


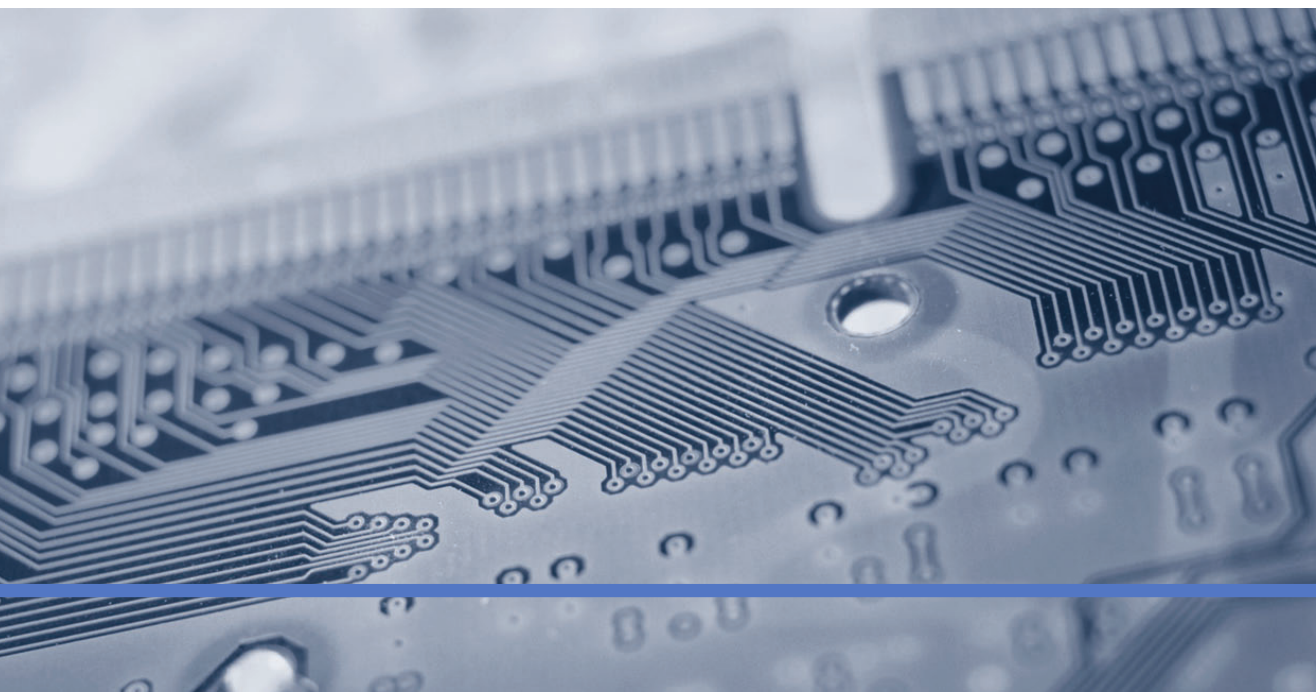
4

ÁLGEBRA BOOLEANA E SIMPLIFICAÇÃO LÓGICA

TÓPICOS DO CAPÍTULO

- 4-1 Operações e Expressões Booleanas
- 4-2 Leis e Regras da Álgebra Booleana
- 4-3 Teoremas de DeMorgan
- 4-4 Análise Booleana de Circuitos Lógicos
- 4-5 Simplificação Usando a Álgebra Booleana
- 4-6 Formas Padronizadas de Expressões Booleanas
- 4-7 Expressões Booleanas e Tabelas-verdade

- 4-8 O Mapa de Karnaugh
- 4-9 Minimização de Soma-de-Produtos Usando o Mapa de Karnaugh
- 4-10 Minimização de Produto-de-Somas Usando o Mapa de Karnaugh
- 4-11 Mapas de Karnaugh de Cinco Variáveis
- 4-12 VHDL (Opcional)
-  Aplicações em Sistemas Digitais



OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- Aplicar as leis e regras básicas da álgebra Booleana
- Aplicar os teoremas de DeMorgan em expressões Booleanas
- Descrever circuitos de portas lógicas com expressões Booleanas
- Calcular expressões Booleanas
- Simplificar expressões usando as leis e regras da álgebra Booleana
- Converter qualquer expressão Booleana numa soma-de-produtos
- Converter qualquer expressão Booleana num produto-de-somas
- Usar um mapa de Karnaugh para simplificar expressões Booleanas
- Usar um mapa de Karnaugh para simplificar funções de tabela-verdade
- Utilizar condições “don't care” para simplificar funções lógicas
- Escrever um programa VHDL para uma lógica simples
- Aplicar a álgebra Booleana, o método do mapa de Karnaugh e VHDL numa aplicação de sistema

TERMOS IMPORTANTES

Termos importantes na ordem em que aparecem no capítulo.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| ■ Variável | ■ Produto-de-somas |
| ■ Complemento | ■ Mapa de Karnaugh |
| ■ Termo-soma | ■ Minimização |
| ■ Termo-produto | ■ “Don't care” |
| ■ soma-de-produtos | ■ VHDL |

INTRODUÇÃO

Em 1854, Georg Boole publicou um trabalho intitulado “Uma Investigação das leis do Pensamento, sobre as quais são fundadas as teorias Matemáticas de Lógica e Probabilidades” (*Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic AND Probabilities*). Foi nessa publicação que uma “álgebra lógica”, conhecida hoje em dia como álgebra Booleana, foi formulada. A álgebra Booleana é uma forma conveniente e sistemática de expressar e analisar a operação de circuitos lógicos. Claude Shannon foi o primeiro a aplicar o trabalho de Boole na análise e projeto de circuitos lógicos. Em 1938, Shannon escreveu uma tese no MIT intitulada *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*.

Este capítulo aborda as leis, regras e teoremas da álgebra Booleana e suas aplicações em circuitos digitais. Estudaremos como definir um dado circuito com uma expressão Booleana e então avaliar a sua operação. Estudaremos também como simplificar circuitos lógicos usando os métodos da álgebra Booleana e mapas de Karnaugh.

A linguagem de descrição de hardware VHDL para a programação de dispositivos lógicos é introduzida.

■ ■ ■ DISCUSSÃO PRÉVIA DE APLICAÇÕES EM SISTEMAS DIGITAIS

O tópico Aplicações em Sistemas Digitais ilustra conceitos ensinados neste capítulo. O circuito lógico de um display de 7 segmentos usado no sistema de contagem e controle de comprimidos a partir do Capítulo 1 é uma boa maneira de ilustrar a aplicação da álgebra Booleana e do mapa de Karnaugh para obter a implementação mais simples possível no projeto de circuitos lógicos. Portanto, nessa aplicação em sistemas digitais, o foco é no decodificador de BCD para 7 segmentos que aciona os dois sistemas de displays mostrados na Figura 1–58.

WWW. ACESSE O SITE

Recursos que o ajudarão no estudo deste capítulo estão disponíveis em

<http://www.prenhall.com/floyd>

4-1 OPERAÇÕES E EXPRESSÕES BOOLEANAS

A álgebra Booleana é a matemática dos sistemas digitais. Um conhecimento básico da álgebra Booleana é indispensável para o estudo e análise de circuitos lógicos. No capítulo anterior, as operações Booleanas em termos de suas relações com as portas NOT, AND, OR, NAND e NOR foram introduzidas.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

- Definir variável
- Definir literal
- Identificar um termo-soma
- Calcular um termo-soma
- Identificar um termo-produto
- Calcular um termo-produto
- Explicar a adição Booleana
- Explicar a multiplicação Booleana



NOTA: COMPUTAÇÃO

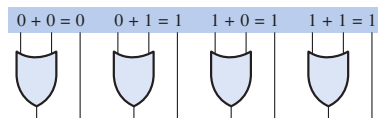
Em um microprocessador, a unidade lógica e aritmética (ALU – *arithmetic logic unit*) realiza operações lógicas Booleanas e aritméticas sobre dados digitais conforme determinado pelas instruções do programa. As operações lógicas são equivalentes às operações das portas básicas as quais estamos familiarizados, porém realizadas com um mínimo de 8 bits de cada vez. AND, OR, NOT e EX-OR são exemplos de instruções lógicas Booleanas, as quais são denominadas de mnemônicos. Um programa em linguagem assembly usa mnemônicos para especificar uma operação. Um outro programa denominado de *assembler* traduz os mnemônicos num código binário que pode ser entendido pelo microprocessador.

A porta OR é um somador Booleano.

Os termos *variável*, *complemento* e *literal* são usados em álgebra Booleana. Uma **variável** é um símbolo (geralmente uma letra maiúscula em itálico) usado para representar uma grandeza lógica. Qualquer variável simples pode ter um valor 1 ou 0. O **complemento** é o inverso de uma variável e é indicado por uma barra sobre a variável. Por exemplo, o complemento da variável A é \bar{A} . Se $A = 1$, então $\bar{A} = 0$. Se $A = 0$, então $\bar{A} = 1$. O complemento de uma variável A é lido como “A negado” ou “A barrado”. Algumas vezes é usado um outro símbolo, em vez de uma barra, para indicar o complemento de uma variável; por exemplo, B' indica o complemento de B . Neste livro, é usado apenas a barra sobre a variável. Uma **literal** é a variável ou o complemento de uma variável.

Adição Booleana

Lembre-se, do Capítulo 3, de que a **adição Booleana** é equivalente à operação OR e as regras básicas são ilustradas com suas relações com a porta OR da seguinte forma:



Na álgebra Booleana, um **termo-soma** é uma soma de literais. Em circuitos lógicos, um termo-soma é produzido por uma operação OR sem o envolvimento de operações AND. Alguns exemplos de termos-soma são $A + B$, $A + \bar{B}$, $A + B + \bar{C}$ e $\bar{A} + B + C + \bar{D}$.

Um termo-soma será igual a 1 quando uma ou mais das literais no termo for 1. Um termo-soma será igual a 0 somente se cada uma das literais for 0.

EXEMPLO 4-1

Solução

Determine os valores de A , B , C e D que tornam o termo-soma $A + \bar{B} + C + \bar{D}$ igual a 0.

Para o termo-soma ser 0, cada uma das literais tem que ser 0. Portanto, $A = 0$ e $B = 1$, de forma que, $\bar{B} = 0$, $C = 0$ e $D = 1$, de forma que $\bar{D} = 0$.

$$A + \bar{B} + C + \bar{D} = 0 + \bar{1} + 0 + \bar{1} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Problema relacionado*

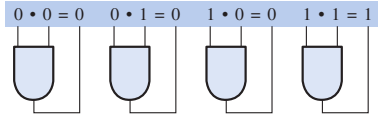
Determine os valores de \bar{A} e B que tornam o termo-soma igual a 0.

* As respostas estão no final do capítulo.

Multiplicação Booleana

Lembre-se, também do Capítulo 3, de que a **multiplicação Booleana** é equivalente à operação AND e as regras básicas são ilustradas com as relações com a porta AND a seguir:

A porta AND é um multiplicador Booleano.



Na álgebra Booleana, um **termo-produto** é o produto de literais. Em circuitos lógicos, um termo-produto é produzido por uma operação AND sem o envolvimento de operações OR. Alguns exemplos de termos-produto são AB , $\overline{A}B$, ABC e $ABCD$.

Um termo-produto é igual a 1 apenas se cada uma das literais no termo for 1. Um termo-produto é igual a 0 quando uma ou mais das literais for 0.

EXEMPLO 4-2

Determine os valores de A , B , C e D que torna o termo-produto $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ igual a 1.

Solução Para o termo-produto ser 1, cada uma das literais no termo tem que ser 1. Portanto, $A = 1$, $B = 0$ de forma que $\overline{B} = 1$, $C = 1$ e $D = 0$ de forma que $\overline{D} = 1$.

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Problema relacionado Determine os valores de A e B que tornam o termo-produto $\overline{A}\overline{B}$ igual a 1.

SEÇÃO 4-1 REVISÃO

As respostas estão no final do capítulo.

1. Se $A = 0$, qual é o valor de \overline{A} ?
2. Determine o valor de A , B e C que tornam o termo-soma $\overline{A} + \overline{B} + C$ igual a 0.
3. Determine o valor de A , B e C que tornam o termo-produto $\overline{A}\overline{B}C$ igual a 1.

4-2 LEIS E REGRAS DA ÁLGEBRA BOOLEANA

Assim como em outras áreas da matemática, existem certas regras bem-desenvolvidas e leis que têm que ser seguidas para aplicar adequadamente à álgebra Booleana. As mais importantes são apresentadas nesta seção.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

- Aplicar as leis comutativas da adição e multiplicação
- Aplicar as leis associativas da adição e multiplicação
- Aplicar a lei distributiva
- Aplicar as doze regras básicas da álgebra Booleana

Leis da Álgebra Booleana

As leis básicas da álgebra Booleana – as **leis comutativas** para a adição e multiplicação, as **leis associativas** para a adição e multiplicação e a **lei distributiva** – são as mesmas que para a álgebra

comum. Cada uma das leis está ilustrada com duas ou três variáveis, porém o número de variáveis não é limitado para essas leis.

Lei Comutativa A lei comutativa da adição para duas variáveis é escrita da seguinte forma:

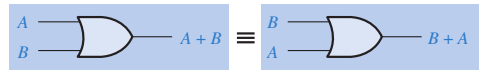
Equação 4-1

$$A + B = B + A$$

Essa lei diz que a ordem das variáveis na qual a função OR é aplicada não faz diferença. Lembre-se que, na álgebra Booleana aplicada a circuitos lógicos, a adição e a operação OR são as mesmas. A Figura 4-1 ilustra a lei comutativa aplicada a uma porta OR e mostra que não importa em qual entrada cada variável é aplicada. (O símbolo \equiv significa “equivalente a”).

► FIGURA 4-1

Aplicação da lei comutativa da adição.



A lei comutativa da multiplicação para duas variáveis é a seguinte:

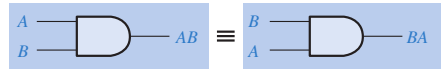
Equação 4-2

$$AB = BA$$

Essa lei diz que a ordem das variáveis na qual a operação AND é aplicada não faz diferença. A Figura 4-2 ilustra essa lei aplicada a uma porta AND.

► FIGURA 4-2

Aplicação da lei comutativa da multiplicação.



Lei Associativa A lei associativa da adição escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

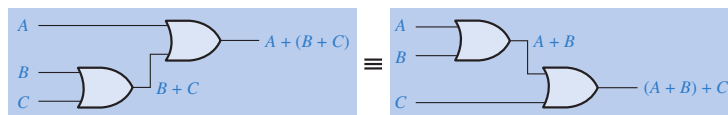
Equação 4-3

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Essa lei diz que quando é aplicada uma operação OR em mais de duas variáveis, o resultado é o mesmo independente da forma de agrupar as variáveis. A Figura 4-3 ilustra essa lei aplicada em portas OR de 2 entradas.

► FIGURA 4-3

Aplicação da lei associativa da adição. Abra o arquivo F04-03 para verificar.



A lei associativa da multiplicação escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

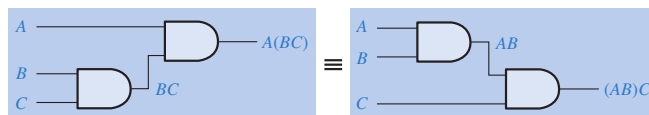
Equação 4-4

$$A(BC) = (AB)C$$

Essa lei diz que a ordem em que as variáveis são agrupadas não faz diferença quando é aplicada uma operação AND em mais de duas variáveis. A Figura 4-4 ilustra essa lei aplicada a portas AND de 2 entradas.

► FIGURA 4-4

Aplicação da lei associativa da multiplicação. Abra o arquivo E04-04 para verificar.



Lei Distributiva A lei distributiva escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

Equação 4-5

$$A(B + C) = AB + AC$$

Essa lei diz que a operação AND de uma única variável com o resultado de uma operação OR aplicada em duas ou mais variáveis é equivalente a uma operação OR entre os resultados das operações AND entre uma única variável e cada uma das duas ou mais variáveis. A lei distributiva também expressa o processo de *fatoração* no qual a variável comum A é fatorada em termos-produto, por exemplo, $AB + AC = A(B + C)$. A Figura 4–5 ilustra a lei distributiva em termos de implementação com portas.

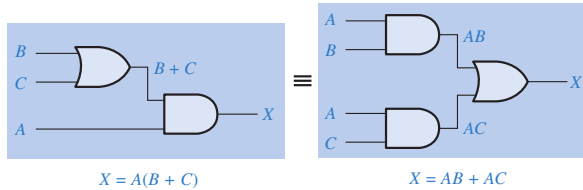


FIGURA 4–5

Aplicação da lei distributiva. Abra o arquivo F04-05 para verificar.



Regras da Álgebra Booleana

A Tabela 4–1 apresenta uma lista de 12 regras básicas úteis na manipulação e simplificação de expressões Booleanas. As regras de 1 a 9 serão analisadas em termos de suas aplicações em portas lógicas. As regras de 10 a 12 serão obtidas em termos de regras mais simples e das leis discutidas anteriormente.

- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 1. $A + 0 = A$ | 7. $A \cdot A = A$ |
| 2. $A + 1 = 1$ | 8. $A \cdot \bar{A} = 0$ |
| 3. $A \cdot 0 = 0$ | 9. $\bar{\bar{A}} = A$ |
| 4. $A \cdot 1 = A$ | 10. $A + AB = A$ |
| 5. $A + A = A$ | 11. $A + \bar{A}B = A + B$ |
| 6. $A + \bar{A} = 1$ | 12. $(A + B)(A + C) = A + BC$ |

A, B ou C podem representar uma única variável ou uma combinação de variáveis.

TABELA 4–1

Regras básicas da álgebra Booleana

Regra 1. $A + 0 = A$ A operação OR de uma variável com 0 é sempre igual a variável. Se a variável de entrada A for 1, a variável X de saída será 1, que é igual a A . Se A for 0, a saída será 0, que também é igual a A . Essa regra é ilustrada na Figura 4–6, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 0.

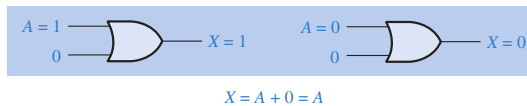


FIGURA 4–6

Regra 2. $A + 1 = 1$ A operação OR da variável com 1 é igual a 1. Um 1 numa entrada de uma porta OR produz um 1 na saída, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra é ilustrada na Figura 4–7, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 1.

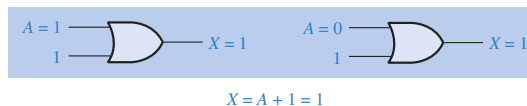
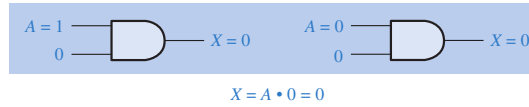


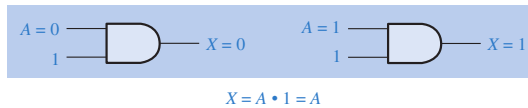
FIGURA 4–7

Regra 3. $A \cdot 0 = 0$ A operação AND da variável com 0 sempre é igual a 0. Todas as vezes que uma entrada de uma porta AND for 0, a saída será 0, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra está ilustrada na Figura 4–8, na qual a entrada inferior está fixa em 0.



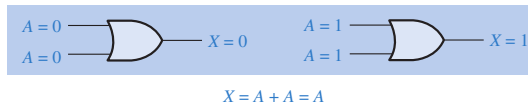
► FIGURA 4–8

Regra 4. $A \cdot 1 = A$ A operação AND da variável com 1 é sempre igual a variável. Se A for 0 a saída da porta AND será 0. Se A for 1, a saída da porta AND será 1 porque ambas as entradas agora são 1s. Essa regra é mostrada na Figura 4–9, onde a entrada inferior está fixa em 1.



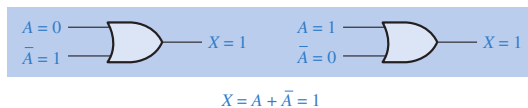
► FIGURA 4–9

Regra 5. $A + A = A$ A operação OR da variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se A for 0, então $0 + 0 = 0$; e se A for 1, então $1 + 1 = 1$. Isso é mostrado na Figura 4–10, onde as duas entradas são a mesma variável.



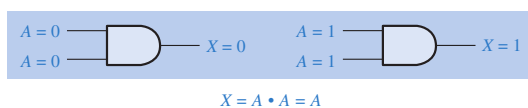
► FIGURA 4–10

Regra 6. $A + \bar{A} = 1$ A operação OR da variável com o seu complemento é sempre igual a 1. Se A for 0, então $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$. Se A for 1, então $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$. Veja a Figura 4–11, onde uma entrada é o complemento da outra.



► FIGURA 4–11

Regra 7. $A \cdot A = A$ A operação AND de uma variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se $A = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$; e se $A = 1$, então $1 \cdot 1 = 1$. A Figura 4–12 ilustra essa regra.



► FIGURA 4–12

Regra 8. $A \cdot \bar{A} = 0$ A operação AND de uma variável e o seu complemento é sempre igual a 0. Nesse caso, ou \bar{A} ou sempre será 0; e quando um 0 é aplicado na entrada de uma porta AND, a saída também será 0. A Figura 4-13 ilustra essa regra.

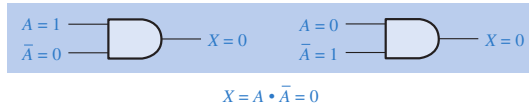


FIGURA 4-13

Regra 9. $\bar{\bar{A}} = A$ O complemento duplo de uma variável é sempre igual a variável. Se complementarmos (invertamos) a variável A uma vez, obtemos \bar{A} . Então se complementarmos (invertamos) \bar{A} , obtemos A , que é a variável original. Essa regra é mostrada na Figura 4-14 usando inversores.

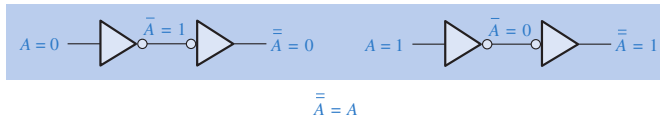


FIGURA 4-14

Regra 10. $A + AB = A$ Essa regra pode ser provada aplicando a lei distributiva, Regra 2, e a Regra 4 como a seguir:

$$\begin{aligned}
 A + B &= A(1 + B) && \text{Fatorando (lei distributiva)} \\
 &= A \cdot 1 && \text{Regra 2: } (1 + B) = 1 \\
 &= A && \text{Regra 4: } A \cdot 1 = A
 \end{aligned}$$

A prova é mostrada na Tabela 4-2, onde temos a tabela-verdade e a consequente simplificação do circuito lógico.

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

↑ igual ↑

TABELA 4-2

Regra 10: $A + AB = A$. Abra o arquivo T04-02 para verificar



Regra 11. $A + \bar{A}B = A + B$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A + \bar{A}B &= (A + AB) + \bar{A}B && \text{Regra 10: } A = A + AB \\
 &= (AA + AB) + \bar{A}B && \text{Regra 7: } A = AA \\
 &= AA + AB + A\bar{A} + \bar{A}B && \text{Regra 8: adicionando } A\bar{A} = 0 \\
 &= (A + \bar{A})(A + B) && \text{Fatorando} \\
 &= 1 \cdot (A + B) && \text{Regra 6: } A + \bar{A} = 1 \\
 &= A + B && \text{Regra 4: simplifica o 1}
 \end{aligned}$$

A prova é mostrada na Tabela 4–3, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

► TABELA 4–3

Regra 11: $A + \overline{A}B = A + B$. Abra o arquivo T04-03 para verificar



A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

↑ igual ↑

Regra 12. $(A + B)(A + C) = A + BC$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC && \text{Lei distributiva} \\ &= A + AC + AB + BC && \text{Regra 7: } AA = A \\ &= A(1 + C) + AB + BC && \text{Fatorando (lei distributiva)} \\ &= A \cdot 1 + AB + BC && \text{Regra 2: } 1 + C = 1 \\ &= A(1 + B) + BC && \text{Fatorando (lei distributiva)} \\ &= A \cdot 1 + BC && \text{Regra 2: } 1 + B = 1 \\ &= A + BC && \text{Regra 4: } A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

A prova é mostrada na Tabela 4–4, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.



▼ TABELA 4–4

Regra 12: $(A + B)(A + C) = A + BC$. Abra o arquivo T04-04 para verificar

A	B	C	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$	BC	$A + BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

↑ igual ↑

SEÇÃO 4–2
REVISÃO

1. Aplique a lei associativa da adição na expressão $A + (B + C + D)$.
2. Aplique a lei distributiva na expressão $A(B + C + D)$.

4-3 TEOREMAS DE DEMORGAN

DeMorgan, um matemático que conheceu Boole, propôs dois teoremas que representam uma parte importante da álgebra Booleana. Em termos práticos, os teoremas de DeMorgan provêm uma verificação da equivalência entre as portas NAND e OR negativa e a equivalência entre as portas NOR e AND negativa, discutidas no Capítulo 3.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

- Citar os teoremas de DeMorgan
- Relacionar os teoremas com a equivalência entre as portas NAND e OR negativa e a equivalência entre as portas NOR e AND negativa
- Aplicar os teoremas de DeMorgan na simplificação de expressões Booleanas

Um dos teoremas de DeMorgan é:

O complemento de um produto de variáveis é igual a soma dos complementos das variáveis.

Dizendo de outra forma,

O complemento de duas ou mais variáveis submetidas a uma operação AND é equivalente a uma operação OR entre os complementos das variáveis individuais.

A fórmula que expressa esse teorema para duas variáveis é:

$$\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$$

Equação 4-6

O segundo teorema de DeMorgan é expresso da seguinte forma:

O complemento de uma soma de variáveis é igual ao produto do complemento das variáveis.

Dizendo de outra forma,

O complemento de duas ou mais variáveis submetidas a uma operação OR é equivalente a uma operação AND entre os complementos das variáveis individuais.

A fórmula para a expressão desse teorema para duas variáveis é:

$$\overline{X + Y} = \bar{X} \bar{Y}$$

Equação 4-7

A Figura 4-15 mostra as equivalências de portas e as tabelas-verdade para as Equações 4-6 e 4-7.

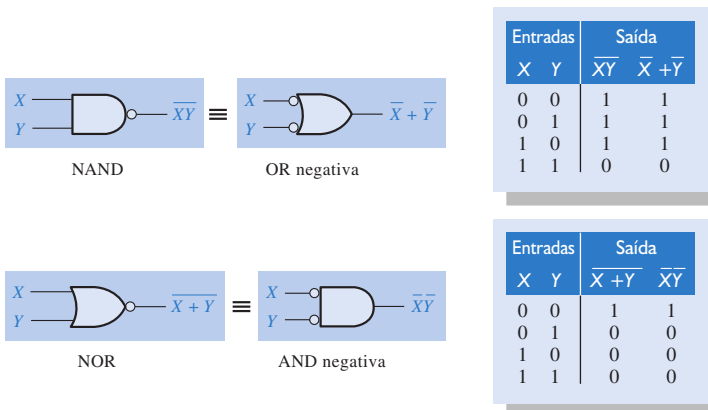


FIGURA 4-15

Equivalências entre portas e as correspondentes tabelas-verdade que ilustram os teoremas de DeMorgan. Observe a igualdade entre as duas colunas de saída em cada tabela. Isso mostra que as portas equivalentes realizam a mesma função lógica.

Conforme já foi dito, os teoremas de DeMorgan também se aplicam a expressões nas quais existem mais que duas variáveis. Os exemplos a seguir ilustram a aplicação dos teoremas de DeMorgan em expressões de 3 e 4 variáveis.

EXEMPLO 4-3

Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões: \overline{XYZ} e $\overline{X + Y + Z}$.

Solução

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X + Y + Z} = \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$$

Problema relacionado

Aplique o teorema de DeMorgan na expressão: $\overline{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}$.

EXEMPLO 4-4

Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões: \overline{WXYZ} e $\overline{W + X + Y + Z}$.

Solução

$$\overline{WXYZ} = \overline{W} + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{W + X + Y + Z} = \overline{W} \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$$

Problema relacionado

Aplique o teorema de DeMorgan na expressão: $\overline{\overline{W} \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}}$.

Cada variável nos teoremas de DeMorgan, conforme dito nas Equações 4-6 e 4-7, também pode representar uma combinação de outras variáveis. Por exemplo, X pode ser igual ao termo $AB + C$ e Y pode ser igual ao termo $A + BC$. Assim, se podemos aplicar o teorema de DeMorgan para duas variáveis conforme foi dito para $\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$ na expressão $\overline{(AB + C)(A + BC)}$, obtemos o seguinte resultado:

$$\overline{(AB + C)(A + BC)} = \overline{(AB + C)} + \overline{(A + BC)}$$

Observe que no resultado anterior temos dois termos, $\overline{AB + C}$ e $\overline{A + BC}$, para cada um dos quais podemos aplicar novamente o teorema de DeMorgan $\overline{X + Y} = \overline{X} \overline{Y}$ individualmente, conforme a seguir:

$$\overline{(AB + C)} + \overline{(A + BC)} = (\overline{AB}) \overline{C} + \overline{A} (\overline{BC})$$

Observe que ainda temos dois termos na expressão nos quais o teorema de DeMorgan pode ser aplicado novamente. Esses termos são \overline{AB} e \overline{BC} . Uma última aplicação do teorema de DeMorgan resulta no seguinte:

$$(\overline{AB}) \overline{C} + \overline{A} (\overline{BC}) = (\overline{A} + \overline{B}) \overline{C} + \overline{A} (\overline{B} + \overline{C})$$

Embora esse resultado possa ser simplificado pelo uso das leis e regras Booleanas, os teoremas de DeMorgan não podem mais ser usados.

Aplicando os Teoremas de DeMorgan

Os procedimentos a seguir ilustram a aplicação dos teoremas de DeMorgan e da álgebra Booleana na seguinte expressão:

$$\overline{\overline{A + BC} + D(E + F)}$$

Passo 1. Identifique os termos nos quais podemos aplicar os teoremas de DeMorgan e pense que cada termo é uma única variável. Faça $\overline{A + BC} = X$ e $\overline{D(E + F)} = Y$.

Passo 2. Como $\overline{X + Y} = \overline{X} \overline{Y}$,

$$\overline{(A + BC) + (D(E + F))} = \overline{(A + BC)} \overline{(D(E + F))}$$

Passo 3. Use a Regra 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para cancelar a dupla barra sobre o termo da esquerda (isso não é parte do teorema de DeMorgan).

$$\overline{(A + BC)} \overline{(D(E + F))} = (A + BC) \overline{(D(E + F))}$$

Passo 4. Aplique o teorema de DeMorgan ao segundo termo.

$$(A + BC) \overline{(D(E + F))} = (A + BC) (\overline{D} + \overline{(E + F)})$$

Passo 5. Use a Regra 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para cancelar a dupla barra sobre a parte $E + \overline{F}$ do termo.

$$(A + BC) (\overline{D} + \overline{E + \overline{F}}) = (A + BC) (\overline{D} + E + \overline{F})$$

Os próximos três exemplos ilustram ainda mais como usar os teoremas de DeMorgan.

EXEMPLO 4-5

Aplique os teoremas de DeMorgan em cada uma das seguintes expressões:

(a) $\overline{(A + B + C)D}$ (b) $\overline{ABC + DEF}$ (c) $\overline{AB + CD + EF}$

Solução (a) Faça $A + B + C = X$ e $D = Y$. A expressão $\overline{(A + B + C)D}$ é da forma $\overline{XY} = \overline{X} \overline{Y}$ e pode ser reescrita como:

$$\overline{(A + B + C)D} = \overline{A + B + C} \overline{D}$$

Em seguida aplique o teorema de DeMorgan no termo $\overline{A + B + C}$.

(b) Faça $ABC = X$ e $DEF = Y$. A expressão $\overline{ABC + DEF}$ está na forma $\overline{X + Y} = \overline{X} \overline{Y}$ e pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\overline{ABC + DEF} = (\overline{ABC})(\overline{DEF})$$

Em seguida, aplique o teorema de DeMorgan em cada um dos seguintes termos:

$$\overline{ABC} \text{ e } \overline{DEF}.$$

$$(\overline{ABC})(\overline{DEF}) = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$$

(c) Faça $AB = X$, $CD = Y$ e $EF = Z$. A expressão $\overline{AB + CD + EF}$ está na forma $\overline{X + Y + Z} = \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$ e pode ser reescrita como:

$$\overline{AB + CD + EF} = (\overline{AB})(\overline{CD})(\overline{EF})$$

Em seguida, aplique o teorema de DeMorgan em cada um dos seguintes termos:

$$\overline{AB}, \overline{CD} \text{ e } \overline{EF}.$$

$$(\overline{AB})(\overline{CD})(\overline{EF}) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$$

Problema relacionado Aplique os teoremas de DeMorgan na expressão: $\overline{ABC + D + E}$.

EXEMPLO 4-6

Aplique os teoremas de DeMorgan em cada uma das expressões a seguir:

$$(a) \overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}} \quad (b) \overline{(\overline{A} + B) + CD} \quad (c) \overline{(A + B)\overline{C}\overline{D} + E + \overline{F}}$$

Solução

$$(a) \overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}} = \overline{(\overline{A + B})}\overline{\overline{C}} = (A + B)C$$

$$(b) \overline{(\overline{A} + B) + CD} = \overline{(\overline{A} + B)}\overline{CD} = (\overline{\overline{A}}\overline{B})(\overline{C} + \overline{D}) = A\overline{B}(\overline{C} + \overline{D})$$

$$(c) \overline{(A + B)\overline{C}\overline{D} + E + \overline{F}} = \overline{((A + B)\overline{C}\overline{D})(E + \overline{F})} = (\overline{A}\overline{B} + C + D)\overline{E}\overline{F}$$

Problema relacionado

Aplique os teoremas na expressão $\overline{\overline{A}\overline{B}(C + \overline{D}) + E}$.

EXEMPLO 4-7

A expressão Booleana para uma porta EX-OR é $\overline{A}B + A\overline{B}$. Tendo essa expressão como ponto de partida, use o teorema de DeMorgan e quaisquer outras regras ou leis aplicáveis para desenvolver uma expressão para a porta EX-NOR.

Solução

Comece pela complementação da expressão para a EX-OR, aplicando em seguida o teorema de DeMorgan como mostrado a seguir:

$$\overline{\overline{A}B + AB} = \overline{(\overline{A}B)}\overline{(AB)} = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$$

Em seguida, aplique a lei distributiva e a Regra 8 ($A \cdot \overline{A} = 0$).

$$(\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A}\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{A} + \overline{B}\overline{B} = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B}$$

A expressão final para a EX-NOR é $\overline{A}\overline{B} + AB$. Observe que essa expressão é igual a 1 todas as vezes que as duas variáveis forem 0 ou 1.

Problema relacionado

Começando pela expressão da porta NAND de 4 entradas, use os teoremas de DeMorgan para desenvolver uma expressão para uma porta OR negativa de 4 entradas.

**SEÇÃO 4-3
REVISÃO**

I. Aplique os teoremas e DeMorgan às seguintes expressões:

$$(a) \overline{ABC} + (\overline{D} + E) \quad (b) \overline{(A + B)C} \quad (c) \overline{A + B + C} + \overline{DE}$$

4-4 ANÁLISE BOOLEANA DE CIRCUITOS LÓGICOS

A álgebra Booleana provê uma forma concisa de expressar a operação de um circuito lógico constituído de uma combinação de portas lógicas de forma que a saída possa ser determinada por várias combinações de valores de entrada.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

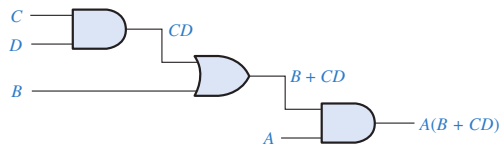
- Determinar a expressão Booleana para uma combinação de portas
- Avaliar a operação lógica de um circuito a partir da expressão Booleana
- Construir uma tabela-verdade

Expressão Booleana para um Circuito Lógico

Para obter a expressão Booleana para um dado circuito lógico, comece pelas entradas mais à esquerda e, percorrendo o circuito até a saída final, escreva a expressão para cada porta lógica. Para o exemplo de circuito mostrado na Figura 4–16, a expressão Booleana é determinada da seguinte forma:

Um circuito lógico pode ser descrito por uma equação Booleana.

1. A expressão para a porta AND mais à esquerda com entradas C e D é CD .
2. A saída da porta AND mais à esquerda é uma das entradas da porta OR e B é a outra entrada. Portanto, a expressão para a porta OR é $B + CD$.
3. A saída da porta OR é uma das entradas da porta AND mais à direita e A é a outra entrada. Portanto, a expressão para essa porta AND é $A(B + CD)$, que é a expressão final de saída para o circuito completo.



◀ FIGURA 4–16

Um circuito lógico mostrando o desenvolvimento da expressão Booleana de saída.

Construindo uma Tabela-verdade para um Circuito Lógico

Uma vez que a expressão Booleana para um dado circuito lógico foi determinada, uma tabela-verdade que mostra a saída para todos os valores possíveis das variáveis de entrada pode ser desenvolvida. O procedimento requer que avaliemos a expressão Booleana para todas as combinações possíveis dos valores das variáveis de entrada. No caso do circuito visto na Figura 4–16, existem quatro variáveis de entrada (A , B , C e D) sendo possível portanto dezesseis ($2^4 = 16$) combinações de valores.

Um circuito lógico pode ser descrito por uma tabela-verdade.

Calculando a Expressão Para o cálculo da expressão $A(B + CD)$, determine primeiro os valores das variáveis que tornam a expressão igual a 1, usando as regras para a adição e multiplicação Booleanas. Nesse caso, a expressão é igual a 1 apenas se $A = 1$ e $B + CD = 1$ porque

$$A(B + CD) = 1 \cdot 1 = 1$$

Agora determine quando o termo $B + CD$ é igual a 1. O termo $B + CD = 1$ se $B = 1$ ou $CD = 1$ ou se B e CD forem ambos iguais a 1 porque

$$B + CD = 1 + 0 = 1$$

$$B + CD = 0 + 1 = 1$$

$$B + CD = 1 + 1 = 1$$

O termo $CD = 1$ apenas se $C = 1$ e $D = 1$.

Resumindo, a expressão $A(B + CD) = 1$ quando $A = 1$ e $B = 1$ independente dos valores de C e D ou quando $A = 1$, $C = 1$ e $D = 1$ independente do valor de B . A expressão $A(B + CD) = 0$ para todas as outras combinações de valores das variáveis.

Colocando os Resultados no Formato de Tabela-Verdade O primeiro passo é fazer uma lista das dezesseis combinações de 1s e 0s das variáveis de entrada numa sequência binária conforme mostra a Tabela 4–5. Em seguida, coloque um 1 na coluna de saída para cada combinação das variáveis de entrada que foi determinada na avaliação. Finalmente, coloque um 0 na coluna de saída para todas as outras combinações das variáveis de entrada. Esses resultados são mostrados na tabela-verdade na Tabela 4–5.

► TABELA 4-5

Tabela-verdade para o circuito lógico mostrado na Figura 4-16

ENTRADAS				SAÍDA
A	B	C	D	$A(B + CD)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

SEÇÃO 4-4
REVISÃO

1. Substitua as portas AND por portas OR e a porta OR por porta AND no circuito visto na Figura 4-16 e determine a expressão Booleana para a saída.
2. Construa uma tabela-verdade para o circuito da Questão 1.

4-5 SIMPLIFICAÇÃO USANDO A ÁLGEBRA BOOLEANA

Ao aplicarmos a álgebra Booleana, muitas vezes temos que reduzir uma determinada expressão para a sua forma mais simples ou transformá-la em um formato mais conveniente a fim de implementar a expressão mais eficientemente. A abordagem feita nesta seção usa as leis básicas, regras e teoremas da álgebra Booleana para manipular e simplificar uma expressão. Esse método depende do conhecimento completo da álgebra Booleana e uma considerável prática na sua aplicação, além de habilidade e inteligência.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

- Aplicar as leis, regras e teoremas da álgebra Booleana para simplificar expressões em geral

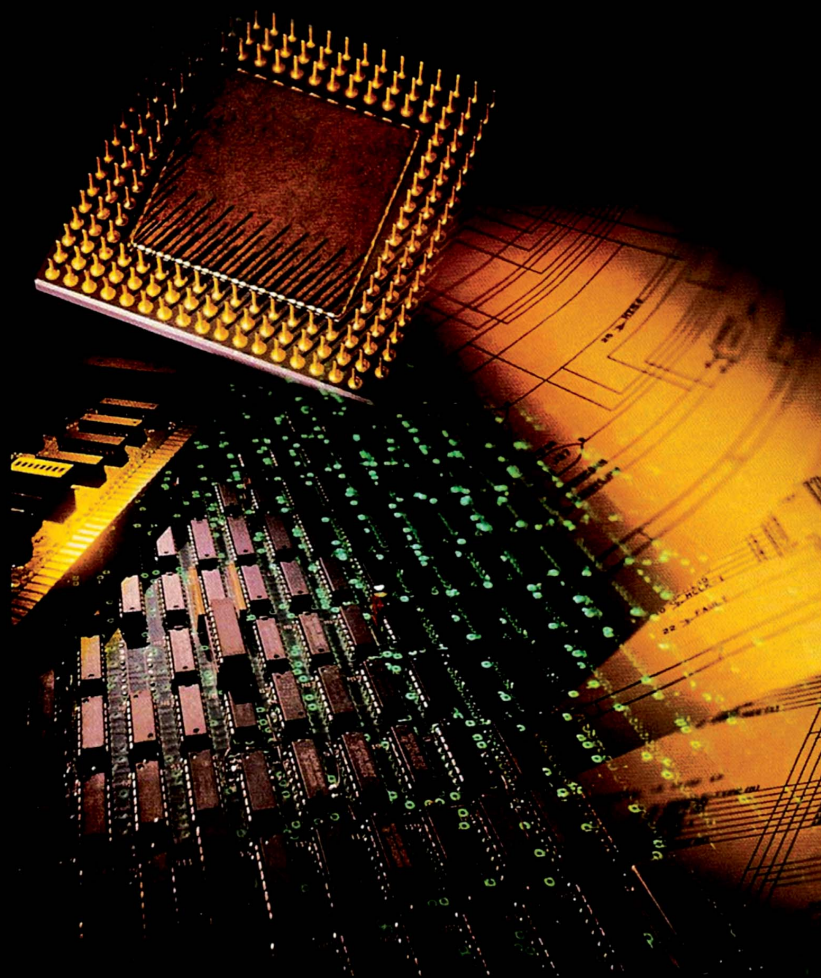
Uma expressão Booleana simplificada usa a menor quantidade de portas possível para implementar uma dada expressão. Os Exemplos 4-8 a 4-11 ilustram a simplificação Booleana.

CD com arquivos
MultiSIM (inglês)

SISTEMAS DIGITAIS

FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

9ª edição



FLOYD

