Revisão Prova 1
Matemática Discreta
Neri

Erickson G. Müller

November 27, 2024

Conteúdos

1. Proposições logicamente equivalentes
2. Lógica proposicional
3. Argumentos válidos, argumentos verbais
4. Regras de inferência
5. Lógica de predicados
6. Quantificadores universal e existencial
7. Regras de inferência para quantificadores
8. Técnicas de demonstração: direta, contraposição, exaustão e absurdo
9. Teoria dos conjuntos, subconjuntos
10. Álgebra dos conjuntos
11. Relações: binárias, equivalência
12. Partições
13. Funções: domínio e imagem
14. Funções: injetora, sobrejetora, bijetora
15. Composição de funções
16. Função inversa

A matemática pode ser dividida em dois **domínios**: o *contínuo* e o *discreto*. A matemática contínua estuda conceitos infinitos em seu objetivo, utilizando o sistema de números reais. A matemática discreta utiliza um domínio de números que não estão conectados da mesma forma que os números reais. É uma comparação semelhante à diferença entre o sinal analógico e o digital.

A matemática discreta exige do aluno que sejam desenvolvidas demonstrações (provas), para isso existem diversos **esquemas de provas** que se aplicam a cada caso. O autor do livro recomenda elaborar as provas escrevendo a primeira e a última sentença, e ir desenvolvendo em direção ao meio até que ambas se encontrem.

1 Correção da Prova do Semestre Passado

1.1

Para provar que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é equipotente a $\mathbb{R}$, podemos seguir o roteiro abaixo:

1. Prove que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é equipotente ao intervalo $[0, 1]$. Isto pode ser feito mostrando que $f : [0, 1] \to [a, b]$ onde $f(x) = xb + (1 - x)a$ é uma bijeção.

2. A seguir, prove que o intervalo $[0, 1]$ e $\mathbb{R}$ são equipotentes.

- Faça o item 1.

- Explique por que o roteiro acima é suficiente.

- Mostre que é uma bijeção a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:
  $g(x) = \frac{1}{2}$, se $x = 0$
  $g(x) = \frac{1}{n+2}$, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{1}{n}$
  $g(x) = x$, se $x \notin \{\frac{1}{n} | n > 0\} \bigcup \{0\}$

1.2

Agora que você sabe fazer a questão 4 da lista, é fácil explira por que qualquer intervalo fechado não é enumerável, já que $\mathbb{R}$ não é enumerável. Mas e **mostrar que qualquer intervalo fechado é um conjunto infinito**, você sabe fazer?. Se conseguir escrever uma demonstração clara, ganha mais um ponto e meio.

1.3

A questão 3 da lista pedia para você demonstrar que se A é enumerável e B é finito, então $A \bigcup B$ também é enumerável. Mas se B não for enumerável, pode acontecer de $A \bigcup B$ não ser enumerável. Mostre um exemplo em que isto ocorre. Lempre que você tem que convencer que o conjunto $A \bigcap B$ não é enumerável.

1.4

Prove por indução que se $\#A = n$, então $P(A) = 2^n$.(Tem no livro do Menezes).

1.5

Considere a sequência dada por recorrência ao lado:
$a0 =$ número incógnito
$a1 =$ número incógnito
$a2 =$ número incógnito
$a3 =$ número incógnito
$an = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + 3^n$ se $n \geq 4$

- Encontre uma solução particular para a recorrência desta sequência. (lempre, ela tem que ter a foram $a_n = a.3^n$.

2 Respostas

- 1.a
  Demonstrar bijeção em
  $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$
  ${}_{x \rightarrow f(x) = xb + (1-x)a}$

$$f(x) = xb + (1 - x)a$$

$$f(x) = xb + xa + a$$

$$f(x) = x(b - a) + a$$

Demonstrar injetividade
Suponha que $f(m) = f(n)$
então:

$$f(m) = m(b - a) + a$$

$$f(n) = n(b - a) + a$$

$$f(m) = f(n) =>$$

$$m(b - a) + a = n(b - a) + a$$

$$m = n$$

Logo, se $f(m) = f(n)$, então $m = n$.
Assim, f é injetora.
Demonstrar sobrejetividade
Nessa situação, precisamos encontrar um $x \in [0, 1]$ para cada $y \in [a, b]$ de tal forma que $f(x) = y$
Assim, considere $y \in [a, b]$.
Tome:
$y = x.(b - a) + a$
$y - a = x.(b - a)$

$$x = \frac{y - a}{b - a}$$

Observe que x de fato pertence ao interval $[0,1]$, pois se $y=a, x=0$ e se $y=b, x=1$
e se $a<y<b$, então

$$y-a<b-a$$

e $\frac{y-a}{b-a}<1$

$$0<\frac{y-a}{b-a}<1 \rightarrow o<x<1$$

$$x \in [0,1]$$

e Então, se $x=\frac{y-a}{b-a}$
$f(x)=x(b-a)+a$
$\frac{y-a}{b-a}.(b-a)+a$
$y-a+a=y$
$y=y$
Assim, f é bijetora.

- 1.b
Demonstrar bijeção entre $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ e entre $[0,1] \rightarrow [a,b]$
Vamos supor que:
$\varphi : [a, \rightarrow [0,1]$ e $\psi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sejam bijeções.
Então a função composta $\psi o \varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ são equipotentes.

- 2
Existem 4 tipos de intervalos fechados:
$[a,b]=\{x \int \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$
$[a,\infty)=\{x \int \mathbb{R}/a \leq x\}$
$(-\infty,b]=\{x \int \mathbb{R}/x \leq b\}$
$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$
Um conjunto A é infinito quando existe uma bijeção
$\varphi B \rightarrow A$ onde $B \subset A$ e $B \neq A$