Aula que esqueci a caneta

November 5, 2025

1 Aplicações

Definição: Dados dois conjuntos U e V, ambos não vazios, uma aplicação de U em V é uma lei pela qual cada elemento de U se corresponde com um único elemento de V.

Se F indica essa lei, e U é um elemento de U, então tem-se:
$F : U \to V$
$u \to F(u)$

O conjunto U é chamado Domínio e V é o Contradomínio.

$($Imagem de um conjunto U e um conjunto F, com uma seta F que vai de u para F(u))

Dado $W \subset U$, chama-se Imagem de W por F o subconjunto de V, dado por $F(W) = \{F(u)/u \in W\}$.

Se $W = U$, então $F(U)$ recebe o nome de imagem de F e denota-se por $Im(F)$.

2 Transformações Lineares

Sejam U, V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $F : U \to V$ é uma transformação linear de U em V se, e somente se:

- $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$
- $F(\alpha u) = \alpha.F(u), \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$

Quando $U = V$, ou seja, quando $F : U \to U$, então a transformação linear é chamada **Operador Linear**.

Assim, transformações lineares são aplicações em espaços vetoriais, em vez de em conjuntos. Valem as 8 propriedades para soma e multiplicação por escalar.

2.1 Exemplo

Verifique se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y, z) = (x, 2x - z), \forall \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Para isso, precisamos provar as duas propriedades da transformação linear:

$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$$
$$u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$
$$F(u_1 + u_2) = F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$F(u_1 + u_2) = (x_1 + x_2, 2.(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2))$$
$$F(u_1 + u_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - z_1 - z_2) = (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2)$$
$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$

Agora para a segunda propriedade:

$$F(\alpha u) = \alpha F(u)$$

$$F(\alpha u) = F(\alpha(x, y, z) = F(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$F(\alpha u) = \alpha(x, 2x - z) = \alpha F(x, y, z) = \alpha.F(u)$$

Logo, F é transformação linear.

2.2 Propriedades

Sejam U, V espaços vetoriais reais e seja $F : U \to V$ uma transformação linear. Então valem as proprieades:

- $F(\vec{o}) = \vec{o}$, ou seja, F transforma o vetor nulo $\vec{o}$ de U no vetor nulo de V.
- $F(-u) = -F(u), \forall u \in U$
- $F(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$
- Se W é um subespaço de U, então a imagem de W por F é um subespaço de V.

2.3 Exemplo

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e que:

1. $F(1, 2) = (3, -1)$
2. $F(0, 1) = (1, 2)$

Encontre $F(x, y)$ sendo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Atenção, quando o domínio e o contradomínio são idênticos, é um operador linear, se são diferentes, é uma tranformação linear

Note que os vetores $(1, 2)$ e $(0, 1)$ são linearmente independentes, portanto formam uma Base. Portanto, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são combinações lineares dessa Base.

Logo,

$$(x, y) = a(1, 2) + b(0, 1)$$

$x = 1.a + 0, b$
$y = 2.a + 1.b$
Temos,

$$x = a$$

$$y = 2.x + b$$

$$y - 2x = b$$

Concluímos que:

$$(x, y) = x.(1, 2) + (y - 2x).(0, 1)$$

Lei de formação:

$$F(x, y) = x.F(1, 2) + (y - 2x).F(0, 1)$$

$F(x, y) = x.(3, -1) + (y - 2x).(1, 2)$
$F(x, y) = (3x + y - 2x, -x + 2y - 4x) = (x + y, -5x + 2y)$
Portanto, a lei de formação é:
$F(x, y) = (x + y, -5x + 2y)$

3 Núcleo e imagem

Sejam U, V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Indica-se por $\ker(F)$ e denomina-se núcleo de F o seguinte subconjunto de U:

$$\ker(F) = \{u \in U | F(u) = \overrightarrow{o}\}, \overrightarrow{o} = (0, 0)$$

3.1 Exemplo

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$

Encontre o núcleo de F.

Queremos encontrar os vetores $\overrightarrow{u} \in U$, tais que $F(u) = \overbrace{o}$. Ou seja, $(0, x + y, 0) = (0, 0, 0)$.

$0 = 0$
$x + y = 0$
$0 = 0$

$$x = -y$$

3.2 Proposição

Seja a transformação linear $F : U \to V$. Então:

- $\ker(F)$ é um subespaço vetorial de U
- A transformação F é injetora se, e somente se, $\ker(F) = \{\vec{o}\}$, ou seja, se o núcleo de F possui apenas o vetor nulo.

3.3 Teorema

Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dada $F : U \to V$ transformação linear, então:

$$\dim(U) = \dim(\ker(F) + \dim(Im(F)))$$

4 Correção da prova

5.a $M_3 | det(A) = 1$. Esse conjunto não é um subespaço vetorial pois, para ser um subespaço vetorial, o elemento neutro precisa estar contido no subespaço. Como a matriz nula 3x3 não está no conjunto, pois seu determinante não é 1, podemos concluir que o conjunto não é um subespaço vetorial.

5.c $det(A) \neq 0$?

Não precisa calcular o determinante dessa matriz, pois podemos perceber que a linha 1 e linha 2 são linhas proporcionais, portanto determinante de A é igual a 0.

5.d $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ é combinação linear por $p_1(x) = x - 1$ e $p_2(x) = 2x^2 - 5x + 2$

$2x^2 - 3x + 1 = a(x - 1) + b(2x^2 - 5x + 2)$

$b = 1$

$a = 2$

$1 = -a + 2b$

$1 = -(2) + 3.(1)$

$1 = 1$

Portanto, é combinação linear.