Revisão P2
Divane Marcon

Erickson G. Müller

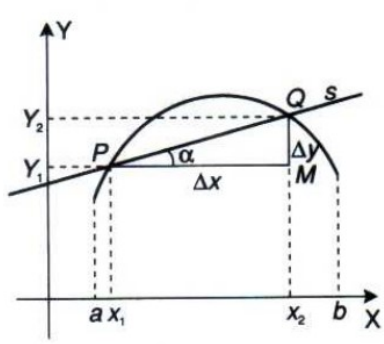
25 de Junho de 2024

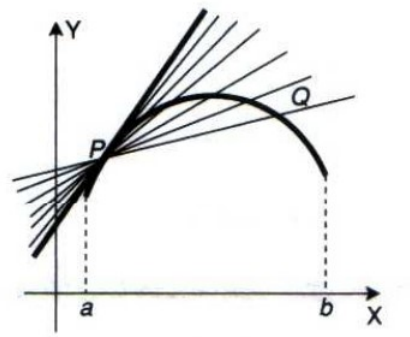
1 Conteúdos

1. Derivadas
2. Velocidade e Aceleração
3. Integrais Definidas e Indefinidas
4. Teorema Fundamental do Cálculo
5. Cálculo de Áreas

2 Derivadas

A derivada é o coeficiente angular da reta tangente à curva f(x) num determinado ponto.





A curva tangente no ponto P é calculada à medida que o ponto Q se aproxima do ponto P correndo sobre a curva.

$$\lim_{Q_x \to P_x} f(x) = P'x + b$$

Exemplo:
Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então $f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 1$;

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2.(x_1 + \Delta x) + 1 \\ &= x_1^2 + 2.x_1.\Delta x + \Delta x^2 - 2.x_1 - 2.\Delta x + 1 \end{aligned}$$

Usando limites...

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2.x_1.\Delta x + \Delta x^2 - 2.x_1 - 2.\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1.\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.(2.x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} = 2.x_1 - 2$$

Por meio dessa derivação, provamos a propriedade de que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

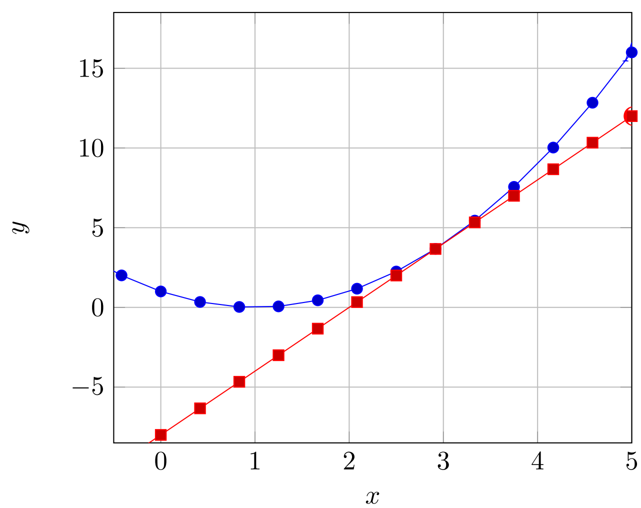
Para entender melhor, irei desenhar um gráfico com as curvas $x^2 - 2x + 1$ e $(2x - 2).x + b$, para $x = 3$:
Ou seja, o $2x + b$ passa a ser o a da nova reta a ser descoberta, deste modo, se quisermos que a reta passe no ponto $(3, 4)$, aplicaremos na fórmula da reta $y = ax + b$.

$$4 = (2.3 - 2).3 + b$$

$$a = 4$$

$$b = -8$$

$$f'(x) = 4x - 8$$



2.1 Propriedades

1. Embora exista limite em ponto anguloso, não existe derivada nesse ponto pois o coeficiente angular à esquerda e à direita são diferentes.

2. Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$

3. A derivada de uma constante é 0.

4. A derivada do produto de uma constante por um função é essa derivada multiplicada pela constante. $g(x) = k.f(x)$ logo $g'(x) = k.f'(x)$

5. A derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das duas funções. $h(x) = f(x) + g(x)$ logo $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

2.2 Derivada de uma Função num Ponto

A derivada da função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, é definida pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ou

$$f'(x) = \lim_{x_f \to x_0} \frac{f(x_f) - f(x_0)}{x_f - x_0}$$

2.3 Velocidade e Aceleração

Existem dois tipos de cálculo para encontrar uma velocidade ou aceleração, a velocidade ou aceleração instantâneas e a velocidade e aceleração intervalares. A intervalar é calculada fazendo a média da diferença entre as distâncias ou as velocidades em um determinado intervalo de tempo ($\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$). Para calcularmos a velocidade em determinado momento, precisamos aplicar o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de 0.

$$v(\Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

Para calcular a aceleração, em vez da velocidade, apenas se substituem na fórmula as variáveis distância(s) pelas variáveis velocidade(v). Assim como a velocidade é calculada pela variação de distância, a aceleração é calculada pela variação de velocidade.

2.4 Regra da Cadeia

2.5 Derivada das Funções Elementares

2.6 Derivada das Funções Trigonométricas

3 Exemplos Derivada no Ponto

3.1 Reta Tangente que seja Paralela a Outra Reta

Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta $8.x - 4.y + 1 = 0$.
Por serem paralelas, seus coeficientes angulares são iguais.
Por esse motivo vamos encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ num ponto (x_1, y_1). Temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1}}{\Delta x} . \frac{(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x}^2 - \sqrt{x_1}^2}{\Delta x.(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1 + \Delta x - x_1}{\Delta x.(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Essa é a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, como queremos encontrar a reta tangente que seja paralela à reta $8.x - 4.y + 1 = 0$, precisamos igualar a derivada de $f(x)$ ao coeficiente angular da segunda reta. **Pois a derivada de uma curva é o coeficiente angular da reta tangente à curva em determinado ponto.**

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{8}{4}$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{16}$$

$$y_1 = \frac{1}{4}$$

Esse é o ponto da reta tangente. Podemos agora aplicar à fórmula da função de segundo grau:

$$\frac{1}{4} = 2.\frac{1}{16} + b$$

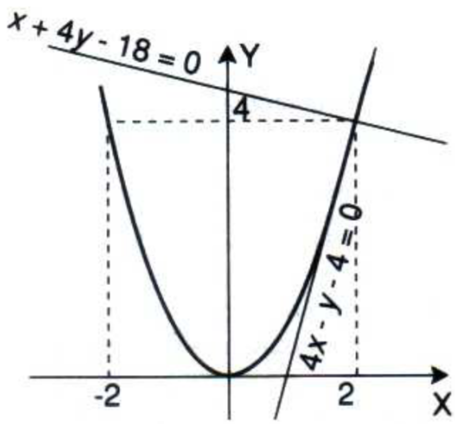
$$b = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$y = 2.x + \frac{1}{8}$$

$$16.x - 8.y + 1 = 0$$

3.2 Reta Tangente que seja Perpendicular a Outra Reta

No último exemplo, encontramos a derivada usando uma reta paralela à reta a qual buscamos, para isso a derivada da função deve ser igual ao coeficiente angular da reta paralela. Agora vamos ver um exemplo de como encontrar uma reta tangente que seja perpendicular a uma outra reta.
O nome dessa reta perpendicular é reta normal e ela apresenta ângulo reto no ponto da reta tangente.



Acima temos a equação para a reta normal à curva $y = x$ no ponto $(2, 4)$.
Duas retas $f(x)$ e $g(x)$ são perpendiculares se o **produto dos coeficientes angulares das duas retas for igual a -1**.

3.3 Derivada Conforme Valor de x

Dada $f(x) = \sqrt{x}$, encontre $f'(4)$.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Em vez de aproximarmos o Δx a 0, aproximamos o x ao valor de x para aquele ponto.

$$f'(x) = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} . \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

Quando os números do denominador forem o quadrado destes no numerador, multiplicar pela soma/subtração destes mesmos, conforme a operação no numerador.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4).(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

4 Integrais

4.1 Integrais Definidas

4.2 Integrais Indefinidas

4.3 Teorema Fundamental do Cálculo

5 Cálculo de Áreas