Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

PRIMER EXAMEN II CICLO 2020

Viernes 18 de Setiembre

Tiempo Máximo: 240 Minutos **Puntaje: 42 Puntos**

Instrucciones Generales

- El profesor adjuntó a este documento una lista con los ejercicios que le corresponde realizar a cada estudiante, si usted omite alguno de ellos o realiza alguno que no le fue asignado estos no serán calificados.
- Los ejercicios que le fueron asignados deben ser resueltos en hojas blancas, rayadas o de reciclaje, con lapicero de tinta azul o negra, con el mayor orden y aseo posible. Si algún desarollo está desordenado, incompleto o aparecen ejercicios con respuestas pero sin procedimientos, estos no se calificarán.
- En la primera página favor anotar su nombre completo y carnet.
- En mediación virtual con su nombre completo y carnet, debe hacer entrega de un archivo .rar o .zip que incluya, un documento pdf, en donde, de forma legible se indique el enunciado y la respuesta de los ejercicios asignados, para ello, usted deberá adjuntar fotos de los apuntes que realizó en hojas. Los ejercicios que deben ser resueltos en Mathematica, usted deberá adjuntar una imagen dentro del documento pdf, además en mediación deberá subir un único archivo en Mathematica en el cual estén las soluciones de los ejercicios asignados.
- Ejercicios similares, que se llegue a probar que incidieron en fraude, serán causante de anulación de la prueba para las partes involucradas y la ejecución del respectivo proceso disciplinario.
- El estudiante, deberá guardar sus apuntes con los cuales resolvió el parcial, ya que puede darse la situación de que el profesor necesito validar respuestas.
- El estudiante que no entregue el examen dentro del tiempo asignado perderá el derecho a entregar la prueba. Considere que el profesor ha incluido dentro del tiempo total de la prueba, 30 minutos para que se dedique a editar el documento y lo pueda subir a mediación.
- Usted necesitará conexión a internet únicamente en dos momentos, al inicio de la prueba para descargar el enunciado y al final de la misma para subir su solución, si un estudiante aduce tener problemas de internet debe presentar las evidencias que lo respalden.

1. Dados los siguientes conjuntos de números enteros, donde el conjunto U, denota el universo para este ejercicio

$$U = \{-7, -6, \cdots, 0, \cdots, 14, 15\}$$
$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, 8\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z},\ -6 \leq x \leq 10,\ talque\ xmod2 \neq 0\}$$
$$C = \{-3, -2, 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 12\}$$

Determine el conjunto resultante de:

a) **[6 Puntos]** $P\left((B \cap C) - A\right)$

b) **[6 Puntos]** $P\left((B \cap A) - C\right)$

c) **[6 Puntos]** $(B \cap C) \times (B \cap A - C)$

d) **[6 Puntos]** $\left(\overline{C} \cap \overline{A}\right) \triangle \overline{B}$

e) **[6 Puntos]** $\overline{(C - A) \cup \overline{B}}$

f) **[6 Puntos]** $\overline{(B \cup C)} - \overline{(B \cup A)}$

g) **[6 Puntos]** $\overline{C \cup A} \times \overline{B \cap A}$

h) **[6 Puntos]** $\overline{C} \triangle \overline{A - B}$

2. Para cada par de números a, b encuentre enteros s y t tales que:

$$mcd(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

a) **[5 Puntos]** $a = 2091,\ b = 4807$

b) **[5 Puntos]** $a = 2475,\ b = 32670$

c) **[5 Puntos]** $a = 67942,\ b = 4209$

d) **[5 Puntos]** $a = 490256,\ b = 337$

e) **[5 Puntos]** $a = 315,\ b = 825$

f) **[5 Puntos]** $a = 331,\ b = 993$

g) **[5 Puntos]** $a = 396,\ b = 480$

h) **[5 Puntos]** $a = 12378,\ b = 3054$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ (c_{ij})_{3\times 3} = \begin{cases} 1 & si \quad i \geq j \\ 0 & si \quad i < j \end{cases}$$

Determine la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones

a) **[6 Puntos]** $(A \vee B)^t \wedge (A^t \odot C)$

b) **[6 Puntos]** $(A \wedge B)^t \odot (B \vee C)^t$

c) **[6 Puntos]** $\left[A \wedge (B \odot C)^t\right]^t$

d) **[6 Puntos]** $[(A \vee I_3) \odot C] \wedge B^t$

e) **[6 Puntos]** $(B \odot C) \odot (A^t \wedge I_3)$

f) **[6 Puntos]** $(C \wedge A^t)^t \odot (B \wedge A)$

g) **[6 Puntos]** $[(A \wedge B) \vee C]^t \odot A^t$

h) **[6 Puntos]** $B \odot [(B^t \odot C^t) \vee A^t]^t$

4. Haciendo uso del principio de inducción matemática demuestre la validez de las siguientes expresiones

a) **[7 Puntos]** Demostrar que: $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

b) **[7 Puntos]** Demostrar que: $5^0 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^n = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

c) **[7 Puntos]** Demostrar que: $5^{n-2} < n!$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

d) **[7 Puntos]** Demostrar que: $2n < 3^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

e) **[7 Puntos]** Demostrar que: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

f) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión $5^n + 15$ es divisible por 20, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

g) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión $6^n + 24$ es divisible por 30, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

h) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión $n^3 + 11n$ es divisible por 6, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

5. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**.

a) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto A que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que son divisibles por 5. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, A debe ser igual a $A = \{5\}$.

b) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto B que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que son primos. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, B debe ser igual a $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

c) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto C que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que sean divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, C debe ser igual a $C = \{6\}$.

d) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto U que incluya los números enteros comprendidos entre a y b. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 6$, U debe ser igual a $U = \{2, 3, 4, 5\}$. Para ejercicios posteriores este conjunto U representará el universo del ejercicio.

6. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**. Usando los conjuntos generados a partir de las rutinas del ejercicio 5 y usando rutinas brindadas en el curso o generadas en tareas

   a) **[4 Puntos]** Determinar: $\overline{A - B} \triangle C$. Utilizando $a = -50$, $b = 30$ para el conjunto A, $a = -29$, $b = 36$ para el conjunto B, $a = -51$, $b = 40$ para el conjunto C, $a = -60$, $b = 50$ para el conjunto U.

   b) **[4 Puntos]** Determinar: $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - \overline{C}$. Utilizando $a = -50$, $b = 30$ para el conjunto A, $a = -29$, $b = 36$ para el conjunto B, $a = -51$, $b = 35$ para el conjunto C, $a = -70$, $b = 40$ para el conjunto U.

   c) **[4 Puntos]** Determinar: $\overline{C - B} \times A$. Utilizando $a = -15$, $b = 17$ para el conjunto A, $a = -15$, $b = 6$ para el conjunto B, $a = -5$, $b = 18$ para el conjunto C, $a = -25$, $b = 20$ para el conjunto U.

   d) **[4 Puntos]** Determinar: $(B \cap A) \triangle \overline{C}$. Utilizando $a = -53$, $b = 62$ para el conjunto A, $a = -66$, $b = 55$ para el conjunto B, $a = -35$, $b = 49$ para el conjunto C, $a = -85$, $b = 70$ para el conjunto U.

   Tal vez le sea útil recordar que: $\overline{H} = U - H$.

7. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**. Construya una rutina en Mathematica, que reciba un número natural n, construya una matriz cuadrada M de orden n, donde

$$(m_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \left(i^2 - j\right)$$

   y, que además determine el valor numérico máximo contenido en dicha matriz.
   La rutina debe regresar

   a) **[4 Puntos]** La matriz M, con $n = 60$.

   b) **[2 Puntos]** El número más grande contenido en esa matriz, cuando $n = 60$.