

# Revisão Prova 2 de Cálculo II

## Milton Kist

Erickson Giesel Müller

2 de Dezembro de 2024

### Conteúdos

1. Funções de várias variáveis (Definição, Domínio, Imagem, Operações, Representação Gráfica).
2. Limite e Continuidade.
3. Limite e Continuidade de funções de várias variáveis.
4. Limites por caminho.
5. Cálculo de Limites envolvendo indeterminações.
6. Verificação de Continuidade de funções.
7. Derivadas parciais e aplicações.
8. Gradiente.
9. Multiplicadores de Lagrange.
10. Integração dupla.
11. Integração tripla

# 1 Função de Várias Variáveis

Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ , a relação  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada função real,  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $P \in \mathbb{R}$ , associamos um único número real  $z \in \mathbb{R}$ .

$$A = D(f)$$

$$\mathbb{R} = CD(f)$$

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} / z = f(x_1, x_2, \dots)\}$$

**Exemplo:** Dada a função  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , determine os conjuntos domínio e imagem de  $f$ .

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$Im(f) = [0, 1]$$

**Exemplo:** em cada caso, determine o domínio da função, faça também a representação geométrica do domínio:

## 1.1 Regra da Cadeia

Vamos definir a regra da cadeia para o caso de funções de várias variáveis.

Proposição 1: Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos abertos do  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente, e sejam  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$  tais que  $g(t) = (x(t), y(t)) \in A$  para todo  $t \in B$ . Nestas condições, se  $g$  for diferenciável em  $B$  e  $f(x, y)$  possuir derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em  $A$ .

Então, a função composta:

$$h(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t))$$

é diferenciável  $\forall t \in B$  e  $\frac{dh}{dt}$  é dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Exemplo: sejam  $h(t) = f(x(t), y(t))$ ,  $f(x, y) = 5xy - y^2$  e  $x(t) = 2t$ ,  $y(t) = 5t + 3$ . Verificar que neste caso vale (\*). Usando (\*)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= 5y \cdot 2 + (5x - 2y) \cdot 5 \\ &= 5 \cdot (5t + 3) \cdot 2 + (5(2t) - 2(5t + 3)) \cdot 5 \\ &= 50t + 30 + (10t - 10t - 6) \cdot 5 = 50t \\ &\rightarrow h(t) = f(2t, 5t + 3) \\ &= 5 \cdot (2t)(5t + 3) - (5t + 3)^2 \end{aligned}$$

$$= 50t^2 + 30t - 25t^2 - 30t - 9$$

$$= 25t^2 - 9$$

$$h'(t) = 50t$$

confere

**Proposição 2:** Sejam A e B conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^2$ , e sejam  $z = f(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$  funções diferenciáveis, então a função composta  $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  é diferenciável.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

**Exemplo:** Sejam  $f(u, v) = 2u^3 - 3v + 32$ ,  $w(x, y) = 2x - y$  e  $v(x, y) = 2x - xy^2$ .

Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 6u^2 \cdot 2 - 5 \cdot (2 - y^2) = 12 \cdot (2x - y)^2 - 5 \cdot (2 - y^2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 6u^2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-2xy) = -6 \cdot (2x - y)^2 + 10xy$$

## 1.2 Derivadas Parciais Sucessivas

Seja  $z = f(x, y)$ , já sabemos como construir as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Da mesma forma, podemos construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

**Exemplo:** Dada a função  $f(x, y) = 5x^2y - y^3x^2 + 9$ . Determine as seguintes funções derivadas:

1.  $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}$
2.  $\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$
3.  $\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x}$

1.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 10xy - 2y^3x$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} = \frac{\varphi}{\varphi x} \cdot \left( \frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 10y - 2y^3$$

2.

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left( \frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 10 - 6xy^2$$

3.

$$\frac{\varphi^3 f}{\varphi y^2 \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left( \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left( \frac{\varphi f}{\varphi x} \right) \right) = -12xy$$

### 1.3 Teorema de Schwartz

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $A$ , então:

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y), \forall (x, y) \in A$$

**Exemplo:** Dada a função  $f(x, y) = 4x^3y^4 + y^2$ .

Verifique se  $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) = \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}$ :

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 12x^2 \cdot y^4$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x} = \frac{\varphi}{\varphi y} \cdot \left( \frac{\varphi f}{\varphi x} \right) = 48x^2y^3$$

ou

$$\frac{\varphi f}{\varphi y} = 16x^3y^3 + 2y$$

$$\frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y} = \frac{\varphi}{\varphi x} \cdot \left( \frac{\varphi f}{\varphi y} \right) = 48x^2y^3$$

## 1.4 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

**Definição:** Seja  $z = f(x, y)$  uma função de duas variáveis, então:

1.  $(x_0, y_0) \in D(f)$  é um ponto de **máximo local** de  $f$ , se existir uma bola aberta  $B = B((x_0, y_0), r)$  tal que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \cap D(f)$
2.  $(x_0, y_0) \in D(f)$  é ponto de mínimo local de  $f$  se existir uma bola aberta  $B = B((x_0, y_0), r)$  tal que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in B \cap D(f)$ .

**Nota:** Se  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D(f)$ , diremos que  $(x_0, y_0)$  é máximo global de  $f$ . Analogamente, define-se mínimo global.

**Exemplo:** Dada a função  $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$ , verifique se  $f$  possui ponto de máximo/mínimo.

$$\rightarrow f(x, y) = 5 - (x^2 + y^2)$$

$$f(0, 0) = 5 \geq f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\rightarrow f$  admite máximo global em  $(0, 0)$  e esse valor de máximo é 5.

## 1.5 Ponto Crítico de uma função de Várias Variáveis

**Definição:** Seja  $z = f(x, y)$  definida num conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Um ponto  $(x_0, y_0) \in A$  é um ponto crítico de  $f$  se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  forem **nulas** ou se  $f$  não for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplo:** Determine os pontos críticos da função  $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$ :

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0$$

$$-2x = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

$$-2y = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Ponto Crítico =  $(0, 0)$

**Proposição (Condição Necessária):** Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $(x, y) \in A$  for um ponto extremante (máximo ou mínimo) local, então  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico de  $f$ .

**Proposição (Condição Suficiente):** Seja  $z = f(x, y)$  uma função cujas derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas num conjunto aberto que contém  $(x_0, y_0)$  e suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto crítico de  $f$ . Seja  $H(x, y)$  o determinante.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x, y) & \frac{\varphi^2 f}{\varphi y \varphi x}(x, y) \\ \frac{\varphi^2 f}{\varphi x \varphi y}(x, y) & \frac{\varphi^2 f}{\varphi y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Temos que

1. Se  $H(x_0, y_0) > 0$  e  $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2}(x_0, y_0) > 0$   
então  $(x_0, y_0)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .
2. Se  $H(x_0, y_0) > 0$  e  $\frac{\varphi^2 f}{\varphi x^2} < 0$   
então  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo local de  $f$ .
3. Se  $H(x_0, y_0) < 0$   
então  $(x_0, y_0)$  não é ponto extremo.
4. Se  $H(x_0, y_0) = 0$   
nada podemos afirmar.

**Exemplo:** Dada a função  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$   
Determine os pontos críticos de  $f$  e classifique-os:

**Pontos Críticos:**

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$4x^3 - 4y = 0 \rightarrow y = x^3$$

$$\rightarrow \frac{\varphi f}{\varphi y} = 4y^3 - 4x = 0$$

$$4y^3 - 4x = 0 \rightarrow 4(x^3)^3 - 4x = 0$$

$$x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x^8 = 1$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Quando } x = 1 \rightarrow y = (1)^3 = 1$$

$$\text{Quando } x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 = -1$$

$$\text{Quando } x = 0 \rightarrow y = 0^3 = 0$$

$$\text{Pontos Críticos: } (0, 0); (-1, -1); (1, 1)$$

## 2 Teorema de Weierstrass

Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  um domínio fechado e limitado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $z = f(x, y)$  uma função contínua em  $A$ . Então existem  $P_1, P_2 \in A$  tais que  $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \forall P \in A$

**Exemplo:** Seja dada a função  $f(x, y) = y^3 - x^2y + 4y$ . Determine o valor de máximo e o valor de mínimo de  $f$  sobre o conjunto  $A$  delimitado pelo triângulo de vértices  $M(-2, 0), N(0, 2), O(0, -2)$  FIGURA 1. **Observação:**

- Pelo Teorema de Weierstrass,  $f$  admite máximo e mínimo global sobre  $A$ .

- Para determinarmos os candidatos a extremos máximo e mínimo, vamos analisar separadamente o interior de A e a fronteira de A.
- Os candidatos a extremos que estão localizados no interior de A estão entre os pontos críticos da função. Isto é: onde  $\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = 0$  e  $\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 0$  ou onde essas derivadas parciais não existem.

Determinar os candidatos a extremos que estão no interior de A.

$$\frac{\varphi f}{\varphi x}(x, y) = -2xy$$

$$\frac{\varphi f}{\varphi y}(x, y) = 3y^2 - x^2 + 4$$

logo

$$\frac{\varphi f}{\varphi x} = 0 \text{ e } \frac{\varphi f}{\varphi y} = 0$$

$$-2xy = 0 \text{ e } 3y^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$-2xy = 0 \rightarrow xy = 0$$

logo  $x = 0$  ou  $y = 0$  se  $x = 0 \rightarrow 3y^2 - 0^2 + 4 = 0, \nexists y \in \mathbb{R}$

se  $y = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

Pontos críticos (candidatos a extremos):  $(-2, 0), (2, 0)$ .

Nenhum dos dois pontos está no interior de A. Logo não são candidatos a extremos.

Determinar os candidatos a extremos que estão na fronteira de A.

$$\overline{MN} = (-2, 0), (0, 2) \rightarrow y = ax + b$$

$$0 = a \cdot (-2) + b$$

$$-2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

e

$$2 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = 2$$

$$y = x + 2, -2 \leq x \leq 0$$

$$\overline{MO} = (-2, 0), (0, -2)$$

$$0 = a(-2) + b \rightarrow -2a - 2 = 0$$

e

$$-2 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = -2 \rightarrow a = -1$$

$$y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$$

Sobre o segmento  $\overline{MN} : y = x, -2 \leq x \leq 0$ :  
substituindo na função:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, x + 2) \\ &= (x + 2)^3 - x^2 \cdot (x + 2) + 4(x + 2) \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8 \\ &= 4x^2 + 16x + 16, -2 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

Para determinarmos os candidatos a extremos sobre  $\overline{MN}$  usamos os conceitos de Cálculo I.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x^2 + 16x + 16 \\ f_1'(x) &= 8x + 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$x = -2$  não é ponto interior do segmento  $\overline{MN}$ . Logo os pontos críticos sobre o segmento  $\overline{MN}$  não serão apenas seus extremos  $x = -2$  e  $x = 0$ . **Candidatos a extremos:**  $(-2, 0), (0, 2)$   
quando  $x = -2$  e  $y = 0$ .  
quando  $x = 0$  e  $y = 2$ .

$$\overline{ON} : x = 0, -2 \leq y \leq 2$$

$$\overline{MN} : y = x + 2$$

**Segmento  $\overline{ON}$ :**  $x = 0, -2 \leq y \leq 2$

Substituindo na função  $f$ .

$$f(0, y) = y^3 - 0^2 \cdot y + 4y = y^3 + 4y$$

$$f_2(y) = y^3 + 4y$$

$$f_2'(y) = 3y^2 + 4 = 0$$

$\nexists y$  pois são dois quadrados e não tem como ser menor que 0.

Logo, neste segmento, os candidatos a extremos serão:  $(0, -2), (0, 2)$  **Segmento**

$\overline{MO} : y = -x - 2, -2 \leq x \leq 0$

Substituindo na função  $f$ :

$$f(x, -x - 2) = (-x - 2)^3 - x^2(-x - 2) + 4(-x - 2)$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= 4x^2 - 16x - 16 = f_3(x)$$

$$f_3'(x) = -8x - 16 = 0 \rightarrow 8x + 16 = 0 \rightarrow x = -2$$

que está no extremo.

São candidatos a extremos sobre  $\overline{MO}$ :  $(-2, 0), (0, -2)$

Quadro de Análise FIGURA 2



**Exemplo:** A temperatura  $T$  em qualquer ponto  $(x, y)$  do plano é dada por  $T(x, y) = 3y^2 + x^2 - x$ . Qual é a temperatura máxima e mínima sobre o disco fechado de raio 2 centrado na origem do sistema ortogonal cartesiano  $p = (0, 0)$ ?  
 Região  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$  FIGURA 3

**Interior de A:**

Pontos Críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y = 0 \rightarrow y = 0$$

$(\frac{1}{2}, 0)$  está no interior de A.

**Fronteira de A:**

Pontos Críticos

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2$$

Substituindo na função  $f$ :

$$\begin{aligned} T(x, y) &= 3(4 - x^2) + x^2 - x \\ &= 12 - 3x^2 + x^2 - x = -2x^2 - x + 12 \end{aligned}$$

$$T_1(x) = -2x^2 - x + 12$$

$$T'_1(x) = -4x - 1 = 0 \rightarrow -4x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Se } x = -\frac{1}{4} \rightarrow y^2 = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{63}}{4}$$

Sobre a fronteira de A, candidatos a extremos:

1.  $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4})$
2.  $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{63}}{4})$
3.  $(-2, 0)$
4.  $(2, 0)$

extremos do intervalo  $-2 \leq x \leq 2, x = 2 \rightarrow y^2 = 0, x = -2 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$

Quadro de Análise FIGURA 4

### 3 Máximos e Mínimos Condicionados

Considere os problemas:

- $\min f(x, y) = x^2 + y^2$  problema de otimização irrestrito/livre
- $\min f(x, y) = x^2 + y^2$   
sujeito a  $x + y = 1$  problema de otimização restrita/condicional

FIGURA 5]

Problemas envolvendo Funções de duas variáveis e uma restrição:

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max f(x, y) \\ \text{sujeito a } g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

**Proposição:** Seja  $f(x, y)$  uma função diferenciável sobre um domínio  $U$ . Seja  $g(x, y)$  uma função com derivadas parciais contínuas em  $U$ . Tal que o gradiente de  $g(x, y)$  não pode ser vetor nulo ( $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ ). Gradiente é o vetor formado pelas derivadas parciais.

$\forall (x, y) \in V$ , onde  $V = \{(x, y) \in U, g(x, y) = 0\}$

Uma condição necessária para que  $(x_0, y_0) \in U$  seja extremo local de  $f$  em  $V$  é que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$

**OBS:** Podemos dizer que os pontos de máximo ou de mínimo condicionados de  $f$  devem satisfazer as seguintes condições:

$$g(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

e (\*)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

para algum  $\lambda$  real.

**OBS:** O  $\lambda \in \mathbb{R}$  que torna (\*) compatível é denominado de multiplicador de Lagrange. O método de Lagrange consiste em definir uma função de 3 variáveis.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Nesse caso a equação (\*) é equivalente à equação gradiente  $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$

Equação gradiente:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \left( \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, g(x, y) \right) = (0, 0, 0)$$

Com isso os candidatos a extremos de  $f$  sujeitos à restrição  $g(x, y) = 0$  são exatamente os pontos críticos de  $L$ .

**Exemplo:** Uma casa retangular deve ser construída em um terreno triangular de forma que a casa tenha área máxima. Se o terreno tiver o formato *FIGURA 6*, quais deverão ser as dimensões da casa?

Dimensões do terreno: Triângulo reto de base 30 e altura 10.

**Solução:** Vamos colocar a situação problema num sistema ortogonal cartesiano.

*FIGURA 7.*// **Problema modelado:**

$$\max A(x, y) = x \cdot y$$

$$\text{sujeito a } 3y + x - 30 = 0$$

→ Equação de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(3y + x - 30)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (y - \lambda, x - 3\lambda, -(3y + x - 30)) = 0$$

$$\nabla L = 0 \rightarrow$$

- $y - \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda$
- $x - 3\lambda = 0 \rightarrow x = 3\lambda$
- $3y + 3x - 30 = 0 \rightarrow 3\lambda + 3\lambda - 30 = 0$

logo

$$6\lambda = 30 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow x = 15 \text{ e } y = 5$$

Logo a solução do problema será:

$$A(15, 5) = 15 \cdot 5 = 75m^2$$

**Analogamente**, podemos ter problemas da forma:

$$\max/\min f(x, y, z)$$

$$\text{sujeito a } g(x, y, z) = 0$$

Neste caso a equação de Lagrange será:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$