

# Universidad de Costa Rica - Sede Guanacaste

## Estructuras Discretas (MA-0320) - Práctica II

Prof. Luis Edo. Amaya B.

Noviembre 2019

### 1. Recursividad

#### 1.1. Ejercicios Programados

1. Formule una proposición recursiva para calcular la multiplicación entre dos números enteros positivos. Pruebe su convergencia a través del principio de demostración por recursividad.
2. ¿Qué ocurre con la función recursiva Factorial vista en clase, si  $n$  es un número entero negativo? Justifique su respuesta.
3. Establezca una proposición recursiva que sume los dígitos de un número natural. Pruebe la convergencia del programa por medio del principio de demostración por recursividad.
4. Construya un programa recursivo que muestre todos los múltiplos de un número natural  $n$  menor que otro número natural  $m$ .
5. Modifique el algoritmo *Quicksort* para ordenar una lista de números reales de forma descendente. **Nota:** En el libro de Vilchez viene la implementación en *Mathematica*.

### 2. Relaciones de Recurrencia

#### 2.1. Ejercicios Programados

1. Por medio de los comandos **DiscretePlot**, **RecurrenceTable** o **LinearRecurrence**, grafique y obtenga los diez primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por una relación de recurrencia:

a)  $a_n = -4a_{n-1}$  con  $a_0 = 5$ .

b)  $a_n = 3n \cdot a_{n-1} + 3^n$  con  $a_1 = 1$ .

- c)  $a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1}$  con  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 3$ .
- d)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  con  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 3$  (esta sucesión recibe el nombre de sucesión de Lucas, podría investigar porqué).

2. Considere la sucesión

$$a_n = \{0, -1, -5, -14, -30, -55, \dots\}$$

- a) Escriba la sucesión de manera recursiva y en forma explícita.
- b) Escriba un programa recursivo que calcule el  $n$ -ésimo término de la sucesión.
- c) Demuestre que el programa converge por medio del principio de demostración por recursividad.

## 2.2. Ejercicios de cálculo

1. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia, compare los resultados obtenidos utilizando el comando **RSolve**:
  - a)  $a_n = 3^n a_{n-1}$  con  $a_0 = 2$ .
  - b)  $a_n = 2n a_{n-1}$  con  $a_0 = 3$ .
  - c)  $a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2}$  con  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 5$ .
  - d)  $3a_n = 4a_{n-2} - 5a_{n-1}$  con  $a_0 = 2$  y  $a_1 = 1$ .
  - e)  $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$  con  $a_0 = 5$ ,  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 3$ .
2. Del libro de **Murillo**, leer de la página 293-303. Realizar los ejercicios de la página 304: 1 (a,b,c,d), 2 (a,b,c,d), 3 (a,b,d,f), 5-todo, 6-todo.
3. Una persona tiene  $n$  dólares y cada día compra pan a \$1, leche o café a \$2. Si  $a_n$  representa el número de formas en las que puede gastar el dinero, encuentre una relación de recurrencia para  $a_n$ . Si es posible resuelva dicha relación de recurrencia y compare con lo encontrado con el comando **RSolve**.
4. La población mundial en el año 2003 se estimó en 7.1 billones de personas y se calculó un crecimiento global de 1,2% al año. Encuentre una relación de recurrencia que determine después del año 2003 la población mundial (ojo, puede considerar al año 2003 como  $n = 0$ ). Resuelva la relación de recurrencia con *Mathematica*, calcule con la ayuda del *software* una estimación del número de personas en el mundo para el año 2050.
5. Determine la fórmula por recurrencia para la sucesión definida explícitamente como  $a_n = 3 - 4n + 3(2^n)$ .

### 3. Relaciones

#### 3.1. Ejercicios Programados

- Sea  $\mathcal{R}$  la relación  $a\mathcal{R}b \iff a \leq b^2$ , siendo  $a, b \in \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ .
  - Construya una rutina en Mathematica que determine el gráfico de  $\mathcal{R}$ .
  - Construya una rutina en Mathematica que determine si  $c\mathcal{R}d$ .
- Construya una rutina en Mathematica que determine el dominio y el rango de la relación  $\mathcal{R}$  dada por  $a\mathcal{R}b$  sii el mínimo común múltiplo entre  $a$  y  $b$  es igual a 350, con  $a \in \{1, 3, 5, \dots, 199\}$  y  $b \in \{2, 4, \dots, 150\}$ . **Sugerencia:** puede usar el comando **LCM** que calcula el mínimo común múltiplo.

- Represente por medio de un digrafo la relación:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a - b \leq 9\}$$

definida sobre  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

- Determine con la ayuda de Mathematica las relaciones unión e intersección entre  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ , si  $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$  y  $\mathcal{R}_2 = \{(a, b) \mid a + b \leq 20\}$  con  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ . Además determine  $\overline{\mathcal{R}_1}$ .
- Para el ejercicio 4, encuentre por medio de Mathematica:  $\mathcal{R}_1^{-1}$  y  $\mathcal{R}_2^{-1}$ . Luego utilizando matrices booleanas determine
  - $\mathcal{R}_1^{-1} \cup \mathcal{R}_2^{-1}$ .
  - $\mathcal{R}_1^{-1} \cap \mathcal{R}_2^{-1}$ .
  - $\overline{\mathcal{R}_1^{-1} \cup \mathcal{R}_2^{-1}}$ .
  - $\mathcal{R}_1^{-1} \circ \mathcal{R}_2^{-1}$ .
- Con ayuda de Mathematica, clasifique las relaciones de los ejercicios 1, 3, 4 en: reflexivas, simétricas, antisimétricas, transitivas, de equivalencia o de orden parcial.
- Diseñe en *Mathematica* una rutina que reciba la matriz de una relación y determine si es: reflexivas, simétrica, antisimétrica, transitiva, o total.
- Construya en Mathematica con ayuda del comando **KSetPartitions**, las relaciones de equivalencia que se obtienen de las particiones de longitud tres sobre el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

### 3.2. Ejercicios de Cálculo

1. Del libro de **Murillo**, leer de la página 169-173. Realizar los ejercicios de la página 174: 1 al 6.
2. Del libro de **Murillo**, leer de la página 175-183. Realizar los ejercicios de la página 183: 1 al 10.
3. Del libro de **Murillo**, leer de la página 187-193, **estos ejercicios corresponden a propiedades de las relaciones**. Realizar los ejercicios de la página 193: 1 al 8,16,17
4. Del libro de **Murillo**, leer de la página 198-201, **estos ejercicios corresponden a relaciones de equivalencia**. Realizar los ejercicios de la página 201: 1 al 3,6,7,9,13,14,17,21,22.
5. Del libro de **Murillo**, leer de la página 206-210, **estos ejercicios corresponden a relaciones de orden**. Realizar los ejercicios de la página 201: 1,2,3,4,7.