

Revisão P1 Geometria Analítica
Prof. Edson

Erickson G. Müller

April 22, 2025

Conteúdos

- Vetores
- Produto Escalar e Produto Vetorial
- Equação de Retas (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3)
 - Retas Paralelas
 - Retas Concorrentes
 - Retas Reversas
- Estudo Relativo de Posições Entre Retas
- Equações de Planos
 - Planos Paralelos
 - Planos Concorrentes
- Posições Relativas Entre Planos
- Distâncias
 - entre Pontos
 - entre Retas
 - entre Planos
- Cônicas
 - Elipse
 - Hipérbole
 - Parábola

1 Retas

Sejam A e B dois pontos quaisquer. Vamos escolher A como origem do segmento e B como a extremidade do segmento.

Representação Geométrica: $A \longrightarrow B$

Notação: AB

BA é o **segmento orientado** com origem em B e extremidade em A .

Representação Geométrica: $A \longleftarrow B$

- **Igualdade:** Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD são iguais se $A = C$ e $B = D$.

- **Segmento Orientado Nulo:** Dizemos que o segmento orientado AB é nulo se $A = B$.
- **Segmento Orientado Oposto:** Dado um segmento orientado AB , o segmento orientado oposto será dado por $-(AB) = BA$.

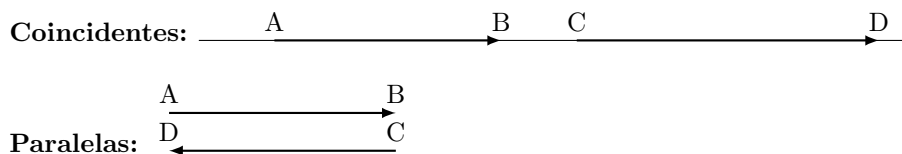
1.1 Comprimento de um Segmento Orientado

O comprimento de um segmento orientado é a medida do segmento geométrico em relação a uma unidade de medida fixada. O comprimento do segmento orientado \xrightarrow{u} nunca é nulo.

$$A \xrightarrow{\quad\quad\quad} B \quad |AB| = 3u$$

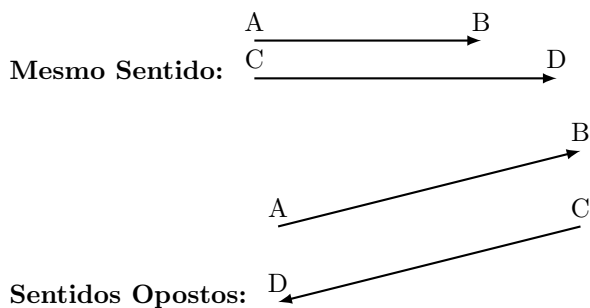
1.2 Direção Entre Dois Segmentos Orientados

Sejam dois segmentos orientados AB e CD . Dizemos que AB tem a mesma direção de CD se ambas as retas são **coincidentes** ou **paralelas**.



1.3 Sentido Entre Dois Segmentos Orientados

Dois segmentos orientados AB e CD **de mesma direção** podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos conforme abaixo:



1.4 Equipolência

Dois segmentos orientados são **equipolentes** se tiverem o mesmo **comprimento**, **direção** e **sentido**.

Notação de equipolência: $AB \sim CD$

Propriedades de Segmentos Equipolentes:

- **Reflexiva:** $AB \sim BA$.
- **Simétrica:** se $AB \sim CD$ então $BA \sim DC$.
- **Transitiva:** se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$ então $AB \sim EF$.

Dados um segmento orientado AB e um ponto C , existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

2 Vetores

Sendo AB um segmento orientado fixo, o vetor AB é o conjunto de todos os segmentos orientados CD tais que $CD \sim AB$.

$$\vec{v} = AB = CD, CD \sim AB$$

em que AB é fixo.

Dado um vetor \vec{v} e um ponto A , por meio de seus representantes existe um único ponto B tal que $A + \vec{v} = B$.

Notação $\vec{v} = B - A$

2.1 Igualdade de Vetores

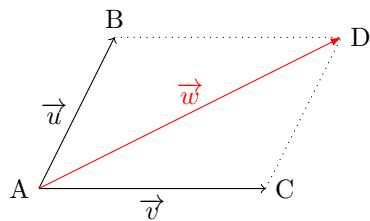
Dizemos que dois vetores AB e CD são iguais quando AB e CD são equipolentes.

Propriedades de Vetores:

- $A + \vec{v} = B$
- $A - \vec{v} = A + (-\vec{v})$
- $A + \vec{v} = B + \vec{v} \rightarrow A = B$
- $A + \vec{v} = A + \vec{w} \rightarrow \vec{v} = \vec{w}$
- $A + (B - A) = B$
- $B - A = -(A - B)$

2.2 Operações com Vetores: Adição

Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , pelos seus representantes, conforme a figura abaixo:

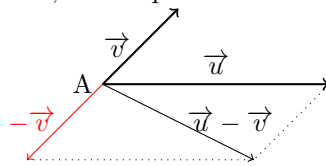


$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \text{ sendo } BD \sim AC \text{ e } AB \sim CD$$

Propriedades da Soma de Vetores:

- **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- **Associativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- **Elemento Neutro:** $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
- **Elemento Oposto:** Dado \vec{u} , existe um único \vec{v} tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{o}$, nesse caso $\vec{v} = -\vec{u}$

Dados \vec{u} e \vec{v} , temos que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



2.3 Operações com Vetores: Multiplicação de um Vetor por um Número Real

3 Identidade de Lagrange

$$|u.v|^2 + (u.v)^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$$

Com isso, temos:

$$|u.v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - (u.v)^2$$

Por outro lado,

$$u.v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\theta)$$

Substituindo a acima pela equação acima dela:

$$|u.v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - (|u| \cdot |v| \cdot \cos(\theta))^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

$$\rightarrow |u.v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot (1 - \cos^2(\theta))^2$$

$$= |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2(\theta)$$

Logo $|u.v|^2 = (|u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta))^2$, se $0 \leq \theta \leq \pi$

$$|u.v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta)$$

3.1 Interpretação Geométrica

Pensando num paralelograma formado pelos vetores v e u e o ângulo θ : Área de um paralelograma é *Base* x *Altura*. Usando propriedades geométricas:

$$h = |v| \cdot \sin(\theta)$$

Portanto, $A = b.h \rightarrow |u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta) \rightarrow |u.v|$

$$A = |u.v|$$

Exemplos:

1. Encontre a área do paralelogramo gerado pelos pontos:

- $A = (0, 0, 0)$
- $B = (2, 0, 0)$
- $C = (1, 1, 0)$
- $D = (3, 1, 0)$

$$A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2.k$$

$$= (0, 0, 2)$$

$$|u.v| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}$$

$$A = 2$$

2. Encontre a área do triângulo de vértice:

- $A = (1, 1, 0)$
- $B = (3, 3, 0)$
- $C = (2, 4, 0)$

Área de um triângulo é a metade da área de um paralelograma

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 0) - (1, 1, 0) = (2, 2, 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 4, 0) - (1, 1, 0) = (1, 3, 0)$$

$$A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$u.v = 4k = (0, 0, 4)$$

$$|u.v| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4$$

$$A = \frac{|u.v|}{2} = 2$$

3. Determine um vetor \vec{x} tal que $|x| = \sqrt{6}$ e $x.(i + k) = 2.(i + j - k)$
Seja $x = (a, b, c)$, então:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

$$x.(i + k) = (a, b, c).((1, 0, 0) + (0, 0, 1)) = (a, b, c).(1, 0, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= b.i + c.j - bk - aj = bi + (c - a)j - bk$$

$$= 2(i + j - k)$$

$$= 2i + 2j - 2k$$

Logo $b = 2$ e $c - a = 2$ ou $c = a + 2$

Considerando $a^2 + b^2 + c^2 = 6$:

$$a^2 + 2^2 + (a + 2)^2 = 6$$

$$a^2 + 4 + a^2 + 4.a + 4 = 6$$

$$2.a^2 + 4.a + 8 = 6$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a + 1)^2 = 0$$

$$(a + 1) = 0$$

Deste modo, $a = -1, b = 2, c = 1$

4. Determine um vetor \vec{u} tal que $|\vec{u}| = 9$ e \vec{u} é ortogonal a $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Deste modo:

$$|u| = 9$$

$$u \perp v$$

$$u \perp w$$

Para ser ortogonal a dois vetores, u é um múltiplo de $v.w$.

$$v.w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$v.w = 2j + k - 4k - i = -i + 2j - 3k = (-1, 2, -3)$$

$$|v.w| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$|v.w| = \sqrt{14}$$

Versor de $v.w$ é dado como:

$$\frac{1}{|v.w|} \cdot (v.w) = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-1, 2, -3) = \vec{u}$$

$$u = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right)$$

Note que \vec{u} tem a mesma direção e sentido de $\vec{v} \cdot \vec{w}$ com $|\vec{u}| = 1$

$$\vec{x} = 9 \cdot \vec{u} = 9 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\vec{x} = \left(\frac{-9}{\sqrt{14}}, \frac{18}{\sqrt{14}}, \frac{-27}{\sqrt{14}} \right)$$

$$|\vec{x}| = |9 \cdot \vec{u}| = 9 \cdot 1 = 9$$

4 Produto Misto

O produto misto serve para achar o volume de um paralelepípedo formado por 3 vetores.

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores. O produto misto de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} é definido por:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

4.1 Interpretação Geométrica

Pensando num paralelepípedo formado pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . A área desse paralelepípedo é *Área da Base* x *Altura*. A base do paralelepípedo é o paralelogramo gerado pelos vetores u e v .

Logo, *Área da base* = $|u.v|$

Por outro lado, temos :

$$\cos(\Phi) = \frac{h}{|w|}$$

Φ é o ângulo entre $|w|$ e h . Então $h = |w| \cos(\Phi)$, se $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$

Daí, o volume $V = A.h = |u.v|.|w|. \cos(\Phi)$

$$V = |(u.v).w|$$

$$V = |[u, v, w]|$$

Sabemos que $[u, v, w] = (u.v).w$. Sejam:

- $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$
- $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$
- $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = i.(y_1.z_2 - y_2.z_1) + j.(x_2.z_1 - x_1.z_2) + k.(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ &= i.\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + j.\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Logo, $[u, v, w] = (u.v).w$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, repare que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - y_2.z_1).x_3 + (x_2.z_1 - x_1.z_2).y_3 + (x_1.y_2 - x_2.y_1).z_3$$

$$\text{Logo, } [u, v, w] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ em que:}$$

- $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$
- $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$
- $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

4.2 Propriedades do Produto Misto

Tudo isso é comprovável manuseando os produto mistos usando o formato de determinantes.

1. Se u, v e w são linearmente dependentes, ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $w = \alpha.u + \beta.v$. Então $[u, v, w] = 0$.
2. $[u + u', v, w] = [u, v, w] + [u', v, w]$
3. $[\alpha.u, v, w] = [u, \alpha.v, w] = [u, v, \alpha.w]$
4. $[u, v, w] = -[u, w, v] = [v, w, u] = -[v, u, w] = [w, u, v]$

Explicando a primeira que é mais importante:

$$[u, v, w] = [u, v, \alpha u + \beta v] = [u, v, \alpha u] + [u, v, \beta v]$$

$$\begin{aligned} & \alpha.[u, v, u] + \beta.[u, v, v] \\ & \alpha \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ & = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \end{aligned}$$