Revisão Prova 2 de Cálculo II
Milton Kist

Erickson Giesel Müller

2 de Dezembro de 2024

Conteúdos

1. Funções de várias variáveis (Definição, Domínio, Imagem, Operações, Representação Gráfica).
2. Limite e Continuidade.
3. Limite e Continuidade de funções de várias variáveis.
4. Limites por caminho.
5. Cálculo de Limites envolvendo indeterminações.
6. Verificação de Continuidade de funções.
7. Derivadas parciais e aplicações.
8. Gradiente.
9. Multiplicadores de Lagranje.
10. Integração dupla.
11. Integração tripla

1 Função de Várias Variáveis

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, a relação $f_i A \to \mathbb{R}$ é denominada função real, $P = (x_1, x_2, ..., x_n), P \in \mathbb{R}$, associamos um único número real $z \in \mathbb{R}$.

$$A = D(f)$$

$$\mathbb{R} = CD(f)$$

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R}/z = f(x_1, x_2, ...)\}$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, determine os conjuntos domínio e imagem de f.

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$Im(f) = [0, 1]$$

Exemplo: em cada caso, determine o domínio da função, faça também a representação geométrica do domínio:

2 Limite e Continuidade

Abaixo algumas definições.

2.1 Bola Aberta

Dado um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e um número positivo r, a bola aberta de centro em P_0 e raio r é dada pelo conjunto de pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que a distância de $P \to P_0$ é **menor** que o raio r.

$$B(P_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \subset r\}$$

2.2 Ponto Interior e Conjunto Aberto

Seja o conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $P \in A$ é um ponto interior de A se existir uma **bola aberta** centrada em P totalmente contida em A.
Se todos os pontos de A forem interiores, dizemos que A é um **conjunto aberto**.
Simplificando, o ponto P não pode estar na borda nem fora de A.

2.3 Conjunto/Domínio Conexo

Um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo se dados dois pontos quaisquer em D, eles podem ser ligados por uma poligonal contida em D.
Simplificando, uma linha/curva que vc pode passar por dentro de um domínio sem que ela seja interrompida por um "buraco".

1. Simplesmente conexo: quando todo o domínio não apresenta buracos.
2. Apenas conexo: apresenta buracos
3. Não-conexo: quando o domínio não é totalmente conectado por inteiro.

2.4 Ponto de Fronteira

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é dito um ponto de fronteira de A se toda bola aberta centrada em P contiver pontos de A e pontos que não estão em A.
O conjunto de todos os pontos de fronteira do conjunto A é chamado fronteira de A.
Se todos os pontos de fronteira de A permanecem a A. Dizemos que A é fechado. Observamos que essa definição também é valida para um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n, n > 2$.

2.5 Conjunto Fechado

Um conjunto A, se ele contiver todos os seus pontos de fronteira.

2.6 Pontos de Acumulação

Toda bola centrada nele tem uma infinidade de pontos no conjunto.

3 Regra da Cadeia

Vamos definir a regra da cadeia para o caso de funções de várias variáveis.
Proposição 1: Sejam A e B conjuntos abertos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, e sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}^2$ tais que $g(t) = (x(t), y(t)) \in A$ para todo $t \in B$. Nestas condições, se g for diferenciável em B e $f(x, y)$ possuir derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em A.
Então, a função composta:

$$h(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t))$$

é diferenciável $\forall t \in B$ e $\dfrac{dh}{dt}$ é dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\varphi f}{\varphi x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\varphi f}{\varphi y}.\frac{dy}{dt}$$

Exemplo: sejam $h(t) = f(x(t), y(t))$, $f(x, y) = 5xy - y^2$ e $x(t) = 2t$, $y(t) = 5t + 3$
Verificar que neste caso vale (*). Usando (*)

$$\frac{dh}{dt} = 5y.2 + (5x - 2y).5$$
$$= 5.(5t + 3).2 + (5(2t) - 2(5t + 3)).5$$

$$= 50.t + 30 + (10t - 10t - 6).5 = 50t$$
$$\rightarrow h(t) = f(2t, 5t + 3)$$
$$= 5.(2t)(5t + 3) - (5t + 3)^2$$
$$= 50t^2 + 30t - 25t^2 - 30t - 9$$
$$= 25t^2 - 9$$
$$h'(t) = 50t$$

confere

Proposição 2: Sejam A e B conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$, e sejam $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções diferenciáveis, então a função composta $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ é diferenciável.

$$\frac{\varphi h}{\varphi x} = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi x} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi x}$$
$$\frac{\varphi h}{\varphi y} = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi y} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi y}$$

Exemplo: Sejam $f(u, v) = 2u^3 - 3v + 32$, $w(x, y) = 2x - y$ e $v(x, y) = 2x - xy^2$. Determine $\frac{\varphi f}{\varphi x}$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y}$:

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi x} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi x}$$
$$= 6u^2.2 - 5.(2 - y^2) = 12.(2x - y)^2 - 5.(2 - y^2)$$

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi y} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi y}$$
$$= 6u^2.(-1) - 5.(-2xy) = -6.(2x - y)^2 + 10xy$$

3.1 Derivadas Parciais Sucessivas

Seja $z = f(x, y)$, já sabemos como construir as funções $\frac{\varphi f}{\varphi x}, \frac{\varphi f}{\varphi y}$. Da mesma forma, podemos construir as funções:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})$$
$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y.\varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})$$
$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2.\varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}))$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 5x^2y - y^3x^2 + 9$. Determine as seguintes funções derivadas:

1. $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}$

2. $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$

3. $\dfrac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x}$

1.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 10xy - 2y^3 x$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 10y - 2y^3$$

2.

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 10 - 6xy^2$$

3.

$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})) = -12xy$$

3.2 Teorema de Schwartz

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y), \forall (x, y) \in A$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 4x^3 y^4 + y^2$.
Verifique se $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$:

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 12x^2.y^4$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 48x^2 y^3$$

ou

$$\frac{\varphi f}{\varphi y} = 16x^3 y^3 + 2y$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi y}) = 48x^2 y^3$$

3.3 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Definição: Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, então:

1. $(x_0, y_0) \in D(f)$ é um ponto de **máximo local** de f, se existir uma bola aberta $B = B((x_0, y_0), r)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \bigcap D(f)$

2. $(x_0, y_0) \in D(f)$ é ponto de mínimo local de f se existir uma bola aberta $B = B((x_0, y_0), r)$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \bigcap D(f)$.
   Nota: Se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D(f)$, diremos que (x_0, y_0) é máximo global de f. Analogamente, define-se mínimo global.z

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$, verifique se f possui ponto de máximo/mínimo.
$\rightarrow f(x, y) = 5 - (x^2 + y^2)$

$$f(0, 0) = 5 \geq f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\rightarrow f$ admite máximo global em $(0, 0)$ e esse valor de máximo é 5.

3.4 Ponto Crítico de uma função de Várias Variáveis

Definição: Seja $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é um ponto crítico de f se as derivadas parciais $\dfrac{\varphi f}{\varphi x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\varphi f}{\varphi y}(x_0, y_0)$ forem **nulas** ou se f não for diferenciável em (x_0, y_0).
Exemplo: Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$:

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi x} = -2x = 0$$

$$-2x = 0$$

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi y} = -2y = 0$$

$$-2y = 0$$

$\rightarrow x = 0$ e $y = 0$
Ponto Crítico = $(0, 0)$
Proposição (Condição Necessária): Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in A$ for um ponto extremante (máximo ou mínimo) local, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f.
Proposição (Condição Suficiente): Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais de 1^a e 2^a ordem são contínuas num conjunto aberto que contém (x_0, y_0) e suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f. Seja $H(x, y)$ o determinante.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x,y) & \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x,y) \\ \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x,y) & \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Temos que

1. Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x_0, y_0) > 0$
   então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f.
2. Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} < 0$
   então (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f.
3. Se $H(x_0, y_0) < 0$
   então (x_0, y_0) não é ponto extremo.
4. Se $H(x_0, y_0) = 0$
   nada podemos afirmar.

Exemplo: Dada a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
Determine os pontos críticos de f e classifique-os:
Pontos Críticos:
$\rightarrow \dfrac{\varphi f}{\varphi x} = 4x^3 - 4y = 0$
$4x^3 - 4y = 0 \rightarrow y = x^3$
$\rightarrow \dfrac{\varphi f}{\varphi y} = 4y^3 - 4x = 0$
$4y^3 - 4x = 0 \rightarrow 4(x^3)^3 - 4x = 0$
$x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0$
$x = 0$ ou $x^8 = 1$
$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$
Quando $x = 1 \rightarrow y = (1)^3 = 1$
Quando $x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 = -1$
Quando $x = 0 \rightarrow y = 0^3 = 0$
Pontos Críticos: $(0,0); (-1,-1); (1,1)$

4 Teorema de Weierstrass

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = f(x,y)$ uma função contínua em A. Então existem P_1, $P_2 \in A$ tais que $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \forall P \in A$
Exemplo: Seja dada a função $f(x,y) = y^3 - x^2y + 4y$. Determine o valor de máximo e o valor de mínimo de f sobre o conjunto A delimitado pelo triângulo de vértices $M(-2,0)$, $N(0,2)$, $0(0,-2)$ *FIGURA 1*. **Observação:**

- Pelo Teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo global sobre A.

- Para determinarmos os candidatos a extremos máximo e mínimo, vamos analisar separadamente o interior de A e a fronteira de A.
- Os candidatos a extremos que estão localizados no interior de A estão entre os pontos críticos da função. Isto é: onde $\frac{\varphi f}{\varphi x}(x,y) = 0$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y}(x,y) = 0$ ou onde essas derivadas parciais não existem.

Determinar os candidatos a extremos que estão no interior de A.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x,y) = -2xy$$

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x,y) = 3y^2 - x^2 + 4$$

logo
$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 0$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y} = 0$
$-2xy = 0$ e $3y^2 - x^2 + 4 = 0$

$$-2xy = 0 \to xy = 0$$

logo $x = 0$ ou $y = 0$ se $x = 0 \to 3y^{2-0^2} + 4 = 0$, $\nexists y \in \mathbb{R}$
se $y = 0 \to 3.0^2 - x^2 + 4 = 0 \to x = \pm 2$
Pontos críticos (candidatos a extremos): $(-2,0), (2,0)$.
Nenhum dos dois pontos está no interior de A. Logo não são candidatos a extremos.
Determinar os candidatos a extremos que estão na fronteira de A.

$$\overline{MN} = (-2,0), (0,2) \to y = ax + b$$

$$0 = a.(-2) + b$$

$$-2a + 2 = 0 \to a = 1$$

e

$$2 = a.0 + b \to b = 2$$

$$y = x + 2, -2 \leq x \leq 0$$

$$\overline{MO} = (-2,0), (0,-2)$$

$$0 = a(-2) + b \to -2a - 2 = 0$$

e

$$-2 = a.0 + b \to b = -2 \to a = -1$$

$$y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$$

Sobre o segmento $\overline{MN}$: $y = x, -2 \leq x \leq 0$:
substituindo na função:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x, x+2) \\ &= (x+2)^3 - x^2.(x+2) + 4(x+2) \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8 \\ &= 4x^2 + 16x + 16, -2 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

Para determinarmos os candidatos a extremos sobre $\overline{MN}$ usamos os conceitos de Cálculo I.

$$f_1(x) = 4x^2 + 16x + 16$$

$$f_1'(x) = 8x + 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2$$

$x = -2$ não é ponto interior do segmento $\overline{MN}$. Logo os pontos críticos sobre o segmento $\overline{MN}$ não serão apenas seus extremos $x = -2$ e $x = 0$. **Candidatos a extremos:** (-2,0), (0,2)
quando $x = -2$ e $y = 0$.
quando $x = 0$ e $y = 2$.

$$\overline{ON} : x = 0, -2 \leq y \leq 2$$

$$\overline{MN} : y = x + 2$$

Segmento $\overline{ON}$: $x = 0, -2 \leq y \leq -2$
Substituindo na função f.

$$f(0,y) = y^3 - 0^2.y + 4y = y^3 + 4y$$

$$f_2(y) = y^3 + 4y$$

$$f_2'(y) = 3y^2 + 4 = 0$$

$\nexists y$ pois são dois quadrados e não tem como ser menor que 0.
Logo, neste segmento, os candidatos a extremos serão: $(0,-2), (0,2)$ **Segmento $\overline{MO}$:**$y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$
Substituindo na função f:

$$\begin{aligned} f(x, -x-2) &= (-x-2)^3 - x^2(-x-2) + 4(-x-2) \\ &= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ &= 4x^2 - 16x - 16 = f_3(x) \end{aligned}$$

$$f_3'(x) = -8x - 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2$$

que está no extremo.
São candidatos a extremos sobre $\overline{MO}$: $(-2,0), (0,-2)$
Quadro de Análise *FIGURA 2*

Exemplo: A temperatura T em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = 3y^2 + x^2 - x$. Qual é a temperatura máxima e mínima sobre o disco fechado de raio 2 centrado na origem do sistema ortogonal cartesiano $p = (0, 0)$?
Região A = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$*FIGURA 3*
Interior de A:
Pontos Críticos

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 6y = 0 \rightarrow y = 0$$

$(\frac{1}{2}, 0)$ está no interior de A.
Fronteira de A:
Pontos Críticos

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2$$

Substituindo na função f:

$$T(x, y) = 3.(4 - x^2) + x^2 - x$$

$$= 12 - 3x^2 + x^2 - x = -2x^2 - x + 12$$

$$T_1(x) = -2x^2 - x + 12$$

$$T_1'(x) = -4x - 1 = 0 \rightarrow -4x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Se $x = -\frac{1}{4} \rightarrow y^2 = 4 - (\frac{-1}{4})^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$

$$y = \frac{\pm\sqrt{63}}{4}$$

Sobre a fronteira de A, candidatos a extremos:

1. $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4})$
2. $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{63}}{4})$
3. $(-2, 0)$
4. $(2, 0)$

extremos do intervalo -2 *e* 2, $x = 2 \rightarrow y^2 = 0, x = 2 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$
Quadro de Análise *FIGURA 4*

5 Máximos e Mínimos Condicionados

Considere os problemas:

- min $f(x, y) = x^2 + y^2$ *problema de otimização irrestrito/livre*
- min $f(x, y) = x^2 + y^2$
  sujeito a $x + y = 1$ *problema de otimização restrita/condicional*

FIGURA 5]
Problemas envolvendo Funções de duas variáveis e uma restrição:
Considere o problema:
max $f(x, y)$
sujeito a $g(x, y) = 0$

Proposição: Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável sobre um domínio U. Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U. Tal que o gradiente de $g(x, y)$ não pode ser vetor nulo ($\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$). Gradiente é o vetor formado pelas derivadas parciais.
$\forall (x, y) \in V$, onde $V = \{(x, y) \in U, g(x, y) = 0\}$
Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in U$ seja extremo local de f em V é que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$
OBS: Podemos dizer que os pontos de máximo ou de mínimo condicionados de f devem satisfazer as seguintes condições:

$$g(x, y) = 0, \frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = \lambda \frac{\varphi g}{\varphi x}(x, y)$$

e (*)

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = \lambda \frac{\varphi g}{\varphi y}(x, y)$$

para algum λ real.
OBS: O $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna (*) compatível é denominado de multiplicador de Lagranje. O método de Lagranje consiste em definir uma função de 3 variáveis.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Nesse caso a equação (*) é equivalente à equação gradiente $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$
Equação gradiente:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (\frac{\varphi L}{\varphi x}, \frac{\varphi L}{\varphi y}, \frac{\varphi L}{\varphi \lambda}) = (\frac{\varphi f}{\varphi x} - \lambda \frac{\varphi g}{\varphi x}, \frac{\varphi f}{\varphi y} - \lambda \frac{\varphi g}{\varphi y}, g(x, y)) = (0, 0, 0)$$

Com isso os candidatos a extremos de f sujeitos à restrição $g(x, y) = 0$ são exatamente os pontos críticos de L.

Exemplo: Uma casa retangular deve ser construída em um terreno triangular de forma que a casa tenha área máxima. Se o terreno tiver o formato *FIGURA 6*, quais deverão ser as dimensões da casa?
Dimensões do terreno: Triângulo reto de base 30 e altura 10.
Solução: Vamos colocar a situação problema num sistema ortogonal cartesiano. *FIGURA 7.*// **Problema modelado:**
max $A(x, y) = x.y$
sujeito a $3y + x - 30 = 0$
$\rightarrow$ Equação de Lagranje

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(3y + x - 30)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (y - \lambda, x - 3\lambda, -(3y + x - 30)) = 0$$

$\nabla L = 0 \rightarrow$

- $y - \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda$
- $x - 3\lambda = 0 \rightarrow x = 3\lambda$
- $3y + 3x - 30 = 0 \rightarrow 3\lambda + 3\lambda - 30 = 0$

logo
$6\lambda = 30 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow x = 15$ e $y = 5$
Logo a solução do problema será:

$$A(15, 5) = 15.5 = 75m^2$$

Analogamente, podemos ter problemas da forma:
max/min $f(x, y, z)$
sujeito a $g(x, y, z) = 0$
Neste caso a equação de Lagrange será:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

6 Integração Múltipla

Nos permitem realizar o cálculo de áreas e volumes e determinarmos algumas grandezas físicas, tais como massa e momento de inércia.

6.1 Integração Dupla - Volume

Considere uma função $z = f(x, y)$ cujo $D(f) \subset R$, sendo R uma área fechada e limitada do plano xy.
Traçando retas paralelas aos eixos x e y, recobrimos a região R por pequenos retângulos. Ou seja, visto de cima, podemos analizar a região da função z com uma região quadriculada sobre sua região ortogonalmente ao seu domínio.
Considerando apenas os retângulos R_k que estão totalmente contidos em R,

numerando-os de 1 até n. Em cada retângulo R_k, escolhemos um ponto (x_k, y_k) e formamos a soma.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$$

Onde $\Delta A_k = \Delta x_k.\Delta y_k$ é a área do retângulo R_k.
Suponhamos que mais retas paralelas ao plano xy são traçadas, tornando as dimensões Δx_k e Δy_k cada vez menores. Fazemos isso de tal maneira que a diagonal máxima dos retângulos R_k tende a zero enquanto o valor n tende ao infinito. Assim, a integral dupla de $f(x, y)$ sobre a região R é determinada pela expressão:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$$

Denotamos:

$$\int\int_R f(x, y).dA$$

ou

$$\int\int_R f(x, y).dx.dy$$

A integral dupla de f sobre a área R é:

$$\int\int_R f(x, y).dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*).\Delta A$$

Onde (x_{ij}^*, y_{ij}^*) é o ponto de amostragem de cada retângulo. Caso escolhermos o canto superior direito de cada retângulo para representar o ponto de amostragem, essa coordenada seria (x_i, y_j).
Observamos que:

- A região R é denominada *Região de integração*.
- A soma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$ é chamada soma de Riemann de $z = f(x, y)$ sobre R.
- O limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$ deve ser independente da escolha das retas que subdividem a região R e dos pontos (x_k, y_k) tomados nos retângulos R_k.
- A existência do limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$ depende da função $z = f(x, y)$ e também da região R. Em nosso estudo, vamos supor que o contorno da região R é formado por um número finito de arcos de curvas *suaves*. Isto é, de arcos de curvas que não contêm pontos angulosos. Nesse caso, se f é contínua sobre R, temos a garantia da existência da integral dupla.

A soma de Riemann no cálculo de funções de uma variável consistia em formar infinitos retângulos para encontrar a área abaixo de uma curva.
Veremos agora que, quando $z = f(x, y) \geq 0$, a integral dupla pode ser interpretada como um **volume**.
Suponhamos que $z = f(x, y) \geq 0$ (ou seja, está sobre a região R). Vemos que o produto $f(x_k, y_k).\Delta A_k$ representa o volume de um prisma reto, cuja base é o retângulo R_k e cuja altura é $f(x_k, y_k)$.
A soma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k).\Delta A_k$ repreesnta uma aproximação do volume da porção do espaço compreendida abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$ e acima da região R do plano xy.
Assim, quando $f(x, y) \geq 0$, a $\int\int_R f(x, y).dx.dy$ nos dá o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico da função $f(x, y)$ e com base R.

6.2 Integrais Iteradas

Supoinha que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b].[c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y).dy$ significando que x é mantido e $f(x, y)$ é integrada em relação a y em $c \to d$. Esse procedimento é chamado de integração parcial em relação a y.(Observe a semelhança com a derivada parcial). Como $\int_c^d f(x, y).dy$ é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x.

$$A(x) = \int_c^d f(x, y).dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x em $a \to b$, obteremos:

$$\int_a^b A(x).dx = \int_a^b [\int_c^d f(x, y).dy].dx$$

A integral do lado direito da quação é chamada de **Integral Iterada**. Em geral, os colchetes são obitios. Assim:

$$\int_a^b [\int_c^d f(x, y).dy].dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y).dy.dx$$

Significa que primeiro integramos com relação a y e depois em relação a x (de dentro pra fora da equação). Quando R é uma região retangular, não faz diferença se alterarmos a ordem conforme equação abaixo:
Teorema de Fubini

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y).dy.dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y).dx.dy$$

Existe um caso especial que ocorre quando $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função $f(x)$ por uma função $f(y)$. Podemos separar as duas integrais, pois cada uma delas se torna constante na integral da outra.

$$\int\int_R f(x, y).dA = \int_c^d \int_a^b g(x).h(y).dx.dy$$

$$= \int_c^d h(y).[\int_a^b g(x).dx].dy = \int_c^d h(y).dy \int_a^b g(x).dx$$

onde $R = [a, b].[c, d]$

Exemplo: $\int_0^3 \int_1^2 x^2.y.dy.dx$

$= \int_0^3 [x^2.\frac{y^2}{2}]_1^2.dx$

$= \int_0^3 [x^2.\frac{2^2}{2} - x^2.\frac{1^2}{2}].dx$

$= \int_0^3 [2x^2 - \frac{x^2}{2}].dx$

$= \int_0^3 \frac{3}{2}.x^2.dx = \frac{3}{2}.\frac{x^3}{3}|_0^3$

$= \frac{x^3}{2}|_0^3 = \frac{3^3}{2} - 0 = \frac{27}{2}$

Exemplo:$\int_1^3 \int_0^1 x.e^{xy}.dy.dx$

$= \int x.e^{xy}.dy = x. \int e^{xy}.dy$

Sendo: $u = xy \rightarrow \frac{du}{dy} = x$

$\rightarrow du = x.dy \rightarrow dy = \frac{du}{x}$

$= x. \int \frac{e^u}{x}.du$

$= \frac{x}{x} \int e^u.du = 1.e^u = e^{xy}$

Ou seja:

$= \int_1^3 [e^{xy}]_0^1.dx$

$= \int_1^3 (e^x - e^0).dx = \int_1^3 (e^x - 1).dx$

$= [e^x - x]_1^3 = (e^3 - 3) - (e^1 - 1)$

$= e^3 - e^1 = 2$

6.3 Integrais Duplas Sobre Regiões gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, podemos integrar a função f para regiões **não retangulares**.

Neste caso, precisamos fazer a soma de Riemann para funções de 1 variável limitadas pelas funções superior menos a inferior para encontrar a área da base, em seguida podemos calcular o volume do sólido.

Exemplo: Calcule a integral $\int \int_D (x + 2y).dx.dy$ onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x$ e $y = 1 + x^2$.

Calculando as parábolas, percebemos que elas são limitadas pelos valores de $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ e tem como função superior $y = 1 + x^2$ e inferior $y = 2x^2$.

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y).dy.dx$$

$$\int_{-1}^{1} [xy + y^2]_{2x^2}^{1+x^2} .dx$$

$$\int_{-1}^{1} [(x.(1 + x^2) + (1 + x^2)^2) - (x.sx^2 + (2x^2)^2)].dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [(x + x^3 = 1 = 2x^2 + x^4) - (2x^3 + 4x^4)].dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1 + x + 2x^2 - x^3 - 3x^4).dx$$

$$= [x\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^5}{5}]_{-1}^{1}$$

$+\frac{x^2}{2}$ e $-\frac{x^4}{4}$ se anulam.

$$= (1 + \frac{2}{3}.1^3 - \frac{3}{5}.1^5) - (-1 + \frac{2}{3}.(-1)^3 - \frac{3}{5}.(-1)^5)$$

$$= 2 + \frac{4}{3} - \frac{6}{5} = \frac{32}{15}$$

6.4 Integração Tripla

Pode-se definir integrais triplas para **funções de três variáveis**. Note-se o paralelepípedo retangular abaixo como domínio da nossa função quadridimensional:

$$B = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas, fazemos isso dividindo cada uma das 3 variáveis em subintervalos ($l.\Delta x$, $m.\Delta y$ e $n.\Delta z$). Cada subcaixa tem o volume $\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z$.
Assim, formamos a **soma tripla de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*).\Delta V$$

A integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhendo os pontos de amostragem (x_i, y_j, z_k), obteremos a equação para integração tripla:

$$\int\int\int_B f(x, y, z).dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k).\Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue:

$$\int\int\int_B f(x, y, z).dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z).dx.dy.dz$$

A integral iterada do lado direito, usando o *Teorema de Fubini*, integramos primeiro em relação a x (mantendo y e z fixados). Em seguida integramos em relação ao y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z.