

Matakuliah	: Matematika Diskrit	Kelas	: A/B/C/D/E
Dosen	: Amalia Utamima, S. Kom, MBA Eko Wahyu Tyas, S. Kom, MBA	Sifat	: Open Resume (1 lembar A4)
Durasi Waktu Pelaksanaan	: 120 Menit	Hari/Tanggal	:

1. Tunjukkan apakah fungsi $f(x) = ax + b$ dari \mathbb{R} ke \mathbb{R} memiliki invers, dimana a dan b adalah konstanta dengan $a \neq 0$. Carilah invers dari fungsi f tersebut (jika ada).

(15 points)

Jawab:

f is one-to-one because $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \rightarrow ax_1 = ax_2 \rightarrow x_1 = x_2$.

f is onto because $f((y-b)/a) = y$.

$f^{-1}(y) = (y-b)/a$.

2. Sebuah perusahaan memproduksi mobil *sport* dengan jumlah produksi dalam skala meningkat. Pada bulan pertama hanya satu buah mobil yang diproduksi, pada bulan kedua diproduksi 2 buah mobil, dan seterusnya hingga n buah mobil diproduksi pada bulan yang ke- n .
- Buatlah persamaan rekursif untuk menentukan jumlah mobil yang diproduksi oleh perusahaan tersebut pada n bulan pertama.
 - Berapa jumlah mobil yang diproduksi perusahaan tersebut pada tahun pertama?
 - Temukan rumus eksplisit untuk jumlah mobil yang diproduksi perusahaan pada n bulan pertama.

(15 points)

Jawab:

a) $a_n = n + a_{n-1}$, $a_0 = 0$ b) $a_{12} = 78$ c) $a_n = n(n+1)/2$

3. Diketahui sebuah sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$x + 3y + z = 2$$

$$2x - z = 12$$

$$x + 2y = 4$$

- Buatlah matriks diperbesar (*augmented matrix*) dari koefisien-koefisien sistem persamaan linear tersebut, kemudian carilah inversnya dengan menggunakan operasi baris elementer.
- Gunakan invers tersebut untuk menemukan nilai dari variabel x , y , dan z .

(20 points)

Jawab:

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{B_2 = B_2 - 2B_1 \\ B_3 = B_3 - B_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{B_3 = B_3 - 1/6B_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -2/3 & -1/6 & 1 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{\substack{-1/6B_2 \\ -2B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & -2 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{\substack{B_1 = B_1 - B_3 \\ B_2 = B_2 - 1/2B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & -2 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{B_1 = B_1 - 3B_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & -2 \end{array}\right)
 \end{aligned}$$

a.

- Dari perhitungan sebelumnya, kita dapatkan nilai inversnya adalah:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ 4/3 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Bentuk matriks dari SPLnya adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Penyelesaian: kalikan kedua ruas persamaan dari sebelah kiri dengan matriks A^{-1}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ 4/3 & 1/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

b.

4. Dengan menggunakan induksi matematika buktikan bahwa:
 $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$, dimana n adalah integer positif.
(15 points)

Jawab:

Let $P(n)$ be $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$.

Basis step: $P(1)$ is true because $1^2 = 1 = (-1)^0 1^2$.

Inductive hypothesis: Assume that $P(k)$ is true.

Inductive step: show that $P(k+1)$ is true.

$$\begin{aligned}
 &\text{Then } 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\
 &= (-1)^{k-1}k(k+1)/2 + (-1)^k(k+1)^2 \\
 &= (-1)^k(k+1)[-k/2 + (k+1)] \\
 &= (-1)^k(k+1)[(k/2)+1] \\
 &= (-1)^k(k+1)(k+2)/2.
 \end{aligned}$$

5. Apabila R adalah relasi di dalam himpunan bilangan riil dimana aRb jika dan hanya jika hasil dari $a-b$ adalah integer. Apakah R termasuk *equivalence relation*?
(15 points)

Jawab:

Let R be the relation on the set of real numbers such that aRb if and only if $a - b$ is an integer. Is R an equivalence relation?

Solution: Because $a - a = 0$ is an integer for all real numbers a , aRa for all real numbers a . Hence, R is reflexive. Now suppose that aRb . Then $a - b$ is an integer, so $b - a$ is also an integer. Hence, bRa . It follows that R is symmetric. If aRb and bRc , then $a - b$ and $b - c$ are integers. Therefore, $a - c = (a - b) + (b - c)$ is also an integer. Hence, aRc . Thus, R is transitive. Consequently, R is an equivalence relation. ▶

6. Berikut adalah *adjacency matrix* untuk graph G:

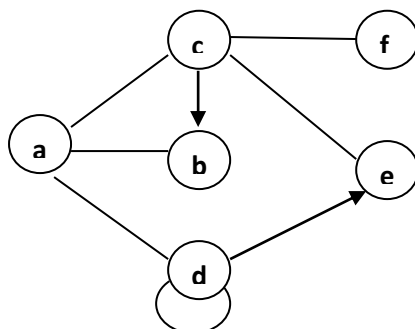
i \ j	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	0	0
b	1	0	0	0	0	0
c	1	1	0	0	1	1
d	1	0	0	1	1	0
e	0	0	1	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0

- Buatlah *graph* yang sesuai dengan matrix tersebut
- Euler Path* di dalam suatu *graph* adalah suatu *path* yang berisi setiap *edge* di dalam *graph* dan *Euler Path* melalui setiap *edge* tepat satu kali. Apakah graph G mempunyai *Euler Path*? Apabila ada, sebutkan path tersebut.

(20 points)

Jawab:

- Draw a graph that represent the matrix



- Yes, it has. f-c-b-a-d-d-e-c-a