Universidade Federal da Fronteira Sul

Álgebra Linear – Ciência da Computação

Avaliação P1 – 22/10/2025

Aluno/a: Erickson Gieselmüller **Nota:** 8,5 Parabéns!

2,0 1.(2,0) Uma pessoa dispõe de 17 moedas, sendo algumas de um real, outras de cinquenta centavos e outras de dez centavos. Ela percebe que, gastando todas as moedas de um real, fica com R$ 1,50. Percebe, por outro lado, que se gastar todas de dez centavos, fica com R$ 11,00. De quantas moedas de cada tipo a pessoa dispõe?

2,0 2.(2,0) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, verifique se A é invertível e neste caso, encontre A^{-1}.

2,0 3.(2,0) Encontre o valor de k para que o vetor $u = (5, 6, k)$ seja combinação linear dos vetores $v = (1, 2, 0)$ e $w = (3, 4, -1)$.

2,0 4.(2,0) Dados $U = \{(x, y, z) \in R^3 /\ y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in R^3\ /2x - z = 0\}$, subespaços do espaço vetorial V. Encontre:

a) uma base e a dimensão de U.
b) uma base e a dimensão de W.
c) uma base e a dimensão de U + W.
d) uma base e a dimensão de U ∩ W.

Explicar reta

0,5 5.(2,0) Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F), justificando sua resposta com um contraexemplo em caso de F e com a teoria em caso de V:

a) ( ) Seja $V = M_{3x3}(R)$ o conjunto das matrizes reais de ordem 3, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Então o conjunto $W = \{A \in M_{3x3}(R) / \det(A) = 1\}$ é um subespaço vetorial de V.

b) ( ) Toda matriz invertível admite determinante não nulo

c) ( ) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Então $\det(A) \neq 0$.

d) ( ) O polinômio $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ é combinação linear de $p_1(x) = x - 1$ e $p_2 = 2x^2 - 5x + 3$.

OBSERVAÇÕES:

- ✓ A prova é individual e com resposta final a caneta;
- ✓ Questões sem desenvolvimento ou justificativa coerente não serão consideradas;
- ✓ Questões idênticas em duas ou mais provas serão desconsideradas das mesmas;
- ✓ Deverá ser utilizado o conteúdo estudado em sala e as informações constantes na folha de prova.
- ✓ Não será permitida saída da sala durante a prova.

BOA PROVA!

Ericson Giesel Müller

1-) $r = 1$ real $\quad c = 50$ cents $\quad d = 10$ cents

$$r + c + d = 17$$

$$r + \frac{c}{2} + \frac{d}{10} = V$$

$$\frac{c}{2} + \frac{d}{10} = 1,5$$

$$r + \frac{c}{2} = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to 2.L_2 \\ \to L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to L_2 + 2.L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{9}{5} \cdot d = -9$$

$$d = 5$$

$$c + \frac{5}{5} = 3$$

$$c = 2$$

$$r + 2 + 5 = 17$$

$$r = 10$$

$$V = 10 + \frac{2}{2} + \frac{5}{10} = 11,5$$

R: Essa pessoa possui:

10 moedas de 1 real,
2 moedas de 50 centavos,
5 moedas de 10 centavos.

2-)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \cancel{(3.1.0)} + \cancel{(0.0.1)} + (3.2.-1) - (3.1.1) - \cancel{(0.1.3)} - \cancel{(0.0.2)}$$

$$\det(A) = -6 - 3 = -9$$

Logo, $\exists A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to L_2 + L_3 - L_1 \\ \to L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to L_3 \\ \to -L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 - L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \frac{L_1}{3} \\ \to \frac{L_2}{3} \\ \to \frac{L_3}{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

R: $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Erickson Giesel Miller

3-) $u = (5, 6, K)$ $(5, 6, K) = a.(1, 2, 0) + b.(3, 4, -1)$

$v = (1, 2, 0)$

$w = (3, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & K \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{cases} (5.2.-1) + (6.0.3) + (K.1.4) \\ -(K.2.3) - (0.4.5) - (-1.6.1) \\ = -10 + 0 + 4K - 6K - 0 + 6 \\ = -2K - 4 = 0 \\ \text{Logo } K = -2 \end{cases}$$

$(5, 6, -2) = a.(1, 2, 0) + b.(3, 4, -1)$

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a + 4b = 6 \\ -b = -2 \end{cases}$$

$b = 2$

$a = -1$

$u = -1.v + 2.w$

com $u = (5, 6, K)$

R: $K = -2$

$2x - z = 0 \quad z = 2x$

$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0 \text{ e } 2x - z = 0\}$

4-) $U = (x, 0, z) \quad W = (x, y, 2x) \quad U \cap W = (x, 0, 2x)$

a) $U = (x, 0, 0) + (0, 0, z) = x.(1, 0, 0) + z.(0, 0, 1)$

Base de U: $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$

$\dim(U) = 2$

b) $W = (x, 0, 2x) + (0, y, 0) = x.(1, 0, 2) + y.(0, 1, 0)$

Base de W: $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$

$\dim(W) = 2$

c) $U + W = (2x, y, z + 2x)$

$U + W = (2x, 0, 2x) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$

$2x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

Base de $(U + W)$: $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$\text{Dim}(U + W) = 3$

d) $U \cap W = (x, 0, 2x) = x.(1, 0, 2)$

Base $(U \cap W) = \{(1, 0, 2)\}$

$\text{Dim}(U \cap W) = 1$

Respostas

4.a) Base(U): $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$
$\text{Dim}(U) = 2$

4.b) Base(W): $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$
$\dim(W) = 2$

4.c) Base$(U + W) = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
$\text{Dim}(U + W) = 3$

4.d) Base$(U \cap W) = \{(1, 0, 2)\}$
$\text{Dim}(U \cap W) = 1$

5-) a) Verdadeiro, pois todas as regras de V são aplicadas a W. Logo, W está contido en V e se faz subespaço deste. A regra do conjunto W não viola as regras do conjunto V.

b) Verdadeiro. A matriz inversa da matriz M pode ser obtida dividindo a matriz adjunta de M pela determinante da matriz M. conforme abaixo:

$$M^{-1} = \frac{\overline{M}^{t}}{\det(M)} = \frac{\operatorname{adj}(M)}{\det(M)}$$

Como a divisão por zero não é uma possibilidade na matemática, podemos concluir que toda matriz inversível possui determinante não-nulo.

c) colab

$$2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & \frac{1}{2}\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}0 & -4 & 1\\ 0 & -2 & \frac{1}{2}\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$+\,0\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 5 & 2 & -1\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 5 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$+\,(-4)\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

$$+\,1\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -2\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$+1.\cancel{(-1)^4}.\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad +5.(-1)^5.\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$+0.(-1)^5.\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad +4.\cancel{(-1)^6}.\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$+(-2).\cancel{(-1)^6}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad +2.(-1)^7.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}.(-1)^7.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad +(-1).\cancel{(-1)^8}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2.(7) + (-4).(5/2 - 4 + 1) + (-1).(16)$$
$$+ 2.(-1).(-8+4) + 1.(-12) + 3.(-1).(0)$$
$$+ 1.(2 - 12 + 4) - 2.(-2 + 8 + 5) - \frac{1}{2}.(-56)$$
$$+ 5.(-1).(-2 + 2) + 4.(3 - 4 - 3 + 4)$$
$$- 2.(1 - 1) - 1.(-4 + 4)$$

$$\det A = 17 + 2 - 16 + 8 - 12 - 14 - 11 + 28$$

$$\det A = 26$$

c) Verdadeiro pois nenhum vetor de A é combinação linear de outro vetor de A. Ou seja, são linearmente independentes.

d) Falso, conforme contraexemplo

$(2x^2 - 3x - 1) = a \cdot (x-1) + b \cdot (2x^2 - 5x + 3)$

$p = (2x^2, -3x, -1)$

$a = (0, x, -1)$

$b = (2x^2, -5x, 3)$

$b = 1$ pois não existe outra combinação linear para se obter $2x^2$

$p - b = (0, 2x, -4)$

$p - b = 2a + (0, 0, -2)$

$(0, 0, -2) \notin \{p, a, b\}$