Álgebra de Boole
Propriedades e Simplificação Algébrica

GEN 253 - Circuitos Digitais

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

Propriedades da Algebra de Boole e Simplificação

A simplificação algébrica de expressões booleanas faz uso de diferentes propriedades, teoremas e identidades:

- Propriedades da álgebra de boole
- Propriedades das operações lógicas
- Teoremas de Demorgan
- Identidades Auxiliares

Propriedades da Algebra de Boole

Associativa: As variáveis de entrada podem ser operadas de forma associada

$$S = A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$$

Comutativa: As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

$$S = A+B+C = B+C+A = C+A+B = ...$$

Distributiva: A multiplicação (AND) booleana pode ser aplicada sobre a soma (OR)

$$S = A(B+C) = AB+AC$$

Propriedades das Operações Lógicas

- Operação NOT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Operação AND

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A . 0 =

A . 1 =

A . A =

A . 'A =

- Operação OR

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A + 0 =

A + 1 =

A + A =

A + 'A =

Propriedades das Operações Lógicas

- Operação NOT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Operação AND

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A . 0 = 0

A . 1 = A

A . A = A

A . 'A = 0

- Operação OR

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A + 0 = A

A + 1 = 1

A + A = A

A + 'A = 1

$S = (\bar{A} . 0) + (B . B) + (A. \bar{A}) + (B . 1) = ???$

Simplifique as expressões:

$$1)\ S=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B$$

$$2)\ P=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}+A.B.\overline{C}$$

$$3)\ Q=\left(A+B+C\right).\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)$$

2) $P = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C}$

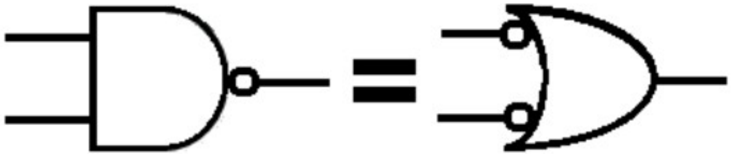
3) $Q = (A+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$

Teoremas de DeMorgan

São dois teoremas complementares que permitem a transformação de operações lógicas (e de portas lógicas por consequência)

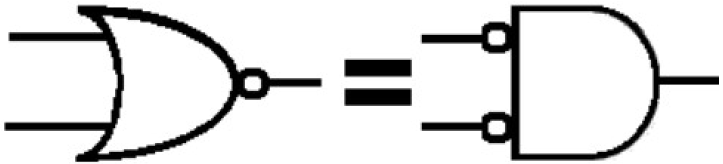
Teorema 1: O complemento do produto é igual a soma dos complementos

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$



Teorema 2: O complemento da soma é igual ao produto dos complementos

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$



Teoremas de DeMorgan

$$\overline{A \,.\, B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \,.\, \overline{B}$$

Simplifique as expressões:

$$1)\ S = \left(\overline{\overline{A.C} + B + D}\right) + \left(C.\left(\overline{A.C.D}\right)\right)$$

$$2)\ P = \overline{A\,\overline{B\,\overline{CD}}}$$

Teoremas de DeMorgan

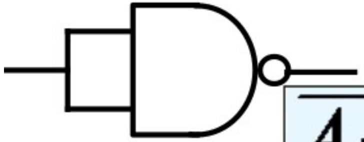
Realize operações algébricas modificando a expressão para que a mesma utilize apenas portas NAND:

$$S = \left(A\overline{B}C\right) + \left(\overline{A}\,\overline{C}\right) + \left(\overline{A}B\right)$$

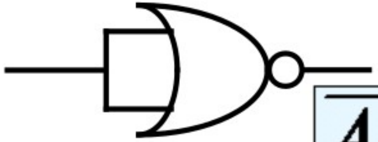
Demorgan e Universalidade das portas lógicas

Com NAND/NOR é possível construir qualquer outra operação

NOT

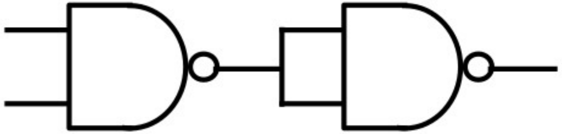


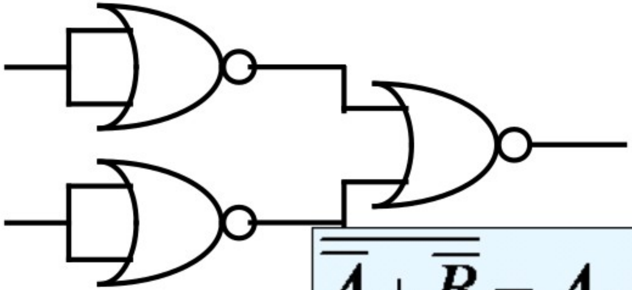
$$\overline{A\cdot A}=\overline{A}$$



$$\overline{A+A}=\overline{A}$$

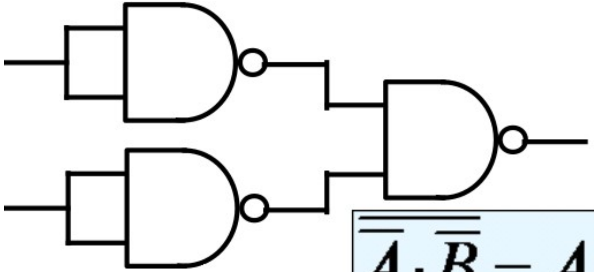
AND



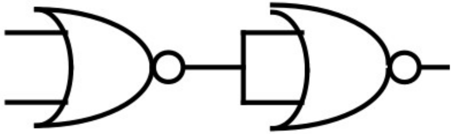


$$\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$$

OR



$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$$



Identidades auxiliares

1. A + (A . B) = A
2. A + ($\overline{A}$. B) = A + B

$$\overline{\overline{A+(\overline{A}.B)}}=\overline{\overline{A}.\overline{(\overline{A}.B)}}=\overline{\overline{A}.(\overline{\overline{A}}+\overline{B})}$$

Aplicado – se a propriedade distributiva

$$\overline{(\overline{A}.A)+(\overline{A}.\overline{B})}=\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}=A+B$$

3. (A+B).(A+C) = A + B.C

$$A.A+A.C+B.A+B.C$$

$$A+A.C+A.B+B.C$$

$$A(1+C+B)+B.C$$

$$A+B.C$$

Simplifique a expressão:

1) $S = \overline{\left(A.\overline{C}\right)+\overline{A}}+\overline{B\,\overline{C}\,A\,\overline{C}}+\left(\overline{A}\,B\right)$

Exercícios

1. Faça o que se pede sobre as expressões (a) e (b):
    1. desenhe o circuito das expressões;
    2. simplifique algebricamente as expressões;
    3. desenhe o circuito simplificado;

(a)

(b) $$S = \overline{\overline{(A.C)+D}+\overline{\overline{A}+B}}+\overline{\overline{C}.(A+B)}$$

$$P = \left(A + \left(\overline{B.C}\right)\right).\left(\overline{D + B.E}\right)$$

Exercícios

2. Manipule a expressão abaixo de forma que a mesma possua apenas portas NAND e NOT

$$S = (B.D)+(\overline{A}.\overline{C})+(\overline{B}.C.\overline{D})$$