Se $A$ é equipotente a $B$ e $B$ é equipotente a $C$

mostrar que $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & B \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, shift left, "\psi"] & C \arrow[l, shift left, "\psi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\varphi$ é uma bijeção $\psi$ é uma bijeção

seja $\alpha = \psi \circ \varphi$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha^{-1} \circ \alpha(x) = \alpha^{-1}(\psi \circ \varphi)$

se $\alpha = \psi \circ \varphi$,

$\alpha^{-1}(\psi \circ \varphi(x)) = x$

Portanto $\alpha^{-1} \circ \alpha(x) = x$

Seja $x = \alpha^{-1}(y)$, então $\alpha(x) = y$

logo $\psi \circ \varphi(x) = y$

substituindo $x$ por $\alpha^{-1}(y)$ temos

$\psi \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(y) = y$

Portanto $\alpha \circ \alpha^{-1}(y) = y$

de tal modo, concluímos que

$(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$

Seja $y \in ]-1, 1[$

Se $y < 0$, tome $x = \frac{-y}{y-1} \in \mathbb{R}$ pois $y \neq 1$

Daí $y(x) = \varphi\left(\frac{-y}{y-1}\right)$

$$\varphi\left(\frac{-y}{y-1}\right) = \frac{\frac{-y}{y-1}}{\left|\frac{y}{y-1}\right| + 1} = \frac{\frac{-y}{y-1}}{\frac{|-y|}{|y-1|} + 1} = \frac{\frac{-y}{y-1}}{\frac{|-y| + |y-1|}{|y-1|}} =$$

$$\Rightarrow \frac{-y}{y-1} \cdot \frac{|y-1|}{|-y| + |y-1|}$$

Se $y > 1 \Rightarrow \frac{-y}{|-y| + |y-1|}$

Se $y < 1 \Rightarrow \frac{-|y-1|}{y-1+|y-1|}$

continuação no caderno, exercício atrás

hipótese do contínuo. $(\mathbb{N} < A < \mathbb{R})$

A hipótese do contínuo é uma questão sobre a natureza dos infinitos. Embora seja uma questão teórica, a hipótese tem implicações em diversas áreas da matemática, como análise, topologia e teoria da medida. Números naturais estão contidos no conjunto dos números reais. A hipótese do contínuo questiona se existe um conjunto infinito que seja maior que $\mathbb{N}$ e menor que $\mathbb{R}$

Prove que $\forall n \geq 4$

a) $n^2 < 2^n$

Passo base: $n=5$

Por um lado $n^2 = 5^2 = 25$

Por outro $2^n = 2^5 = 32$

Com $25 < 32$, então $n^2 < 2^n$

Passo de indução

hipótese: $k^2 < 2^k$

tese: $(k+1)^2 < 2^{k+1}$

$k^2 + 2k + 1 < 2^k \cdot 2$

$\Rightarrow k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2^k$

Seja que $k^2 < 2^k$ somando:

$2k+1$, a desigualdade não muda.

Acontece que $\forall k > 4$

$2k + 1 < 2^k$

então somando $2^k$:

$2^k + 2k + 1 < 2^k + 2^k$

logo $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

$(k+1)^2 < 2^k + 2k + 1 < 2^k + 2^k$

Daí $(k+1)^2 < 2^{k+1}$

b) $2^n < n!$

Passo base: $n = 5$

Por um lado: $2^5 = 32$

por outro: $5! = 120$

Com $32 < 120$, então $2^n < n!$

Passo de indução

hipótese $2^k < k!$

tese $2^{(k+1)} < (k+1)!$

Portanto,

$2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k!$

$2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$

$2^{k+1} < 2 \cdot k! < (k+1)!$

Portanto, a desigualdade é válida para $k$ e $k+1$

Podemos concluir que

$\forall n > 4$

$2^n < n!$

c) $2 \cdot n + 1 < 2^n$

Passo base: $n = 5$

por um lado: $2 \cdot 5 + 1 = 11$

por outro: $2^5 = 32$

Como $11 < 32$, então $2 \cdot n + 1 < 2^n$

Passo de indução

hipótese: $2 \cdot k + 1 < 2^k$

tese: $2 \cdot (k+1) + 1 < 2^{(k+1)}$

$2k + 2 + 1 = (2k+1) + 2$

$(2k+1) + 2 < 2^k \cdot 2$

com $2k + 1 < 2^k$

e $2 < 2^k \cdot 2$

Podemos concluir que

$\forall n > 4$

$2n + 1 < 2^n$