Universidad de Costa Rica - Sede Guanacaste
Estructuras Discretas (MA-0320) - Práctica I

Prof. Luis Edo. Amaya B.

Agosto 2020

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Ejercicios Programados

1. Elaborar en Mathematica una rutina que reciba dos conjuntos (listas) y retorne la intersección de dichos conjuntos.
2. Elaborar en Mathematica una rutina que reciba dos conjuntos (listas) y retorne la unión de dichos conjuntos.
3. Elaborar en Mathematica una rutina que reciba dos conjuntos (listas) y retorne la diferencia de la primera ingresada con respecto a la segunda.
4. Elaborar en Mathematica una rutina que reciba dos conjuntos (listas) y retorne la diferencia simétrica de dichos conjuntos.
5. Elabore en Mathematica una rutina que reciba un valor mínimo a y un valor máximo b, ambos números enteros positivos ($a \neq b$), y determine un conjunto que incluya a todos los números no primos comprendidos entre a y b. Nota: Mathematica tiene una función para determinar si un número es primo, lo puede investigar.
6. Defina el conjunto $A = \{-15, -8, -5, -2, 0, 3, 4, 7, 9, 11, 14, 20, 27, 68, 71, 80\}$, el conjunto $B = \{-13, -8, -7, -6, -1, 0, 1, 3, 5, 9, 12, 14, 22, 27, 30, 45, 71, 81\}$. A los conjuntos definidos aplicar las rutinas elaboradas Mathematica en 1, 2,3, 4.
7. Investigar como se define el producto cartesiano de $A \times B \times C$. Si A representa las n opciones de platos de entrada de un restaurante, si B representa las m opciones de plato fuerte de un restaurante, C representa las p opciones de postre de un restaurante. Elabore en Mathematica una rutina y haciendo uso del concepto de producto cartesiano de $A \times B \times C$, que brinde todas las posibles combinaciones de $(entrada, platofuerte, postre)$ que se podrían tener. Nota: los elementos de A, B y C los brindará el usuario.

8. Determine el pseudocódigo de un programa que reciba un número natural n y una lista de números enteros A, y devuelva una lista B que contenga aquellos elementos de A que al elevarse al cuadrado y ser divididos por n tienen residuo 1.

9. Determine el pseudocódigo de un programa que reciba un número natural n y una lista de números enteros A, y devuelva una lista B que contenga aquellos elementos de A que son divisibles por n.

1.2. Ejercicios de Cálculo

1. Del libro de **Richard Johnsonbaugh**
   a) Leer las páginas: 76 a la 82 y 84.
   b) Realizar los ejercicios: 13,12,14,16,33,34,36,39,43.

2. Del libro de **Manuel Murillo**
   a) Leer las páginas: 109-120, 155-162
   b) Realizar los ejercicios de la sección 2.1 $(1, 2, 5, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19)$.
   c) Realizar los ejercicios de la sección 2.7 $(1a, 1d, 2a, 2c, 2g, 2l, 2m, 2s, 5a, 5e, 5j, 5k)$.

   Nota: recordar que al final de los libros vienen las respuestas a algunos ejercicios.

3. **De otros libros...**
   a) Enumere los elementos de cada conjunto donde $N = \{1, 2, 3, ...\}$.
      1) $A = \{x \epsilon N | 3 < x < 9\}$.
      2) $B = \{x \epsilon N |$ x es par$, x < 11\}$.
      3) $C = \{x \epsilon N | 4 + x = 3\}$.
      4) A consta de los enteros positivos entre 3 y 9; por tanto, $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.
      5) B consta de los enteros positivos pares menores que 11; por tanto, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
      6) Ningún entero positivo satisface $4 + x = 3$; por tanto, $C = \varnothing$, el conjunto vacio.
   b) Sea $A = \{2, 3, 4, 5\}$.
      1) Demuestre que A no es un subconjunto de $B = \{x \epsilon N |$ x es par$\}$.
      2) Demuestre que A es un subconjunto propio de $C = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$.
   c) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?
      1) $A = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$.
      2) $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$.
      3) $C = \{x | x \epsilon N, x < 3\}$.

4) $D = \{x | x \epsilon N,$ x es impar$, x < 5\}$.
5) $E = \{1, 2\}$.
6) $F = \{1, 2, 1\}$.
7) $G = \{3, 1\}$.
8) $H = \{1, 1, 3\}$.

d) Sea $A = \{1, 2, ..., 8, 9\}$,$B = \{2, 4, 6, 8\}$,$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$,$E = \{3, 5\}$. ¿Cuáles de esos conjuntos pueden ser iguales a X bajo cada una de las siguientes condiciones?

1) x $\subseteq$ D pero x $\nsubseteq B$
2) x $\subseteq$ A pero x $\nsubseteq C$
3) x $\subseteq$ C pero x $\nsubseteq A$

2. División en los Enteros

2.1. Ejercicios Programados

1. Realice en Mathematica una rutina que reciba un número natural n y regrese la descomposición como multiplicación de números primos de él.

2. Elabore en Mathematica una rutina para el siguiente pseudocódigo 1.

Elevar a un exponente elevando al cuadrado varias veces

Este algoritmo calcula a^n elevando al cuadrado repetidas veces. El algoritmo se explica en el ejemplo 5.2.15.

Entrada: a, n
Salida: a^n

```
exp_via_cuadrado_repetido(a, n) {
resultado = 1
   x = a
   while (n > 0) {
       if (n mod 2 == 1)
           resultado = resultado * x
       x = x * x
       n = ⌊n/2⌋
   }
   return resultado
}
```

Figura 1: Pseudocódigo elevar al cuadrado

3. Elabore en Mathematica una rutina para el siguiente pseudocódigo 2.

Elevar un exponente mod z elevando al cuadrado varias veces

Este algoritmo calcula $a^n \bmod z$ elevando al cuadrado una y otra vez. El algoritmo se explica en el ejemplo 5.2.18.

Entrada: a, n, z
Salida: $a^n \bmod z$

```
exp_mod_z_via_cuadrado_repetido(a, n, z) {
    resultado = 1
    x = a mod z
    while (n > 0) {
        if (n mod 2 == 1)
            resultado = (resultado * x) mod z
        x = (x * x) mod z
        n = ⌊n/2⌋
    }
    return resultado
}
```

Figura 2: Pseudocódigo potencia

2.2. Ejercicios de Cálculo

1. Del libro de **Richard Johnsonbaugh**
   a) Leer las páginas: 205 a la 213.
   b) Realizar los ejercicios: 3,4,5,7,11,32,33,34.
   c) Lea, estudie y analice la sección 2.4, páginas 215, 216 y 217 y realice los ejercicios: 1,2,3,4,7,8,9
2. **De otros libros...**
   a) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, p es un número primo tal que $p|ab$ entonces: $p|a \vee p|b$.
   b) Demuestre que si $MCD(a, c) = 1$ y además $c|ab$, entonces $c|b$.

3. Matrices

3.1. Ejercicios Programados

1. Elabore una rutina en Mathematica, que reciba dos matrices y determine la resta de ellas.
2. Elabore una rutina en Mathematica que reciba dos matrices y determine el producto entre ellas.
3. Elabore una rutina en Mathematica que reciba una matriz cuadrada y calcule A^2.

4. Elabore una rutina en Mathematica que reciba dos matrices booleanas y regrese la disjunción entre ellas.

5. Elabore una rutina en Mathematica que reciba dos matrices booleanas y regrese la conjunción entre ellas.

6. Dada A una matriz cuadrada de orden n, se define la traza de A ($Tra(A)$), como el resultado de sumar todos los elementos de la diagonal principal de A, es decir $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{n,n}$. Realice una rutina en Mathematica que reciba una matriz cuadrada y regrese la traza de ella.

3.2. Ejercicios de Cálculo

1. Dadas las siguientes matrices boolenas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Deteminamar

   a) $(A \vee B) \wedge C$.
   b) $(A \vee B \vee C) \wedge (A \wedge C)$.

2. Dadas las siguientes matrices boolenas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Deteminamar

   a) $(A \wedge C) \vee (C \wedge B)$.
   b) $(A \wedge B \vee C) \wedge (B \wedge C)$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular (si es posible):

   a) $A - 2B$.
   b) $3BC$.
   c) $C^t B$.
   d) $A^2 + 4B^2$.

4. Una matriz se llama idempotente si $A^2 = A$, determine si la siguiente matriz es idempotente o no.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcule las matrices P^2 y P^4.

   b) Obtenga una fórmula para calcular P^n, $n \in \mathbb{N}$.

6. Encuentre todos los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} x & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Inducción Matemática

4.1. Ejercicios Programados

1. Investigue en Mathematica la implementación de las funciones Timing y Sum, utilicelas para crear rutinas en Mathematica que para cada igualdad realicé el cálculo usando la expresión de la izquierda y otra la de la derecha, y compare los tiempos de ejecución de ellas. Procure darle valores altos a n.

   a) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + ... + \dfrac{2}{3^n} = 1 - \dfrac{1}{3^n}$.

4.2. Ejercicios de Cálculo

1. Del libro de **Manuel Murillo**

   a) Leer las páginas: 276 a la 287.

   b) Realizar los ejercicios que aparecen a partir de la página 287: 1 (b,c,d,f,i,k,l,q,t), 2 (c,e,f,g,i,j), 3 (b,c,f,i)

2. Del libro de **Richard Johnsonbaugh**

   a) Leer las páginas: 53 a la 60.

   b) Realizar los ejercicios: 9,,14, 15, 20, 23.

3. **De otros libros**

   a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, esto para todo número natural mayor o igual que 2.