

Estimación del flujo óptico mediante dos implementaciones del algoritmo de Horn-Schunck

Erick Salvador Alvarez Valencia

Centro de Investigación en Matemáticas

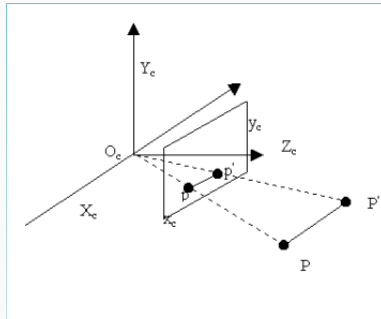
Tabla de contenido

1. Motivación
2. Algoritmo de Horn-Schunck
3. Conclusiones

Motivación

¿Qué es el flujo óptico?

Una secuencia de imágenes de movimiento en dos dimensiones es la proyección del movimiento de un objeto tridimensional sobre su imagen en el plano con respecto a un sensor visual.



(a) Figura 1. Proyección del movimiento de un espacio tridimensional a un plano.

¿Qué es el flujo óptico?

Podemos definir el flujo óptico como el campo de velocidades en x, y generadas por el movimiento de dicho objeto de manera horizontal y vertical con respecto a la proyección en el plano.



(b) Figura 2. Ejemplo de campo de vectores de velocidades.

Ecuación del flujo óptico

La ecuación del FO supone que un pixel mantiene su intensidad constante a través del tiempo.

$$I(x, y, t) = I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \quad (1)$$

Desarrollando por series de Taylor

$$\begin{aligned} I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = I(x, y, t) &+ \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} v_x \\ &+ \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} v_y + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} + O^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial l(x, y, t)}{\partial x} v_x + \frac{\partial l(x, y, t)}{\partial y} v_y + \frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$f_x(p)v_x + f_y(p)v_y + f_t(p) = 0$$
$$\nabla f(p) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Algoritmo de Horn-Schunck

Horn & Schunck proponen agregar un suavizado global a la ecuación característica del flujo y a su vez un término de regularización λ .

Caso continuo:

$$\int_D (\nabla f \cdot v)^2 + \lambda^2 (\|\nabla v_x\|_2^2 + \|\nabla v_y\|_2^2) dx \quad (5)$$

Caso discreto:

$$U(v) = \sum_{p \in \text{dom}(f)} [(\nabla f \cdot v(p))^2 + \lambda \sum_{s \in N(p)} \|v(p) - v(s)\|^2] \quad (6)$$

Método de gradiente de paso fijo

El funcional descrito en la Ecuación 6 es cuadrático y sus derivadas son lineales con respecto a v_x y v_y por lo que es posible encontrar el mínimo global de dicho funcional.

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= v^{(k)} - \alpha F(U^{(k)}) \Rightarrow \\ v^{(k+1)} &= v^{(k)} - \alpha F(U_{v_x}^{(k)}(v), U_{v_y}^{(k)}(v)) \end{aligned} \tag{7}$$

Donde $F(U^{(k)})$ es el gradiente del funcional en la iteración k . Lo siguiente es encontrar dicho gradiente, por lo cual derivamos el funcional con respecto a v_x y v_y .

Método de gradiente de paso fijo

Algorithm 1 FO mediante descenso por gradiente.

```
1: procedure FOGD( $f_x, f_y, f_t, v_x^{(0)}, v_y^{(0)}, \alpha, \lambda$ )
2:    $k \leftarrow 0$ .
3:   while Not convergencia do
4:     for  $p \in \text{dom}(f)$  do
5:        $FU_x^{(k)}(v) \leftarrow 2(\nabla f \cdot v)f_x(p) + 2\lambda \sum_{s \in N(p)} (v_x(p) - v_x(s))$ 
6:        $FU_y^{(k)}(v) \leftarrow 2(\nabla f \cdot v)f_y(p) + 2\lambda \sum_{s \in N(p)} (v_y(p) - v_y(s))$ 
7:        $v_x^{(k+1)} \leftarrow v_x^{(k)} - \alpha FU_x^{(k)}$ 
8:        $v_y^{(k+1)} \leftarrow v_y^{(k)} - \alpha FU_y^{(k)}$ 
9:        $k \leftarrow k + 1$ 
10:  return  $v_x^{(n)}, v_y^{(n)}$ 
```

Método de gradiente de paso fijo: Resultados



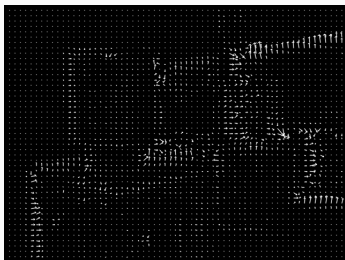
(c)



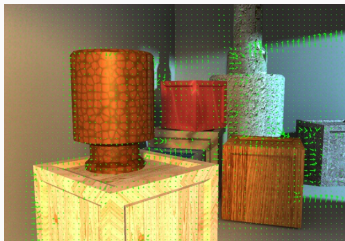
Cuadro 1: Configuración utilizada para el ejemplo 1.

Configuración	
Lambda:	500
Tolerancia:	0.1
No. Max. Iteraciones:	3000
Escalamiento:	7

Método de gradiente de paso fijo: Resultados



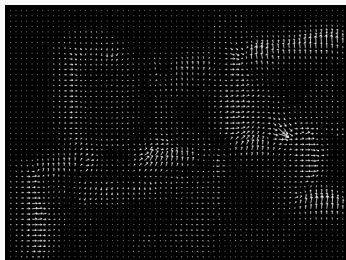
(e)



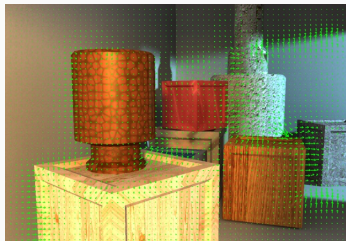
Cuadro 2: Resultados obtenidos para el ejemplo 1.

Resultados	
Tiempo total:	144.95 s
Error promedio:	17.51 p/f
Error máximo:	52.48 p/f
Error mínimo:	0.011 p/f

Método de gradiente de paso fijo: Resultados



(g)



Cuadro 3: Resultados obtenidos para el ejemplo 2.

Resultados	
Tiempo total:	124.19 s
Error promedio:	16.96 p/f
Error máximo:	52.02 p/f
Error mínimo:	0.007 p/f

Lo que se hará es partir de la Ecuación 6 la cual nos describe el funcional de energía en modo discreto, y posteriormente procedemos a convertirlo en forma de sistema de ecuaciones, agrupando los términos v_x , v_y y despejándolos. Lo cual nos genera las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} U_{v_x}(v) &= 2(\nabla f \cdot v)f_x(p) + 2\lambda \sum_{s \in N(p)} (v_x(p) - v_x(s)) \\ U_{v_y}(v) &= 2(\nabla f \cdot v)f_y(p) + 2\lambda \sum_{s \in N(p)} (v_y(p) - v_y(s)) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}U_{v_x}(v) &= 2(f_x^2(p) + \lambda|N(p)|)v_x(p) + 2f_x(p)f_y(p)v_y(p) \\&\quad - 2\lambda \sum_{s \in N(p)} v_x(p) \\U_{v_y}(v) &= 2(f_y^2(p) + \lambda|N(p)|)v_y(p) + 2f_x(p)f_y(p)v_x(p) \\&\quad - 2\lambda \sum_{s \in N(p)} v_y(p)\end{aligned}\tag{9}$$

$$M(p) = \begin{bmatrix} f_x(p)^2 + \lambda|N(p)| & f_x(p)f_y(p) \\ f_x(p)f_y(p) & f_y(p)^2 + \lambda|N(p)| \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} -f_t(p)f_x(p) \\ -f_t(p)f_y(p) \end{bmatrix}$$

De lo anterior, para el punto p nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -\Lambda & -\Lambda & M(p) & -\Lambda & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s_1) \\ V(s_2) \\ V(p) \\ V(s_3) \\ V(s_4) \end{bmatrix} = B(p) \quad (11)$$

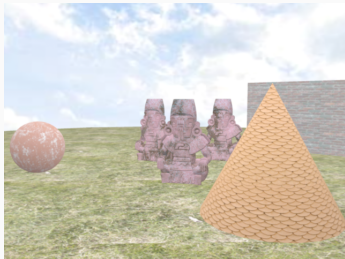
Método de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix}
 M(p_1) & -\Lambda & \hat{O} & -\Lambda & \hat{O} & \dots & \hat{O} \\
 -\Lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
 \hat{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \hat{O} \\
 -\Lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \Lambda \\
 \hat{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \hat{O} \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
 \hat{O} & \dots & \hat{O} & -\Lambda & \dots & -\Lambda & M(p_{n \times n})
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 V_{n \times n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 B(p_1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 B(p_{n \times n})
 \end{bmatrix}
 \quad (12)$$

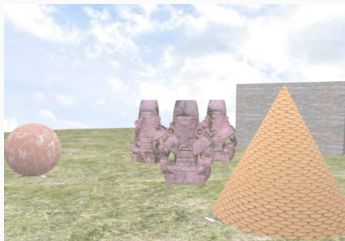
Algorithm 2 FO mediante Gauss-Seidel.

```
1: procedure FOGS( $f_x, f_y, f_t, v_x^{(0)}, v_y^{(0)}, \lambda$ )
2:    $k \leftarrow 0$ .
3:   while Not convergencia do
4:     for  $p \in \text{dom}(f)$  do
5:        $v_x^{(k+1)}(p) \leftarrow \frac{-(f_x(p)f_y(p)v_y^{(k)}(p) - \lambda \sum_{s \in N(p)} v_x^{(k)}(s)) - f_t(p)f_x(p)}{f_x^2(p) + \lambda |N(p)|}$ 
6:        $v_y^{(k+1)}(p) \leftarrow \frac{-(f_x(p)f_y(p)v_x^{(k)}(p) - \lambda \sum_{s \in N(p)} v_y^{(k)}(s)) - f_t(p)f_y(p)}{f_y^2(p) + \lambda |N(p)|}$ 
7:        $k \leftarrow k + 1$ 
8:   return  $v_x^{(n)}, v_y^{(n)}$ 
```

Método de Gauss-Seidel: Resultados



(i)



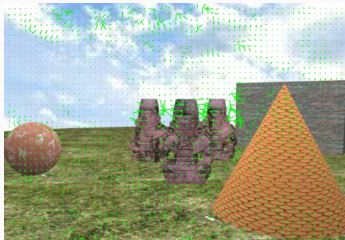
Cuadro 4: Configuración utilizada para el ejemplo 3.

Configuración	
Lambda:	500
Tolerancia:	0.1
No. Max. Iteraciones:	3000
Escalamiento:	5

Método de Gauss-Seidel: Resultados



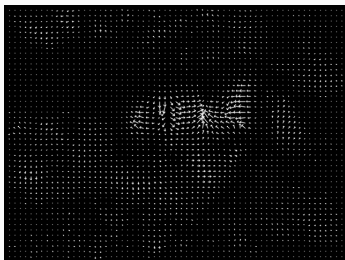
(k)



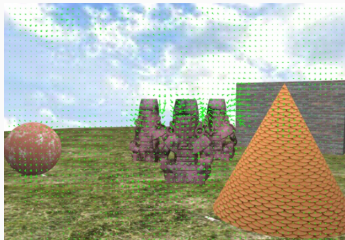
Cuadro 5: Resultados obtenidos para el ejemplo 3.

Resultados	
Tiempo total:	134.30 s
Error promedio:	25.91 p/f
Error máximo:	67.47 p/f
Error mínimo:	0.0076 p/f

Método de Gauss-Seidel: Resultados



(m)



Cuadro 6: Resultados obtenidos para el ejemplo 4.

Resultados	
Tiempo total:	123.71 s
Error promedio:	25.62 p/f
Error máximo:	59.66 p/f
Error mínimo:	0.05 p/f

Conclusiones

¿Preguntas?