontam para o primeiro e o último valor de um subvetor. A cada turno, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita e o ponteiro direito se move para a direita enquanto a soma do subvetor

resultante for no máximo  $x$ . Se a soma se tornar exatamente  $x$ , uma solução foi encontrada.

Como exemplo, considere o seguinte vetor e uma soma alvo  $x = 8$ :

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

O subvetor inicial contém os valores 1, 3 e 2, cuja soma é 6:

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Então, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita. O ponteiro direito não se move, porque, caso contrário, a soma do subvetor excederia  $x$ .

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Novamente, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita, e desta vez o ponteiro direito se move três passos para a direita. A soma do subvetor é  $2 + 5 + 1 = 8$ , então um subvetor cuja soma é  $x$  foi encontrado.

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

O tempo de execução do algoritmo depende de o número de passos que o ponteiro direito se move. Embora não haja um limite superior útil sobre quantos passos o ponteiro pode se mover em um *único* turno, sabemos que o ponteiro se move *um total de*  $O(n)$  passos durante o algoritmo, porque ela só se move para a direita.

Como o ponteiro esquerdo e o direito se movem  $O(n)$  passos durante o algoritmo, o algoritmo funciona em tempo  $O(n)$ .

## Problema 2SUM

Outro problema que pode ser resolvido usando o método de dois ponteiros é o seguinte problema, também conhecido como o **problema 2SUM**: dado um vetor de  $n$  números e uma soma alvo  $x$ , encontre dois valores do vetor de forma que sua soma seja  $x$ , ou relate que tais valores não existem.

Para resolver o problema, primeiro ordenamos os valores do vetor em ordem crescente. Depois disso, iteramos pelo vetor usando dois ponteiros. O ponteiro esquerdo começa no primeiro valor e se move um passo para a direita a cada turno. O ponteiro direito começa no último valor e sempre se move para a esquerda até que a soma do ponteiro esquerdo e direita seja no máximo  $x$ . Se a soma for exatamente  $x$ , uma solução foi encontrada.

Por exemplo, considere o seguinte vetor e uma soma alvo  $x = 12$ :

1	4	5	6	7	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	----

As posições iniciais dos ponteiros são como se segue. A soma dos valores é  $1 + 10 = 11$  que é menor que  $x$ .

1	4	5	6	7	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	----

Então o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita. O ponteiro direito se move três passos para a esquerda, e a soma se torna  $4 + 7 = 11$ .

1	4	5	6	7	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	----

Depois disso, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita novamente. O ponteiro direito não se move e uma solução  $5 + 7 = 12$  foi encontrada.

1	4	5	6	7	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	----

O tempo de execução do algoritmo é  $O(n \log n)$ , pois primeiro ele ordena o vetor em tempo  $O(n \log n)$ , e então ambos os ponteiros movem  $O(n)$  passos.

Observe que é possível resolver o problema de outra forma em tempo  $O(n \log n)$  usando a busca binária. Nessa solução, iteramos pelo vetor e, para cada valor do vetor, tentamos encontrar outro valor que produza a soma  $x$ . Isso pode ser feito realizando  $n$  buscas binárias, cada uma das quais leva tempo  $O(\log n)$ .

Um problema mais difícil é o **problema 3SUM** que pede para encontrar *três* valores de vetor cuja soma seja  $x$ . Usando a ideia do algoritmo acima, este problema pode ser resolvido em tempo  $O(n^2)$ <sup>1</sup>. Você consegue ver como?

## 8.2 Elementos menores mais próximos

A análise amortizada é frequentemente usada para estimar o número de operações realizadas em uma estrutura de dados. As operações podem ser distribuídas de forma desigual, de modo que a maioria das operações ocorra durante uma determinada fase do algoritmo, mas o número total de operações é limitado.

Como exemplo, considere o problema de encontrar para cada elemento do vetor o **elemento menor mais próximo**, ou seja, o primeiro elemento menor que precede o elemento no vetor. É possível que tal elemento não exista, caso em que o algoritmo deve relatar isso. A seguir, veremos como o problema pode ser resolvido de forma eficiente usando uma estrutura de pilha.

Percorremos o vetor da esquerda para a direita e mantemos uma pilha de elementos do vetor. Em cada posição do vetor, removemos elementos da pilha até

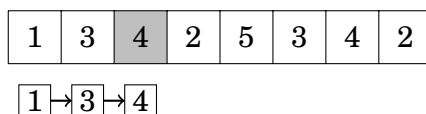
<sup>1</sup>Por muito tempo, pensou-se que resolver o problema 3SUM de forma mais eficiente do que em tempo  $O(n^2)$  não seria possível. No entanto, em 2014, descobriu-se [30] que este não é o caso.

que o elemento superior seja menor que o elemento atual, ou a pilha esteja vazia. Então, relatamos que o elemento superior é o elemento menor mais próximo do elemento atual, ou se a pilha estiver vazia, não existe tal elemento. Finalmente, adicionamos o elemento atual à pilha.

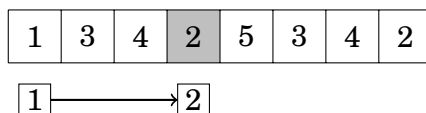
Como exemplo, considere o seguinte vetor:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

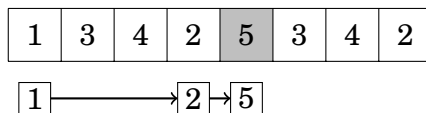
Primeiro, os elementos 1, 3 e 4 são adicionados à pilha, porque cada elemento é maior que o elemento anterior. Assim, o elemento menor mais próximo de 4 é 3, e o elemento menor mais próximo de 3 é 1.



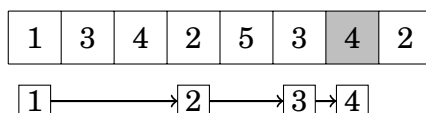
O próximo elemento 2 é menor que os dois principais elementos na pilha. Assim, os elementos 3 e 4 são removidos da pilha, e então o elemento 2 é adicionado à pilha. Seu elemento menor mais próximo é 1:



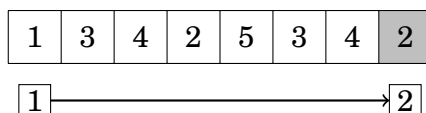
Então, o elemento 5 é maior que o elemento 2, então ele será adicionado à pilha, e seu elemento menor mais próximo é 2:



Depois disso, o elemento 5 é removido da pilha e os elementos 3 e 4 são adicionados à pilha:



Finalmente, todos os elementos, exceto 1, são removidos da pilha e o último elemento 2 é adicionado à pilha:



A eficiência do algoritmo depende de o número total de operações de pilha. Se o elemento atual for maior que o elemento superior na pilha, ele é diretamente adicionado à pilha, o que é eficiente. No entanto, às vezes a pilha pode conter vários elementos maiores e leva tempo para removê-los. Ainda assim, cada elemento é adicionado *exatamente uma vez* à pilha e removido *no máximo uma vez* da pilha. Assim, cada elemento causa  $O(1)$  operações de pilha, e o algoritmo funciona em tempo  $O(n)$ .

## 8.3 Mínimo da janela deslizante

Uma **janela deslizante** é um subvetor de tamanho constante que se move da esquerda para a direita através do vetor. Em cada posição da janela, queremos calcular alguma informação sobre os elementos dentro da janela. Nesta seção, vamos focar no problema de manter o **mínimo da janela deslizante**, o que significa que devemos reportar o menor valor dentro de cada janela.

O mínimo da janela deslizante pode ser calculado usando uma ideia semelhante à que usamos para calcular os elementos menores mais próximos. Mantemos uma fila onde cada elemento é maior que o elemento anterior, e o primeiro elemento sempre corresponde ao elemento mínimo dentro da janela. Após cada movimento da janela, removemos elementos do final da fila até que o último elemento da fila seja menor que o novo elemento da janela, ou a fila fique vazia. Também removemos o primeiro elemento da fila se ele não estiver mais dentro da janela. Finalmente, adicionamos o novo elemento da janela ao final da fila.

Como exemplo, considere o seguinte vetor:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

Suponha que o tamanho da janela deslizante seja 4. Na primeira posição da janela, o menor valor é 1:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1	→	4	→	5
---	---	---	---	---

Então a janela se move um passo para a direita. O novo elemento 3 é menor que os elementos 4 e 5 na fila, então os elementos 4 e 5 são removidos da fila e o elemento 3 é adicionado à fila. O menor valor ainda é 1.

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1	→	3
---	---	---

Depois disso, a janela se move novamente, e o menor elemento 1 não pertence mais à janela. Assim, ele é removido da fila e o menor valor agora é 3. Além disso, o novo elemento 4 é adicionado à fila.

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

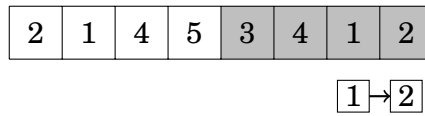
3	→	4
---	---	---

O próximo novo elemento 1 é menor que todos os elementos na fila. Assim, todos os elementos são removidos da fila e ela conterá apenas o elemento 1:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1
---

Finalmente, a janela atinge sua última posição. O elemento 2 é adicionado à fila, mas o menor valor dentro da janela ainda é 1.



Como cada elemento do vetor é adicionado à fila exatamente uma vez e removido da fila no máximo uma vez, o algoritmo funciona em tempo  $O(n)$ .

# Capítulo 9

## Consultas de intervalo

Neste capítulo, discutimos estruturas de dados que nos permitem processar eficientemente consultas de intervalo. Em uma **consulta de intervalo**, nossa tarefa é calcular um valor com base em um subvetor de um vetor. Consultas de intervalo típicas são:

- $\text{soma}_q(a, b)$ : calcular a soma dos valores no intervalo  $[a, b]$
- $\text{min}_q(a, b)$ : encontrar o valor mínimo no intervalo  $[a, b]$
- $\text{max}_q(a, b)$ : encontrar o valor máximo no intervalo  $[a, b]$

Por exemplo, considere o intervalo  $[3, 6]$  no seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	8	4	6	1	3	4

Neste caso,  $\text{soma}_q(3, 6) = 14$ ,  $\text{min}_q(3, 6) = 1$  e  $\text{max}_q(3, 6) = 6$ .

Uma maneira simples de processar consultas de intervalo é usar um loop que percorre todos os valores do vetor no intervalo. Por exemplo, a seguinte função pode ser usada para processar consultas de soma em um vetor:

```
int sum(int a, int b) {
    int s = 0;
    for (int i = a; i <= b; i++) {
        s += array[i];
    }
    return s;
}
```

Esta função funciona em tempo  $O(n)$ , onde  $n$  é o tamanho do vetor. Assim, podemos processar  $q$  consultas em  $O(nq)$  tempo usando a função. No entanto, se  $n$  e  $q$  forem grandes, essa abordagem é lenta. Felizmente, verifica-se que existem maneiras de processar consultas de intervalo com muito mais eficiência.

## 9.1 Consultas de vetor estático

Primeiro, vamos nos concentrar em uma situação em que o vetor é *estático*, ou seja, os valores do vetor nunca são atualizados entre as consultas. Nesse caso, é suficiente construir uma estrutura de dados estática que nos diga a resposta para qualquer consulta possível.

### Consultas de soma

Podemos processar facilmente consultas de soma em um vetor estático construindo um **vetor de soma de prefixos**. Cada valor no vetor de soma de prefixos é igual à soma dos valores no vetor original até aquela posição, ou seja, o valor na posição  $k$  é  $\text{soma}_q(0, k)$ . O vetor de soma de prefixos pode ser construído em tempo  $O(n)$ .

Por exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

O vetor de soma de prefixos correspondente é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	4	8	16	22	23	27	29

Como o vetor de soma de prefixos contém todos os valores de  $\text{soma}_q(0, k)$ , podemos calcular qualquer valor de  $\text{soma}_q(a, b)$  em tempo  $O(1)$  da seguinte forma:

$$\text{soma}_q(a, b) = \text{soma}_q(0, b) - \text{soma}_q(0, a - 1)$$

Ao definir  $\text{soma}_q(0, -1) = 0$ , a fórmula acima também é válida quando  $a = 0$ .

Por exemplo, considere o intervalo  $[3, 6]$ :

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

Nesse caso  $\text{soma}_q(3, 6) = 8 + 6 + 1 + 4 = 19$ . Essa soma pode ser calculada a partir de dois valores do vetor de soma de prefixos:

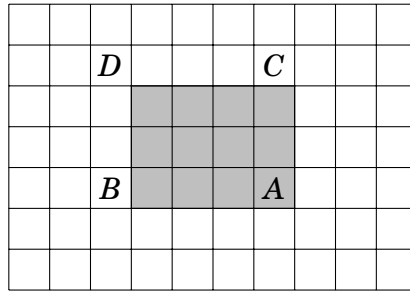
0	1	2	3	4	5	6	7
1	4	8	16	22	23	27	29

Assim,  $\text{soma}_q(3, 6) = \text{soma}_q(0, 6) - \text{soma}_q(0, 2) = 27 - 8 = 19$ .

Também é possível generalizar essa ideia para dimensões superiores. Por exemplo, podemos construir um vetor de soma de prefixos bidimensional que pode ser usado para calcular a soma de qualquer subvetor retangular em tempo  $O(1)$ . Cada soma em tal vetor corresponde a um subvetor que começa no canto superior esquerdo do vetor.



A imagem a seguir ilustra a ideia:



A soma do subvetor cinza pode ser calculada usando a fórmula

$$S(A) - S(B) - S(C) + S(D),$$

onde  $S(X)$  denota a soma dos valores em um subvetor retangular do canto superior esquerdo até a posição de  $X$ .

## Consultas de mínimo

Consultas de mínimo são mais difíceis de processar do que consultas de soma. Ainda assim, existe um método de pré-processamento de  $O(n \log n)$  bastante simples, após o qual podemos responder a qualquer consulta de mínimo em tempo  $O(1)$ <sup>1</sup>. Observe que, como as consultas de mínimo e máximo podem ser processadas de forma semelhante, podemos nos concentrar nas consultas de mínimo.

A ideia é pré-calculer todos os valores de  $\min_q(a, b)$  onde  $b - a + 1$  (o comprimento do intervalo) é uma potência de dois. Por exemplo, para o vetor

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

os seguintes valores são calculados:

$a$	$b$	$\min_q(a, b)$	$a$	$b$	$\min_q(a, b)$	$a$	$b$	$\min_q(a, b)$
0	0	1	0	1	1	0	3	1
1	1	3	1	2	3	1	4	3
2	2	4	2	3	4	2	5	1
3	3	8	3	4	6	3	6	1
4	4	6	4	5	1	4	7	1
5	5	1	5	6	1	0	7	1
6	6	4	6	7	2			
7	7	2						

<sup>1</sup>Esta técnica foi introduzida em [7] e às vezes chamada de método **sparse table**. Existem também técnicas mais sofisticadas [22] onde o tempo de pré-processamento é apenas  $O(n)$ , mas tais algoritmos não são necessários em programação competitiva.

O número de valores pré-calculados é  $O(n \log n)$ , porque existem comprimentos de intervalo  $O(\log n)$  que são potências de dois. Os valores podem ser calculados de forma eficiente usando a fórmula recursiva

$$\min_q(a, b) = \min(\min_q(a, a + w - 1), \min_q(a + w, b)),$$

onde  $b - a + 1$  é uma potência de dois e  $w = (b - a + 1)/2$ . Calcular todos esses valores leva tempo  $O(n \log n)$ .

Depois disso, qualquer valor de  $\min_q(a, b)$  pode ser calculado em tempo  $O(1)$  como um mínimo de dois valores pré-calculados. Seja  $k$  a maior potência de dois que não exceda  $b - a + 1$ . Podemos calcular o valor de  $\min_q(a, b)$  usando a fórmula

$$\min_q(a, b) = \min(\min_q(a, a + k - 1), \min_q(b - k + 1, b)).$$

Na fórmula acima, o intervalo  $[a, b]$  é representado como a união dos intervalos  $[a, a + k - 1]$  e  $[b - k + 1, b]$ , ambos de comprimento  $k$ .

Como exemplo, considere o intervalo  $[1, 6]$ :

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

O comprimento do intervalo é 6, e a maior potência de dois que não excede 6 é 4. Assim, o intervalo  $[1, 6]$  é a união dos intervalos  $[1, 4]$  e  $[3, 6]$ :

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

Como  $\min_q(1, 4) = 3$  e  $\min_q(3, 6) = 1$ , concluímos que  $\min_q(1, 6) = 1$ .

## 9.2 Árvore binária indexada

Uma **árvore binária indexada** ou uma **árvore de Fenwick**<sup>2</sup> pode ser vista como uma variante dinâmica de um vetor de soma de prefixos. Ela suporta duas operações de tempo  $O(\log n)$  em um vetor: processar uma consulta de soma de intervalo e atualizar um valor.

A vantagem de uma árvore binária indexada é que ela nos permite atualizar de forma eficiente os valores do vetor entre as consultas de soma. Isso não seria possível usando um vetor de soma de prefixos, porque após cada atualização, seria necessário construir todo o vetor de soma de prefixos novamente em tempo  $O(n)$ .

<sup>2</sup>A estrutura de árvore binária indexada foi apresentada por P. M. Fenwick em 1994 [21].

## Estrutura

Mesmo que o nome da estrutura seja *árvore* binária indexada, ela é geralmente representada como um vetor. Nesta seção, assumimos que todos os vetores são indexados a partir de um, porque isso facilita a implementação.

Seja  $p(k)$  a maior potência de dois que divide  $k$ . Armazenamos uma árvore binária indexada como um vetor  $tree$  tal que

$$tree[k] = \text{sum}_q(k - p(k) + 1, k),$$

ou seja, cada posição  $k$  contém a soma dos valores em um intervalo do vetor original cujo comprimento é  $p(k)$  e que termina na posição  $k$ . Por exemplo, como  $p(6) = 2$ ,  $tree[6]$  contém o valor de  $\text{sum}_q(5, 6)$ .

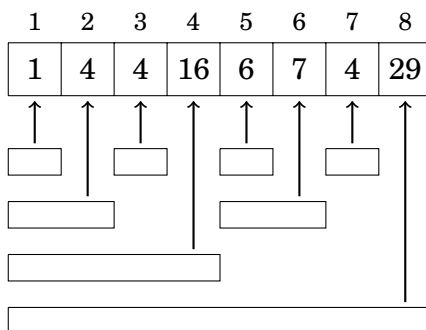
Por exemplo, considere o seguinte vetor:

1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	8	6	1	4	2

A árvore binária indexada correspondente é a seguinte:

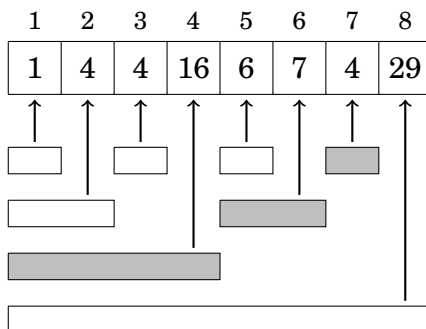
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	16	6	7	4	29

A figura a seguir mostra mais claramente como cada valor na árvore binária indexada corresponde a um intervalo no vetor original:



Usando uma árvore binária indexada, qualquer valor de  $\text{sum}_q(1, k)$  pode ser calculado em tempo  $O(\log n)$ , porque um intervalo  $[1, k]$  sempre pode ser dividido em  $O(\log n)$  intervalos cujas somas são armazenadas na árvore.

Por exemplo, o intervalo  $[1, 7]$  consiste nos seguintes intervalos:



Assim, podemos calcular a soma correspondente da seguinte forma:

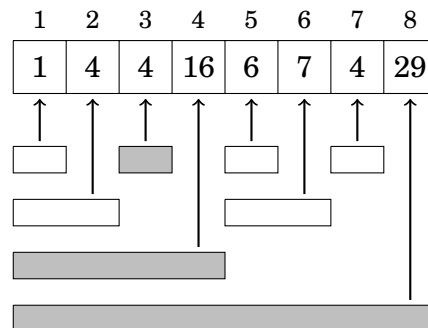
$$\text{sum}_q(1, 7) = \text{sum}_q(1, 4) + \text{sum}_q(5, 6) + \text{sum}_q(7, 7) = 16 + 7 + 4 = 27$$

Para calcular o valor de  $\text{sum}_q(a, b)$  onde  $a > 1$ , podemos usar o mesmo truque que usamos com vetores de soma de prefixos:

$$\text{sum}_q(a, b) = \text{sum}_q(1, b) - \text{sum}_q(1, a - 1).$$

Como podemos calcular  $\text{sum}_q(1, b)$  e  $\text{sum}_q(1, a - 1)$  em tempo  $O(\log n)$ , a complexidade de tempo total é  $O(\log n)$ .

Então, após atualizar um valor no vetor original, vários valores na árvore binária indexada devem ser atualizados. Por exemplo, se o valor na posição 3 mudar, as somas dos seguintes intervalos mudam:



Como cada elemento do vetor pertence a  $O(\log n)$  intervalos na árvore binária indexada, é suficiente atualizar  $O(\log n)$  valores na árvore.

## Implementação

As operações de uma árvore binária indexada podem ser implementadas eficientemente usando operações de bits. O fato chave necessário é que podemos calcular qualquer valor de  $p(k)$  usando a fórmula

$$p(k) = k \& -k.$$

A seguinte função calcula o valor de  $\text{sum}_q(1, k)$ :

```
int sum(int k) {
    int s = 0;
    while (k >= 1) {
        s += tree[k];
        k -= k & -k;
    }
    return s;
}
```

A seguinte função aumenta o valor do vetor na posição  $k$  em  $x$  ( $x$  pode ser positivo ou negativo):

```

void add(int k, int x) {
    while (k <= n) {
        tree[k] += x;
        k += k&-k;
    }
}

```

A complexidade de tempo de ambas as funções é  $O(\log n)$ , porque as funções acessam  $O(\log n)$  valores na árvore binária indexada, e cada movimento para a próxima posição leva tempo  $O(1)$ .

## 9.3 Árvore de segmentos

Uma **árvore de segmentos**<sup>3</sup> é uma estrutura de dados que suporta duas operações: processar uma consulta de intervalo e atualizar um valor do vetor. As árvores de segmentos podem suportar consultas de soma, consultas de mínimo e máximo e muitas outras consultas para que ambas as operações funcionem em tempo  $O(\log n)$ .

Comparada a uma árvore binária indexada, a vantagem de uma árvore de segmentos é que ela é uma estrutura de dados mais geral. Enquanto as árvores binárias indexadas suportam apenas consultas de soma<sup>4</sup>, as árvores de segmentos também suportam outras consultas. Por outro lado, uma árvore de segmentos requer mais memória e é um pouco mais difícil de implementar.

### Estrutura

Uma árvore de segmentos é uma árvore binária tal que os nós no nível inferior da árvore correspondem aos elementos do vetor, e os outros nós contêm informações necessárias para processar consultas de intervalo.

Nesta seção, assumimos que o tamanho do vetor é uma potência de dois e a indexação baseada em zero é usada, porque é conveniente construir uma árvore de segmentos para tal vetor. Se o tamanho do vetor não for uma potência de dois, podemos sempre anexar elementos extras a ele.

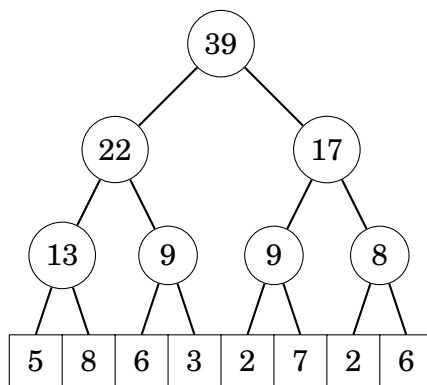
Vamos primeiro discutir árvores de segmentos que suportam consultas de soma. Como exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
5	8	6	3	2	7	2	6

A árvore de segmentos correspondente é a seguinte:

<sup>3</sup>A implementação bottom-up neste capítulo corresponde àquela em [62]. Estruturas semelhantes foram usadas no final dos anos 1970 para resolver problemas geométricos [9].

<sup>4</sup>Na verdade, usando *duas* árvores binárias indexadas, é possível suportar consultas de mínimo [16], mas isso é mais complicado do que usar uma árvore de segmentos.

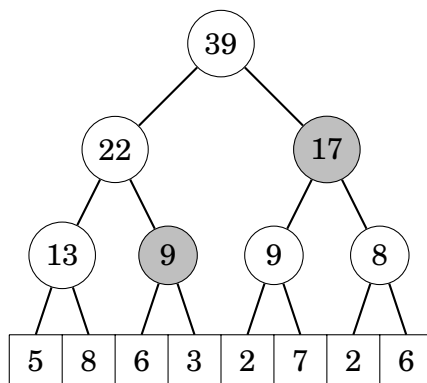


Cada nó interno da árvore corresponde a um intervalo do vetor cujo tamanho é uma potência de dois. Na árvore acima, o valor de cada nó interno é a soma dos valores correspondentes do vetor, e pode ser calculado como a soma dos valores de seu nó filho esquerdo e direito.

Acontece que qualquer intervalo  $[a, b]$  pode ser dividido em  $O(\log n)$  intervalos cujos valores são armazenados nos nós da árvore. Por exemplo, considere o intervalo  $[2, 7]$ :

0	1	2	3	4	5	6	7
5	8	6	3	2	7	2	6

Aqui  $\text{sum}_q(2, 7) = 6 + 3 + 2 + 7 + 2 + 6 = 26$ . Neste caso, os dois nós da árvore a seguir correspondem ao intervalo:

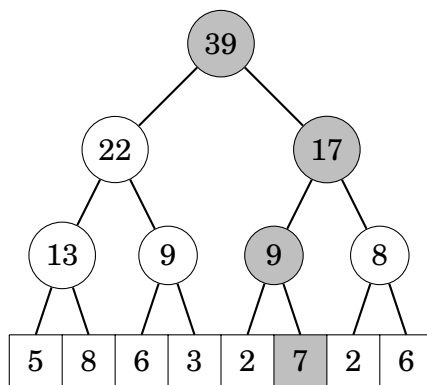


Assim, outra maneira de calcular a soma é  $9 + 17 = 26$ .

Quando a soma é calculada usando nós localizados o mais alto possível na árvore, no máximo dois nós em cada nível da árvore são necessários. Portanto, o número total de nós é  $O(\log n)$ .

Após uma atualização do vetor, devemos atualizar todos os nós cujo valor depende do valor atualizado. Isso pode ser feito percorrendo o caminho do elemento do vetor atualizado até o nó superior e atualizando os nós ao longo do caminho.

A figura a seguir mostra quais nós da árvore mudam se o valor do vetor 7 mudar:

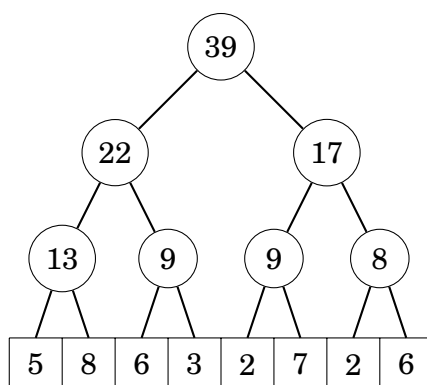


O caminho de baixo para cima sempre consiste em  $O(\log n)$  nós, então cada atualização muda  $O(\log n)$  nós na árvore.

## Implementação

Armazenamos uma árvore de segmentos como um vetor de  $2n$  elementos, onde  $n$  é o tamanho do vetor original e uma potência de dois. Os nós da árvore são armazenados de cima para baixo:  $tree[1]$  é o nó superior,  $tree[2]$  e  $tree[3]$  são seus filhos, e assim por diante. Finalmente, os valores de  $tree[n]$  a  $tree[2n - 1]$  correspondem aos valores do vetor original no nível inferior da árvore.

Por exemplo, a árvore de segmentos



é armazenada da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
39	22	17	13	9	9	8	5	8	6	3	2	7	2	6

Usando essa representação, o pai de  $tree[k]$  é  $tree[\lfloor k/2 \rfloor]$ , e seus filhos são  $tree[2k]$  e  $tree[2k + 1]$ . Note que isso implica que a posição de um nó é par se for um filho esquerdo e ímpar se for um filho direito.

A seguinte função calcula o valor de  $sum_q(a, b)$ :

```
int sum(int a, int b) {
    a += n; b += n;
    int s = 0;
    while (a <= b) {
```

```

    if (a%2 == 1) s += tree[a++];
    if (b%2 == 0) s += tree[b--];
    a /= 2; b /= 2;
}
return s;
}

```

A função mantém um intervalo que é inicialmente  $[a + n, b + n]$ . Então, a cada passo, o intervalo é movido um nível mais alto na árvore, e antes disso, os valores dos nós que não pertencem ao intervalo superior são adicionados à soma.

A seguinte função aumenta o valor do vetor na posição  $k$  por  $x$ :

```

void add(int k, int x) {
    k += n;
    tree[k] += x;
    for (k /= 2; k >= 1; k /= 2) {
        tree[k] = tree[2*k] + tree[2*k+1];
    }
}

```

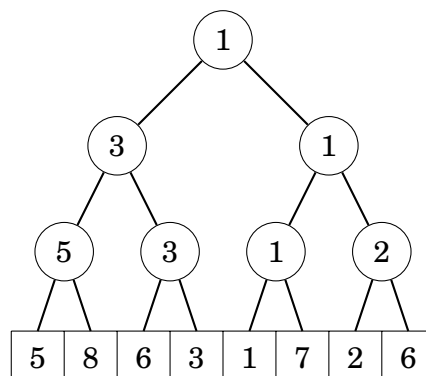
Primeiro a função atualiza o valor no nível inferior da árvore. Depois disso, a função atualiza os valores de todos os nós internos da árvore, até que alcance o nó superior da árvore.

Ambas as funções acima funcionam em tempo  $O(\log n)$ , pois uma árvore de segmentos de  $n$  elementos consiste em  $O(\log n)$  níveis, e as funções movem um nível mais alto na árvore a cada passo.

## Outras consultas

Árvores de segmentos podem suportar todas as consultas de intervalo onde é possível dividir um intervalo em duas partes, calcular a resposta separadamente para ambas as partes e então combinar as respostas de forma eficiente. Exemplos de tais consultas são mínimo e máximo, maior divisor comum, e operações de bits and, or e xor.

Por exemplo, a seguinte árvore de segmentos suporta consultas de mínimo:



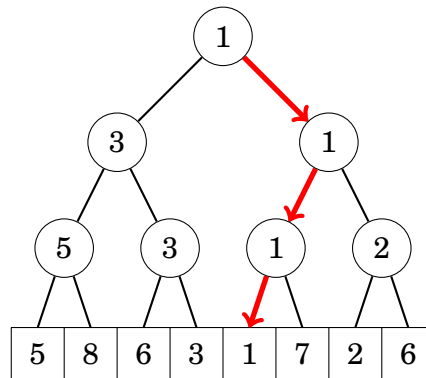
Neste caso, cada nó da árvore contém o menor valor no intervalo do vetor correspondente. O nó superior da árvore contém o menor valor em todo o vetor.



As operações podem ser implementadas como anteriormente, mas em vez de somas, os mínimos são calculados.

A estrutura de uma árvore de segmentos também nos permite usar a busca binária para localizar elementos do vetor. Por exemplo, se a árvore suporta consultas de mínimo, podemos encontrar a posição de um elemento com o menor valor em  $O(\log n)$  tempo.

Por exemplo, na árvore acima, um elemento com o menor valor 1 pode ser encontrado traversando um caminho para baixo a partir do nó superior:



## 9.4 Técnicas adicionais

### Compressão de índices

Uma limitação em estruturas de dados que são construídas sobre um vetor é que os elementos são indexados usando inteiros consecutivos. Dificuldades surgem quando índices grandes são necessários. Por exemplo, se desejarmos usar o índice  $10^9$ , o vetor deve conter  $10^9$  elementos, o que exigiria muita memória.

No entanto, geralmente podemos contornar essa limitação usando **compressão de índices**, onde os índices originais são substituídos por índices 1, 2, 3, etc. Isso pode ser feito se soubermos todos os índices necessários durante o algoritmo antecipadamente.

A ideia é substituir cada índice original  $x$  por  $c(x)$ , onde  $c$  é uma função que comprime os índices. Exigimos que a ordem dos índices não mude, então se  $a < b$ , então  $c(a) < c(b)$ . Isso nos permite realizar consultas convenientemente mesmo que os índices sejam comprimidos.

Por exemplo, se os índices originais são 555,  $10^9$  e 8, os novos índices são:

$$\begin{aligned} c(8) &= 1 \\ c(555) &= 2 \\ c(10^9) &= 3 \end{aligned}$$

### Atualizações de intervalo

Até agora, implementamos estruturas de dados que suportam consultas de intervalo e atualizações de valores únicos. Vamos agora considerar uma situação

oposta, onde devemos atualizar intervalos e recuperar valores únicos. Vamos focar numa operação que aumenta todos os elementos num intervalo  $[a, b]$  por  $x$ .

Surpreendentemente, podemos usar as estruturas de dados apresentadas neste capítulo também nesta situação. Para fazer isso, construímos um **vetor de diferenças** cujos valores indicam as diferenças entre valores consecutivos no vetor original. Assim, o vetor original é o vetor de soma de prefixo do vetor de diferenças. Por exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	3	1	1	1	5	2	2

O vetor de diferenças para o vetor acima é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	0	-2	0	0	4	-3	0

Por exemplo, o valor 2 na posição 6 no vetor original corresponde à soma  $3 - 2 + 4 - 3 = 2$  no vetor de diferenças.

A vantagem do vetor de diferenças é que podemos atualizar um intervalo no vetor original mudando apenas dois elementos no vetor de diferenças. Por exemplo, se quisermos aumentar o vetor original valores entre as posições 1 e 4 por 5, basta aumentar o valor do vetor de diferenças na posição 1 por 5 e diminuir o valor na posição 5 por 5. O resultado é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	5	-2	0	0	-1	-3	0

De forma mais geral, para aumentar os valores no intervalo  $[a, b]$  por  $x$ , aumentamos o valor na posição  $a$  por  $x$  e diminuimos o valor na posição  $b + 1$  por  $x$ . Assim, é só necessário atualizar valores únicos e processar consultas de soma, para que possamos usar uma árvore binária indexada ou uma árvore de segmentos.

Um problema mais difícil é suportar tanto consultas de intervalo quanto atualizações de intervalo. No Capítulo 28 veremos que mesmo isso é possível.

# Manipulação de bits

## 10.1 Representação de bits

Aqui está a representação de bits do número int 43:

Os bits na representação são indexados da direita para a esquerda. Para converter uma representação de bits  $b_k \cdots b_2 b_1 b_0$  em um número, podemos usar a fórmula

$$b_k 2^k + \dots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0.$$

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 43.$$

A representação de bits de um número é **assinada** ou **não assinada**. Geralmente uma representação assinada é usada, o que significa que números negativos e positivos podem ser representados. Uma variável assinada de  $n$  bits pode conter qualquer inteiro entre  $-2^{n-1}$  e  $2^{n-1} - 1$ . Por exemplo, o tipo `int` em C++ é um tipo assinado, então uma variável `int` pode conter qualquer inteiro entre  $-2^{31}$  e  $2^{31} - 1$ .

O primeiro bit em uma representação assinada é o sinal do número (0 para números não negativos e 1 para números negativos), e os  $n - 1$  bits restantes contêm a magnitude do número. **Complemento de dois** é usado, o que significa que o número oposto de um número é calculado primeiro invertendo todos os bits no número, e depois aumentando o número por um.

Por exemplo, a representação de bits de o número int `-43` é

**11111111111111111111111111010101.**

Em uma representação não assinada, apenas os números não negativos podem ser usados, mas o limite superior para os valores é maior. Uma variável não assinada de  $n$  bits pode conter qualquer inteiro entre 0 e  $2^n - 1$ . Por exemplo, em C++, uma variável `unsigned int` pode conter qualquer inteiro entre 0 e  $2^{32} - 1$ .

Existe uma conexão entre as representações: um número assinado  $-x$  é igual a um número não assinado  $2^n - x$ . Por exemplo, o código a seguir mostra que o número assinado  $x = -43$  é igual ao número não assinado  $y = 2^{32} - 43$ :

```
int x = -43;
unsigned int y = x;
cout << x << "\n"; // -43
cout << y << "\n"; // 4294967253
```

Se um número for maior que o limite superior da representação de bits, o número sofrerá overflow. Em uma representação assinada, o próximo número após  $2^{n-1} - 1$  é  $-2^{n-1}$ , e em uma representação não assinada, o próximo número após  $2^n - 1$  é 0. Por exemplo, considere o código a seguir:

```
int x = 2147483647
cout << x << "\n"; // 2147483647
x++;
cout << x << "\n"; // -2147483648
```

Inicialmente, o valor de  $x$  é  $2^{31} - 1$ . Este é o maior valor que pode ser armazenado em uma variável `int`, então o próximo número após  $2^{31} - 1$  é  $-2^{31}$ .

## 10.2 Operações de bits

### Operação E

A operação **E**  $x \& y$  produz um número que tem bits iguais a um nas posições onde ambos  $x$  e  $y$  têm bits iguais a um. Por exemplo,  $22 \& 26 = 18$ , porque

$$\begin{array}{r} 10110 \quad (22) \\ \& 11010 \quad (26) \\ \hline = 10010 \quad (18) \end{array}$$

Usando a operação E, podemos verificar se um número  $x$  é par porque  $x \& 1 = 0$  se  $x$  é par, e  $x \& 1 = 1$  se  $x$  é ímpar. De forma mais geral,  $x$  é divisível por  $2^k$  exatamente quando  $x \& (2^k - 1) = 0$ .

### Operação OU

A operação **OU**  $x \mid y$  produz um número que tem bits iguais a um nas posições onde pelo menos um de  $x$  e  $y$  tem bits iguais a um. Por exemplo,  $22 \mid 26 = 30$ , porque

$$\begin{array}{r}
 10110 \quad (22) \\
 | \quad 11010 \quad (26) \\
 \hline
 = \quad 11110 \quad (30)
 \end{array}$$

## Operação XOR

A operação **XOR**  $x \wedge y$  produz um número que tem bits iguais a um nas posições onde exatamente um de  $x$  e  $y$  tem bits iguais a um. Por exemplo,  $22 \wedge 26 = 12$ , porque

$$\begin{array}{r}
 10110 \quad (22) \\
 \wedge \quad 11010 \quad (26) \\
 \hline
 = \quad 01100 \quad (12)
 \end{array}$$

## Operação NÃO

A operação **NÃO**  $\sim x$  produz um número onde todos os bits de  $x$  foram invertidos. A fórmula  $\sim x = -x - 1$  é válida, por exemplo,  $\sim 29 = -30$ .

O resultado da operação NÃO no nível de bits depende do comprimento da representação de bits, porque a operação inverte todos os bits. Por exemplo, se os números são de 32 bits números int, o resultado é o seguinte:

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 29 \quad 000000000000000000000000011101 \\
 \sim x & = & -30 \quad 1111111111111111111111111100010
 \end{array}$$

## Deslocamentos de bits

O deslocamento de bits para a esquerda  $x \ll k$  anexa  $k$  bits zero ao número, e o deslocamento de bits para a direita  $x \gg k$  remove os  $k$  últimos bits do número. Por exemplo,  $14 \ll 2 = 56$ , porque 14 e 56 correspondem a 1110 e 111000. Da mesma forma,  $49 \gg 3 = 6$ , porque 49 e 6 correspondem a 110001 e 110.

Observe que  $x \ll k$  corresponde a multiplicar  $x$  por  $2^k$ , e  $x \gg k$  corresponde a dividir  $x$  por  $2^k$  arredondado para baixo para um inteiro.

## Aplicações

Um número da forma  $1 \ll k$  tem um bit na posição  $k$  e todos os outros bits são zero, então podemos usar esses números para acessar bits únicos de números. Em particular, o  $k$ -ésimo bit de um número é igual a um exatamente quando  $x \& (1 \ll k)$  não é zero. O código a seguir imprime a representação de bits de um número int  $x$ :

```

for (int i = 31; i >= 0; i--) {
    if (x & (1 << i)) cout << "1";
    else cout << "0";
}

```

Também é possível modificar bits únicos de números usando ideias semelhantes. Por exemplo, a fórmula  $x \mid (1 \ll k)$  define o  $k$ -ésimo bit de  $x$  como igual a um, a fórmula  $x \& \sim(1 \ll k)$  define o  $k$ -ésimo bit de  $x$  como igual a zero, e a fórmula  $x \wedge (1 \ll k)$  inverte o  $k$ -ésimo bit de  $x$ .

A fórmula  $x \& (x - 1)$  define o último bit igual a um de  $x$  como igual a zero, e a fórmula  $x \& -x$  define todos os bits iguais a um como iguais a zero, exceto pelo último bit igual a um. A fórmula  $x \mid (x - 1)$  inverte todos os bits após o último bit igual a um. Observe também que um número positivo  $x$  é uma potência de dois exatamente quando  $x \& (x - 1) = 0$ .

## Funções adicionais

O compilador g++ fornece o seguinte funções para contar bits:

- `__builtin_clz(x)`: o número de zeros no início do número
- `__builtin_ctz(x)`: o número de zeros no final do número
- `__builtin_popcount(x)`: o número de uns no número
- `__builtin_parity(x)`: a paridade (par ou ímpar) do número de uns

As funções podem ser usadas da seguinte forma:

```
int x = 5328; // 000000000000000000001010011010000
cout << __builtin_clz(x) << "\n"; // 19
cout << __builtin_ctz(x) << "\n"; // 4
cout << __builtin_popcount(x) << "\n"; // 5
cout << __builtin_parity(x) << "\n"; // 1
```

Apesar das funções acima suportarem apenas o tipo `int`, também existem versões para `long` `long`, disponíveis com o sufixo `ll`.

## 10.3 Representando conjuntos

Cada subconjunto de um conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  pode ser representado como um inteiro de  $n$  bits cujos bits iguais a um indicam quais elementos pertencem ao subconjunto. Esta é uma maneira eficiente de representar conjuntos, porque cada elemento requer apenas um bit de memória, e as operações de conjunto podem ser implementadas como operações de bits.

Por exemplo, como `int` é um tipo de 32 bits, um número `int` pode representar qualquer subconjunto do conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$ . A representação de bits do conjunto  $\{1, 3, 4, 8\}$  é

000000000000000000000000100011010,

que corresponde ao número  $2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = 282$ .

## Implementação de conjunto

O código a seguir declara uma variável `int` chamada `x` que pode conter um subconjunto de  $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$ . Depois disso, o código adiciona os elementos 1, 3, 4 e 8 ao conjunto e imprime o tamanho do conjunto.

```
int x = 0;
x |= (1<<1);
x |= (1<<3);
x |= (1<<4);
x |= (1<<8);
cout << __builtin_popcount(x) << "\n"; // 4
```

Então, o código a seguir imprime todos elementos que pertencem ao conjunto:

```
for (int i = 0; i < 32; i++) {
    if (x&(1<<i)) cout << i << " ";
}
// saída: 1 3 4 8
```

## Operações de conjunto

As operações de conjunto podem ser implementadas da seguinte forma como operações de bits:

	sintaxe de conjunto	sintaxe de bits
interseção	$a \cap b$	$a \& b$
união	$a \cup b$	$a \mid b$
complemento	$\bar{a}$	$\sim a$
diferença	$a \setminus b$	$a \& (\sim b)$

Por exemplo, o código a seguir primeiro constrói os conjuntos  $x = \{1, 3, 4, 8\}$  e  $y = \{3, 6, 8, 9\}$ , e então constrói o conjunto  $z = x \cup y = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ :

```
int x = (1<<1)|(1<<3)|(1<<4)|(1<<8);
int y = (1<<3)|(1<<6)|(1<<8)|(1<<9);
int z = x|y;
cout << __builtin_popcount(z) << "\n"; // 6
```

## Iterando por subconjuntos

O código a seguir percorre os subconjuntos de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ :

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {
    // processar subconjunto b
}
```

O código a seguir percorre os subconjuntos com exatamente  $k$  elementos:

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {
    if (__builtin_popcount(b) == k) {
        // processar subconjunto b
    }
}
```

O código a seguir percorre os subconjuntos de um conjunto  $x$ :

```
int b = 0;
do {
    // processar subconjunto b
} while (b=(b-x)&x);
```

## 10.4 Otimizações de bits

Muitos algoritmos podem ser otimizados usando operações de bits. Essas otimizações não alteram a complexidade de tempo do algoritmo, mas podem ter um grande impacto no tempo de execução real do código. Nesta seção, discutimos exemplos de tais situações.

### Distâncias de Hamming

A **distância de Hamming**  $\text{hamming}(a, b)$  entre duas cadeias de caracteres  $a$  e  $b$  de comprimento igual é o número de posições onde as cadeias de caracteres diferem. Por exemplo,

$$\text{hamming}(01101, 11001) = 2.$$

Considere o seguinte problema: Dado uma lista de  $n$  cadeias de caracteres de bits, cada uma de comprimento  $k$ , calcule a distância de Hamming mínima entre duas cadeias de caracteres na lista. Por exemplo, a resposta para  $[00111, 01101, 11110]$  é 2, porque

- $\text{hamming}(00111, 01101) = 2$ ,
- $\text{hamming}(00111, 11110) = 3$ , e
- $\text{hamming}(01101, 11110) = 3$ .

Uma maneira direta de resolver o problema é percorrer todos os pares de cadeias de caracteres e calcular suas distâncias de Hamming, o que gera um algoritmo de tempo  $O(n^2k)$ . A função a seguir pode ser usada para calcular distâncias:

```
int hamming(string a, string b) {
    int d = 0;
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (a[i] != b[i]) d++;
    }
    return d;
}
```



```
}
```

No entanto, se  $k$  for pequeno, podemos otimizar o código armazenando as cadeias de caracteres de bits como inteiros e calculando as distâncias de Hamming usando operações de bits. Em particular, se  $k \leq 32$ , podemos simplesmente armazenar as cadeias de caracteres como valores `int` e usar a seguinte função para calcular distâncias:

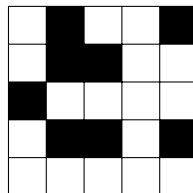
```
int hamming(int a, int b) {  
    return __builtin_popcount(a^b);  
}
```

Na função acima, a operação XOR constrói uma cadeia de caracteres de bits que tem bits iguais a um nas posições onde  $a$  e  $b$  diferem. Então, o número de bits é calculado usando a função `__builtin_popcount`.

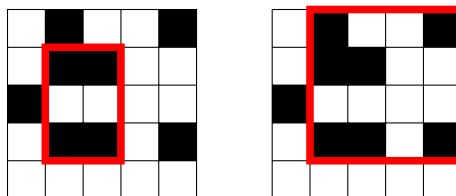
Para comparar as implementações, geramos uma lista de 10000 cadeias de caracteres de bits aleatórias de comprimento 30. Usando a primeira abordagem, a pesquisa levou 13,5 segundos, e depois da otimização de bits, levou apenas 0,5 segundos. Portanto, o código otimizado de bits era quase 30 vezes mais rápido que o código original.

## Contando subgrades

Como outro exemplo, considere o seguinte problema: Dada uma grade  $n \times n$  em que cada quadrado é preto (1) ou branco (0), calcule o número de subgrades em que todos os cantos são pretos. Por exemplo, a grade



contém duas dessas subgrades:



Existe um algoritmo de tempo  $O(n^3)$  para resolver o problema: percorrer todos os  $O(n^2)$  pares de linhas e para cada par  $(a, b)$  calcule o número de colunas que contêm um preto quadrado em ambas as linhas em  $O(n)$  tempo. O código a seguir assume que `color[y][x]` denota a cor na linha  $y$  e coluna  $x$ :

```
int count = 0;  
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    if (color[a][i] == 1 && color[b][i] == 1) count++;  
}
```

```
}
```

Então, essas colunas contam para  $\text{count}(\text{count} - 1)/2$  subgrades com cantos pretos, porque podemos escolher quaisquer dois deles para formar uma subgrade.

Para otimizar esse algoritmo, dividimos a grade em blocos de colunas de forma que cada bloco consista em  $N$  colunas consecutivas. Então, cada linha é armazenada como uma lista de números de  $N$  bits que descrevem as cores dos quadrados. Agora podemos processar  $N$  colunas ao mesmo tempo usando operações de bits. No código a seguir,  $\text{color}[y][k]$  representa um bloco de  $N$  cores como bits.

```
int count = 0;
for (int i = 0; i <= n/N; i++) {
    count += __builtin_popcount(color[a][i]&color[b][i]);
}
```

O algoritmo resultante funciona em  $O(n^3/N)$  tempo.

Geramos uma grade aleatória de tamanho  $2500 \times 2500$  e comparamos a implementação original e otimizada de bits. Enquanto o código original levou 29,6 segundos, a versão otimizada de bits levou apenas 3,1 segundos com  $N = 32$  (números int) e 1,7 segundos com  $N = 64$  (números long long).

## 10.5 Programação dinâmica

As operações de bits fornecem uma maneira eficiente e conveniente de implementar algoritmos de programação dinâmica cujos estados contêm subconjuntos de elementos, porque esses estados podem ser armazenados como inteiros. A seguir, discutimos exemplos de combinação de operações de bits e programação dinâmica.

### Seleção ótima

Como primeiro exemplo, considere o seguinte problema: Somos dados os preços de  $k$  produtos ao longo de  $n$  dias, e queremos comprar cada produto exatamente uma vez. No entanto, podemos comprar no máximo um produto em um dia. Qual é o preço total mínimo? Por exemplo, considere o seguinte cenário ( $k = 3$  e  $n = 8$ ):

	0	1	2	3	4	5	6	7
produto 0	6	9	5	2	8	9	1	6
produto 1	8	2	6	2	7	5	7	2
produto 2	5	3	9	7	3	5	1	4

Neste cenário, o preço total mínimo é 5:

	0	1	2	3	4	5	6	7
produto 0	6	9	5	2	8	9	1	6
produto 1	8	2	6	2	7	5	7	2
produto 2	5	3	9	7	3	5	1	4

Seja  $\text{price}[x][d]$  o preço do produto  $x$  no dia  $d$ . Por exemplo, no cenário acima  $\text{price}[2][3] = 7$ . Então, seja  $\text{total}(S, d)$  o preço total mínimo para comprar um subconjunto  $S$  de produtos até o dia  $d$ . Usando essa função, a solução para o problema é  $\text{total}(\{0 \dots k-1\}, n-1)$ .

Primeiro,  $\text{total}(\emptyset, d) = 0$ , porque não custa nada comprar um conjunto vazio, e  $\text{total}(\{x\}, 0) = \text{price}[x][0]$ , porque existe uma maneira de comprar um produto no primeiro dia. Então, a seguinte recorrência pode ser usada:

$$\text{total}(S, d) = \min(\text{total}(S, d-1), \min_{x \in S} (\text{total}(S \setminus x, d-1) + \text{price}[x][d]))$$

Isso significa que nós ou não compramos nenhum produto no dia  $d$  ou compramos um produto  $x$  que pertence a  $S$ . Neste último caso, removemos  $x$  de  $S$  e adicionamos o preço de  $x$  ao preço total.

A próxima etapa é calcular os valores da função usando programação dinâmica. Para armazenar os valores da função, declaramos um array

```
int total[1<<K][N];
```

onde  $K$  e  $N$  são constantes suficientemente grandes. A primeira dimensão do array corresponde a uma representação de bits de um subconjunto.

Primeiro, os casos onde  $d = 0$  podem ser processados da seguinte forma:

```
for (int x = 0; x < k; x++) {
    total[1<<x][0] = price[x][0];
}
```

Então, a recorrência se traduz no seguinte código:

```
for (int d = 1; d < n; d++) {
    for (int s = 0; s < (1<<k); s++) {
        total[s][d] = total[s][d-1];
        for (int x = 0; x < k; x++) {
            if (s & (1<<x)) {
                total[s][d] = min(total[s][d],
                                   total[s^(1<<x)][d-1] + price[x][d]);
            }
        }
    }
}
```

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n2^k k)$ .

## De permutações para subconjuntos

Usando programação dinâmica, é frequentemente possível transformar uma iteração sobre permutações em uma iteração sobre subconjuntos<sup>1</sup>. A vantagem disso é que  $n!$ , o número de permutações, é muito maior que  $2^n$ , o número de subconjuntos. Por exemplo, se  $n = 20$ , então  $n! \approx 2.4 \cdot 10^{18}$  e  $2^n \approx 10^6$ . Assim, para certos valores de  $n$ , podemos iterar eficientemente pelos subconjuntos, mas não pelas permutações.

Como exemplo, considere o seguinte problema: Há um elevador com peso máximo  $x$ , e  $n$  pessoas com pesos conhecidos que desejam ir do térreo para o último andar. Qual é o número mínimo de viagens necessárias se as pessoas entrarem no elevador em uma ordem ótima?

Por exemplo, suponha que  $x = 10$ ,  $n = 5$  e os pesos são os seguintes:

pessoa	peso
0	2
1	3
2	3
3	5
4	6

Nesse caso, o número mínimo de viagens é 2. Uma ordem ótima é  $\{0, 2, 3, 1, 4\}$ , que divide as pessoas em duas viagens: primeiro  $\{0, 2, 3\}$  (peso total 10), e então  $\{1, 4\}$  (peso total 9).

O problema pode ser facilmente resolvido em  $O(n!n)$  tempo testando todas as possíveis permutações de  $n$  pessoas. No entanto, podemos usar programação dinâmica para obter um algoritmo mais eficiente em tempo  $O(2^n n)$ . A ideia é calcular para cada subconjunto de pessoas dois valores: o número mínimo de viagens necessárias e o peso mínimo das pessoas que viajam no último grupo.

Seja  $\text{peso}[p]$  o peso da pessoa  $p$ . Definimos duas funções:  $\text{viagens}(S)$  é o número mínimo de viagens para um subconjunto  $S$ , e  $\text{ultima}(S)$  é o peso mínimo da última viagem. Por exemplo, no cenário acima

$$\text{viagens}(\{1, 3, 4\}) = 2 \quad \text{e} \quad \text{ultima}(\{1, 3, 4\}) = 5,$$

porque as viagens ótimas são  $\{1, 4\}$  e  $\{3\}$ , e a segunda viagem tem peso 5. Claro, nosso objetivo final é calcular o valor de  $\text{viagens}(\{0 \dots n-1\})$ .

Podemos calcular os valores das funções recursivamente e então aplicar programação dinâmica. A ideia é percorrer todas as pessoas que pertencem a  $S$  e escolher de forma ótima a última pessoa  $p$  que entra no elevador. Cada escolha desse tipo gera um subproblema para um subconjunto menor de pessoas. Se  $\text{ultima}(S \setminus p) + \text{peso}[p] \leq x$ , podemos adicionar  $p$  à última viagem. Caso contrário, precisamos reservar uma nova viagem que inicialmente contém apenas  $p$ .

Para implementar a programação dinâmica, declaramos um array

```
pair<int, int> melhor[1<<N];
```

<sup>1</sup>Essa técnica foi introduzida em 1962 por M. Held e R. M. Karp [34].

que contém para cada subconjunto  $S$  um par  $(viagens(S), ultima(S))$ . Definimos o valor para um grupo vazio da seguinte forma:

```
melhor[0] = {1,0};
```

Então, podemos preencher o array da seguinte forma:

```
for (int s = 1; s < (1<<n); s++) {
    // valor inicial: n+1 viagens sao necessarias
    melhor[s] = {n+1,0};
    for (int p = 0; p < n; p++) {
        if (s&(1<<p)) {
            auto opcao = melhor[s^(1<<p)];
            if (opcao.second+peso[p] <= x) {
                // adicionar p a uma viagem existente
                opcao.second += peso[p];
            } else {
                // reservar uma nova viagem para p
                opcao.first++;
                opcao.second = peso[p];
            }
            melhor[s] = min(melhor[s], opcao);
        }
    }
}
```

Observe que o loop acima garante que para quaisquer dois subconjuntos  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $S_1 \subset S_2$ , processamos  $S_1$  antes de  $S_2$ . Assim, os valores de programação dinâmica são calculados na ordem correta.

## Contando subconjuntos

Nosso último problema neste capítulo é o seguinte: Seja  $X = \{0 \dots n-1\}$ , e cada subconjunto  $S \subset X$  recebe um inteiro  $valor[S]$ . Nossa tarefa é calcular para cada  $S$

$$soma(S) = \sum_{A \subset S} valor[A],$$

ou seja, a soma dos valores dos subconjuntos de  $S$ .

Por exemplo, suponha que  $n = 3$  e os valores são os seguintes:

- $valor[\emptyset] = 3$
- $valor[\{2\}] = 5$
- $valor[\{0\}] = 1$
- $valor[\{0,2\}] = 1$
- $valor[\{1\}] = 4$
- $valor[\{1,2\}] = 3$
- $valor[\{0,1\}] = 5$
- $valor[\{0,1,2\}] = 3$

Nesse caso, por exemplo,”

$$\begin{aligned}\text{soma}(\{0,2\}) &= \text{valor}[\emptyset] + \text{valor}[\{0\}] + \text{valor}[\{2\}] + \text{valor}[\{0,2\}] \\ &= 3 + 1 + 5 + 1 = 10.\end{aligned}$$

Como há um total de  $2^n$  subconjuntos, uma possível solução é percorrer todos os pares de subconjuntos em tempo  $O(2^{2n})$ . No entanto, usando programação dinâmica, podemos resolver o problema em tempo  $O(2^n n)$ . A ideia é focar em somas onde os elementos que podem ser removidos de  $S$  são restritos.

Seja  $\text{parcial}(S, k)$  a soma dos valores dos subconjuntos de  $S$  com a restrição de que apenas os elementos  $0 \dots k$  podem ser removidos de  $S$ . Por exemplo,

$$\text{parcial}(\{0,2\}, 1) = \text{valor}[\{2\}] + \text{valor}[\{0,2\}],$$

porque podemos remover apenas os elementos  $0 \dots 1$ . Podemos calcular os valores de soma usando os valores de  $\text{parcial}$ , porque

$$\text{soma}(S) = \text{parcial}(S, n-1).$$

Os casos base para a função são

$$\text{parcial}(S, -1) = \text{valor}[S],$$

porque nesse caso nenhum elemento pode ser removido de  $S$ . Então, no caso geral, podemos usar a seguinte recorrência:

$$\text{parcial}(S, k) = \begin{cases} \text{parcial}(S, k-1) & k \notin S \\ \text{parcial}(S, k-1) + \text{parcial}(S \setminus \{k\}, k-1) & k \in S \end{cases}$$

Aqui focamos no elemento  $k$ . Se  $k \in S$ , temos duas opções: podemos manter  $k$  em  $S$  ou removê-lo de  $S$ .

Há uma maneira particularmente inteligente de implementar o cálculo das somas. Podemos declarar um array

```
int soma[1<<N];
```

que conterá a soma de cada subconjunto. O array é inicializado da seguinte forma:

```
for (int s = 0; s < (1<<n); s++) {
    soma[s] = valor[s];
}
```

Então, podemos preencher o array da seguinte forma:

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    for (int s = 0; s < (1<<n); s++) {
        if (s & (1<<k)) soma[s] += soma[s ^ (1<<k)];
    }
}
```

Esse código calcula os valores de  $\text{parcial}(S, k)$  para  $k = 0 \dots n-1$  no array `soma`. Como  $\text{parcial}(S, k)$  é sempre baseado em  $\text{parcial}(S, k-1)$ , podemos reutilizar o array `soma`, o que gera uma implementação muito eficiente.

# **Parte II**

## **Algoritmos de grafos**





# Capítulo 11

## Conceitos básicos sobre grafos

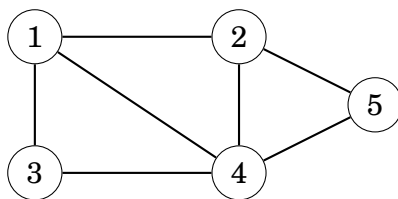
Muitos problemas de programação podem ser resolvidos modelando o problema como um problema de grafo e usando um algoritmo de grafo apropriado. Um exemplo típico de grafo é uma rede de estradas e cidades em um país. Às vezes, porém, o grafo está oculto no problema e pode ser difícil detectá-lo.

Esta parte do livro discute algoritmos de grafos, com foco especial em tópicos que são importantes na programação competitiva. Neste capítulo, abordaremos conceitos relacionados a grafos e estudaremos diferentes maneiras de representar grafos em algoritmos.

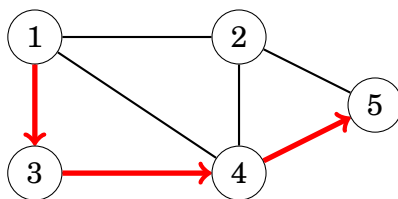
### 11.1 Terminologia de grafos

Um **grafo** consiste em **nós** e **arestas**. Neste livro, a variável  $n$  denota o número de nós em um grafo, e a variável  $m$  denota o número de arestas. Os nós são numerados usando inteiros  $1, 2, \dots, n$ .

Por exemplo, o grafo a seguir consiste em 5 nós e 7 arestas:



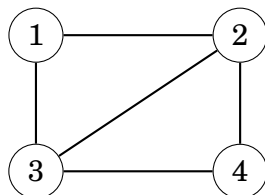
Um **caminho** leva do nó  $a$  ao nó  $b$  através das arestas do grafo. O **comprimento** de um caminho é o número de arestas nele. Por exemplo, o grafo acima contém um caminho  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  de comprimento 3 do nó 1 ao nó 5:



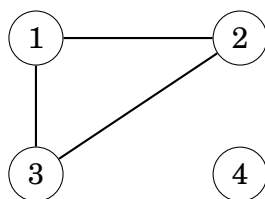
Um caminho é um **ciclo** se o primeiro e o último nó forem os mesmos. Por exemplo, o grafo acima contém um ciclo  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ . Um caminho é **simples** se cada nó aparecer no máximo uma vez no caminho.

## Conectividade

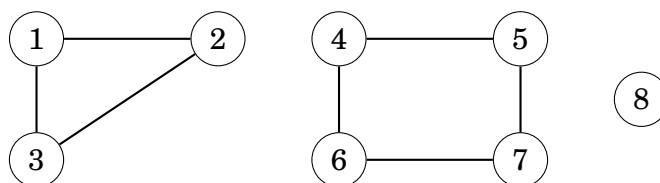
Um grafo é **conexo** se houver um caminho entre quaisquer dois nós. Por exemplo, o seguinte grafo é conexo:



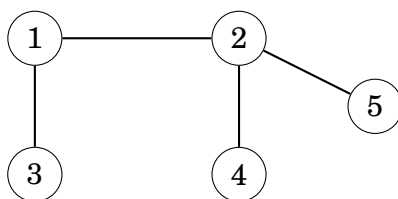
O seguinte grafo não é conexo, porque não é possível ir do nó 4 a nenhum outro nó:



As partes conectadas de um grafo são chamadas de seus **componentes**. Por exemplo, o seguinte grafo contém três componentes: {1, 2, 3}, {4, 5, 6, 7} e {8}.

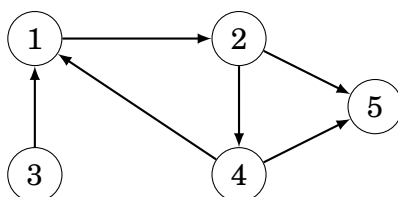


Uma **árvore** é um grafo conexo que consiste em  $n$  nós e  $n - 1$  arestas. Existe um único caminho entre quaisquer dois nós de uma árvore. Por exemplo, o seguinte grafo é uma árvore:



## Direções das arestas

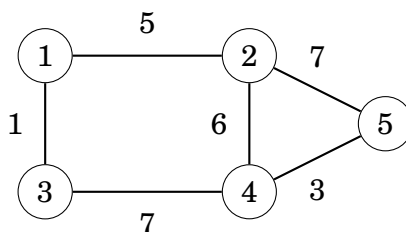
Um grafo é **direcionado** se as arestas puderem ser percorridas em apenas uma direção. Por exemplo, o seguinte grafo é direcionado:



O grafo acima contém um caminho  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  do nó 3 ao nó 5, mas não há caminho do nó 5 ao nó 3.

## Pesos das arestas

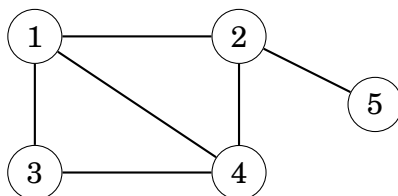
Em um grafo **ponderado**, cada aresta recebe um **peso**. Os pesos são frequentemente interpretados como comprimentos de aresta. Por exemplo, o seguinte grafo é ponderado:



O comprimento de um caminho em um grafo ponderado é a soma dos pesos das arestas no caminho. Por exemplo, no grafo acima, o comprimento do caminho  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  é 12, e o comprimento do caminho  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  é 11. O último caminho é o **caminho mais curto** do nó 1 ao nó 5.

## Vizinhos e graus

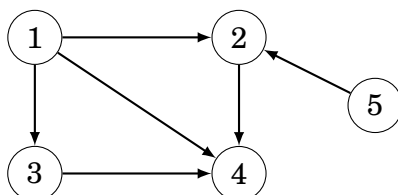
Dois nós são **vizinhos** ou **adjacentes** se houver uma aresta entre eles. O **grau** de um nó é o número de seus vizinhos. Por exemplo, no seguinte grafo, os vizinhos do nó 2 são 1, 4 e 5, então seu grau é 3.



A soma dos graus em um grafo é sempre  $2m$ , onde  $m$  é o número de arestas, porque cada aresta aumenta em um o grau de exatamente dois nós. Por esta razão, a soma dos graus é sempre par.

Um grafo é **regular** se o grau de cada nó for uma constante  $d$ . Um grafo é **completo** se o grau de cada nó for  $n - 1$ , ou seja, o grafo contém todas as arestas possíveis entre os nós.

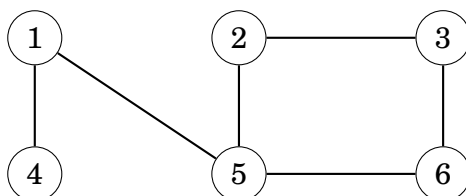
Em um grafo direcionado, o **grau de entrada** de um nó é o número de arestas que terminam no nó, e o **grau de saída** de um nó é o número de arestas que começam no nó. Por exemplo, no seguinte grafo, o grau de entrada do nó 2 é 2, e o grau de saída do nó 2 é 1.



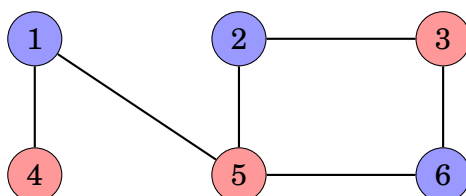
## Colorações

Em uma **coloração** de um grafo, cada nó recebe uma cor de forma que nenhum nó adjacente tenha a mesma cor.

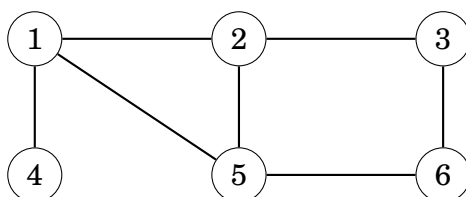
Um grafo é **bipartido** se for possível colori-lo usando duas cores. Acontece que um grafo é bipartido exatamente quando não contém um ciclo com um número ímpar de arestas. Por exemplo, o grafo



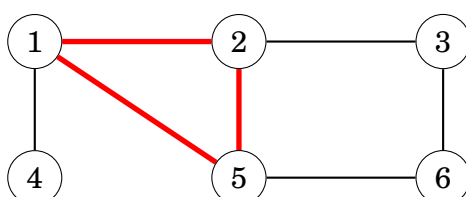
é bipartido, pois pode ser colorido da seguinte forma:



No entanto, o grafo

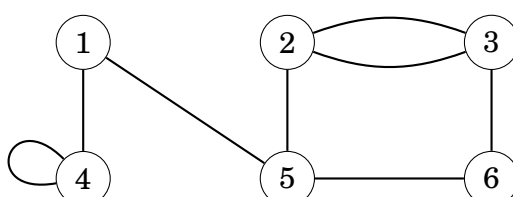


não é bipartido, porque não é possível colorir o seguinte ciclo de três nós usando duas cores:



## Simplicidade

Um grafo é **simples** se nenhuma aresta começa e termina no mesmo nó, e não há múltiplas arestas entre dois nós. Muitas vezes, assumimos que os grafos são simples. Por exemplo, o seguinte grafo *não* é simples:



## 11.2 Representação de grafos

Existem várias maneiras de representar grafos em algoritmos. A escolha de uma estrutura de dados depende do tamanho do grafo e da maneira como o algoritmo o processa. A seguir, veremos três representações comuns.

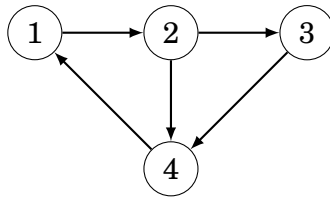
### Representação de lista de adjacência

Na representação de lista de adjacência, cada nó  $x$  no grafo recebe uma **lista de adjacência** que consiste em nós para os quais há uma aresta de  $x$ . Listas de adjacência são a maneira mais popular de representar grafos, e a maioria dos algoritmos pode ser implementada de forma eficiente usando-as.

Uma maneira conveniente de armazenar as listas de adjacência é declarar um array de vetores da seguinte forma:

```
vector<int> adj[N];
```

A constante  $N$  é escolhida de forma que todas as listas de adjacência possam ser armazenadas. Por exemplo, o grafo



pode ser armazenado da seguinte forma:

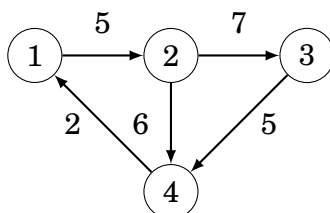
```
adj[1].push_back(2);  
adj[2].push_back(3);  
adj[2].push_back(4);  
adj[3].push_back(4);  
adj[4].push_back(1);
```

Se o grafo for não direcionado, ele pode ser armazenado de forma semelhante, mas cada aresta é adicionada em ambas as direções.

Para um grafo ponderado, a estrutura pode ser estendida da seguinte forma:

```
vector<pair<int,int>> adj[N];
```

Nesse caso, a lista de adjacência do nó  $a$  contém o par  $(b, w)$  sempre que houver uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$  com peso  $w$ . Por exemplo, o grafo



pode ser armazenado da seguinte forma:

```
adj[1].push_back({2,5});  
adj[2].push_back({3,7});  
adj[2].push_back({4,6});  
adj[3].push_back({4,5});  
adj[4].push_back({1,2});
```

O benefício de usar listas de adjacência é que podemos encontrar os nós para os quais podemos mover de um determinado nó através de uma aresta de forma eficiente. Por exemplo, o seguinte loop percorre todos os nós para os quais podemos mover do nó  $s$ :

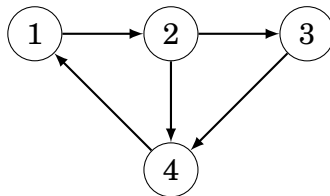
```
for (auto u : adj[s]) {  
    // processa o nó u  
}
```

## Representação de matriz de adjacência

Uma **matriz de adjacência** é um array bidimensional que indica quais arestas o grafo contém. Podemos verificar eficientemente a partir de uma matriz de adjacência se existe uma aresta entre dois nós. A matriz pode ser armazenada como um array

```
int adj[N][N];
```

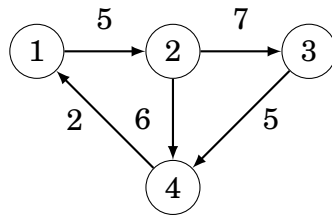
onde cada valor  $adj[a][b]$  indica se o grafo contém uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$ . Se a aresta estiver incluída no grafo, então  $adj[a][b] = 1$ , e caso contrário  $adj[a][b] = 0$ . Por exemplo, o grafo



pode ser representado da seguinte forma:

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	1	0	0	0

Se o grafo for ponderado, a representação da matriz de adjacência pode ser estendida para que a matriz contenha o peso da aresta, se a aresta existir. Usando essa representação, o grafo



corresponde à seguinte matriz:

	1	2	3	4
1	0	5	0	0
2	0	0	7	6
3	0	0	0	5
4	2	0	0	0

A desvantagem da representação da matriz de adjacência é que a matriz contém  $n^2$  elementos e, geralmente, a maioria deles é zero. Por esse motivo, a representação não pode ser usada se o grafo for grande.

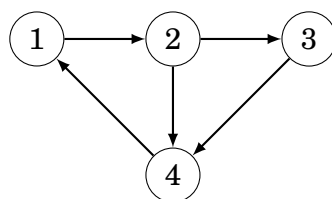
## Representação de lista de arestas

Uma **lista de arestas** contém todas as arestas de um grafo em alguma ordem. Esta é uma maneira conveniente de representar um grafo se o algoritmo processa todas as arestas do grafo e não é necessário encontrar arestas que comecem em um determinado nó.

A lista de arestas pode ser armazenada em um vetor

```
vector<pair<int,int>> edges;
```

onde cada par  $(a, b)$  denota que há uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$ . Assim, o grafo



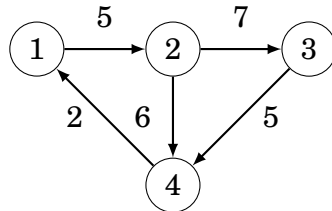
pode ser representado da seguinte forma:

```
edges.push_back({1,2});
edges.push_back({2,3});
edges.push_back({2,4});
edges.push_back({3,4});
edges.push_back({4,1});
```

Se o grafo for ponderado, a estrutura pode ser estendida da seguinte forma:

```
vector<tuple<int,int,int>> edges;
```

Cada elemento desta lista é da forma  $(a,b,w)$ , o que significa que há uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$  com peso  $w$ . Por exemplo, o grafo



pode ser representado da seguinte forma<sup>1</sup>:

```
edges.push_back({1,2,5});  
edges.push_back({2,3,7});  
edges.push_back({2,4,6});  
edges.push_back({3,4,5});  
edges.push_back({4,1,2});
```

---

<sup>1</sup>Em alguns compiladores mais antigos, a função `make_tuple` deve ser usada no lugar das chaves (por exemplo, `make_tuple(1,2,5)` em vez de `{1,2,5}`).



# Capítulo 12

## Travessia de Grafos

Este capítulo discute dois algoritmos fundamentais de grafos: busca em profundidade e busca em largura. Ambos os algoritmos recebem um nó inicial no grafo e visitam todos os nós que podem ser alcançados a partir do nó inicial. A diferença entre os algoritmos está na ordem em que eles visitam os nós.

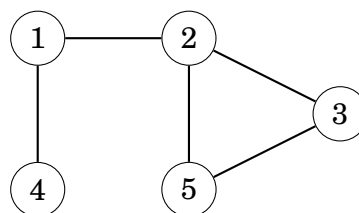
### 12.1 Busca em Profundidade

**Busca em profundidade** (DFS) é uma técnica simples de travessia de grafos. O algoritmo começa em um nó inicial e prossegue para todos os outros nós que são alcançáveis a partir do nó inicial usando as arestas do grafo.

A busca em profundidade sempre segue um único caminho no grafo enquanto encontra novos nós. Depois disso, ele retorna aos nós anteriores e começa a explorar outras partes do grafo. O algoritmo mantém o controle dos nós visitados, para que processe cada nó apenas uma vez.

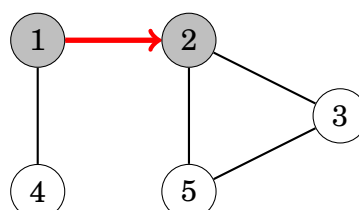
#### Exemplo

Vamos considerar como a busca em profundidade processa o seguinte grafo:

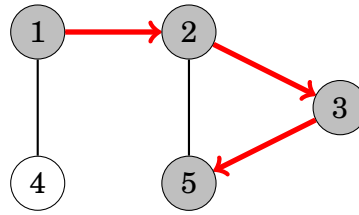


Podemos começar a busca em qualquer nó do grafo; agora vamos começar a busca no nó 1.

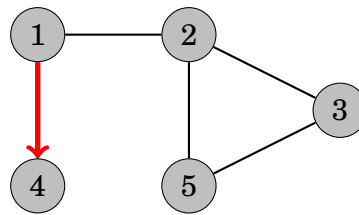
A busca primeiro prossegue para o nó 2:



Depois disso, os nós 3 e 5 serão visitados:



Os vizinhos do nó 5 são 2 e 3, mas a busca já visitou ambos, então é hora de retornar aos nós anteriores. Os vizinhos dos nós 3 e 2 também já foram visitados, então passamos do nó 1 para o nó 4:



Depois disso, a busca termina porque visitou todos os nós.

A complexidade de tempo da busca em profundidade é  $O(n + m)$  onde  $n$  é o número de nós e  $m$  é o número de arestas, porque o algoritmo processa cada nó e aresta uma vez.

## Implementação

A busca em profundidade pode ser convenientemente implementada usando recursão. A seguinte função `dfs` inicia uma busca em profundidade em um determinado nó. A função assume que o grafo é armazenado como listas de adjacência em um array:

```
vector<int> adj[N];
```

e também mantém um array:

```
bool visited[N];
```

que mantém o controle dos nós visitados. Inicialmente, cada valor do array é `false`, e quando a busca chega ao nó  $s$ , o valor de `visited[s]` se torna `true`. A função pode ser implementada da seguinte forma:

```
void dfs(int s) {  
    if (visited[s]) return;  
    visited[s] = true;  
    // processa o nó s  
    for (auto u: adj[s]) {  
        dfs(u);  
    }  
}
```

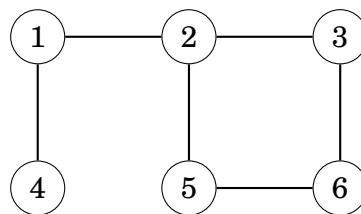
## 12.2 Busca em Largura

**Busca em largura** (BFS) visita os nós em ordem crescente de sua distância do nó inicial. Assim, podemos calcular a distância do nó inicial a todos os outros nós usando a busca em largura. No entanto, a busca em largura é mais difícil de implementar do que a busca em profundidade.

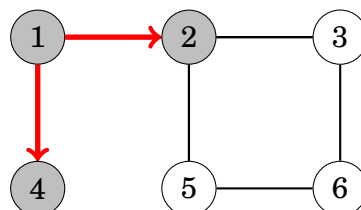
A busca em largura percorre os nós um nível após o outro. Primeiro, a busca explora os nós cuja distância do nó inicial é 1, depois os nós cuja distância é 2 e assim por diante. Este processo continua até que todos os nós tenham sido visitados.

### Exemplo

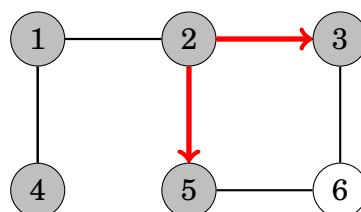
Vamos considerar como a busca em largura processa o seguinte grafo:



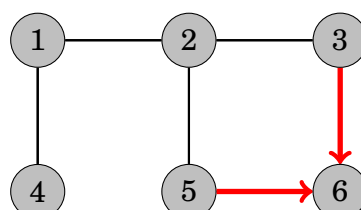
Suponha que a busca comece no nó 1. Primeiro, processamos todos os nós que podem ser alcançados a partir do nó 1 usando uma única aresta:



Depois disso, prosseguimos para os nós 3 e 5:



Finalmente, visitamos o nó 6:



Agora, calculamos as distâncias do nó inicial a todos os nós do grafo. As distâncias são as seguintes:

nó	distância
1	0
2	1
3	2
4	1
5	2
6	3

Como na busca em profundidade, a complexidade de tempo da busca em largura é  $O(n + m)$ , onde  $n$  é o número de nós e  $m$  é o número de arestas.

## Implementação

A busca em largura é mais difícil de implementar do que a busca em profundidade, porque o algoritmo visita nós em diferentes partes do grafo. Uma implementação típica é baseada em uma fila que contém nós. A cada etapa, o próximo nó na fila será processado.

O código a seguir assume que o grafo é armazenado como listas de adjacência e mantém as seguintes estruturas de dados:

```
queue<int> q;  
bool visited[N];  
int distance[N];
```

A fila  $q$  contém nós a serem processados em ordem crescente de sua distância. Novos nós são sempre adicionados ao final da fila, e o nó no início da fila é o próximo nó a ser processado. O array `visited` indica quais nós a busca já visitou e o array `distance` conterá as distâncias do nó inicial a todos os nós do grafo.

A busca pode ser implementada da seguinte forma, começando no nó  $x$ :

```
visited[x] = true;  
distance[x] = 0;  
q.push(x);  
while (!q.empty()) {  
    int s = q.front(); q.pop();  
    // processa o nó s  
    for (auto u : adj[s]) {  
        if (visited[u]) continue;  
        visited[u] = true;  
        distance[u] = distance[s]+1;  
        q.push(u);  
    }  
}
```

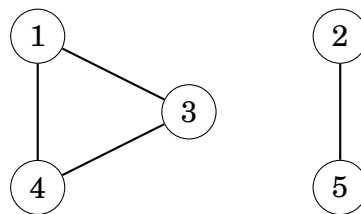
## 12.3 Aplicações

Usando os algoritmos de travessia de grafos, podemos verificar muitas propriedades dos grafos. Normalmente, tanto a busca em profundidade quanto a busca em largura podem ser usadas, mas na prática, a busca em profundidade é uma escolha melhor, porque é mais fácil de implementar. Nas seguintes aplicações, assumiremos que o grafo é não direcionado.

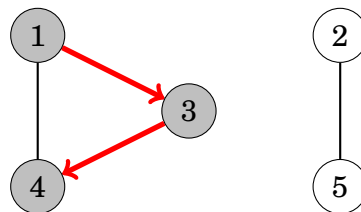
### Verificação de Conectividade

Um grafo é conectado se houver um caminho entre quaisquer dois nós do grafo. Assim, podemos verificar se um grafo é conectado começando em um nó arbitrário e descobrindo se podemos alcançar todos os outros nós.

Por exemplo, no grafo:



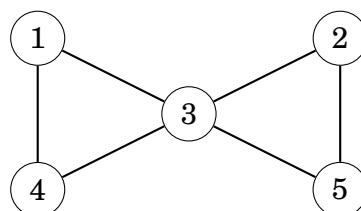
uma busca em profundidade a partir do nó 1 visita os seguintes nós:



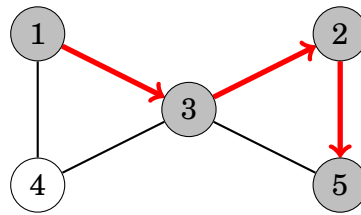
Como a busca não visitou todos os nós, podemos concluir que o grafo não é conectado. De forma semelhante, também podemos encontrar todos os componentes conectados de um grafo iterando pelos nós e sempre iniciando uma nova busca em profundidade se o nó atual ainda não pertence a nenhum componente.

### Encontrando Ciclos

Um grafo contém um ciclo se, durante uma travessia de grafo, encontrarmos um nó cujo vizinho (diferente do nó anterior no caminho atual) já foi visitado. Por exemplo, o grafo:



contém dois ciclos e podemos encontrar um deles da seguinte forma:



Depois de passar do nó 2 para o nó 5, notamos que o vizinho 3 do nó 5 já foi visitado. Assim, o grafo contém um ciclo que passa pelo nó 3, por exemplo,  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ .

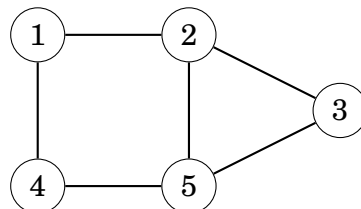
Outra forma de descobrir se um grafo contém um ciclo é simplesmente calcular o número de nós e arestas em cada componente. Se um componente contém  $c$  nós e nenhum ciclo, ele deve conter exatamente  $c - 1$  arestas (portanto, deve ser uma árvore). Se houver  $c$  ou mais arestas, o componente certamente contém um ciclo.

## Verificação de Bipartição

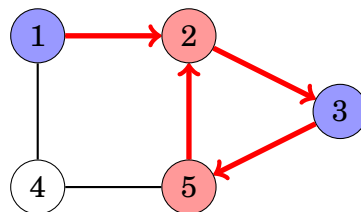
Um grafo é bipartido se seus nós podem ser coloridos usando duas cores, de modo que não haja nós adjacentes com a mesma cor. É surpreendentemente fácil verificar se um grafo é bipartido usando algoritmos de travessia de grafo.

A ideia é colorir o nó inicial de azul, todos os seus vizinhos de vermelho, todos os seus vizinhos de azul e assim por diante. Se em algum ponto da busca notarmos que dois nós adjacentes têm a mesma cor, isso significa que o grafo não é bipartido. Caso contrário, o grafo é bipartido e uma coloração foi encontrada.

Por exemplo, o grafo:



não é bipartido, porque uma busca a partir do nó 1 prossegue da seguinte forma:



Notamos que a cor de ambos os nós 2 e 5 é vermelha, sendo que eles são nós adjacentes no grafo. Assim, o grafo não é bipartido.

Este algoritmo sempre funciona, porque quando há apenas duas cores disponíveis, a cor do nó inicial em um componente determina as cores de todos os outros nós no componente. Não faz diferença se o nó inicial é vermelho ou azul.

Observe que, no caso geral, é difícil descobrir se os nós em um grafo podem ser coloridos usando  $k$  cores para que nenhum nó adjacente tenha a mesma cor. Mesmo quando  $k = 3$ , nenhum algoritmo eficiente é conhecido e o problema é NP-difícil.





# Capítulo 13

## Caminhos mínimos

Encontrar um caminho mínimo entre dois nós de um grafo é um problema importante que possui muitas aplicações práticas. Por exemplo, um problema natural relacionado a uma rede rodoviária é calcular o menor comprimento possível de uma rota entre duas cidades, dados os comprimentos das estradas.

Em um grafo não ponderado, o comprimento de um caminho é igual ao número de suas arestas, e podemos simplesmente usar a busca em largura para encontrar um caminho mínimo. No entanto, neste capítulo, vamos nos concentrar em grafos ponderados, onde algoritmos mais sofisticados são necessários para encontrar caminhos mínimos.

### 13.1 Algoritmo de Bellman–Ford

O **algoritmo de Bellman–Ford**<sup>1</sup> encontra caminhos mínimos de um nó inicial até todos os nós do grafo. O algoritmo pode processar todos os tipos de grafos, desde que o grafo não contenha um ciclo com comprimento negativo. Se o grafo contiver um ciclo negativo, o algoritmo pode detectar isso.

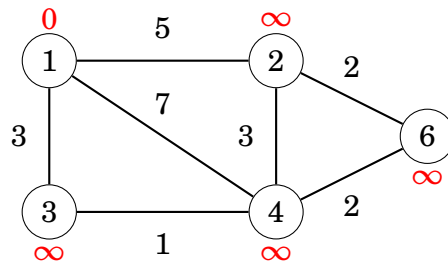
O algoritmo mantém o controle das distâncias do nó inicial até todos os nós do grafo. Inicialmente, a distância até o nó inicial é 0 e a distância até todos os outros nós é infinita. O algoritmo reduz as distâncias encontrando arestas que encurtam os caminhos até que não seja possível reduzir nenhuma distância.

#### Exemplo

Vamos considerar como o algoritmo de Bellman–Ford funciona no seguinte grafo:

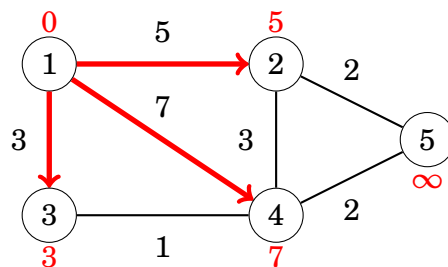
---

<sup>1</sup>O algoritmo recebeu o nome de R. E. Bellman e L. R. Ford, que o publicaram independentemente em 1958 e 1956, respectivamente [5, 24].

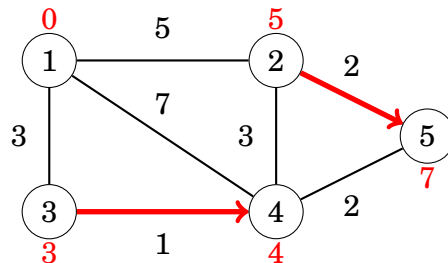


Cada nó do grafo recebe uma distância. Inicialmente, a distância até o nó inicial é 0, e a distância até todos os outros nós é infinita.

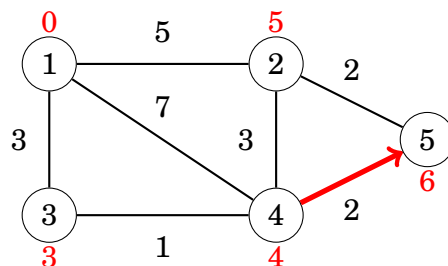
O algoritmo procura por arestas que reduzam as distâncias. Primeiro, todas as arestas do nó 1 reduzem as distâncias:



Depois disso, as arestas  $2 \rightarrow 5$  e  $3 \rightarrow 4$  reduzem as distâncias:

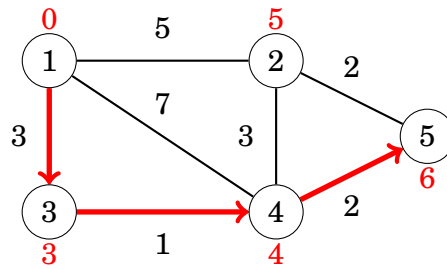


Finalmente, há mais uma mudança:



Depois disso, nenhuma aresta pode reduzir nenhuma distância. Isso significa que as distâncias são finais, e calculamos com sucesso as menores distâncias do nó inicial até todos os nós do grafo.

Por exemplo, a menor distância 3 do nó 1 ao nó 5 corresponde ao seguinte caminho:



## Implementação

A seguinte implementação do algoritmo de Bellman–Ford determina as menores distâncias de um nó  $x$  até todos os nós do grafo. O código assume que o grafo é armazenado como uma lista de arestas `edges` que consiste em tuplas da forma  $(a, b, w)$ , significando que há uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$  com peso  $w$ .

O algoritmo consiste em  $n - 1$  rodadas, e em cada rodada o algoritmo percorre todas as arestas do grafo e tenta reduzir as distâncias. O algoritmo constrói um vetor `distance` que conterá as distâncias de  $x$  até todos os nós do grafo. A constante `INF` denota uma distância infinita.

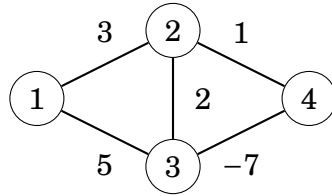
```
for (int i = 1; i <= n; i++) distance[i] = INF;
distance[x] = 0;
for (int i = 1; i <= n-1; i++) {
    for (auto e : edges) {
        int a, b, w;
        tie(a, b, w) = e;
        distance[b] = min(distance[b], distance[a]+w);
    }
}
```

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(nm)$ , pois o algoritmo consiste em  $n - 1$  rodadas e itera por todas as  $m$  arestas durante uma rodada. Se não houver ciclos negativos no grafo, todas as distâncias serão finais após  $n - 1$  rodadas, pois cada caminho mínimo pode conter no máximo  $n - 1$  arestas.

Na prática, as distâncias finais geralmente podem ser encontradas mais rapidamente do que em  $n - 1$  rodadas. Assim, uma maneira possível de tornar o algoritmo mais eficiente é pará-lo se nenhuma distância puder ser reduzida durante uma rodada.

## Ciclos negativos

O algoritmo de Bellman–Ford também pode ser usado para verificar se o grafo contém um ciclo com comprimento negativo. Por exemplo, o grafo



contém um ciclo negativo  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  com comprimento  $-4$ .

Se o grafo contiver um ciclo negativo, podemos encurtar infinitamente qualquer caminho que contenha o ciclo repetindo o ciclo repetidamente. Assim, o conceito de um caminho mínimo não faz sentido nesta situação.

Um ciclo negativo pode ser detectado usando o algoritmo de Bellman–Ford executando o algoritmo por  $n$  rodadas. Se a última rodada reduzir alguma distância, o grafo contém um ciclo negativo. Observe que este algoritmo pode ser usado para pesquisar por um ciclo negativo em todo o grafo, independentemente do nó inicial.

## Algoritmo SPFA

O **algoritmo SPFA** (“Shortest Path Faster Algorithm”) [20] é uma variante do algoritmo de Bellman–Ford, que geralmente é mais eficiente do que o algoritmo original. O algoritmo SPFA não percorre todas as arestas em cada rodada, mas, em vez disso, escolhe as arestas a serem examinadas de forma mais inteligente.

O algoritmo mantém uma fila de nós que podem ser usados para reduzir as distâncias. Primeiro, o algoritmo adiciona o nó inicial  $x$  à fila. Então, o algoritmo sempre processa o primeiro nó na fila, e quando uma aresta  $a \rightarrow b$  reduz uma distância, o nó  $b$  é adicionado à fila.

A eficiência do algoritmo SPFA depende da estrutura do grafo: o algoritmo costuma ser eficiente, mas sua complexidade de tempo no pior caso ainda é  $O(nm)$  e é possível criar entradas que tornam o algoritmo tão lento quanto o algoritmo de Bellman–Ford original.

## 13.2 Algoritmo de Dijkstra

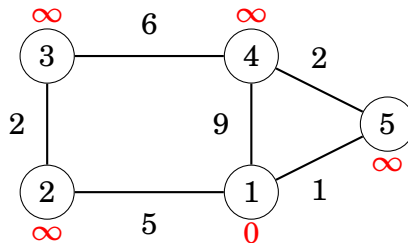
O **algoritmo de Dijkstra**<sup>2</sup> encontra os caminhos mínimos do nó inicial até todos os nós do grafo, assim como o algoritmo de Bellman–Ford. O benefício do algoritmo de Dijkstra é que ele é mais eficiente e pode ser usado para processar grafos grandes. No entanto, o algoritmo requer que não haja arestas com peso negativo no grafo.

Assim como o algoritmo de Bellman–Ford, o algoritmo de Dijkstra mantém distâncias para os nós e as reduz durante a pesquisa. O algoritmo de Dijkstra é eficiente porque ele só processa cada aresta do grafo uma vez, usando o fato de que não há arestas negativas.

<sup>2</sup>E. W. Dijkstra publicou o algoritmo em 1959 [14]; no entanto, seu artigo original não menciona como implementar o algoritmo de forma eficiente.

## Exemplo

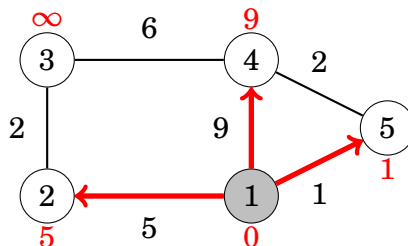
Vamos considerar como o algoritmo de Dijkstra funciona no seguinte grafo quando o nó inicial é o nó 1:



Assim como no algoritmo de Bellman–Ford, inicialmente a distância até o nó inicial é 0 e a distância até todos os outros nós é infinita.

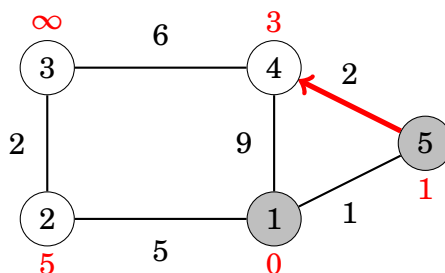
A cada etapa, o algoritmo de Dijkstra seleciona um nó que ainda não foi processado e cuja distância é a menor possível. O primeiro nó é o nó 1 com distância 0.

Quando um nó é selecionado, o algoritmo percorre todas as arestas que começam nesse nó e reduz as distâncias usando-as:

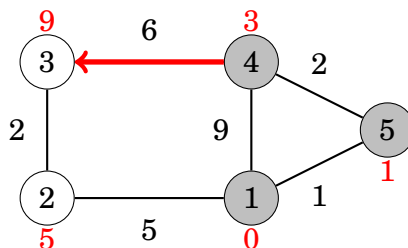


Neste caso, as arestas do nó 1 reduziram as distâncias dos nós 2, 4 e 5, cujas distâncias agora são 5, 9 e 1.

O próximo nó a ser processado é o nó 5 com distância 1. Isso reduz a distância até o nó 4 de 9 para 3:

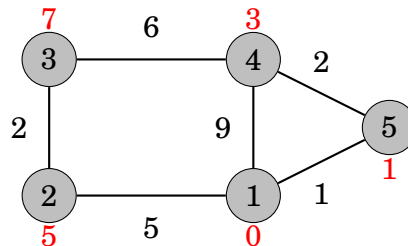


Depois disso, o próximo nó é o nó 4, que reduz a distância até o nó 3 para 9:



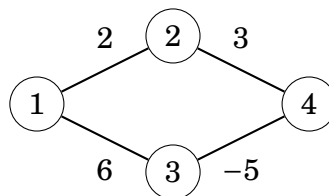
Uma propriedade notável do algoritmo de Dijkstra é que sempre que um nó é selecionado, sua distância é final. Por exemplo, neste ponto do algoritmo, as distâncias 0, 1 e 3 são as distâncias finais até os nós 1, 5 e 4.

Depois disso, o algoritmo processa os dois nós restantes, e as distâncias finais são as seguintes:



## Arestas negativas

A eficiência do algoritmo de Dijkstra é baseada no fato de que o grafo não contém arestas negativas. Se houver uma aresta negativa, o algoritmo pode dar resultados incorretos. Como exemplo, considere o seguinte grafo:



O caminho mínimo do nó 1 ao nó 4 é  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  e seu comprimento é 1. No entanto, o algoritmo de Dijkstra encontra o caminho  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  seguindo as arestas de menor peso. O algoritmo não leva em consideração que no outro caminho, o peso  $-5$  compensa o peso grande anterior 6.

## Implementação

A seguinte implementação do algoritmo de Dijkstra calcula as distâncias mínimas de um nó  $x$  para outros nós do grafo. O grafo é armazenado como listas de adjacência de modo que  $\text{adj}[a]$  contém um par  $(b, w)$  sempre que houver uma aresta do nó  $a$  ao nó  $b$  com peso  $w$ .

Uma implementação eficiente do algoritmo de Dijkstra exige que seja possível encontrar eficientemente o nó de distância mínima que ainda não foi processado. Uma estrutura de dados apropriada para isso é uma fila de prioridade que contém os nós ordenados por suas distâncias. Usando uma fila de prioridade, o próximo nó a ser processado pode ser recuperado em tempo logarítmico.

No código a seguir, a fila de prioridade  $q$  contém pares da forma  $(-d, x)$ , o que significa que a distância atual até o nó  $x$  é  $d$ . O vetor  $\text{distance}$  contém a distância até cada nó, e o vetor  $\text{processed}$  indica se um nó já foi processado. Inicialmente, a distância é 0 para  $x$  e  $\infty$  para todos os outros nós.

```

for (int i = 1; i <= n; i++) distance[i] = INF;
distance[x] = 0;
q.push({0,x});
while (!q.empty()) {
    int a = q.top().second; q.pop();
    if (processed[a]) continue;
    processed[a] = true;
    for (auto u : adj[a]) {
        int b = u.first, w = u.second;
        if (distance[a]+w < distance[b]) {
            distance[b] = distance[a]+w;
            q.push({-distance[b],b});
        }
    }
}
}

```

Observe que a fila de prioridade contém distâncias *negativas* até os nós. A razão para isso é que a versão padrão da fila de prioridade em C++ encontra elementos máximos, enquanto queremos encontrar elementos mínimos. Usando distâncias negativas, podemos usar diretamente a fila de prioridade padrão<sup>3</sup>. Observe também que pode haver várias instâncias do mesmo nó na fila de prioridade; no entanto, apenas a instância com a distância mínima será processada.

A complexidade de tempo da implementação acima é  $O(n + m \log m)$ , pois o algoritmo percorre todos os nós do grafo e adiciona para cada aresta no máximo uma distância à fila de prioridade.

## 13.3 Algoritmo de Floyd–Warshall

O **algoritmo de Floyd–Warshall**<sup>4</sup> fornece uma maneira alternativa de abordar o problema de encontrar caminhos mínimos. Ao contrário dos outros algoritmos deste capítulo, ele encontra todos os caminhos mínimos entre os nós em uma única execução.

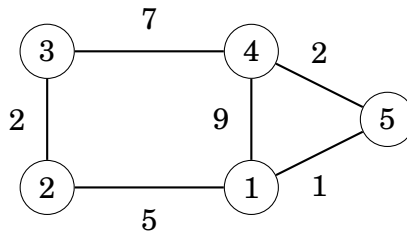
O algoritmo mantém uma matriz bidimensional que contém as distâncias entre os nós. Primeiro, as distâncias são calculadas usando apenas arestas diretas entre os nós, e depois disso, o algoritmo reduz as distâncias usando nós intermediários nos caminhos.

### Exemplo

Vamos considerar como o algoritmo de Floyd–Warshall funciona no seguinte grafo:

<sup>3</sup>Claro, também poderíamos declarar a fila de prioridade como no Capítulo 4.5 e usar distâncias positivas, mas a implementação seria um pouco mais longa.

<sup>4</sup>O algoritmo recebeu o nome de R. W. Floyd e S. Warshall, que o publicaram independentemente em 1962 [23, 70].



Inicialmente, a distância de cada nó para si mesmo é 0, e a distância entre os nós  $a$  e  $b$  é  $x$  se houver uma aresta entre os nós  $a$  e  $b$  com peso  $x$ . Todas as outras distâncias são infinitas.

Neste grafo, a matriz inicial é a seguinte:

	1	2	3	4	5
1	0	5	$\infty$	9	1
2	5	0	2	$\infty$	$\infty$
3	$\infty$	2	0	7	$\infty$
4	9	$\infty$	7	0	2
5	1	$\infty$	$\infty$	2	0

O algoritmo consiste em rodadas consecutivas. Em cada rodada, o algoritmo seleciona um novo nó que pode atuar como um nó intermediário nos caminhos a partir de agora, e as distâncias são reduzidas usando este nó.

Na primeira rodada, o nó 1 é o novo nó intermediário. Há um novo caminho entre os nós 2 e 4 com comprimento 14, pois o nó 1 os conecta. Há também um novo caminho entre os nós 2 e 5 com comprimento 6.

	1	2	3	4	5
1	0	5	$\infty$	9	1
2	5	0	2	<b>14</b>	<b>6</b>
3	$\infty$	2	0	7	$\infty$
4	9	<b>14</b>	7	0	2
5	1	<b>6</b>	$\infty$	2	0

Na segunda rodada, o nó 2 é o novo nó intermediário. Isso cria novos caminhos entre os nós 1 e 3 e entre os nós 3 e 5:

	1	2	3	4	5
1	0	5	<b>7</b>	9	1
2	5	0	2	14	6
3	<b>7</b>	2	0	7	<b>8</b>
4	9	14	7	0	2
5	1	6	<b>8</b>	2	0

Na terceira rodada, o nó 3 é o novo nó intermediário. Há um novo caminho entre os nós 2 e 4:

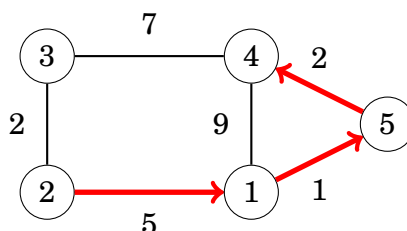


	1	2	3	4	5
1	0	5	7	9	1
2	5	0	2	<b>9</b>	6
3	7	2	0	7	8
4	9	<b>9</b>	7	0	2
5	1	6	8	2	0

O algoritmo continua assim, até que todos os nós tenham sido designados nós intermediários. Depois que o algoritmo termina, a matriz contém as distâncias mínimas entre quaisquer dois nós:

	1	2	3	4	5
1	0	5	7	3	1
2	5	0	2	8	6
3	7	2	0	7	8
4	3	8	7	0	2
5	1	6	8	2	0

Por exemplo, a matriz nos diz que a menor distância entre os nós 2 e 4 é 8. Isso corresponde ao seguinte caminho:



## Implementação

A vantagem do algoritmo de Floyd–Warshall é que ele é fácil de implementar. O código a seguir constrói uma matriz de distância onde  $\text{distance}[a][b]$  é a menor distância entre os nós  $a$  e  $b$ . Primeiro, o algoritmo inicializa  $\text{distance}$  usando a matriz de adjacência  $\text{adj}$  do grafo:

```

for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= n; j++) {
        if (i == j) distance[i][j] = 0;
        else if (adj[i][j]) distance[i][j] = adj[i][j];
        else distance[i][j] = INF;
    }
}

```

Depois disso, as menores distâncias podem ser encontradas da seguinte forma:

```

for (int k = 1; k <= n; k++) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {

```

```
for (int j = 1; j <= n; j++) {  
    distance[i][j] = min(distance[i][j],  
                        distance[i][k]+distance[k][j]);  
}  
}
```

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n^3)$ , pois ele contém três loops aninhados que percorrem os nós do grafo.

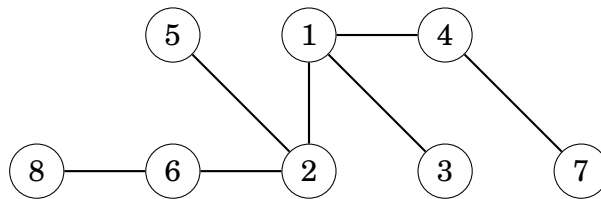
Como a implementação do algoritmo de Floyd–Warshall é simples, o algoritmo pode ser uma boa escolha mesmo que seja necessário encontrar apenas um único caminho mínimo no grafo. No entanto, o algoritmo só pode ser usado quando o grafo é tão pequeno que uma complexidade de tempo cúbica é rápida o suficiente.

## Capítulo 14

# Algoritmos em Árvores

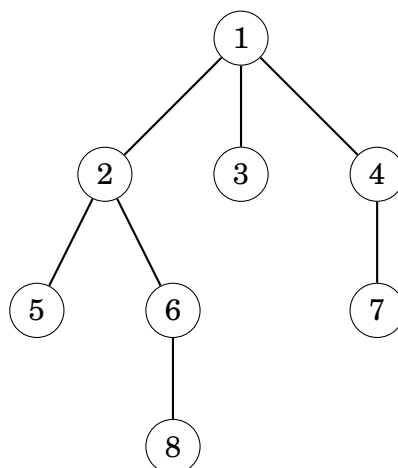
Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico que consiste em  $n$  nós e  $n - 1$  arestas. Remover qualquer aresta de uma árvore a divide em dois componentes, e adicionar qualquer aresta a uma árvore cria um ciclo. Além disso, há sempre um caminho único entre quaisquer dois nós de uma árvore.

Por exemplo, a seguinte árvore consiste em 8 nós e 7 arestas:



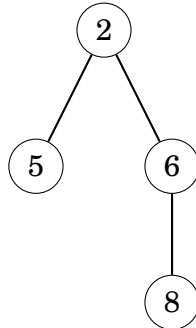
As **folhas** de uma árvore são os nós com grau 1, ou seja, com apenas um vizinho. Por exemplo, as folhas da árvore acima são os nós 3, 5, 7 e 8.

Em uma árvore **enraizada**, um dos nós é designado como a **raiz** da árvore, e todos os outros nós são colocados abaixo da raiz. Por exemplo, na árvore a seguir, o nó 1 é o nó raiz.



Em uma árvore enraizada, os **filhos** de um nó são seus vizinhos inferiores e o **pai** de um nó é seu vizinho superior. Cada nó tem exatamente um pai, exceto pela raiz que não possui pai. Por exemplo, na árvore acima, os filhos do nó 2 são os nós 5 e 6, e seu pai é o nó 1.

A estrutura de uma árvore enraizada é *recursiva*: cada nó da árvore atua como a raiz de uma **subárvore** que contém o próprio nó e todos os nós que estão nas subárvores de seus filhos. Por exemplo, na árvore acima, a subárvore do nó 2 consiste nos nós 2, 5, 6 e 8:



## 14.1 Travessia de Árvore

Algoritmos gerais de travessia de grafos podem ser usados para percorrer os nós de uma árvore. No entanto, a travessia de uma árvore é mais fácil de implementar do que a de um grafo geral, pois não há ciclos na árvore e não é possível alcançar um nó por múltiplas direções.

A maneira típica de percorrer uma árvore é iniciar uma busca em profundidade em um nó arbitrário. A seguinte função recursiva pode ser usada:

```
void dfs(int s, int e) {  
    // processa o nó s  
    for (auto u : adj[s]) {  
        if (u != e) dfs(u, s);  
    }  
}
```

A função recebe dois parâmetros: o nó atual  $s$  e o nó anterior  $e$ . O objetivo do parâmetro  $e$  é garantir que a busca se mova apenas para nós que ainda não foram visitados.

A seguinte chamada de função inicia a busca no nó  $x$ :

```
dfs(x, 0);
```

Na primeira chamada  $e = 0$ , pois não há nó anterior, e é permitido prosseguir em qualquer direção na árvore.

## Programação Dinâmica

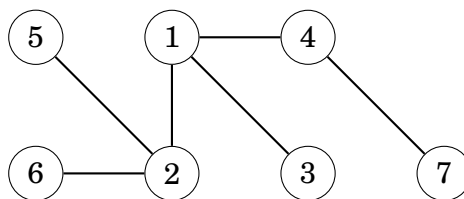
A programação dinâmica pode ser usada para calcular algumas informações durante a travessia de uma árvore. Usando programação dinâmica, podemos, por exemplo, calcular em tempo  $O(n)$  para cada nó de uma árvore enraizada o número de nós em sua subárvore ou o comprimento do caminho mais longo do nó até uma folha.

Como exemplo, vamos calcular para cada nó  $s$  um valor  $\text{count}[s]$ : o número de nós em sua subárvore. A subárvore contém o próprio nó e todos os nós nas subárvores de seus filhos, então podemos calcular o número de nós recursivamente usando o seguinte código:

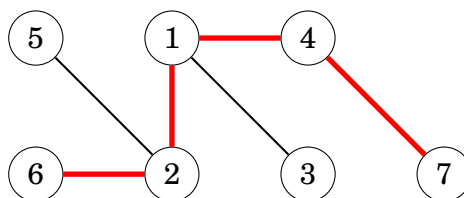
```
void dfs(int s, int e) {  
    count[s] = 1;  
    for (auto u : adj[s]) {  
        if (u == e) continue;  
        dfs(u, s);  
        count[s] += count[u];  
    }  
}
```

## 14.2 Diâmetro

O **diâmetro** de uma árvore é o comprimento máximo de um caminho entre dois nós. Por exemplo, considere a seguinte árvore:



O diâmetro desta árvore é 4, o que corresponde ao seguinte caminho:



Observe que pode haver vários caminhos de comprimento máximo. No caminho acima, poderíamos substituir o nó 6 pelo nó 5 para obter outro caminho com comprimento 4.

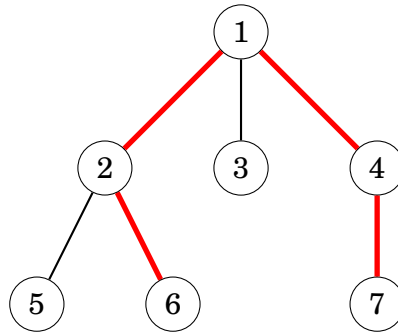
A seguir, discutiremos dois algoritmos de tempo  $O(n)$  para calcular o diâmetro de uma árvore. O primeiro algoritmo é baseado em programação dinâmica e o segundo algoritmo usa duas buscas em profundidade.

### Algoritmo 1

Uma maneira geral de abordar muitos problemas de árvore é primeiro enraizar a árvore arbitrariamente. Depois disso, podemos tentar resolver o problema separadamente para cada subárvore. Nosso primeiro algoritmo para calcular o diâmetro é baseado nessa ideia.

Uma observação importante é que todo caminho em uma árvore enraizada tem um *ponto mais alto*: o nó mais alto que pertence ao caminho. Assim, podemos calcular para cada nó o comprimento do caminho mais longo cujo ponto mais alto é o nó. Um desses caminhos corresponde ao diâmetro da árvore.

Por exemplo, na árvore a seguir, o nó 1 é o ponto mais alto no caminho que corresponde ao diâmetro:



Calculamos para cada nó  $x$  dois valores:

- $\text{toLeaf}(x)$ : o comprimento máximo de um caminho de  $x$  até qualquer folha
- $\text{maxLength}(x)$ : o comprimento máximo de um caminho cujo ponto mais alto é  $x$

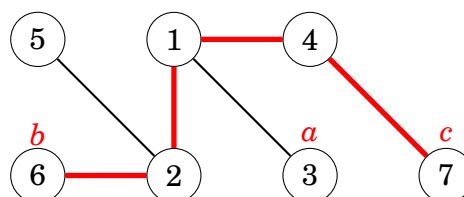
Por exemplo, na árvore acima,  $\text{toLeaf}(1) = 2$ , pois há um caminho  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$ , e  $\text{maxLength}(1) = 4$ , pois há um caminho  $6 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 7$ . Neste caso,  $\text{maxLength}(1)$  é igual ao diâmetro.

A programação dinâmica pode ser usada para calcular os valores acima para todos os nós em tempo  $O(n)$ . Primeiro, para calcular  $\text{toLeaf}(x)$ , percorremos os filhos de  $x$ , escolhemos um filho  $c$  com o máximo  $\text{toLeaf}(c)$  e adicionamos um a esse valor. Então, para calcular  $\text{maxLength}(x)$ , escolhemos dois filhos distintos  $a$  e  $b$  tais que a soma  $\text{toLeaf}(a) + \text{toLeaf}(b)$  seja máxima e adicionamos dois a essa soma.

## Algoritmo 2

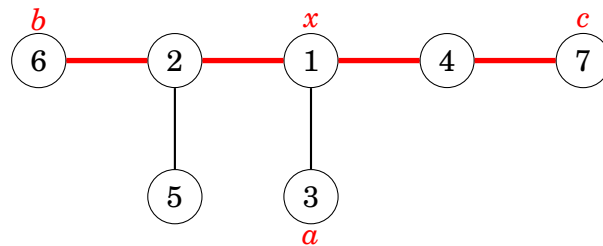
Outra maneira eficiente de calcular o diâmetro de uma árvore é baseada em duas buscas em profundidade. Primeiro, escolhemos um nó arbitrário  $a$  na árvore e encontramos o nó  $b$  mais distante de  $a$ . Então, encontramos o nó  $c$  mais distante de  $b$ . O diâmetro da árvore é a distância entre  $b$  e  $c$ .

No seguinte grafo,  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser:



Este é um método elegante, mas por que ele funciona?

Ajuda desenhar a árvore de forma diferente para que o caminho que corresponde ao diâmetro seja horizontal e todos os outros nós pendurados nele:

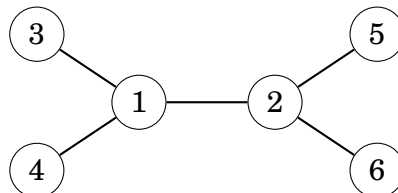


O nó  $x$  indica o local onde o caminho do nó  $a$  se junta ao caminho que corresponde ao diâmetro. O nó mais distante de  $a$  é o nó  $b$ , o nó  $c$  ou algum outro nó que esteja pelo menos tão distante do nó  $x$ . Assim, este nó é sempre uma escolha válida para um ponto final de um caminho que corresponde ao diâmetro.

## 14.3 Todos os Caminhos Mais Longos

Nosso próximo problema é calcular para cada nó na árvore o comprimento máximo de um caminho que começa naquele nó. Isso pode ser visto como uma generalização do problema do diâmetro da árvore, porque o maior desses comprimentos é igual ao diâmetro da árvore. Este problema também pode ser resolvido em tempo  $O(n)$ .

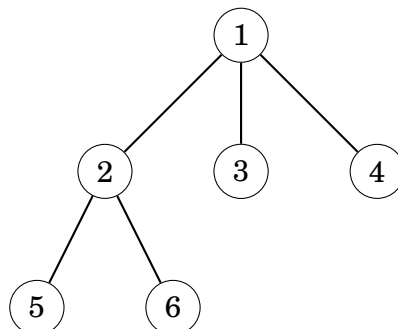
Como exemplo, considere a seguinte árvore:



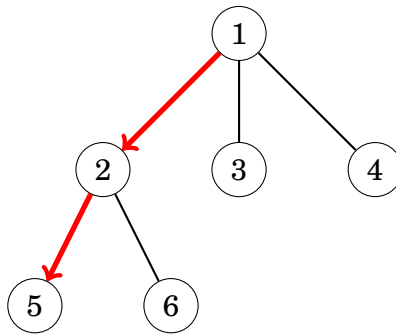
Seja  $\text{maxLength}(x)$  o comprimento máximo de um caminho que começa no nó  $x$ . Por exemplo, na árvore acima,  $\text{maxLength}(4) = 3$ , porque há um caminho  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$ . Aqui está uma tabela completa dos valores:

nó $x$	1	2	3	4	5	6
$\text{maxLength}(x)$	2	2	3	3	3	3

Também neste problema, um bom ponto de partida para resolvê-lo é enraizar a árvore arbitrariamente:

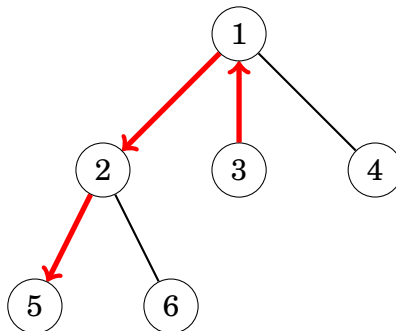


A primeira parte do problema é calcular para cada nó  $x$  o comprimento máximo de um caminho que passa por um filho de  $x$ . Por exemplo, o caminho mais longo do nó 1 passa por seu filho 2:

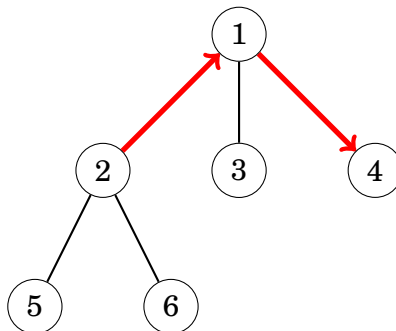


Esta parte é fácil de resolver em tempo  $O(n)$ , pois podemos usar a programação dinâmica como fizemos anteriormente.

Então, a segunda parte do problema é calcular para cada nó  $x$  o comprimento máximo de um caminho através de seu pai  $p$ . Por exemplo, o caminho mais longo do nó 3 passa por seu pai 1:



À primeira vista, parece que devemos escolher o caminho mais longo de  $p$ . No entanto, isso *não* funciona sempre, porque o caminho mais longo de  $p$  pode passar por  $x$ . Aqui está um exemplo desta situação:



Ainda assim, podemos resolver a segunda parte em tempo  $O(n)$  armazenando *dois* comprimentos máximos para cada nó  $x$ :

- $\text{maxLength}_1(x)$ : o comprimento máximo de um caminho de  $x$
- $\text{maxLength}_2(x)$ : o comprimento máximo de um caminho de  $x$  em outra direção que não o primeiro caminho



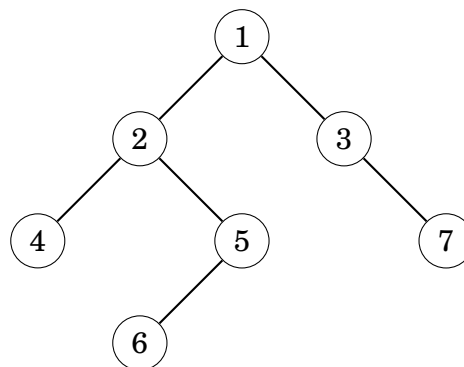
Por exemplo, no grafo acima,  $\text{maxLength}_1(1) = 2$  usando o caminho  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  e  $\text{maxLength}_2(1) = 1$  usando o caminho  $1 \rightarrow 3$ .

Finalmente, se o caminho que corresponde a  $\text{maxLength}_1(p)$  passa por  $x$ , concluímos que o comprimento máximo é  $\text{maxLength}_2(p) + 1$ , caso contrário, o comprimento máximo é  $\text{maxLength}_1(p) + 1$ .

## 14.4 Árvores Binárias

Uma **árvore binária** é uma árvore enraizada onde cada nó possui uma subárvore esquerda e uma subárvore direita. É possível que uma subárvore de um nó esteja vazia. Assim, todo nó em uma árvore binária tem zero, um ou dois filhos.

Por exemplo, a seguinte árvore é uma árvore binária:



Os nós de uma árvore binária possuem três ordenações naturais que correspondem a diferentes maneiras de percorrer recursivamente a árvore:

- **pré-ordem:** primeiro processa a raiz, depois percorre a subárvore esquerda e, em seguida, percorre a subárvore direita
- **em-ordem:** primeiro percorre a subárvore esquerda, depois processa a raiz e, em seguida, percorre a subárvore direita
- **pós-ordem:** primeiro percorre a subárvore esquerda, depois percorre a subárvore direita e, em seguida, processa a raiz

Para a árvore acima, os nós em pré-ordem são  $[1, 2, 4, 5, 6, 3, 7]$ , em ordem  $[4, 2, 6, 5, 1, 3, 7]$  e em pós-ordem  $[4, 6, 5, 2, 7, 3, 1]$ .

Se conhecermos a pré-ordem e a ordem de uma árvore, podemos reconstruir a estrutura exata da árvore. Por exemplo, a árvore acima é a única árvore possível com pré-ordem  $[1, 2, 4, 5, 6, 3, 7]$  e ordem  $[4, 2, 6, 5, 1, 3, 7]$ . De forma semelhante, a pós-ordem e a ordem também determinam a estrutura de uma árvore.

No entanto, a situação é diferente se conhecermos apenas a pré-ordem e a pós-ordem de uma árvore. Nesse caso, pode haver mais de uma árvore que corresponda às ordenações. Por exemplo, em ambas as árvores



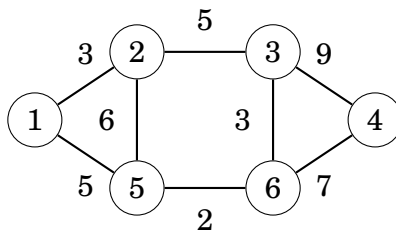
a pré-ordem é  $[1,2]$  e a pós-ordem é  $[2,1]$ , mas as estruturas das árvores são diferentes.

## Capítulo 15

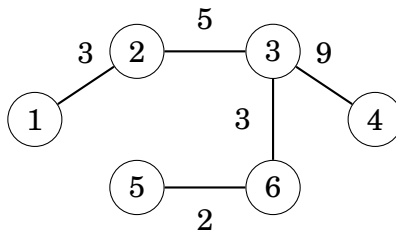
### Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** de um grafo é composta por todos os nós do grafo e por algumas de suas arestas, de forma que haja um caminho entre quaisquer dois nós. Assim como as árvores em geral, as árvores geradoras são conectadas e acíclicas. Normalmente, existem várias maneiras de construir uma árvore geradora.

Por exemplo, considere o seguinte grafo:

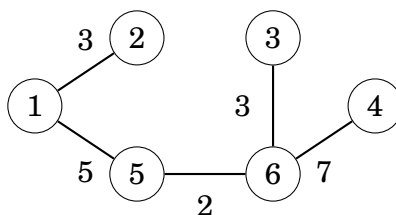


Uma árvore geradora para o grafo é a seguinte:

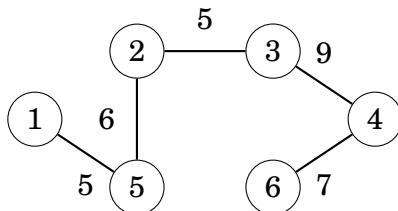


O peso de uma árvore geradora é a soma dos pesos de suas arestas. Por exemplo, o peso da árvore geradora acima é  $3 + 5 + 9 + 3 + 2 = 22$ .

Uma **Árvore geradora mínima** é uma árvore geradora cujo peso é o menor possível. O peso de uma árvore geradora mínima para o grafo de exemplo é 20, e tal árvore pode ser construída da seguinte forma:



De maneira semelhante, uma **Árvore geradora máxima** é uma árvore geradora cujo peso é o maior possível. O peso de uma árvore geradora máxima para o grafo de exemplo é 32:



Note que um grafo pode ter várias árvores geradoras mínimas e máximas, então as árvores não são únicas.

Acontece que vários métodos gulosos podem ser usados para construir árvores geradoras mínimas e máximas. Neste capítulo, discutimos dois algoritmos que processam as arestas do grafo ordenadas pelos seus pesos. Nosso foco é encontrar árvores geradoras mínimas, mas os mesmos algoritmos podem encontrar árvores geradoras máximas processando as arestas em ordem inversa.

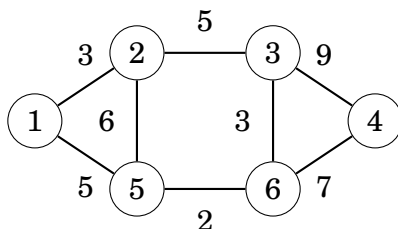
## 15.1 Algoritmo de Kruskal

No **Algoritmo de Kruskal**<sup>1</sup>, a árvore geradora inicial contém apenas os nós do grafo e não contém nenhuma aresta. Em seguida, o algoritmo percorre as arestas ordenadas pelos seus pesos, e sempre adiciona uma aresta à árvore se ela não criar um ciclo.

O algoritmo mantém os componentes da árvore. Inicialmente, cada nó do grafo pertence a um componente separado. Sempre que uma aresta é adicionada à árvore, dois componentes são unidos. Finalmente, todos os nós pertencem ao mesmo componente, e uma árvore geradora mínima foi encontrada.

### Exemplo

Vamos considerar como o algoritmo de Kruskal processa o seguinte grafo:



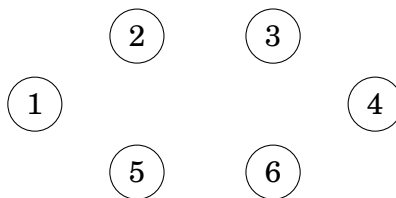
O primeiro passo do algoritmo é ordenar as arestas em ordem crescente de seus pesos. O resultado é a seguinte lista:

<sup>1</sup>O algoritmo foi publicado em 1956 por J. B. Kruskal [48].

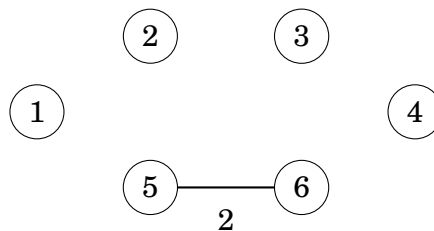
aresta	peso
5-6	2
1-2	3
3-6	3
1-5	5
2-3	5
2-5	6
4-6	7
3-4	9

Depois disso, o algoritmo percorre a lista e adiciona cada aresta à árvore se ela unir dois componentes separados.

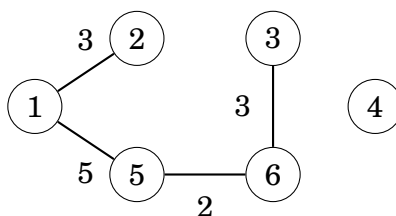
Inicialmente, cada nó está em seu próprio componente:



A primeira aresta a ser adicionada à árvore é a aresta 5-6 que cria um componente {5, 6} ao unir os componentes {5} e {6}:



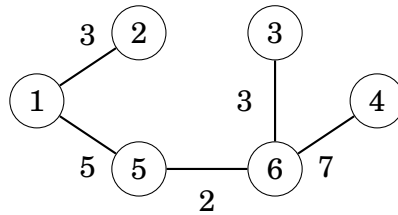
Após isso, as arestas 1-2, 3-6 e 1-5 são adicionadas de maneira similar:



Após esses passos, a maioria dos componentes foi unida e há dois componentes na árvore: {1, 2, 3, 5, 6} e {4}.

A próxima aresta na lista é a aresta 2-3, mas ela não será incluída na árvore, pois os nós 2 e 3 já estão no mesmo componente. Pelo mesmo motivo, a aresta 2-5 também não será incluída na árvore.

Finalmente, a aresta 4–6 será incluída na árvore:

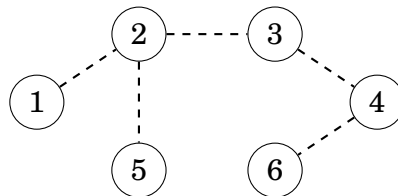


Após isso, o algoritmo não adicionará mais arestas, porque o grafo está conectado e há um caminho entre quaisquer dois nós. O grafo resultante é uma árvore geradora mínima com peso  $2 + 3 + 3 + 5 + 7 = 20$ .

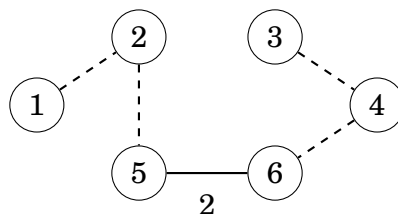
## Por que isso funciona?

É uma boa pergunta por que o algoritmo de Kruskal funciona. Por que a estratégia gulosa garante que encontraremos uma árvore geradora mínima?

Vamos ver o que acontece se a aresta de menor peso do grafo *não* estiver incluída na árvore geradora. Por exemplo, suponha que uma árvore geradora para o grafo anterior não contivesse a aresta de menor peso 5–6. Não sabemos a estrutura exata de tal árvore geradora, mas em qualquer caso ela tem que conter algumas arestas. Assuma que a árvore seria como a seguinte:



Entretanto, não é possível que a árvore acima seja uma árvore geradora mínima para o grafo. O motivo disso é que podemos remover uma aresta da árvore e substituí-la pela aresta de peso mínimo 5–6. Isso produz uma árvore geradora cujo peso é *menor*:



Por essa razão, é sempre ideal incluir a aresta de menor peso na árvore para produzir uma árvore geradora mínima. Usando um argumento semelhante, podemos mostrar que também é ideal adicionar a próxima aresta em ordem de peso à árvore, e assim por diante. Portanto, o algoritmo de Kruskal funciona corretamente e sempre produz uma árvore geradora mínima.

## Implementação

Ao implementar o algoritmo de Kruskal, é conveniente usar a representação de lista de arestas do grafo. A primeira fase do algoritmo ordena as arestas na lista em tempo  $O(m \log m)$ . Após isso, a segunda fase do algoritmo constrói a árvore geradora mínima da seguinte forma:

```
for (...) {  
    if (!same(a,b)) unite(a,b);  
}
```

O laço percorre as arestas na lista e sempre processa uma aresta  $a-b$  onde  $a$  e  $b$  são dois nós. Duas funções são necessárias: a função `same` determina se  $a$  e  $b$  estão no mesmo componente, e a função `unite` une os componentes que contêm  $a$  e  $b$ .

O problema é como implementar eficientemente as funções `same` e `unite`. Uma possibilidade é implementar a função `same` como uma travessia de grafo e verificar se podemos ir do nó  $a$  ao nó  $b$ . No entanto, a complexidade de tempo de tal função seria  $O(n + m)$  e o algoritmo resultante seria lento, pois a função `same` será chamada para cada aresta no grafo.

Resolveremos o problema usando uma estrutura `union-find` que implementa ambas as funções em tempo  $O(\log n)$ . Assim, a complexidade de tempo do algoritmo de Kruskal será  $O(m \log n)$  após ordenar a lista de arestas.

## 15.2 Estrutura Union-Find

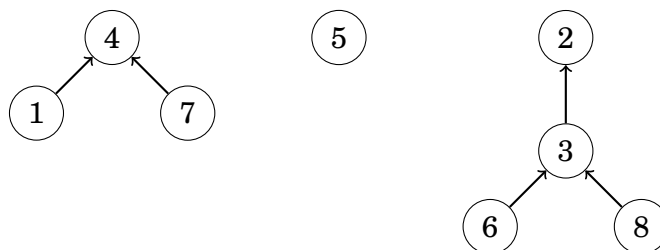
Uma **Estrutura union-find** mantém uma coleção de conjuntos. Os conjuntos são disjuntos, então nenhum elemento pertence a mais de um conjunto. Duas operações de tempo  $O(\log n)$  são suportadas: a operação `unite` une dois conjuntos e a operação `find` encontra o representante do conjunto que contém um determinado elemento<sup>2</sup>.

### Estrutura

Em uma estrutura `union-find`, um elemento em cada conjunto é o representante do conjunto, e há uma cadeia de qualquer outro elemento do conjunto para o representante. Por exemplo, suponha que os conjuntos sejam  $\{1, 4, 7\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{2, 3, 6, 8\}$ :

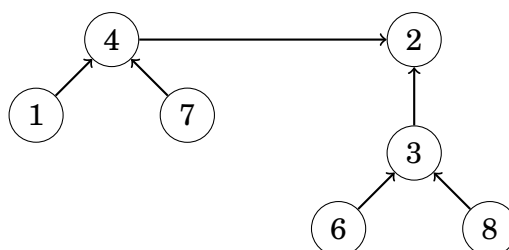
---

<sup>2</sup>A estrutura apresentada aqui foi introduzida em 1971 por J. D. Hopcroft e J. D. Ullman [38]. Posteriormente, em 1975, R. E. Tarjan estudou uma variante mais sofisticada da estrutura [64] que é discutida em muitos livros de algoritmos hoje em dia.



Neste caso, os representantes dos conjuntos são 4, 5 e 2. Podemos encontrar o representante de qualquer elemento seguindo a cadeia que começa no elemento. Por exemplo, o elemento 2 é o representante do elemento 6, pois seguimos a cadeia  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ . Dois elementos pertencem ao mesmo conjunto exatamente quando seus representantes são os mesmos.

Dois conjuntos podem ser unidos conectando o representante de um conjunto ao representante do outro conjunto. Por exemplo, os conjuntos  $\{1, 4, 7\}$  e  $\{2, 3, 6, 8\}$  podem ser unidos da seguinte forma:



O conjunto resultante contém os elementos  $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ . A partir daqui, o elemento 2 é o representante de todo o conjunto e o antigo representante 4 aponta para o elemento 2.

A eficiência da estrutura union-find depende de como os conjuntos são unidos. Acontece que podemos seguir uma estratégia simples: sempre conectar o representante do conjunto *menor* ao representante do conjunto *maior* (ou, se os conjuntos forem do mesmo tamanho, podemos fazer uma escolha arbitrária). Usando esta estratégia, o comprimento de qualquer cadeia será  $O(\log n)$ , para que possamos encontrar o representante de qualquer elemento de forma eficiente, seguindo a cadeia correspondente.

## Implementação

A estrutura union-find pode ser implementada usando arrays. Na implementação a seguir, o array `link` contém, para cada elemento, o próximo elemento na cadeia ou o próprio elemento se for um representante, e o array `size` indica para cada representante o tamanho do conjunto correspondente.

Inicialmente, cada elemento pertence a um conjunto separado:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) link[i] = i;
for (int i = 1; i <= n; i++) size[i] = 1;
```

A função `find` retorna o representante para um elemento  $x$ . O representante pode ser encontrado seguindo a cadeia que começa em  $x$ .



```
int find(int x) {
    while (x != link[x]) x = link[x];
    return x;
}
```

A função `same` verifica se os elementos  $a$  e  $b$  pertencem ao mesmo conjunto. Isso pode ser feito facilmente usando a função `find`:

```
bool same(int a, int b) {
    return find(a) == find(b);
}
```

A função `unite` une os conjuntos que contêm os elementos  $a$  e  $b$  (os elementos devem estar em conjuntos diferentes). A função primeiro encontra os representantes dos conjuntos e então conecta o conjunto menor ao conjunto maior.

```
void unite(int a, int b) {
    a = find(a);
    b = find(b);
    if (size[a] < size[b]) swap(a,b);
    size[a] += size[b];
    link[b] = a;
}
```

A complexidade de tempo da função `find` é  $O(\log n)$ , assumindo que o comprimento de cada cadeia é  $O(\log n)$ . Neste caso, as funções `same` e `unite` também funcionam em tempo  $O(\log n)$ . A função `unite` garante que o comprimento de cada cadeia seja  $O(\log n)$  conectando o conjunto menor ao conjunto maior.

## 15.3 Algoritmo de Prim

<sup>3</sup> é um método alternativo para encontrar uma árvore geradora mínima. O algoritmo primeiro adiciona um nó arbitrário à árvore. Depois disso, o algoritmo sempre escolhe uma aresta de peso mínimo que adiciona um novo nó à árvore. Finalmente, todos os nós terão sido adicionados à árvore e uma árvore geradora mínima terá sido encontrada.

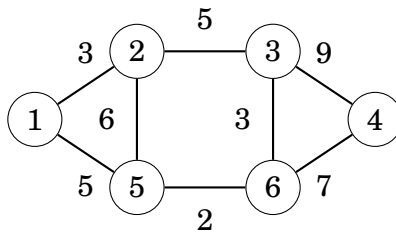
O algoritmo de Prim se assemelha ao algoritmo de Dijkstra. A diferença é que o algoritmo de Dijkstra sempre seleciona uma aresta cuja distância do nó inicial é mínima, mas o algoritmo de Prim simplesmente seleciona a aresta de peso mínimo que adiciona um novo nó à árvore.

### Exemplo

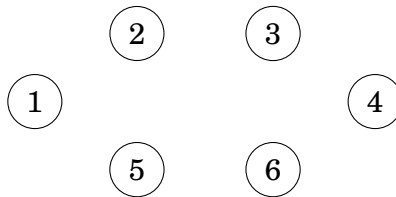
Vamos considerar como o algoritmo de Prim funciona no seguinte grafo:

---

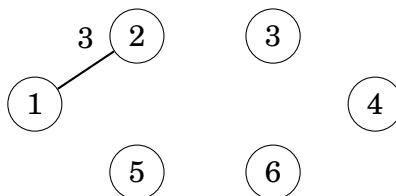
<sup>3</sup>O algoritmo foi nomeado em homenagem a R. C. Prim, que o publicou em 1957 [54]. No entanto, o mesmo algoritmo já havia sido descoberto em 1930 por V. Jarník.



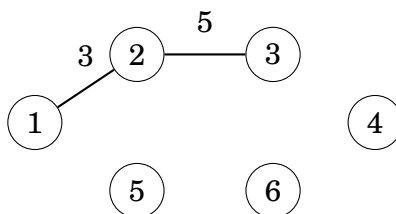
Inicialmente, não há arestas entre os nós:



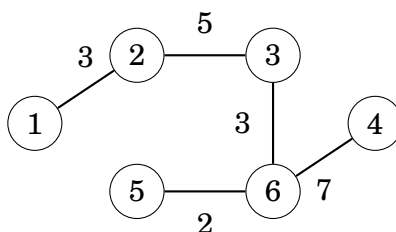
Um nó arbitrário pode ser o nó inicial, então vamos escolher o nó 1. Primeiro, adicionamos o nó 2 que está conectado por uma aresta de peso 3:



Depois disso, existem duas arestas com peso 5, então podemos adicionar o nó 3 ou o nó 5 à árvore. Vamos adicionar o nó 3 primeiro:



O processo continua até que todos os nós tenham sido incluídos na árvore:



## Implementação

Assim como o algoritmo de Dijkstra, o algoritmo de Prim pode ser implementado eficientemente usando uma fila de prioridade. A fila de prioridade deve conter

todos os nós que podem ser conectados ao componente atual usando uma única aresta, em ordem crescente dos pesos das arestas correspondentes.

A complexidade de tempo do algoritmo de Prim é  $O(n + m \log m)$  que é igual à complexidade de tempo do algoritmo de Dijkstra. Na prática, os algoritmos de Prim e Kruskal são ambos eficientes, e a escolha do algoritmo é uma questão de gosto. Ainda assim, a maioria dos programadores competitivos usam o algoritmo de Kruskal.



# Capítulo 16

## Grafos direcionados

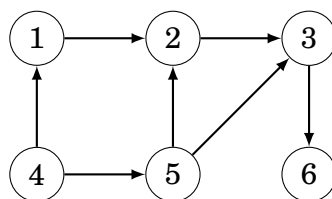
Neste capítulo, nos concentramos em duas classes de grafos direcionados:

- **Grafos acíclicos:** Não há ciclos no grafo, portanto, não há caminho de nenhum nó para ele mesmo<sup>1</sup>.
- **Grafos de sucessão:** O grau de saída de cada nó é 1, então cada nó tem um sucessor único.

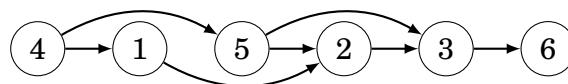
Verifica-se que em ambos os casos, podemos projetar algoritmos eficientes que são baseados nas propriedades especiais dos grafos.

### 16.1 Ordenação topológica

Uma **ordenação topológica** é uma ordenação dos nós de um grafo direcionado tal que se houver um caminho do nó  $a$  para o nó  $b$ , então o nó  $a$  aparece antes do nó  $b$  na ordenação. Por exemplo, para o grafo



uma ordenação topológica é [4, 1, 5, 2, 3, 6]:



Um grafo acíclico sempre tem uma ordenação topológica. No entanto, se o grafo contém um ciclo, não é possível formar uma ordenação topológica, porque nenhum nó do ciclo pode aparecer antes dos outros nós do ciclo na ordenação. Acontece que a busca em profundidade (DFS) pode ser usada para verificar se um grafo direcionado contém um ciclo e, se não contiver um ciclo, para construir uma ordenação topológica.

---

<sup>1</sup>Grafos direcionados acíclicos são às vezes chamados de DAGs.

## Algoritmo

A ideia é percorrer os nós do grafo e sempre iniciar uma busca em profundidade no nó atual se ele ainda não tiver sido processado. Durante as buscas, os nós têm três estados possíveis:

- estado 0: o nó não foi processado (branco)
- estado 1: o nó está sendo processado (cinza claro)
- estado 2: o nó foi processado (cinza escuro)

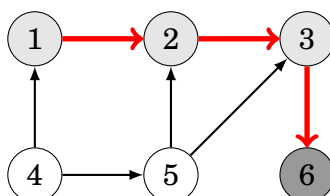
Inicialmente, o estado de cada nó é 0. Quando uma busca chega a um nó pela primeira vez, seu estado muda para 1. Finalmente, depois que todos os sucessores do nó tiverem sido processados, seu estado muda para 2.

Se o grafo contém um ciclo, descobriremos isso durante a busca, porque mais cedo ou mais tarde chegaremos a um nó cujo estado é 1. Nesse caso, não é possível construir uma ordenação topológica.

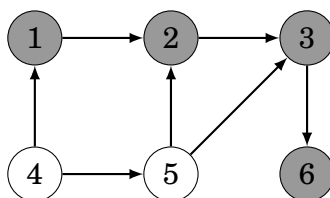
Se o grafo não contiver um ciclo, podemos construir uma ordenação topológica adicionando cada nó a uma lista quando o estado do nó se tornar 2. Esta lista em ordem inversa é uma ordenação topológica.

## Exemplo 1

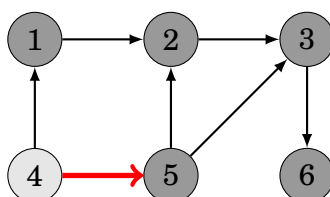
No grafo de exemplo, a busca prossegue primeiro do nó 1 ao nó 6:



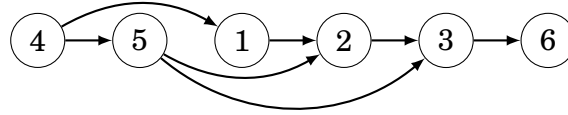
Agora, o nó 6 foi processado e adicionado à lista. Depois disso, os nós 3, 2 e 1 também são adicionados à lista:



Neste ponto, a lista é [6,3,2,1]. A próxima pesquisa começa no nó 4:



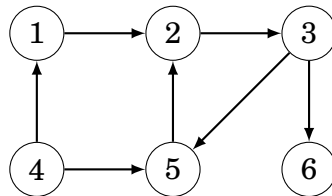
Assim, a lista final é [6,3,2,1,5,4]. Processamos todos os nós, então uma ordenação topológica foi encontrada. A ordenação topológica é a lista inversa [4,5,1,2,3,6]:



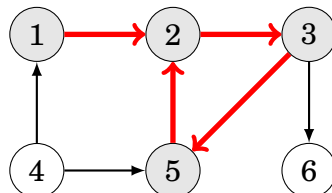
Observe que uma ordenação topológica não é única, e pode haver várias ordenações topológicas para um grafo.

## Exemplo 2

Vamos agora considerar um grafo para o qual nós não podemos construir uma ordenação topológica, porque o grafo contém um ciclo:



A pesquisa prossegue da seguinte forma:



A busca chega ao nó 2, cujo estado é 1, o que significa que o grafo contém um ciclo. Neste exemplo, há um ciclo  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ .

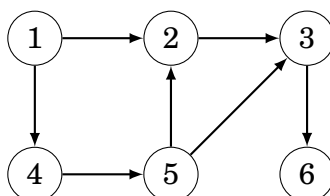
## 16.2 Programação dinâmica

Se um grafo direcionado for acíclico, a programação dinâmica pode ser aplicada a ele. Por exemplo, podemos resolver eficientemente os seguintes problemas relativos a caminhos de um nó inicial para um nó final:

- quantos caminhos diferentes existem?
- qual é o caminho mais curto/longo?
- qual é o número mínimo/máximo de arestas em um caminho?
- quais nós certamente aparecem em qualquer caminho?

## Contando o número de caminhos

Como exemplo, vamos calcular o número de caminhos do nó 1 ao nó 6 no seguinte grafo:



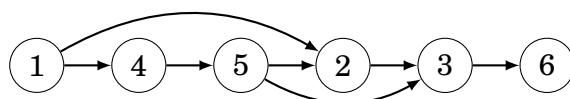
Existem no total três desses caminhos:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6$

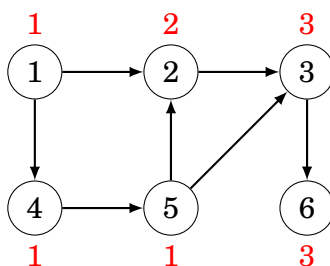
Seja  $\text{paths}(x)$  o número de caminhos de nó 1 ao nó  $x$ . Como caso base,  $\text{paths}(1) = 1$ . Então, para calcular outros valores de  $\text{paths}(x)$ , podemos usar a recursão

$$\text{paths}(x) = \text{paths}(a_1) + \text{paths}(a_2) + \dots + \text{paths}(a_k)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são os nós dos quais há uma aresta para  $x$ . Como o grafo é acíclico, os valores de  $\text{paths}(x)$  pode ser calculado na ordem de uma ordenação topológica. Uma ordenação topológica para o grafo acima é a seguinte:



Portanto, os números de caminhos são os seguintes:

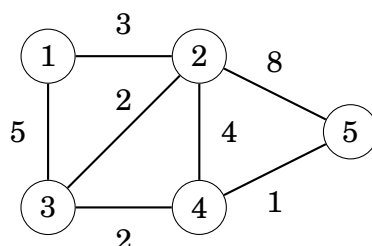


Por exemplo, para calcular o valor de  $\text{paths}(3)$ , podemos usar a fórmula  $\text{paths}(2) + \text{paths}(5)$ , porque existem arestas dos nós 2 e 5 para o nó 3. Como  $\text{paths}(2) = 2$  e  $\text{paths}(5) = 1$ , concluímos que  $\text{paths}(3) = 3$ .

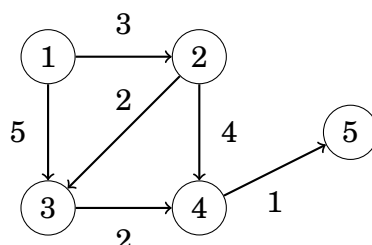


## Estendendo o algoritmo de Dijkstra

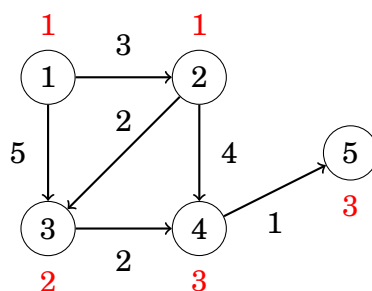
Um subproduto do algoritmo de Dijkstra é um grafo direcionado e acíclico que indica para cada nó do grafo original as maneiras possíveis de alcançar o nó usando um caminho mais curto do nó inicial. A programação dinâmica pode ser aplicada a esse grafo. Por exemplo, no grafo



os caminhos mais curtos do nó 1 podem usar as seguintes arestas:



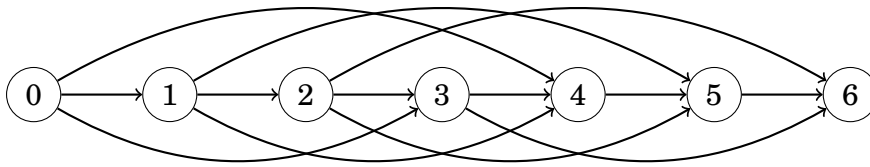
Agora podemos, por exemplo, calcular o número de caminhos mais curtos do nó 1 ao nó 5 usando programação dinâmica:



## Representando problemas como grafos

Na verdade, qualquer problema de programação dinâmica pode ser representado como um grafo direcionado e acíclico. Em tal grafo, cada nó corresponde a um estado de programação dinâmica e as arestas indicam como os estados dependem uns dos outros.

Como exemplo, considere o problema de formar uma soma de dinheiro  $n$  usando moedas  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ . Neste problema, podemos construir um grafo onde cada nó corresponde a uma soma de dinheiro, e as arestas mostram como as moedas podem ser escolhidas. Por exemplo, para moedas  $\{1, 3, 4\}$  e  $n = 6$ , o grafo é o seguinte:



Usando esta representação, o caminho mais curto do nó 0 ao nó  $n$  corresponde a uma solução com o número mínimo de moedas, e o número total de caminhos do nó 0 ao nó  $n$  é igual ao número total de soluções.

## 16.3 Caminhos sucessores

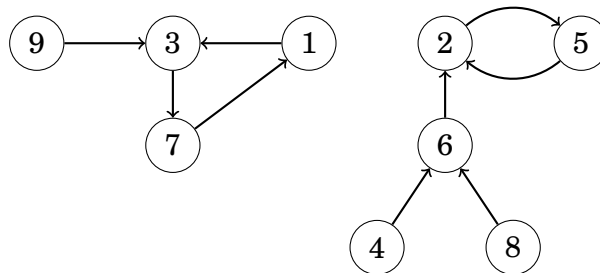
No restante deste capítulo, vamos nos concentrar em **grafos de sucessores**. Nesses grafos, o grau de saída de cada nó é 1, ou seja, exatamente uma aresta começa em cada nó. Um grafo de sucessores consiste em um ou mais componentes, cada um contendo um ciclo e alguns caminhos que levam a ele.

Os grafos de sucessores são às vezes chamados de **grafos funcionais**. A razão para isso é que qualquer grafo de sucessores corresponde a uma função que define as arestas do grafo. O parâmetro para a função é um nó do grafo, e a função fornece o sucessor desse nó.

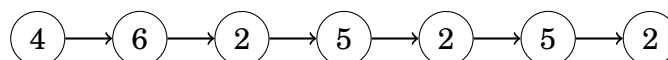
Por exemplo, a função

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\text{succ}(x)$	3	5	7	6	2	2	1	6	3

define o seguinte grafo:



Como cada nó de um grafo de sucessores tem um único sucessor, também podemos definir uma função  $\text{succ}(x, k)$  que retorna o nó ao qual chegaremos se começarmos no nó  $x$  e andarmos  $k$  passos para frente. Por exemplo, no grafo acima  $\text{succ}(4, 6) = 2$ , porque chegaremos ao nó 2 caminhando 6 passos a partir do nó 4:



Uma maneira direta de calcular um valor de  $\text{succ}(x, k)$  é começar no nó  $x$  e andar  $k$  passos para frente, o que leva um tempo  $O(k)$ . No entanto, usando pré-processamento, qualquer valor de  $\text{succ}(x, k)$  pode ser calculado em apenas um tempo  $O(\log k)$ .

A ideia é pré-calcular todos os valores de  $\text{succ}(x, k)$  onde  $k$  é uma potência de dois e no máximo  $u$ , onde  $u$  é o número máximo de passos que jamais daremos. Isso pode ser feito de forma eficiente, pois podemos usar a seguinte recursão:

$$\text{succ}(x, k) = \begin{cases} \text{succ}(x) & k = 1 \\ \text{succ}(\text{succ}(x, k/2), k/2) & k > 1 \end{cases}$$

Pré-calcular os valores leva um tempo  $O(n \log u)$ , porque  $O(\log u)$  valores são calculados para cada nó. No grafo acima, os primeiros valores são os seguintes:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\text{succ}(x, 1)$	3	5	7	6	2	2	1	6	3
$\text{succ}(x, 2)$	7	2	1	2	5	5	3	2	7
$\text{succ}(x, 4)$	3	2	7	2	5	5	1	2	3
$\text{succ}(x, 8)$	7	2	1	2	5	5	3	2	7
...									

Depois disso, qualquer valor de  $\text{succ}(x, k)$  pode ser calculado representando o número de passos  $k$  como uma soma de potências de dois. Por exemplo, se quisermos calcular o valor de  $\text{succ}(x, 11)$ , primeiro formamos a representação  $11 = 8 + 2 + 1$ . Usando isso,

$$\text{succ}(x, 11) = \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(x, 8), 2), 1).$$

Por exemplo, no grafo anterior

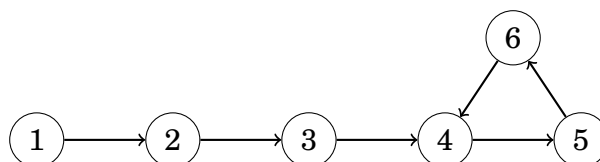
$$\text{succ}(4, 11) = \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(4, 8), 2), 1) = 5.$$

Essa representação sempre consiste em  $O(\log k)$  partes, então calcular um valor de  $\text{succ}(x, k)$  leva um tempo  $O(\log k)$ .

## 16.4 Detecção de ciclo

Considere um grafo de sucessores que contém apenas um caminho que termina em um ciclo. Podemos fazer as seguintes perguntas: se começarmos nossa caminhada no nó inicial, qual é o primeiro nó no ciclo e quantos nós o ciclo contém?

Por exemplo, no grafo



começamos nossa caminhada no nó 1, o primeiro nó que pertence ao ciclo é o nó 4, e o ciclo consiste em três nós (4, 5 e 6).

Uma maneira simples de detectar o ciclo é caminhar no grafo e manter o controle de todos os nós que foram visitados. Uma vez que um nó é visitado pela

segunda vez, podemos concluir que o nó é o primeiro nó no ciclo. Este método funciona em tempo  $O(n)$  e também usa memória  $O(n)$ .

No entanto, existem algoritmos melhores para detecção de ciclo. A complexidade de tempo de tais algoritmos ainda é  $O(n)$ , mas eles usam apenas memória  $O(1)$ . Esta é uma melhoria importante se  $n$  for grande. A seguir, discutiremos o algoritmo de Floyd que alcança essas propriedades.

## Algoritmo de Floyd

O **algoritmo de Floyd**<sup>2</sup> caminha para frente no grafo usando dois ponteiros  $a$  e  $b$ . Ambos os ponteiros começam em um nó  $x$  que é o nó inicial do grafo. Então, a cada turno, o ponteiro  $a$  caminha um passo para frente e o ponteiro  $b$  caminha dois passos para frente. O processo continua até que os ponteiros se encontrem:

```
a = succ(x);
b = succ(succ(x));
while (a != b) {
    a = succ(a);
    b = succ(succ(b));
}
```

Neste ponto, o ponteiro  $a$  caminhou  $k$  passos e o ponteiro  $b$  caminhou  $2k$  passos, então o comprimento do ciclo divide  $k$ . Assim, o primeiro nó que pertence ao ciclo pode ser encontrado movendo o ponteiro  $a$  para o nó  $x$  e avançando os ponteiros passo a passo até que se encontrem novamente.

```
a = x;
while (a != b) {
    a = succ(a);
    b = succ(b);
}
primeiro = a;
```

Depois disso, o comprimento do ciclo pode ser calculado da seguinte forma:

```
b = succ(a);
comprimento = 1;
while (a != b) {
    b = succ(b);
    comprimento++;
}
```

---

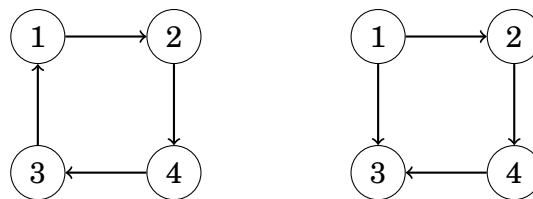
<sup>2</sup>A ideia do algoritmo é mencionada em [46] e atribuída a R. W. Floyd; no entanto, não se sabe se Floyd realmente descobriu o algoritmo.

# Capítulo 17

## Conectividade forte

Em um grafo direcionado, as arestas podem ser percorridas em apenas uma direção, então mesmo se o grafo for conexo, isso não garante que haverá um caminho de um nó para outro nó. Por essa razão, é significativo definir um novo conceito que requer mais do que conectividade.

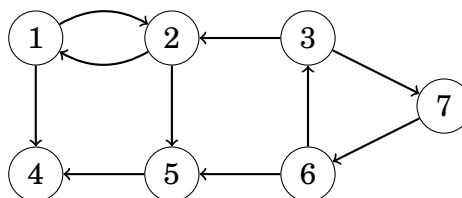
Um grafo é **fortemente conexo** se houver um caminho de qualquer nó para todos os outros nós no grafo. Por exemplo, na figura a seguir, o grafo à esquerda é fortemente conexo, enquanto o grafo à direita não é.



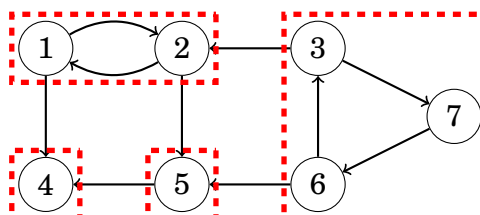
O grafo à direita não é fortemente conexo porque, por exemplo, não há caminho do nó 2 para o nó 1.

Os **componentes fortemente conexos** de um grafo dividem o grafo em partes fortemente conexas que são tão grandes quanto possível. Os componentes fortemente conexos formam um **grafo de componentes** acíclico que representa a estrutura profunda do grafo original.

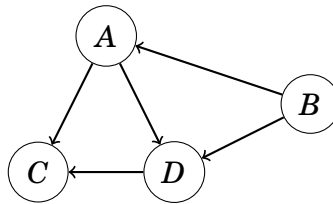
Por exemplo, para o grafo



os componentes fortemente conexos são os seguintes:



O grafo de componentes correspondente é o seguinte:



Os componentes são  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{3, 6, 7\}$ ,  $C = \{4\}$  e  $D = \{5\}$ .

Um grafo de componentes é um grafo direcionado acíclico, então é mais fácil de processar do que o grafo original. Como o grafo não contém ciclos, sempre podemos construir uma ordenação topológica e usar técnicas de programação dinâmica como aquelas apresentadas no Capítulo 16.

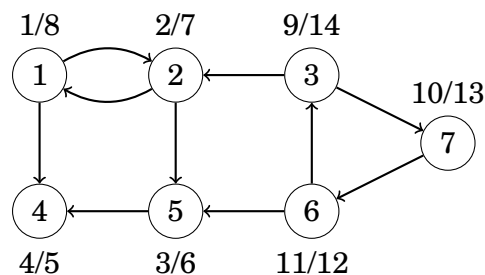
## 17.1 Algoritmo de Kosaraju

O **algoritmo de Kosaraju**<sup>1</sup> é um método eficiente para encontrar os componentes fortemente conexos de um grafo direcionado. O algoritmo realiza duas buscas em profundidade: a primeira busca constrói uma lista de nós de acordo com a estrutura do grafo, e a segunda busca forma os componentes fortemente conexos.

### Busca 1

A primeira fase do algoritmo de Kosaraju constrói uma lista de nós na ordem em que uma busca em profundidade os processa. O algoritmo percorre os nós, e inicia uma busca em profundidade em cada nó não processado. Cada nó será adicionado à lista após ter sido processado.

No grafo de exemplo, os nós são processados na seguinte ordem:



A notação  $x/y$  significa que o processamento do nó começou no tempo  $x$  e terminou no tempo  $y$ . Assim, a lista correspondente é a seguinte:

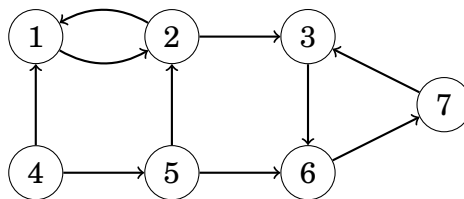
<sup>1</sup>De acordo com [1], S. R. Kosaraju inventou este algoritmo em 1978, mas não o publicou. Em 1981, o mesmo algoritmo foi redescoberto e publicado por M. Sharir [57].

nó	tempo de processamento
4	5
5	6
2	7
1	8
6	12
7	13
3	14

## Busca 2

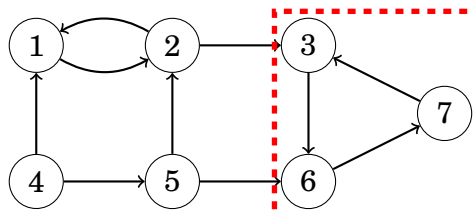
A segunda fase do algoritmo forma os componentes fortemente conexos do grafo. Primeiro, o algoritmo inverte cada aresta no grafo. Isso garante que durante a segunda busca, sempre encontraremos componentes fortemente conexos que não possuem nós extras.

Após inverter as arestas, o grafo de exemplo é o seguinte:



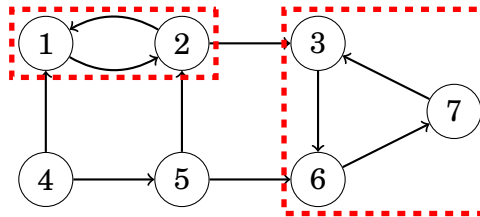
Depois disso, o algoritmo percorre a lista de nós criada pela primeira busca, em ordem *inversa*. Se um nó não pertence a um componente, o algoritmo cria um novo componente e inicia uma busca em profundidade que adiciona todos os novos nós encontrados durante a busca ao novo componente.

No grafo de exemplo, o primeiro componente começa no nó 3:

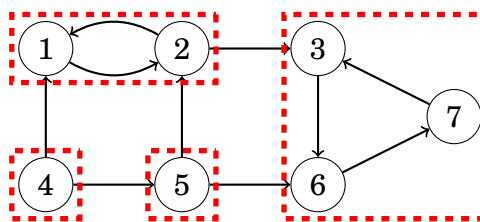


Observe que como todas as arestas são invertidas, o componente não "vaza" para outras partes no grafo.

Os próximos nós na lista são os nós 7 e 6, mas eles já pertencem a um componente, então o próximo novo componente começa no nó 1:



Finalmente, o algoritmo processa os nós 5 e 4 que criam os componentes fortemente conexos restantes:



A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n + m)$ , porque o algoritmo realiza duas buscas em profundidade.

## 17.2 Problema 2SAT

A conectividade forte também está relacionada ao **problema 2SAT**<sup>2</sup>. Neste problema, recebemos uma fórmula lógica

$$(a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \wedge \cdots \wedge (a_m \vee b_m),$$

onde cada  $a_i$  e  $b_i$  é uma variável lógica ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) ou uma negação de uma variável lógica ( $\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n$ ). Os símbolos " $\wedge$ " e " $\vee$ " denotam os operadores lógicos "e" e "ou". Nossa tarefa é atribuir a cada variável um valor para que a fórmula seja verdadeira, ou declarar que isso não é possível.

Por exemplo, a fórmula

$$L_1 = (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_4)$$

é verdadeira quando as variáveis são atribuídas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \text{falso} \\ x_2 = \text{falso} \\ x_3 = \text{verdadeiro} \\ x_4 = \text{verdadeiro} \end{cases}$$

<sup>2</sup>O algoritmo apresentado aqui foi introduzido em [4]. Há também outro algoritmo linear conhecido [19] que é baseado em backtracking.



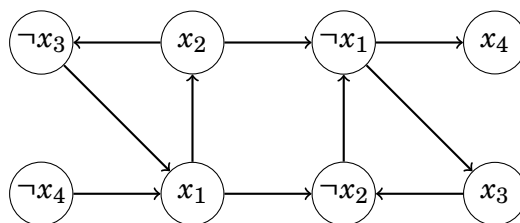
No entanto, a fórmula

$$L_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$$

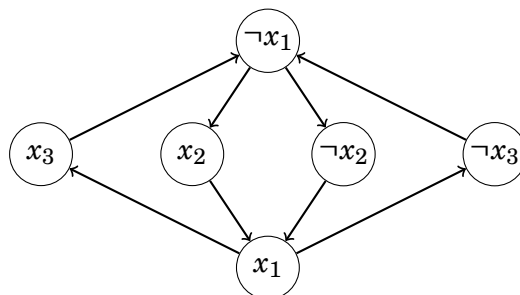
é sempre falsa, independentemente de como atribuímos os valores. A razão para isso é que não podemos escolher um valor para  $x_1$  sem criar uma contradição. Se  $x_1$  for falso, ambos  $x_2$  e  $\neg x_2$  devem ser verdadeiros, o que é impossível, e se  $x_1$  for verdadeiro, ambos  $x_3$  e  $\neg x_3$  devem ser verdadeiros, o que também é impossível.

O problema 2SAT pode ser representado como um grafo cujos nós correspondem às variáveis  $x_i$  e negações  $\neg x_i$ , e as arestas determinam as conexões entre as variáveis. Cada par  $(a_i \vee b_i)$  gera duas arestas:  $\neg a_i \rightarrow b_i$  e  $\neg b_i \rightarrow a_i$ . Isso significa que se  $a_i$  não for verdadeiro,  $b_i$  deve ser verdadeiro, e vice-versa.

O grafo para a fórmula  $L_1$  é:



E o grafo para a fórmula  $L_2$  é:



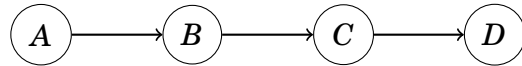
A estrutura do grafo nos diz se é possível atribuir os valores das variáveis para que a fórmula seja verdadeira. Acontece que isso pode ser feito exatamente quando não há nós  $x_i$  e  $\neg x_i$  tais que ambos os nós pertençam ao mesmo componente fortemente conexo. Se houver tais nós, o grafo contém um caminho de  $x_i$  para  $\neg x_i$  e também um caminho de  $\neg x_i$  para  $x_i$ , então ambos  $x_i$  e  $\neg x_i$  devem ser verdadeiros, o que não é possível.

No grafo da fórmula  $L_1$ , não há nós  $x_i$  e  $\neg x_i$  tais que ambos os nós pertençam ao mesmo componente fortemente conexo, então uma solução existe. No grafo da fórmula  $L_2$ , todos os nós pertencem ao mesmo componente fortemente conexo, então uma solução não existe.

Se uma solução existir, os valores para as variáveis podem ser encontrados percorrendo os nós do grafo de componentes em uma ordem de ordenação topológica inversa. A cada passo, processamos um componente que não contém arestas que levam a um componente não processado. Se as variáveis no componente não tiverem sido atribuídas a valores, seus valores serão determinados de acordo

com os valores no componente, e se eles já tiverem valores, eles permanecem inalterados. O processo continua até que cada variável tenha sido atribuída a um valor.

O grafo de componentes para a fórmula  $L_1$  é o seguinte:



Os componentes são  $A = \{\neg x_4\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, \neg x_3\}$ ,  $C = \{\neg x_1, \neg x_2, x_3\}$  e  $D = \{x_4\}$ . Ao construir a solução, primeiro processamos o componente  $D$  onde  $x_4$  se torna verdadeiro. Depois disso, processamos o componente  $C$  onde  $x_1$  e  $x_2$  se tornam falsos e  $x_3$  se torna verdadeiro. Todas as variáveis foram atribuídas a valores, então os componentes restantes  $A$  e  $B$  não alteram as variáveis.

Observe que este método funciona porque o grafo tem uma estrutura especial: se houver caminhos do nó  $x_i$  para o nó  $x_j$  e do nó  $x_j$  para o nó  $\neg x_j$ , então o nó  $x_i$  nunca se torna verdadeiro. A razão para isso é que também há um caminho do nó  $\neg x_j$  para o nó  $\neg x_i$ , e ambos  $x_i$  e  $x_j$  se tornam falsos.

Um problema mais difícil é o **problema 3SAT**, onde cada parte da fórmula é da forma  $(a_i \vee b_i \vee c_i)$ . Este problema é NP-difícil, então nenhum algoritmo eficiente para resolver o problema é conhecido.

# Capítulo 18

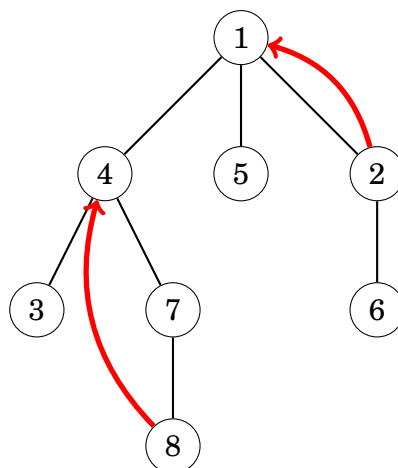
## Consultas em Árvores

Este capítulo aborda técnicas para processar consultas em subárvores e caminhos de uma árvore enraizada. Por exemplo, algumas dessas consultas são:

- Qual é o  $k$ -ésimo ancestral de um nó?
- Qual é a soma dos valores na subárvore de um nó?
- Qual é a soma dos valores em um caminho entre dois nós?
- Qual é o ancestral comum mais baixo de dois nós?

### 18.1 Encontrando Ancestrais

O  $k$ -ésimo **ancestral** de um nó  $x$  em uma árvore enraizada é o nó que alcançaremos se subirmos  $k$  níveis a partir de  $x$ . Seja  $\text{ancestral}(x, k)$  o  $k$ -ésimo ancestral de um nó  $x$  (ou 0 se não houver tal ancestral). Por exemplo, na árvore a seguir,  $\text{ancestral}(2, 1) = 1$  e  $\text{ancestral}(8, 2) = 4$ .



Uma maneira fácil de calcular qualquer valor de  $\text{ancestral}(x, k)$  é realizar uma sequência de  $k$  movimentos na árvore. No entanto, a complexidade de tempo deste método é  $O(k)$ , o que pode ser lento, pois uma árvore de  $n$  nós pode ter uma cadeia de  $n$  nós.

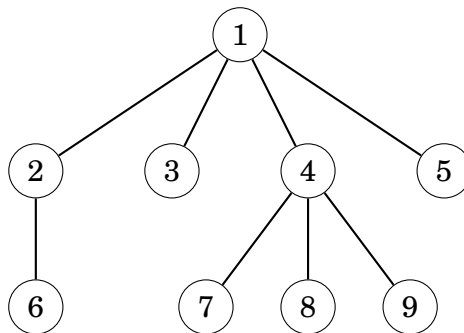
Felizmente, usando uma técnica semelhante àquela utilizada no Capítulo 16.3, qualquer valor de  $\text{ancestral}(x, k)$  pode ser calculado eficientemente em tempo  $O(\log k)$  após o pré-processamento. A ideia é pré-calcular todos os valores  $\text{ancestral}(x, k)$  onde  $k \leq n$  é uma potência de dois. Por exemplo, os valores para a árvore acima são os seguintes:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{ancestral}(x, 1)$	0	1	4	1	1	2	4	7
$\text{ancestral}(x, 2)$	0	0	1	0	0	1	1	4
$\text{ancestral}(x, 4)$	0	0	0	0	0	0	0	0
...								

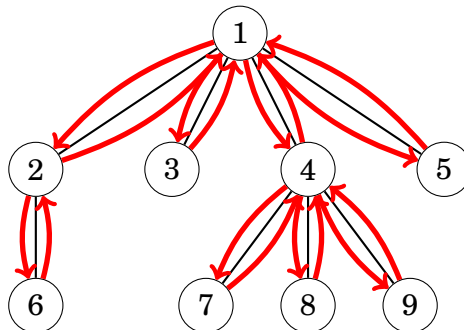
O pré-processamento leva tempo  $O(n \log n)$ , pois  $O(\log n)$  valores são calculados para cada nó. Após isso, qualquer valor de  $\text{ancestral}(x, k)$  pode ser calculado em tempo  $O(\log k)$  representando  $k$  como uma soma onde cada termo é uma potência de dois.

## 18.2 Subárvores e Caminhos

Um **vetor de percurso de árvore** contém os nós de uma árvore enraizada na ordem em que uma busca em profundidade a partir do nó raiz os visita. Por exemplo, na árvore:



Uma busca em profundidade procede da seguinte forma:



Portanto, o vetor de percurso de árvore correspondente é o seguinte:

1	2	6	3	4	7	8	9	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Consultas em Subárvores

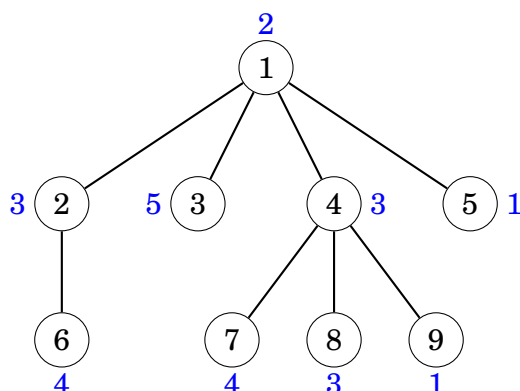
Cada subárvore de uma árvore corresponde a um subvetor do vetor de percurso de árvore, de forma que o primeiro elemento do subvetor é o nó raiz. Por exemplo, o seguinte subvetor contém os nós da subárvore do nó 4:

1	2	6	3	4	7	8	9	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Usando esse fato, podemos processar eficientemente consultas relacionadas a subárvores de uma árvore. Como exemplo, considere um problema onde cada nó recebe um valor e nossa tarefa é oferecer suporte às seguintes consultas:

- atualizar o valor de um nó
- calcular a soma dos valores na subárvore de um nó

Considere a seguinte árvore onde os números azuis são os valores dos nós. Por exemplo, a soma da subárvore do nó 4 é  $3 + 4 + 3 + 1 = 11$ .



A ideia é construir um vetor de percurso de árvore que contém três valores para cada nó: o identificador do nó, o tamanho da subárvore e o valor do nó. Por exemplo, o vetor para a árvore acima é o seguinte:

id do nó	1	2	6	3	4	7	8	9	5
tamanho da subárvore	9	2	1	1	4	1	1	1	1
valor do nó	2	3	4	5	3	4	3	1	1

Usando este vetor, podemos calcular a soma dos valores em qualquer subárvore primeiro descobrindo o tamanho da subárvore e depois os valores dos nós correspondentes. Por exemplo, os valores na subárvore do nó 4 podem ser encontrados da seguinte forma:

id do nó	1	2	6	3	4	7	8	9	5
tamanho da subárvore	9	2	1	1	4	1	1	1	1
valor do nó	2	3	4	5	3	4	3	1	1

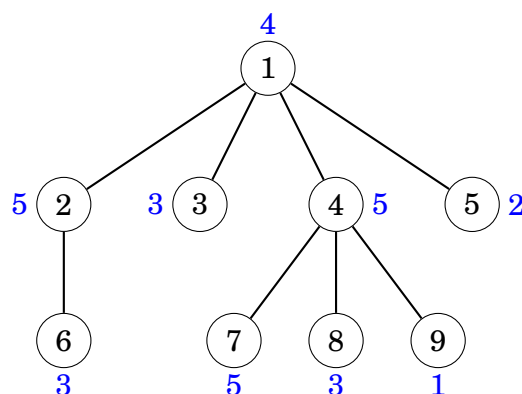
Para responder às consultas de forma eficiente, basta armazenar os valores dos nós em uma árvore binária indexada ou árvore de segmentos. Depois disso, podemos atualizar um valor e calcular a soma dos valores em tempo  $O(\log n)$ .

## Consultas em Caminhos

Usando um vetor de percurso de árvore, também podemos calcular eficientemente somas de valores em caminhos do nó raiz para qualquer nó da árvore. Considere um problema em que nossa tarefa é oferecer suporte às seguintes consultas:

- alterar o valor de um nó
- calcular a soma dos valores em um caminho da raiz até um nó

Por exemplo, na árvore a seguir, a soma dos valores do nó raiz ao nó 7 é  $4 + 5 + 5 = 14$ :



Podemos resolver este problema como antes, mas agora cada valor na última linha do vetor é a soma dos valores em um caminho da raiz até o nó. Por exemplo, o seguinte vetor corresponde à árvore acima:

id do nó	1	2	6	3	4	7	8	9	5
tamanho da subárvore	9	2	1	1	4	1	1	1	1
soma do caminho	4	9	12	7	9	14	12	10	6

Quando o valor de um nó aumenta em  $x$ , as somas de todos os nós em sua subárvore aumentam em  $x$ . Por exemplo, se o valor do nó 4 aumentar em 1, o vetor muda da seguinte forma:

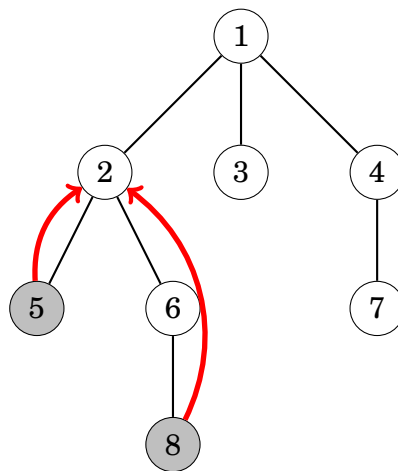
id do nó	1	2	6	3	4	7	8	9	5
tamanho da subárvore	9	2	1	1	4	1	1	1	1
soma do caminho	4	9	12	7	10	15	13	11	6

Assim, para oferecer suporte a ambas as operações, devemos ser capazes de aumentar todos os valores em um intervalo e recuperar um único valor. Isso pode ser feito em tempo  $O(\log n)$  usando uma árvore de índice binário ou árvore de segmentos (consulte o Capítulo 9.4).

## 18.3 Ancestral Comum Mais Baixo

O **ancestral comum mais baixo** de dois nós de uma árvore enraizada é o nó mais baixo cuja subárvore contém ambos os nós. Um problema típico é processar eficientemente consultas que pedem para encontrar o ancestral comum mais baixo de dois nós.

Por exemplo, na árvore a seguir, o ancestral comum mais baixo dos nós 5 e 8 é o nó 2:



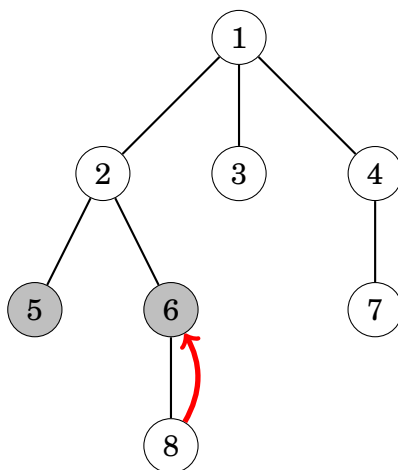
A seguir, discutiremos duas técnicas eficientes para encontrar o ancestral comum mais baixo de dois nós.

### Método 1

Uma maneira de resolver o problema é usar o fato de que podemos encontrar eficientemente o  $k$ -ésimo ancestral de qualquer nó na árvore. Usando isso, podemos dividir o problema de encontrar o ancestral comum mais baixo em duas partes.

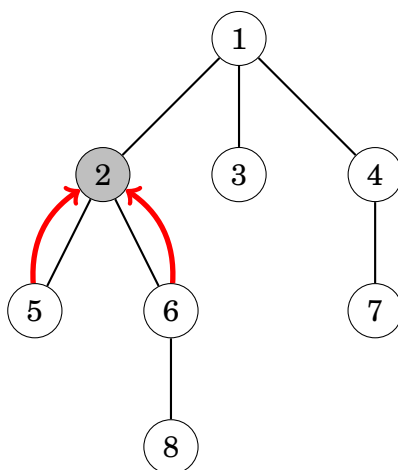
Usamos dois ponteiros que apontam inicialmente para os dois nós cujo ancestral comum mais baixo devemos encontrar. Primeiro, movemos um dos ponteiros para cima para que ambos os ponteiros apontem para nós no mesmo nível.

No cenário de exemplo, movemos o segundo ponteiro um nível para cima para que ele aponte para o nó 6, que está no mesmo nível do nó 5:



Depois disso, determinamos o número mínimo de etapas necessárias para mover ambos os ponteiros para cima para que apontem para o mesmo nó. O nó para o qual os ponteiros apontam depois disso é o ancestral comum mais baixo.

No cenário de exemplo, basta mover ambos os ponteiros um passo para cima até o nó 2, que é o ancestral comum mais baixo:



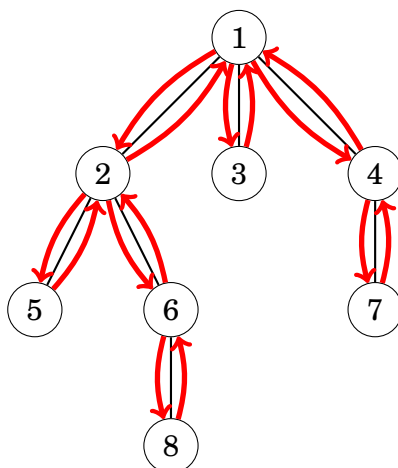
Como ambas as partes do algoritmo podem ser executadas em tempo  $O(\log n)$  usando informações pré-calculadas, podemos encontrar o ancestral comum mais baixo de quaisquer dois nós em tempo  $O(\log n)$ .

## Método 2

Outra maneira de resolver o problema é baseada em um vetor de percurso de árvore<sup>1</sup>. Novamente, a ideia é percorrer os nós usando uma busca em profundidade:

<sup>1</sup>Este algoritmo de ancestral comum mais baixo foi apresentado em [7]. Essa técnica às vezes é chamada de **Euler tour technique** [66].





No entanto, usamos um vetor de percurso de árvore diferente do que antes: adicionamos cada nó ao vetor *sempre* que a busca em profundidade passa pelo nó, e não apenas na primeira visita. Portanto, um nó que tem  $k$  filhos aparece  $k + 1$  vezes no vetor e há um total de  $2n - 1$  nós no vetor.

Armazenamos dois valores no vetor: o identificador do nó e a profundidade do nó na árvore. O seguinte vetor corresponde à árvore acima:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
id do nó	1	2	5	2	6	8	6	2	1	3	1	4	7	4	1
profundidade	1	2	3	2	3	4	3	2	1	2	1	2	3	2	1

Agora podemos encontrar o ancestral comum mais baixo dos nós  $a$  e  $b$  encontrando o nó com a profundidade *mínima* entre os nós  $a$  e  $b$  no vetor. Por exemplo, o ancestral comum mais baixo dos nós 5 e 8 pode ser encontrado da seguinte forma:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
id do nó	1	2	5	2	6	8	6	2	1	3	1	4	7	4	1
profundidade	1	2	3	2	3	4	3	2	1	2	1	2	3	2	1

↑

O nó 5 está na posição 2, o nó 8 está na posição 5 e o nó com profundidade mínima entre as posições 2...5 é o nó 2 na posição 3, cuja profundidade é 2. Assim, o ancestral comum mais baixo dos nós 5 e 8 é o nó 2.

Portanto, para encontrar o ancestral comum mais baixo de dois nós, basta processar uma consulta de mínimo de intervalo. Como o vetor é estático, podemos processar tais consultas em tempo  $O(1)$  após um pré-processamento de tempo  $O(n \log n)$ .

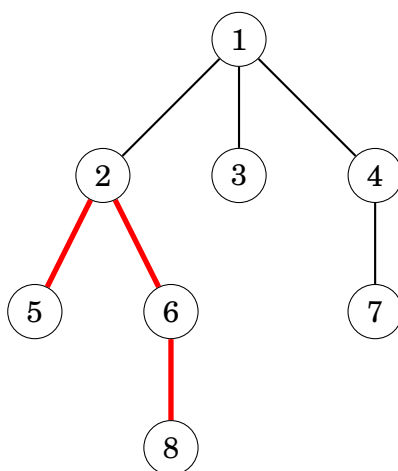
## Distâncias entre Nós

A distância entre os nós  $a$  e  $b$  é igual ao comprimento do caminho de  $a$  para  $b$ . Acontece que o problema de calcular a distância entre os nós se reduz a encontrar seu ancestral comum mais baixo.

Primeiro, enraizamos a árvore arbitrariamente. Depois disso, a distância dos nós  $a$  e  $b$  pode ser calculada usando a fórmula

$$\text{profundidade}(a) + \text{profundidade}(b) - 2 \cdot \text{profundidade}(c),$$

onde  $c$  é o ancestral comum mais baixo de  $a$  e  $b$  e  $\text{profundidade}(s)$  denota a profundidade do nó  $s$ . Por exemplo, considere a distância dos nós 5 e 8:



O ancestral comum mais baixo dos nós 5 e 8 é o nó 2. As profundidades dos nós são  $\text{profundidade}(5) = 3$ ,  $\text{profundidade}(8) = 4$  e  $\text{profundidade}(2) = 2$ , então a distância entre os nós 5 e 8 é  $3 + 4 - 2 \cdot 2 = 3$ .

## 18.4 Algoritmos Offline

Até agora, discutimos algoritmos *online* para consultas em árvores. Esses algoritmos são capazes de processar consultas uma após a outra, de forma que cada consulta seja respondida antes de receber a próxima consulta.

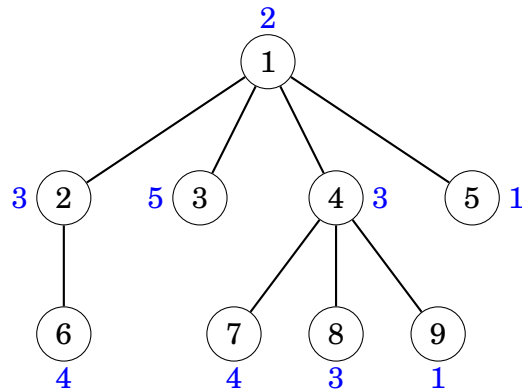
No entanto, em muitos problemas, a propriedade *online* não é necessária. Nesta seção, vamos nos concentrar em algoritmos *offline*. Esses algoritmos recebem um conjunto de consultas que podem ser respondidas em qualquer ordem. Muitas vezes, é mais fácil projetar um algoritmo *offline* em comparação com um algoritmo *online*.

### Mesclando Estruturas de Dados

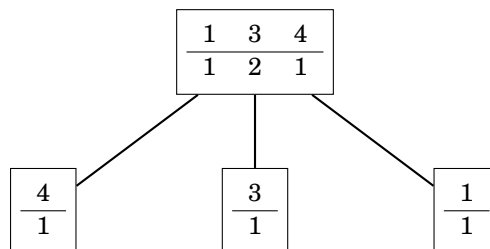
Um método para construir um algoritmo *offline* é realizar um percurso de árvore em profundidade e manter estruturas de dados nos nós. Em cada nó  $s$ , criamos uma estrutura de dados  $d[s]$  que é baseada nas estruturas de dados dos filhos de

$s$ . Então, usando esta estrutura de dados, todas as consultas relacionadas a  $s$  são processadas.

Como exemplo, considere o seguinte problema: Recebemos uma árvore onde cada nó possui algum valor. Nossa tarefa é processar consultas da forma "calcular o número de nós com valor  $x$  na subárvore do nó  $s$ ". Por exemplo, na árvore a seguir, a subárvore do nó 4 contém dois nós cujo valor é 3.



Neste problema, podemos usar mapas para responder às consultas. Por exemplo, os mapas para o nó 4 e seus filhos são os seguintes:



Se criarmos tal estrutura de dados para cada nó, podemos processar facilmente todas as consultas fornecidas, pois podemos lidar com todas as consultas relacionadas a um nó imediatamente após criar sua estrutura de dados. Por exemplo, a estrutura de mapa acima para o nó 4 nos diz que sua subárvore contém dois nós cujo valor é 3.

No entanto, seria muito lento criar todas as estruturas de dados do zero. Em vez disso, em cada nó  $s$ , criamos uma estrutura de dados inicial  $d[s]$  que contém apenas o valor de  $s$ . Depois disso, percorremos os filhos de  $s$  e *mesclamos*  $d[s]$  e todas as estruturas de dados  $d[u]$  onde  $u$  é um filho de  $s$ .

Por exemplo, na árvore acima, o mapa para o nó 4 é criado mesclando os seguintes mapas:



Aqui, o primeiro mapa é a estrutura de dados inicial para o nó 4, e os outros três mapas correspondem aos nós 7, 8 e 9.

A mesclagem no nó  $s$  pode ser feita da seguinte forma: Percorremos os filhos de  $s$  e, em cada filho  $u$ , mesclamos  $d[s]$  e  $d[u]$ . Sempre copiamos o conteúdo de  $d[u]$  para  $d[s]$ . No entanto, antes disso, *trocamos* o conteúdo de  $d[s]$  e  $d[u]$  se  $d[s]$  for menor que  $d[u]$ . Ao fazer isso, cada valor é copiado apenas  $O(\log n)$  vezes durante o percurso da árvore, o que garante a eficiência do algoritmo.

Para trocar o conteúdo de duas estruturas de dados  $a$  e  $b$  de forma eficiente, podemos usar o seguinte código:

```
swap(a, b);
```

É garantido que o código acima funcione em tempo constante quando  $a$  e  $b$  são estruturas de dados da biblioteca padrão C++.

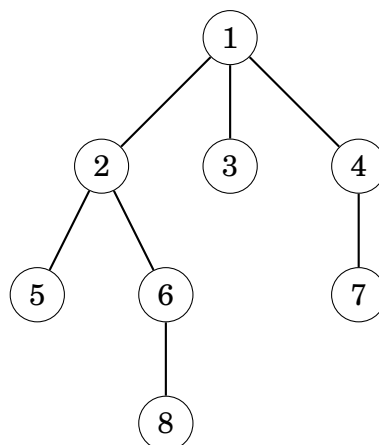
## Ancestrais Comuns Mais Baixos

Há também um algoritmo offline para processar um conjunto de consultas de ancestral comum mais baixo<sup>2</sup>. O algoritmo é baseado na estrutura de dados union-find (consulte o Capítulo 15.2), e o benefício do algoritmo é que ele é mais fácil de implementar do que os algoritmos discutidos anteriormente neste capítulo.

O algoritmo recebe como entrada um conjunto de pares de nós e determina para cada par o ancestral comum mais baixo dos nós. O algoritmo realiza um percurso de árvore em profundidade e mantém conjuntos disjuntos de nós. Inicialmente, cada nó pertence a um conjunto separado. Para cada conjunto, também armazenamos o nó mais alto na árvore que pertence ao conjunto.

Quando o algoritmo visita um nó  $x$ , ele percorre todos os nós  $y$  de forma que o ancestral comum mais baixo de  $x$  e  $y$  precise ser encontrado. Se  $y$  já tiver sido visitado, o algoritmo relata que o ancestral comum mais baixo de  $x$  e  $y$  é o nó mais alto no conjunto de  $y$ . Então, após processar o nó  $x$ , o algoritmo une os conjuntos de  $x$  e seu pai.

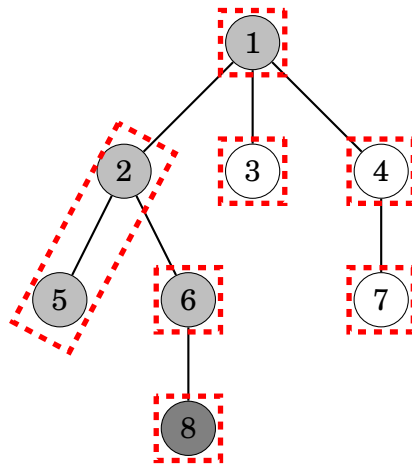
Por exemplo, suponha que queremos encontrar os ancestrais comuns mais baixos dos pares de nós (5,8) e (2,7) na árvore a seguir:



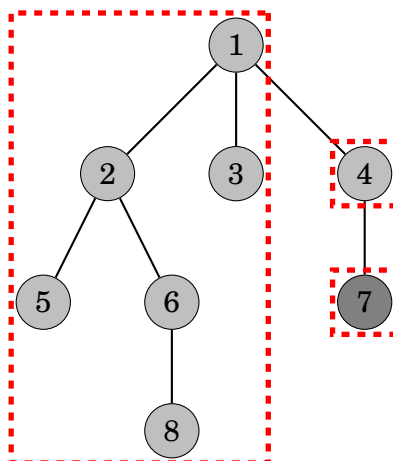
Nas árvores a seguir, os nós cinzas denotam nós visitados e grupos de nós tracejados pertencem ao mesmo conjunto. Quando o algoritmo visita o nó 8, ele

<sup>2</sup>Este algoritmo foi publicado por R. E. Tarjan em 1979 [65].

percebe que o nó 5 foi visitado e o nó mais alto em seu conjunto é 2. Assim, o ancestral comum mais baixo dos nós 5 e 8 é 2:



Mais tarde, ao visitar o nó 7, o algoritmo determina que o ancestral comum mais baixo dos nós 2 e 7 é 1:





# Capítulo 19

## Caminhos e circuitos

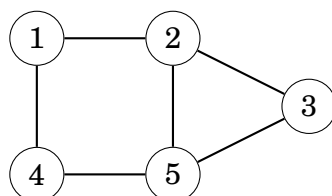
Este capítulo se concentra em dois tipos de caminhos em grafos:

- Um **caminho Euleriano** é um caminho que passa por cada aresta exatamente uma vez.
- Um **caminho Hamiltoniano** é um caminho que visita cada nó exatamente uma vez.

Embora os caminhos Eulerianos e Hamiltonianos pareçam conceitos semelhantes à primeira vista, os problemas computacionais relacionados a eles são muito diferentes. Acontece que existe uma regra simples que determina se um grafo contém um caminho Euleriano, e também existe um algoritmo eficiente para encontrar tal caminho se ele existir. Ao contrário, verificar a existência de um caminho Hamiltoniano é um problema NP-difícil, e nenhum algoritmo eficiente é conhecido por resolver o problema.

### 19.1 Caminhos Eulerianos

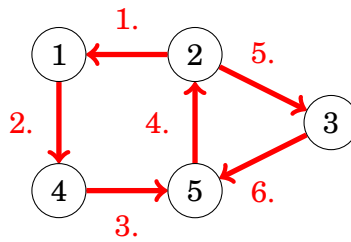
Um **caminho Euleriano**<sup>1</sup> é um caminho que passa exatamente uma vez por cada aresta do grafo. Por exemplo, o grafo



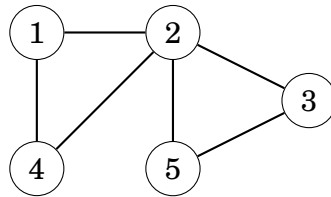
tem um caminho Euleriano do nó 2 ao nó 5:

---

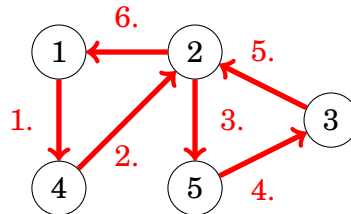
<sup>1</sup>L. Euler estudou tais caminhos em 1736 quando ele resolveu o famoso problema da ponte de Königsberg. Este foi o nascimento da teoria dos grafos.



Um **circuito Euleriano** é um caminho Euleriano que começa e termina no mesmo nó. Por exemplo, o grafo



possui um circuito Euleriano que começa e termina no nó 1:



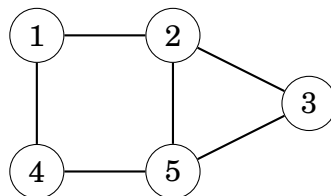
## Existência

A existência de caminhos e circuitos Eulerianos depende dos graus dos nós. Primeiro, um grafo não direcionado tem um caminho Euleriano exatamente quando todas as arestas pertencem ao mesmo componente conexo e

- o grau de cada nó é par *ou*
- o grau de exatamente dois nós é ímpar, e o grau de todos os outros nós é par.

No primeiro caso, cada caminho Euleriano também é um circuito Euleriano. No segundo caso, os nós de grau ímpar são os nós inicial e final de um caminho Euleriano que não é um circuito Euleriano.

Por exemplo, no grafo



os nós 1, 3 e 4 têm grau 2, e os nós 2 e 5 têm grau 3. Exatamente dois nós têm grau ímpar, então há um caminho Euleriano entre os nós 2 e 5, mas o grafo não contém um circuito Euleriano.

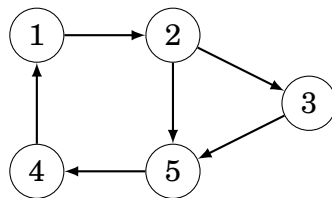


Em um grafo direcionado, focamos nos graus de entrada e saída dos nós. Um grafo direcionado contém um caminho Euleriano exatamente quando todas as arestas pertencem ao mesmo componente conexo e

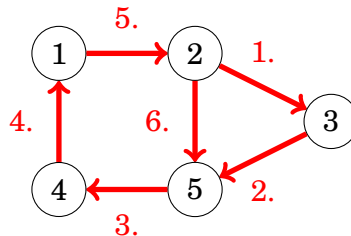
- em cada nó, o grau de entrada é igual ao grau de saída, *ou*
- em um nó, o grau de entrada é um a mais que o grau de saída, em outro nó, o grau de saída é um a mais que o grau de entrada, e em todos os outros nós, o grau de entrada é igual ao grau de saída.

No primeiro caso, cada caminho Euleriano também é um circuito Euleriano, e no segundo caso, o grafo contém um caminho Euleriano que começa no nó cujo grau de saída é maior e termina no nó cujo grau de entrada é maior.

Por exemplo, no grafo



os nós 1, 3 e 4 têm grau de entrada 1 e grau de saída 1, o nó 2 tem grau de entrada 1 e grau de saída 2, e o nó 5 tem grau de entrada 2 e grau de saída 1. Portanto, o grafo contém um caminho Euleriano do nó 2 ao nó 5:



## Algoritmo de Hierholzer

O **algoritmo de Hierholzer**<sup>2</sup> é um método eficiente para construir um circuito Euleriano. O algoritmo consiste em várias rodadas, cada uma das quais adiciona novas arestas ao circuito. Claro, assumimos que o grafo contém um circuito Euleriano; caso contrário, o algoritmo de Hierholzer não pode encontrá-lo.

Primeiro, o algoritmo constrói um circuito que contém algumas (não necessariamente todas) das arestas do grafo. Depois disso, o algoritmo estende o circuito passo a passo adicionando subcircuitos a ele. O processo continua até que todas as arestas tenham sido adicionadas ao circuito.

O algoritmo estende o circuito sempre encontrando um nó  $x$  que pertence ao circuito, mas tem uma aresta de saída que não está incluída no circuito. O algoritmo constrói um novo caminho a partir do nó  $x$  que contém apenas arestas

<sup>2</sup>O algoritmo foi publicado em 1873 após a morte de Hierholzer [35].

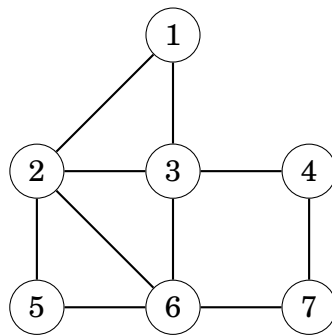
que ainda não estão no circuito. Cedo ou tarde, o caminho retornará ao nó  $x$ , o que cria um subcircuito.

Se o grafo contiver apenas um caminho Euleriano, ainda podemos usar o algoritmo de Hierholzer para encontrá-lo adicionando uma aresta extra ao grafo e removendo a aresta após o circuito ter sido construído. Por exemplo, em um grafo não direcionado, adicionamos a aresta extra entre os dois nós de grau ímpar.

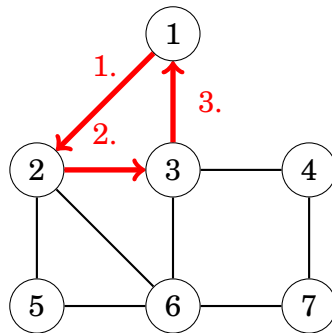
A seguir, veremos como o algoritmo de Hierholzer constrói um circuito Euleriano para um grafo não direcionado.

## Exemplo

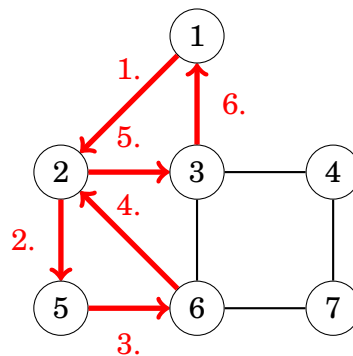
Vamos considerar o seguinte grafo:



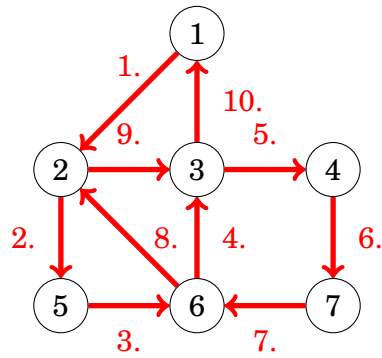
Suponha que o algoritmo primeiro cria um circuito que começa no nó 1. Um circuito possível é  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ :



Depois disso, o algoritmo adiciona o subcircuito  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$  ao circuito:



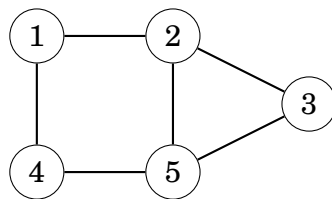
Finalmente, o algoritmo adiciona o subcircuito  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6$  ao circuito:



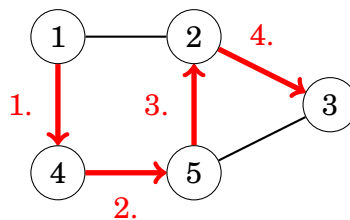
Agora todas as arestas estão incluídas no circuito, então construímos com sucesso um circuito Euleriano.

## 19.2 Caminhos Hamiltonianos

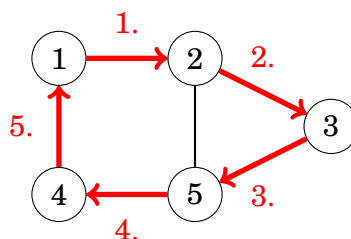
Um **caminho Hamiltoniano** é um caminho que visita cada nó do grafo exatamente uma vez. Por exemplo, o grafo



contém um caminho Hamiltoniano do nó 1 ao nó 3:



Se um caminho Hamiltoniano começa e termina no mesmo nó, ele é chamado de **circuito Hamiltoniano**. O grafo acima também possui um circuito Hamiltoniano que começa e termina no nó 1:



## Existência

Nenhum método eficiente é conhecido para testar se um grafo contém um caminho Hamiltoniano, e o problema é NP-difícil. Ainda assim, em alguns casos especiais, podemos ter certeza de que um grafo contém um caminho Hamiltoniano.

Uma observação simples é que se o grafo for completo, ou seja, há uma aresta entre todos os pares de nós, ele também contém um caminho Hamiltoniano. Resultados ainda mais fortes foram alcançados:

- **Teorema de Dirac:** Se o grau de cada nó for pelo menos  $n/2$ , o grafo contém um caminho Hamiltoniano.
- **Teorema de Ore:** Se a soma dos graus de cada par de nós não adjacentes for pelo menos  $n$ , o grafo contém um caminho Hamiltoniano.

Uma propriedade comum nesses teoremas e outros resultados é que eles garantem a existência de um caminho Hamiltoniano se o grafo tiver *um grande número* de arestas. Isso faz sentido, porque quanto mais arestas o grafo contiver, mais possibilidades existem para construir um caminho Hamiltoniano.

## Construção

Como não há como verificar eficientemente se um Hamiltoniano caminho existe, é claro que também não há método para construir o caminho de forma eficiente, porque caso contrário poderíamos apenas tentar construir o caminho e ver se ele existe.

Uma maneira simples de procurar um caminho Hamiltoniano é usar um algoritmo de backtracking que percorre todas as maneiras possíveis de construir o caminho. A complexidade de tempo de tal algoritmo é pelo menos  $O(n!)$ , porque existem  $n!$  maneiras diferentes de escolher a ordem de  $n$  nós.

Uma solução mais eficiente é baseada em programação dinâmica (ver Capítulo 10.5). A ideia é calcular valores de uma função possível( $S, x$ ), onde  $S$  é um subconjunto de nós e  $x$  é um dos nós. A função indica se há um caminho Hamiltoniano que visita os nós de  $S$  e termina no nó  $x$ . É possível implementar esta solução em tempo  $O(2^n n^2)$ .

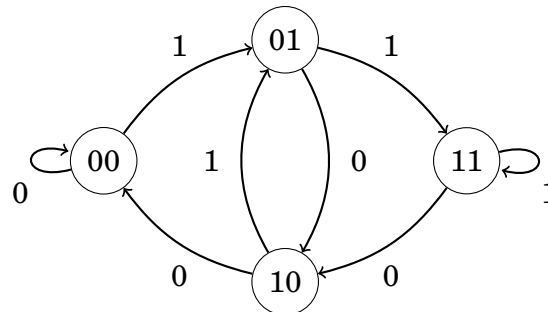
## 19.3 Sequências de De Bruijn

Uma **sequência de De Bruijn** é uma string que contém cada string de comprimento  $n$  exatamente uma vez como uma substring, para um alfabeto fixo de  $k$  caracteres. O comprimento de tal string é  $k^n + n - 1$  caracteres. Por exemplo, quando  $n = 3$  e  $k = 2$ , um exemplo de uma sequência de De Bruijn é

0001011100.

As substrings desta string são todas combinações de três bits: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 e 111.

Acontece que cada sequência de De Bruijn corresponde a um caminho Euleriano em um grafo. A ideia é construir um grafo onde cada nó contém uma string de  $n - 1$  caracteres e cada aresta adiciona um caractere à string. O seguinte grafo corresponde ao cenário acima:



Um caminho Euleriano neste grafo corresponde a uma string que contém todas as strings de comprimento  $n$ . A string contém os caracteres do nó inicial e todos os caracteres das arestas. O nó inicial tem  $n - 1$  caracteres e há  $k^n$  caracteres nas arestas, então o comprimento da string é  $k^n + n - 1$ .

## 19.4 Passeio do Cavalo

Um **passeio do cavalo** é uma sequência de movimentos de um cavalo em um tabuleiro de xadrez  $n \times n$  seguindo as regras do xadrez, de forma que o cavalo visite cada casa exatamente uma vez. Um passeio do cavalo é chamado de *passeio fechado* se o cavalo finalmente retorna à casa inicial e caso contrário, é chamado de *passeio aberto*.

Por exemplo, aqui está um passeio do cavalo aberto em um tabuleiro  $5 \times 5$ :

1	4	11	16	25
12	17	2	5	10
3	20	7	24	15
18	13	22	9	6
21	8	19	14	23

Um passeio do cavalo corresponde a um caminho Hamiltoniano em um grafo cujos nós representam as casas do tabuleiro, e dois nós são conectados com uma aresta se um cavalo pode se mover entre as casas de acordo com as regras do xadrez.

Uma maneira natural de construir um passeio do cavalo é usar o algoritmo de backtracking. A busca pode ser mais eficiente usando *heurísticas* que tentam guiar o cavalo para que um passeio completo seja encontrado rapidamente.

## Regra de Warnsdorf

A **regra de Warnsdorf** é uma heurística simples e eficaz para encontrar um passeio do cavalo<sup>3</sup>. Usando a regra, é possível construir um passeio de forma eficiente mesmo em um tabuleiro grande. A ideia é mover o cavalo sempre para que ele termine em uma casa onde o número de movimentos possíveis seja o mais *pequeno* possível.

Por exemplo, na seguinte situação, existem cinco casas possíveis para as quais o cavalo pode se mover (casas  $a \dots e$ ):

1				$a$
		2		
$b$				$e$
	$c$		$d$	

Nesta situação, a regra de Warnsdorf move o cavalo para a casa  $a$ , porque após esta escolha, há apenas um único movimento possível. As outras escolhas moveriam o cavalo para casas onde haveria três movimentos disponíveis.

---

<sup>3</sup>Essa heurística foi proposta no livro de Warnsdorf [69] em 1823. Existem também algoritmos polinomiais para encontrar passeios do cavalo [52], mas eles são mais complicados.

# Capítulo 20

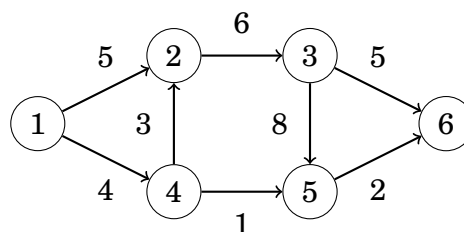
## Fluxos e cortes

Neste capítulo, vamos nos concentrar nos seguintes dois problemas:

- **Encontrar um fluxo máximo:** Qual é a quantidade máxima de fluxo que podemos enviar de um nó para outro nó?
- **Encontrar um corte mínimo:** Qual é o conjunto de arestas de peso mínimo que separa dois nós do grafo?

A entrada para ambos os problemas é um grafo direcionado e ponderado que contém dois nós especiais: a *fonte* é um nó sem arestas de entrada, e o *sumidouro* é um nó sem arestas de saída.

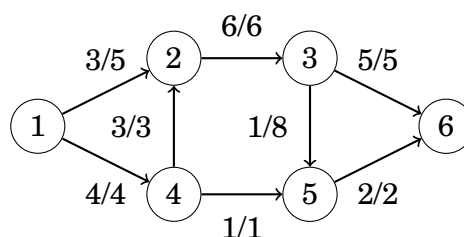
Como exemplo, usaremos o seguinte grafo onde o nó 1 é a fonte e o nó 6 é o sumidouro:



### Fluxo máximo

No problema do **fluxo máximo**, nossa tarefa é enviar o máximo de fluxo possível da fonte para o sumidouro. O peso de cada aresta é uma capacidade que restringe o fluxo que pode passar pela aresta. Em cada nó intermediário, o fluxo de entrada e o de saída devem ser iguais.

Por exemplo, o tamanho máximo de um fluxo no grafo de exemplo é 7. A figura a seguir mostra como podemos rotear o fluxo:

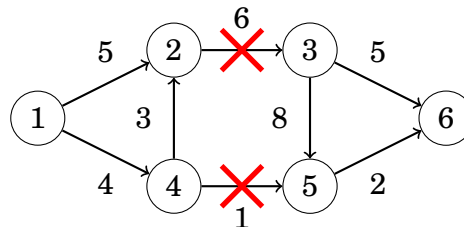


A notação  $v/k$  significa que um fluxo de  $v$  unidades está sendo roteado através de uma aresta cuja capacidade é de  $k$  unidades. O tamanho do fluxo é 7, pois a fonte envia  $3 + 4$  unidades de fluxo e o sumidouro recebe  $5 + 2$  unidades de fluxo. É fácil ver que este fluxo é máximo, pois a capacidade total das arestas que levam ao sumidouro é 7.

## Corte mínimo

No problema do **corte mínimo**, nossa tarefa é remover um conjunto de arestas do grafo de forma que não haja caminho da fonte ao destino após a remoção e o peso total das arestas removidas seja mínimo.

O tamanho mínimo de um corte no grafo de exemplo é 7. Basta remover as arestas  $2 \rightarrow 3$  e  $4 \rightarrow 5$ :



Após a remoção das arestas, não haverá caminho da fonte para o sumidouro. O tamanho do corte é 7, pois os pesos das arestas removidas são 6 e 1. O corte é mínimo, pois não há maneira válida de remover arestas do grafo de forma que seu peso total seja menor que 7.

Não é uma coincidência que o tamanho máximo de um fluxo e o tamanho mínimo de um corte sejam iguais no exemplo acima. Acontece que um fluxo máximo e um corte mínimo são *sempre* igualmente grandes, então os conceitos são dois lados da mesma moeda.

Em seguida, discutiremos o algoritmo de Ford–Fulkerson que pode ser usado para encontrar o fluxo máximo e o corte mínimo de um grafo. O algoritmo também nos ajuda a entender *por que* eles são igualmente grandes.

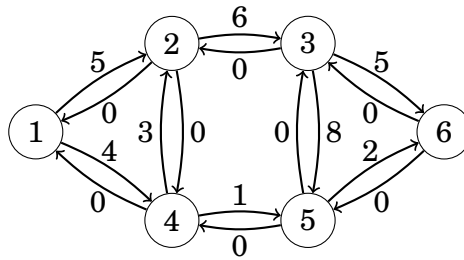
## 20.1 Algoritmo de Ford–Fulkerson

O **algoritmo de Ford–Fulkerson** [25] encontra o fluxo máximo em um grafo. O algoritmo começa com um fluxo vazio, e a cada passo encontra um caminho da fonte para o sumidouro que gera mais fluxo. Finalmente, quando o algoritmo não consegue mais aumentar o fluxo, o fluxo máximo foi encontrado.

O algoritmo utiliza uma representação especial do grafo em que cada aresta original possui uma aresta reversa em outra direção. O peso de cada aresta indica quanto mais fluxo poderia ser direcionado por ela. No início do algoritmo, o peso de cada aresta original é igual à capacidade da aresta e o peso de cada aresta reversa é zero.



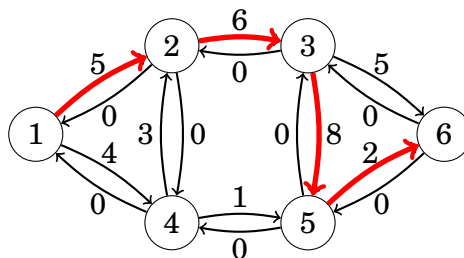
A nova representação para o grafo de exemplo é a seguinte:



## Descrição do algoritmo

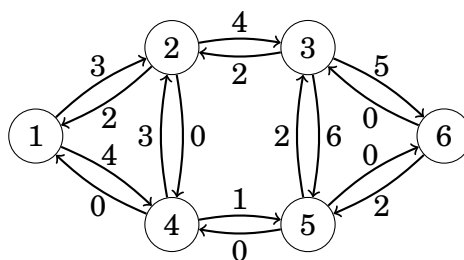
O algoritmo de Ford–Fulkerson consiste em várias rodadas. Em cada rodada, o algoritmo encontra um caminho da fonte para o sumidouro tal que cada aresta no caminho tenha um peso positivo. Se houver mais de um caminho possível disponível, podemos escolher qualquer um deles.

Por exemplo, suponha que escolhemos o seguinte caminho:



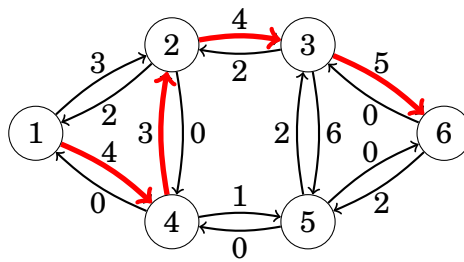
Após escolher o caminho, o fluxo aumenta em  $x$  unidades, onde  $x$  é o menor peso de aresta no caminho. Além disso, o peso de cada aresta no caminho diminui em  $x$  e o peso de cada aresta reversa aumenta em  $x$ .

No caminho acima, os pesos das arestas são 5, 6, 8 e 2. O menor peso é 2, então o fluxo aumenta em 2 e o novo grafo é o seguinte:



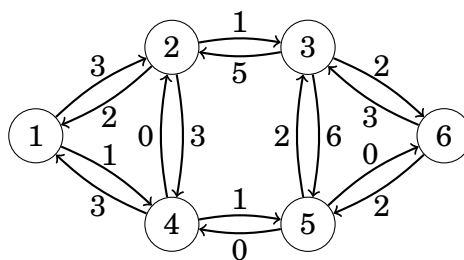
A ideia é que aumentar o fluxo diminui a quantidade de fluxo que pode passar pelas arestas no futuro. Por outro lado, é possível cancelar o fluxo posteriormente usando as arestas reversas do grafo se isso se mostrar benéfico para direcionar o fluxo de outra forma.

O algoritmo aumenta o fluxo enquanto houver um caminho da fonte para o sumidouro por meio de arestas de peso positivo. No presente exemplo, nosso próximo caminho pode ser o seguinte:

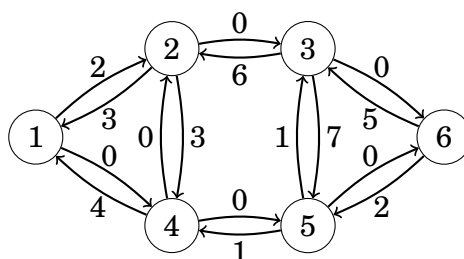


O menor peso de aresta neste caminho é 3, então o caminho aumenta o fluxo em 3, e o fluxo total após o processamento do caminho é 5.

O novo grafo será o seguinte:



Ainda precisamos de mais duas rodadas antes de atingir o fluxo máximo. Por exemplo, podemos escolher os caminhos  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$  e  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6$ . Ambos os caminhos aumentam o fluxo em 1, e o grafo final é o seguinte:



Não é possível aumentar mais o fluxo, pois não há caminho da fonte para o sumidouro com arestas de peso positivo. Portanto, o algoritmo termina e o fluxo máximo é 7.

## Encontrando caminhos

O algoritmo de Ford–Fulkerson não especifica como devemos escolher os caminhos que aumentam o fluxo. De qualquer forma, o algoritmo terminará mais cedo ou mais tarde e encontrará corretamente o fluxo máximo. No entanto, a eficiência do algoritmo depende da maneira como os caminhos são escolhidos.

Uma maneira simples de encontrar caminhos é usar a busca em profundidade. Geralmente, isso funciona bem, mas no pior caso, cada caminho só aumenta o fluxo em 1 e o algoritmo é lento. Felizmente, podemos evitar esta situação usando uma das seguintes técnicas:

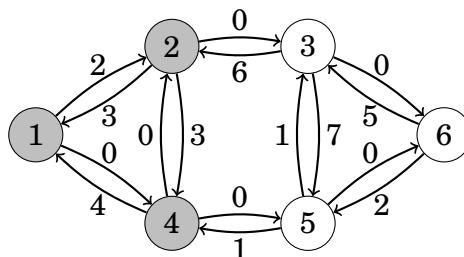
O **algoritmo de Edmonds-Karp** [18] escolhe cada caminho de forma que o número de arestas no caminho seja o menor possível. Isso pode ser feito utilizando busca em largura em vez de busca em profundidade para encontrar os caminhos. Pode-se provar que isso garante que o fluxo aumente rapidamente e que a complexidade de tempo do algoritmo seja  $O(m^2n)$ .

O **algoritmo de escalonamento** [2] utiliza busca em profundidade para encontrar caminhos onde o peso de cada aresta seja pelo menos um valor limite. Inicialmente, o valor limite é algum número grande, por exemplo, a soma de todos os pesos das arestas do grafo. Sempre que um caminho não puder ser encontrado, o valor limite é dividido por 2. A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(m^2 \log c)$ , onde  $c$  é o valor limite inicial.

Na prática, o algoritmo de escalonamento é mais fácil de implementar, pois a busca em profundidade pode ser utilizada para encontrar os caminhos. Ambos os algoritmos são eficientes o suficiente para problemas que normalmente aparecem em competições de programação.

## Cortes mínimos

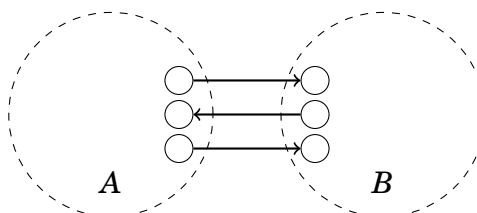
Verifica-se que, uma vez que o algoritmo de Ford-Fulkerson encontra um fluxo máximo, ele também determina um corte mínimo. Seja  $A$  o conjunto de nós que podem ser alcançados a partir da fonte usando arestas de peso positivo. No grafo de exemplo,  $A$  contém os nós 1, 2 e 4:



Agora, o corte mínimo consiste nas arestas do grafo original que começam em algum nó em  $A$ , terminam em algum nó fora de  $A$ , e cuja capacidade é totalmente utilizada no fluxo máximo. No grafo acima, tais arestas são  $2 \rightarrow 3$  e  $4 \rightarrow 5$ , que correspondem ao corte mínimo  $6 + 1 = 7$ .

Por que o fluxo produzido pelo algoritmo é máximo e por que o corte é mínimo? A razão é que um grafo não pode conter um fluxo cujo tamanho seja maior que o peso de qualquer corte do grafo. Portanto, sempre que um fluxo e um corte têm o mesmo tamanho, eles são um fluxo máximo e um corte mínimo.

Vamos considerar qualquer corte do grafo tal que a fonte pertença a  $A$ , o sumidouro pertença a  $B$  e haja algumas arestas entre os conjuntos:



O tamanho do corte é a soma das arestas que vão de  $A$  para  $B$ . Este é um limite superior para o fluxo no grafo, pois o fluxo precisa prosseguir de  $A$  para  $B$ . Assim, o tamanho de um fluxo máximo é menor ou igual a o tamanho de qualquer corte no grafo.

Por outro lado, o algoritmo de Ford-Fulkerson produz um fluxo cujo tamanho é *exatamente* igual ao tamanho de um corte no grafo. Assim, o fluxo precisa ser um fluxo máximo e o corte precisa ser um corte mínimo.

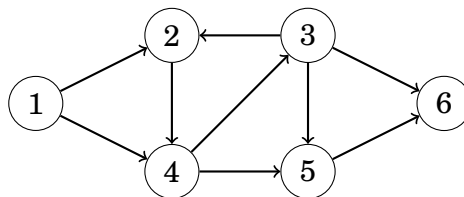
## 20.2 Caminhos disjuntos

Muitos problemas de grafos podem ser resolvidos reduzindo-os ao problema do fluxo máximo. Nosso primeiro exemplo de tal problema é o seguinte: recebemos um grafo direcionado com uma fonte e um sumidouro, e nossa tarefa é encontrar o número máximo de caminhos disjuntos da fonte ao sumidouro.

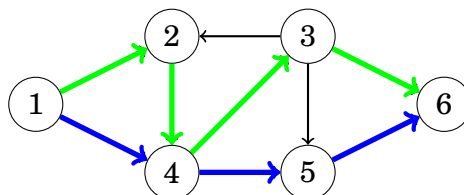
### Caminhos Disjuntos nas Arestas

Vamos primeiro focar no problema de encontrar o número máximo de **caminhos disjuntos nas arestas** da origem ao sumidouro. Isso significa que devemos construir um conjunto de caminhos de forma que cada aresta apareça em, no máximo, um caminho.

Por exemplo, considere o seguinte grafo:



Neste grafo, o número máximo de caminhos disjuntos nas arestas é 2. Podemos escolher os caminhos  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6$  e  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  como segue:



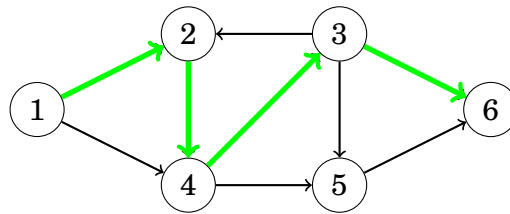
Verifica-se que o número máximo de caminhos disjuntos nas arestas é igual ao fluxo máximo do grafo, assumindo que a capacidade de cada aresta é um. Depois que o fluxo máximo é construído, os caminhos disjuntos nas arestas podem ser encontrados avidamente seguindo os caminhos da origem ao sumidouro.

### Caminhos Disjuntos nos Vértices

Agora vamos considerar outro problema: encontrar o número máximo de **caminhos disjuntos nos vértices** da origem ao sumidouro. Neste problema,

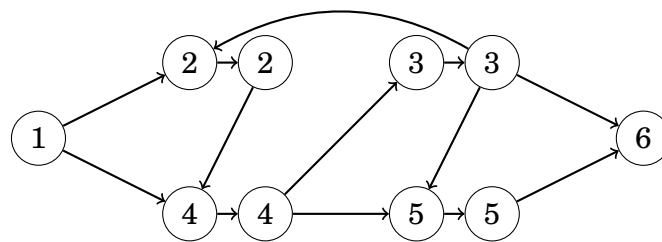
cada vértice, exceto a origem e o sumidouro, pode aparecer em, no máximo, um caminho. O número de caminhos disjuntos nos vértices pode ser menor que o número de caminhos disjuntos nas arestas.

Por exemplo, no grafo anterior, o número máximo de caminhos disjuntos nos vértices é 1:

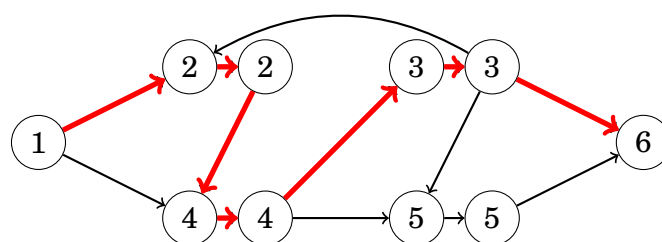


Também podemos reduzir este problema ao problema do fluxo máximo. Como cada vértice pode aparecer em, no máximo, um caminho, temos que limitar o fluxo que passa pelos vértices. Um método padrão para isso é dividir cada vértice em dois vértices, de forma que o primeiro vértice tenha as arestas de entrada do vértice original, o segundo vértice tenha as arestas de saída do vértice original e haja uma nova aresta do primeiro vértice para o segundo vértice.

No nosso exemplo, o grafo se torna o seguinte:



O fluxo máximo para o grafo é o seguinte:



Assim, o número máximo de caminhos disjuntos nos vértices da origem ao sumidouro é 1.

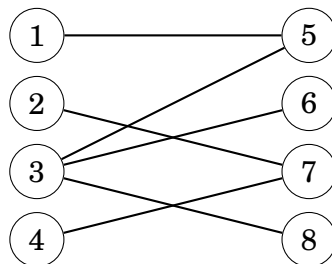
## 20.3 Emparelhamentos Máximos

O problema do **emparelhamento máximo** pede para encontrar um conjunto de tamanho máximo de pares de vértices em um grafo não direcionado, de forma que cada par esteja conectado por uma aresta e cada vértice pertença a, no máximo, um par.

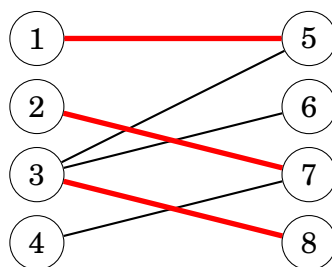
Existem algoritmos polinomiais para encontrar emparelhamentos máximos em grafos gerais [17], mas tais algoritmos são complexos e raramente vistos em competições de programação. No entanto, em grafos bipartidos, o problema do emparelhamento máximo é muito mais fácil de resolver, porque podemos reduzi-lo ao problema do fluxo máximo.

## Encontrando Emparelhamentos Máximos

Os vértices de um grafo bipartido sempre podem ser divididos em dois grupos, de forma que todas as arestas do grafo vão do grupo esquerdo para o grupo direito. Por exemplo, no seguinte grafo bipartido, os grupos são  $\{1, 2, 3, 4\}$  e  $\{5, 6, 7, 8\}$ .

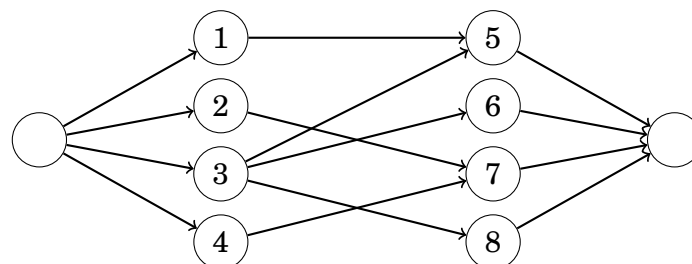


O tamanho de um emparelhamento máximo deste grafo é 3:

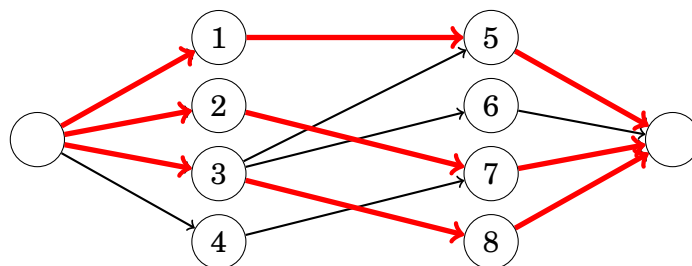


Podemos reduzir o problema do emparelhamento máximo bipartido ao problema do fluxo máximo adicionando dois novos vértices ao grafo: uma origem e um sumidouro. Também adicionamos arestas da origem para cada vértice esquerdo e de cada vértice direito para o sumidouro. Depois disso, o tamanho de um fluxo máximo no grafo é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo no grafo original.

Por exemplo, a redução para o grafo acima é a seguinte:



O fluxo máximo deste grafo é o seguinte:

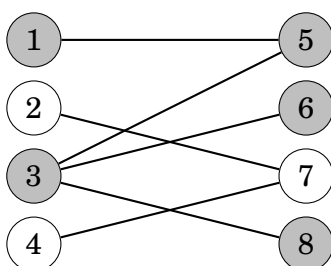


## Teorema de Hall

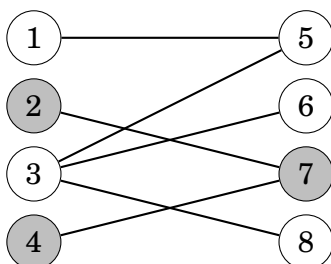
O **Teorema de Hall** pode ser usado para descobrir se um grafo bipartido possui um emparelhamento que contém todos os vértices esquerdos ou direitos. Se o número de vértices esquerdos e direitos for o mesmo, o Teorema de Hall nos diz se é possível construir um **emparelhamento perfeito** que contenha todos os vértices do grafo.

Assuma que queremos encontrar um emparelhamento que contenha todos os vértices esquerdos. Seja  $X$  qualquer conjunto de vértices esquerdos e seja  $f(X)$  o conjunto de seus vizinhos. De acordo com o Teorema de Hall, um emparelhamento que contém todos os vértices esquerdos existe exatamente quando, para cada  $X$ , a condição  $|X| \leq |f(X)|$  é válida.

Vamos estudar o Teorema de Hall no grafo de exemplo. Primeiro, seja  $X = \{1, 3\}$  o que produz  $f(X) = \{5, 6, 8\}$ :



A condição do Teorema de Hall é válida, pois  $|X| = 2$  e  $|f(X)| = 3$ . Em seguida, seja  $X = \{2, 4\}$  o que produz  $f(X) = \{7\}$ :



Neste caso,  $|X| = 2$  e  $|f(X)| = 1$ , então a condição do Teorema de Hall não é válida. Isso significa que não é possível formar um emparelhamento perfeito para o grafo. Este resultado não é surpreendente, porque já sabemos que o emparelhamento máximo do grafo é 3 e não 4.

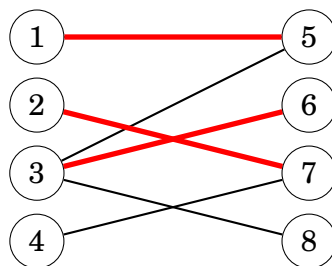
Se a condição do Teorema de Hall não for válida, o conjunto  $X$  fornece uma explicação *por que* não podemos formar tal emparelhamento. Como  $X$  contém

mais vértices do que  $f(X)$ , não há pares para todos os vértices em  $X$ . Por exemplo, no grafo acima, ambos os vértices 2 e 4 deveriam ser conectados ao vértice 7, o que não é possível.

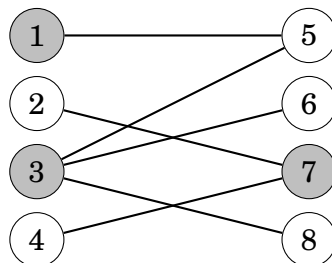
## Teorema de Kőnig

Uma **cobertura mínima por vértices** de um grafo é um conjunto mínimo de vértices, de forma que cada aresta do grafo tenha pelo menos um vértice no conjunto. Em um grafo geral, encontrar uma cobertura mínima por vértices é um problema NP-difícil. No entanto, se o grafo for bipartido, o **Teorema de Kőnig** nos diz que o tamanho de uma cobertura mínima por vértices e o tamanho de um emparelhamento máximo são sempre iguais. Assim, podemos calcular o tamanho de uma cobertura mínima por vértices usando um algoritmo de fluxo máximo.

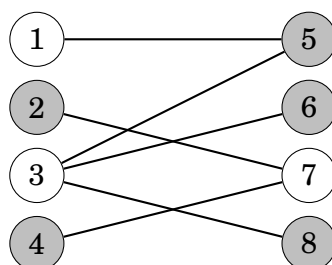
Vamos considerar o seguinte grafo com um emparelhamento máximo de tamanho 3:



Agora, o Teorema de Kőnig nos diz que o tamanho de uma cobertura mínima por vértices também é 3. Tal cobertura pode ser construída da seguinte forma:



Os vértices que *não* pertencem a uma cobertura mínima por vértices formam um **conjunto independente máximo**. Este é o maior conjunto possível de vértices, de forma que não haja dois vértices no conjunto que estejam conectados por uma aresta. Mais uma vez, encontrar um conjunto independente máximo em um grafo geral é um problema NP-difícil, mas, em um grafo bipartido, podemos usar o Teorema de Kőnig para resolver o problema de forma eficiente. No grafo de exemplo, o conjunto independente máximo é o seguinte:



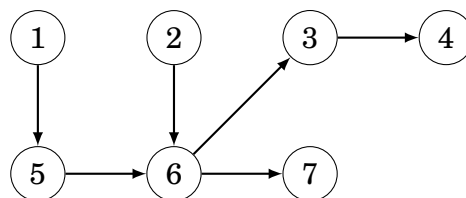


## 20.4 Coberturas por Caminhos

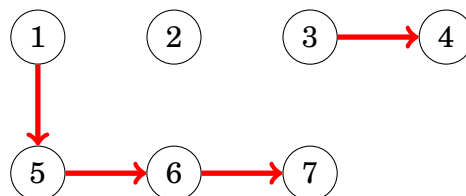
Uma **cobertura por caminhos** é um conjunto de caminhos em um grafo, de forma que cada vértice do grafo pertença a pelo menos um caminho. Acontece que, em grafos direcionados acíclicos, podemos reduzir o problema de encontrar uma cobertura mínima por caminhos ao problema de encontrar um fluxo máximo em outro grafo.

### Cobertura por Caminhos Disjuntos nos Vértices

Em uma **cobertura por caminhos disjuntos nos vértices**, cada vértice pertence a exatamente um caminho. Como exemplo, considere o seguinte grafo:



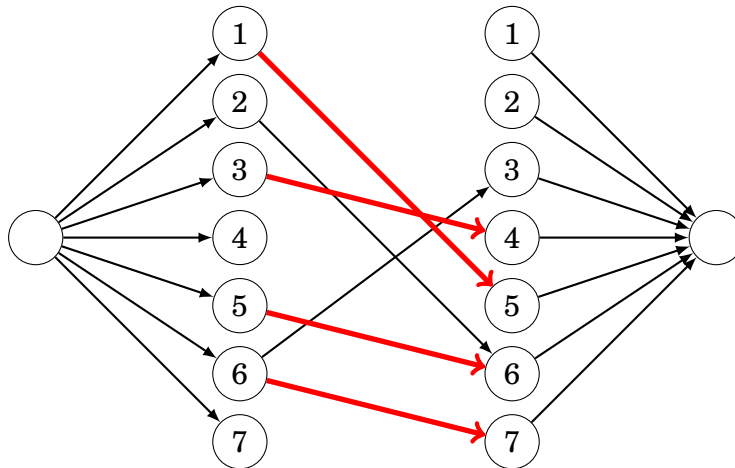
Uma cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices deste grafo consiste em três caminhos. Por exemplo, podemos escolher os seguintes caminhos:



Observe que um dos caminhos contém apenas o vértice 2, então é possível que um caminho não contenha nenhuma aresta.

Podemos encontrar uma cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices construindo um *grafo de emparelhamento*, onde cada vértice do grafo original é representado por dois vértices: um vértice esquerdo e um vértice direito. Há uma aresta de um vértice esquerdo para um vértice direito se houver tal aresta no grafo original. Além disso, o grafo de emparelhamento contém uma origem e um sumidouro, e há arestas da origem para todos os vértices esquerdos e de todos os vértices direitos para o sumidouro.

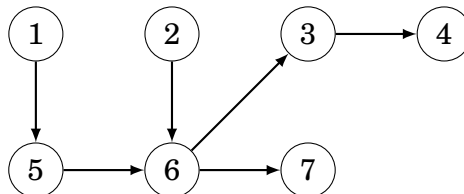
Um emparelhamento máximo no grafo resultante corresponde a uma cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices no grafo original. Por exemplo, o seguinte grafo de emparelhamento para o grafo acima contém um emparelhamento máximo de tamanho 4:



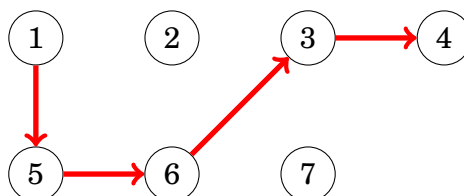
Cada aresta no emparelhamento máximo do grafo de emparelhamento corresponde a uma aresta na cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices do grafo original. Assim, o tamanho da cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices é  $n - c$ , onde  $n$  é o número de vértices no grafo original e  $c$  é o tamanho do emparelhamento máximo.

## Cobertura Geral por Caminhos

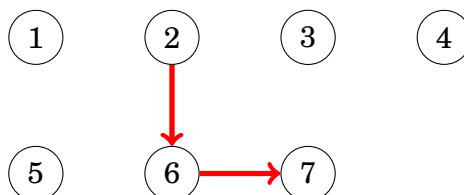
Uma **cobertura geral por caminhos** é uma cobertura por caminhos onde um vértice pode pertencer a mais de um caminho. Uma cobertura geral mínima por caminhos pode ser menor que uma cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices, porque um vértice pode ser usado várias vezes em caminhos. Considere novamente o seguinte grafo:



A cobertura geral mínima por caminhos deste grafo consiste em dois caminhos. Por exemplo, o primeiro caminho pode ser o seguinte:

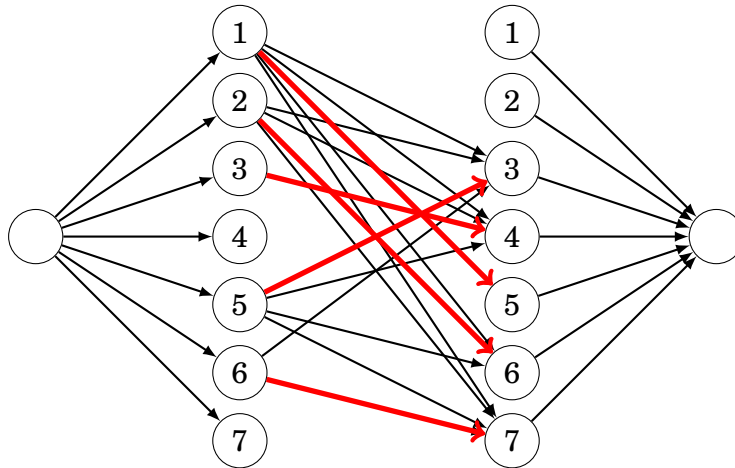


E o segundo caminho pode ser o seguinte:



Uma cobertura geral mínima por caminhos pode ser encontrada quase como uma cobertura mínima por caminhos disjuntos nos vértices. Basta adicionar algumas arestas novas ao grafo de emparelhamento, de forma que haja uma aresta  $a \rightarrow b$  sempre que houver um caminho de  $a$  para  $b$  no grafo original (possivelmente através de várias arestas).

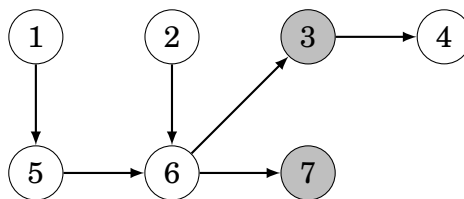
O grafo de emparelhamento para o grafo acima é o seguinte:



## Teorema de Dilworth

Uma **anticadeia** é um conjunto de vértices de um grafo tal que não existe um caminho de qualquer vértice para outro vértice usando as arestas do grafo. O **Teorema de Dilworth** afirma que em um grafo direcionado acíclico, o tamanho de uma cobertura geral mínima por caminhos é igual ao tamanho de uma anticadeia máxima.

Por exemplo, os vértices 3 e 7 formam uma anticadeia no seguinte grafo:



Esta é uma anticadeia máxima, pois não é possível construir qualquer anticadeia que contenha três vértices. Vimos anteriormente que o tamanho de uma cobertura geral mínima por caminhos deste grafo consiste em dois caminhos.



# **Parte III**

## **Tópicos avançados**



# Capítulo 21

## Teoria dos Números

**Teoria dos números** é um ramo da matemática que estuda os números inteiros. A teoria dos números é um campo fascinante, pois muitas questões envolvendo números inteiros são muito difíceis de resolver, mesmo que pareçam simples à primeira vista.

Como exemplo, considere a seguinte equação:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 33$$

É fácil encontrar três números reais  $x$ ,  $y$  e  $z$  que satisfaçam a equação. Por exemplo, podemos escolher

$$\begin{aligned}x &= 3, \\y &= \sqrt[3]{3}, \\z &= \sqrt[3]{3}.\end{aligned}$$

No entanto, é um problema em aberto na teoria dos números se existem três *números inteiros*  $x$ ,  $y$  e  $z$  que satisfaçam a equação [6].

Neste capítulo, vamos nos concentrar em conceitos básicos e algoritmos em teoria dos números. Ao longo do capítulo, assumiremos que todos os números são inteiros, a menos que seja declarado de outra forma.

### 21.1 Primos e Fatores

Um número  $a$  é chamado de **fator** ou **divisor** de um número  $b$  se  $a$  divide  $b$ . Se  $a$  é um fator de  $b$ , escrevemos  $a \mid b$ , e caso contrário, escrevemos  $a \nmid b$ . Por exemplo, os fatores de 24 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24.

Um número  $n > 1$  é um **número primo** se seus únicos fatores positivos são 1 e  $n$ . Por exemplo, 7, 19 e 41 são primos, mas 35 não é primo, porque  $5 \cdot 7 = 35$ . Para cada número  $n > 1$ , existe uma única **fatoração em primos**

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

onde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são primos distintos e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  são números positivos. Por exemplo, a fatoração em primos para 84 é

$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1.$$

A **quantidade de fatores** de um número  $n$  é

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1),$$

porque para cada primo  $p_i$ , existem  $\alpha_i + 1$  maneiras de escolher quantas vezes ele aparece no fator. Por exemplo, a quantidade de fatores de 84 é  $\tau(84) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ . Os fatores são 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 e 84.

A **soma dos fatores** de  $n$  é

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + \dots + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

onde a última fórmula é baseada na fórmula da progressão geométrica. Por exemplo, a soma dos fatores de 84 é

$$\sigma(84) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 7 \cdot 4 \cdot 8 = 224.$$

O **produto dos fatores** de  $n$  é

$$\mu(n) = n^{\tau(n)/2},$$

porque podemos formar  $\tau(n)/2$  pares a partir dos fatores, cada um com produto  $n$ . Por exemplo, os fatores de 84 produzem os pares  $1 \cdot 84$ ,  $2 \cdot 42$ ,  $3 \cdot 28$ , etc., e o produto dos fatores é  $\mu(84) = 84^6 = 351298031616$ .

Um número  $n$  é chamado de **número perfeito** se  $n = \sigma(n) - n$ , ou seja,  $n$  é igual à soma de seus fatores entre 1 e  $n - 1$ . Por exemplo, 28 é um número perfeito, porque  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ .

## Quantidade de Primos

É fácil mostrar que existe um número infinito de primos. Se o número de primos fosse finito, poderíamos construir um conjunto  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  que conteria todos os primos. Por exemplo,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$  e assim por diante. No entanto, usando  $P$ , poderíamos formar um novo primo

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

que é maior que todos os elementos em  $P$ . Isso é uma contradição, e a quantidade de primos tem que ser infinita.

## Densidade de Primos

A densidade de primos significa com que frequência existem primos entre os números. Seja  $\pi(n)$  a quantidade de primos entre 1 e  $n$ . Por exemplo,  $\pi(10) = 4$ , porque existem 4 primos entre 1 e 10: 2, 3, 5 e 7.

É possível mostrar que

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n},$$

o que significa que os primos são bastante frequentes. Por exemplo, a quantidade de primos entre 1 e  $10^6$  é  $\pi(10^6) = 78498$ , e  $10^6 / \ln 10^6 \approx 72382$ .



## Conjecturas

Existem muitas *conjecturas* envolvendo primos. A maioria das pessoas pensa que as conjecturas são verdadeiras, mas ninguém foi capaz de prová-las. Por exemplo, as seguintes conjecturas são famosas:

- **Conjectura de Goldbach:** Todo inteiro par  $n > 2$  pode ser representado como uma soma  $n = a + b$  de forma que  $a$  e  $b$  sejam primos.
- **Conjectura dos primos gêmeos:** Existe um número infinito de pares da forma  $\{p, p + 2\}$ , onde  $p$  e  $p + 2$  são primos.
- **Conjectura de Legendre:** Sempre existe um primo entre os números  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ , onde  $n$  é qualquer inteiro positivo.

## Algoritmos Básicos

Se um número  $n$  não é primo, ele pode ser representado como um produto  $a \cdot b$ , onde  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ , então certamente tem um fator entre 2 e  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Usando essa observação, podemos testar se um número é primo e encontrar a fatoração em primos de um número em tempo  $O(\sqrt{n})$ .

A função a seguir, `primo`, verifica se um determinado número  $n$  é primo. A função tenta dividir  $n$  por todos os números entre 2 e  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ , e se nenhum deles dividir  $n$ , então  $n$  é primo.

```
bool primo(int n) {
    if (n < 2) return false;
    for (int x = 2; x*x <= n; x++) {
        if (n%x == 0) return false;
    }
    return true;
}
```

A função a seguir, `fatores`, constrói um vetor que contém a fatoração em primos de  $n$ . A função divide  $n$  por seus fatores primos e os adiciona ao vetor. O processo termina quando o número restante  $n$  não tem fatores entre 2 e  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Se  $n > 1$ , ele é primo e o último fator.

```
vector<int> fatores(int n) {
    vector<int> f;
    for (int x = 2; x*x <= n; x++) {
        while (n%x == 0) {
            f.push_back(x);
            n /= x;
        }
    }
    if (n > 1) f.push_back(n);
    return f;
}
```

Observe que cada fator primo aparece no vetor tantas vezes quantas vezes divide o número. Por exemplo,  $24 = 2^3 \cdot 3$ , então o resultado da função é  $[2, 2, 2, 3]$ .

## Crivo de Eratóstenes

O **crivo de Eratóstenes** é um algoritmo de pré-processamento que constrói um array usando o qual podemos verificar eficientemente se um determinado número entre  $2 \dots n$  é primo e, se não for, encontrar um fator primo do número.

O algoritmo constrói um array crivo cujas posições  $2, 3, \dots, n$  são usadas. O valor  $\text{crivo}[k] = 0$  significa que  $k$  é primo, e o valor  $\text{crivo}[k] \neq 0$  significa que  $k$  não é primo e um de seus fatores primos é  $\text{crivo}[k]$ .

O algoritmo itera pelos números  $2 \dots n$  um por um. Sempre que um novo primo  $x$  é encontrado, o algoritmo registra que os múltiplos de  $x$  ( $2x, 3x, 4x, \dots$ ) não são primos, porque o número  $x$  os divide.

Por exemplo, se  $n = 20$ , o array é o seguinte:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	2	0	3	0	2	3	5	0	3	0	7	5	2	0	3	0	5

O código a seguir implementa o crivo de Eratóstenes. O código assume que cada elemento de crivo é inicialmente zero.

```
for (int x = 2; x <= n; x++) {
    if (crivo[x]) continue;
    for (int u = 2*x; u <= n; u += x) {
        crivo[u] = x;
    }
}
```

O loop interno do algoritmo é executado  $n/x$  vezes para cada valor de  $x$ . Assim, um limite superior para o tempo de execução do algoritmo é a soma harmônica

$$\sum_{x=2}^n n/x = n/2 + n/3 + n/4 + \dots + n/n = O(n \log n).$$

Na verdade, o algoritmo é mais eficiente, porque o loop interno será executado apenas se o número  $x$  for primo. Pode-se mostrar que o tempo de execução do algoritmo é apenas  $O(n \log \log n)$ , uma complexidade muito próxima de  $O(n)$ .

## Algoritmo de Euclides

O **máximo divisor comum** de números  $a$  e  $b$ ,  $\text{mdc}(a, b)$ , é o maior número que divide  $a$  e  $b$ , e o **mínimo múltiplo comum** de  $a$  e  $b$ ,  $\text{mmc}(a, b)$ , é o menor número que é divisível por  $a$  e  $b$ . Por exemplo,  $\text{mdc}(24, 36) = 12$  e  $\text{mmc}(24, 36) = 72$ .

O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum estão conectados da seguinte forma:

$$\text{mmc}(a, b) = \frac{ab}{\text{mdc}(a, b)}$$

O **algoritmo de Euclides**<sup>1</sup> fornece uma maneira eficiente de encontrar o máximo divisor comum de dois números. O algoritmo é baseado na seguinte fórmula:

$$\text{mdc}(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ \text{mdc}(b, a \bmod b) & b \neq 0 \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\text{mdc}(24, 36) = \text{mdc}(36, 24) = \text{mdc}(24, 12) = \text{mdc}(12, 0) = 12.$$

O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

```
int mdc(int a, int b) {
    if (b == 0) return a;
    return mdc(b, a%b);
}
```

Pode-se mostrar que o algoritmo de Euclides funciona em tempo  $O(\log n)$ , onde  $n = \min(a, b)$ . O pior caso para o algoritmo é o caso em que  $a$  e  $b$  são números de Fibonacci consecutivos. Por exemplo,

$$\text{mdc}(13, 8) = \text{mdc}(8, 5) = \text{mdc}(5, 3) = \text{mdc}(3, 2) = \text{mdc}(2, 1) = \text{mdc}(1, 0) = 1.$$

## Função totiente de Euler

Os números  $a$  e  $b$  são **coprimos** se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . A **função totiente de Euler**  $\varphi(n)$  fornece a quantidade de números coprimos a  $n$  entre 1 e  $n$ . Por exemplo,  $\varphi(12) = 4$ , porque 1, 5, 7 e 11 são coprimos a 12.

O valor de  $\varphi(n)$  pode ser calculado a partir da fatoração em primos de  $n$  usando a fórmula

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1).$$

Por exemplo,  $\varphi(12) = 2^1 \cdot (2-1) \cdot 3^0 \cdot (3-1) = 4$ . Observe que  $\varphi(n) = n-1$  se  $n$  é primo.

## 21.2 Aritmética Modular

Na **aritmética modular**, o conjunto de números é limitado de forma que apenas os números  $0, 1, 2, \dots, m-1$  são usados, onde  $m$  é uma constante. Cada número  $x$  é representado pelo número  $x \bmod m$ : o resto após dividir  $x$  por  $m$ . Por exemplo, se  $m = 17$ , então 75 é representado por  $75 \bmod 17 = 7$ .

<sup>1</sup>Euclides foi um matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. Este é talvez o primeiro algoritmo conhecido na história.

Muitas vezes, podemos pegar os restos antes de fazer os cálculos. Em particular, as seguintes fórmulas são válidas:

$$\begin{aligned}(x + y) \bmod m &= (x \bmod m + y \bmod m) \bmod m \\(x - y) \bmod m &= (x \bmod m - y \bmod m) \bmod m \\(x \cdot y) \bmod m &= (x \bmod m \cdot y \bmod m) \bmod m \\x^n \bmod m &= (x \bmod m)^n \bmod m\end{aligned}$$

## Exponenciação Modular

Muitas vezes, é necessário calcular eficientemente o valor de  $x^n \bmod m$ . Isso pode ser feito em tempo  $O(\log n)$  usando a seguinte recursão:

$$x^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x^{n/2} \cdot x^{n/2} & n \text{ é par} \\ x^{n-1} \cdot x & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

É importante que, no caso de um  $n$  par, o valor de  $x^{n/2}$  seja calculado apenas uma vez. Isso garante que a complexidade de tempo do algoritmo seja  $O(\log n)$ , porque  $n$  é sempre dividido pela metade quando é par.

A função a seguir calcula o valor de  $x^n \bmod m$ :

```
int modpow(int x, int n, int m) {
    if (n == 0) return 1%m;
    long long u = modpow(x, n/2, m);
    u = (u*u)%m;
    if (n%2 == 1) u = (u*x)%m;
    return u;
}
```

## Teorema de Fermat e Teorema de Euler

O **Teorema de Fermat** afirma que

$$x^{m-1} \bmod m = 1$$

quando  $m$  é primo e  $x$  e  $m$  são coprimos. Isso também resulta em

$$x^k \bmod m = x^{k \bmod (m-1)} \bmod m.$$

De forma mais geral, o **Teorema de Euler** afirma que

$$x^{\varphi(m)} \bmod m = 1$$

quando  $x$  e  $m$  são coprimos. O Teorema de Fermat segue do Teorema de Euler, porque se  $m$  é primo, então  $\varphi(m) = m - 1$ .

## Inverso Modular

O inverso de  $x$  módulo  $m$  é um número  $x^{-1}$  tal que

$$xx^{-1} \bmod m = 1.$$

Por exemplo, se  $x = 6$  e  $m = 17$ , então  $x^{-1} = 3$ , porque  $6 \cdot 3 \bmod 17 = 1$ .

Usando inversos modulares, podemos dividir números módulo  $m$ , porque a divisão por  $x$  corresponde à multiplicação por  $x^{-1}$ . Por exemplo, para avaliar o valor de  $36/6 \bmod 17$ , podemos usar a fórmula  $2 \cdot 3 \bmod 17$ , porque  $36 \bmod 17 = 2$  e  $6^{-1} \bmod 17 = 3$ .

No entanto, um inverso modular nem sempre existe. Por exemplo, se  $x = 2$  e  $m = 4$ , a equação

$$xx^{-1} \bmod m = 1$$

não pode ser resolvida, porque todos os múltiplos de 2 são pares e o resto nunca pode ser 1 quando  $m = 4$ . Acontece que o valor de  $x^{-1} \bmod m$  pode ser calculado exatamente quando  $x$  e  $m$  são coprimos.

Se um inverso modular existe, ele pode ser calculado usando a fórmula

$$x^{-1} = x^{\varphi(m)-1}.$$

Se  $m$  é primo, a fórmula se torna

$$x^{-1} = x^{m-2}.$$

Por exemplo,

$$6^{-1} \bmod 17 = 6^{17-2} \bmod 17 = 3.$$

Esta fórmula nos permite calcular eficientemente inversos modulares usando o algoritmo de exponenciação modular. A fórmula pode ser derivada usando o Teorema de Euler. Primeiro, o inverso modular deve satisfazer a seguinte equação:

$$xx^{-1} \bmod m = 1.$$

Por outro lado, de acordo com o Teorema de Euler,

$$x^{\varphi(m)} \bmod m = xx^{\varphi(m)-1} \bmod m = 1,$$

então os números  $x^{-1}$  e  $x^{\varphi(m)-1}$  são iguais.

## Aritmética de Computador

Na programação, inteiros sem sinal são representados módulo  $2^k$ , onde  $k$  é o número de bits do tipo de dados. Uma consequência usual disso é que um número se repete se se tornar muito grande.

Por exemplo, em C++, números do tipo `unsigned int` são representados módulo  $2^{32}$ . O código a seguir declara uma variável `unsigned int` cujo valor é 123456789. Depois disso, o valor será multiplicado por ele mesmo, e o resultado é  $123456789^2 \bmod 2^{32} = 2537071545$ .

```
unsigned int x = 123456789;
cout << x*x << "\n"; // 2537071545
```

## 21.3 Resolvendo Equações

### Equações Diofantinas

Uma **equação diofantina** é uma equação da forma

$$ax + by = c,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes e os valores de  $x$  e  $y$  devem ser encontrados. Cada número na equação deve ser um inteiro. Por exemplo, uma solução para a equação  $5x + 2y = 11$  é  $x = 3$  e  $y = -2$ .

Podemos resolver eficientemente uma equação diofantina usando o algoritmo de Euclides. Acontece que podemos estender o algoritmo de Euclides para que ele encontre números  $x$  e  $y$  que satisfaçam a seguinte equação:

$$ax + by = \text{mdc}(a, b)$$

Uma equação diofantina pode ser resolvida se  $c$  for divisível por  $\text{mdc}(a, b)$ , caso contrário, não pode ser resolvida.

Como exemplo, vamos encontrar números  $x$  e  $y$  que satisfaçam a seguinte equação:

$$39x + 15y = 12$$

A equação pode ser resolvida porque  $\text{mdc}(39, 15) = 3$  e  $3 \mid 12$ . Quando o algoritmo de Euclides calcula o máximo divisor comum de 39 e 15, ele produz a seguinte sequência de chamadas de função:

$$\text{mdc}(39, 15) = \text{mdc}(15, 9) = \text{mdc}(9, 6) = \text{mdc}(6, 3) = \text{mdc}(3, 0) = 3$$

Isso corresponde às seguintes equações:

$$\begin{aligned} 39 - 2 \cdot 15 &= 9 \\ 15 - 1 \cdot 9 &= 6 \\ 9 - 1 \cdot 6 &= 3 \end{aligned}$$

Usando essas equações, podemos derivar

$$39 \cdot 2 + 15 \cdot (-5) = 3$$

e multiplicando isso por 4, o resultado é

$$39 \cdot 8 + 15 \cdot (-20) = 12,$$

então uma solução para a equação é  $x = 8$  e  $y = -20$ .

Uma solução para uma equação diofantina não é única, porque podemos formar um número infinito de soluções se conhecermos uma solução. Se um par  $(x, y)$  é uma solução, então todos os pares

$$\left(x + \frac{kb}{\text{mdc}(a, b)}, y - \frac{ka}{\text{mdc}(a, b)}\right)$$

também são soluções, onde  $k$  é qualquer inteiro.

## Teorema Chinês do Resto

O **Teorema Chinês do Resto** resolve um grupo de equações da forma

$$\begin{aligned}x &= a_1 \bmod m_1 \\x &= a_2 \bmod m_2 \\&\dots \\x &= a_n \bmod m_n\end{aligned}$$

onde todos os pares de  $m_1, m_2, \dots, m_n$  são coprimos.

Seja  $x_m^{-1}$  o inverso de  $x$  módulo  $m$ , e

$$X_k = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{m_k}.$$

Usando esta notação, uma solução para as equações é

$$x = a_1 X_1 X_{1m_1}^{-1} + a_2 X_2 X_{2m_2}^{-1} + \cdots + a_n X_n X_{nm_n}^{-1}.$$

Nesta solução, para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$a_k X_k X_{km_k}^{-1} \bmod m_k = a_k,$$

porque

$$X_k X_{km_k}^{-1} \bmod m_k = 1.$$

Como todos os outros termos na soma são divisíveis por  $m_k$ , eles não têm efeito sobre o resto, e  $x \bmod m_k = a_k$ .

Por exemplo, uma solução para

$$\begin{aligned}x &= 3 \bmod 5 \\x &= 4 \bmod 7 \\x &= 2 \bmod 3\end{aligned}$$

é

$$3 \cdot 21 \cdot 1 + 4 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 35 \cdot 2 = 263.$$

Depois de encontrar uma solução  $x$ , podemos criar um número infinito de outras soluções, porque todos os números da forma

$$x + m_1 m_2 \cdots m_n$$

são soluções.

## 21.4 Outros Resultados

### Teorema de Lagrange

O **Teorema de Lagrange** afirma que todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados, ou seja,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Por exemplo, o número 123 pode ser representado como a soma  $8^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2$ .

## Teorema de Zeckendorf

O **Teorema de Zeckendorf** afirma que todo inteiro positivo tem uma representação única como uma soma de números de Fibonacci, de modo que não haja dois números iguais ou números de Fibonacci consecutivos. Por exemplo, o número 74 pode ser representado como a soma  $55 + 13 + 5 + 1$ .

## Ternas Pitagóricas

Uma **terna pitagórica** é uma tripla  $(a, b, c)$  que satisfaz o Teorema de Pitágoras  $a^2 + b^2 = c^2$ , o que significa que existe um triângulo retângulo com lados de comprimento  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Por exemplo,  $(3, 4, 5)$  é uma terna pitagórica.

Se  $(a, b, c)$  é uma terna pitagórica, todas as triplas da forma  $(ka, kb, kc)$  também são ternas pitagóricas, onde  $k > 1$ . Uma terna pitagórica é *primitiva* se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são coprimos, e todas as ternas pitagóricas podem ser construídas a partir de ternas primitivas usando um multiplicador  $k$ .

A **fórmula de Euclides** pode ser usada para produzir todas as ternas pitagóricas primitivas. Cada tripla desse tipo tem a forma

$$(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2),$$

onde  $0 < m < n$ ,  $n$  e  $m$  são coprimos e pelo menos um de  $n$  e  $m$  é par. Por exemplo, quando  $m = 1$  e  $n = 2$ , a fórmula produz a menor terna pitagórica

$$(2^2 - 1^2, 2 \cdot 2 \cdot 1, 2^2 + 1^2) = (3, 4, 5).$$

## Teorema de Wilson

O **Teorema de Wilson** afirma que um número  $n$  é primo exatamente quando

$$(n - 1)! \bmod n = n - 1.$$

Por exemplo, o número 11 é primo, porque

$$10! \bmod 11 = 10,$$

e o número 12 não é primo, porque

$$11! \bmod 12 = 0 \neq 11.$$

Portanto, o Teorema de Wilson pode ser usado para descobrir se um número é primo. No entanto, na prática, o teorema não pode ser aplicado a grandes valores de  $n$ , porque é difícil calcular valores de  $(n - 1)!$  quando  $n$  é grande.



# Capítulo 22

## Combinatória

A **combinatória** estuda métodos para contar combinações de objetos. Normalmente, o objetivo é encontrar uma maneira de contar as combinações de forma eficiente, sem gerar cada combinação separadamente.

Como exemplo, considere o problema de contar o número de maneiras de representar um inteiro  $n$  como uma soma de inteiros positivos. Por exemplo, existem 8 representações para 4:

- $1 + 1 + 1 + 1$
- $1 + 1 + 2$
- $1 + 2 + 1$
- $2 + 1 + 1$
- $2 + 2$
- $3 + 1$
- $1 + 3$
- $4$

Um problema combinatório pode frequentemente ser resolvido usando uma função recursiva. Nesse problema, podemos definir uma função  $f(n)$  que fornece o número de representações para  $n$ . Por exemplo,  $f(4) = 8$ , de acordo com o exemplo acima. Os valores da função podem ser calculados recursivamente da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

O caso base é  $f(0) = 1$ , porque a soma vazia representa o número 0. Então, se  $n > 0$ , consideramos todas as maneiras de escolher o primeiro número da soma. Se o primeiro número for  $k$ , existem  $f(n-k)$  representações para a parte restante da soma. Assim, calculamos a soma de todos os valores da forma  $f(n-k)$ , onde  $k < n$ .

Os primeiros valores para a função são:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 4 \\ f(4) &= 8 \end{aligned}$$

Às vezes, uma fórmula recursiva pode ser substituída por uma fórmula fechada. Nesse problema,

$$f(n) = 2^{n-1},$$

que se baseia no fato de que existem  $n - 1$  possíveis posições para os sinais de  $+$  na soma, e podemos escolher qualquer subconjunto deles.

## 22.1 Coeficientes Binomiais

O **coeficiente binomial**  $\binom{n}{k}$  é igual ao número de maneiras pelas quais podemos escolher um subconjunto de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos. Por exemplo,  $\binom{5}{3} = 10$ , porque o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  possui 10 subconjuntos de 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$$

### Fórmula 1

Os coeficientes binomiais podem ser calculados recursivamente da seguinte forma:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A ideia é fixar um elemento  $x$  no conjunto. Se  $x$  está incluído no subconjunto, temos que escolher  $k - 1$  elementos de  $n - 1$  elementos, e, se  $x$  não estiver incluído no subconjunto, temos que escolher  $k$  elementos de  $n - 1$  elementos.

Os casos base para a recursão são

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

porque há sempre exatamente uma maneira de construir um subconjunto vazio e um subconjunto que contém todos os elementos.

### Fórmula 2

Outra maneira de calcular os coeficientes binomiais é a seguinte:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Existem  $n!$  permutações de  $n$  elementos. Percorremos todas as permutações e sempre incluímos os primeiros  $k$  elementos da permutação no subconjunto. Como a ordem dos elementos dentro e fora do subconjunto não importa, o resultado é dividido por  $k!$  e  $(n - k)!$

## Propriedades

Para coeficientes binomiais,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

porque, na verdade, dividimos um conjunto de  $n$  elementos em dois subconjuntos: o primeiro contém  $k$  elementos, e o segundo contém  $n - k$  elementos.

A soma dos coeficientes binomiais é:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

A razão para o nome "coeficiente binomial" pode ser vista quando o binômio  $(a + b)$  é elevado à  $n$ -ésima potência:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.$$

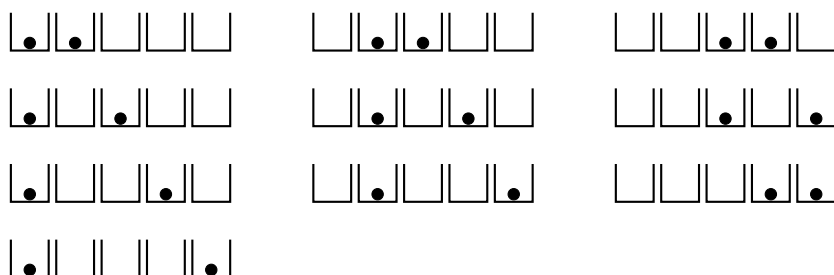
Os coeficientes binomiais também aparecem no **Triângulo de Pascal**, onde cada valor é igual à soma dos dois valores acima:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

## Caixas e Bolas

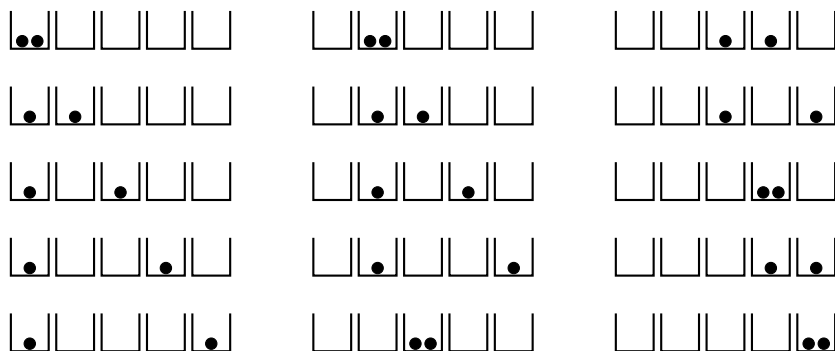
"Caixas e bolas" é um modelo útil, no qual contamos as maneiras de colocar  $k$  bolas em  $n$  caixas. Vamos considerar três cenários:

*Cenário 1:* Cada caixa pode conter no máximo uma bola. Por exemplo, quando  $n = 5$  e  $k = 2$ , existem 10 soluções:



Neste cenário, a resposta é diretamente o coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$ .

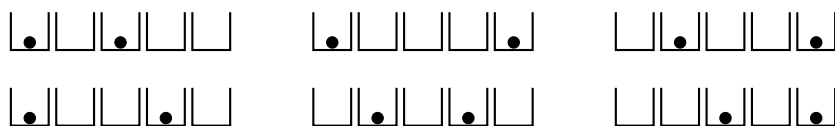
*Cenário 2:* Uma caixa pode conter várias bolas. Por exemplo, quando  $n = 5$  e  $k = 2$ , existem 15 soluções:



O processo de colocação das bolas nas caixas pode ser representado como uma string que consiste nos símbolos "o" e "→". Inicialmente, suponha que estamos na caixa mais à esquerda. O símbolo "o" significa que colocamos uma bola na caixa atual, e o símbolo "→" significa que nos movemos para a próxima caixa à direita.

Usando essa notação, cada solução é uma string que contém  $k$  vezes o símbolo "o" e  $n - 1$  vezes o símbolo "→". Por exemplo, a solução superior direita na figura acima corresponde à string "→ → o → o →". Assim, o número de soluções é  $\binom{k+n-1}{k}$ .

**Cenário 3:** Cada caixa pode conter, no máximo, uma bola, e, além disso, duas caixas adjacentes não podem conter uma bola ao mesmo tempo. Por exemplo, quando  $n = 5$  e  $k = 2$ , existem 6 soluções:



Neste cenário, podemos supor que  $k$  bolas são inicialmente colocadas em caixas, e há uma caixa vazia entre cada duas caixas adjacentes. A tarefa restante é escolher as posições para as caixas vazias restantes. Existem  $n - 2k + 1$  caixas desse tipo e  $k + 1$  posições para elas. Assim, usando a fórmula do cenário 2, o número de soluções é  $\binom{n-k+1}{n-2k+1}$ .

## Coeficientes multinomiais

### O coeficiente multinomial

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!},$$

é igual ao número de maneiras pelas quais podemos dividir  $n$  elementos em subconjuntos de tamanhos  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , onde  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Os coeficientes multinomiais podem ser vistos como uma generalização dos coeficientes binomiais; se  $m = 2$ , a fórmula acima corresponde à fórmula do coeficiente binomial.

## 22.2 Números de Catalan

O **número de Catalan**  $C_n$  é igual ao número de expressões válidas com parênteses que consistem em  $n$  parênteses esquerdos e  $n$  parênteses direitos.

Por exemplo,  $C_3 = 5$ , pois podemos construir as seguintes expressões com parênteses usando três parênteses esquerdos e direitos:

- $()()()$
- $((()))$
- $()(())$
- $((()))$
- $((()()))$

## Expressões com parênteses

O que é exatamente uma *expressão válida com parênteses*? As seguintes regras definem precisamente todas as expressões válidas com parênteses:

- Uma expressão com parênteses vazia é válida.
- Se uma expressão  $A$  é válida, então a expressão  $(A)$  também é válida.
- Se as expressões  $A$  e  $B$  são válidas, então a expressão  $AB$  também é válida.

Outra forma de caracterizar as expressões válidas com parênteses é que, se escolhermos qualquer prefixo de tal expressão, ele deve conter pelo menos tantos parênteses esquerdos quanto parênteses direitos. Além disso, a expressão completa deve conter um número igual de parênteses esquerdos e direitos.

## Fórmula 1

Os números de Catalan podem ser calculados usando a fórmula

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}.$$

A soma percorre as maneiras de dividir a expressão em duas partes, de modo que ambas as partes sejam expressões válidas, e a primeira parte seja a mais curta possível, mas não vazia. Para qualquer  $i$ , a primeira parte contém  $i + 1$  pares de parênteses, e o número de expressões é o produto dos seguintes valores:

- $C_i$ : o número de maneiras de construir uma expressão usando os parênteses da primeira parte, sem contar os parênteses mais externos
- $C_{n-i-1}$ : o número de maneiras de construir uma expressão usando os parênteses da segunda parte

O caso base é  $C_0 = 1$ , porque podemos construir uma expressão com parênteses vazia usando zero pares de parênteses.

## Fórmula 2

Os números de Catalan também podem ser calculados usando coeficientes binomiais:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

A fórmula pode ser explicada da seguinte forma:

Há um total de  $\binom{2n}{n}$  maneiras de construir uma expressão com parênteses (não necessariamente válida) que contém  $n$  parênteses esquerdos e  $n$  parênteses direitos. Vamos calcular o número de tais expressões que *não* são válidas.

Se uma expressão com parênteses não é válida, ela deve conter um prefixo no qual o número de parênteses direitos excede o número de parênteses esquerdos. A ideia é inverter cada parêntese que pertence a tal prefixo. Por exemplo, a expressão  $()()()()$  contém um prefixo  $()$ , e, depois de inverter o prefixo, a expressão se torna  $)(((()$ .

A expressão resultante consiste em  $n+1$  parênteses esquerdos e  $n-1$  parênteses direitos. O número de tais expressões é  $\binom{2n}{n+1}$ , que é igual ao número de expressões com parênteses não válidas. Assim, o número de expressões com parênteses válidas pode ser calculado usando a fórmula

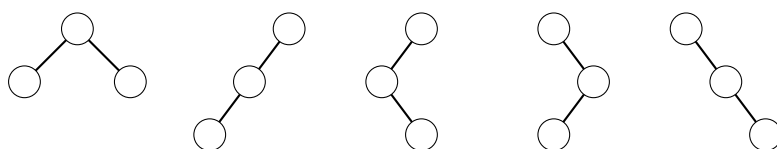
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

## Contando árvores

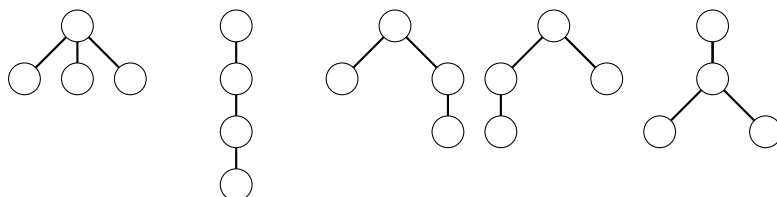
Os números de Catalan também estão relacionados a árvores:

- Existem  $C_n$  árvores binárias de  $n$  vértices.
- Existem  $C_{n-1}$  árvores enraizadas de  $n$  vértices.

Por exemplo, para  $C_3 = 5$ , as árvores binárias são



e as árvores enraizadas são:

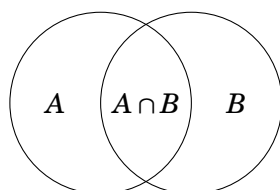


## 22.3 Inclusão-Exclusão

A **inclusão-exclusão** é uma técnica que pode ser usada para contar o tamanho de uma união de conjuntos quando os tamanhos das interseções são conhecidos e vice-versa. Um exemplo simples da técnica é a fórmula

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

onde  $A$  e  $B$  são conjuntos e  $|X|$  denota o tamanho de  $X$ . A fórmula pode ser ilustrada da seguinte forma:

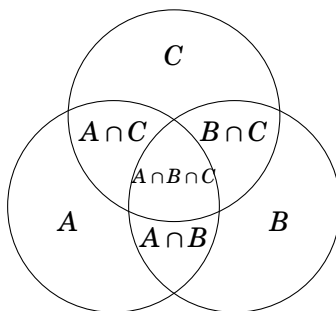


Nosso objetivo é calcular o tamanho da união  $A \cup B$ , que corresponde à área da região que pertence a pelo menos um círculo. A imagem mostra que podemos calcular a área de  $A \cup B$  primeiro somando as áreas de  $A$  e  $B$  e, em seguida, subtraindo a área de  $A \cap B$ .

A mesma ideia pode ser aplicada quando o número de conjuntos é maior. Quando há três conjuntos, a fórmula de inclusão-exclusão é

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

e a imagem correspondente é



No caso geral, o tamanho da união  $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$  pode ser calculado percorrendo todas as interseções possíveis que contenham alguns dos conjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Se a interseção contiver um número ímpar de conjuntos, seu tamanho é adicionado à resposta e, caso contrário, seu tamanho é subtraído da resposta.

Observe que existem fórmulas semelhantes para calcular o tamanho de uma interseção a partir dos tamanhos das uniões. Por exemplo,

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

e

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

## Desarranjos

Como exemplo, vamos contar o número de **desarranjos** dos elementos  $1, 2, \dots, n$ , isto é, permutações nas quais nenhum elemento permanece em seu lugar original. Por exemplo, quando  $n = 3$ , existem dois desarranjos:  $(2, 3, 1)$  e  $(3, 1, 2)$ .

Uma abordagem para resolver o problema é usar a inclusão-exclusão. Seja  $X_k$  o conjunto de permutações que contêm o elemento  $k$  na posição  $k$ . Por exemplo, quando  $n = 3$ , os conjuntos são os seguintes:

$$\begin{aligned}X_1 &= \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \\X_2 &= \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\} \\X_3 &= \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}\end{aligned}$$

Usando esses conjuntos, o número de desarranjos é igual a

$$n! - |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n|,$$

então, basta calcular o tamanho da união. Usando inclusão-exclusão, isso se reduz a calcular tamanhos de interseções, o que pode ser feito de forma eficiente. Por exemplo, quando  $n = 3$ , o tamanho de  $|X_1 \cup X_2 \cup X_3|$  é

$$\begin{aligned}& |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3| \\&= 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 \\&= 4,\end{aligned}$$

então, o número de soluções é  $3! - 4 = 2$ .

Verifica-se que o problema também pode ser resolvido sem usar inclusão-exclusão. Seja  $f(n)$  o número de desarranjos para  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Podemos usar a seguinte fórmula recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ (n-1)(f(n-2) + f(n-1)) & n > 2 \end{cases}$$

A fórmula pode ser derivada considerando as possibilidades de como o elemento 1 muda no desarranjo. Existem  $n - 1$  maneiras de escolher um elemento  $x$  que substitui o elemento 1. Em cada escolha, existem duas opções:

*Opção 1:* Também substituímos o elemento  $x$  pelo elemento 1. Depois disso, a tarefa restante é construir um desarranjo de  $n - 2$  elementos.

*Opção 2:* Substituímos o elemento  $x$  por algum outro elemento diferente de 1. Agora temos que construir um desarranjo de  $n - 1$  elementos, porque não podemos substituir o elemento  $x$  pelo elemento 1, e todos os outros elementos devem ser alterados.

## 22.4 Lema de Burnside

O **Lema de Burnside** pode ser usado para contar o número de combinações, de modo que apenas um representante seja contado para cada grupo de combinações

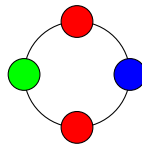


simétricas. O Lema de Burnside afirma que o número de combinações é

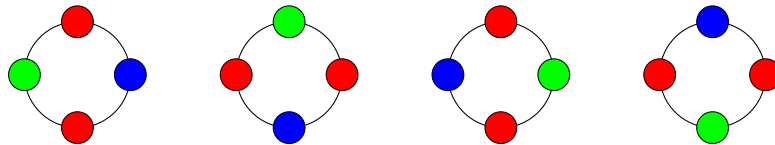
$$\sum_{k=1}^n \frac{c(k)}{n},$$

onde existem  $n$  maneiras de mudar a posição de uma combinação, e existem  $c(k)$  combinações que permanecem inalteradas quando a  $k$ -ésima maneira é aplicada.

Como exemplo, vamos calcular o número de colares de  $n$  pérolas, onde cada pérola tem  $m$  cores possíveis. Dois colares são simétricos se forem semelhantes após girá-los. Por exemplo, o colar



tem os seguintes colares simétricos:



Existem  $n$  maneiras de mudar a posição de um colar, pois podemos girá-lo  $0, 1, \dots, n-1$  passos no sentido horário. Se o número de passos for 0, todos os  $m^n$  colares permanecem iguais, e, se o número de passos for 1, apenas os  $m$  colares em que cada pérola tem a mesma cor permanecem iguais.

De forma mais geral, quando o número de passos é  $k$ , um total de

$$m^{\text{mdc}(k,n)}$$

colares permanecem iguais, onde  $\text{mdc}(k, n)$  é o maior divisor comum de  $k$  e  $n$ . A razão para isso é que blocos de pérolas de tamanho  $\text{mdc}(k, n)$  serão trocados entre si. Assim, de acordo com o Lema de Burnside, o número de colares é

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{m^{\text{mdc}(i,n)}}{n}.$$

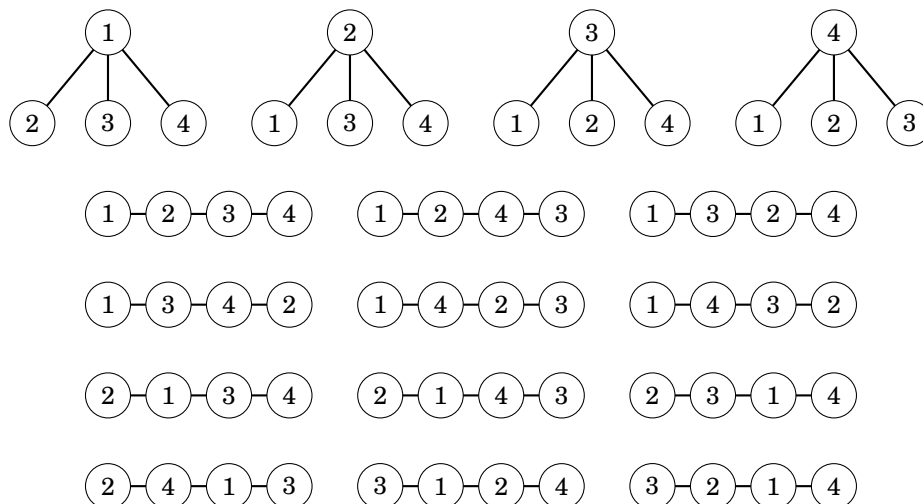
Por exemplo, o número de colares de comprimento 4 com 3 cores é

$$\frac{3^4 + 3 + 3^2 + 3}{4} = 24.$$

## 22.5 Fórmula de Cayley

A **Fórmula de Cayley** afirma que existem  $n^{n-2}$  árvores rotuladas que contêm  $n$  vértices. Os vértices são rotulados como  $1, 2, \dots, n$ , e duas árvores são diferentes se sua estrutura ou rotulagem for diferente.

Por exemplo, quando  $n = 4$ , o número de árvores rotuladas é  $4^{4-2} = 16$ :

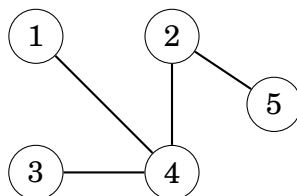


A seguir, veremos como a Fórmula de Cayley pode ser derivada usando os códigos de Prüfer.

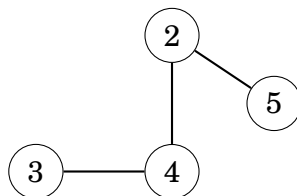
## Código de Prüfer

Um **Código de Prüfer** é uma sequência de  $n - 2$  números que descreve uma árvore rotulada. O código é construído seguindo um processo que remove  $n - 2$  folhas da árvore. A cada passo, a folha com o menor rótulo é removida, e o rótulo de seu único vizinho é adicionado ao código.

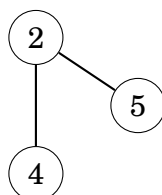
Por exemplo, vamos calcular o Código de Prüfer do seguinte grafo:



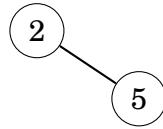
Primeiro, removemos o vértice 1 e adicionamos o vértice 4 ao código:



Em seguida, removemos o vértice 3 e adicionamos o vértice 4 ao código:



Finalmente, removemos o vértice 4 e adicionamos o vértice 2 ao código:



Assim, o Código de Prüfer do grafo é  $[4, 4, 2]$ .

Podemos construir um Código de Prüfer para qualquer árvore e, mais importante, a árvore original pode ser reconstruída a partir de um Código de Prüfer. Portanto, o número de árvores rotuladas de  $n$  vértices é igual a  $n^{n-2}$ , o número de Códigos de Prüfer de tamanho  $n$ .



# Capítulo 23

## Matrizes

Uma **matriz** é um conceito matemático que corresponde a um array bidimensional em programação. Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 7 & 4 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 9 & 5 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de tamanho  $3 \times 4$ , isto é, ela possui 3 linhas e 4 colunas. A notação  $[i, j]$  refere-se ao elemento na linha  $i$  e coluna  $j$  em uma matriz. Por exemplo, na matriz acima,  $A[2, 3] = 8$  e  $A[3, 1] = 9$ .

Um caso especial de matriz é um **vetor**, que é uma matriz unidimensional de tamanho  $n \times 1$ . Por exemplo,

$$V = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

é um vetor que contém três elementos.

A **transposta**  $A^T$  de uma matriz  $A$  é obtida quando as linhas e colunas de  $A$  são trocadas, ou seja,  $A^T[i, j] = A[j, i]$ :

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 13 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

Uma matriz é uma **matriz quadrada** se ela tiver o mesmo número de linhas e colunas. Por exemplo, a seguinte matriz é uma matriz quadrada:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 4 \\ 5 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

### 23.1 Operações

A soma  $A + B$  das matrizes  $A$  e  $B$  é definida se as matrizes forem do mesmo tamanho. O resultado é uma matriz onde cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em  $A$  e  $B$ .

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4 & 1+9 & 4+3 \\ 3+8 & 9+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 7 \\ 11 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Multiplicar uma matriz  $A$  por um valor  $x$  significa que cada elemento de  $A$  é multiplicado por  $x$ . Por exemplo,

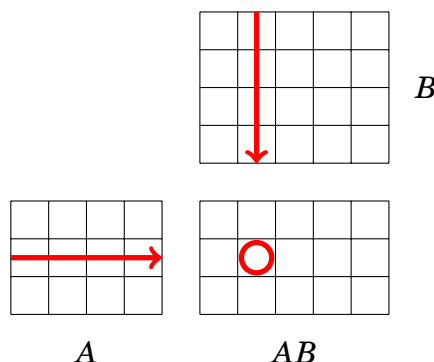
$$2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 9 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 8 \\ 6 & 18 & 4 \end{bmatrix}.$$

## Multiplicação de Matrizes

O produto  $AB$  das matrizes  $A$  e  $B$  é definido se  $A$  for de tamanho  $a \times n$  e  $B$  for de tamanho  $n \times b$ , ou seja, a largura de  $A$  é igual à altura de  $B$ . O resultado é uma matriz de tamanho  $a \times b$  cujos elementos são calculados usando a fórmula

$$AB[i,j] = \sum_{k=1}^n A[i,k] \cdot B[k,j].$$

A ideia é que cada elemento de  $AB$  é uma soma de produtos de elementos de  $A$  e  $B$ , de acordo com a seguinte figura:



Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \\ 3 \cdot 1 + 9 \cdot 2 & 3 \cdot 6 + 9 \cdot 9 \\ 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 8 \cdot 6 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 42 \\ 21 & 99 \\ 20 & 102 \end{bmatrix}.$$

A multiplicação de matrizes é associativa, então  $A(BC) = (AB)C$  é válido, mas não é comutativa, então  $AB = BA$  geralmente não é válido.

Uma **matriz identidade** é uma matriz quadrada onde cada elemento na diagonal é 1 e todos os outros elementos são 0. Por exemplo, a seguinte matriz é a matriz identidade  $3 \times 3$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar uma matriz por uma matriz identidade não a altera. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Usando um algoritmo padrão, podemos calcular o produto de duas matrizes  $n \times n$  em tempo  $O(n^3)$ . Existem também algoritmos mais eficientes para multiplicação de matrizes<sup>1</sup>, mas eles são principalmente de interesse teórico, e tais algoritmos não são necessários em programação competitiva.

## Potência de Matrizes

A potência  $A^k$  de uma matriz  $A$  é definida se  $A$  for uma matriz quadrada. A definição é baseada na multiplicação de matrizes:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ vezes}}$$

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 165 \\ 33 & 114 \end{bmatrix}.$$

Além disso,  $A^0$  é uma matriz identidade. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A^k$  pode ser calculada eficientemente em tempo  $O(n^3 \log k)$  usando o algoritmo do Capítulo 21.2. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^4.$$

## Determinante

O **determinante**  $\det(A)$  de uma matriz  $A$  é definido se  $A$  for uma matriz quadrada. Se  $A$  for de tamanho  $1 \times 1$ , então  $\det(A) = A[1, 1]$ . O determinante de uma matriz maior é calculado recursivamente usando a fórmula

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A[1, j] C[1, j],$$

onde  $C[i, j]$  é o **cofator** de  $A$  em  $[i, j]$ . O cofator é calculado usando a fórmula

$$C[i, j] = (-1)^{i+j} \det(M[i, j]),$$

---

<sup>1</sup>O primeiro algoritmo desse tipo foi o algoritmo de Strassen, publicado em 1969 [63], cuja complexidade de tempo é  $O(n^{2.80735})$ ; o melhor algoritmo atual [27] funciona em tempo  $O(n^{2.37286})$ .

onde  $M[i, j]$  é obtido removendo a linha  $i$  e a coluna  $j$  de  $A$ . Devido ao coeficiente  $(-1)^{i+j}$  no cofator, cada determinante alterna entre positivo e negativo. Por exemplo,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 14$$

and

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) - 4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\right) + 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\right) = 81.$$

O determinante de  $A$  nos diz se existe uma **matriz inversa**  $A^{-1}$ , tal que  $A \cdot A^{-1} = I$ , onde  $I$  é uma matriz identidade. Acontece que  $A^{-1}$  existe exatamente quando  $\det(A) \neq 0$ , e pode ser calculada usando a fórmula

$$A^{-1}[i, j] = \frac{C[j, i]}{\det(A)}.$$

Por exemplo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\frac{1}{81} \begin{bmatrix} -8 & -10 & 21 \\ 22 & -13 & 3 \\ 3 & 24 & -18 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I.$$

## 23.2 Recorrências Lineares

Uma **recorrência linear** é uma função  $f(n)$  cujos valores iniciais são  $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$  e valores maiores são calculados recursivamente usando a fórmula

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \dots + c_k f(n-k),$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  são coeficientes constantes.

A programação dinâmica pode ser usada para calcular qualquer valor de  $f(n)$  em tempo  $O(kn)$ , calculando todos os valores de  $f(0), f(1), \dots, f(n)$  um após o outro. No entanto, se  $k$  for pequeno, é possível calcular  $f(n)$  de forma muito mais eficiente em tempo  $O(k^3 \log n)$ , usando operações com matrizes.

### Números de Fibonacci

Um exemplo simples de uma recorrência linear é a seguinte função que define os números de Fibonacci:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \end{aligned}$$

Neste caso,  $k = 2$  and  $c_1 = c_2 = 1$ .



Para calcular números de Fibonacci de forma eficiente, representamos a fórmula de Fibonacci como uma matriz quadrada  $X$  de tamanho  $2 \times 2$ , para a qual o seguinte é válido:

$$X \cdot \begin{bmatrix} f(i) \\ f(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(i+1) \\ f(i+2) \end{bmatrix}$$

Assim, os valores  $f(i)$  e  $f(i+1)$  são dados como "entrada" para  $X$ , e  $X$  calcula os valores  $f(i+1)$  e  $f(i+2)$  a partir deles. Acontece que tal matriz é

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(5) \\ f(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(6) \\ f(7) \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos calcular  $f(n)$  usando a fórmula

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n+1) \end{bmatrix} = X^n \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O valor de  $X^n$  pode ser calculado em tempo  $O(\log n)$ , então o valor de  $f(n)$  também pode ser calculado em tempo  $O(\log n)$ .

## Caso Geral

Agora, vamos considerar o caso geral em que  $f(n)$  é qualquer recorrência linear. Novamente, nosso objetivo é construir uma matriz  $X$  para a qual

$$X \cdot \begin{bmatrix} f(i) \\ f(i+1) \\ \vdots \\ f(i+k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(i+1) \\ f(i+2) \\ \vdots \\ f(i+k) \end{bmatrix}.$$

Tal matriz é

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}.$$

Nas primeiras  $k-1$  linhas, cada elemento é 0, exceto que um elemento é 1. Essas linhas substituem  $f(i)$  por  $f(i+1)$ ,  $f(i+1)$  por  $f(i+2)$  e assim por diante. A última linha contém os coeficientes da recorrência para calcular o novo valor  $f(i+k)$ .

Agora,  $f(n)$  pode ser calculado em tempo  $O(k^3 \log n)$  usando a fórmula

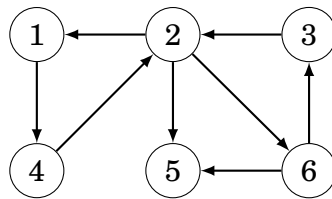
$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n+1) \\ \vdots \\ f(n+k-1) \end{bmatrix} = X^n \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(k-1) \end{bmatrix}.$$

## 23.3 Grafos e Matrizes

### Contando Caminhos

As potências de uma matriz de adjacência de um grafo têm uma propriedade interessante. Quando  $V$  é uma matriz de adjacência de um grafo não ponderado, a matriz  $V^n$  contém os números de caminhos de  $n$  arestas entre os vértices no grafo.

Por exemplo, para o grafo



a matriz de adjacência é

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, por exemplo, a matriz

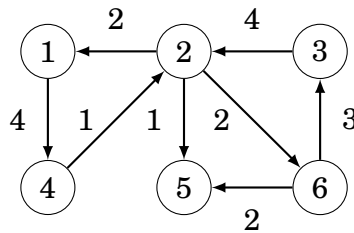
$$V^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

contém os números de caminhos de 4 arestas entre os vértices. Por exemplo,  $V^4[2,5] = 2$ , porque há dois caminhos de 4 arestas do vértice 2 ao vértice 5:  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  e  $2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ .

### Caminhos mais Curtos

Usando uma ideia semelhante em um grafo ponderado, podemos calcular, para cada par de vértices, o comprimento mínimo de um caminho entre eles que contém exatamente  $n$  arestas. Para calcular isso, temos que definir a multiplicação de matrizes de uma nova maneira, para que não calculemos os números de caminhos, mas minimizemos os comprimentos dos caminhos.

Como exemplo, considere o seguinte grafo:



Vamos construir uma matriz de adjacência onde  $\infty$  significa que uma aresta não existe, e os outros valores correspondem aos pesos das arestas. A matriz é

$$V = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \end{bmatrix}.$$

em vez da fórmula

$$AB[i,j] = \sum_{k=1}^n A[i,k] \cdot B[k,j]$$

agora usamos a fórmula

$$AB[i,j] = \min_{k=1}^n A[i,k] + B[k,j]$$

para multiplicação de matrizes, então calculamos um mínimo em vez de uma soma e uma soma de elementos em vez de um produto. Após esta modificação, as potências das matrizes correspondem aos caminhos mais curtos no grafo.

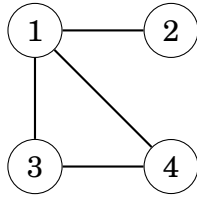
Por exemplo, como

$$V^4 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 10 & 11 & 9 & \infty \\ 9 & \infty & \infty & \infty & 8 & 9 \\ \infty & 11 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 12 & 13 & 11 & \infty \end{bmatrix},$$

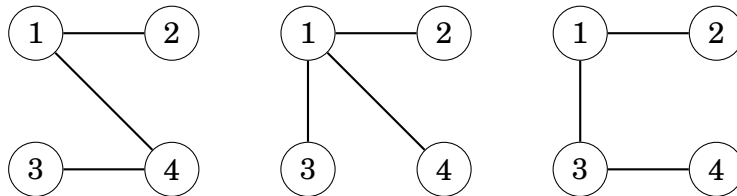
podemos concluir que o comprimento mínimo de um caminho de 4 arestas do vértice 2 ao vértice 5 é 8. Tal caminho é  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ .

## Teorema de Kirchhoff

O **Teorema de Kirchhoff** fornece uma maneira de calcular o número de árvores geradoras de um grafo como o determinante de uma matriz especial. Por exemplo, o grafo



possui três árvores geradoras:



Para calcular o número de árvores geradoras, construímos uma **matriz Laplaciana**  $L$ , onde  $L[i, i]$  é o grau do vértice  $i$  e  $L[i, j] = -1$  se houver uma aresta entre os vértices  $i$  e  $j$  e, caso contrário,  $L[i, j] = 0$ . A matriz Laplaciana para o grafo acima é a seguinte:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar que o número de árvores geradoras é igual ao determinante de uma matriz que é obtida quando removemos qualquer linha e qualquer coluna de  $L$ . Por exemplo, se removermos a primeira linha e coluna, o resultado é

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

O determinante é sempre o mesmo, independentemente de qual linha e coluna removemos de  $L$ .

Observe que a fórmula de Cayley no Capítulo 22.5 é um caso especial do Teorema de Kirchhoff, porque, em um grafo completo de  $n$  vértices,

$$\det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} = n^{n-2}.$$

# Capítulo 24

## Probabilidade

Uma **probabilidade** é um número real entre 0 e 1 que indica quão provável um evento é. Se um evento certamente acontecerá, sua probabilidade é 1, e se um evento for impossível, sua probabilidade é 0. A probabilidade de um evento é denotada por  $P(\cdots)$  onde as três reticências descrevem o evento.

Por exemplo, ao lançar um dado, o resultado é um inteiro entre 1 e 6, e a probabilidade de cada resultado é  $1/6$ . Por exemplo, podemos calcular as seguintes probabilidades:

- $P(\text{"o resultado é 4"}) = 1/6$
- $P(\text{"o resultado não é 6"}) = 5/6$
- $P(\text{"o resultado é par"}) = 1/2$

### 24.1 Cálculo

Para calcular a probabilidade de um evento, podemos usar a combinatória ou simular o processo que gera o evento. Como exemplo, vamos calcular a probabilidade de tirar três cartas com o mesmo valor de um baralho de cartas embaralhado (por exemplo,  $\spadesuit 8$ ,  $\clubsuit 8$  e  $\diamondsuit 8$ ).

#### Método 1

Podemos calcular a probabilidade usando a fórmula

$$\frac{\text{número de resultados desejados}}{\text{número total de resultados}}.$$

Neste problema, os resultados desejados são aqueles em que o valor de cada carta é o mesmo. Existem  $13\binom{4}{3}$  resultados desse tipo, pois existem 13 possibilidades para o valor das cartas e  $\binom{4}{3}$  maneiras de escolher 3 naipes de 4 naipes possíveis.

Existem um total de  $\binom{52}{3}$  resultados, pois escolhemos 3 cartas de 52 cartas. Assim, a probabilidade do evento é

$$\frac{13\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{425}.$$

## Método 2

Outra maneira de calcular a probabilidade é simular o processo que gera o evento. Neste exemplo, tiramos três cartas, então o processo consiste em três etapas. Exigimos que cada etapa do processo seja bem-sucedida.

Tirar a primeira carta certamente será um sucesso, pois não há restrições. A segunda etapa é bem-sucedida com probabilidade  $3/51$ , pois restam 51 cartas e 3 delas têm o mesmo valor que a primeira carta. De forma similar, a terceira etapa é bem-sucedida com probabilidade  $2/50$ .

A probabilidade de todo o processo ser bem-sucedido é

$$1 \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{425}.$$

## 24.2 Eventos

Um evento na teoria da probabilidade pode ser representado como um conjunto

$$A \subset X,$$

onde  $X$  contém todos os resultados possíveis e  $A$  é um subconjunto de resultados. Por exemplo, ao lançar um dado, os resultados são

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Agora, por exemplo, o evento "o resultado é par" corresponde ao conjunto

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Cada resultado  $x$  recebe uma probabilidade  $p(x)$ . Então, a probabilidade  $P(A)$  de um evento  $A$  pode ser calculada como uma soma das probabilidades dos resultados usando a fórmula

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

Por exemplo, ao lançar um dado,  $p(x) = 1/6$  para cada resultado  $x$ , então a probabilidade do evento "o resultado é par" é

$$p(2) + p(4) + p(6) = 1/2.$$

A probabilidade total dos resultados em  $X$  deve ser 1, ou seja,  $P(X) = 1$ .

Como os eventos na teoria da probabilidade são conjuntos, podemos manipulá-los usando operações de conjunto padrão:

- O **complementar**  $\bar{A}$  significa "A não acontece". Por exemplo, ao lançar um dado, o complementar de  $A = \{2, 4, 6\}$  é  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ .
- A **união**  $A \cup B$  significa "A ou B acontecem". Por exemplo, a união de  $A = \{2, 5\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$  é  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ .
- A **interseção**  $A \cap B$  significa "A e B acontecem". Por exemplo, a interseção de  $A = \{2, 5\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$  é  $A \cap B = \{5\}$ .

## Complementar

A probabilidade do complementar  $\bar{A}$  é calculada usando a fórmula

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Às vezes, podemos resolver um problema facilmente usando complementares, resolvendo o problema oposto. Por exemplo, a probabilidade de obter pelo menos um seis ao lançar um dado dez vezes é

$$1 - (5/6)^{10}.$$

Aqui,  $5/6$  é a probabilidade de que o resultado de um único lançamento não seja seis, e  $(5/6)^{10}$  é a probabilidade de que nenhum dos dez lançamentos seja um seis. O complementar disso é a resposta para o problema.

## União

A probabilidade da união  $A \cup B$  é calculada usando a fórmula

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por exemplo, ao lançar um dado, a união dos eventos

$$A = \text{"o resultado é par"}$$

e

$$B = \text{"o resultado é menor que 4"}$$

é

$$A \cup B = \text{"o resultado é par ou menor que 4"},$$

e sua probabilidade é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/2 - 1/6 = 5/6.$$

Se os eventos  $A$  e  $B$  são **disjuntos**, ou seja,  $A \cap B$  é vazio, a probabilidade do evento  $A \cup B$  é simplesmente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

## Probabilidade condicional

A **probabilidade condicional**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

é a probabilidade de  $A$  assumindo que  $B$  acontece. Portanto, ao calcular a probabilidade de  $A$ , consideramos apenas os resultados que também pertencem a  $B$ .

Usando os conjuntos anteriores,

$$P(A|B) = 1/3,$$

pois os resultados de  $B$  são  $\{1, 2, 3\}$ , e um deles é par. Esta é a probabilidade de um resultado par se sabemos que o resultado está entre  $1 \dots 3$ .

## Interseção

Usando a probabilidade condicional, a probabilidade da interseção  $A \cap B$  pode ser calculada usando a fórmula

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Os eventos  $A$  e  $B$  são **independentes** se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{and} \quad P(B|A) = P(B),$$

o que significa que o fato de  $B$  acontecer não altera a probabilidade de  $A$ , e vice-versa. Neste caso, a probabilidade da interseção é

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por exemplo, ao tirar uma carta de um baralho, os eventos

$$A = \text{"o naipe é paus"}$$

e

$$B = \text{"o valor é quatro"}$$

são independentes. Portanto, o evento

$$A \cap B = \text{"a carta é o quatro de paus"}$$

acontece com probabilidade

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/4 \cdot 1/13 = 1/52.$$

## 24.3 Variáveis aleatórias

Uma **variável aleatória** é um valor que é gerado por um processo aleatório. Por exemplo, ao lançar dois dados, uma possível variável aleatória é

$$X = \text{"a soma dos resultados"}.$$

Por exemplo, se os resultados forem  $[4, 6]$  (o que significa que primeiro lançamos um quatro e depois um seis), então o valor de  $X$  é 10.

Denotamos por  $P(X = x)$  a probabilidade de que o valor de uma variável aleatória  $X$  seja  $x$ . Por exemplo, ao lançar dois dados,  $P(X = 10) = 3/36$ , pois o número total de resultados é 36 e existem três maneiras possíveis de obter a soma 10:  $[4, 6]$ ,  $[5, 5]$  e  $[6, 4]$ .



## Valor esperado

O **valor esperado**  $E[X]$  indica o valor médio de uma variável aleatória  $X$ . O valor esperado pode ser calculado como a soma

$$\sum_x P(X = x)x,$$

onde  $x$  percorre todos os valores possíveis de  $X$ .

Por exemplo, ao lançar um dado, o resultado esperado é

$$1/6 \cdot 1 + 1/6 \cdot 2 + 1/6 \cdot 3 + 1/6 \cdot 4 + 1/6 \cdot 5 + 1/6 \cdot 6 = 7/2.$$

Uma propriedade útil dos valores esperados é a **linearidade**. Isso significa que a soma  $E[X_1 + X_2 + \dots + X_n]$  sempre é igual à soma  $E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$ . Esta fórmula é válida mesmo se as variáveis aleatórias dependerem umas das outras.

Por exemplo, ao lançar dois dados, a soma esperada é

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 7/2 + 7/2 = 7.$$

Vamos agora considerar um problema onde  $n$  bolas são aleatoriamente colocadas em  $n$  caixas, e nossa tarefa é calcular o número esperado de caixas vazias. Cada bola tem a mesma probabilidade de ser colocada em qualquer uma das caixas. Por exemplo, se  $n = 2$ , as possibilidades são as seguintes:



Neste caso, o número esperado de caixas vazias é

$$\frac{0 + 0 + 1 + 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

No caso geral, a probabilidade de uma única caixa estar vazia é

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

porque nenhuma bola deve ser colocada nela. Portanto, usando a linearidade, o número esperado de caixas vazias é

$$n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

## Distribuições

A **distribuição** de uma variável aleatória  $X$  mostra a probabilidade de cada valor que  $X$  pode ter. A distribuição consiste nos valores de  $P(X = x)$ . Por exemplo, ao lançar dois dados, a distribuição da sua soma é:

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Em uma **distribuição uniforme**, a variável aleatória  $X$  tem  $n$  valores possíveis  $a, a+1, \dots, b$  e a probabilidade de cada valor é  $1/n$ . Por exemplo, ao lançar um dado,  $a=1$ ,  $b=6$  e  $P(X=x)=1/6$  para cada valor  $x$ .

O valor esperado de  $X$  em uma distribuição uniforme é

$$E[X] = \frac{a+b}{2}.$$

Em uma **distribuição binomial**,  $n$  tentativas são feitas, e a probabilidade de uma única tentativa ser bem-sucedida é  $p$ . A variável aleatória  $X$  conta o número de tentativas bem-sucedidas, e a probabilidade de um valor  $x$  é

$$P(X=x) = p^x(1-p)^{n-x} \binom{n}{x},$$

onde  $p^x$  e  $(1-p)^{n-x}$  correspondem a tentativas bem-sucedidas e mal-sucedidas, e  $\binom{n}{x}$  é o número de maneiras pelas quais podemos escolher a ordem das tentativas.

Por exemplo, ao lançar um dado dez vezes, a probabilidade de obter um seis exatamente três vezes é  $(1/6)^3(5/6)^7 \binom{10}{3}$ .

O valor esperado de  $X$  em uma distribuição binomial é

$$E[X] = pn.$$

Em uma **distribuição geométrica**, a probabilidade de uma tentativa ser bem-sucedida é  $p$ , e continuamos até que o primeiro sucesso aconteça. A variável aleatória  $X$  conta o número de tentativas necessárias, e a probabilidade de um valor  $x$  é

$$P(X=x) = (1-p)^{x-1}p,$$

onde  $(1-p)^{x-1}$  corresponde às tentativas malsucedidas e  $p$  corresponde à primeira tentativa bem-sucedida.

Por exemplo, se lançarmos um dado até obtermos um seis, a probabilidade de que o número de lançamentos seja exatamente 4 é  $(5/6)^3 1/6$ .

O valor esperado de  $X$  em uma distribuição geométrica é

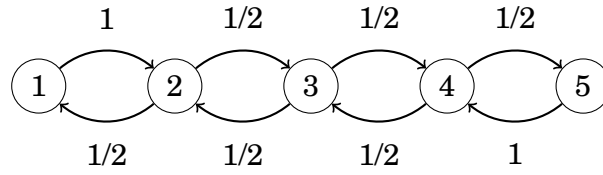
$$E[X] = \frac{1}{p}.$$

## 24.4 Cadeias de Markov

Uma **cadeia de Markov** é um processo aleatório que consiste em estados e transições entre eles. Para cada estado, sabemos as probabilidades de mover para outros estados. Uma cadeia de Markov pode ser representada como um grafo cujos nós são estados e arestas são transições.

Como exemplo, considere um problema em que estamos no andar 1 em um prédio de  $n$  andares. A cada passo, caminhamos aleatoriamente um andar para cima ou um andar para baixo, exceto que sempre subimos um andar do andar 1 e descemos um andar do andar  $n$ . Qual é a probabilidade de estar no andar  $m$  após  $k$  passos?

Neste problema, cada andar do prédio corresponde a um estado em uma cadeia de Markov. Por exemplo, se  $n=5$ , o grafo é o seguinte:



A distribuição de probabilidade de uma cadeia de Markov é um vetor  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ , onde  $p_k$  é a probabilidade de que o estado atual seja  $k$ . A fórmula  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  sempre é válida.

No cenário acima, a distribuição inicial é  $[1, 0, 0, 0, 0]$ , porque sempre começamos no andar 1. A próxima distribuição é  $[0, 1, 0, 0, 0]$ , porque só podemos ir do andar 1 para o andar 2. Depois disso, podemos subir um andar ou descer um andar, então a próxima distribuição é  $[1/2, 0, 1/2, 0, 0]$ , e assim por diante.

Uma maneira eficiente de simular a caminhada em uma cadeia de Markov é usar programação dinâmica. A ideia é manter a distribuição de probabilidade, e a cada passo, percorrer todas as possibilidades de como podemos nos mover. Usando este método, podemos simular uma caminhada de  $m$  passos em tempo  $O(n^2m)$ .

As transições de uma cadeia de Markov também podem ser representadas como uma matriz que atualiza a distribuição de probabilidade. No cenário acima, a matriz é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando multiplicamos uma distribuição de probabilidade por esta matriz, obtemos a nova distribuição após mover um passo. Por exemplo, podemos mover da distribuição  $[1, 0, 0, 0, 0]$  para a distribuição  $[0, 1, 0, 0, 0]$  da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando as potências da matriz de forma eficiente, podemos calcular a distribuição após  $m$  passos em tempo  $O(n^3 \log m)$ .

## 24.5 Algoritmos aleatorizados

Às vezes, podemos usar a aleatoriedade para resolver um problema, mesmo que o problema não esteja relacionado a probabilidades. Um **algoritmo aleatorizado** é um algoritmo que é baseado em aleatoriedade.

Um **algoritmo de Monte Carlo** é um algoritmo aleatorizado que pode, às vezes, dar uma resposta errada. Para que tal algoritmo seja útil, a probabilidade de uma resposta errada deve ser pequena.

Um **algoritmo de Las Vegas** é um algoritmo aleatorizado que sempre dá a resposta correta, mas seu tempo de execução varia aleatoriamente. O objetivo é projetar um algoritmo que seja eficiente com alta probabilidade.

A seguir, veremos três exemplos de problemas que podem ser resolvidos usando aleatoriedade.

## Estatísticas de ordem

A  $k$ -ésima **estatística de ordem** de um array é o elemento na posição  $k$  após a ordenação do array em ordem crescente. É fácil calcular qualquer estatística de ordem em tempo  $O(n \log n)$  ordenando primeiro o array, mas é realmente necessário ordenar o array inteiro apenas para encontrar um elemento?

Acontece que podemos encontrar estatísticas de ordem usando um algoritmo aleatorizado sem ordenar o array. O algoritmo, chamado **quickselect**<sup>1</sup>, é um algoritmo de Las Vegas: seu tempo de execução é normalmente  $O(n)$ , mas  $O(n^2)$  no pior caso.

O algoritmo escolhe um elemento aleatório  $x$  do array e move os elementos menores que  $x$  para a parte esquerda do array, e todos os outros elementos para a parte direita do array. Isso leva tempo  $O(n)$  quando há  $n$  elementos. Suponha que a parte esquerda contenha  $a$  elementos e a parte direita contenha  $b$  elementos. Se  $a = k$ , o elemento  $x$  é a  $k$ -ésima estatística de ordem. Caso contrário, se  $a > k$ , recursivamente encontramos a  $k$ -ésima estatística de ordem para a parte esquerda, e se  $a < k$ , recursivamente encontramos a  $r$ -ésima estatística de ordem para a parte direita, onde  $r = k - a$ . A busca continua de forma similar até que o elemento tenha sido encontrado.

Quando cada elemento  $x$  é escolhido aleatoriamente, o tamanho do array é dividido pela metade a cada etapa, então a complexidade de tempo para encontrar a  $k$ -ésima estatística de ordem é aproximadamente

$$n + n/2 + n/4 + n/8 + \dots < 2n = O(n).$$

O pior caso do algoritmo ainda requer tempo  $O(n^2)$ , porque é possível que  $x$  seja sempre escolhido de forma que seja um dos menores ou maiores elementos no array, e  $O(n)$  etapas sejam necessárias. No entanto, a probabilidade disso é tão pequena que isso nunca acontece na prática.

## Verificação da multiplicação de matrizes

Nosso próximo problema é *verificar* se  $AB = C$  é válido quando  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes de tamanho  $n \times n$ . Claro, podemos resolver o problema calculando o produto  $AB$  novamente (em tempo  $O(n^3)$  usando o algoritmo básico), mas

---

<sup>1</sup>Em 1961, C. A. R. Hoare publicou dois algoritmos que são eficientes em média: **quicksort** [36] para ordenar arrays e **quickselect** [37] para encontrar estatísticas de ordem.

poderíamos esperar que verificar a resposta seria mais fácil do que calculá-la do zero.

Acontece que podemos resolver o problema usando um algoritmo de Monte Carlo<sup>2</sup>, cuja complexidade de tempo é apenas  $O(n^2)$ . A ideia é simples: escolhemos um vetor aleatório  $X$  de  $n$  elementos e calculamos as matrizes  $ABX$  e  $CX$ . Se  $ABX = CX$ , relatamos que  $AB = C$ , caso contrário, relatamos que  $AB \neq C$ .

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n^2)$ , pois podemos calcular as matrizes  $ABX$  e  $CX$  em tempo  $O(n^2)$ . Podemos calcular a matriz  $ABX$  de forma eficiente usando a representação  $A(BX)$ , então apenas duas multiplicações de matrizes de tamanho  $n \times n$  e  $n \times 1$  são necessárias.

A desvantagem do algoritmo é que há uma pequena chance de o algoritmo cometer um erro ao relatar que  $AB = C$ . Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

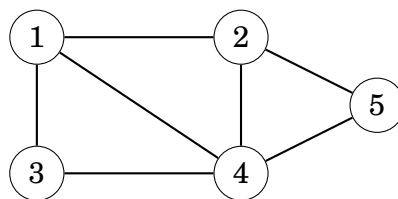
mas

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

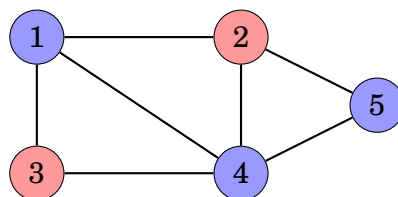
No entanto, na prática, a probabilidade de o algoritmo cometer um erro é pequena, e podemos diminuir a probabilidade verificando o resultado usando vários vetores aleatórios  $X$  antes de relatar que  $AB = C$ .

## Coloração de grafos

Dado um grafo que contém  $n$  vértices e  $m$  arestas, nossa tarefa é encontrar uma maneira de colorir os vértices do grafo usando duas cores, de modo que para pelo menos  $m/2$  arestas, os vértices adjacentes tenham cores diferentes. Por exemplo, no grafo



uma coloração válida é a seguinte:



<sup>2</sup>R. M. Freivalds publicou este algoritmo em 1977 [26], e às vezes é chamado de **algoritmo de Freivalds**.

O grafo acima contém 7 arestas e, para 5 delas, os vértices adjacentes têm cores diferentes, portanto a coloração é válida.

O problema pode ser resolvido usando um algoritmo de Las Vegas que gera colorações aleatórias até que uma coloração válida seja encontrada. Em uma coloração aleatória, a cor de cada vértice é escolhida independentemente de forma que a probabilidade de receber qualquer uma das duas cores seja  $1/2$ .

Em uma coloração aleatória, a probabilidade de os vértices adjacentes de uma única aresta terem cores diferentes é  $1/2$ . Portanto, o número esperado de arestas cujos vértices adjacentes têm cores diferentes é  $m/2$ . Como espera-se que uma coloração aleatória seja válida, encontraremos rapidamente uma coloração válida na prática.

# Capítulo 25

## Teoria dos Jogos

Neste capítulo, vamos nos concentrar em jogos de dois jogadores que não contêm elementos aleatórios. Nosso objetivo é encontrar uma estratégia que possamos seguir para vencer o jogo, independentemente do que o oponente fizer, se tal estratégia existir.

Veremos que existe uma estratégia geral para tais jogos, e podemos analisá-los usando a **teoria nim**. Primeiro, analisaremos jogos simples onde os jogadores removem palitos de pilhas e, depois disso, generalizaremos a estratégia usada nesses jogos para outros jogos.

### 25.1 Estados do Jogo

Vamos considerar um jogo em que existe inicialmente uma pilha de  $n$  palitos. Os jogadores  $A$  e  $B$  jogam alternadamente, e o jogador  $A$  começa. Em cada jogada, o jogador deve remover 1, 2 ou 3 palitos da pilha, e o jogador que remover o último palito vence o jogo.

Por exemplo, se  $n = 10$ , o jogo pode prosseguir da seguinte forma:

- Jogador  $A$  remove 2 palitos (restam 8 palitos).
- Jogador  $B$  remove 3 palitos (restam 5 palitos).
- Jogador  $A$  remove 1 palito (restam 4 palitos).
- Jogador  $B$  remove 2 palitos (restam 2 palitos).
- Jogador  $A$  remove 2 palitos e vence.

Este jogo consiste nos estados  $0, 1, 2, \dots, n$ , onde o número do estado corresponde ao número de palitos restantes.

### Estados de vitória e derrota

Um **estado de vitória** é um estado em que o jogador vencerá o jogo se jogar de forma otimizada, e um **estado de derrota** é um estado em que o jogador perderá o jogo se o oponente jogar de forma otimizada. Podemos classificar todos os estados de um jogo de forma que cada estado seja um estado de vitória ou um estado de derrota.

No jogo acima, o estado 0 é claramente um estado de derrota, porque o jogador não pode fazer nenhuma jogada. Os estados 1, 2 e 3 são estados de vitória, porque podemos remover 1, 2 ou 3 palitos e vencer o jogo. O estado 4, por sua vez, é um estado de derrota, porque qualquer jogada leva a um estado que é um estado de vitória para o oponente.

De forma mais geral, se houver uma jogada que leva do estado atual para um estado de derrota, o estado atual é um estado de vitória; caso contrário, o estado atual é um estado de derrota. Usando essa observação, podemos classificar todos os estados de um jogo, começando com os estados de derrota onde não há jogadas possíveis.

Os estados 0...15 do jogo acima podem ser classificados da seguinte forma ( $V$  denota um estado de vitória e  $D$  denota um estado de derrota):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$D$	$V$	$V$	$V$	$D$	$V$	$V$	$V$	$D$	$V$	$V$	$V$	$D$	$V$	$V$	$V$

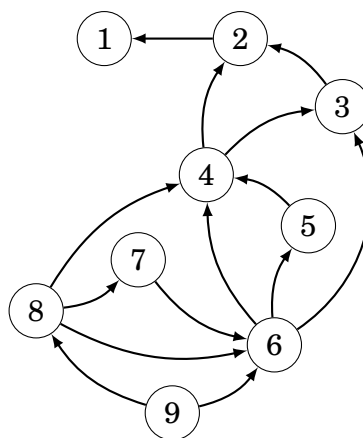
É fácil analisar este jogo: um estado  $k$  é um estado de derrota se  $k$  for divisível por 4 e, caso contrário, é um estado de vitória. Uma maneira ideal de jogar é sempre escolher uma jogada após a qual o número de palitos na pilha seja divisível por 4. Finalmente, não haverá mais palitos e o oponente terá perdido.

Claro, esta estratégia exige que o número de palitos *não* seja divisível por 4 quando for a nossa vez. Se for, não há nada que possamos fazer, e o oponente vencerá o jogo se jogar de forma otimizada.

## Grafo de estados

Vamos agora considerar outro jogo de palitos, onde em cada estado  $k$ , é permitido remover qualquer número  $x$  de palitos tal que  $x$  seja menor que  $k$  e divida  $k$ . Por exemplo, no estado 8 podemos remover 1, 2 ou 4 palitos, mas no estado 7 a única jogada permitida é remover 1 palito.

A figura a seguir mostra os estados 1...9 do jogo como um **grafo de estados**, cujos nós são os estados e as arestas são as jogadas entre eles:



O estado final neste jogo é sempre o estado 1, que é um estado de derrota, porque não há jogadas válidas. A classificação dos estados 1...9 é a seguinte:



1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	V	D	V	D	V	D	V	D

Surpreendentemente, neste jogo, todos os estados pares são estados de vitória e todos os estados ímpares são estados de derrota.

## 25.2 Jogo Nim

O **jogo nim** é um jogo simples que tem um papel importante na teoria dos jogos, porque muitos outros jogos podem ser jogados usando a mesma estratégia. Primeiro, vamos nos concentrar no nim e, em seguida, generalizaremos a estratégia para outros jogos.

Existem  $n$  pilhas no nim, e cada pilha contém um certo número de palitos. Os jogadores jogam alternadamente e, em cada turno, o jogador escolhe uma pilha que ainda contém palitos e remove qualquer número de palitos dela. O vencedor é o jogador que remover o último palito.

Os estados no nim são da forma  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , onde  $x_k$  denota o número de palitos na pilha  $k$ . Por exemplo,  $[10, 12, 5]$  é um jogo onde existem três pilhas com 10, 12 e 5 palitos. O estado  $[0, 0, \dots, 0]$  é um estado de derrota, porque não é possível remover nenhum palito, e este é sempre o estado final.

### Análise

Acontece que podemos classificar facilmente qualquer estado nim calculando a **soma nim**  $s = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ , onde  $\oplus$  é a operação xor<sup>1</sup>. Os estados cuja soma nim é 0 são estados de derrota e todos os outros estados são estados de vitória. Por exemplo, a soma nim de  $[10, 12, 5]$  é  $10 \oplus 12 \oplus 5 = 3$ , então o estado é um estado de vitória.

Mas como a soma nim está relacionada ao jogo nim? Podemos explicar isso observando como a soma nim muda quando o estado nim muda.

*Estados de derrota:* O estado final  $[0, 0, \dots, 0]$  é um estado de derrota e sua soma nim é 0, como esperado. Em outros estados de derrota, qualquer jogada leva a um estado de vitória, porque quando um único valor  $x_k$  muda, a soma nim também muda, então a soma nim é diferente de 0 após a jogada.

*Estados de vitória:* Podemos ir para um estado de derrota se houver alguma pilha  $k$  para a qual  $x_k \oplus s < x_k$ . Nesse caso, podemos remover palitos da pilha  $k$  para que ela contenha  $x_k \oplus s$  palitos, o que levará a um estado de derrota. Sempre existe tal pilha, onde  $x_k$  tem um bit 1 na posição do bit 1 mais à esquerda de  $s$ .

Como exemplo, considere o estado  $[10, 12, 5]$ . Este estado é um estado de vitória, porque sua soma nim é 3. Portanto, deve haver uma jogada que leva a um estado de derrota. A seguir, descobriremos tal jogada.

A soma nim do estado é a seguinte:

<sup>1</sup>A estratégia ideal para nim foi publicada em 1901 por C. L. Bouton [10].

10	1010
12	1100
5	0101
3	0011

Neste caso, a pilha com 10 palitos é a única pilha que possui um bit 1 na posição do bit 1 mais à esquerda da soma nim:

10	10 <u>1</u> 0
12	1100
5	0101
3	00 <u>1</u> 1

O novo tamanho da pilha deve ser  $10 \oplus 3 = 9$ , então removeremos apenas um palito. Depois disso, o estado será  $[9, 12, 5]$ , que é um estado de derrota:

9	1001
12	1100
5	0101
0	0000

## Jogo Misère

Em um **jogo misère**, o objetivo do jogo é oposto, então o jogador que remove o último palito perde o jogo. Acontece que o jogo nim misère pode ser jogado de forma ideal quase como o jogo nim padrão.

A ideia é primeiro jogar o jogo misère como o jogo padrão, mas mudar a estratégia no final do jogo. A nova estratégia será introduzida em uma situação em que cada pilha conteria no máximo um palito após a próxima jogada.

No jogo padrão, devemos escolher uma jogada após a qual haja um número par de pilhas com um palito. No entanto, no jogo misère, escolhemos uma jogada de forma que haja um número ímpar de pilhas com um palito.

Essa estratégia funciona porque um estado onde a estratégia muda sempre aparece no jogo, e esse estado é um estado de vitória, porque contém exatamente uma pilha que possui mais de um palito, então a soma nim não é 0.

## 25.3 Teorema de Sprague–Grundy

O **Teorema de Sprague–Grundy**<sup>2</sup> generaliza a estratégia usada no nim para todos os jogos que atendem aos seguintes requisitos:

- Existem dois jogadores que jogam alternadamente.
- O jogo consiste em estados, e as jogadas possíveis em um estado não dependem de quem é a vez.
- O jogo termina quando um jogador não pode mais fazer uma jogada.

<sup>2</sup>O teorema foi descoberto independentemente por R. Sprague [61] e P. M. Grundy [31].

- O jogo certamente termina mais cedo ou mais tarde.
- Os jogadores têm informações completas sobre os estados e as jogadas permitidas, e não há aleatoriedade no jogo.

A ideia é calcular, para cada estado do jogo, um número de Grundy que corresponde ao número de palitos em uma pilha nim. Quando sabemos os números de Grundy de todos os estados, podemos jogar como o jogo nim.

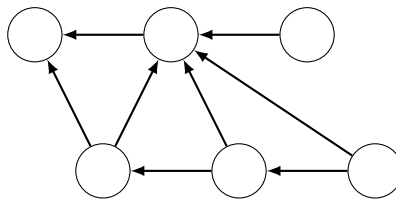
## Números de Grundy

O **Número de Grundy** de um estado do jogo é

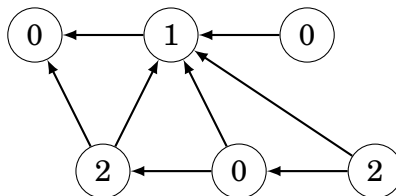
$$\text{mex}(\{g_1, g_2, \dots, g_n\}),$$

onde  $g_1, g_2, \dots, g_n$  são os números de Grundy dos estados para os quais podemos mover, e a função mex retorna o menor número inteiro não negativo que não está no conjunto. Por exemplo,  $\text{mex}(\{0, 1, 3\}) = 2$ . Se não houver jogadas possíveis em um estado, seu número de Grundy é 0, porque  $\text{mex}(\emptyset) = 0$ .

Por exemplo, no grafo de estados:



os números de Grundy são os seguintes:



O número de Grundy de um estado de derrota é 0, e o número de Grundy de um estado de vitória é um número positivo.

O número de Grundy de um estado corresponde ao número de palitos em uma pilha nim. Se o número de Grundy for 0, podemos mover apenas para estados cujos números de Grundy são positivos, e se o número de Grundy for  $x > 0$ , podemos mover para estados cujos números de Grundy incluem todos os números  $0, 1, \dots, x - 1$ .

Como exemplo, considere um jogo onde os jogadores movem uma peça em um labirinto. Cada quadrado no labirinto é um chão ou uma parede. A cada turno, o jogador deve mover a peça um certo número de passos para a esquerda ou para cima. O vencedor do jogo é o jogador que fizer o último movimento.

A figura a seguir mostra um possível estado inicial do jogo, onde @ denota a peça e \* denota um quadrado para onde ela pode se mover.

				*
				*
*	*	*	*	@

Os estados do jogo são todos os quadrados do chão do labirinto. No labirinto acima, os números de Grundy são os seguintes:

0	1		0	1
	0	1	2	
0	2		1	0
	3	0	4	1
0	4	1	3	2

Assim, cada estado do jogo do labirinto corresponde a uma pilha no jogo nim. Por exemplo, o número de Grundy para o quadrado inferior direito é 2, então é um estado de vitória. Podemos chegar a um estado de derrota e vencer o jogo movendo quatro passos para a esquerda ou dois passos para cima.

Observe que, ao contrário do jogo nim original, pode ser possível mover para um estado cujo número de Grundy seja maior do que o número de Grundy do estado atual. No entanto, o oponente sempre pode escolher uma jogada que cancele tal movimento, então não é possível escapar de um estado de derrota.

## Subjogos

A seguir, assumiremos que nosso jogo consiste em subjogos e, em cada turno, o jogador primeiro escolhe um subjogo e, em seguida, uma jogada no subjogo. O jogo termina quando não é possível fazer nenhuma jogada em nenhum subjogo.

Neste caso, o número de Grundy de um jogo é a soma nim dos números de Grundy dos subjogos. O jogo pode ser jogado como um jogo nim calculando todos os números de Grundy para subjogos e, em seguida, sua soma nim.

Como exemplo, considere um jogo que consiste em três labirintos. Neste jogo, em cada turno, o jogador escolhe um dos labirintos e então move a peça no labirinto. Suponha que o estado inicial do jogo seja o seguinte:

Os números de Grundy para os labirintos são os seguintes:

0	1		0	1
	0	1	2	
0	2		1	0
	3	0	4	1
0	4	1	3	2

0	1	2	3	
1	0		0	1
2		0	1	2
3		1	2	0
4	0	2	5	3

0	1	2	3	4
1				0
2				1
3				2
4	0	1	2	3

No estado inicial, a soma nim dos números de Grundy é  $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2$ , então o primeiro jogador pode vencer o jogo. Uma jogada ideal é mover dois passos para cima no primeiro labirinto, o que produz a soma nim  $0 \oplus 3 \oplus 3 = 0$ .

## Jogo de Grundy

Às vezes, uma jogada em um jogo divide o jogo em subjogos independentes um do outro. Neste caso, o número de Grundy do jogo é

$$\text{mex}(\{g_1, g_2, \dots, g_n\}),$$

onde  $n$  é o número de jogadas possíveis e

$$g_k = a_{k,1} \oplus a_{k,2} \oplus \dots \oplus a_{k,m},$$

onde a jogada  $k$  gera subjogos com números de Grundy  $a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,m}$ .

Um exemplo de tal jogo é o **Jogo de Grundy**. Inicialmente, existe uma única pilha que contém  $n$  palitos. Em cada turno, o jogador escolhe uma pilha e a divide em duas pilhas não vazias, de modo que as pilhas tenham tamanhos diferentes. O jogador que fizer o último movimento vence o jogo.

Seja  $f(n)$  o número de Grundy de uma pilha que contém  $n$  palitos. O número de Grundy pode ser calculado percorrendo todas as maneiras de dividir a pilha em duas pilhas. Por exemplo, quando  $n = 8$ , as possibilidades são  $1 + 7$ ,  $2 + 6$  e  $3 + 5$ , então

$$f(8) = \text{mex}(\{f(1) \oplus f(7), f(2) \oplus f(6), f(3) \oplus f(5)\}).$$

Neste jogo, o valor de  $f(n)$  é baseado nos valores de  $f(1), \dots, f(n-1)$ . Os casos base são  $f(1) = f(2) = 0$ , porque não é possível dividir as pilhas de 1 e 2 palitos. Os primeiros números de Grundy são:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 1 \\ f(4) &= 0 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 1 \\ f(7) &= 0 \\ f(8) &= 2 \end{aligned}$$

O número de Grundy para  $n = 8$  é 2, então é possível vencer o jogo. A jogada vencedora é criar pilhas  $1 + 7$ , porque  $f(1) \oplus f(7) = 0$ .



# Capítulo 26

## Algoritmos de string

Este capítulo aborda algoritmos eficientes para processamento de strings. Muitos problemas de string podem ser facilmente resolvidos em tempo  $O(n^2)$ , mas o desafio é encontrar algoritmos que funcionem em tempo  $O(n)$  ou  $O(n \log n)$ .

Por exemplo, um problema fundamental de processamento de strings é o problema de **casamento de padrão**: dada uma string de comprimento  $n$  e um padrão de comprimento  $m$ , nossa tarefa é encontrar as ocorrências do padrão na string. Por exemplo, o padrão ABC ocorre duas vezes na string ABABCBABC.

O problema de casamento de padrão pode ser facilmente resolvido em tempo  $O(nm)$  por um algoritmo de força bruta que testa todas as posições onde o padrão pode ocorrer na string. No entanto, neste capítulo, veremos que existem algoritmos mais eficientes que requerem apenas tempo  $O(n + m)$ .

### 26.1 Terminologia de string

Ao longo do capítulo, assumimos que a indexação baseada em zero é usada em strings. Assim, uma string  $s$  de comprimento  $n$  consiste nos caracteres  $s[0], s[1], \dots, s[n-1]$ . O conjunto de caracteres que podem aparecer em strings é chamado de **alfabeto**. Por exemplo, o alfabeto  $\{A, B, \dots, Z\}$  consiste nas letras maiúsculas do inglês.

Uma **substring** é uma sequência de caracteres consecutivos em uma string. Usamos a notação  $s[a \dots b]$  para nos referir a uma substring de  $s$  que começa na posição  $a$  e termina na posição  $b$ . Uma string de comprimento  $n$  possui  $n(n+1)/2$  substrings. Por exemplo, as substrings de ABCD são A, B, C, D, AB, BC, CD, ABC, BCD e ABCD.

Uma **subsequência** é uma sequência de caracteres (não necessariamente consecutivos) em uma string em sua ordem original. Uma string de comprimento  $n$  possui  $2^n - 1$  subsequências. Por exemplo, as subsequências de ABCD são A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD e ABCD.

Um **prefixo** é uma substring que começa no início de uma string, e um **sufixo** é uma substring que termina no final de uma string. Por exemplo, os prefixos de ABCD são A, AB, ABC e ABCD, e os sufixos de ABCD são D, CD, BCD e ABCD.

Uma **rotação** pode ser gerada movendo os caracteres de uma string um por um do início para o final (ou vice-versa). Por exemplo, as rotações de ABCD são

ABCD, BCDA, CDAB e DABC.

Um **período** é um prefixo de uma string tal que a string pode ser construída repetindo o período. A última repetição pode ser parcial e conter apenas um prefixo do período. Por exemplo, o menor período de ABCABCA é ABC.

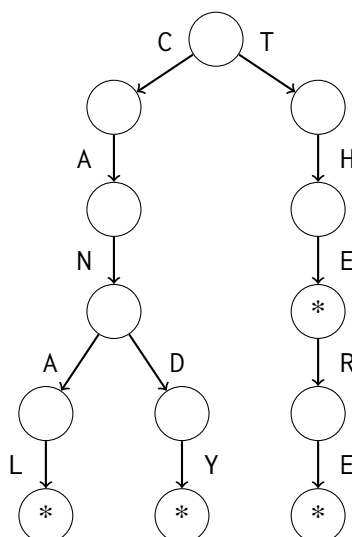
Uma **borda** é uma string que é tanto um prefixo quanto um sufixo de uma string. Por exemplo, as bordas de ABACABA são A, ABA e ABACABA.

As strings são comparadas usando a **ordem lexicográfica** (que corresponde à ordem alfabética). Isso significa que  $x < y$  se  $x \neq y$  e  $x$  é um prefixo de  $y$ , ou existe uma posição  $k$  tal que  $x[i] = y[i]$  quando  $i < k$  e  $x[k] < y[k]$ .

## 26.2 Estrutura Trie

Uma **trie** é uma árvore enraizada que mantém um conjunto de strings. Cada string no conjunto é armazenada como uma cadeia de caracteres que começa na raiz. Se duas strings tiverem um prefixo comum, elas também terão uma cadeia comum na árvore.

Por exemplo, considere a seguinte trie:



Esta trie corresponde ao conjunto {CANAL, CANDY, THE, THERE}. O caractere \* em um nó significa que uma string no conjunto termina naquele nó. Esse caractere é necessário porque uma string pode ser um prefixo de outra string. Por exemplo, na trie acima, THE é um prefixo de THERE.

Podemos verificar em tempo  $O(n)$  se uma trie contém uma string de comprimento  $n$ , porque podemos seguir a cadeia que começa no nó raiz. Também podemos adicionar uma string de comprimento  $n$  à trie em tempo  $O(n)$  seguindo primeiro a cadeia e depois adicionando novos nós à trie, se necessário.

Usando uma trie, podemos encontrar o prefixo mais longo de uma determinada string tal que o prefixo pertence ao conjunto. Além disso, armazenando informações adicionais em cada nó, podemos calcular o número de strings que pertencem ao conjunto e têm uma determinada string como prefixo.

Uma trie pode ser armazenada em um array



```
int trie[N][A];
```

onde  $N$  é o número máximo de nós (o comprimento total máximo das strings no conjunto) e  $A$  é o tamanho do alfabeto. Os nós de uma trie são numerados  $0, 1, 2, \dots$  de forma que o número da raiz seja 0, e  $\text{trie}[s][c]$  é o próximo nó na cadeia quando nos movemos do nó  $s$  usando o caractere  $c$ .

## 26.3 Hashing de string

**Hashing de string** é uma técnica que nos permite verificar eficientemente se duas strings são iguais<sup>1</sup>. A ideia no hashing de string é comparar valores de hash de strings em vez de seus caracteres individuais.

### Calculando valores de hash

Um **valor de hash** de uma string é um número que é calculado a partir dos caracteres da string. Se duas strings são iguais, seus valores de hash também são iguais, o que torna possível comparar strings com base em seus valores de hash.

Uma maneira usual de implementar hashing de string é o **hashing polinomial**, o que significa que o valor de hash de uma string  $s$  de comprimento  $n$  é

$$(s[0]A^{n-1} + s[1]A^{n-2} + \dots + s[n-1]A^0) \bmod B,$$

onde  $s[0], s[1], \dots, s[n-1]$  são interpretados como os códigos dos caracteres de  $s$ , e  $A$  e  $B$  são constantes pré-escolhidas.

Por exemplo, os códigos dos caracteres de ALLEY são:

A	L	L	E	Y
65	76	76	69	89

Assim, se  $A = 3$  e  $B = 97$ , o valor de hash de ALLEY é

$$(65 \cdot 3^4 + 76 \cdot 3^3 + 76 \cdot 3^2 + 69 \cdot 3^1 + 89 \cdot 3^0) \bmod 97 = 52.$$

### Pré-processamento

Usando hashing polinomial, podemos calcular o valor de hash de qualquer substring de uma string  $s$  em tempo  $O(1)$  após um pré-processamento de tempo  $O(n)$ . A ideia é construir um array  $h$  tal que  $h[k]$  contenha o valor de hash do prefixo  $s[0 \dots k]$ . Os valores do array podem ser calculados recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h[0] &= s[0] \\ h[k] &= (h[k-1]A + s[k]) \bmod B \end{aligned}$$

<sup>1</sup>A técnica foi popularizada pelo algoritmo de casamento de padrão Karp–Rabin [42].

Além disso, construímos um array  $p$  onde  $p[k] = A^k \bmod B$ :

$$\begin{aligned} p[0] &= 1 \\ p[k] &= (p[k-1]A) \bmod B. \end{aligned}$$

Construir esses arrays leva tempo  $O(n)$ . Depois disso, o valor de hash de qualquer substring  $s[a \dots b]$  pode ser calculado em tempo  $O(1)$  usando a fórmula

$$(h[b] - h[a-1]p[b-a+1]) \bmod B$$

assumindo que  $a > 0$ . Se  $a = 0$ , o valor de hash é simplesmente  $h[b]$ .

## Usando valores de hash

Podemos comparar strings de forma eficiente usando valores de hash. Em vez de comparar os caracteres individuais das strings, a ideia é comparar seus valores de hash. Se os valores de hash forem iguais, as strings são *provavelmente* iguais, e se os valores de hash forem diferentes, as strings são *certamente* diferentes.

Usando hashing, podemos frequentemente tornar um algoritmo de força bruta eficiente. Como exemplo, considere o problema de casamento de padrão: dada uma string  $s$  e um padrão  $p$ , encontre as posições onde  $p$  ocorre em  $s$ . Um algoritmo de força bruta percorre todas as posições onde  $p$  pode ocorrer e compara as strings caractere por caractere. A complexidade de tempo de tal algoritmo é  $O(n^2)$ .

Podemos tornar o algoritmo de força bruta mais eficiente usando hashing, porque o algoritmo compara substrings de strings. Usando hashing, cada comparação leva apenas tempo  $O(1)$ , porque apenas valores de hash de substrings são comparados. Isso resulta em um algoritmo com complexidade de tempo  $O(n)$ , que é a melhor complexidade de tempo possível para este problema.

Combinando hashing e *busca binária*, também é possível descobrir a ordem lexicográfica de duas strings em tempo logarítmico. Isso pode ser feito calculando o comprimento do prefixo comum das strings usando busca binária. Uma vez que sabemos o comprimento do prefixo comum, podemos apenas verificar o próximo caractere após o prefixo, porque isso determina a ordem das strings.

## Colisões e parâmetros

Um risco evidente ao comparar valores de hash é uma **colisão**, o que significa que duas strings têm conteúdo diferente, mas valores de hash iguais. Nesse caso, um algoritmo que se baseia nos valores de hash conclui que as strings são iguais, mas na realidade não são, e o algoritmo pode fornecer resultados incorretos.

Colisões são sempre possíveis, porque o número de strings diferentes é maior que o número de valores de hash diferentes. No entanto, a probabilidade de uma colisão é pequena se as constantes  $A$  e  $B$  forem cuidadosamente escolhidas. Uma maneira usual é escolher constantes aleatórias próximas a  $10^9$ , por exemplo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= 911382323 \\ B &= 972663749 \end{aligned}$$

Usando tais constantes, o tipo `long long` pode ser usado ao calcular valores de hash, porque os produtos  $AB$  e  $BB$  caberão em `long long`. Mas é suficiente ter cerca de  $10^9$  valores de hash diferentes?

Vamos considerar três cenários onde o hashing pode ser usado:

*Cenário 1:* As strings  $x$  e  $y$  são comparadas entre si. A probabilidade de uma colisão é  $1/B$ , assumindo que todos os valores de hash são igualmente prováveis.

*Cenário 2:* Uma string  $x$  é comparada com as strings  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . A probabilidade de uma ou mais colisões é

$$1 - \left(1 - \frac{1}{B}\right)^n.$$

*Cenário 3:* Todos os pares de strings  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são comparados entre si. A probabilidade de uma ou mais colisões é

$$1 - \frac{B \cdot (B-1) \cdot (B-2) \cdots (B-n+1)}{B^n}.$$

A tabela a seguir mostra as probabilidades de colisão quando  $n = 10^6$  e o valor de  $B$  varia:

constante $B$	cenário 1	cenário 2	cenário 3
$10^3$	0.001000	1.000000	1.000000
$10^6$	0.000001	0.632121	1.000000
$10^9$	0.000000	0.001000	1.000000
$10^{12}$	0.000000	0.000000	0.393469
$10^{15}$	0.000000	0.000000	0.000500
$10^{18}$	0.000000	0.000000	0.000001

A tabela mostra que, no cenário 1, a probabilidade de uma colisão é desprezível quando  $B \approx 10^9$ . No cenário 2, uma colisão é possível, mas a probabilidade ainda é muito pequena. No entanto, no cenário 3, a situação é muito diferente: uma colisão quase sempre acontecerá quando  $B \approx 10^9$ .

O fenômeno no cenário 3 é conhecido como o **paradoxo do aniversário**: se houver  $n$  pessoas em uma sala, a probabilidade de *algumas* duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia é grande mesmo que  $n$  seja muito pequeno. No hashing, da mesma forma, quando todos os valores de hash são comparados entre si, a probabilidade de que dois valores de hash sejam iguais é grande.

Podemos diminuir a probabilidade de uma colisão calculando *múltiplos* valores de hash usando parâmetros diferentes. É improvável que uma colisão ocorra em todos os valores de hash ao mesmo tempo. Por exemplo, dois valores de hash com parâmetro  $B \approx 10^9$  correspondem a um valor de hash com parâmetro  $B \approx 10^{18}$ , o que torna a probabilidade de uma colisão muito pequena.

Algumas pessoas usam constantes  $B = 2^{32}$  e  $B = 2^{64}$ , o que é conveniente, porque as operações com inteiros de 32 e 64 bits são calculadas módulo  $2^{32}$  e  $2^{64}$ . No entanto, esta *não* é uma boa escolha, porque é possível construir entradas que sempre geram colisões quando constantes da forma  $2^x$  são usadas [51].

## 26.4 Algoritmo Z

O **array Z**  $z$  de uma string  $s$  de comprimento  $n$  contém para cada  $k = 0, 1, \dots, n-1$  o comprimento da substring mais longa de  $s$  que começa na posição  $k$  e é um prefixo de  $s$ . Assim,  $z[k] = p$  nos diz que  $s[0 \dots p-1]$  é igual a  $s[k \dots k+p-1]$ . Muitos problemas de processamento de strings podem ser resolvidos de forma eficiente usando o array Z.

Por exemplo, o array Z de ACBACDACBACBACDA é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
–	0	0	2	0	0	5	0	0	7	0	0	2	0	0	1

Neste caso, por exemplo,  $z[6] = 5$ , porque a substring ACBAC de comprimento 5 é um prefixo de  $s$ , mas a substring ACBACB de comprimento 6 não é um prefixo de  $s$ .

### Descrição do algoritmo

A seguir, descrevemos um algoritmo, chamado de **algoritmo Z**<sup>2</sup>, que constrói eficientemente o array Z em tempo  $O(n)$ . O algoritmo calcula os valores do array Z da esquerda para a direita, usando informações já armazenadas no array Z e comparando substrings caractere por caractere.

Para calcular os valores do array Z de forma eficiente, o algoritmo mantém um intervalo  $[x, y]$  tal que  $s[x \dots y]$  é um prefixo de  $s$  e  $y$  é o maior possível. Como sabemos que  $s[0 \dots y-x]$  e  $s[x \dots y]$  são iguais, podemos usar essa informação ao calcular os valores Z para as posições  $x+1, x+2, \dots, y$ .

Em cada posição  $k$ , primeiro verificamos o valor de  $z[k-x]$ . Se  $k+z[k-x] < y$ , sabemos que  $z[k] = z[k-x]$ . No entanto, se  $k+z[k-x] \geq y$ ,  $s[0 \dots y-k]$  é igual a  $s[k \dots y]$ , e para determinar o valor de  $z[k]$  precisamos comparar as substrings caractere por caractere. Ainda assim, o algoritmo funciona em tempo  $O(n)$ , porque começamos a comparar nas posições  $y-k+1$  e  $y+1$ .

Por exemplo, vamos construir o seguinte array Z:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
–	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?


Após calcular o valor  $z[6] = 5$ , o intervalo  $[x, y]$  atual é  $[6, 10]$ :

<sup>2</sup>O algoritmo Z foi apresentado em [32] como o método mais simples conhecido para casamento de padrão em tempo linear, e a ideia original foi atribuída a [50].

						$x$		$y$							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
-	0	0	2	0	0	5	?	?	?	?	?	?	?	?	?


Agora podemos calcular os valores subsequentes do array Z de forma eficiente, porque sabemos que  $s[0 \dots 4]$  e  $s[6 \dots 10]$  são iguais. Primeiro, como  $z[1] = z[2] = 0$ , sabemos imediatamente que também  $z[7] = z[8] = 0$ :

						$x$		$y$							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
-	0	0	2	0	0	5	0	0	?	?	?	?	?	?	?



Então, como  $z[3] = 2$ , sabemos que  $z[9] \geq 2$ :

						$x$		$y$							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
-	0	0	2	0	0	5	0	0	?	?	?	?	?	?	?



No entanto, não temos informações sobre a string após a posição 10, então precisamos comparar as substrings caractere por caractere:

						$x$		$y$							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
-	0	0	2	0	0	5	0	0	?	?	?	?	?	?	?

Acontece que  $z[9] = 7$ , então o novo intervalo  $[x, y]$  é  $[9, 15]$ :

									$x$		$y$				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
-	0	0	2	0	0	5	0	0	7	?	?	?	?	?	?

Após isso, todos os valores restantes do array Z podem ser determinados usando as informações já armazenadas no array Z:

									$x \qquad \qquad \qquad y$						
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
–	0	0	2	0	0	5	0	0	7	0	0	2	0	0	1

## Usando o array Z

Muitas vezes, é uma questão de preferência usar hashing de string ou o algoritmo Z. Ao contrário do hashing, o algoritmo Z sempre funciona e não há risco de colisões. Por outro lado, o algoritmo Z é mais difícil de implementar e alguns problemas só podem ser resolvidos usando hashing.

Como exemplo, considere novamente o problema de casamento de padrão, onde nossa tarefa é encontrar as ocorrências de um padrão  $p$  em uma string  $s$ . Já resolvemos este problema de forma eficiente usando hashing de string, mas o algoritmo Z fornece outra maneira de resolver o problema.

Uma ideia usual no processamento de strings é construir uma string que consiste em múltiplas strings separadas por caracteres especiais. Neste problema, podemos construir uma string  $p\#s$ , onde  $p$  e  $s$  são separados por um caractere especial  $\#$  que não ocorre nas strings. O array Z de  $p\#s$  nos diz as posições onde  $p$  ocorre em  $s$ , porque tais posições contêm o comprimento de  $p$ .

Por exemplo, se  $s = \text{HATTIVATTI}$  e  $p = \text{ATT}$ , o array Z é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	T	T	#	H	A	T	T	I	V	A	T	T	I
–	0	0	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0	0

As posições 5 e 10 contêm o valor 3, o que significa que o padrão ATT ocorre nas posições correspondentes de HATTIVATTI.

A complexidade de tempo do algoritmo resultante é linear, pois é suficiente construir o array Z e percorrer seus valores.

## Implementação

Aqui está uma implementação curta do algoritmo Z que retorna um vetor que corresponde ao array Z.

```
vector<int> z(string s) {
    int n = s.size();
    vector<int> z(n);
    int x = 0, y = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        z[i] = max(0, min(z[i-x], y-i+1));
```

```
        while (i+z[i] < n && s[z[i]] == s[i+z[i]]) {  
            x = i; y = i+z[i]; z[i]++;  
        }  
    }  
    return z;  
}
```





## Capítulo 27

# Algoritmos de raiz quadrada

Um **algoritmo de raiz quadrada** é um algoritmo que possui uma raiz quadrada em sua complexidade de tempo. Uma raiz quadrada pode ser vista como um "logaritmo do homem pobre": a complexidade  $O(\sqrt{n})$  é melhor que  $O(n)$  mas pior que  $O(\log n)$ . De qualquer forma, muitos algoritmos de raiz quadrada são rápidos e utilizáveis na prática.

Como exemplo, considere o problema de criar uma estrutura de dados que suporte duas operações em um array: modificar um elemento em uma dada posição e calcular a soma dos elementos no intervalo dado. Já resolvemos o problema usando árvores binárias indexadas e árvores de segmentos, que suportam ambas as operações em tempo  $O(\log n)$ . No entanto, agora resolveremos o problema de outra forma usando uma estrutura de raiz quadrada que nos permite modificar elementos em tempo  $O(1)$  e calcular somas em tempo  $O(\sqrt{n})$ .

A ideia é dividir o array em *blocos* de tamanho  $\sqrt{n}$  para que cada bloco contenha a soma dos elementos dentro do bloco. Por exemplo, um array de 16 elementos será dividido em blocos de 4 elementos como segue:

21				17				20				13			
5	8	6	3	2	7	2	6	7	1	7	5	6	2	3	2

Nesta estrutura, é fácil modificar os elementos do array, pois basta atualizar a soma de um único bloco após cada modificação, o que pode ser feito em tempo  $O(1)$ . Por exemplo, a figura a seguir mostra como o valor de um elemento e a soma do bloco correspondente mudam:

21				15				20				13			
5	8	6	3	2	5	2	6	7	1	7	5	6	2	3	2

Então, para calcular a soma dos elementos em um intervalo, dividimos o intervalo em três partes, de forma que a soma consista em valores de elementos individuais e somas de blocos entre eles:

21				15				20				13			
5	8	6	3	2	5	2	6	7	1	7	5	6	2	3	2

Como o número de elementos individuais é  $O(\sqrt{n})$  e o número de blocos também é  $O(\sqrt{n})$ , a consulta de soma leva tempo  $O(\sqrt{n})$ . O propósito do tamanho do bloco  $\sqrt{n}$  é que ele *equilibra* duas coisas: o array é dividido em  $\sqrt{n}$  blocos, cada um contendo  $\sqrt{n}$  elementos.

Na prática, não é necessário usar o valor exato de  $\sqrt{n}$  como parâmetro, e, em vez disso, podemos usar os parâmetros  $k$  e  $n/k$ , onde  $k$  é diferente de  $\sqrt{n}$ . O parâmetro ideal depende do problema e da entrada. Por exemplo, se um algoritmo frequentemente passa pelos blocos, mas raramente inspeciona elementos individuais dentro dos blocos, pode ser uma boa ideia dividir o array em  $k < \sqrt{n}$  blocos, cada um contendo  $n/k > \sqrt{n}$  elementos.

## 27.1 Combinando algoritmos

Nesta seção, discutimos dois algoritmos de raiz quadrada que se baseiam na combinação de dois algoritmos em um único algoritmo. Em ambos os casos, poderíamos usar qualquer um dos algoritmos sem o outro e resolver o problema em tempo  $O(n^2)$ . No entanto, combinando os algoritmos, o tempo de execução é de apenas  $O(n\sqrt{n})$ .

### Processamento de casos

Suponha que recebamos uma grade bidimensional que contém  $n$  células. Cada célula recebe uma letra, e nossa tarefa é encontrar duas células com a mesma letra cuja distância seja mínima, onde a distância entre as células  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . Por exemplo, considere a grade a seguir:

A	F	B	A
C	E	G	E
B	D	A	F
A	C	B	D

Neste caso, a distância mínima é 2 entre as duas letras 'E'.

Podemos resolver o problema considerando cada letra separadamente. Usando essa abordagem, o novo problema é calcular a distância mínima entre duas células com uma letra *fixa*  $c$ . Vamos nos concentrar em dois algoritmos para isso:

*Algoritmo 1:* Percorra todos os pares de células com a letra  $c$ , e calcule a distância mínima entre tais células. Isso levará tempo  $O(k^2)$ , onde  $k$  é o número de células com a letra  $c$ .

*Algoritmo 2:* Execute uma busca em largura que simultaneamente começa em cada célula com a letra  $c$ . A distância mínima entre duas células com a letra  $c$  será calculada em tempo  $O(n)$ .

Uma maneira de resolver o problema é escolher qualquer um dos algoritmos e usá-lo para todas as letras. Se usarmos o Algoritmo 1, o tempo de execução é  $O(n^2)$ , porque todas as células podem conter a mesma letra, e, neste caso,  $k = n$ .

Também se usarmos o Algoritmo 2, o tempo de execução é  $O(n^2)$ , porque todas as células podem ter letras diferentes, e, neste caso,  $n$  buscas são necessárias.

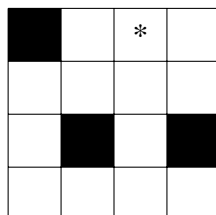
No entanto, podemos *combinar* os dois algoritmos e usar algoritmos diferentes para letras diferentes, dependendo de quantas vezes cada letra aparece na grade. Suponha que uma letra  $c$  apareça  $k$  vezes. Se  $k \leq \sqrt{n}$ , usamos o Algoritmo 1 e, se  $k > \sqrt{n}$ , usamos o Algoritmo 2. Acontece que, ao fazer isso, o tempo de execução total do algoritmo é de apenas  $O(n\sqrt{n})$ .

Primeiro, suponha que usamos o Algoritmo 1 para uma letra  $c$ . Como  $c$  aparece no máximo  $\sqrt{n}$  vezes na grade, comparamos cada célula com a letra  $c$   $O(\sqrt{n})$  vezes com outras células. Assim, o tempo usado para processar todas essas células é  $O(n\sqrt{n})$ . Então, suponha que usamos o Algoritmo 2 para uma letra  $c$ . Existem no máximo  $\sqrt{n}$  letras assim, então, processar essas letras também leva tempo  $O(n\sqrt{n})$ .

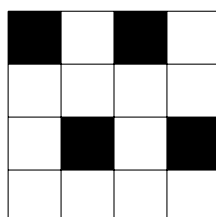
## Processamento em lote

Nosso próximo problema também lida com uma grade bidimensional que contém  $n$  células. Inicialmente, cada célula, exceto uma, é branca. Realizamos  $n - 1$  operações, cada uma das quais primeiro calcula a distância mínima de uma dada célula branca para uma célula preta e, em seguida, pinta a célula branca de preto.

Por exemplo, considere a seguinte operação:



Primeiro, calculamos a distância mínima da célula branca marcada com \* para uma célula preta. A distância mínima é 2, pois podemos mover duas casas para a esquerda até uma célula preta. Então, pintamos a célula branca de preto:



Considere os dois algoritmos a seguir:

*Algoritmo 1:* Use a busca em largura para calcular, para cada célula branca, a distância até a célula preta mais próxima. Isso leva tempo  $O(n)$ , e, após a busca, podemos encontrar a distância mínima de qualquer célula branca para uma célula preta em tempo  $O(1)$ .

*Algoritmo 2:* Mantenha uma lista de células que foram pintadas de preto, percorra essa lista em cada operação e adicione uma nova célula à lista. Uma operação leva tempo  $O(k)$ , onde  $k$  é o tamanho da lista.

Combinamos os algoritmos acima dividindo as operações em  $O(\sqrt{n})$  lotes, cada um dos quais consiste em  $O(\sqrt{n})$  operações. No início de cada lote, executamos o Algoritmo 1. Então, usamos o Algoritmo 2 para processar as operações no lote. Limpamos a lista do Algoritmo 2 entre os lotes. Em cada operação, a distância mínima até uma célula preta é a distância calculada pelo Algoritmo 1 ou a distância calculada pelo Algoritmo 2.

O algoritmo resultante funciona em tempo  $O(n\sqrt{n})$ . Primeiro, o Algoritmo 1 é executado  $O(\sqrt{n})$  vezes, e cada busca funciona em tempo  $O(n)$ . Segundo, ao usar o Algoritmo 2 em um lote, a lista contém  $O(\sqrt{n})$  células (porque limpamos a lista entre os lotes) e cada operação leva tempo  $O(\sqrt{n})$ .

## 27.2 Partições de inteiros

Alguns algoritmos de raiz quadrada são baseados na seguinte observação: se um inteiro positivo  $n$  é representado como uma soma de inteiros positivos, tal soma sempre contém no máximo  $O(\sqrt{n})$  números *distintos*. A razão para isso é que, para construir uma soma que contém um número máximo de elementos distintos, devemos escolher números *pequenos*. Se escolhermos os números  $1, 2, \dots, k$ , a soma resultante é

$$\frac{k(k+1)}{2}.$$

Assim, a quantidade máxima de números distintos é  $k = O(\sqrt{n})$ . A seguir, discutiremos dois problemas que podem ser resolvidos de forma eficiente usando essa observação.

### Mochila

Suponha que recebamos uma lista de pesos inteiros cuja soma é  $n$ . Nossa tarefa é descobrir todas as somas que podem ser formadas usando um subconjunto dos pesos. Por exemplo, se os pesos são  $\{1, 3, 3\}$ , as somas possíveis são as seguintes:

- 0 (conjunto vazio)
- 1
- 3
- $1 + 3 = 4$
- $3 + 3 = 6$
- $1 + 3 + 3 = 7$

Usando a abordagem padrão da mochila (veja o Capítulo 7.4), o problema pode ser resolvido da seguinte forma: definimos uma função possível( $x, k$ ) cujo valor é 1 se a soma  $x$  pode ser formada usando os primeiros  $k$  pesos, e 0 caso contrário. Como a soma dos pesos é  $n$ , existem no máximo  $n$  pesos e todos os valores da função podem ser calculados em tempo  $O(n^2)$  usando programação dinâmica.

No entanto, podemos tornar o algoritmo mais eficiente usando o fato de que existem no máximo  $O(\sqrt{n})$  pesos *distintos*. Assim, podemos processar os pesos em grupos que consistem em pesos semelhantes. Podemos processar cada grupo em tempo  $O(n)$ , o que resulta em um algoritmo de tempo  $O(n\sqrt{n})$ .

A ideia é usar um array que registre as somas de pesos que podem ser formadas usando os grupos processados até o momento. O array contém  $n$  elementos: o elemento  $k$  é 1 se a soma  $k$  pode ser formada e 0 caso contrário. Para processar um grupo de pesos, examinamos o array da esquerda para a direita e registramos as novas somas de pesos que podem ser formadas usando este grupo e os grupos anteriores.

## Construção de string

Dada uma string  $s$  de tamanho  $n$  e um conjunto de strings  $D$  cujo tamanho total é  $m$ , considere o problema de contar o número de maneiras pelas quais  $s$  pode ser formada como uma concatenação de strings em  $D$ . Por exemplo, se  $s = \text{ABAB}$  e  $D = \text{A, B, AB}$ , existem 4 maneiras:

- $\text{A} + \text{B} + \text{A} + \text{B}$
- $\text{AB} + \text{A} + \text{B}$
- $\text{A} + \text{B} + \text{AB}$
- $\text{AB} + \text{AB}$

Podemos resolver o problema usando programação dinâmica: seja  $\text{contagem}(k)$  o número de maneiras de construir o prefixo  $s[0 \dots k]$  usando as strings em  $D$ . Agora,  $\text{contagem}(n - 1)$  fornece a resposta ao problema, e podemos resolver o problema em tempo  $O(n^2)$  usando uma estrutura trie.

No entanto, podemos resolver o problema de forma mais eficiente usando hashing de strings e o fato de haver no máximo  $O(\sqrt{m})$  tamanhos de string distintos em  $D$ . Primeiro, construímos um conjunto  $H$  que contém todos os valores de hash das strings em  $D$ . Então, ao calcular um valor de  $\text{contagem}(k)$ , percorremos todos os valores de  $p$ , de forma que haja uma string de tamanho  $p$  em  $D$ , calculamos o valor de hash de  $s[k - p + 1 \dots k]$  e verificamos se ele pertence a  $H$ . Como existem no máximo  $O(\sqrt{m})$  tamanhos de string distintos, isso resulta em um algoritmo cujo tempo de execução é  $O(n\sqrt{m})$ .

## 27.3 Algoritmo de Mo

O **algoritmo de Mo**<sup>1</sup> pode ser usado em muitos problemas que exigem o processamento de consultas de intervalo em um array *estático*, ou seja, os valores do array não mudam entre as consultas. Em cada consulta, recebemos um intervalo  $[a, b]$ , e devemos calcular um valor com base nos elementos do array entre as posições  $a$  e  $b$ . Como o array é estático, as consultas podem ser processadas em qualquer ordem, e o algoritmo de Mo processa as consultas em uma ordem especial que garante que o algoritmo funcione de forma eficiente.

O algoritmo de Mo mantém um *intervalo ativo* do array, e a resposta a uma consulta referente ao intervalo ativo é conhecida a cada momento. O algoritmo processa as consultas uma a uma, e sempre move as extremidades do intervalo

<sup>1</sup>De acordo com [12], este algoritmo tem o nome de Mo Tao, um programador competitivo chinês, mas a técnica já apareceu antes na literatura [44].

ativo inserindo e removendo elementos. A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n\sqrt{n}f(n))$ , em que o array contém  $n$  elementos, há  $n$  consultas e cada inserção e remoção de um elemento leva tempo  $O(f(n))$ .

O truque no algoritmo de Mo é a ordem em que as consultas são processadas: O array é dividido em blocos de  $k = O(\sqrt{n})$  elementos, e uma consulta  $[a_1, b_1]$  é processada antes de uma consulta  $[a_2, b_2]$ , se

- $\lfloor a_1/k \rfloor < \lfloor a_2/k \rfloor$  ou
- $\lfloor a_1/k \rfloor = \lfloor a_2/k \rfloor$  e  $b_1 < b_2$ .

Assim, todas as consultas cujas extremidades esquerdas estão em um determinado bloco são processadas uma após a outra, ordenadas de acordo com suas extremidades direitas. Usando essa ordem, o algoritmo só executa  $O(n\sqrt{n})$  operações, porque a extremidade esquerda se move  $O(n)$  vezes  $O(\sqrt{n})$  etapas, e a extremidade direita se move  $O(\sqrt{n})$  vezes  $O(n)$  etapas. Assim, ambas as extremidades se movem um total de  $O(n\sqrt{n})$  etapas durante o algoritmo.

## Exemplo

Como exemplo, considere um problema onde recebemos um conjunto de consultas, cada uma delas correspondendo a um intervalo em um array, e nossa tarefa é calcular, para cada consulta, o número de elementos *distintos* no intervalo.

No algoritmo de Mo, as consultas são sempre classificadas da mesma maneira, mas depende do problema como a resposta à consulta é mantida. Neste problema, podemos manter um array contagem, em que  $\text{contagem}[x]$  indica o número de vezes que um elemento  $x$  ocorre no intervalo ativo.

Quando passamos de uma consulta para outra, o intervalo ativo muda. Por exemplo, se o intervalo atual for

4	2	5	4	2	4	3	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

e o próximo intervalo for

4	2	5	4	2	4	3	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

haverá três etapas: a extremidade esquerda se move uma etapa para a direita, e a extremidade direita se move duas etapas para a direita.

Após cada etapa, o array contagem precisa ser atualizado. Após adicionar um elemento  $x$ , aumentamos o valor de  $\text{contagem}[x]$  em 1, e, se  $\text{contagem}[x] = 1$  depois disso, também aumentamos a resposta à consulta em 1. Da mesma forma, após remover um elemento  $x$ , diminuimos o valor de  $\text{contagem}[x]$  em 1, e, se  $\text{contagem}[x] = 0$  depois disso, também diminuimos a resposta à consulta em 1.

Neste problema, o tempo necessário para executar cada etapa é  $O(1)$ , então a complexidade de tempo total do algoritmo é  $O(n\sqrt{n})$ .

## Capítulo 28

# Árvores de segmentos revisitadas

Uma árvore de segmentos é uma estrutura de dados versátil que pode ser usada para resolver um grande número de problemas algorítmicos. No entanto, há muitos tópicos relacionados a árvores de segmentos que ainda não abordamos. Agora é hora de discutir algumas variantes mais avançadas de árvores de segmentos.

Até agora, implementamos as operações de uma árvore de segmentos percorrendo *de baixo para cima* na árvore. Por exemplo, calculamos somas de intervalo da seguinte forma (Capítulo 9.3):

```
int sum(int a, int b) {
    a += n; b += n;
    int s = 0;
    while (a <= b) {
        if (a%2 == 1) s += tree[a++];
        if (b%2 == 0) s += tree[b--];
        a /= 2; b /= 2;
    }
    return s;
}
```

No entanto, em árvores de segmentos mais avançadas, muitas vezes é necessário implementar as operações de outra forma, *de cima para baixo*. Usando essa abordagem, a função se torna a seguinte:

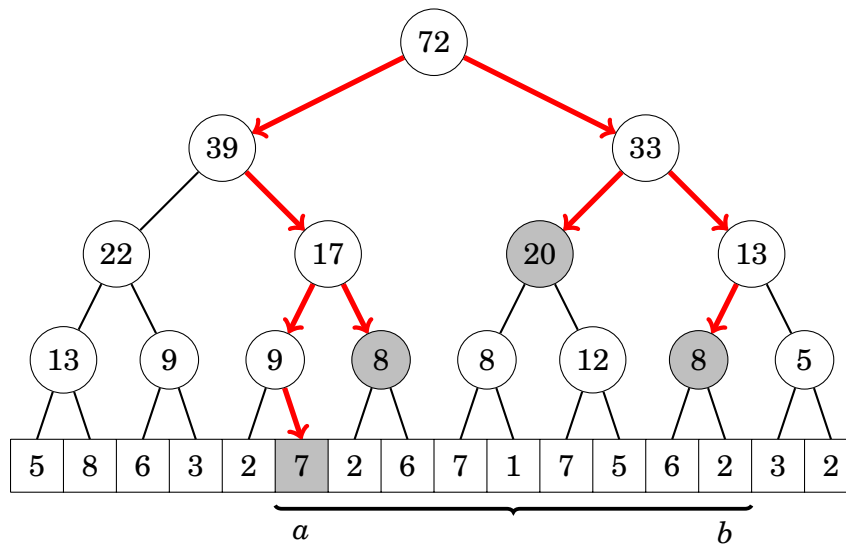
```
int sum(int a, int b, int k, int x, int y) {
    if (b < x || a > y) return 0;
    if (a <= x && y <= b) return tree[k];
    int d = (x+y)/2;
    return sum(a,b,2*k,x,d) + sum(a,b,2*k+1,d+1,y);
}
```

Agora podemos calcular qualquer valor de  $\text{sum}_q(a, b)$  (a soma dos valores do array no intervalo  $[a, b]$ ) da seguinte forma:

```
int s = sum(a, b, 1, 0, n-1);
```

O parâmetro  $k$  indica a posição atual em tree. Inicialmente,  $k$  é igual a 1, porque começamos na raiz da árvore. O intervalo  $[x, y]$  corresponde a  $k$  e é inicialmente  $[0, n - 1]$ . Ao calcular a soma, se  $[x, y]$  estiver fora de  $[a, b]$ , a soma será 0 e, se  $[x, y]$  estiver completamente dentro de  $[a, b]$ , a soma poderá ser encontrada em tree. Se  $[x, y]$  estiver parcialmente dentro de  $[a, b]$ , a busca continuará recursivamente para a metade esquerda e direita de  $[x, y]$ . A metade esquerda é  $[x, d]$  e a metade direita é  $[d + 1, y]$ , onde  $d = \lfloor \frac{x+y}{2} \rfloor$ .

A figura a seguir mostra como a busca prossegue ao calcular o valor de  $\text{sum}_q(a, b)$ . Os nós cinzas indicam nós onde a recursão para e a soma pode ser encontrada em tree.



Também nesta implementação, as operações levam tempo  $O(\log n)$ , pois o número total de nós visitados é  $O(\log n)$ .

## 28.1 Propagação preguiçosa

Usando **propagação preguiçosa**, podemos construir uma árvore de segmentos que suporta *tanto* atualizações de intervalo quanto consultas de intervalo em tempo  $O(\log n)$ . A ideia é realizar atualizações e consultas de cima para baixo e realizar atualizações *preguiçosamente*, de forma que sejam propagadas para baixo na árvore apenas quando necessário.

Em uma árvore de segmentos preguiçosa, os nós contêm dois tipos de informação. Como em uma árvore de segmentos comum, cada nó contém a soma ou algum outro valor relacionado ao subarray correspondente. Além disso, o nó pode conter informações relacionadas a atualizações preguiçosas, que não foram propagadas para seus filhos.

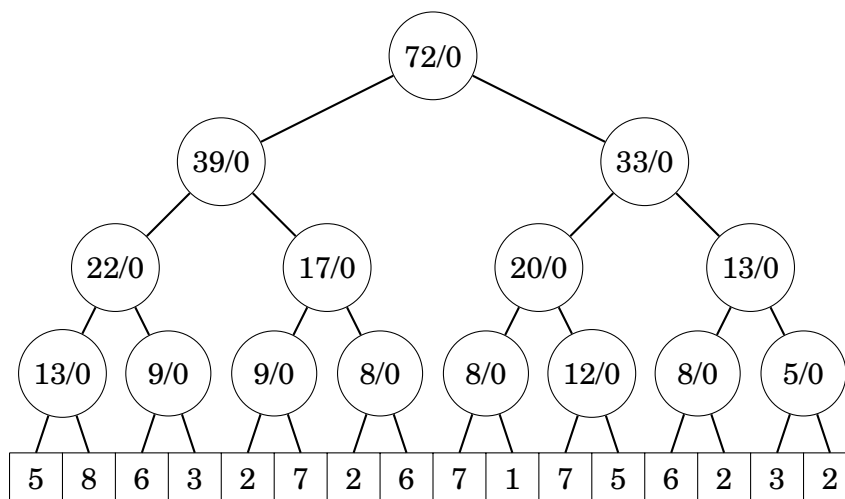
Existem dois tipos de atualizações de intervalo: cada valor do array no intervalo é *aumentado* em algum valor ou *atribuído* a algum valor. Ambas as operações podem ser implementadas usando ideias semelhantes e é até possível construir uma árvore que suporte ambas as operações ao mesmo tempo.



## Árvores de segmentos preguiçosas

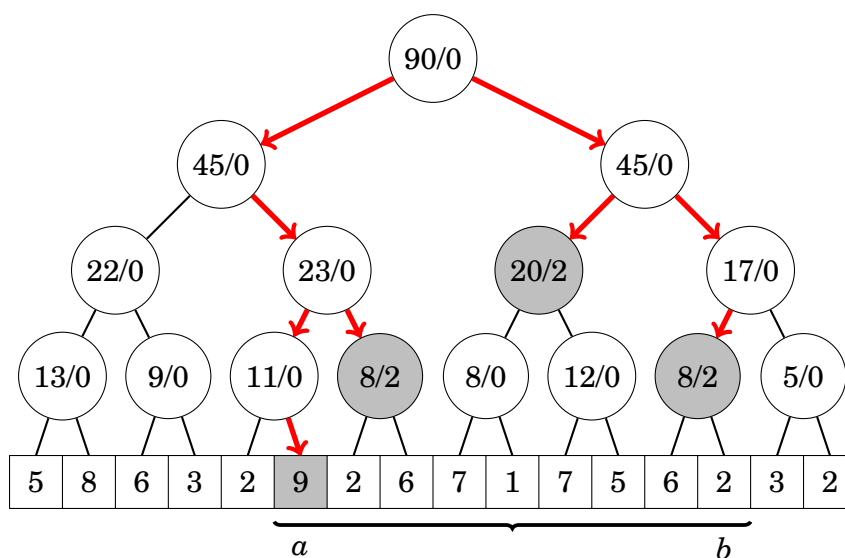
Vamos considerar um exemplo em que nosso objetivo é construir uma árvore de segmentos que suporte duas operações: aumentar cada valor em  $[a, b]$  por uma constante e calcular a soma dos valores em  $[a, b]$ .

Vamos construir uma árvore onde cada nó tem dois valores  $s/z$ :  $s$  denota a soma dos valores no intervalo e  $z$  denota o valor de uma atualização preguiçosa, o que significa que todos os valores no intervalo devem ser aumentados em  $z$ . Na árvore a seguir,  $z = 0$  em todos os nós, portanto, não há atualizações preguiçosas em andamento.



Quando os elementos em  $[a, b]$  são aumentados em  $u$ , caminhamos da raiz em direção às folhas e modificamos os nós da árvore da seguinte forma: Se o intervalo  $[x, y]$  de um nó estiver completamente dentro de  $[a, b]$ , aumentamos o valor  $z$  do nó em  $u$  e paramos. Se  $[x, y]$  pertencer apenas parcialmente a  $[a, b]$ , aumentamos o valor  $s$  do nó em  $hu$ , onde  $h$  é o tamanho da interseção de  $[a, b]$  e  $[x, y]$  e continuamos nossa caminhada recursivamente na árvore.

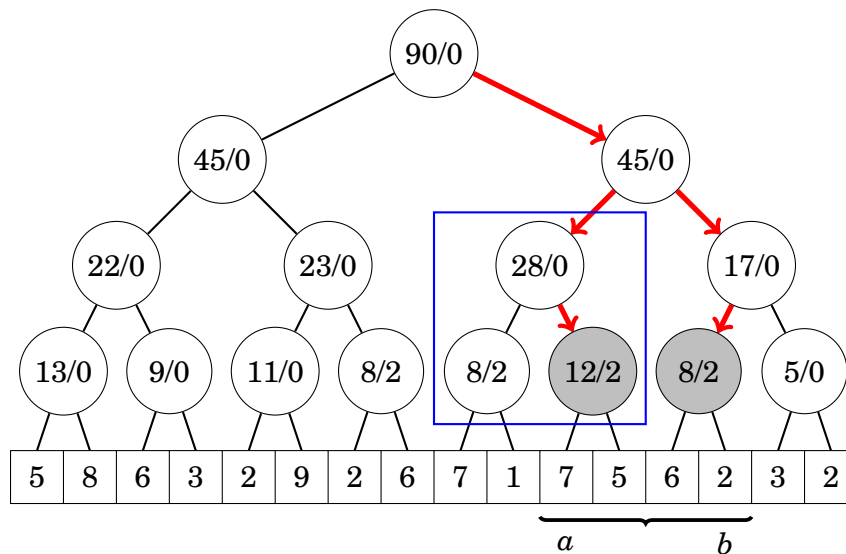
Por exemplo, a figura a seguir mostra a árvore após aumentar os elementos em  $[a, b]$  em 2:



Também calculamos a soma dos elementos em um intervalo  $[a, b]$  caminhando na árvore de cima para baixo. Se o intervalo  $[x, y]$  de um nó pertencer completamente a  $[a, b]$ , adicionamos o valor  $s$  do nó à soma. Caso contrário, continuamos a busca recursivamente para baixo na árvore.

Tanto nas atualizações quanto nas consultas, o valor de uma atualização preguiçosa é sempre propagado para os filhos do nó antes de processar o nó. A ideia é que as atualizações sejam propagadas para baixo apenas quando necessário, o que garante que as operações sejam sempre eficientes.

A figura a seguir mostra como a árvore muda quando calculamos o valor de  $\text{sum}_a(a, b)$ . O retângulo mostra os nós cujos valores mudam, porque uma atualização preguiçosa é propagada para baixo.



Observe que às vezes é necessário combinar atualizações preguiçosas. Isso acontece quando um nó que já possui uma atualização preguiçosa recebe outra atualização preguiçosa. Ao calcular as somas, é fácil combinar atualizações preguiçosas, pois a combinação das atualizações  $z_1$  e  $z_2$  corresponde a uma atualização  $z_1 + z_2$ .

## Atualizações polinomiais

As atualizações preguiçosas podem ser generalizadas para que seja possível atualizar intervalos usando polinômios da forma

$$p(u) = t_k u^k + t_{k-1} u^{k-1} + \dots + t_0.$$

Nesse caso, a atualização de um valor na posição  $i$  em  $[a, b]$  é  $p(i - a)$ . Por exemplo, adicionar o polinômio  $p(u) = u + 1$  a  $[a, b]$  significa que o valor na posição  $a$  aumenta em 1, o valor na posição  $a + 1$  aumenta em 2 e assim por diante.

Para suportar atualizações polinomiais, cada nó recebe  $k + 2$  valores, onde  $k$  é igual ao grau do polinômio. O valor  $s$  é a soma dos elementos no intervalo e os valores  $z_0, z_1, \dots, z_k$  são os coeficientes de um polinômio que corresponde a uma atualização preguiçosa

Agora, a soma dos valores em um intervalo  $[x, y]$  é igual a

$$s + \sum_{u=0}^{y-x} z_k u^k + z_{k-1} u^{k-1} + \dots + z_0.$$

O valor de tal soma pode ser calculado eficientemente usando fórmulas de soma. Por exemplo, o termo  $z_0$  corresponde à soma  $(y-x+1)z_0$  e o termo  $z_1 u$  corresponde à soma

$$z_1(0 + 1 + \dots + y - x) = z_1 \frac{(y-x)(y-x+1)}{2}.$$

Ao propagar uma atualização na árvore, os índices de  $p(u)$  mudam, pois em cada intervalo  $[x, y]$ , os valores são calculados para  $u = 0, 1, \dots, y - x$ . No entanto, isso não é um problema, pois  $p'(u) = p(u + h)$  é um polinômio de mesmo grau que  $p(u)$ . Por exemplo, se  $p(u) = t_2 u^2 + t_1 u - t_0$ , então

$$p'(u) = t_2(u+h)^2 + t_1(u+h) - t_0 = t_2 u^2 + (2ht_2 + t_1)u + t_2 h^2 + t_1 h - t_0.$$

## 28.2 Árvores dinâmicas

Uma árvore de segmentos comum é estática, o que significa que cada nó tem uma posição fixa no array e a árvore requer uma quantidade fixa de memória. Em uma **árvore de segmentos dinâmica**, a memória é alocada apenas para nós que são realmente acessados durante o algoritmo, o que pode economizar uma grande quantidade de memória.

Os nós de uma árvore dinâmica podem ser representados como structs:

```
struct node {
    int value;
    int x, y;
    node *left, *right;
    node(int v, int x, int y) : value(v), x(x), y(y) {}
};
```

Aqui, `value` é o valor do nó, `[x,y]` é o intervalo correspondente e `left` e `right` apontam para a subárvore esquerda e direita.

Depois disso, os nós podem ser criados da seguinte forma:

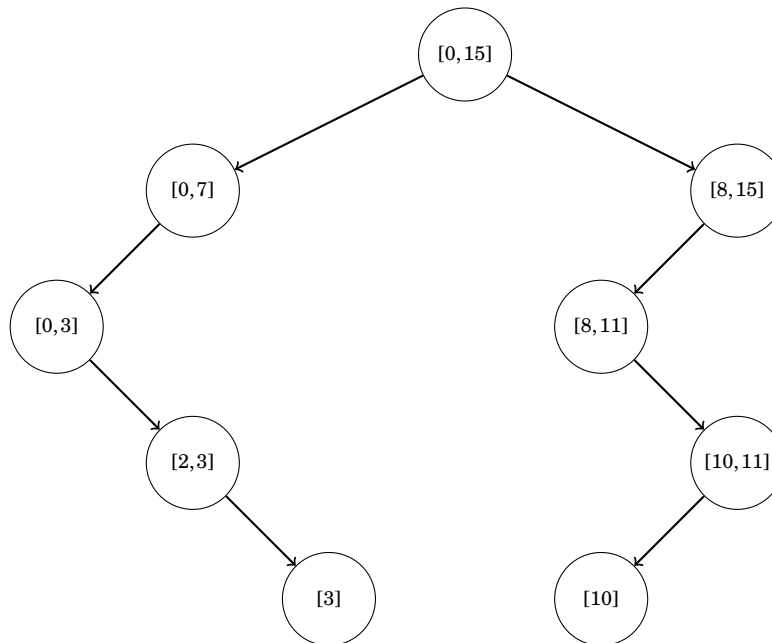
```
// cria um novo nó
node *x = new node(0, 0, 15);
// altera o valor
x->value = 5;
```

### Árvores de segmentos esparsas

Uma árvore de segmentos dinâmica é útil quando o array subjacente é *esparso*, ou seja, o intervalo  $[0, n-1]$  de índices permitidos é grande, mas a maioria dos valores

do array são zeros. Enquanto uma árvore de segmentos comum usa memória  $O(n)$ , uma árvore de segmentos dinâmica usa apenas memória  $O(k \log n)$ , onde  $k$  é o número de operações realizadas.

Uma **árvore de segmentos esparsa** inicialmente tem apenas um nó  $[0, n-1]$  cujo valor é zero, o que significa que todos os valores do array são zero. Após as atualizações, novos nós são adicionados dinamicamente à árvore. Por exemplo, se  $n = 16$  e os elementos nas posições 3 e 10 foram modificados, a árvore contém os seguintes nós:



Qualquer caminho do nó raiz a uma folha contém  $O(\log n)$  nós, então cada operação adiciona no máximo  $O(\log n)$  novos nós à árvore. Assim, após  $k$  operações, a árvore contém no máximo  $O(k \log n)$  nós.

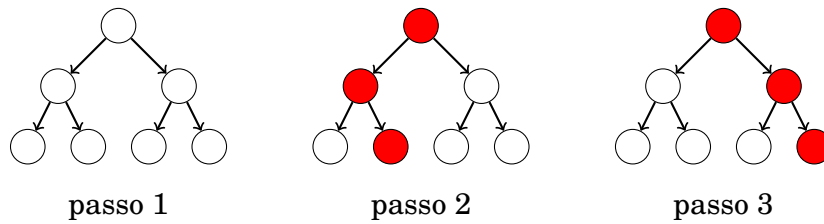
Observe que, se soubermos todos os elementos a serem atualizados no início do algoritmo, uma árvore de segmentos dinâmica não será necessária, pois podemos usar uma árvore de segmentos comum com compressão de índice (Capítulo 9.4). No entanto, isso não é possível quando os índices são gerados durante o algoritmo.

## Árvores de segmentos persistentes

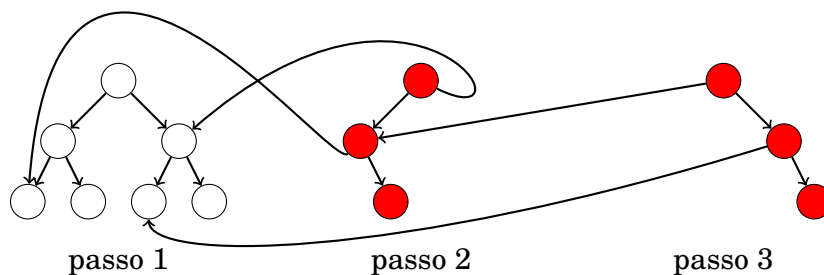
Usando uma implementação dinâmica, também é possível criar uma **árvore de segmentos persistente** que armazena o *histórico de modificações* da árvore. Em tal implementação, podemos acessar com eficiência todas as versões da árvore que existiram durante o algoritmo.

Quando o histórico de modificações está disponível, podemos realizar consultas em qualquer árvore anterior como em uma árvore de segmentos comum, pois a estrutura completa de cada árvore é armazenada. Também podemos criar novas árvores com base em árvores anteriores e modificá-las independentemente.

Considere a seguinte sequência de atualizações, onde os nós vermelhos mudam e os outros nós permanecem os mesmos:



Após cada atualização, a maioria dos nós da árvore permanece a mesma, então uma maneira eficiente de armazenar o histórico de modificações é representar cada árvore no histórico como uma combinação de novos nós e subárvores de árvores anteriores. Neste exemplo, o histórico de modificações pode ser armazenado da seguinte forma:



A estrutura de cada árvore anterior pode ser reconstruída seguindo os ponteiros a partir do nó raiz correspondente. Como cada operação adiciona apenas  $O(\log n)$  novos nós à árvore, é possível armazenar todo o histórico de modificações da árvore.

## 28.3 Estruturas de dados

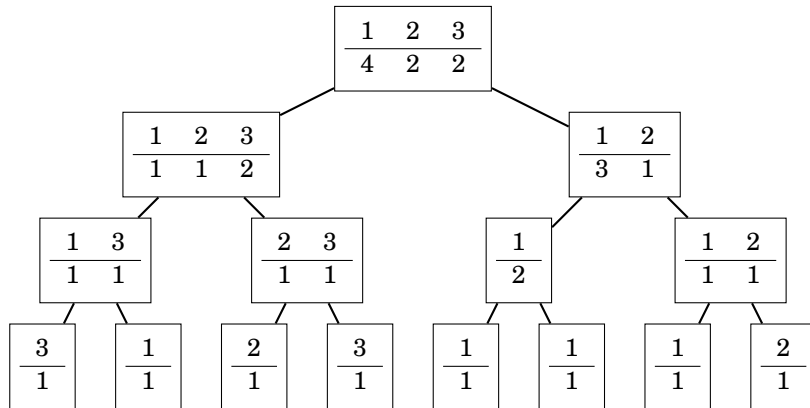
Em vez de valores únicos, os nós em uma árvore de segmentos também podem conter *estruturas de dados* que mantêm informações sobre os intervalos correspondentes. Em tal árvore, as operações levam tempo  $O(f(n)\log n)$ , onde  $f(n)$  é o tempo necessário para processar um único nó durante uma operação.

Como exemplo, considere uma árvore de segmentos que suporta consultas da forma "quantas vezes um elemento  $x$  aparece no intervalo  $[a, b]$ ?" Por exemplo, o elemento 1 aparece três vezes no intervalo a seguir:

3	1	2	3	1	1	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

Para suportar tais consultas, construímos uma árvore de segmentos onde cada nó é associado a uma estrutura de dados que pode ser consultada sobre quantas vezes qualquer elemento  $x$  aparece no intervalo correspondente. Usando essa árvore, a resposta a uma consulta pode ser calculada combinando os resultados dos nós que pertencem ao intervalo.

Por exemplo, a seguinte árvore de segmentos corresponde ao array acima:



Podemos construir a árvore de forma que cada nó contenha uma estrutura de map. Nesse caso, o tempo necessário para processar cada nó é  $O(\log n)$ , então a complexidade de tempo total de uma consulta é  $O(\log^2 n)$ . A árvore usa memória  $O(n \log n)$ , pois existem  $O(\log n)$  níveis e cada nível contém  $O(n)$  elementos.

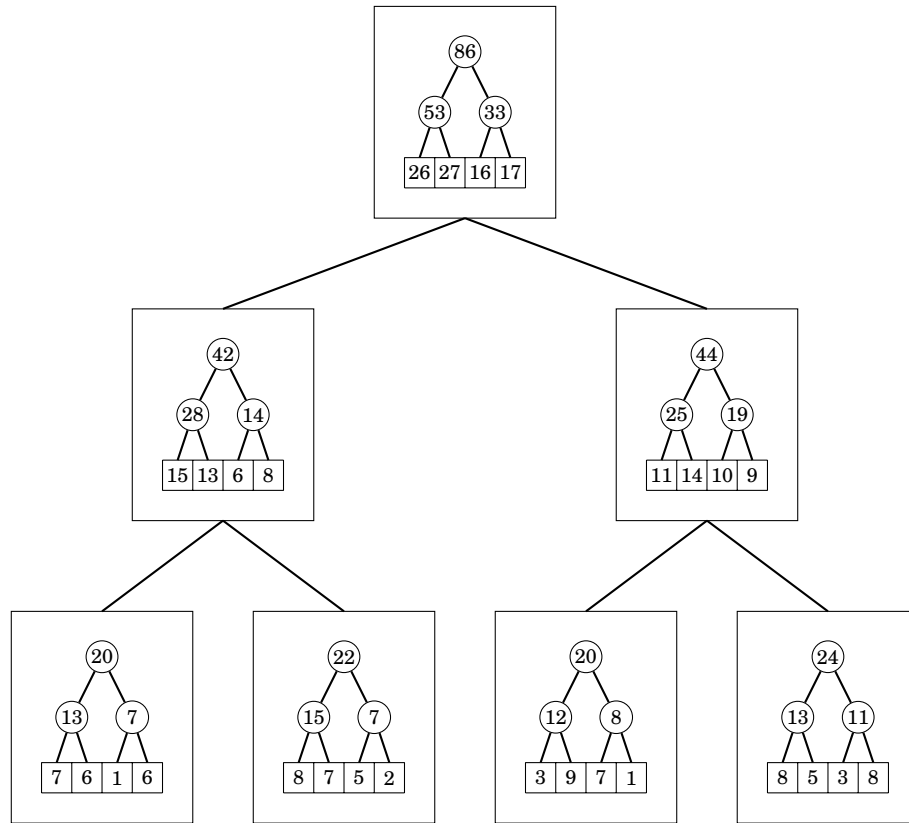
## 28.4 Bidimensionalidade

Uma **árvore de segmentos bidimensional** suporta consultas relacionadas a submatrizes retangulares de um array bidimensional. Essa árvore pode ser implementada como árvores de segmentos aninhadas: uma árvore grande corresponde às linhas do array e cada nó contém uma árvore pequena que corresponde a uma coluna.

Por exemplo, no array

7	6	1	6
8	7	5	2
3	9	7	1
8	5	3	8

a soma de qualquer submatriz pode ser calculada a partir da seguinte árvore de segmentos:



As operações de uma árvore de segmentos bidimensional levam tempo  $O(\log^2 n)$ , pois a árvore grande e cada árvore pequena consistem em  $O(\log n)$  níveis. A árvore requer  $O(n^2)$  de memória, pois cada árvore pequena contém  $O(n)$  valores.



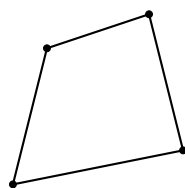


# Capítulo 29

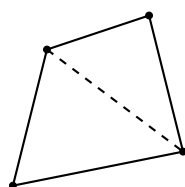
## Geometria

Em problemas geométricos, geralmente é desafiador encontrar uma maneira de abordar o problema de forma que a solução possa ser implementada convenientemente e o número de casos especiais seja pequeno.

Como exemplo, considere um problema em que são dados os vértices de um quadrilátero (um polígono que possui quatro vértices) e nossa tarefa é calcular sua área. Por exemplo, uma entrada possível para o problema é a seguinte:



Uma maneira de abordar o problema é dividir o quadrilátero em dois triângulos por uma linha reta entre dois vértices opostos:

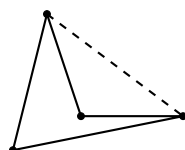


Após isso, basta somar as áreas dos triângulos. A área de um triângulo pode ser calculada, por exemplo, usando a **fórmula de Heron**

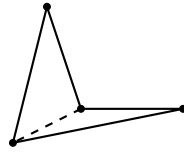
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos dos lados do triângulo e  $s = (a + b + c)/2$ .

Esta é uma maneira possível de resolver o problema, mas há uma armadilha: como dividir o quadrilátero em triângulos? Acontece que às vezes não podemos simplesmente escolher dois vértices opostos arbitrários. Por exemplo, na seguinte situação, a linha de divisão está *fora* do quadrilátero:



No entanto, outra maneira de desenhar a linha funciona:



É claro para um humano qual das linhas é a escolha correta, mas a situação é difícil para um computador.

No entanto, verifica-se que podemos resolver o problema usando outro método que é mais conveniente para um programador. Ou seja, existe uma fórmula geral

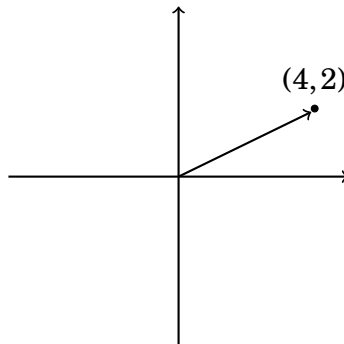
$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4,$$

que calcula a área de um quadrilátero cujos vértices são  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  e  $(x_4, y_4)$ . Esta fórmula é fácil de implementar, não há casos especiais e podemos até generalizar a fórmula para *todos* os polígonos.

## 29.1 Números Complexos

Um **número complexo** é um número da forma  $x + yi$ , onde  $i = \sqrt{-1}$  é a **unidade imaginária**. Uma interpretação geométrica de um número complexo é que ele representa um ponto bidimensional  $(x, y)$  ou um vetor da origem para um ponto  $(x, y)$ .

Por exemplo,  $4 + 2i$  corresponde ao seguinte ponto e vetor:



A classe de número complexo `complex` do C++ é útil ao resolver problemas geométricos. Usando a classe, podemos representar pontos e vetores como números complexos, e a classe contém ferramentas que são úteis em geometria.

No código a seguir, `C` é o tipo de uma coordenada e `P` é o tipo de um ponto ou um vetor. Além disso, o código define as macros `X` e `Y` que podem ser usadas para se referir às coordenadas `x` e `y`.

```
typedef long long C;  
typedef complex<C> P;  
#define X real()  
#define Y imag()
```

Por exemplo, o código a seguir define um ponto  $p = (4, 2)$  e imprime suas coordenadas  $x$  e  $y$ :

```
P p = {4, 2};  
cout << p.X << " " << p.Y << "\n"; // 4 2
```

O código a seguir define os vetores  $v = (3, 1)$  e  $u = (2, 2)$ , e depois calcula a soma  $s = v + u$ .

```
P v = {3, 1};  
P u = {2, 2};  
P s = v+u;  
cout << s.X << " " << s.Y << "\n"; // 5 3
```

Na prática, um tipo de coordenada apropriado é geralmente `long` (inteiro) ou `long double` (número real). É uma boa ideia usar inteiro sempre que possível, porque os cálculos com inteiros são exatos. Se números reais forem necessários, os erros de precisão devem ser levados em consideração ao comparar números. Uma maneira segura de verificar se os números reais  $a$  e  $b$  são iguais é compará-los usando  $|a - b| < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um número pequeno (por exemplo,  $\epsilon = 10^{-9}$ ).

## Funções

Nos exemplos a seguir, o tipo de coordenada é `long double`.

A função `abs(v)` calcula o comprimento  $|v|$  de um vetor  $v = (x, y)$  usando a fórmula  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . A função também pode ser usada para calcular a distância entre os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , porque essa distância é igual ao comprimento do vetor  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

O código a seguir calcula a distância entre os pontos  $(4, 2)$  e  $(3, -1)$ :

```
P a = {4, 2};  
P b = {3, -1};  
cout << abs(b-a) << "\n"; // 3.16228
```

A função `arg(v)` calcula o ângulo de um vetor  $v = (x, y)$  em relação ao eixo  $x$ . A função fornece o ângulo em radianos, onde  $r$  radianos é igual a  $180r/\pi$  graus. O ângulo de um vetor que aponta para a direita é 0, e os ângulos diminuem no sentido horário e aumentam no sentido anti-horário.

A função `polar(s, a)` constrói um vetor cujo comprimento é  $s$  e que aponta para um ângulo  $a$ . Um vetor pode ser girado por um ângulo  $a$  multiplicando-o por um vetor com comprimento 1 e ângulo  $a$ .

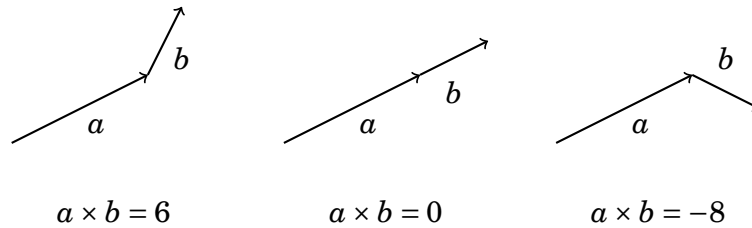
O código a seguir calcula o ângulo de o vetor  $(4, 2)$ , gira-o  $1/2$  radianos no sentido anti-horário e, em seguida, calcula o ângulo novamente:

```
P v = {4, 2};  
cout << arg(v) << "\n"; // 0.463648  
v *= polar(1.0, 0.5);  
cout << arg(v) << "\n"; // 0.963648
```

## 29.2 Pontos e Linhas

O **produto vetorial**  $a \times b$  de vetores  $a = (x_1, y_1)$  e  $b = (x_2, y_2)$  é calculado usando a fórmula  $x_1y_2 - x_2y_1$ . O produto vetorial nos diz se  $b$  gira para a esquerda (valor positivo), não gira (zero) ou gira para a direita (valor negativo) quando é colocado diretamente após  $a$ .

A figura a seguir ilustra os casos acima:



Por exemplo, no primeiro caso  $a = (4, 2)$  e  $b = (1, 2)$ . O código a seguir calcula o produto vetorial usando a classe `complex`:

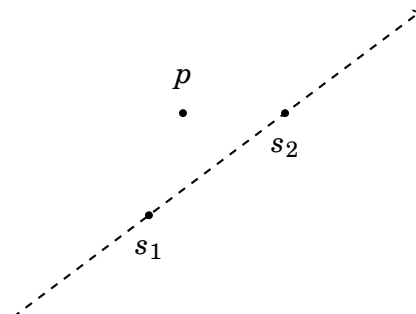
```
P a = {4,2};  
P b = {1,2};  
C p = (conj(a)*b).Y; // 6
```

O código acima funciona porque a função `conj` inverte o sinal da coordenada  $y$  de um vetor, e quando os vetores  $(x_1, -y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são multiplicados, a coordenada  $y$  do resultado é  $x_1y_2 - x_2y_1$ .

### Localização do Ponto

Produtos vetoriais podem ser usados para testar se um ponto está localizado à esquerda ou à direita de uma linha. Assuma que a linha passa pelos pontos  $s_1$  e  $s_2$ , estamos olhando de  $s_1$  para  $s_2$  e o ponto é  $p$ .

Por exemplo, na figura a seguir,  $p$  está no lado esquerdo da linha:

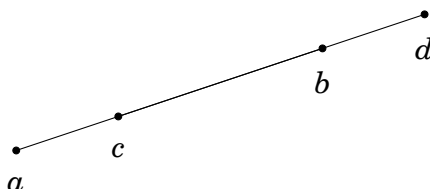


O produto vetorial  $(p - s_1) \times (p - s_2)$  nos diz a localização do ponto  $p$ . Se o produto vetorial for positivo,  $p$  está localizado no lado esquerdo, e se o produto vetorial for negativo,  $p$  está localizado no lado direito. Finalmente, se o produto vetorial for zero, os pontos  $s_1$ ,  $s_2$  e  $p$  estão na mesma linha.

## Interseção de Segmentos de Linha

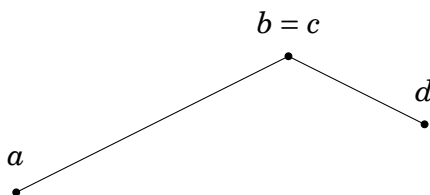
A seguir, consideramos o problema de testar se dois segmentos de linha  $ab$  e  $cd$  se cruzam. Os casos possíveis são:

*Caso 1:* Os segmentos de linha estão na mesma linha e eles se sobrepõem. Nesse caso, há um número infinito de pontos de interseção. Por exemplo, na figura a seguir, todos os pontos entre  $c$  e  $b$  são pontos de interseção:



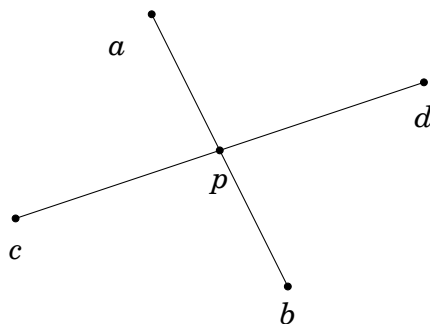
Neste caso, podemos usar produtos vetoriais para verificar se todos os pontos estão na mesma linha. Depois disso, podemos classificar os pontos e verificar se os segmentos de linha se sobrepõem.

*Caso 2:* Os segmentos de linha têm um vértice comum que é o único ponto de interseção. Por exemplo, na figura a seguir o ponto de interseção é  $b = c$ :



Este caso é fácil de verificar, porque existem apenas quatro possibilidades para o ponto de interseção:  $a = c$ ,  $a = d$ ,  $b = c$  e  $b = d$ .

*Caso 3:* Existe exatamente um ponto de interseção que não é um vértice de nenhum segmento de linha. Na figura a seguir, o ponto  $p$  é o ponto de interseção:



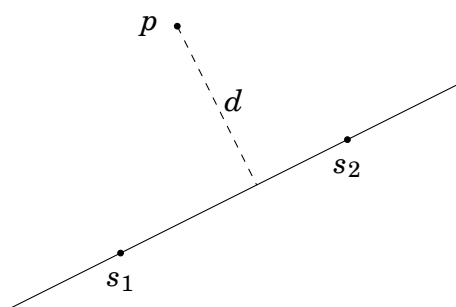
Neste caso, os segmentos de linha se cruzam exatamente quando ambos os pontos  $c$  e  $d$  estão em lados diferentes de uma linha que passa por  $a$  e  $b$ , e os pontos  $a$  e  $b$  estão em diferentes lados de uma linha que passa por  $c$  e  $d$ . Podemos usar produtos vetoriais para verificar isso.

## Distância de um Ponto a uma Linha

Outra característica dos produtos vetoriais é que a área de um triângulo pode ser calculada usando a fórmula

$$\frac{|(a - c) \times (b - c)|}{2},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os vértices do triângulo. Usando esse fato, podemos derivar uma fórmula para calcular a distância mais curta entre um ponto e uma linha. Por exemplo, na figura a seguir  $d$  é a distância mais curta entre o ponto  $p$  e a linha que é definida pelos pontos  $s_1$  e  $s_2$ :

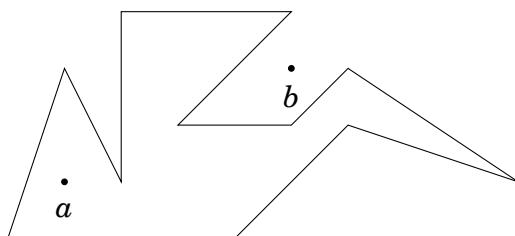


A área do triângulo cujos vértices são  $s_1$ ,  $s_2$  e  $p$  podem ser calculados de duas maneiras: é ambos  $\frac{1}{2}|s_2 - s_1|d$  e  $\frac{1}{2}((s_1 - p) \times (s_2 - p))$ . Assim, a distância mais curta é

$$d = \frac{(s_1 - p) \times (s_2 - p)}{|s_2 - s_1|}.$$

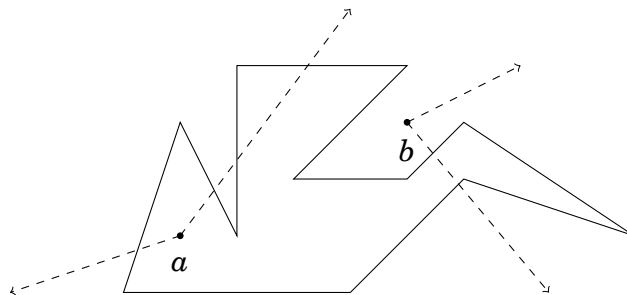
## Ponto Dentro de um Polígono

Vamos agora considerar o problema de testar se um ponto está localizado dentro ou fora de um polígono. Por exemplo, na figura a seguir, o ponto  $a$  está dentro do polígono e o ponto  $b$  está fora do polígono.



Uma maneira conveniente de resolver o problema é enviar um *raio* do ponto para uma direção arbitrária e calcular o número de vezes que ele toca a fronteira do polígono. Se o número for ímpar, o ponto está dentro do polígono, e se o número for par, o ponto está fora do polígono.

Por exemplo, podemos enviar os seguintes raios:



Os raios de  $a$  tocam 1 e 3 vezes a fronteira do polígono, então  $a$  está dentro do polígono. Correspondentemente, os raios de  $b$  tocam 0 e 2 vezes a fronteira do polígono, então  $b$  está fora do polígono.

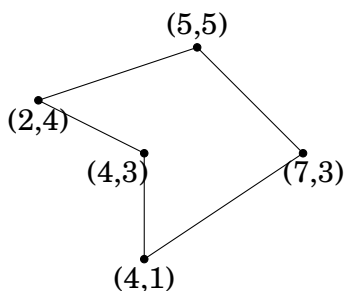
## 29.3 Área do Polígono

Uma fórmula geral para calcular a área de um polígono, às vezes chamada de **fórmula do cadarço**, é como se segue:

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (p_i \times p_{i+1}) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|,$$

Aqui, os vértices são  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ , ...,  $p_n = (x_n, y_n)$  em uma ordem tal que  $p_i$  e  $p_{i+1}$  são vértices adjacentes na fronteira do polígono, e o primeiro e o último vértice são iguais, ou seja,  $p_1 = p_n$ .

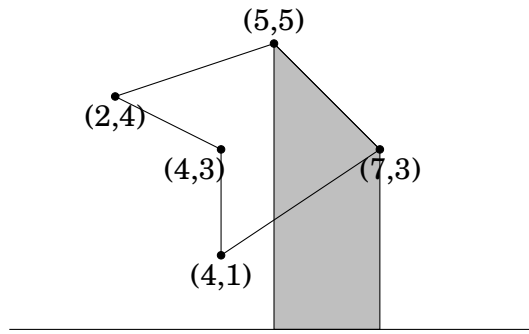
Por exemplo, a área do polígono



é

$$\frac{|(2 \cdot 5 - 5 \cdot 4) + (5 \cdot 3 - 7 \cdot 5) + (7 \cdot 1 - 4 \cdot 3) + (4 \cdot 3 - 4 \cdot 1) + (4 \cdot 4 - 2 \cdot 3)|}{2} = 17/2.$$

A ideia da fórmula é passar por trapézios cujo um lado é um lado do polígono, e o outro lado fica na linha horizontal  $y = 0$ . Por exemplo:



A área de tal trapézio é

$$(x_{i+1} - x_i) \frac{y_i + y_{i+1}}{2},$$

onde os vértices do polígono são  $p_i$  e  $p_{i+1}$ . Se  $x_{i+1} > x_i$ , a área é positiva, e se  $x_{i+1} < x_i$ , a área é negativa.

A área do polígono é a soma das áreas de todos esses trapézios, o que produz a fórmula

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|.$$

Observe que o valor absoluto da soma é considerado, porque o valor da soma pode ser positivo ou negativo, dependendo se caminhamos no sentido horário ou anti-horário ao longo da fronteira do polígono.

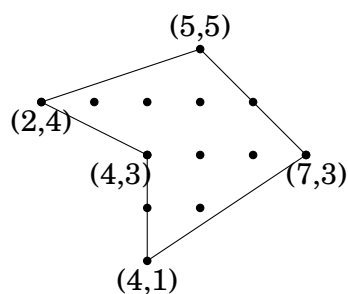
## Teorema de Pick

O **Teorema de Pick** fornece outra maneira de calcular a área de um polígono, desde que todos os vértices do polígono tenham coordenadas inteiras. De acordo com o Teorema de Pick, a área do polígono é

$$a + b/2 - 1,$$

onde  $a$  é o número de pontos inteiros dentro do polígono e  $b$  é o número de pontos inteiros na fronteira do polígono.

Por exemplo, a área do polígono



é  $6 + 7/2 - 1 = 17/2$ .



## 29.4 Funções de Distância

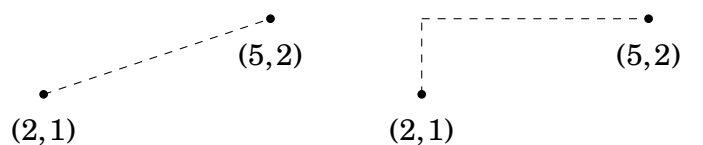
Uma **função de distância** define a distância entre dois pontos. A função de distância usual é a **distância euclidiana** onde a distância entre os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Uma função de distância alternativa é a **distância de Manhattan**, onde a distância entre os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Por exemplo, considere a seguinte imagem:



Distância Euclidiana

Distância de Manhattan

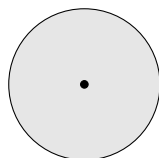
A distância euclidiana entre os pontos é

$$\sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

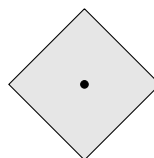
e a distância de Manhattan é

$$|5 - 2| + |2 - 1| = 4.$$

A figura a seguir mostra as regiões que estão a uma distância de 1 do ponto central, usando as distâncias euclidiana e de Manhattan:



Distância Euclidiana

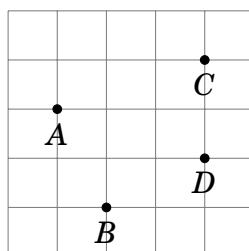


Distância de Manhattan

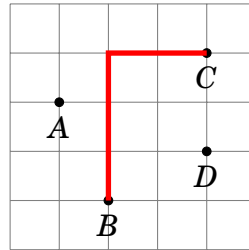
## Rotação de Coordenadas

Alguns problemas são mais fáceis de resolver se as distâncias de Manhattan forem usadas em vez das distâncias euclidianas. Como exemplo, considere um problema em que recebemos  $n$  pontos no plano bidimensional e nossa tarefa é calcular a distância máxima de Manhattan entre quaisquer dois pontos.

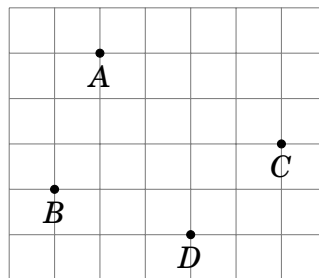
Por exemplo, considere o seguinte conjunto de pontos:



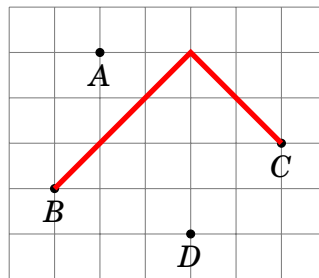
A distância máxima de Manhattan é 5 entre os pontos  $B$  e  $C$ :



Uma técnica útil relacionada às distâncias de Manhattan é girar todas as coordenadas 45 graus para que um ponto  $(x, y)$  se torne  $(x + y, y - x)$ . Por exemplo, após girar os pontos acima, o resultado é:



E a distância máxima é a seguinte:



Considere dois pontos  $p_1 = (x_1, y_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2)$  cujas coordenadas giradas são  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  e  $p'_2 = (x'_2, y'_2)$ . Agora, existem duas maneiras de expressar a distância de Manhattan entre  $p_1$  e  $p_2$ :

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \max(|x'_1 - x'_2|, |y'_1 - y'_2|)$$

Por exemplo, se  $p_1 = (1, 0)$  e  $p_2 = (3, 3)$ , as coordenadas giradas são  $p'_1 = (1, -1)$  e  $p'_2 = (6, 0)$  e a distância de Manhattan é

$$|1 - 3| + |0 - 3| = \max(|1 - 6|, |-1 - 0|) = 5.$$

As coordenadas giradas fornecem uma maneira simples de operar com distâncias de Manhattan, porque podemos considerar as coordenadas  $x$  e  $y$  separadamente. Para maximizar a distância de Manhattan entre dois pontos, devemos encontrar dois pontos cujas coordenadas giradas maximizem o valor de

$$\max(|x'_1 - x'_2|, |y'_1 - y'_2|).$$

Isso é fácil, porque a diferença horizontal ou vertical das coordenadas giradas deve ser máxima.

## Capítulo 30

# Algoritmos de linha de varredura

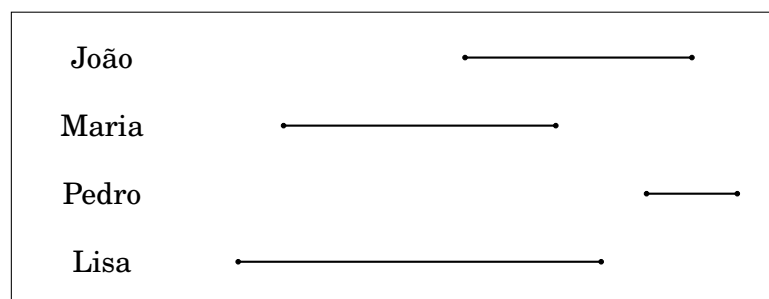
Muitos problemas geométricos podem ser resolvidos usando algoritmos de **linha de varredura**. A ideia em tais algoritmos é representar uma instância do problema como um conjunto de eventos que correspondem a pontos no plano. Os eventos são processados em ordem crescente de acordo com suas coordenadas  $x$  ou  $y$ .

Como exemplo, considere o seguinte problema: Há uma empresa que tem  $n$  funcionários, e sabemos para cada funcionário seus horários de chegada e saída em um determinado dia. Nossa tarefa é calcular o número máximo de funcionários que estavam no escritório ao mesmo tempo.

O problema pode ser resolvido modelando a situação de forma que cada funcionário receba dois eventos que correspondem aos seus horários de chegada e saída. Após ordenar os eventos, nós os percorremos e mantemos o controle do número de pessoas no escritório. Por exemplo, a tabela

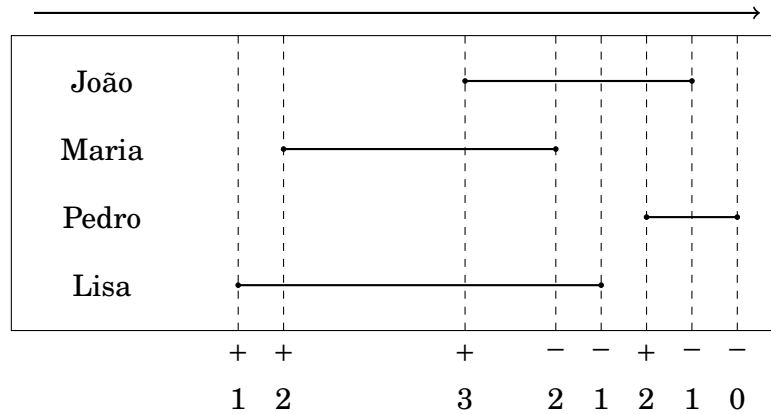
pessoa	horário de chegada	horário de saída
João	10	15
Maria	6	12
Pedro	14	16
Lisa	5	13

corresponde aos seguintes eventos:



Percorremos os eventos da esquerda para a direita e mantemos um contador. Sempre que uma pessoa chega, aumentamos o valor do contador em um, e quando uma pessoa sai, diminuímos o valor do contador em um. A resposta para o problema é o valor máximo do contador durante o algoritmo.

No exemplo, os eventos são processados da seguinte forma:

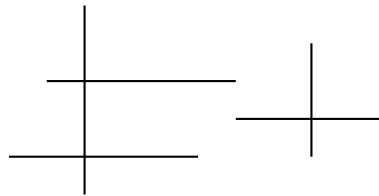


Os símbolos + e - indicam se o valor do contador aumenta ou diminui, e o valor do contador é mostrado abaixo. O valor máximo do contador é 3 entre a chegada de João e a saída de Maria.

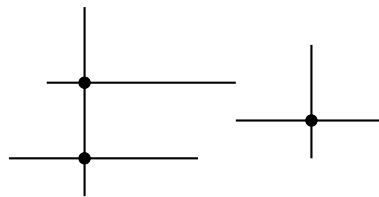
O tempo de execução do algoritmo é  $O(n \log n)$ , porque ordenar os eventos leva tempo  $O(n \log n)$  e o restante do algoritmo leva tempo  $O(n)$ .

## 30.1 Pontos de interseção

Dado um conjunto de  $n$  segmentos de linha, cada um deles sendo horizontal ou vertical, considere o problema de contar o número total de pontos de interseção. Por exemplo, quando os segmentos de linha são



existem três pontos de interseção:



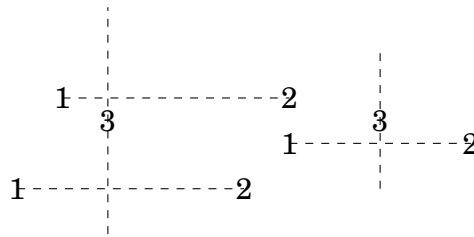
É fácil resolver o problema em tempo  $O(n^2)$ , porque podemos percorrer todos os pares possíveis de segmentos de linha e verificar se eles se cruzam. No entanto, podemos resolver o problema de forma mais eficiente em tempo  $O(n \log n)$  usando um algoritmo de linha de varredura e uma estrutura de dados de consulta de intervalo.

A ideia é processar os pontos finais dos segmentos de linha da esquerda para a direita e focar em três tipos de eventos:

- (1) segmento horizontal começa
- (2) segmento horizontal termina

(3) segmento vertical

Os seguintes eventos correspondem ao exemplo:



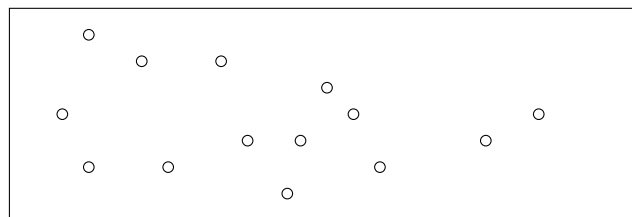
Percorremos os eventos da esquerda para a direita e usamos uma estrutura de dados que mantém um conjunto de coordenadas  $y$  onde há um segmento horizontal ativo. No evento 1, adicionamos a coordenada  $y$  do segmento ao conjunto e, no evento 2, removemos a coordenada  $y$  do conjunto.

Os pontos de interseção são calculados no evento 3. Quando há um segmento vertical entre os pontos  $y_1$  e  $y_2$ , contamos o número de segmentos horizontais ativos cuja coordenada  $y$  está entre  $y_1$  e  $y_2$ , e adicionamos esse número ao total de pontos de interseção.

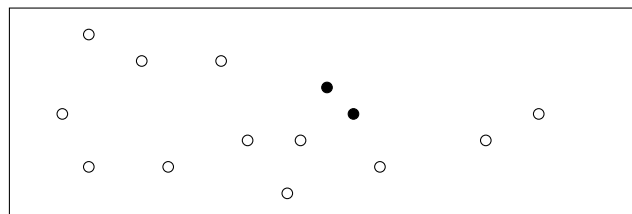
Para armazenar as coordenadas  $y$  dos segmentos horizontais, podemos usar uma árvore de índice binário ou árvore de segmentos, possivelmente com compactação de índice. Quando tais estruturas são usadas, o processamento de cada evento leva  $O(\log n)$ , então o tempo total de execução do algoritmo é  $O(n \log n)$ .

## 30.2 Problema do par mais próximo

Dado um conjunto de  $n$  pontos, nosso próximo problema é encontrar dois pontos cuja distância euclidiana seja mínima. Por exemplo, se os pontos são



devemos encontrar os seguintes pontos:



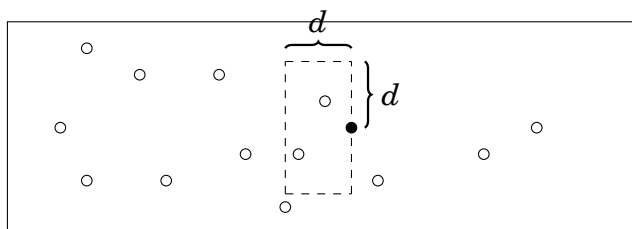
Este é outro exemplo de um problema que pode ser resolvido em tempo  $O(n \log n)$  usando um algoritmo de linha de varredura<sup>1</sup>. Percorremos os pontos da

<sup>1</sup>Além desta abordagem, também existe um algoritmo de divisão e conquista de tempo  $O(n \log n)$  [56] que divide os pontos em dois conjuntos e resolve recursivamente o problema para ambos os conjuntos.

esquerda para a direita e mantemos um valor  $d$ : a distância mínima entre dois pontos vistos até agora. Em cada ponto, encontramos o ponto mais próximo à esquerda. Se a distância for menor que  $d$ , é a nova distância mínima e atualizamos o valor de  $d$ .

Se o ponto atual é  $(x, y)$  e há um ponto à esquerda a uma distância menor que  $d$ , a coordenada  $x$  de tal ponto deve estar entre  $[x - d, x]$  e a coordenada  $y$  deve estar entre  $[y - d, y + d]$ . Assim, basta considerar apenas os pontos que estão localizados nesses intervalos, o que torna o algoritmo eficiente.

Por exemplo, na imagem a seguir, a região marcada com linhas tracejadas contém os pontos que podem estar a uma distância de  $d$  do ponto ativo:



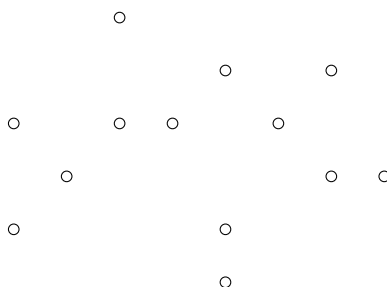
A eficiência do algoritmo é baseada no fato de que a região sempre contém apenas  $O(1)$  pontos. Podemos percorrer esses pontos em tempo  $O(\log n)$  mantendo um conjunto de pontos cuja coordenada  $x$  está entre  $[x - d, x]$ , em ordem crescente de acordo com suas coordenadas  $y$ .

A complexidade de tempo do algoritmo é  $O(n \log n)$ , porque percorremos  $n$  pontos e encontramos para cada ponto o ponto mais próximo à esquerda em tempo  $O(\log n)$ .

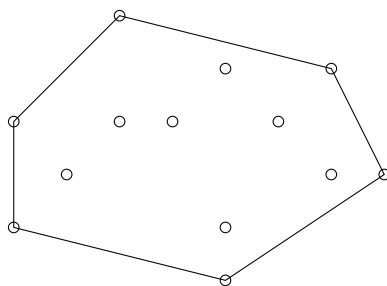
### 30.3 Problema do fecho convexo

Um **fecho convexo** é o menor polígono convexo que contém todos os pontos de um determinado conjunto. Convexidade significa que um segmento de linha entre quaisquer dois vértices do polígono está completamente dentro do polígono.

Por exemplo, para os pontos



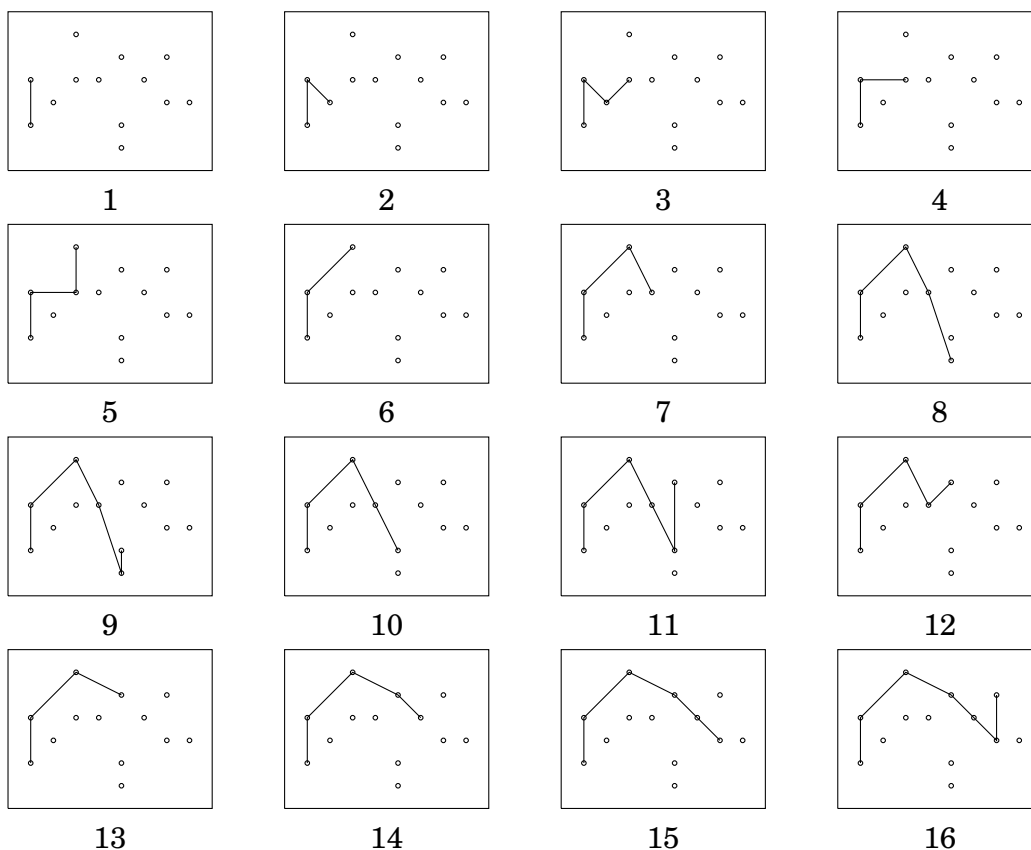
o fecho convexo é o seguinte:

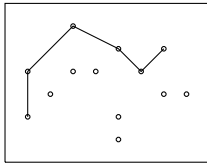


O **algoritmo de Andrew** [3] fornece uma maneira fácil de construir o fecho convexo para um conjunto de pontos em tempo  $O(n \log n)$ . O algoritmo primeiro localiza os pontos mais à esquerda e mais à direita, e então constrói o fecho convexo em duas partes: primeiro o casco superior e depois o casco inferior. Ambas as partes são semelhantes, então podemos nos concentrar em construir o casco superior.

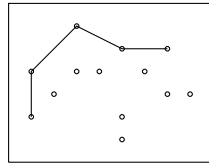
Primeiro, ordenamos os pontos primeiramente de acordo com as coordenadas  $x$  e secundariamente de acordo com as coordenadas  $y$ . Depois disso, percorremos os pontos e adicionamos cada ponto ao casco. Sempre depois de adicionar um ponto ao casco, certificamo-nos de que o último segmento de linha no casco não vire à esquerda. Enquanto ele virar à esquerda, removemos repetidamente o penúltimo ponto do casco.

As figuras a seguir mostram como o algoritmo de Andrew funciona:

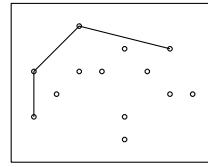




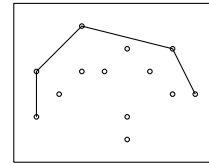
17



18



19



20



# Referências Bibliográficas

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. Ullman. *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley, 1983.
- [2] R. K. Ahuja and J. B. Orlin. Distance directed augmenting path algorithms for maximum flow and parametric maximum flow problems. *Naval Research Logistics*, 38(3):413–430, 1991.
- [3] A. M. Andrew. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5):216–219, 1979.
- [4] B. Aspvall, M. F. Plass and R. E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, 8(3):121–123, 1979.
- [5] R. Bellman. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1):87–90, 1958.
- [6] M. Beck, E. Pine, W. Tarrat and K. Y. Jensen. New integer representations as the sum of three cubes. *Mathematics of Computation*, 76(259):1683–1690, 2007.
- [7] M. A. Bender and M. Farach-Colton. The LCA problem revisited. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, 88–94, 2000.
- [8] J. Bentley. *Programming Pearls*. Addison-Wesley, 1999 (2nd edition).
- [9] J. Bentley and D. Wood. An optimal worst case algorithm for reporting intersections of rectangles. *IEEE Transactions on Computers*, C-29(7):571–577, 1980.
- [10] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.
- [11] Croatian Open Competition in Informatics, <http://hsin.hr/coci/>
- [12] Codeforces: On "Mo's algorithm", <http://codeforces.com/blog/entry/20032>
- [13] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein. *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2009 (3rd edition).

- [14] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [15] K. Diks et al. *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions*, University of Warsaw, 2012.
- [16] M. Dima and R. Ceterchi. Efficient range minimum queries using binary indexed trees. *Olympiad in Informatics*, 9(1):39–44, 2015.
- [17] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17(3):449–467, 1965.
- [18] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972.
- [19] S. Even, A. Itai and A. Shamir. On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 184–193, 1975.
- [20] D. Fanding. A faster algorithm for shortest-path – SPFA. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2, 1994.
- [21] P. M. Fenwick. A new data structure for cumulative frequency tables. *Software: Practice and Experience*, 24(3):327–336, 1994.
- [22] J. Fischer and V. Heun. Theoretical and practical improvements on the RMQ-problem, with applications to LCA and LCE. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, 36–48, 2006.
- [23] R. W. Floyd Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962.
- [24] L. R. Ford. Network flow theory. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956.
- [25] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8(3):399–404, 1956.
- [26] R. Freivalds. Probabilistic machines can use less running time. In *IFIP congress*, 839–842, 1977.
- [27] F. Le Gall. Powers of tensors and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 296–303, 2014.
- [28] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [29] Google Code Jam Statistics (2017), <https://www.go-hero.net/jam/17>

- [30] A. Grønlund and S. Pettie. Threesomes, degenerates, and love triangles. In *Proceedings of the 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 621–630, 2014.
- [31] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2(5):6–8, 1939.
- [32] D. Gusfield. *Algorithms on Strings, Trees and Sequences: Computer Science and Computational Biology*, Cambridge University Press, 1997.
- [33] S. Halim and F. Halim. *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests*, 2013.
- [34] M. Held and R. M. Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962.
- [35] C. Hierholzer and C. Wiener. Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, 6(1), 30–32, 1873.
- [36] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 4(7):321, 1961.
- [37] C. A. R. Hoare. Algorithm 65: Find. *Communications of the ACM*, 4(7):321–322, 1961.
- [38] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. A linear list merging algorithm. Technical report, Cornell University, 1971.
- [39] E. Horowitz and S. Sahni. Computing partitions with applications to the knapsack problem. *Journal of the ACM*, 21(2):277–292, 1974.
- [40] D. A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, 1952.
- [41] The International Olympiad in Informatics Syllabus, <https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/>
- [42] R. M. Karp and M. O. Rabin. Efficient randomized pattern-matching algorithms. *IBM Journal of Research and Development*, 31(2):249–260, 1987.
- [43] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209–1225, 1961.
- [44] C. Kent, G. M. Landau and M. Ziv-Ukelson. On the complexity of sparse exon assembly. *Journal of Computational Biology*, 13(5):1013–1027, 2006.
- [45] J. Kleinberg and É. Tardos. *Algorithm Design*, Pearson, 2005.
- [46] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms*, Addison–Wesley, 1998 (3rd edition).

- [47] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 3: Sorting and Searching*, Addison–Wesley, 1998 (2nd edition).
- [48] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50, 1956.
- [49] V. I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet physics doklady*, 10(8):707–710, 1966.
- [50] M. G. Main and R. J. Lorentz. An  $O(n \log n)$  algorithm for finding all repetitions in a string. *Journal of Algorithms*, 5(3):422–432, 1984.
- [51] J. Pachocki and J. Radoszewski. Where to use and how not to use polynomial string hashing. *Olympiads in Informatics*, 7(1):90–100, 2013.
- [52] I. Parberry. An efficient algorithm for the Knight’s tour problem. *Discrete Applied Mathematics*, 73(3):251–260, 1997.
- [53] D. Pearson. A polynomial-time algorithm for the change-making problem. *Operations Research Letters*, 33(3):231–234, 2005.
- [54] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36(6):1389–1401, 1957.
- [55] 27-Queens Puzzle: Massively Parallel Enumeration and Solution Counting. <https://github.com/preusser/q27>
- [56] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 151–162, 1975.
- [57] M. Sharir. A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 7(1):67–72, 1981.
- [58] S. S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*, Springer, 2008 (2nd edition).
- [59] S. S. Skiena and M. A. Revilla. *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer, 2003.
- [60] SZKOpuł, <https://szkopul.edu.pl/>
- [61] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, 41:438–444, 1935.
- [62] P. Stańczyk. *Algorytmika praktyczna w konkursach Informatycznych*, MSc thesis, University of Warsaw, 2006.
- [63] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*, 13(4):354–356, 1969.
- [64] R. E. Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the ACM*, 22(2):215–225, 1975.

- [65] R. E. Tarjan. Applications of path compression on balanced trees. *Journal of the ACM*, 26(4):690–715, 1979.
- [66] R. E. Tarjan and U. Vishkin. Finding biconnected components and computing tree functions in logarithmic parallel time. In *Proceedings of the 25th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 12–20, 1984.
- [67] H. N. V. Temperley and M. E. Fisher. Dimer problem in statistical mechanics – an exact result. *Philosophical Magazine*, 6(68):1061–1063, 1961.
- [68] USA Computing Olympiad, <http://www.usaco.org/>
- [69] H. C. von Warnsdorf. *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*. Schmalkalden, 1823.
- [70] S. Warshall. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9(1):11–12, 1962.



# Índice Remissivo

- 2SUM problem, 86
- 3SUM problem, 87
  
- algoritmo aleatorizado, 247
- algoritmo cúbico, 22
- algoritmo de Andrew, 299
- Algoritmo de Bellman–Ford, 133
- Algoritmo de Dijkstra, 136
- algoritmo de Dijkstra, 165
- Algoritmo de Edmonds–Karp, 198
- algoritmo de escalonamento, 199
- algoritmo de Euclides, 214
- algoritmo de Euclides estendido, 218
- Algoritmo de Floyd, 168
- Algoritmo de Floyd–Warshall, 139
- Algoritmo de Ford–Fulkerson, 196
- algoritmo de Freivalds, 249
- algoritmo de Kadane, 25
- algoritmo de Kosaraju, 170
- Algoritmo de Kruskal, 152
- algoritmo de Las Vegas, 248
- algoritmo de Mo, 273
- algoritmo de Monte Carlo, 247
- Algoritmo de Prim, 157
- algoritmo de raiz quadrada, 269
- algoritmo de tempo constante, 22
- algoritmo guloso, 63
- algoritmo linear, 22
- algoritmo logarítmico, 22
- algoritmo polinomial, 23
- algoritmo quadrático, 22
- Algoritmo SPFA, 136
- alphabet, 259
- amortized analysis, 85
- ancestor, 175
- anticadeia, 207
- aresta, 117
  
- aritmética modular, 7, 215
  
- backtracking, 56
- binary indexed tree, 94
- binary tree, 149
- birthday paradox, 263
- bitset, 46
- border, 260
- bubble sort, 27
- busca binária, 34
- busca em largura, 127
- busca em profundidade, 125
  
- cadeia de Markov, 246
- caminho, 117
- caminho mínimo, 133
- child, 143
- ciclo, 117, 129, 161, 167
- ciclo negativo, 135
- classes de complexidade, 22
- cobertura mínima por vértices, 204
- cobertura por caminhos, 205
- cobertura por vértices, 204
- Codificação de Huffman, 69
- coeficiente binomial, 222
- coeficiente multinomial, 224
- cofator, 235
- collision, 262
- coloração, 120, 249
- combinatória, 221
- complemento, 12
- complex, 286
- complex number, 286
- complexidade de tempo, 19
- componente, 118
- componente fortemente conexo, 169
- compressão de dados, 68
- compressão de índices, 101

Conjectura de Goldbach, 213  
 Conjectura de Legendre, 213  
 conjunto, 12  
 conjunto independente, 204  
 conjunto independente máximo, 204  
 conjunto universo, 12  
 conjunção, 13  
 coprimo, 215  
 corte, 196  
 corte mínimo, 196, 199  
 counting sort, 30  
 crivo de Eratóstenes, 214  
 cross product, 288  
 código binário, 68  
 Código de Prüfer, 230  
  
 data structure, 39  
 De Bruijn sequence, 192  
 deque, 47  
 desarranjo, 228  
 deslocamento de bits, 105  
 detecção de ciclo, 167  
 determinante, 235  
 diameter, 145  
 diferença, 12  
 Dirac's theorem, 192  
 disjunção, 13  
 distance function, 293  
 distribuição, 245  
 distribuição binomial, 246  
 distribuição geométrica, 246  
 distribuição uniforme, 246  
 distância de edição, 80  
 distância de Hamming, 108  
 distância de Levenshtein, 80  
 divisibilidade, 211  
 divisor, 211  
 dynamic array, 39  
  
 emparelhamento, 201  
 emparelhamento máximo, 201  
 emparelhamento perfeito, 203  
 encontro no meio, 60  
 entrada e saída, 4  
 equação diofantina, 218  
 equivalência, 13  
 estado de derrota, 251

estado de vitória, 251  
 estatística de ordem, 248  
 Estrutura union-find, 155  
 Euclidean distance, 293  
 Euler tour technique, 180  
 Eulerian circuit, 188  
 Eulerian path, 187  
 expressão com parênteses, 225  
  
 fator, 211  
 fator constante, 23  
 fatoração em primos, 211  
 fatorial, 14  
 Fenwick tree, 94  
 fluxo, 195  
 fluxo máximo, 195  
 função de comparação, 34  
 função mex, 255  
 função totiente de Euler, 215  
 fórmula de Binet, 14  
 fórmula de Cayley, 229  
 fórmula de Euclides, 220  
 fórmula de Faulhaber, 10  
  
 geometry, 285  
 grafo, 117  
 grafo bipartido, 120, 130  
 grafo completo, 119  
 grafo conectado, 129  
 grafo conexo, 118  
 grafo de componentes, 169  
 grafo de sucessores, 166  
 grafo direcionado, 118  
 grafo fortemente conexo, 169  
 grafo funcional, 166  
 grafo ponderado, 119  
 grafo regular, 119  
 grafo simples, 120  
 grau, 119  
 grau de entrada, 119  
 grau de saída, 119  
  
 Hamiltonian circuit, 191  
 Hamiltonian path, 191  
 hash value, 261  
 hashing, 261  
 heap, 48



Heron's formula, 285  
 heuristic, 194  
 Hierholzer's algorithm, 189  
  
 implicação, 13  
 in-order, 149  
 inclusão-exclusão, 227  
 independência, 244  
 inteiro, 6  
 intersecção, 12  
 inverso modular, 217  
 inversão, 28  
 iterator, 43  
  
 janela deslizante, 89  
 Jogo de Grundy, 257  
 jogo misère, 254  
 jogo nim, 253  
  
 knight's tour, 193  
  
 leaf, 143  
 lema de Burnside, 228  
 lexicographical order, 260  
 line segment intersection, 289  
 linguagem de programação, 3  
 linha de varredura, 295  
 lista de adjacência, 121  
 lista de arestas, 123  
 logaritmo, 14  
 logaritmo natural, 15  
 lowest common ancestor, 179  
 lógica, 13  
  
 macro, 9  
 maior subsequência crescente, 76  
 Manhattan distance, 293  
 map, 42  
 matriz, 233  
 matriz de adjacência, 122  
 matriz identidade, 234  
 matriz inversa, 236  
 matriz Laplaciana, 240  
 matriz quadrada, 233  
 maximum query, 91  
 memoização, 73  
 merge sort, 29  
 minimum query, 91  
  
 mochila, 79  
 multiplicação de matrizes, 234, 248  
 máximo divisor comum, 214  
 mínimo da janela deslizante, 89  
 mínimo múltiplo comum, 214  
  
 nearest smaller elements, 87  
 negação, 13  
 next\_permutation, 55  
 nó, 117  
 número de Catalan, 224  
 número de Fibonacci, 14, 220, 236  
 Número de Grundy, 255  
 número perfeito, 212  
 números com ponto flutuante, 7  
  
 operador de comparação, 33  
 operação E, 104  
 operação NÃO, 105  
 operação OU, 104  
 operação XOR, 105  
 Ordenação, 27  
 ordenação topológica, 161  
 Ore's theorem, 192  
  
 pair, 33  
 palavra de código, 68  
 par mais próximo, 297  
 parent, 143  
 pattern matching, 259  
 period, 260  
 permutation, 55  
 Pick's theorem, 292  
 point, 286  
 polynomial hashing, 261  
 ponto de interseção, 296  
 post-order, 149  
 potência de matrizes, 235  
 pre-order, 149  
 predicado, 13  
 prefix, 259  
 prefix sum array, 92  
 primo, 211  
 primos gêmeos, 213  
 priority queue, 48  
 probabilidade condicional, 243  
 problema 2SAT, 172

problema 3SAT, 174  
 problema NP-difícil, 23  
 programação dinâmica, 71  
 progressão aritmética, 11  
 progressão geométrica, 11  
 propagação preguiçosa, 276  
  
 quantificador, 13  
 queen problem, 56  
 queue, 48  
 quickselect, 248  
 quicksort, 248  
  
 random\_shuffle, 43  
 range query, 91  
 recorrência linear, 236  
 representação de bits, 103  
 resto, 7  
 reverse, 43  
 root, 143  
 rooted tree, 143  
 rotation, 259  
  
 segment tree, 97  
 set, 41  
 shoelace formula, 291  
 soma harmônica, 12, 214  
 soma máxima de subvetor, 24  
 soma nim, 253  
 sort, 32, 43  
 sparse table, 93  
 stack, 47  
 string, 40, 259  
 string hashing, 261  
 subconjuntos, 12  
 subsequence, 259  
 subset, 53  
 substring, 259  
 subtree, 143  
 suffix, 259  
 sum query, 91  
  
 Teorema Chinês do Resto, 219  
 Teorema de Dilworth, 207  
 Teorema de Euler, 216  
  
 Teorema de Fermat, 216  
 Teorema de Hall, 203  
 Teorema de Kirchhoff, 239  
 Teorema de König, 204  
 Teorema de Lagrange, 219  
 Teorema de Sprague–Grundy, 254  
 Teorema de Wilson, 220  
 Teorema de Zeckendorf, 220  
 teoria dos conjuntos, 12  
 teoria dos números, 211  
 terna pitagórica, 220  
 transposta, 233  
 tree, 143  
 tree query, 175  
 tree traversal array, 176  
 trie, 260  
 Triângulo de Pascal, 223  
 tuple, 33  
 typedef, 8  
 two pointers method, 85  
  
 união, 12  
  
 valor esperado, 245  
 variável aleatória, 244  
 vector, 39, 286  
 vetor, 233  
 vetor de diferenças, 102  
 vizinho, 119  
  
 Warnsdorf’s rule, 194  
  
 Z-algorithm, 264  
 Z-array, 264  
  
 Árvore geradora máxima, 152  
 Árvore geradora mínima, 151  
 árvore, 118  
 árvore de segmentos, 275  
 árvore de segmentos bidimensional, 282  
 árvore de segmentos dinâmica, 279  
 árvore de segmentos esparsa, 279  
 árvore de segmentos persistente, 280  
 árvore de segmentos preguiçosa, 276  
 árvore geradora, 151, 239