

Revisão Prova 1 de Cálculo II

Milton Kist

Erickson Giesel Müller

August 30, 2024

1 Conteúdos

1. Integrais primitivas
2. Integrais indefinidas
3. Métodos de integração: Substituição e Integração por partes.
4. Integração definida via somas de Riemann
5. Teorema Fundamental do Cálculo
6. Integração envolvendo funções trigonométricas
7. Técnicas de integração
8. Cálculo de áreas de figuras planas
9. Cálculo de comprimento de arco de curva plana
10. Cálculo de volumes de sólidos de revolução
11. Cálculo de áreas de superfícies de revolução

2 Integrais Primitivas

Uma função $F(x)$ é considerada primitiva de $f(x)$ em um intervalo I se para todo $x \in I$ temos $F'(x) = f(x)$.

2.1 Propriedades

$$G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + 0 = F'(x)$$

3 Integral Indefinida

Integral indefinida é aquela que não tem limite de integração.

3.1 Propriedades

$$\int f(x).dx.K = K. \int f(x).dx \quad (1)$$

$$\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx \quad (2)$$

3.2 Integrais imediatas

1. $\int dx = x + K$
2. $\int x^{-1}.dx = \int \frac{1}{x}.dx = \ln x + K$
Se fizermos a derivação do exemplo 4, dará uma constante
3. $\int \sin x.d x = -\cos x + K$
4. $\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$

3.3 Integrais de Multiplicação

$$\int [f(x).g(x)]'.dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)].dx$$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x).dx + \int f(x).g'(x).dx$$

$$\int f'(x).g(x).dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x).dx$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x).dx$$

$$dv = f'(x).dx$$

$$v = f(x)$$

Para resolver a integral $\int 2x \cdot \sin x \cdot dx$:

$$u = 2x$$

$$du = 2 \cdot dx$$

$$dv = \sin x \cdot dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\int 2x \cdot \sin x \cdot dx = \int u \cdot dv$$

como $\int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx$:

$$2x \cdot -\cos x - \int (-\cos x) \cdot 2 \cdot dx$$

$$u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \sin x \cdot 2x \cdot dx = 2x \cdot -\cos x - \int (-\cos x) \cdot 2 \cdot dx$$

$$I = -2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + K$$

3.4 Integração por Partes

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x \cdot dx$$

$$dv = e^x \cdot dx$$

$$v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$I = \int u \cdot dv$$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \cdot dx$$

Para o integrando $\int x \cdot e^x \cdot dx$ aplicamos a derivação por partes novamente.

$$u = x$$

$$\begin{aligned}
du &= 1 \cdot dx \\
dv &= e^x \cdot dx \\
v &= e^x \\
I &= \int u \cdot dv \\
\int x \cdot e^x \cdot dx &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\
\int x \cdot e^x \cdot dx &= x \cdot e^x - e^x
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot e^x \cdot dx &= x^2 \cdot e^x - 2[x \cdot e^x - e^x] + K \\
&= e^x \cdot [x^2 - 2x + x] + K
\end{aligned}$$

Prova real:

$$[e^x \cdot (x^2 - 2x + x)]' = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + e^x \cdot (2x - 2) = e^x \cdot x^2 \quad (3)$$

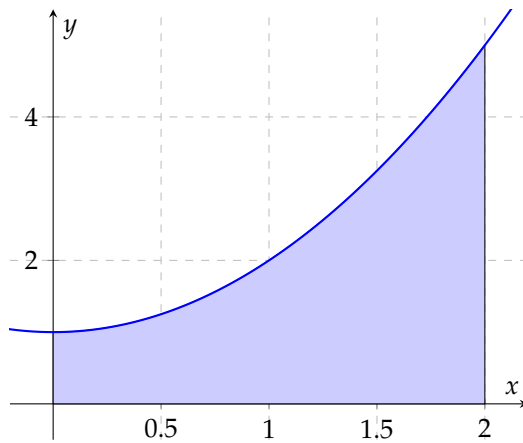
4 Método de integração por substituição ou mudança de variável de integração

Sejam $F'(x) = f(x)$ e g está contido no domínio de F , podemos definir a composição $F(g(x))$. Que segundo a regra da cadeia é resolvida por $F'(g(x)) \cdot g'(x)$
Exemplo:

$$\begin{aligned}
F(g(x)) &= \text{sen}(5x + 2) \\
[F(g(x))]' &= \cos(5x + 2) \cdot 5
\end{aligned}$$

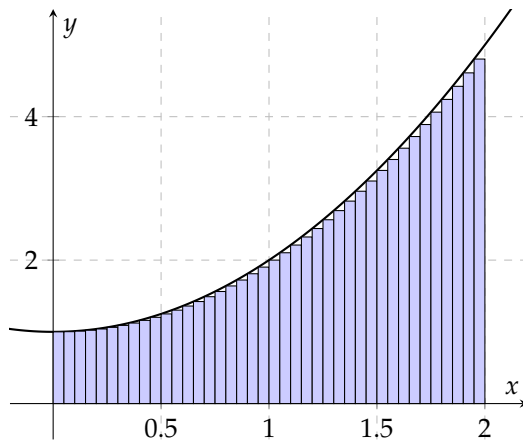
5 Integral Definida

Determine a área da região S limitada pelas curvas $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 0$ e $x = 2$.



A teoria para achar a área da seção é criar infinitos retângulos com base mínima e altura $f(x)$

5.1 Soma de Riemann



Seja $P : a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ uma partição uniforme do intervalo $[a, b]$. Dessa forma vamos construir n retângulos de base $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $h = f(C_i)$ onde $C_i \in (x_{i-1}, x_i)$.
Desta forma:

$$A = f(C_1) \cdot \Delta x + f(C_2) \cdot \Delta x \dots + f(C_i) \cdot \Delta x$$

$$A = \Delta x \cdot [f(C_1) \dots f(C_i)]$$

$$A = \sum_{i=1}^n f(C_i) \cdot \Delta x$$

Caso exista $\lim_{x \rightarrow \infty} A$, este será denominado integral de $x \rightarrow \infty$. Riemann (integral definida) da função f é indicada por:

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^h f(C_i).\Delta x$$

6 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f . Nestas condições:

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

exemplo:

$$\int_0^2 (x^2 + 1).dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{14}{3}$$

6.1 Demonstração

Seja $P : a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Neste caso a Soma de Riemann da função f é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(C_i).(x_i - x_{i-1}), C_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Como f é contínua, então, pelo **teorema do valor médio para derivadas**, temos que:

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe $C \in]a, b[$ tal que:

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe C_i tal que:

$$F'(C_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$F'(C_i) = f(C_i)$$

Logo:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\cancel{x_i - x_{i-1}}} \cdot \cancel{(x_i - x_{i-1})}$$

$$S_n = [F(x_1) - F(x_0)] + [(F(x_2) - F(x_1))] + \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

$$S_n = -F(x_0) + F(x_n)$$

$$S_n = F(b) - F(a)$$

Como:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x).dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

7 Integração Imprópria