Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Campus Chapecó
Disciplina: Cálculo I - 2024/1 Curso de Ciência da Computação
Profª: Divane Marcon
Nome: Gabarito

2ª Avaliação - 02/07/2024

Obs:1)A avaliação é individual e sem consulta.
2)Questões sem desenvolvimento de raciocínio não serão consideradas.
3)O desenvolvimento da avaliação deve ser legível e organizado.
4)Não é permitido o uso de calculadora que faça gráfico e calcule derivadas;
5)Não é permitida a ida ao banheiro durante a realização da avaliação.
6)Questões iguais em duas ou mais avaliações serão desconsideradas destas avaliações.
7)Faça uma bolinha de caneta azul ou preta ao lado de seu nome nesta folha.
8)Telefones celulares devem permanecer desligados durante a avaliação. Caso o celular seja manuseado durante a prova será atribuída a nota zero ao aluno.

1. Calcule a derivada das seguintes funções:
   (a) (1,0 ponto) $f(x) = (4x+3)^4 (x+1)^{-3}$
   (b) (1,0 ponto) $r(\theta) = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$
   (c) (1,0 ponto) $f(x) = (2\sqrt{x}+1)\left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right)$
2. (1,0 ponto) Determine a derivada segunda para a função $y = \sec(x)$.
3. Dada a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.
   (a) (0,5 ponto) Encontre os intervalos onde a função é descrescente ou crescente de $f(x)$;
   (b) (0,5 ponto) Encontre os valores de máximos ou mínimos locais de $f(x)$;
   (c) (0,5 ponto) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão de $f(x)$;
   (d) (0,5 ponto) Use as informações dos itens anteriores para esboçar o gráfico de $f(x)$.
4. (1,5 pontos) Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de $5m$ de raio de base e $10m$ de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de $25m^3/h$. Com que velocidade o nível de água sobe? Quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?
5. (1,5 pontos) Um pedaço de fio com 10 metros de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total seja: (a) um máximo? (b) um mínimo? ($A_{quadrado} = l^2$, onde l é o lado do quadrado e $A_{\text{triângulo}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, onde a é o lado do triângulo equilátero)
6. (0,5 ponto) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$, e o valor obtido na venda é dado por $V = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = V - C$.
7. (0,5 ponto) Calcule o limite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

Boa Avaliação!!!

Lembrete:

1. $\sec x = \frac{1}{cos x}$;
2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

Gabarito 2ª Avaliação - Cálculo I (1)

02/07/2024

(1)

a) $f(x) = (4x+3)^4 . (x+1)^{-3}$

$f'(x) = 4(4x+3)^3 . 4 . (x+1)^{-3} + (4x+3)^4 . -3(x+1)^{-4} . 1$

$= 16(4x+3)^3 . (x+1)^{-3} - 3(4x+3)^4 (x+1)^{-4}$

$= (4x+3)^3 . (x+1)^{-3} . \left(16 - 3(4x+3)(x+1)^{-1}\right)$

b) $r(\theta) = \operatorname{sen}(\theta^2) \cos(2\theta)$

$r'(\theta) = 2\theta . \cos(\theta^2) . \cos(2\theta) + \operatorname{sen}(\theta^2) . \left(-2 \operatorname{sen}(2\theta)\right)$

$= 2\theta . \cos(\theta^2) . \cos(2\theta) - 2 \operatorname{sen}(\theta^2) \operatorname{sen}(2\theta)$

c) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) . \left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right)$

$f'(x) = \left(2 . \frac{1}{2}(x)^{-1/2}\right) . \left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right)$

$+ (2\sqrt{x} + 1) . \left[\frac{-1 . (x^2+3x) - (2-x) . (2x+3)}{(x^2+3x)^2}\right]$

$= \left[x^{-1/2} . \left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right)\right] + \left[\frac{(2\sqrt{x}+1) . \left[-x^2 - 3x - (4x + 6 - 2x^2 - 3x)\right]}{(x^2+3x)^2}\right]$

$= (x^{-1/2}) . \left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right) + \frac{(2\sqrt{x}+1) . (x^2 - 4x - 6)}{(x^2+3x)^2}$

2

2) $y = \sec(x)$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$y''(x) = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\cancel{\cos x} \cdot \cos^2 x + 2\,\cancel{\cos x}\,\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{\cancel{4}\,3} x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}$$

QUESTÃO 09:

ASSINATURA DO ALUNO:

3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

raízes de $f(x)$: $2x^3 - 3x^2 - 12x = 0$

$x(2x^2 - 3x - 12) = 0$

$x = 0$ ou $2x^2 - 3x - 12 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{4}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{4}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{4}$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$

a) Sinal da derivada

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

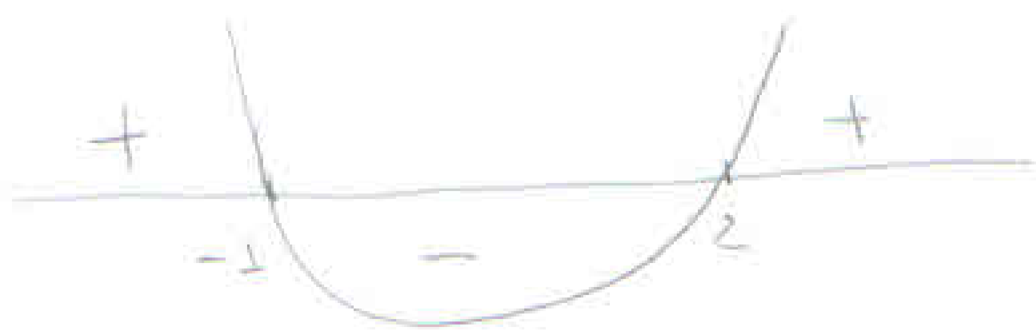
Pontos críticos

$6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$

$x = \frac{1 \pm 3}{2}$ → $x_1 = 2$, $x_2 = -1$



f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(2, \infty)$ pois $f'(x) > 0$ nesses intervalos

f é decrescente no intervalo $(-1, 2)$ pois $f'(x) < 0$ nesse intervalo

4

b) pontos críticos de f: $x = -1$ e $x = 2$

Critério da derivada segunda

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(-1) = -12 - 6 = -18 < 0 \Rightarrow x = -1$ é ponto de máximo

$f''(2) = 12.2 - 6 = 18 > 0 \Rightarrow x = 2$ é ponto de mínimo

c) Estudo do sinal de $f''(x)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ é ponto de inflexão

(i) $f''(x) > 0 \Rightarrow 12x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ para $x > \frac{1}{2}$ f tem a concavidade voltada para cima

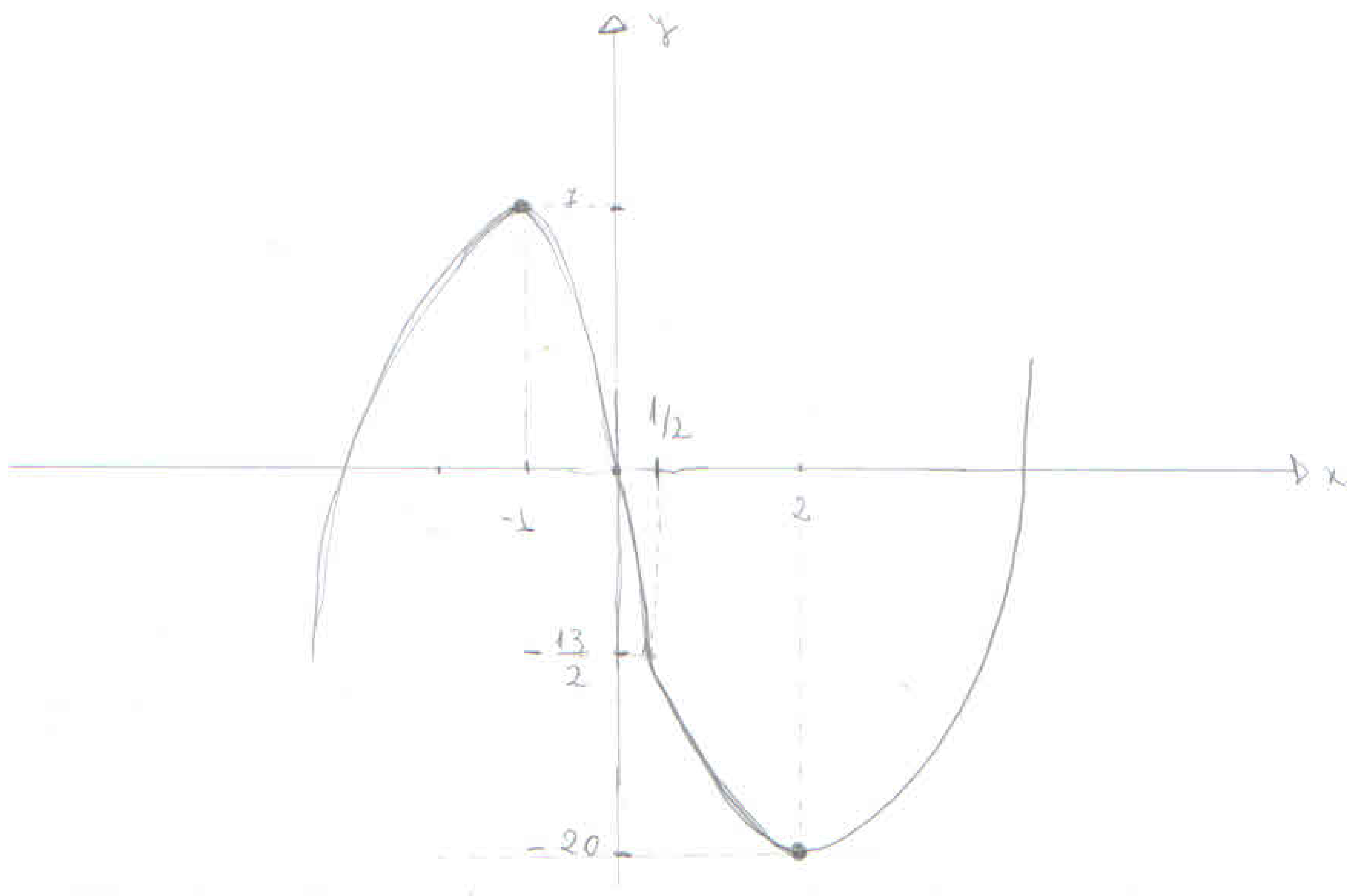
(ii) $f''(x) < 0 \Rightarrow 12x - 6 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ para $x < \frac{1}{2}$ f tem a concavidade voltada para baixo

d)

$f(-1) = 7$

$f(2) = -20$



4

$r = 5\,m$

$h = 10\,m$

$V(h) = \pi r^2 h$

$\frac{dV}{dt} = 25\,m^3/h$

a) $\frac{dh}{dt} = ?$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$25 = \pi (5)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\,m/h$$

b) tempo para encher o tanque?

o tanque enche a $25\,m^3/h$

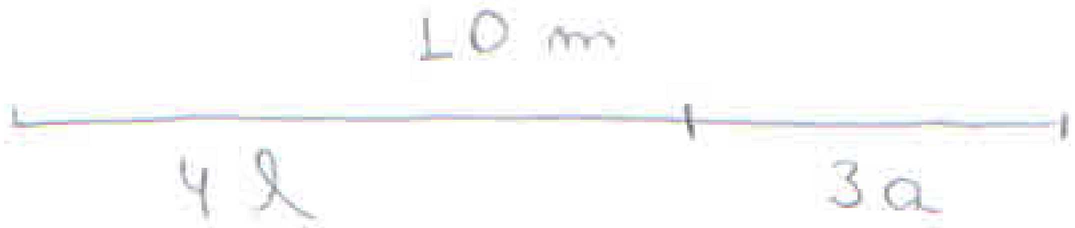
o volume total do tanque é $V = 25 \cdot 10\pi = 250\pi$

$$\text{velocidade} = \frac{\text{volume}}{\text{tempo}}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{250\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{250\pi}{25} = 10\pi.$$

$\Rightarrow$ leva 10π horas para o tanque ficar cheio

(5)



$$4\ell + 3a = 10 \Rightarrow \ell = \frac{10-3a}{4}$$

$$A_T = \ell^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow A_T = \left(\frac{10-3a}{4}\right)^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow A(a) = \frac{100 - 60a + 9a^2}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{100 - 60a + 4(9+\sqrt{3})a^2}{16}$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{16}\left[-60 + 8(9+\sqrt{3})a\right]$$

$$\frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow -60 + 8(9+\sqrt{3})a \Rightarrow a = \frac{60}{8(9+\sqrt{3})}$$ é ponto crítico

Sobre o ponto de máximo

Pela característica física do problema o máximo é um dos pontos extremos do intervalo $[0,10]$ e com isso não teremos as duas figuras. Para ter as duas figuras não existe um corte tal que a área total seja máxima.

Critério da derivada segunda

$$\frac{d^2A}{da^2} = \frac{1}{16}\left[8(9+\sqrt{3})\right] > 0 \quad \forall a$$

$$\Rightarrow a = \frac{60}{8(9+\sqrt{3})}$$ é ponto de mínimo

e $\ell = \frac{10-3a}{4} = \frac{10}{4} - \frac{3 \cdot 60}{32(9+\sqrt{3})}$

6)

$$C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$$

$$V = 60x - 12x^2$$

$$L = V - C = 60x - 12x^2 - 2x^3 - 6x^2 - 18x - 60$$

$$L(x) = -2x^3 - 18x^2 + 42x - 60$$

$$\frac{dL}{dx} = -6x^2 - 36x + 42$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow -6x^2 - 36x + 42 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-6-8}{2} = -7$$

Sendo x o número de unidades mensais, $x > 0$ sempre
Portanto, descartamos -7.

Usando o critério da derivada segunda p/ $x=1$

$$\frac{d^2L}{dx^2} = -12x - 36$$

$$\left.\frac{d^2L}{dx^2}\right|_{x=1} = -12 - 36 = -48 < 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ é ponto de máximo.}$$

$\Rightarrow$ o valor de um mil unidades mensais maximiza o lucro

7) $$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x - x}{x^3}$$

Usando L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x - x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\, sec^2 x . tg\, x}{6x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\left[sec^2 x\, tg^2 x + sec^4 x\right]}{6}$$

$$= \frac{2\, sec^4 0}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$