Cálculo II
Lista 2 - Funções de Várias Variáveis

Erickson G. Müller

Lista 1.4 (pg. 26)

- 2
  $D_A = 1300 - 50x + 20y$
  $D_B = 1700 + 12x - 20y$
  $R_x = x.D_A$
  $R_y = y.D_B$
  $R_T = x.D_A + y.D_B$
  $$R_T = 1300x - 50x^2 + 20xy + 1700y + 12xy - 20y^2$$
  $$R_T = 32xy - 50x^2 - 20y^2 + 1300x + 1700y$$
- 3.a
  $z = 3 - x - y$
  $$D(z) = \mathbb{R}^2$$
  $$Im(z) = \mathbb{R}$$
- 3.b
  $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$
  $$D(f(x,y)) = \mathbb{R}^2$$
  $$Im(f(x,y)) = [1, \infty)$$
- 3.c
  $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$
  $x^2 + y^2 \leq 3^2$
  $x^2 + y^2 - 9 \leq 0$
  $$D(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$$
  $\sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \rightarrow \sqrt{9 - 9} = 0$
  $x^2 + y^2 \geq 0 \rightarrow \sqrt{9 - 0} = 3$
  $$Im(z) = [0, 3]$$

- 3.d
  $w = e^{x^2+y^2+z^2}$
  $$D(w) = \mathbb{R}^3$$
  $$Im(w) = [1, \infty)$$
- 3.j
  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
  $$D(f(x, y)) = \mathbb{R}^2$$
  $$Im(f(x, y)) = (-\infty, 4]$$
- 4.b
  $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$
  $$D(w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$
  $$Im(w) = (0, \infty)$$
- 4.c
  $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$
  $x^2 - y^2 > 0$
  $$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| > |y|\}$$
  $$Im(z) = (0, \infty)$$
- 4.e
  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
  $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$
  $$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^1 \geq 1\}$$
  $$Im(z) = [0, \infty)$$
- 4.i
  $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 + z}}$
  $1 + z \neq 0$ & $\dfrac{1 + x}{1 + z} \geq 0$
  $z \neq -1$
  $x \geq -1$ se $z > -1$
  $x \leq -1$ se $z < -1$
  $$\begin{aligned} D(y) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -1 sez > -1 \\ x \leq -1 sez < -1\} \end{aligned}$$

- 4.j
  $w = \dfrac{1}{9 - x^2 - y^2 - z^2}$
  $9 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 0$
  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$
  $$D(w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \neq 9\}$$

- 4.n
  $z = \ln(x + y - 3)$
  $$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 3\}$$

- 4.p
  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - z^2}$
  $1 - x^2 \geq 0$ logo $|x|^2 \leq 1$
  $1 - y^2 \geq 0$ logo $|y|^2 \leq 1$
  $1 - z^2 \geq 0$ logo $|z|^2 \leq 1$
  $$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x, y, z \leq 1\}$$

- 5.b
  $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$
  1. $z_1 = +\sqrt{x^2 + y^2 - 6y}$
  2. $z_2 = -\sqrt{x^2 + y^2 - 6y}$

  $x^2 + y^2 - 6y \geq 0$
  $D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 6y\}$

Lista 3.7 (pg. 99)

- 1.a
  $x^2 + y^2 - 2y < 3$
  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
  $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 3$
  Bola aberta em centro $(0, 1)$ e raio 2.

- 1.b
  $x^2 + y^2 + z^2 + 6z < 0$
  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6z$
  $x_0 = 0$
  $y_0 = 0$
  $z_0 = -3$
  $r = 3$
  $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 3^2$
  Bola aberta em centro $(0, 0, -3)$ e raio 3.

- 1.e
$x^2 + y^2 - 1 > 0$
$x^2 + y^2 > 1$ não é uma bola.

- 1.f
$x^2 + 4x + y^2 < 5$
$(x+2)^2 + (y-0)^2 = r^2$
$(x+2)^2 + y^2 = x^2 + 4x + y^2 + 4 = r^2$
$r^2 - 4 < 5$
$r^2 < 9$
$r < 3$ Bola aberta centrada em $(-2, 0)$ e raio 3.

- 2
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x < 3 \text{ e } -1 < y < 1\}$
Fronteira: $(2, -1) \rightarrow (3, -1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, -1)$

- 3
$B = \{(x, y, z) \int \mathbb{R}^3 / -1 < x < 1, -1 < y < 1 \text{ e } -1 < z < 1\}$
Fronteira: Cubo formado pelos vértices $(-1, -1, -1)$ até $(1, 1, 1)$

- 4 Identificar as afirmações verdadeiras:
  1. A união de bolas abertas é uma bola aberta. F
  2. A união de bolas abertas é um conjunto aberto. V
  3. A união de bolas abertas é um conjunto conexo. F
  4. O conjunto $A = \{(x, y) / x^2 + 2x + y^2 - 4y > 0\}$ é conexo. V (Apenas conexo)
  5. O conjunto $B = \{(x, y) / x^2 > y^2\}$ é aberto. V

- 6.a
Fronteira de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$
$$Fr = x^2 + y^2 - 4$$

- 6.d
Fronteira de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > \frac{1}{x}\}$
$\frac{1}{x} - y < 0$
$$Fr = \frac{1}{x} - y = 0$$

- 10 Identificar as afirmações verdadeiras:
  1. $P(0, 0)$ é ponto de acumulação do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$.
  2. Os pontos $P(0, 4)$ e $Q(2, 2)$ pertencem à fronteira do conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 4 - x^2\}$.

3. $P(0,0)$ é ponto de acumulação da bola aberta $B((0,0),r)$, qualquer que seja $r > 0$.
4. O conjunto vazio é um conjunto aberto.
5. Toda bola aberta é um conjunto aberto.
6. $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto.
7. Todo ponto de acumulação de um conjunto A pertence a esse conjunto.
8. O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x$ e y são racionais$\}$ não tem ponto de acumulação.
9. Todos os pontos de um conjunto aberto são pontos de acumulação de A.
10. Se A é um conjunto aberto, nenhum ponto da fronteira de A pertence a A.