

Trabalho Computacional em Grupo - Sistema Pêndulo Simples

Nome: Erick Sunclair Santos Batista, Luís Felipe Araújo Corrêa, Matheus Nogueira Arruda

Data: 26/11/2023

Curso: Engenharia de Sistemas

1. Modelagem fenomenológica

A equação que define o sistema do pêndulo simples escolhido é como mostrada a seguir, sendo T o torque de entrada aplicado ao sistema e θ o ângulo de saída entre a corda e o eixo vertical do pêndulo. A equação é linearizada ao assumir que o movimento do pêndulo é pequeno o suficiente para considerar $\sin(\theta) = \theta$.

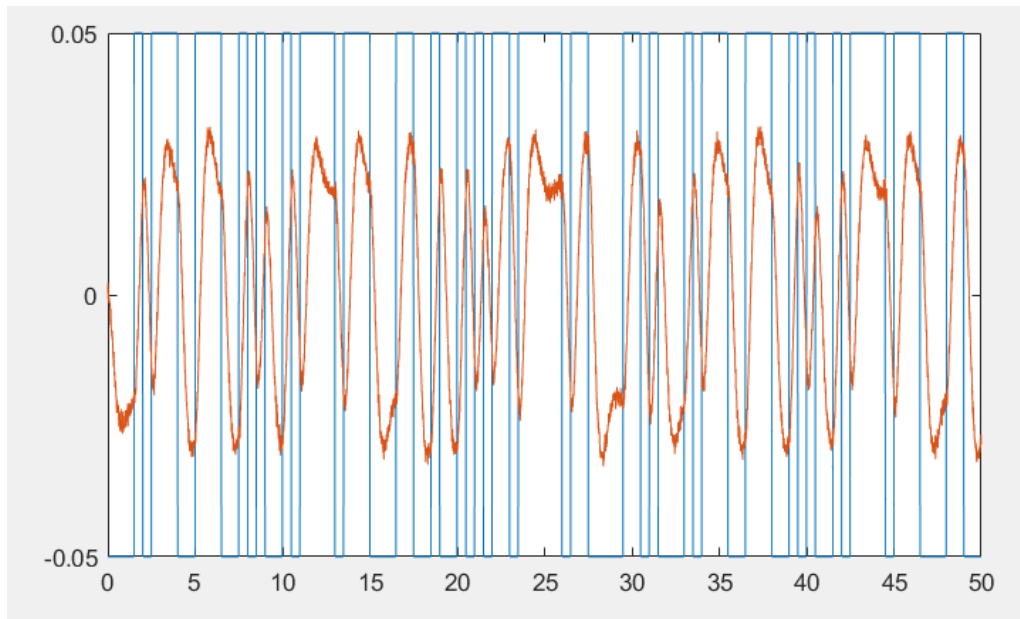
$$m * l * \theta'' = - m * g * \sin(\theta) - k * l * \theta' + \frac{T}{l}$$
$$\theta'' = - \frac{g}{l} * \theta - \frac{k}{m} * \theta' - \frac{1}{m * l^2} * T$$

Aqui, m representa a massa do pêndulo, l representa o seu comprimento, g é a aceleração da gravidade e k é a constante de amortecimento. Ao aplicar a Transformada de Laplace na equação anterior, considerando condições iniciais nulas, chega-se à função de transferência representada a seguir.

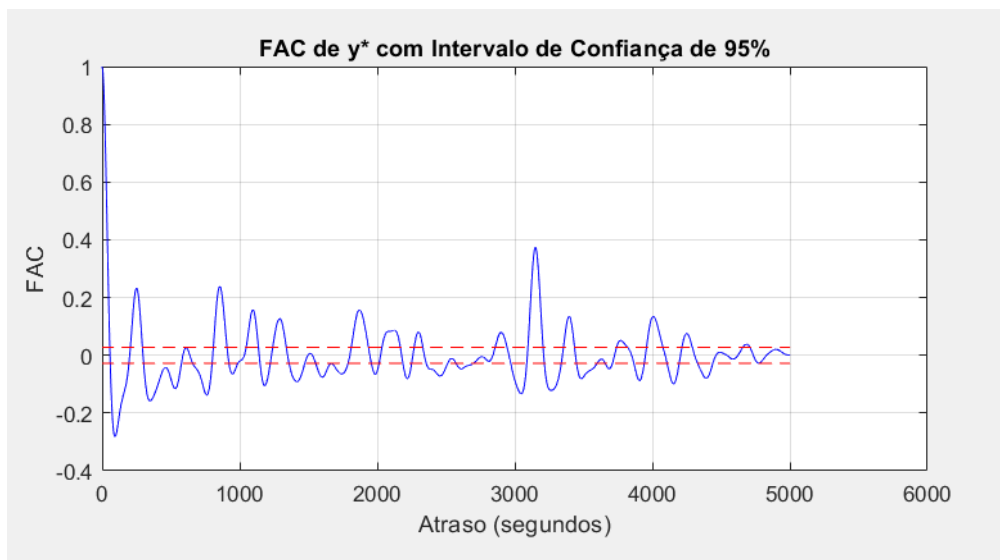
$$H(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{-\frac{g}{l}}{s^2 + \frac{k}{m} * s + \frac{1}{m * l^2}}$$

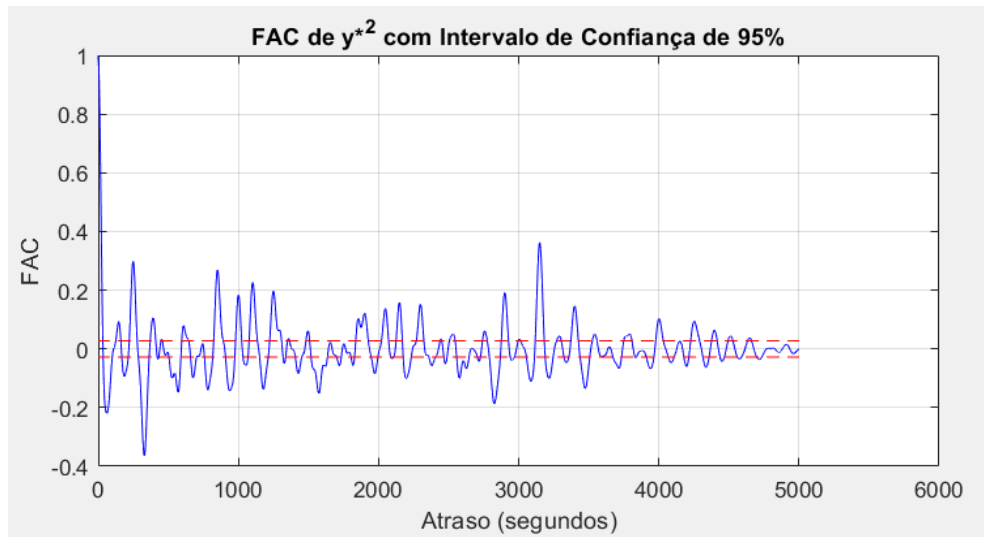
2. Escolha e coleta de sinais

O sistema, como definido anteriormente, é linear, de segunda ordem e com tempo de acomodação de 76 segundos para um degrau unitário. A PRBS escolhida terá $A=0,1$, pois o sistema é aproximadamente linear, então uma PRBS com amplitudes pequenas garante que a resposta do sistema permaneça dentro de uma região linear, além de garantir que o sistema consiga responder a tempo. Além disso, $T_b=0.5s$ (tempo suficiente para o sistema responder com a amplitude escolhida, porém sem permitir que ele fique em estado estacionário) e $n=8$ bits (permitindo melhor resolução na identificação do sistema). Os sinais de entrada e saída resultantes são mostrados a seguir, sendo a entrada o sinal 'u' e a saída o sinal 'y'.

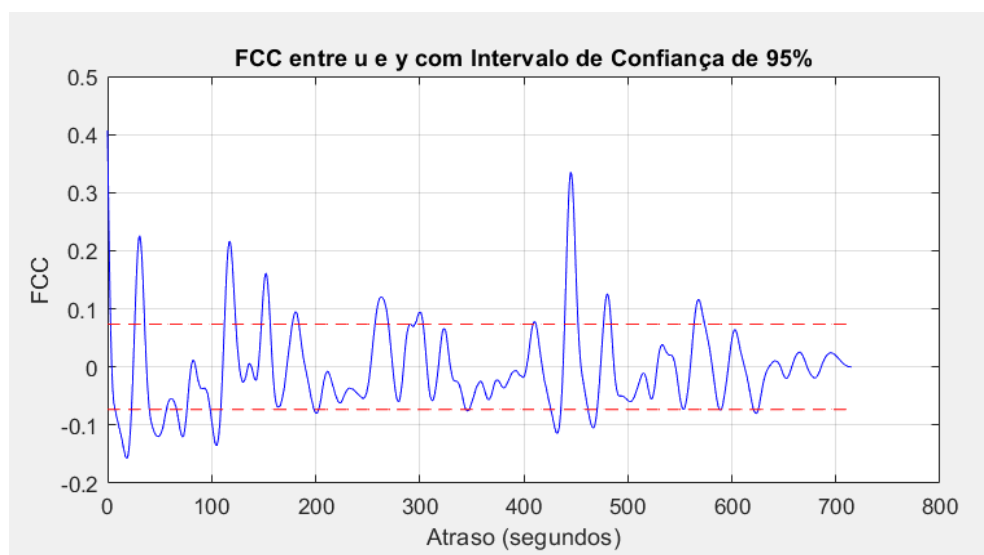


As funções de autocorrelação (FAC) de y^* e y^{*2} são calculadas e mostradas a seguir. Os gráficos mostram que existe autocorrelação em y , então o sinal provavelmente não é aleatório. Os valores encontrados dos primeiros mínimos foram $\tau_{y^*} = 95$ e $\tau_{y^{*2}} = 330$, então, considerando o τ mínimo, de 95, é calculado o intervalo de decimação entre 4,75 e 9,5, tendo sido escolhido o valor médio arredondado de 7.

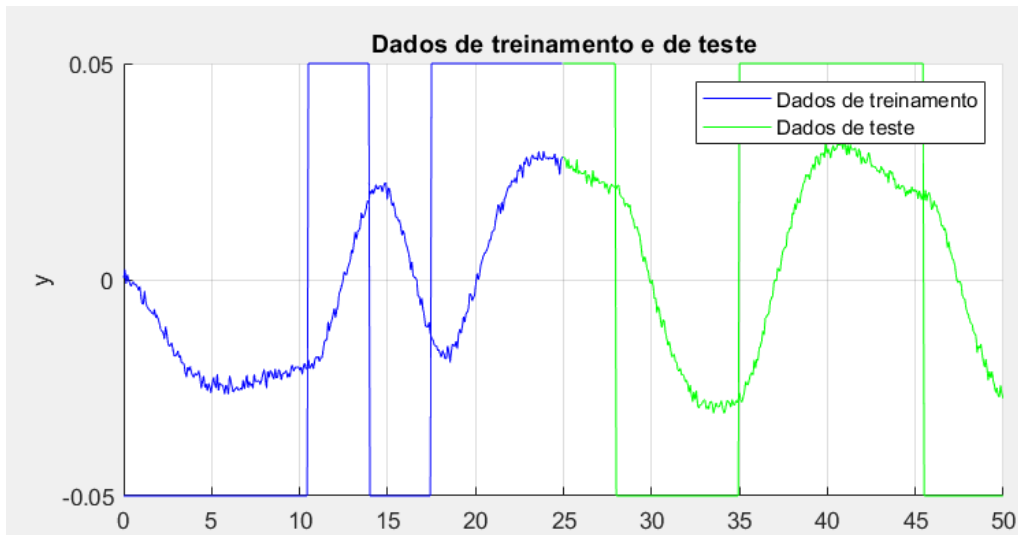




A função de correlação cruzada (FCC) entre a entrada e a saída do sistema, ambos já decimados com a taxa definida anteriormente, mostra que também existe correlação entre elas, indicando que elas podem ser usadas para modelagem do sistema.

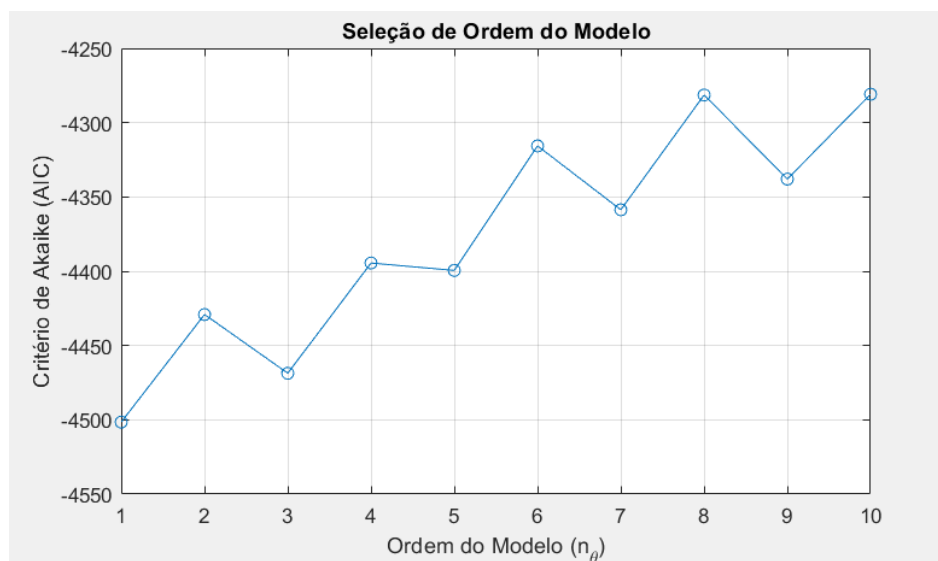


Foram divididos os dados em duas partes iguais, uma para treinamento e outra para teste do modelo.



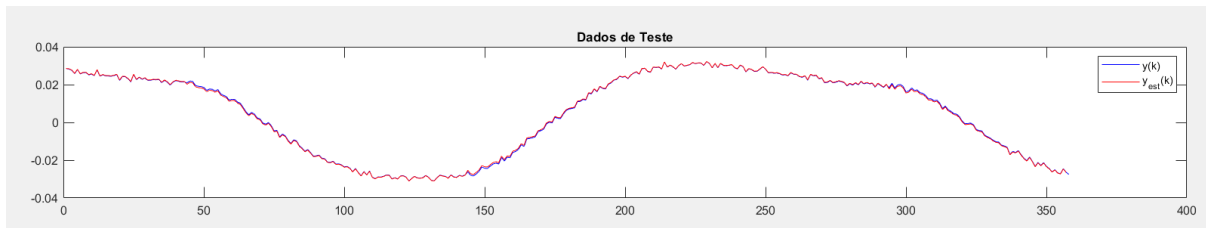
3. Seleção da estrutura do modelo

Utilizando os dados de treinamento, foi usado um estimador de mínimos quadrados para identificar um modelo ARX para o processo. Foram feitos testes para ordens de 1 a 10 e com base no Critério de Akaike (AIC), foi decidida a melhor ordem para a modelagem do sistema. Na maior parte das iterações a melhor ordem encontrada foi 1 ordem, como mostrado a seguir.

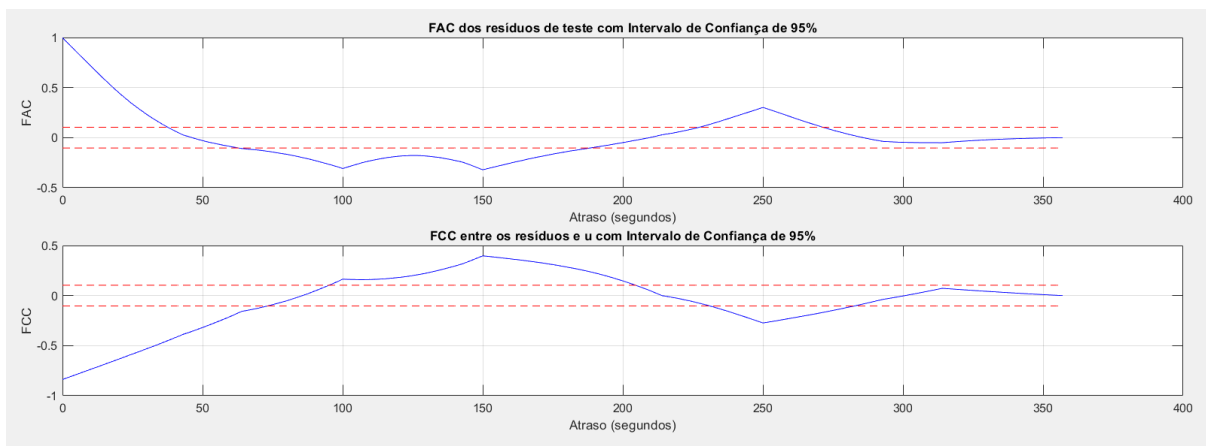


4. Validação do modelo

Já com os dados de teste e usando o modelo treinado (com os coeficientes θ encontrados), foi feita a estimação dos valores de saída e eles foram comparados com os valores de saída de teste, obtendo o seguinte gráfico:



A estimativa obtida obteve grande precisão. Também foi calculado o Erro Quadrático Médio (RMSE) com base nos resíduos obtidos entre os valores reais e estimados. O RMSE obtido nos dados de teste foi 0,0020511. Usando os resíduos calculados foram criados gráficos com a FAC dos resíduos e a FCC entre os resíduos e a entrada do sistema. O primeiro mostra que os resíduos não são aleatórios, já que eles possuem autocorrelação fora do intervalo de confiança de 95%. O segundo também mostra correlação significativa entre a entrada e os resíduos, indicando que os resíduos têm relação com a entrada do sistema.



5. Conclusão

O trabalho realizado ajudou a elucidar diversos conceitos envolvidos com a Modelagem de Sistemas Dinâmicos ao aplicar tais conceitos de forma prática com dados de um sistema real.

Entre os desafios encontrados no processo os principais foram a escolha de parâmetros ideais, da entrada PRBS, por exemplo, que fossem ideais para a correta modelagem do sistema, além da seleção da ordem ideal do modelo, já que a criação e as operações com as matrizes de regressores são complexas e tendem a ser mais confusas na prática do que na teoria.

Por fim, foram alcançados resultados satisfatórios com os métodos aplicados, com a criação de um modelo ARX capaz de fazer boas previsões para o sistema do pêndulo simples utilizando apenas uma ordem para o estimador de mínimos quadrados.