Tema VIII: Ortogonalidades y Proyecciones

Conjuntos ortogonales:

Un conjunto $T=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ de vectores, no nulos, en $\mathbb{R}^n$ es ortogonal si $u_i\cdot u_j=0$, para cualquier pareja de índices i,j en $\{1,2,\ldots k\}$; siempre que $i\neq j$.

Ejemplo: el conjunto $T=\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto ortogonal.

$$\begin{aligned}u_1\cdot u_2&=1\cdot 2+0\cdot 1+-1\cdot 2=0\\ u_1\cdot u_3&=1\cdot 1+0\cdot -4+-1\cdot 1=0\\ u_2\cdot u_3&=2\cdot 1+1\cdot -4+2\cdot 1=0\end{aligned}$$

Teorema: Si un conjunto $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ de vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal entonces es li.

Corolario: Sea $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ un conjunto no nulo de vectores ortogonales, de un subespacio S de dimensión k, entonces B es una base de S.

Bases ortonormales:

Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial de dimensión k. Una base $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ de S es ortonormal si:

a) $v_i\cdot v_j=0\ \ \forall\ i,j=1,\ldots,k\ \ i\neq j$

b) $\|v_i\|=1\ \ \forall i=1,\ldots,k$

Es decir, si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios de S.

Ejemplo: el conjunto $T=\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$

$$v_1\cdot v_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+0\cdot 1+\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\cdot 0=0\qquad \|v_1\|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$$v_1\cdot v_3=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}+0\cdot 0+\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}=0\qquad \|v_2\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$$

$$v_2\cdot v_3=0\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot 0+0\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}=0\qquad \|v_3\|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

Teorema:

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ una base ortonormal de S y B la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_k$, entonces:

a) $B^t \cdot B = I_k$

b) $[v]_B = (v\cdot v_1, v\cdot v_2,\ldots,v\cdot v_k)^t \quad \forall v\in S$

En particular si k = n, entonces B es una matriz ortogonal.

Ejemplo: del ejemplo anterior $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Se tiene que: $B^t\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Las coordenadas de $x=(1,2,3)^t$ en la base B son: $[v]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^t$

$\alpha_1 = x\cdot v_1 = (1,2,3)^t\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^t = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

$\alpha_2 = x\cdot v_2 = (1,2,3)^t\cdot(0,1,0)^t = 2$

$\alpha_3 = x\cdot v_3 = (1,2,3)^t\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow [v]_B = \left(\frac{-2}{\sqrt{2}},2,\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^t$$

Subespacios ortogonales:

Dos subespacios S y T de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales sí $x\cdot y=0 \quad \forall x\in S$ y $\forall y\in T$. Si S y T son ortogonales se escribe $S\perp T$.

Ejemplo: los subespacios $S=\left\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 / 2x-3y+z=0\right\}$ y $T=\left\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z)^t = t(2,-3,1), t\in\mathbb{R}\right\}$ son ortogonales.

$x=(x_1,x_2,x_3)^t \in S \Rightarrow 2x_1-3x_2+x_3=0 \quad y=(y_1,y_2,y_3)^t \in T \Rightarrow (y_1,y_2,y_3)^t = t(2,-3,1)=(2t,-3t,t)$

$$\begin{aligned} x\cdot y &= (x_1,x_2,x_3)^t \cdot (2t,-3t,t) \\ &= 2tx_1-3tx_2+tx_3 \\ &= t(2x_1-3x_2+x_3) \\ &= t\cdot 0 \\ &= 0 \Rightarrow S\perp T \end{aligned}$$

Teorema:

Si S y T son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^n$ entonces $S\bigcap T=\{0_n\}$.

Teorema:

Sean $B_1=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$, $B_2=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ bases de S y T, subespacios de $\mathbb{R}^n$, entonces $S\perp T \Leftrightarrow u_i \perp v_j \quad \forall i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,r$.

Teorema:

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto $S^\perp=\left\{x\in\mathbb{R}^n / x\perp y,\ \ \forall y\in S\right\}$.

Complemento ortogonal de: S y $S^\perp$

Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se llama complemento ortogonal de S al subespacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a cualquier vector de S $S^\perp=\left\{x\in\mathbb{R}^n / x\perp y,\ \ \forall y\in S\right\}$.

Observación importante: si $S=c\ell\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\begin{aligned} S^\perp &= \left\{x\in\mathbb{R}^n / x\perp y,\ \ \forall y\in S\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}^n / x\perp v_i,\ \ \forall i=1,\ldots,k\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}^n / v_i\cdot x=0,\ \ \forall i=1,\ldots,k\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}^n / Ax=0_k\right\} \end{aligned}$$

Donde A es la matriz kxn cuyas filas son los vectores $v_1^t, v_2^t, \ldots, v_k^t$

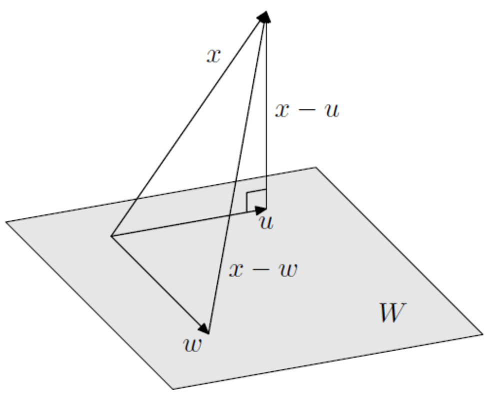
Ejemplo: sea $S = c\ell\left\{(1,2,3)^t\right\}$ la recta que pasa por el origen con vector director $(1,2,3)^t$, entonces el complemento ortogonal es el plano $S^{\perp} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + 3z = 0\right\}$.

Proyección ortogonal sobre un subespacio

Teorema:

Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ existe un único vector $u \in W$ tal que:

1) $(x-u) \perp w \quad \forall w \in W$
2) $\|x-u\| \leq \|x-w\| \quad \forall w \in W$



Definición: sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $x \in \mathbb{R}^n$ se llama vector proyección ortogonal de x sobre el subespacio W, o simplemente proyección ortogonal de x sobre W al único vector, tal que $(x-u) \perp w \quad \forall w \in W$ y se escribe $u = \mathrm{Proy}_W^x$. El vector $x-u$ se le denomina componente ortogonal de x ortogonal a W.

Teorema:

Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal de W, entonces:

1) $\mathrm{Proy}_W^x = (x \cdot v_1)v_1 + (x \cdot v_2)v_2 + \cdots + (x \cdot v_k)v_k$
2) $\mathrm{Proy}_W^x = BB^t x$

Donde B es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base B.

Ejemplo: sea $S=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t\in\mathbb{R}^4 / x_3=0\right\}$. Determine $\operatorname{Pr}oy_S^x$ y la componente de x ortogonal a S.

$\forall x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t\in\mathbb{R}^4;\ \ u=\left(x_1,x_2,0,x_4\right)^t\in S$

Calculamos: $x-u=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t-\left(x_1,x_2,0,x_4\right)^t=\left(0,0,x_3,0\right)^t$

$$\operatorname{Pr}oy_S^x=x-\left(x_1,x_2,0,x_4\right)^t=\left(x_1,x_2,0,x_4\right)^t$$

La componente de x ortogonal a S: $x-u=\left(0,0,x_3,0\right)^t$

Ejemplo: si $B=\left\{v_1,v_2,v_3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$, es una base ortonormal de S.

$\operatorname{Pr}oy_S^x=\left(x\cdot v_1\right)v_1+\left(x\cdot v_2\right)v_2+\left(x\cdot v_3\right)v_3$

$$=\left[\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\left[\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\left[\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_4\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_4\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\left(\tfrac{x_1-x_4}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\tfrac{x_1+x_4}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x_1-x_4+x_1+x_4}{2}\\x_2\\0\\\frac{-x_1+x_4+x_1+x_4}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,0,x_4\right)^t$$

Construcción de bases ortonormales:

Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es una base cualquiera de un subespacio vectorial S_k de $\mathbb{R}^n$, es posible mediante un proceso recursivo construir una nueva base $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de S_k ortonormal tal que cada $v_i \in S_i = c\ell\{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ $i = 1, \ldots, k$

Ortonormarlización de Gram-Schmidt

Paso 1: defina $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$, $S_1 = c\ell\{v_1\}$

además $\{v_1\}$ es una base ortonormal de S_1

Paso 2: defina $v_2 = \dfrac{u_2 - \operatorname{Pr} oy_{S_1}^{u_2}}{\left\|u_2 - \operatorname{Pr} oy_{S_1}^{u_2}\right\|}$,

además $v_2 \in S_2 = c\ell\{v_1, v_2\}, v_2 \perp S_1$ y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal de S_2

Paso 3: defina $v_3 = \dfrac{u_3 - \operatorname{Pr} oy_{S_2}^{u_3}}{\left\|u_3 - \operatorname{Pr} oy_{S_2}^{u_3}\right\|}$,

además $v_3 \in S_3 = c\ell\{v_1, v_2, v_3\}, v_3 \perp S_2$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de S_3

$\vdots$

Paso k: defina $v_k = \dfrac{u_k - \operatorname{Pr} oy_{S_{k-1}}^{u_k}}{\left\|u_k - \operatorname{Pr} oy_{S_{k-1}}^{u_k}\right\|}$,

además $v_k \in S_k = c\ell\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, v_k \perp S_{k-1}$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base ortonormal de S_k

Ejemplo: aplique el proceso de GH para transformar la base constituida por los vectores $u_1=(1,1,1), u_2=(0,1,1)$ y $u_3=(0,0,1)$ en una base ortonormal.

$$P_1: v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad S_1=c\ell\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$P_2:\ u_2-\operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2}=u_2-(u_2\cdot v_1)v_1$$

$$(u_2\cdot v_1)v_1=\left[(0,1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$u_2-\operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2}=(0,1,1)-\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \quad \text{además } \left\|\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$v_2=\frac{\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{6}/3}=\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{con } S_2=c\ell\{v_1,v_2\}$$

$$P_3:\ u_3-\operatorname{Pr}oy_{S_2}^{u_3}=u_3-\left[(u_3\cdot v_1)v_1+(u_3\cdot v_2)v_2\right]$$

$$u_3\cdot v_1=(0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_3\cdot v_2=(0,0,1)\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\operatorname{Pr}oy_{S_2}^{u_3}=(u_3\cdot v_1)v_1+(u_3\cdot v_2)v_2$$

$$\operatorname{Pr}oy_{S_2}^{u_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$u_3-\operatorname{Pr}oy_{S_2}^{u_3}=(0,0,1)-\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad \text{además } \left\|\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_3=\frac{\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(0,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$