

# Revisão Prova 1 de Cálculo I

## Divane Marcon

Erickson Giesel Müller

May 21, 2024

## 1 Introdução

Para o desenvolvimento deste resumo, foi utilizado o livro da Diva Marília Flemming *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. Além das aulas e listas fornecidas pela professora Divane.

## 2 Funções

### 2.1 Noção Intuitiva

Em um gráfico de uma função, o limite é a tendência à qual a imagem está se aproximando conforme o  $x$  se aproxima, dos dois lados, pelo número determinado no limite.

Às vezes a curva passa pelo ponto em que o  $x$  está se aproximando, e esse limite é exato. Outras, como no caso quando o limite é infinito ou a função se aproxima ao eixo das abscissas, a função nunca intercepta realmente aquela imagem, mas tende a ele.

### 2.2 Exemplos

Para calcular a função abaixo, quando tende a 2 quando  $x = +\infty$

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

### 2.3 Unicidade do Limite

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$  então  $L_1 = L_2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

## 2.4 Teorema do Confronto

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \nexists & b) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 & d) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \end{array}$$

Por mais que  $\frac{1}{0}$  seja um absurdo, ao multiplicar por um outro limite que resulte em zero, todo o conjunto resultará zero.

No teorema de sanduíche, é escolhido uma função maior igual e outra menor igual no ponto em que o limite da função  $f(x)$  será calculado.

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq h(x)$$

Como o seno varia de 1 até menos 1, temos que:

$$-1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x$$

logo:

$$-1.0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1.0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

## 2.5 Limites Laterais

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $(a, c)$ . Dizemos que um número  $L$  é o limite **à direita** da função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Esse limite é real se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a < x < a + \delta^*$ .

Essa função é semelhante ao teorema do sanduíche.

\* O  $x$  se encontra entre o valor ao qual se aproxima e esse valor  $+ \delta$ .

Ou seja, no gráfico, para um limite que se aproxima pela direita, precisa necessariamente existir uma imagem para todo domínio dentro do  $\delta$  à direita.

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $(d, a)$ . Dizemos que um número  $L$  é o limite **à esquerda** da função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Esse limite é real se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a - \delta < x < a$ .

**TEOREMA:** se  $f$  é definida em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto no ponto  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ .

Ou seja, só existe limite nos dois lados se existe o mesmo limite no lado direito e no lado esquerdo.

## 2.6 Indeterminações

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

1. Sejam  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x^2$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

2. Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 2x^2$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

3. Seja:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Essa função causa uma indeterminação  $\frac{0}{0}$ , podemos separar essa divisão em duas funções, sendo  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = x$ . À medida que os valores de  $x$  pertencem a uma pequena vizinhança de 0, a função  $f(x)$  se aproxima de 0, assim como a função  $g(x)$  também se aproxima de 0, ficando cada vez mais próximos entre si (Diferença entre  $f(x)$  e  $g(x)$  cada vez menor à medida que  $x$  se aproxima de 0). Podemos, portanto, assumir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4. Agora um exemplo de cálculo de limites onde os artifícios algébricos são necessários. São os casos de funções racionais em que o limite do denominador é zero num determinado ponto e o limite do numerador também é zero neste mesmo ponto.

Seja:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Neste caso, fatora-se o numerador e o denominador VER PREPOSIÇÕES  
3.5.2