Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Campus Chapecó
Disciplina: Cálculo I - 2024/1 Curso de Ciência da Computação
Profª: Divane Marcon
Nome: GABARITO

1ª Avaliação - 07/05/2024

Obs:1)A avaliação é individual e sem consulta.
2)Questões sem desenvolvimento de raciocínio não serão consideradas.
3)O desenvolvimento da avaliação deve ser legível e organizado.
4)Não é permitido o uso de calculadora que faça gráfico e calcule derivadas;
5)Não é permitida a ida ao banheiro durante a realização da avaliação.
6)Questões iguais em duas ou mais avaliações serão desconsideradas destas avaliações.
7)Faça uma bolinha de caneta azul ou preta ao lado de seu nome nesta folha.
8)Telefones celulares devem permanecer desligados durante a avaliação. Caso o celular seja manuseado durante a prova será atribuída a nota zero ao aluno.

1. Resolva:
   (a) (0,5 ponto) $25^x - 125 = -20.5^x$.
   (b) (0,25 ponto) $S = \log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3)$.
2. (0,5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determine o domínio de f.
3. (0,5 cada item) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$. Diga se cada afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta. Justificativa errada considera-se errado todo o item.
   (a) A função f não é sobrejetiva.
   (b) A função f é injetiva.
   (c) A função f possui inversa.
   (d) $f(x) \leq 1$ se, e somente se, $0 \leq x \leq 2$.
4. (0,5 cada item) Construa o gráfico das seguintes funções:
   (a) $y = -2x + 3$;
   (b) $y = -(x + 1)^2$;
5. (0,25 cada item) Dadas as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $h(x) = x + 2$, obtenha:

   a) $(h \circ f)(2)$ b) $(f \circ g)(2)$ c) $((h \circ f) \circ g)(2)$
6. (0,8 cada item) Calcule os seguintes limites:
   (a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 5x - 36}{x^2 - 16}$
   (b) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{8 - h} - 2}{h}$
   (c) $\lim_{x \to 7} \frac{5 - \sqrt{4 + 3x}}{7 - x}$
   (d) $\lim_{x \to 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$
   (e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
7. (1,0) Faça o esboço do gráfico e analise a continuidade da função: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, x \neq 0 \\ -1, x = 0 \end{cases}$

Boa Avaliação!!!

Cálculo I - CC - 2024/1 - (1)

1ª Avaliação : gabarito

1)
a) $25^x - 125 = -20.5^x$

$5^{2x} - 5^3 + 20.5^x = 0$

$5^x = y$

$\Rightarrow y^2 + 20y - 125 = 0$

$y = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 + 4.125}}{2}$

$y = \dfrac{-20 \pm \sqrt{900}}{2}$

$y_1 = \dfrac{-20 + 30}{2} = 5$

$y_2 = \dfrac{-20 - 30}{2} = -\dfrac{50}{2} = -25$ (descarte pois $5^x > 0$)

Assim, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$S = \{1\}$

b) $S = \log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3)$

$\log_3 9 = x \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

$\log_{81} 3 = y \Rightarrow 81^y = 3 \Rightarrow 3^{4y} = 3 \Rightarrow 4y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

Assim,

$S = \log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4}$

$\log_4 2 = x \Rightarrow 2 = 4^x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

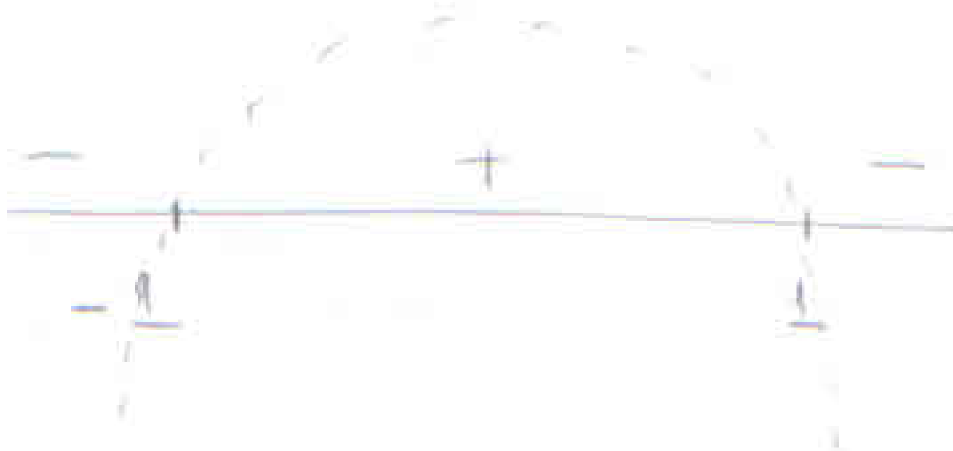
$\log_2 \frac{1}{4} = y \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^y \Rightarrow y = -2$

Portanto, $S = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Dom(f) = ?

$1 - x^2 \geq 0$



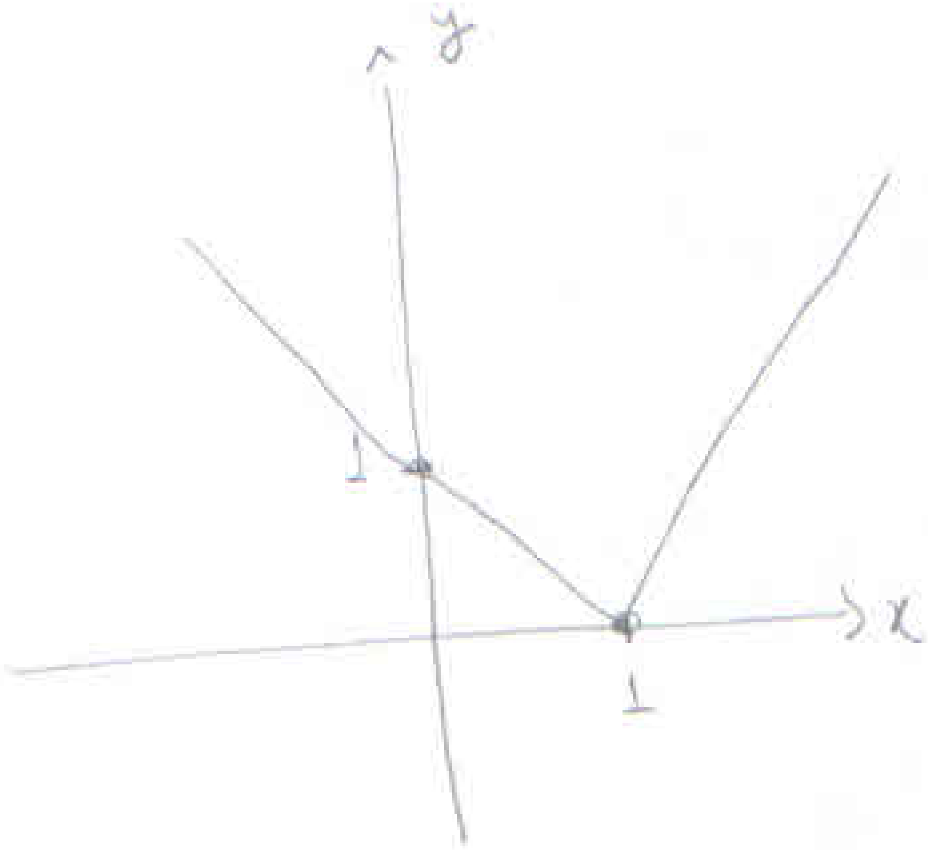
raízes de $1 - x^2$: -1 e 1

$1 - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

Portanto, Dom$(f) = [-1, 1]$

3) $f(x) = |x - 1|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



a) Verdadeira

f não é sobrejetiva pois $|x-1| \geq 0$

b) Falsa pois

$f(0) = 1$

e $f(2) = 1$

$f(0) = f(2)$ mas $0 \neq 2$.

c) Falsa pois f não é injetiva

(também pode usar que

f não é sobrejetora

d) $f(x) \leq 1$ Verdadeira

$|x - 1| \leq 1$

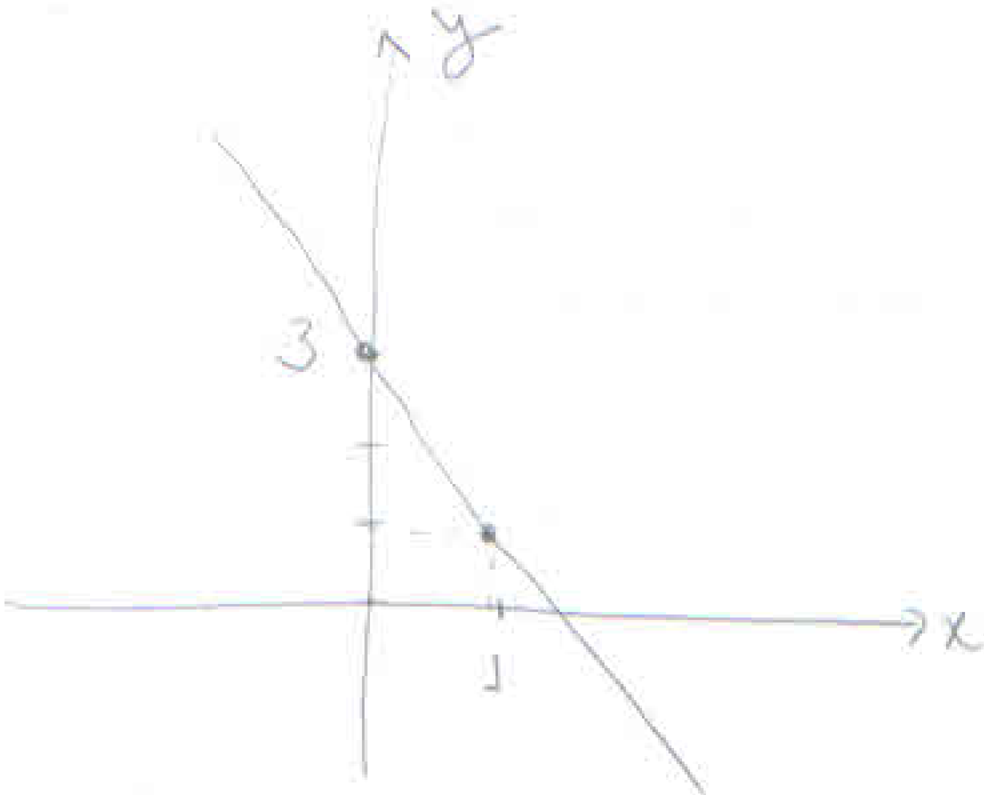
$\Leftrightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

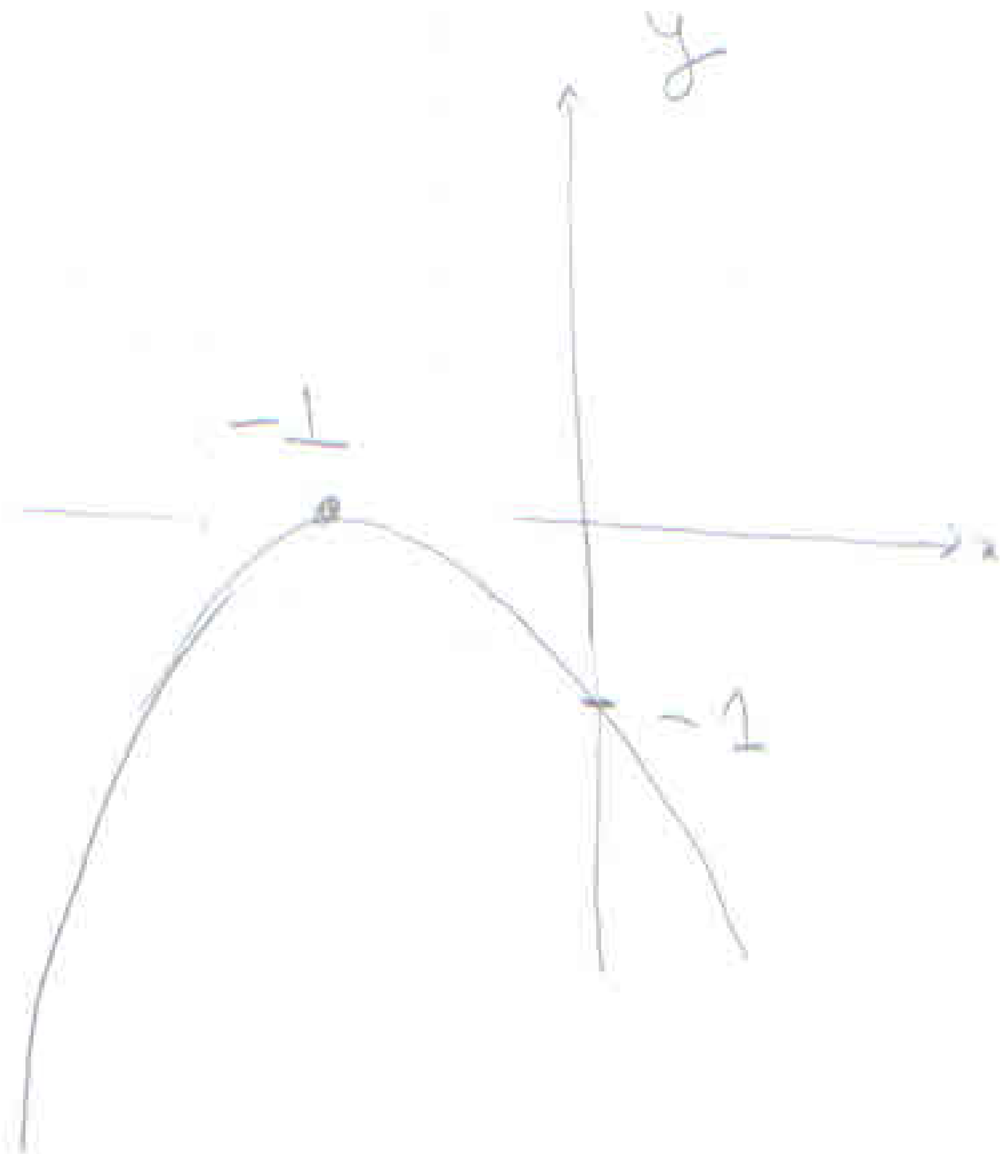
(3)

4)

a)



b)



5)

a) $(h \circ f)(2)$

$(h \circ f)(2) = h(f(2)) = h(3.2) = h(6) = 6+2 = 8$

b) $(f \circ g)(2)$

$f(g(2)) = f(2^2 - 2.2 + 1) = f(1) = 3.1 = 3$

c) $((h \circ f) \circ g)(2)$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 3x+2$

$(h \circ f) \circ g(x) = 3.(x^2 - 2x + 1) + 2 = 3x^2 - 6x + 3 + 2$

$(h \circ f) \circ g(2) = 3.2^2 - 6.2 + 5 = 5$

(4)

6)

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+5x-36}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+9)}{(x+4)\cancel{(x-4)}} = \lim_{x\to 4} \frac{x+9}{x+4} = \frac{4+9}{4+4} = \frac{13}{8}$

b) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-h}-2}{h}$

$8-h = t^3$, qd $h \to 0$, $t^3 \to 8 \Rightarrow t \to 2$

$-h = t^3 - 8$

$h = 8 - t^3$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-h}-2}{h} = \lim_{t\to 2} \frac{\sqrt[3]{t^3}-2}{8-t^3} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{8-t^3}$

$= \lim_{t\to 2} \frac{\cancel{(t-2)}}{\cancel{(t-2)}(-t^2-2t-4)} = \lim_{t\to 2} \frac{1}{-(t^2+2t+4)} = -\frac{1}{12}$

c) $\lim_{x\to 7} \frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x} = \lim_{x\to 7} \frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{4+3x}}{5+\sqrt{4+3x}}\right)$

$= \lim_{x\to 7} \frac{25-(4+3x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})} = \lim_{x\to 7} \frac{21-3x}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}$

$= \lim_{x\to 7} \frac{3\cancel{(7-x)}}{\cancel{(7-x)}(5+\sqrt{4+3x})}$

$= \lim_{x\to 7} \frac{3}{5+\sqrt{4+3x}} = \frac{3}{5+\sqrt{4+21}} = \frac{3}{5+5} = \frac{3}{10}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x-2 \geq 0,\ x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0,\ x < 2 \end{cases}$$

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ -\frac{x-2}{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 2 \\ -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1$$

Como os limites laterais são diferentes então

$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ não existe.

e) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-x}}{\frac{x}{-x} + \frac{1}{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{-1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \cancel{1/x^2}}^{\to 1}}{-1 - \cancel{\frac{1}{x}}_{\to -1}} = 1$$

7) ⑥

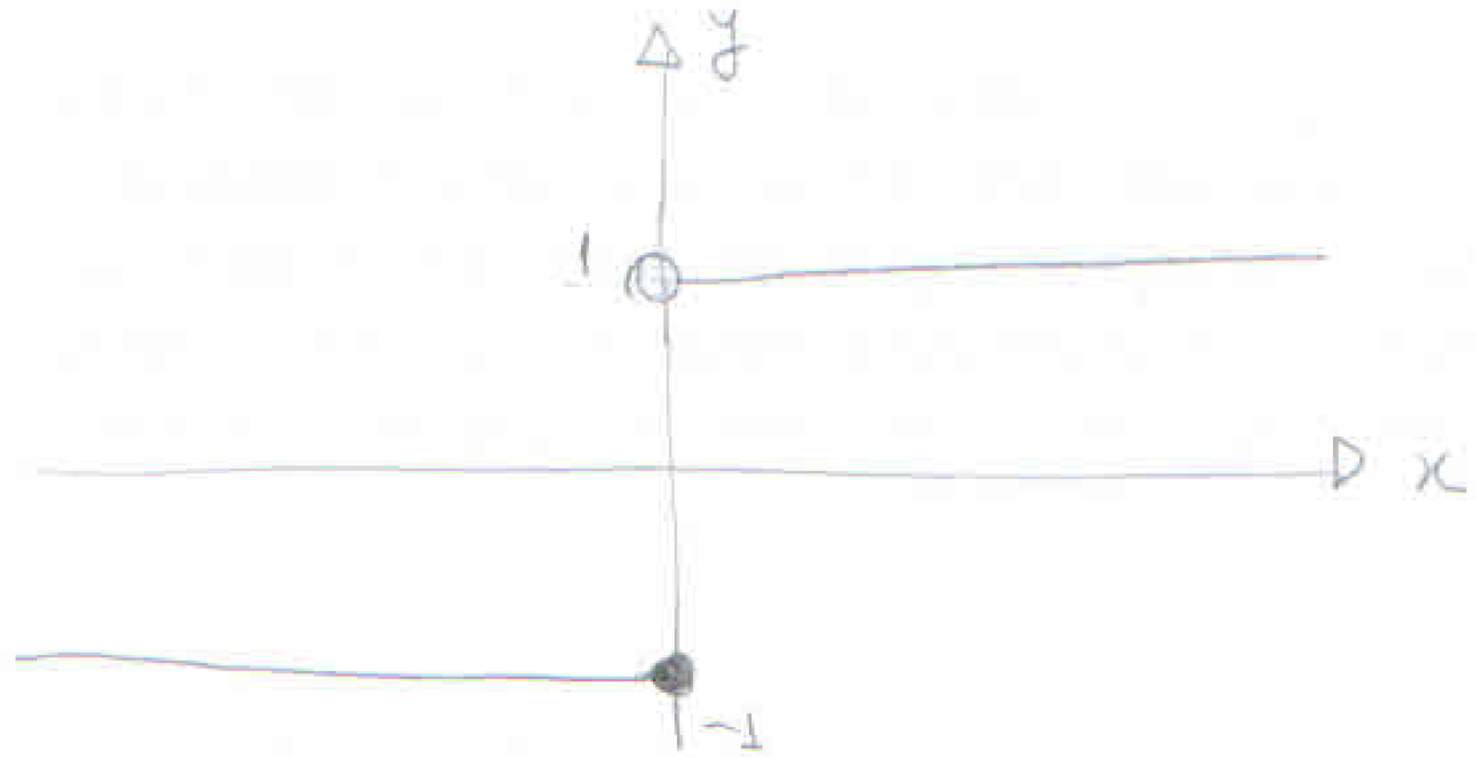
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x}{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Para $a > 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 1 = 1 = f(a)$$

Para $a < 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} -1 = -1 = f(a)$$

$\Rightarrow$ Para todo $x \neq 0$, a função é contínua

Para $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

limites laterais diferentes $\Rightarrow$ não existe $\lim_{x \to 0} f(x) \Rightarrow f$ não é contínua em 0.