Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Solución Primer Examen II Ciclo 2019

Viernes 20 de Setiembre

---

1. Dados los siguientes conjuntos numéricos:

$$U = \{1, 2, ..., 7, 8\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 4, 5\}$$

   a) **[5 Puntos]** Calcule la expresión $\overline{(A \triangle B) \cap C}$.

$$\begin{aligned}
\overline{(A \triangle B) \cap C} &= \overline{[(A - B) \cup (B - A)] \cap C} \\
&= \overline{(\{1, 3\} \cup \{4, 6\}) \cap \{1, 4, 5\}} \\
&= \overline{\{1, 3, 4, 6\} \cap \{1, 4, 5\}} \\
&= \overline{\{1, 4\}} \\
&= \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}
\end{aligned}$$

   b) **[3 Puntos]** Calcule la expresión $P(B - C) \cap P(A - C)$

$$\begin{aligned}
P(B - C) \cap P(A - C) &= P(\{2, 6\}) \cap P(\{2, 3\}) \\
&= \{\{2\}, \{6\}, \{2, 6\}, \varnothing\} \cap \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \varnothing\} \\
&= \{\{2\}, \varnothing\}
\end{aligned}$$

2. Si tenemos un conjunto universo $U = \{0, 1, 2, ..., 12\}$, y tenemos las proposiciones abiertas, $P(x)$: x es divisible por 5, $Q(x)$: x es un número primo, y $R(x)$: x es divisible por 3. Determine los siguientes conjuntos

   a) **[2 Puntos]** $A = \{x \in U / Q(x) \Rightarrow P(x)\}$.

$$A = \{0, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

b) **[2 Puntos]** $B = \{x \in U/P(x) \wedge R(x)\}$.

$$B = \varnothing$$

3. **[7 Puntos]** Determine el $MCD(a, b)$ de los siguientes números enteros $a = 117$ y $b = 31$, y escriba $MCD(a, b) = sa + tb$.

$mod\,(117, 31) = 24 \Rightarrow 117 = 3 \cdot 31 + 24 \Rightarrow \boxed{24=117\text{-}3.31}$

$\Rightarrow mod\,(31, 24) = 7 \Rightarrow 31 = 1 \cdot 24 + 7 \Rightarrow \boxed{7=31\text{-}1.24}$

$\Rightarrow mod\,(24, 7) = 3 \Rightarrow 24 = 3 \cdot 7 + 3 \Rightarrow \boxed{3=24\text{-}3.7}$

$\Rightarrow mod\,(7, 3) = 1 \Rightarrow 7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow \boxed{1=7\text{-}3.2}$

$\Rightarrow mode\,(3, 1) = 0, \qquad m.c.d\,(117, 31) = 1$

Luego:
1=7-3.2
$\Rightarrow 1 = 7 - (24 - 3.\,7) \cdot 2$
$\Rightarrow 1 = 7 - 2.\,24 + 6.\,7$
$\Rightarrow 1 = 7.\,7 - 2.\,24$
$\Rightarrow 1 = 7\,(31 - 1.\,24) - 2.\,24$
$\Rightarrow 1 = 7.\,31 - 7.\,24 - 2.\,24$
$\Rightarrow 1 = 7.\,31 - 9.\,24$
$\Rightarrow 1 = 7.\,31 - 9\,(117 - 3.\,31)$
$\Rightarrow 1 = 7.\,31 - 9.\,117 + 27.\,31$
$\Rightarrow 1 = 34.\,31 - 9.\,117$

$\boxed{s = -9, t = 34}$

4. **[4 Puntos]** Demuestre que si $MCD(a, c) = 1$ y además $c|ab$, entonces $c|b$.

$MCD(a, c) = 1$, además $c|ab$, entonces $c|b$

$\Rightarrow 1 = p \cdot a + q \cdot c, \qquad ab = kc, k\epsilon\mathbb{Z}, \qquad b = k^1 c \qquad \boxed{a = \dfrac{1 - q \cdot c}{p}}{}^*$

si a $\neq$ 0 por (*)

$b = \dfrac{k}{a}.c$

$\Rightarrow b = k^1 c, k^1 = \dfrac{k}{a}, k^1 \epsilon \mathbb{Z}$

$\Rightarrow c|b$

5. **[7 Puntos]** Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Determine el resultado de realizar la operación $AB^t + C^2 - 5\,(I_2 \wedge 1_{2\times 2})$.

$$AB^t + C^2 - 5\,(I_2 \wedge 1_{2\times 2}) \qquad \rightarrow \boxed{(I_2 \wedge 1_{2\times 2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -25 \\ -15 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -29 \\ -13 & 41 \end{pmatrix}_{//}$$

6. **[10 Puntos]** Use inducción matemática para probar que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}, \forall n \geq 2$$

.

i) n=2

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} < \frac{2^2}{2+1}$$

$$\frac{7}{6} < \frac{4}{3} \qquad \checkmark$$

$$H.I: \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$$

$$\textbf{ii)H.q.d}: \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}}_{a} < \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n+2}}_{c}$$

a partir de la H.I

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdots + \frac{n}{n+1} < \underbrace{\frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}}_{b}$$

comparamos:

$$\frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} < \frac{(n+1)^2}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2(n+2) + (n+1)^2}{(n+1)\cancel{(n+2)}} < \frac{(n+1)^2}{\cancel{n+2}}$$

$$n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1 < (n^2 + 2n + 1)(n+1)$$

$$\cancel{n^3} + \cancel{3n^2} + 2n + 1 < \cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + n + \cancel{n^2} + 2n$$

$$2n < 3n$$

$$0 < n$$

$$n > 0 \quad \surd$$

$\Rightarrow$ Se cumple la condición para $(n+1)_{//}$

7. **[10 Puntos]** Escriba una rutina en Mathematica que reciba dos matrices A y B de cualquier tamañano, valide y realice el producto de A con B y una vez realizado ese producto indique cual es el elemento de mayor valor en esa matriz.

```
ProductoMatrices[A_, B_] := Module[{dimA = 0, dimB = 0, x = 0, Lis = {}, Valor = 0},
   dimA = Dimensions[A];
   dimB = Dimensions[B];

   If[dimA[[2]] ≠ dimB[[1]],
    Print["Los tamaños de las matrices no permiten realizar la suma"],
    (*Necesitamos crea una matriz "vacía" de ceros, en la cual se va a almacenar el resultado de la suma*)
    T = ConstantArray[0, {dimA[[1]], dimB[[2]]}];
    For[i = 1, i ≤ dimA[[1]], i++,
     For[j = 1, j ≤ dimB[[2]], j++,
       For[k = 1, k ≤ dimA[[2]], k++,
        x = x + A[[i, k]] * B[[k, j]];
       ];
       Lis = Append[Lis, x];
       (*Guardamos el valor de cada multiplicación de fila-columna en una lista*)
       T[[i, j]] = x;
       (*Necesitamos limpiar el valor de x*)
       x = 0;
      ];
    ];
    Valor = Max[Lis];
    Print["El resultado de multiplicar la matriz ", MatrixForm[A], " con la matriz ", MatrixForm[B], " es:", MatrixForm[T], " el mayor elemento de dicha matriz es ", Valor];
   ];
  ];
```