Revisão Prova 1 de Cálculo II
Milton Kist

Erickson Giesel Müller

September 13, 2024

1 Conteúdos

1. Integrais primitivas
2. Integrais indefinidas
3. Métodos de integração: Substituição e Integração por partes.
4. Integração definida via somas de Riemann
5. Teorema Fundamental do Cálculo
6. Integração envolvendo funções trigonométricas
7. Técnicas de integração
8. Cálculo de áreas de figuras planas
9. Cálculo de comprimento de arco de curva plana
10. Cálculo de volumes de sólidos de revolução
11. Cálculo de áreas de superfícies de revolução

2 Integrais Primitivas

Uma função $F(x)$ é considerada primitiva de $f(x)$ em um intervalo I se para todo $x \in I$ temos $F'(x) = f(x)$.

2.1 Propriedades

$$G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + 0 = F'(x)$$

3 Integral Indefinida

Integral indefinida é aquela que não tem limite de integração.

3.1 Propriedades

$$\int f(x).dx.K = K.\int f(x).dx \tag{1}$$

$$\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx \tag{2}$$

3.2 Integrais imediatas

1. $\int dx = x + K$
2. $\int x^-1.dx = \int \frac{1}{x}.dx = \ln x + K$
   Se fizermos a derivação do exemplo 4, dará uma constante
3. $\int \sin x.dx = -\cos x + K$
4. $\int x^\alpha.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$

3.3 Integrais de Multiplicação

$$\int [f(x).g(x)]'.dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)].dx$$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x).dx + \int f(x).g'(x).dx$$

$$\int f'(x).g(x).dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x).dx$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x).dx$$

$$dv = f'(x).dx$$

$$v = f(x)$$

Para resolver a integral $\int 2x.\sin x.dx$:

$$u = 2x$$

$$du = 2.dx$$

$$dv = \sin x.dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\int 2x.\sin x.dx = \int u.dv$$

como $\int f'(x).g(x).dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x).dx$:

$$2x. - \cos x - \int (-\cos x).2.dx$$

$$u.v - \int v.du$$

$$\int \sin x.2x.dx = 2x. - \cos x - \int (-\cos x).2.dx$$

$$I = -2x.\cos x + 2.\sin x + K$$

3.4 Integração por Partes

$$\int x^2.e^x.dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x.dx$$

$$dv = e^x.dx$$

$$v = \int e^x.dx = e^x$$

$$I = \int u.dv$$

$$\int x^2.e^x.dx = x^2.e^x - \int e^x.2x.dx$$

$$= x^2.e^x - 2\int x.e^x.dx$$

Para o integrando $\int x.e^x.dx$ aplicamos a derivação por partes novamente.

$$u = x$$

$$du = 1.dx$$
$$dv = e^x.dx$$
$$v = e^x$$
$$I = \int u.dv$$
$$\int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x.dx$$
$$\int x.e^x.dx = x.e^x - e^x$$

Logo:

$$\int x^2.e^x.dx = x^2.e^x - 2[x.e^x - e^x] + K$$
$$= e^x.[x^2 - 2x + x] + K$$

Prova real:

$$[e^x.(x^2 - 2x + x)]' = e^x.(x^2 - 2x + 2) + e^x.(2x - 2) = e^x.x^2 \tag{3}$$

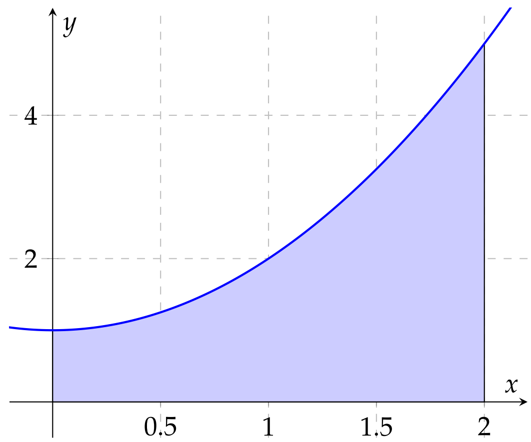
4 Método de integração por substituição ou mudança de variável de integração

Sejam $F'(x) = f(x)$ e g está contido no domínio de F, podemos definir a composição $F(g(x))$. Que segundo a regra da cadeia é resolvida por $F'(g(x)).g'(x)$
Exemplo:

$$F(g(x)) = sen(5x + 2)$$
$$[F(g(x))]' = \cos(5x + 2).5$$

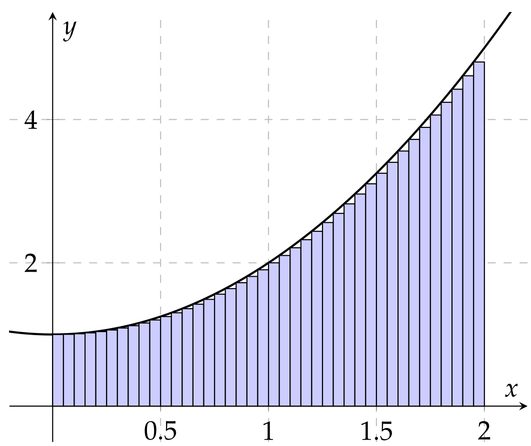
5 Integral Definida

Determine a área da região S limitada pelas curvas $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 0$ e $x = 2$.



A teoria para achar a área da seção é criar infinitos retângulos com base mínima e altura $f(x)$

5.1 Soma de Riemann



Seja $P : a < x_1 < x_2 ... < x_n = b$ uma partição uniforme do intervalo $[a, b]$. Dessa forma vamos construir n retângulos de base $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $h = f(C_i)$ onde $C_i \in (x_{i-1}, x_i)$.
Desta forma:

$$A = f(C_1).\Delta x + f(C_2).\Delta x ... + f(C_i).\Delta x$$

$$A = \Delta x.[f(C_1)...f(C_i)]$$

$$A = \sum_{i=1}^{x} f(C_i).\Delta x$$

Caso exista $\lim_{x\to\infty} A$, este será denominado integral de $x \to \infty$. Riemann (integral definida) da função f é indicada por:

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{h} f(C_i).\Delta x$$

6 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f. Nestas condições:

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

exemplo:

$$\int_0^2 (x^2+1).dx = [\frac{x^3}{3} + x]_0^2 = (\frac{2^3}{3} + 2) - (\frac{0^3}{3} + 0) = \frac{14}{3}$$

6.1 Demonstração

Seja $P : a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Neste caso a Soma de Riemann da função f é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i).(x_i - x_{i-1}), C_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Como f é contínua, então, pelo **teorema do valor médio para derivadas**, temos que:
Se f é contínua em $[a,b]$ entãoexiste $C \in]a,b[$ tal que:

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Em cada intervalo $[x_{i=1}, x_i]$ existe C_i tal que:

$$F'(C_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$F'(C_i) = f(C_i)$$

Logo:

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1}}{\cancel{x_i - x_{i-1}}}.\cancel{(x_i - x_{i-1})}$$

$$Sn = [F(x_1) - F(x_0)] + [(F(x_2) - F(x_1)] + ... + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

$$Sn = -F(x_0) + F(x_n)$$

$$Sn = F(b) - F(a)$$

Como:

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{n\to+\infty} Sn = \lim_{n\to+\infty}[F(b) - F(a)]$$
$$= F(b) - F(a)$$

7 Integração Imprópria

Em intervalos finitos
Se f for contínua no intervalo $(a, b]$ e para todo $a < t < b$ existe a integral $\int_t^b f(x).dx$, então:

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x).dx$$

Desde que o limite exista em $\mathbb{R}$

Se f for contínua no interval $[a, b)$ e para todo $a < t < b$ exista a integral $\int_a^t f(x).dx$, então:

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x).dx$$

Desde que o limite exista em $\mathbb{R}$

exemplo:
Calcule a integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
Domínio de f é $(2, +\infty)$

$$x - 2 > 0 \to x > 2$$

f é contínua no intervalo $(2, 5]$. Seja $2 < t < 5$:

$$\lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}.dx$$

Sendo $u = x - 2$ e $du = 1.dx$:

$$I = \int u^{-\frac{1}{2}}.du = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$2\sqrt{u} = 2.\sqrt{x-2}$$

$$\lim_{t\to 2^+}(2\sqrt{5-2} - 2\sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}$$

8 Métodos de Integração

8.1 Integração de funções trigonométricas

1. Determine $\int (2x-1).\sin(x^2-x).dx$:
   Considerando $u = x - x$ e $du = (2x-1).dx$

$$I = \int \sin u.du = -\cos(x^2 - x) + c$$

2. Determine $\int \tan x.dx$:

$$\int \tan x.dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}.dx$$

   Considerando $u = \cos x$ e $du = -\sin x$

$$I = \int -u^{-1}.du = -\int -u^{-1}.du$$

$$-\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c = \ln|\cos x|^{-1} + c$$

   Tentar entender por que $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1}$
   Propriedade de Logaritmos $\log x^n = n.\log x$

$$I = \ln|\sec x| + c$$

3. Determine $\int \cot x.dx$:

$$\int \cot x.dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}.dx$$

   Considerando $u = \sin x$ e $du = \cos x.dx$

$$I = \int u^{-1}.du = \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c$$

4. Determine $\int x^2.\cot x^3.dx$:
   Considerando $u = x^3$ e $du = 3x^2.dx$

$$I = \int \cot u.\frac{du}{3} = \frac{1}{3}.\ln|\sin x^3| + c$$

5. Determine $\int \sec x.dx$:

$$\int \sec x.dx = \int \cos^{-1} x.dx$$

$$\int \sec x.dx = ln|secx + tgx| + c$$

6. Determine $\int \csc x.dx$:

$$\int \csc x.dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

7. Determine $\int \frac{d\Theta}{\cos(4\Theta - 2)}$:
Considerando $u = 4\Theta - 2$, $du = 4.dx$,

$$I = \int \frac{1}{\cos(u)}.\frac{du}{4} = \frac{1}{4}.\int \sec(u).du$$

$$I = \frac{\ln sec(4\Theta - 2) + tg(4\Theta - 2)}{4} + c$$

8. $\int \sin^n x$ e $\int \cos^n x$: Neste exemplo, consideramos n um número inteiro positivo. Para determinar essas integrais, usamos as identidades:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemplo: Determine as integrais

9. $\int \cos^5 x.dx$
Passo 1: Preparar o Integrando.

$$\int \cos^5 x.dx = \int \cos^4 x.\cos x.dx$$

$$\int \cos^5 x.dx = \int (\cos^2 x)^2.\cos x.dx$$

Passo 2: Usar a identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ no quadrado.

$$I = \int (1 - \sin^2 x)^2.\cos x.dx$$

$$I = \int (1 - 2.\sin^2 x + \sin^4 x).\cos x.dx$$

$$I = \int \cos x.dx - 2.\int \cos x.\sin^2 x.dx + \int \cos x.\sin^4 x.dx$$

Considerando $u = \sin x$ e $du = \cos x.dx$:

$$I = \int 1.du - 2.\int u^2.du + \int u^4.du$$

$$I = u - 2.\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} = \sin x - \frac{2.\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

10. Usando a segunda Identidade: $\int cos^2 x.dx$

$$\int cos^2 x.dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}.dx$$

$$I = \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2}.\int \cos 2x.dx$$

Considerando $u = 2x$, $du = 2.dx$

$$I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.\int \cos u.\frac{du}{2}$$

$$I = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

9 Integral de Forma

$\int \sin^n x.\cos^m x.dx$, onde n e m são inteiros positivos.
Se n ou m for ímpar, usamos a identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Caso Contrário usamos as identidades $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ ou $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
Exemplo:
Calcule a integral $\int \sin^7 x.\cos^4 x.dx$

$$I = \int \sin x.(\sin^2 x)^3.\cos^4 x.dx$$

$$I = \int \sin x.(1-\cos^2 x)^3.\cos^4 x.dx$$

$$I = \int \sin x.(1 - 3.\cos^2 x + 3.\cos^4 x - \cos^6 x).\cos^4 x.dx$$

$$I = \int \sin x.\cos^4 x.dx - 3\int \sin x.\cos^6 x.dx + 3\int \sin x.\cos^8 x.dx - \int \sin x.\cos^{10} x.dx$$

Considerando $u = \cos x$ e $du = -\sin x.dx$

$$I = \int -u^4.du - 3.\int -u^6.du + 3.\int -u^8.du - \int -u^{10}.du$$

$$I = \frac{-\sin^5 x}{5} + \frac{3.\sin^7 x}{7} - \frac{3.\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + c$$

10 Fórmulas de recorrência

$$\int \sin^n x.dx = -\frac{1}{n}.\sin^{n-1} x.\cos x + \frac{n-1}{n}.\int \sin^{n-2} x.dx$$

$$\int \cos^n x.dx = \frac{1}{n}.\cos^{n-1} x.\sin x + \frac{n-1}{n}.\int \cos^{n-2} x.dx$$