

Revisão Prova 2 de Cálculo II

Milton Kist

Erickson Giesel Müller

2 de Dezembro de 2024

Conteúdos

1. Funções de várias variáveis (Definição, Domínio, Imagem, Operações, Representação Gráfica).
2. Limite e Continuidade.
3. Limite e Continuidade de funções de várias variáveis.
4. Limites por caminho.
5. Cálculo de Limites envolvendo indeterminações.
6. Verificação de Continuidade de funções.
7. Derivadas parciais e aplicações.
8. Gradiente.
9. Multiplicadores de Lagrange.
10. Integração dupla.
11. Integração tripla

1 Função de Várias Variáveis

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, a relação $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função real, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P \in \mathbb{R}$, associamos um único número real $z \in \mathbb{R}$.

$$A = D(f)$$

$$\mathbb{R} = CD(f)$$

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} / z = f(x_1, x_2, \dots)\}$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, determine os conjuntos domínio e imagem de f .

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$Im(f) = [0, 1]$$

Exemplo: em cada caso, determine o domínio da função, faça também a representação geométrica do domínio:

2 Limite e Continuidade

Abaixo algumas definições.

2.1 Bola Aberta

Dado um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e um número positivo r , a bola aberta de centro em P_0 e raio r é dada pelo conjunto de pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que a distância de $P \rightarrow P_0$ é **menor** que o raio r .

$$B(P_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

2.2 Ponto Interior e Conjunto Aberto

Seja o conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $P \in A$ é um ponto interior de A se existir uma **bola aberta** centrada em P totalmente contida em A .

Se todos os pontos de A forem interiores, dizemos que A é um **conjunto aberto**. Simplificando, o ponto P não pode estar na borda nem fora de A .

2.3 Conjunto/Domínio Conexo

Um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo se dados dois pontos quaisquer em D , eles podem ser ligados por uma poligonal contida em D .

Simplificando, uma linha/curva que vc pode passar por dentro de um domínio sem que ela seja interrompida por um "buraco".

1. Simplesmente conexo: quando todo o domínio não apresenta buracos.
2. Apenas conexo: apresenta buracos
3. Não-conexo: quando o domínio não é totalmente conectado por inteiro.

2.4 Ponto de Fronteira

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é dito um ponto de fronteira de A se toda bola aberta centrada em P contiver pontos de A e pontos que não estão em A . O conjunto de todos os pontos de fronteira do conjunto A é chamado fronteira de A .

Se todos os pontos de fronteira de A permanecem a A . Dizemos que A é fechado. Observamos que essa definição também é válida para um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n, n > 2$.

2.5 Conjunto Fechado

Um conjunto A , se ele contiver todos os seus pontos de fronteira.

2.6 Pontos de Acumulação

Toda bola centrada nele tem uma infinidade de pontos no conjunto.

3 Regra da Cadeia

Vamos definir a regra da cadeia para o caso de funções de várias variáveis.

Proposição 1: Sejam A e B conjuntos abertos do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} , respectivamente, e sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $g(t) = (x(t), y(t)) \in A$ para todo $t \in B$. Nestas condições, se g for diferenciável em B e $f(x, y)$ possuir derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em A .

Então, a função composta:

$$h(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t))$$

é diferenciável $\forall t \in B$ e $\frac{dh}{dt}$ é dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Exemplo: sejam $h(t) = f(x(t), y(t))$, $f(x, y) = 5xy - y^2$ e $x(t) = 2t$, $y(t) = 5t + 3$. Verificar que neste caso vale (*). Usando (*)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= 5y \cdot 2 + (5x - 2y) \cdot 5 \\ &= 5 \cdot (5t + 3) \cdot 2 + (5(2t) - 2(5t + 3)) \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 50.t + 30 + (10t - 10t - 6).5 = 50t \\
&\rightarrow h(t) = f(2t, 5t + 3) \\
&= 5.(2t)(5t + 3) - (5t + 3)^2 \\
&= 50t^2 + 30t - 25t^2 - 30t - 9 \\
&= 25t^2 - 9 \\
&h'(t) = 50t
\end{aligned}$$

confere

Proposição 2: Sejam A e B conjuntos abertos em \mathbb{R}^2 , e sejam $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções diferenciáveis, então a função composta $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ é diferenciável.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Exemplo: Sejam $f(u, v) = 2u^3 - 3v + 32$, $w(x, y) = 2x - y$ e $v(x, y) = 2x - xy^2$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= 6u^2 \cdot 2 - 5 \cdot (2 - y^2) = 12 \cdot (2x - y)^2 - 5 \cdot (2 - y^2) \\
\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= 6u^2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-2xy) = -6 \cdot (2x - y)^2 + 10xy
\end{aligned}$$

3.1 Derivadas Parciais Sucessivas

Seja $z = f(x, y)$, já sabemos como construir as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Da mesma forma, podemos construir as funções:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \cdot \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)
\end{aligned}$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 5x^2y - y^3x^2 + 9$. Determine as seguintes funções derivadas:

1. $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}$
2. $\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$
3. $\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x}$

1.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 10xy - 2y^3x$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x} \cdot \left(\frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 10y - 2y^3$$

2.

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left(\frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 10 - 6xy^2$$

3.

$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left(\frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left(\frac{\varphi f}{\varphi x} \right) \right) = -12xy$$

3.2 Teorema de Schwartz

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A , então:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y), \forall (x, y) \in A$$

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 4x^3y^4 + y^2$.

Verifique se $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$:

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 12x^2 \cdot y^4$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left(\frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 48x^2y^3$$

ou

$$\frac{\varphi f}{\varphi y} = 16x^3y^3 + 2y$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y} = \frac{\varphi}{\varphi x} \cdot \left(\frac{\varphi f}{\varphi y} \right) = 48x^2y^3$$

3.3 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Definição: Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, então:

1. $(x_0, y_0) \in D(f)$ é um ponto de **máximo local** de f , se existir uma bola aberta $B = B((x_0, y_0), r)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \cap D(f)$
2. $(x_0, y_0) \in D(f)$ é ponto de mínimo local de f se existir uma bola aberta $B = B((x_0, y_0), r)$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \cap D(f)$.

Nota: Se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D(f)$, diremos que (x_0, y_0) é máximo global de f . Analogamente, define-se mínimo global.

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$, verifique se f possui ponto de máximo/mínimo.

$$\rightarrow f(x, y) = 5 - (x^2 + y^2)$$

$$f(0, 0) = 5 \geq f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\rightarrow f$ admite máximo global em $(0, 0)$ e esse valor de máximo é 5.

3.4 Ponto Crítico de uma função de Várias Variáveis

Definição: Seja $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é um ponto crítico de f se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ forem **nulas** ou se f não for diferenciável em (x_0, y_0) .

Exemplo: Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0$$

$$-2x = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

$$-2y = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Ponto Crítico = $(0, 0)$

Proposição (Condição Necessária): Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in A$ for um ponto extremante (máximo ou mínimo) local, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f .

Proposição (Condição Suficiente): Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas num conjunto aberto que contém (x_0, y_0) e suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f . Seja $H(x, y)$ o determinante.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x, y) & \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y) \\ \frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) & \frac{\varphi^2 f}{\varphi y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Temos que

1. Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x_0, y_0) > 0$
então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f .
2. Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} < 0$
então (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f .
3. Se $H(x_0, y_0) < 0$
então (x_0, y_0) não é ponto extremo.
4. Se $H(x_0, y_0) = 0$
nada podemos afirmar.

Exemplo: Dada a função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
Determine os pontos críticos de f e classifique-os:

Pontos Críticos:

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$4x^3 - 4y = 0 \rightarrow y = x^3$$

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi y} = 4y^3 - 4x = 0$$

$$4y^3 - 4x = 0 \rightarrow 4(x^3)^3 - 4x = 0$$

$$x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x^8 = 1$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Quando } x = 1 \rightarrow y = (1)^3 = 1$$

$$\text{Quando } x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 = -1$$

$$\text{Quando } x = 0 \rightarrow y = 0^3 = 0$$

$$\text{Pontos Críticos: } (0, 0); (-1, -1); (1, 1)$$

4 Teorema de Weierstrass

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y)$ uma função contínua em A . Então existem $P_1, P_2 \in A$ tais que $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \forall P \in A$

Exemplo: Seja dada a função $f(x, y) = y^3 - x^2y + 4y$. Determine o valor de máximo e o valor de mínimo de f sobre o conjunto A delimitado pelo triângulo de vértices $M(-2, 0), N(0, 2), O(0, -2)$ FIGURA 1. **Observação:**

- Pelo Teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo global sobre A .

- Para determinarmos os candidatos a extremos máximo e mínimo, vamos analisar separadamente o interior de A e a fronteira de A.
- Os candidatos a extremos que estão localizados no interior de A estão entre os pontos críticos da função. Isto é: onde $\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = 0$ e $\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 0$ ou onde essas derivadas parciais não existem.

Determinar os candidatos a extremos que estão no interior de A.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = -2xy$$

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 3y^2 - x^2 + 4$$

logo

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 0 \text{ e } \frac{\varphi f}{\varphi y} = 0$$

$$-2xy = 0 \text{ e } 3y^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$-2xy = 0 \rightarrow xy = 0$$

logo $x = 0$ ou $y = 0$ se $x = 0 \rightarrow 3y^2 - 0^2 + 4 = 0, \nexists y \in \mathbb{R}$

se $y = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

Pontos críticos (candidatos a extremos): $(-2, 0), (2, 0)$.

Nenhum dos dois pontos está no interior de A. Logo não são candidatos a extremos.

Determinar os candidatos a extremos que estão na fronteira de A.

$$\overline{MN} = (-2, 0), (0, 2) \rightarrow y = ax + b$$

$$0 = a \cdot (-2) + b$$

$$-2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

e

$$2 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = 2$$

$$y = x + 2, -2 \leq x \leq 0$$

$$\overline{MO} = (-2, 0), (0, -2)$$

$$0 = a(-2) + b \rightarrow -2a - 2 = 0$$

e

$$-2 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = -2 \rightarrow a = -1$$

$$y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$$

Sobre o segmento $\overline{MN} : y = x, -2 \leq x \leq 0$:
substituindo na função:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, x + 2) \\ &= (x + 2)^3 - x^2 \cdot (x + 2) + 4(x + 2) \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8 \\ &= 4x^2 + 16x + 16, -2 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

Para determinarmos os candidatos a extremos sobre \overline{MN} usamos os conceitos de Cálculo I.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x^2 + 16x + 16 \\ f_1'(x) &= 8x + 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ não é ponto interior do segmento \overline{MN} . Logo os pontos críticos sobre o segmento \overline{MN} não serão apenas seus extremos $x = -2$ e $x = 0$. **Candidatos a extremos:** $(-2, 0), (0, 2)$
quando $x = -2$ e $y = 0$.
quando $x = 0$ e $y = 2$.

$$\overline{ON} : x = 0, -2 \leq y \leq 2$$

$$\overline{MN} : y = x + 2$$

Segmento \overline{ON} : $x = 0, -2 \leq y \leq 2$

Substituindo na função f .

$$f(0, y) = y^3 - 0^2 \cdot y + 4y = y^3 + 4y$$

$$f_2(y) = y^3 + 4y$$

$$f_2'(y) = 3y^2 + 4 = 0$$

$\nexists y$ pois são dois quadrados e não tem como ser menor que 0.

Logo, neste segmento, os candidatos a extremos serão: $(0, -2), (0, 2)$ **Segmento**

$\overline{MO} : y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$

Substituindo na função f :

$$f(x, -x - 2) = (-x - 2)^3 - x^2(-x - 2) + 4(-x - 2)$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= 4x^2 - 16x - 16 = f_3(x)$$

$$f_3'(x) = -8x - 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2$$

que está no extremo.

São candidatos a extremos sobre \overline{MO} : $(-2, 0), (0, -2)$

Quadro de Análise FIGURA 2

Exemplo: A temperatura T em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = 3y^2 + x^2 - x$. Qual é a temperatura máxima e mínima sobre o disco fechado de raio 2 centrado na origem do sistema ortogonal cartesiano $p = (0, 0)$?
 Região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ FIGURA 3

Interior de A:

Pontos Críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y = 0 \rightarrow y = 0$$

$(\frac{1}{2}, 0)$ está no interior de A.

Fronteira de A:

Pontos Críticos

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2$$

Substituindo na função f :

$$\begin{aligned} T(x, y) &= 3(4 - x^2) + x^2 - x \\ &= 12 - 3x^2 + x^2 - x = -2x^2 - x + 12 \end{aligned}$$

$$T_1(x) = -2x^2 - x + 12$$

$$T'_1(x) = -4x - 1 = 0 \rightarrow -4x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Se } x = -\frac{1}{4} \rightarrow y^2 = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{63}}{4}$$

Sobre a fronteira de A, candidatos a extremos:

1. $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4})$
2. $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{63}}{4})$
3. $(-2, 0)$
4. $(2, 0)$

extremos do intervalo $-2 \leq x \leq 2, x = 2 \rightarrow y^2 = 0, x = -2 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$

Quadro de Análise FIGURA 4

5 Máximos e Mínimos Condicionados

Considere os problemas:

- $\min f(x, y) = x^2 + y^2$ problema de otimização irrestrito/livre
- $\min f(x, y) = x^2 + y^2$
sujeito a $x + y = 1$ problema de otimização restrita/condicional

FIGURA 5]

Problemas envolvendo Funções de duas variáveis e uma restrição:

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max f(x, y) \\ \text{sujeito a } g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Proposição: Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável sobre um domínio U . Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U . Tal que o gradiente de $g(x, y)$ não pode ser vetor nulo ($\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$). Gradiente é o vetor formado pelas derivadas parciais.

$\forall (x, y) \in V$, onde $V = \{(x, y) \in U, g(x, y) = 0\}$

Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in U$ seja extremo local de f em V é que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

OBS: Podemos dizer que os pontos de máximo ou de mínimo condicionados de f devem satisfazer as seguintes condições:

$$g(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

e (*)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

para algum λ real.

OBS: O $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna (*) compatível é denominado de multiplicador de Lagrange. O método de Lagrange consiste em definir uma função de 3 variáveis.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Nesse caso a equação (*) é equivalente à equação gradiente $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$

Equação gradiente:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, g(x, y) \right) = (0, 0, 0)$$

Com isso os candidatos a extremos de f sujeitos à restrição $g(x, y) = 0$ são exatamente os pontos críticos de L .

Exemplo: Uma casa retangular deve ser construída em um terreno triangular de forma que a casa tenha área máxima. Se o terreno tiver o formato *FIGURA 6*, quais deverão ser as dimensões da casa?

Dimensões do terreno: Triângulo reto de base 30 e altura 10.

Solução: Vamos colocar a situação problema num sistema ortogonal cartesiano.

FIGURA 7.// **Problema modelado:**

$$\max A(x, y) = x \cdot y$$

$$\text{sujeito a } 3y + x - 30 = 0$$

→ Equação de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(3y + x - 30)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (y - \lambda, x - 3\lambda, -(3y + x - 30)) = 0$$

$$\nabla L = 0 \rightarrow$$

- $y - \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda$
- $x - 3\lambda = 0 \rightarrow x = 3\lambda$
- $3y + 3x - 30 = 0 \rightarrow 3\lambda + 3\lambda - 30 = 0$

logo

$$6\lambda = 30 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow x = 15 \text{ e } y = 5$$

Logo a solução do problema será:

$$A(15, 5) = 15 \cdot 5 = 75m^2$$

Analogamente, podemos ter problemas da forma:

$$\max/\min f(x, y, z)$$

$$\text{sujeito a } g(x, y, z) = 0$$

Neste caso a equação de Lagrange será:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$