Revisão Prova 2 de Cálculo II
Milton Kist

Erickson Giesel Müller

2 de Dezembro de 2024

Conteúdos

1. Funções de várias variáveis (Definição, Domínio, Imagem, Operações, Representação Gráfica).
2. Limite e Continuidade.
3. Limite e Continuidade de funções de várias variáveis.
4. Limites por caminho.
5. Cálculo de Limites envolvendo indeterminações.
6. Verificação de Continuidade de funções.
7. Derivadas parciais e aplicações.
8. Gradiente.
9. Multiplicadores de Lagranje.
10. Integração dupla.
11. Integração tripla

1 Função de Várias Variáveis

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, a relação $f_i A \to \mathbb{R}$ é denominada função real, $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $P \in \mathbb{R}$, associamos um único número real $z \in \mathbb{R}$.

$$A = D(f)$$

$$\mathbb{R} = CD(f)$$

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R}/z = f(x_1, x_2, ...)\}$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, determine os conjuntos domínio e imagem de f.

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$Im(f) = [0, 1]$$

Exemplo: em cada caso, determine o domínio da função, faça também a representação geométrica do domínio:

2 Regra da Cadeia

Vamos definir a regra da cadeia para o caso de funções de várias variáveis.
Proposição 1: Sejam A e B conjuntos abertos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, e sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}^2$ tais que $g(t) = (x(t), y(t)) \in A$ para todo $t \in B$. Nestas condições, se g for diferenciável em B e $f(x, y)$ possuir derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em A.
Então, a função composta:

$$h(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t))$$

é diferenciável $\forall t \in B$ e $\dfrac{dh}{dt}$ é dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\varphi f}{\varphi x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\varphi f}{\varphi y} . \frac{dy}{dt}$$

Exemplo: sejam $h(t) = f(x(t), y(t))$, $f(x, y) = 5xy - y^2$ e $x(t) = 2t$, $y(t) = 5t + 3$
Verificar que neste caso vale (*). Usando (*)

$$\frac{dh}{dt} = 5y.2 + (5x - 2y).5$$

$$= 5.(5t + 3).2 + (5(2t) - 2(5t + 3)).5$$

$$= 50.t + 30 + (10t - 10t - 6).5 = 50t$$

$$\to h(t) = f(2t, 5t + 3)$$

$$= 5.(2t)(5t + 3) - (5t + 3)^2$$

$$= 50t^2 + 30t - 25t^2 - 30t - 9$$

$$= 25t^2 - 9$$

$$h'(t) = 50t$$

confere

Proposição 2: Sejam A e B conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$, e sejam $z = f(u,v)$, $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ funções diferenciáveis, então a função composta $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ é diferenciável.

$$\frac{\varphi h}{\varphi x} = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi x} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi x}$$

$$\frac{\varphi h}{\varphi y} = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi y} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi y}$$

Exemplo: Sejam $f(u,v) = 2u^3 - 3v + 32$, $w(x,y) = 2x - y$ e $v(x,y) = 2x - xy^2$. Determine $\frac{\varphi f}{\varphi x}$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y}$:

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi x}(x,y) = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi x} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi x}$$

$$= 6u^2.2 - 5.(2 - y^2) = 12.(2x - y)^2 - 5.(2 - y^2)$$

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi y}(x,y) = \frac{\varphi f}{\varphi u}.\frac{\varphi u}{\varphi y} + \frac{\varphi f}{\varphi v}.\frac{\varphi v}{\varphi y}$$

$$= 6u^2.(-1) - 5.(-2xy) = -6.(2x - y)^2 + 10xy$$

3 Derivadas Parciais Sucessivas

Seja $z = f(x,y)$, já sabemos como construir as funções $\frac{\varphi f}{\varphi x}, \frac{\varphi f}{\varphi y}$. Da mesma forma, podemos construir as funções:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y.\varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})$$

$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2.\varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}))$$

Exemplo: Dada a função $f(x,y) = 5x^2y - y^3x^2 + 9$. Determine as seguintes funções derivadas:

1. $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}$

2. $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$

3. $\dfrac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x}$

1.
$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 10xy - 2y^3 x$$
$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 10y - 2y^3$$

2.
$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 10 - 6xy^2$$

3.
$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x})) = -12xy$$

4 Teorema de Schwartz

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y), \forall (x, y) \in A$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 4x^3 y^4 + y^2$.
Verifique se $\dfrac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \dfrac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$:

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 12x^2.y^4$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y}.(\frac{\varphi f}{\varphi x}) = 48x^2 y^3$$

ou

$$\frac{\varphi f}{\varphi y} = 16x^3 y^3 + 2y$$
$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y} = \frac{\varphi}{\varphi x}.(\frac{\varphi f}{\varphi y}) = 48x^2 y^3$$

5 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Definição: Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, então:

1. $(x_0, y_0) \in D(f)$ é um ponto de **máximo local** de f, se existir uma bola aberta $B = B((x_0, y_0), r)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \bigcap D(f)$

6 Teorema de Weierstrass

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado, $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y)$ uma função contínua em A. Então existem P_1, $P_2 \in A$ tais que $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \forall P \in A$
Exemplo: Seja dada a função $f(x, y) = y^3 - x^2y + 4y$. Determine o valor de máximo e o valor de mínimo de f sobre o conjunto A delimitado pelo triângulo de vértices $M(-2, 0)$, $N(0, 2)$, $0(0, -2)$ *FIGURA 1*. **Observação:**

- Pelo Teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo global sobre A.
- Para determinarmos os candidatos a extremos máximo e mínimo, vamos analisar separadamente o interior de A e a fronteira de A.
- Os candidatos a extremos que estão localizados no interior de A estão entre os pontos críticos da função. Isto é: onde $\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = 0$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 0$ ou onde essas derivadas parciais não existem.

Determinar os candidatos a extremos que estão no interior de A.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = -2xy$$

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 3y^2 - x^2 + 4$$

logo
$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 0$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y} = 0$
$-2xy = 0$ e $3y^2 - x^2 + 4 = 0$

$$-2xy = 0 \to xy = 0$$

logo $x = 0$ ou $y = 0$ se $x = 0 \to 3y^{2-0^2} + 4 = 0, \nexists y \in \mathbb{R}$
se $y = 0 \to 3.0^2 - x^2 + 4 = 0 \to x = \pm 2$
Pontos críticos (candidatos a extremos): $(-2, 0), (2, 0)$.
Nenhum dos dois pontos está no interior de A. Logo não são candidatos a extremos.
Determinar os candidatos a extremos que estão na fronteira de A.

$$\overline{MN} = (-2, 0), (0, 2) \to y = ax + b$$

$$0 = a.(-2) + b$$

$$-2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

e

$$2 = a.0 + b \rightarrow b = 2$$

$$y = x + 2, -2 \leq x \leq 0$$

$$\overline{MO} = (-2, 0), (0, -2)$$

$$0 = a(-2) + b \rightarrow -2a - 2 = 0$$

e

$$-2 = a.0 + b \rightarrow b = -2 \rightarrow a = -1$$

$$y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$$

Sobre o segmento $\overline{MN} : y = x, -2 \leq x \leq 0$:
substituindo na função:

$$f(x, y) = f(x, x + 2)$$

$$= (x + 2)^3 - x^2.(x + 2) + 4(x + 2)$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8$$

$$= 4x^2 + 16x + 16, -2 \leq x \leq 0$$

Para determinarmos os candidatos a extremos sobre $\overline{MN}$ usamos os conceitos de Cálculo I.

$$f_1(x) = 4x^2 + 16x + 16$$

$$f_1'(x) = 8x + 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2$$

$x = -2$ não é ponto interior do segmento $\overline{MN}$. Logo os pontos críticos sobre o segmento $\overline{MN}$ não serão apenas seus extremos $x = -2$ e $x = 0$. **Candidatos a extremos:** (-2,0), (0,2)
quando $x = -2$ e $y = 0$.
quando $x = 0$ e $y = 2$.

$$\overline{ON} : x = 0, -2 \leq y \leq 2$$

$$\overline{MN} : y = x + 2$$

Segmento $\overline{ON}$: $x = 0, -2 \leq y \leq -2$
Substituindo na função f.

$$f(0, y) = y^3 - 0^2.y + 4y = y^3 + 4y$$

$$f_2(y) = y^3 + 4y$$

$$f_2'(y) = 3y^2 + 4 = 0$$

$\nexists y$ pois são dois quadrados e não tem como ser menor que 0.
Logo, neste segmento, os candidatos a extremos serão: $(0, -2), (0, 2)$ **Segmento** $\overline{MO}$**:** $y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$
Substituindo na função f:

$$f(x, -x-2) = (-x-2)^3 - x^2(-x-2) + 4(-x-2)$$
$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$
$$= 4x^2 - 16x - 16 = f_3(x)$$
$$f_3'(x) = -8x - 16 = 0 \to 8x + 16 = 0 \to x = -2$$

que está no extremo.
São candidatos a extremos sobre $\overline{MO}$: $(-2, 0), (0, -2)$
Quadro de Análise *FIGURA 2*

Exemplo: A temperatura T em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = 3y^2 + x^2 - x$. Qual é a temperatura máxima e mínima sobre o disco fechado de raio 2 centrado na origem do sistema ortogonal cartesiano $p = (0, 0)$?
Região A = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$*FIGURA 3*
Interior de A:
Pontos Críticos

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 6y = 0 \to y = 0$$

$(\frac{1}{2}, 0)$ está no interior de A.
Fronteira de A:
Pontos Críticos

$$x^2 + y^2 = 2^2$$
$$y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2$$

Substituindo na função f:

$$T(x, y) = 3.(4 - x^2) + x^2 - x$$
$$= 12 - 3x^2 + x^2 - x = -2x^2 - x + 12$$
$$T_1(x) = -2x^2 - x + 12$$
$$T_1'(x) = -4x - 1 = 0 \to -4x - 1 = 0 \to x = -\frac{1}{4}$$

Se $x = -\frac{1}{4} \rightarrow y^2 = 4 - (\frac{-1}{4})^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$

$$y = \frac{\pm\sqrt{63}}{4}$$

Sobre a fronteira de A, candidatos a extremos:

1. $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4})$
2. $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{63}}{4})$
3. $(-2, 0)$
4. $(2, 0)$

extremos do intervalo *-2 e 2*, $x = 2 \rightarrow y^2 = 0$, $x = 2 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$
Quadro de Análise *FIGURA 4*

7 Máximos e Mínimos Condicionados

Considere os problemas:

- min $f(x, y) = x^2 + y^2$ *problema de otimização irrestrito/livre*
- min $f(x, y) = x^2 + y^2$
  sujeito a $x + y = 1$ *problema de otimização restrita/condicional*

FIGURA 5]
Problemas envolvendo Funções de duas variáveis e uma restrição:
Considere o problema:
max $f(x, y)$
sujeito a $g(x, y) = 0$

Proposição: Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável sobre um domínio U. Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U. Tal que o gradiente de $g(x, y)$ não pode ser vetor nulo ($\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$). Gradiente é o vetor formado pelas derivadas parciais.
$\forall (x, y) \in V$, onde $V = \{(x, y) \in U, g(x, y) = 0\}$
Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in U$ seja extremo local de f em V é que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$
OBS: Podemos dizer que os pontos de máximo ou de mínimo condicionados de f devem satisfazer as seguintes condições:

$$g(x, y) = 0, \frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = \lambda \frac{\varphi g}{\varphi x}(x, y)$$

e (*)

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x,y) = \lambda \frac{\varphi g}{\varphi y}(x,y)$$

para algum λ real.
OBS: O $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna (*) compatível é denominado de multiplicador de Lagranje. O método de Lagranje consiste em definir uma função de 3 variáveis.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Nesse caso a equação (*) é equivalente à equação gradiente $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$
Equação gradiente:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (\frac{\varphi L}{\varphi x}, \frac{\varphi L}{\varphi y}, \frac{\varphi L}{\varphi \lambda}) = (\frac{\varphi f}{\varphi x} - \lambda \frac{\varphi g}{\varphi x}, \frac{\varphi f}{\varphi y} - \lambda \frac{\varphi g}{\varphi y}, g(x,y)) = (0,0,0)$$

Com isso os candidatos a extremos de f sujeitos à restrição $g(x,y) = 0$ são exatamente os pontos críticos de L.
Exemplo: Uma casa retangular deve ser construída em um terreno triangular de forma que a casa tenha área máxima. Se o terreno tiver o formato *FIGURA 6*, quais deverão ser as dimensões da casa?
Dimensões do terreno: Triângulo reto de base 30 e altura 10.
Solução: Vamos colocar a situação problema num sistema ortogonal cartesiano. *FIGURA 7.*// **Problema modelado:**
max $A(x,y) = x.y$
sujeito a $3y + x - 30 = 0$
→ Equação de Lagranje

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(3y + x - 30)$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (y - \lambda, x - 3\lambda, -(3y + x - 30)) = 0$$

$\nabla L = 0 \rightarrow$

- $y - \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda$
- $x - 3\lambda = 0 \rightarrow x = 3\lambda$
- $3y + 3x - 30 = 0 \rightarrow 3\lambda + 3\lambda - 30 = 0$

logo
$6\lambda = 30 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow x = 15$ e $y = 5$
Logo a solução do problema será:

$$A(15,5) = 15.5 = 75m^2$$

Analogamente, podemos ter problemas da forma:
max/min $f(x,y,z)$
sujeito a $g(x,y,z) = 0$
Neste caso a equação de Lagrange será:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$