Revisão P1 Geometria Analítica
Prof. Edson

Erickson G. Müller

April 23, 2025

Conteúdos

- Vetores
- Produto Escalar e Produto Vetorial
- Equação de Retas ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$)
  - Retas Paralelas
  - Retas Concorrentes
  - Retas Reversas
- Estudo Relativo de Posições Entre Retas
- Equações de Planos
  - Planos Paralelos
  - Planos Concorrentes
- Posições Relativas Entre Planos
- Distâncias
  - entre Pontos
  - entre Retas
  - entre Planos
- Cônicas
  - Elipse
  - Hipérbole
  - Parábola

1 Retas

Sejam A e B dois pontos quaisquer. Vamos escolher A como origem do segmento e B como a extremidade do segmento.

Representação Geométrica: $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$
Notação: AB

BA é o **segmento orientado** com origem em B e extremidade em A.

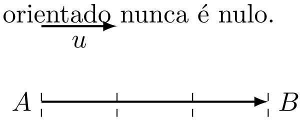
Representação Geométrica: $\mathrm{A} \longleftarrow \mathrm{B}$

- **Igualdade**: Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD são iguais se $A = C$ e $B = D$.

- **Segmento Orientado Nulo**: Dizemos que o segmento orientado AB é nulo se $A = B$.
- **Segmento Orientado Oposto**: Dado um segmento orientado AB, o segmento orientado oposto será dado por $-(AB) = BA$.

1.1 Comprimento de um Segmento Orientado

O comprimento de um segmento orientado é a medida do segmento geométrico em relação a uma unidade de medida fixada. O comprimento do segmento orientado nunca é nulo.

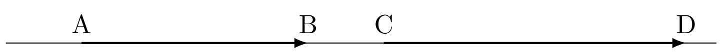


$|AB| = 3u$

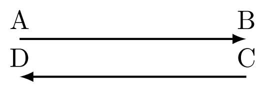
1.2 Direção Entre Dois Segmentos Orientados

Sejam dois segmentos orientados AB e CD. Dizemos que AB tem a mesma direção de CD se ambas as retas são **coincidentes** ou **paralelas**.

Coincidentes:



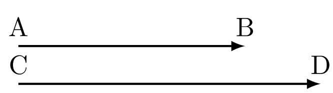
Paralelas:



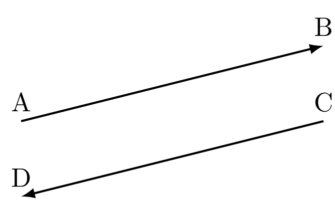
1.3 Sentido Entre Dois Segmentos Orientados

Dois segmentos orientados AB e CD **de mesma direção** podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos conforme abaixo:

Mesmo Sentido:



Sentidos Opostos:



1.4 Equipolência

Dois segmentos orientados são **equipolentes** se tiverem o mesmo **comprimento**, **direção** e **sentido**.

Notação de equipolência: $AB \sim CD$
Propriedades de Segmentos Equipolentes:

- **Reflexiva**: $AB \sim BA$.
- **Simétrica**: se $AB \sim CD$ então $BA \sim DC$.
- **Transitiva**: se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$ então $AB \sim EF$.

Dados um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

2 Vetores

Sendo AB um segmento orientado fixo, o vetor AB é o conjunto de todos os segmentos orientados CD tais que $CD \sim AB$.

$$\overrightarrow{v} = AB = CD, CD \sim AB$$

em que AB é fixo.
Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto A, por meio de seus representantes existe um único ponto B tal que $A + \overrightarrow{v} = B$.
Notação $\overrightarrow{v} = B - A$

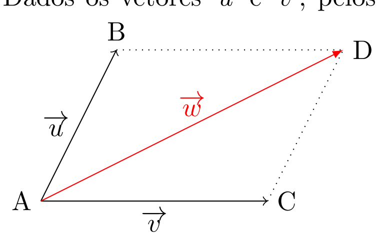
2.1 Igualdade de Vetores

Dizemos que dois vetores AB e CD são iguais quando AB e CD são equipolentes.
Propriedades de Vetores:

- $A + \overrightarrow{o} = A$
- $A - \overrightarrow{v} = A + (-\overrightarrow{v})$
- $A + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{v} \rightarrow A = B$
- $A + \overrightarrow{v} = A + \overrightarrow{w} \rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$
- $A + (B - A) = B$
- $B - A = -(A - B)$

2.2 Operações com Vetores: Adição

Dados os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, pelos seus representantes,conforme a figura abaixo:

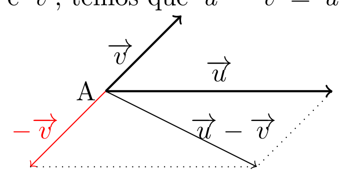


$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, sendo $BD \sim AC$ e $AB \sim CD$

Propriedades da Soma de Vetores:

- **Comutativa**: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- **Associativa**: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- **Elemento Neutro**: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{u}$
- **Elemento Oposto**: Dado $\overrightarrow{u}$, existe um único $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{o}$, nesse caso $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$

Dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, temos que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$



2.3 Operações com Vetores: Multiplicação de um Vetor por um Número Real

3 Identidade de Lagrange

$$|u.v|^2 + (u.v)^2 = |u|^2.|v|^2$$

Com isso, temos:

$$|u.v|^2 = |u|^2.|v|^2 - (u.v)^2$$

Por outro lado,

$$u.v = |u|.|v|.\cos(\theta)$$

Substituindo a acima pela equação acima dela:

$$|u.v|^2 = |u|^2.|v|^2 - (|u|.|v|.\cos(\theta))^2 = |u|^2.|v|^2 - |u|^2.|v|^{\cdot}\cos^2(\theta)$$

$$\rightarrow |u.v|^2 = |u|^2.|v|^2.(1 - \cos^2(\theta))^2$$

$$= |u|^2.|v|^2.\sin^2(\theta)$$

Logo $|u.v|^2 = (|u|.|v|.\sin(\theta))^2$, se $0 \leq \theta \leq \pi$

$$|u.v| = |u|.|v|.\sin(\theta)$$

3.1 Interpretação Geométrica

Pensando num paralelograma formado pelos vetores v e u e o ângulo θ: Área de um paralelograma é *Base* x *Altura*. Usando propriedades geométricas:

$$h = |v|.\sin(\theta)$$

Portanto, $A = b.h \rightarrow |u|.|v|.\sin(\theta) \rightarrow |u.v|$

$$A = |u.v|$$

Exemplos:

1. Encontre a área do paralelogramo gerado pelos pontos:

   - $A = (0, 0, 0)$
   - $B = (2, 0, 0)$
   - $C = (1, 1, 0)$
   - $D = (3, 1, 0)$

$$A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2.k$$

$$= (0, 0, 2)$$

$$|u.v| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}$$

$$A = 2$$

2. Encontre a área do triângulo de vértice:

    - $A = (1, 1, 0)$
    - $B = (3, 3, 0)$
    - $C = (2, 4, 0)$

    Área de um triângulo é a metade da área de um paralelograma

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 0) - (1, 1, 0) = (2, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 4, 0) - (1, 1, 0) = (1, 3, 0)$$

$$A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$u.v = 4k = (0, 0, 4)$$

$$|u.v| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4$$

$$A = \frac{|u.v|}{2} = 2$$

3. Determine um vetor $\overrightarrow{x}$ tal que $|x| = \sqrt{6}$ e $x.(i + k) = 2.(i + j - k)$
    Seja $x = (a, b, c)$, então:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

$$x.(i + k) = (a, b, c).((1, 0, 0) + (0, 0, 1)) = (a, b, c).(1, 0, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= b.i + c.j - bk - aj = bi + (c - a)j - bk$$

$$= 2(i + j - k)$$

$$= 2i + 2j - 2k$$

    Logo $b = 2$ e $c - a = 2$ ou $c = a + 2$
    Considerando $a^2 + b^2 + c^2 = 6$:

$$a^2 + 2^2 + (a + 2)^2 = 6$$

$$a^2 + 4 + a^2 + 4.a + 4 = 6$$

$$2.a^2 + 4.a + 8 = 6$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a + 1)^2 = 0$$

$$(a + 1) = 0$$

    Deste modo, $a = -1, b = 2, c = 1$

4. Determine um vetor $\overrightarrow{u}$ tal que $|\overrightarrow{u}| = 9$ e $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{w}(2, 1, 0)$ Deste modo:

$$|u| = 9$$

$$u \perp v$$

$$u \perp w$$

Para ser ortogonal a dois vetores, u é um múltiplo de $v.w$.

$$v.w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$v.w = 2j + k - -4k - i = -i + 2j - 3k = (-1, 2, -3)$$

$$|v.w| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2(-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$|v.w| = \sqrt{14}$$

Versor de $v.w$ é dado como:

$$\frac{1}{|v.w|}.(v.w) = \frac{1}{\sqrt{14}}.(-1, 2, -3) = \overrightarrow{u}$$

$$u = (\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}})$$

Note que $\overrightarrow{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ com $|\overrightarrow{u}| = 1$

$$\overrightarrow{x} = 9.\overrightarrow{u} = 9.(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}})$$

$$\overrightarrow{x} = (\frac{-9}{\sqrt{14}}, \frac{18}{\sqrt{14}}, \frac{-27}{\sqrt{14}})$$

$$|\overrightarrow{x}| = |9.\overrightarrow{u}| = 9.1 = 9$$

4 Produto Misto

O produto misto serve para achar o volume de um paralelepípedo formado por 3 vetores.
Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores. O produto misto de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é definido por:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

4.1 Interpretação Geométrica

Pensando num paralelepipedo formado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. A área desse paralelepípedo é *Área da Base* x *Altura*. A base do paralelepípedo é o paralelogramo gerado pelos vetores u e v.
Logo, *Área da base* $= |u.v|$
Por outro lado, temos :

$$\cos(\Phi) = \frac{h}{|w|}$$

Φ é o ângulo entre $|w|$ e h. Então $h = |w|\cos(\Phi)$, se $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$
Daí, o volume $V = A.h = |u.v|.|w|.\cos(\Phi)$

$$V = |(u.v).w|$$

$$V = |[u, v, w]|$$

Sabemos que $[u, v, w] = (u.v).w$. Sejam:

- $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$
- $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$
- $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = i.(y_1.z_2 - y_2.z_1) + j.(x_2.z_1 - x_1.z_2) + k.(x_1.y_2 - x_2.y_1)$$

$$= i.\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + j.\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix})$$

Logo, $[u, v, w] = (u.v).w$

$$= (\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}).(x_3, y_3, z_3)$$

$$= x_3.\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_3.\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} + z_3.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Por outro lado, repare que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - y_2.z_1).x_3 + (x_2.z_1 - x_1.z_2).y_3 + (x_1.y_2 - x_2.y_1).z_3$$

Logo, $[u, v, w] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ em que:

- $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$
- $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$
- $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$

4.2 Propriedades do Produto Misto

Tudo isso é comprovável manuseando os produto mistos usando o formato de determinantes.

1. Se u, v e w são linearmente dependentes, ou seja, exietem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $w = \alpha.u + \beta.v$. Então $[u, v, w] = 0$.
2. $[u + u', v, w] = [u, v, w] + [u', v, w]$
3. $[\alpha.u, v, w] = [u, \alpha.v, w] = [u, v, \alpha w]$
4. $[u, v, w] = -[u, w, v] = [v, w, u] = -[v, u, w] = [w, u, v]$

Explicando a primeira que é mais importante:

$$[u, v, w] = [u, v, \alpha u + \beta v] = [u, v, \alpha u] + [u, v, \beta v]$$

$$\alpha.[u, v, u] + \beta.[u, v, v]$$

$$\alpha. \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha.0 + \beta.0$$