Valores Máximos y Mínimos

Introducción

Recordemos que en secundario, nos enseñaron que para una función cuadrática del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, esta alcance su máximo o mínimo en su vértice, por ejemplo

$$\boxed{f(x) = -2x^2 + 4x - 5}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \rightarrow \frac{-\Delta}{4a}$$

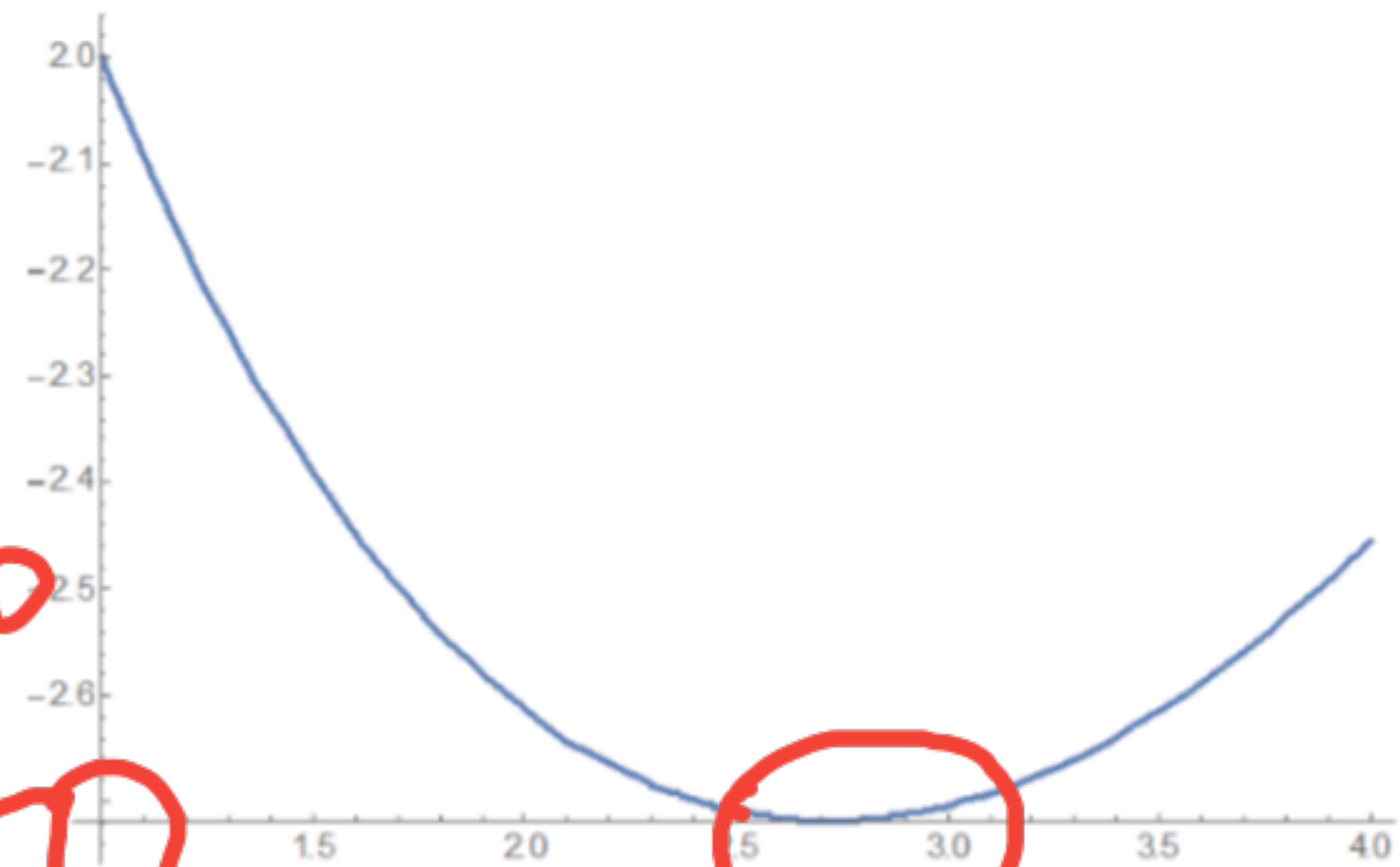
Valores Máximos y Mínimos

Introducción

Pero, como encontrar los valores máximos y mínimos (si es que tiene) de la función

$$f(x) = xln(x) - 2x$$

en $[1, 4]$



máximo

mínimo

Primero necesitamos conocer y definir algunos conceptos.

Valores Máximos y Mínimos

Teoría

Definición Una función tiene un *máximo absoluto* en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$, y el número $f(c)$ se llama el valor máximo de f. La función f tiene un *mínimo absoluto* en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, y el número $f(c)$ se llama el valor mínimo de f. Los valores máximos y mínimos de f se llaman valores extremos de f.

Definición Una función f tiene un *máximo relativo* (*mínimo relativo*) en c si existe un intervalo I tal que $c \in I$ y $f(c) \geq f(x)(f(c) \leq f(x))$ para todo $x \in I$.

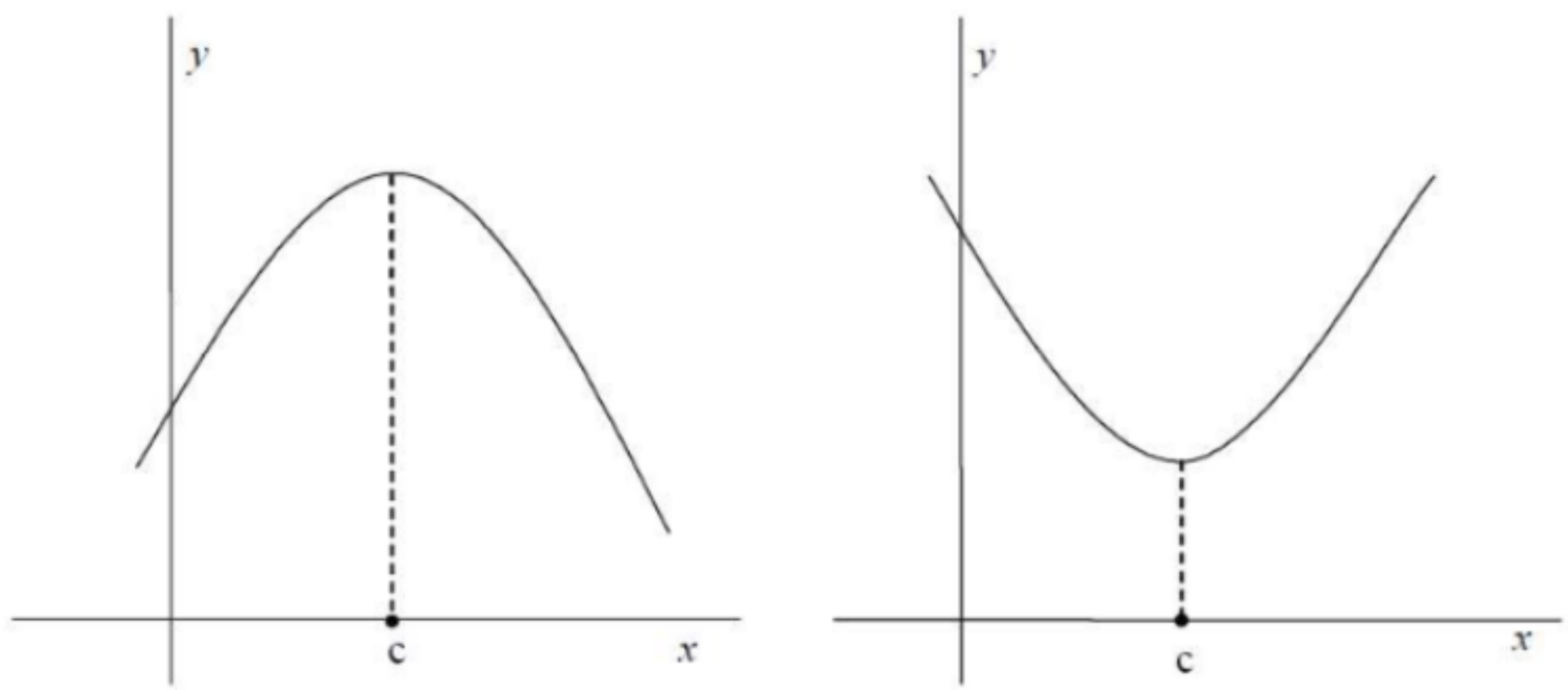


Figura 6: Máximo relativo

Mínimo relativo

Valores Máximos y Mínimos

Teoría

Teorema (De los valores extremos). Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.

Teorema (De Fermat). Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) relativo en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

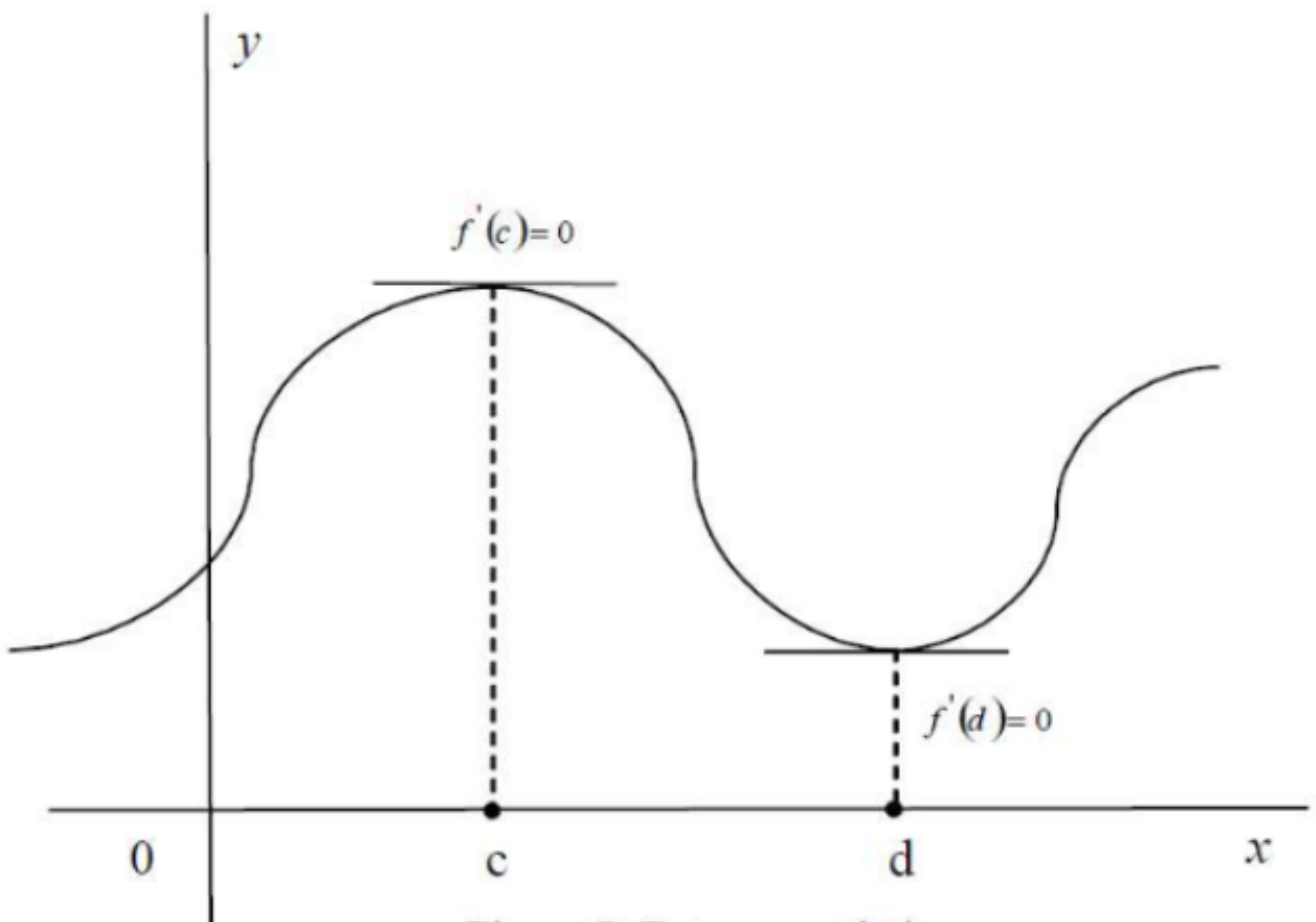


Figura 7: Extremos relativos

Valores Máximos y Mínimos

Teoría

Definición Un *punto crítico* de f es un número $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Teorema (De Rolle). Sea f una función que satisface:
(a) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
(b) f es diferenciable en el intervalo abierto $]a, b[$.
(c) $f(a) = f(b)$.
Entonces, existe un número $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

- $f(x) = \sqrt{x}$

$0 \in f(x)$

$f(0) = 0$

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$0 \notin f'(x)$

$f'(0) = \cancel{1} = \frac{1}{0}$

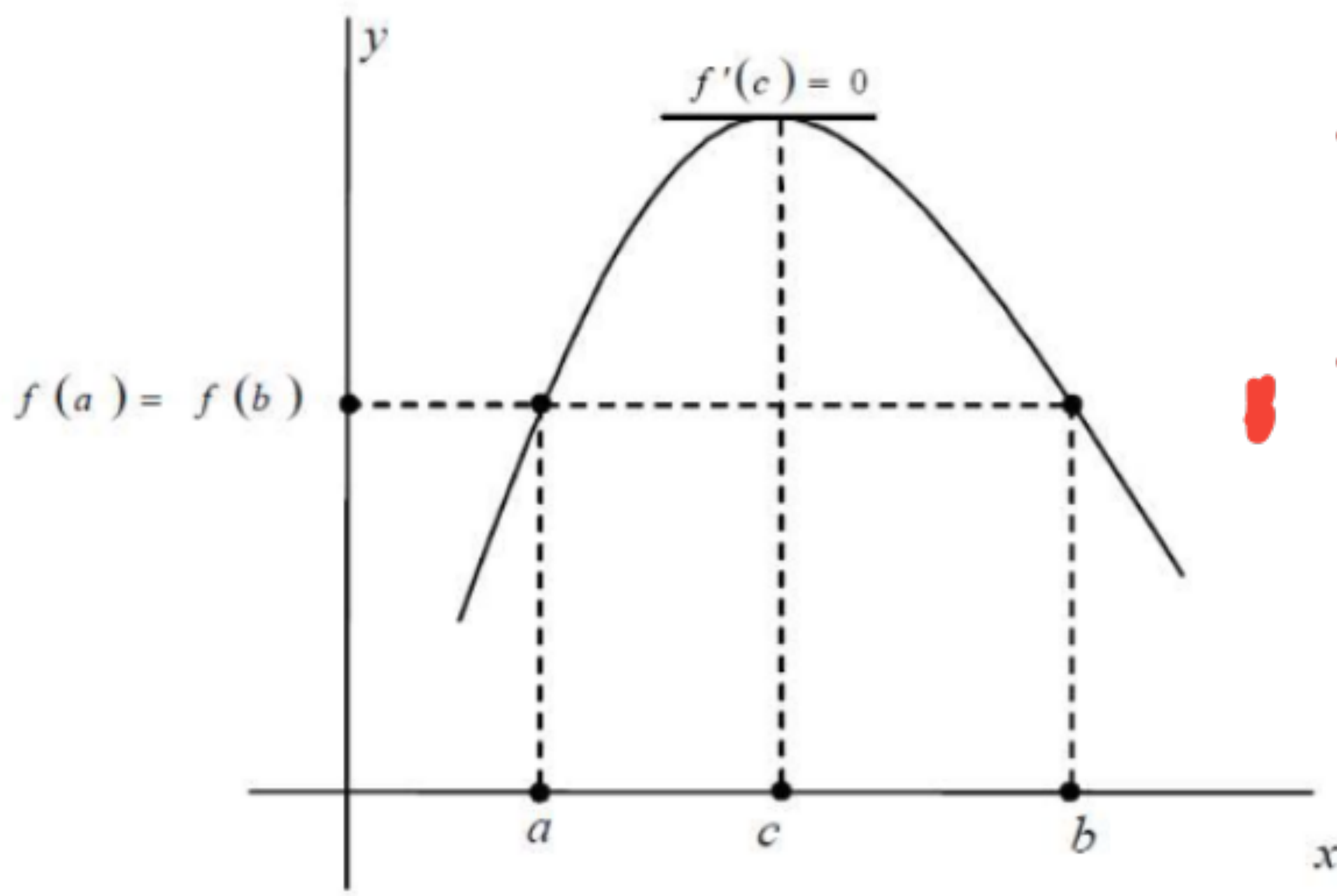


Figura 8: Teorema de Rolle

Valores Máximos y Mínimos

Ejemplos

1. Encuentre el punto crítico de $f(x) = xe^{2x}$.
2. Determinar los valores extremos de
   1. $f(x) = xln(x) - 2x$ en $[1, 4]$
   2. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ en $[-2, 2]$

$$f'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \ , \ \cancel{f'(x) = \nexists}$$

$$e^{2x} \cdot (1 + 2x) = 0$$

① $f(x) = xe^{2x}$

i) $e^{2x} = 0 \lor 1 + 2x = 0$

$S = \emptyset$ $\qquad \boxed{x = -1/2}$

pto crítico

Para determinar los valores extremos de una función en un intervalo [a,b], se recomienda:

1. Encontrar los puntos críticos de f(x).
2. Evaluar en la función en f(x), los extremos del intervalo [a,b] y los puntos críticos (si tiene).
3. La imagen mas grande (pequeña) encontrada en el punto anterior, será el máximo (mínimo) de esa función en ese intervalo [a,b].

Valores Máximos y Mínimos

Ejemplos

2-1. $f(x) = x\ln(x) - 2x$ en $[1,4]$

$f'(x) = \ln(x) + \underbrace{\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}_{1} - 2$

$\boxed{f'(x) = \ln(x) - 1}$

punto crit. $f'(x) = 0$

$\ln(x) - 1 = 0$, $\ln_e(x) = 1$

$\boxed{x = e}$

- $f(1) = 1\cdot\ln(1) - 2\cdot 1 = -2$ máx.
- $f(4) = 4\ln(4) - 2\cdot 4 \approx -2{,}45\ldots$
- $f(e) = e\ln(e) - 2e = -e$

$-2.7182\ldots$ mín

Valores Máximos y Mínimos

Criterio de la primera derivada

Teorema Sea f una función derivable en el intervalo $]a,b[$.
(a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es creciente en $]a,b[$.
(b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es decreciente en $]a,b[$.
(c) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es constante en $]a,b[$.

Teorema (Criterio de la Primera Derivada)
Sea c un punto crítico de una función f en $]a,b[$ que contiene a c. Si f es derivable en $]a,b[$, excepto quizás en c, entonces:
(a) Si f' cambia de negativa a positiva en c, $f(c)$ es un mínimo relativo de f.
(b) Si f' cambia de positiva a negativa en c, $f(c)$ es un máximo relativo de f.
(c) Si f' no cambia de signo en c, $f(c)$ no es un extremo relativo de f.

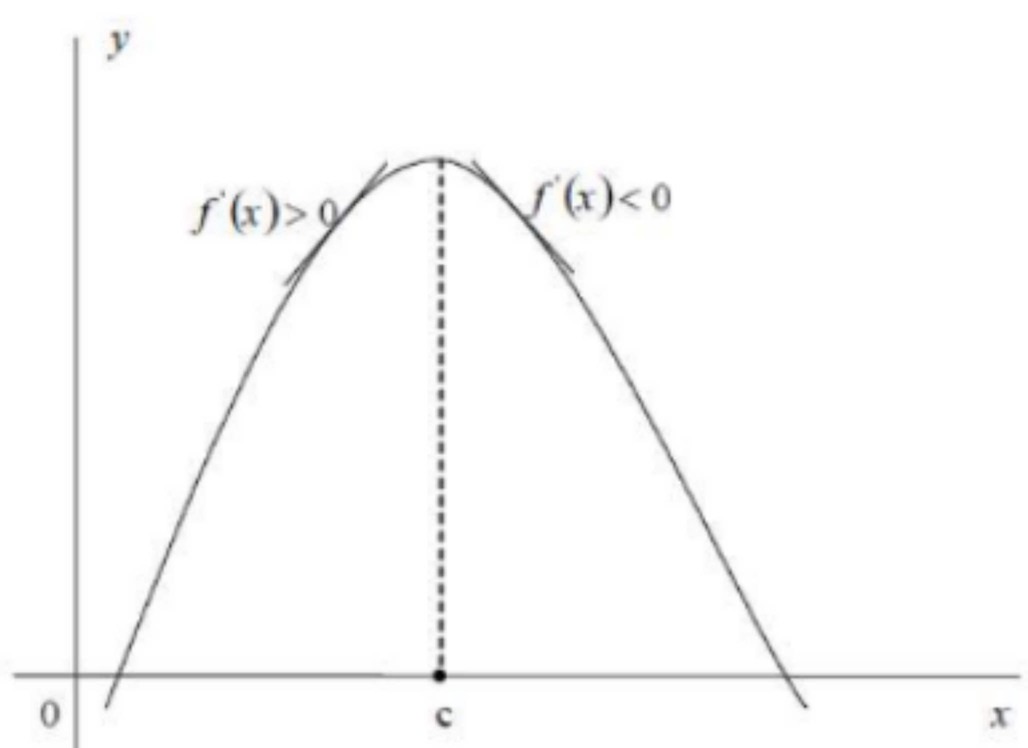


Figura 9: Máximo local

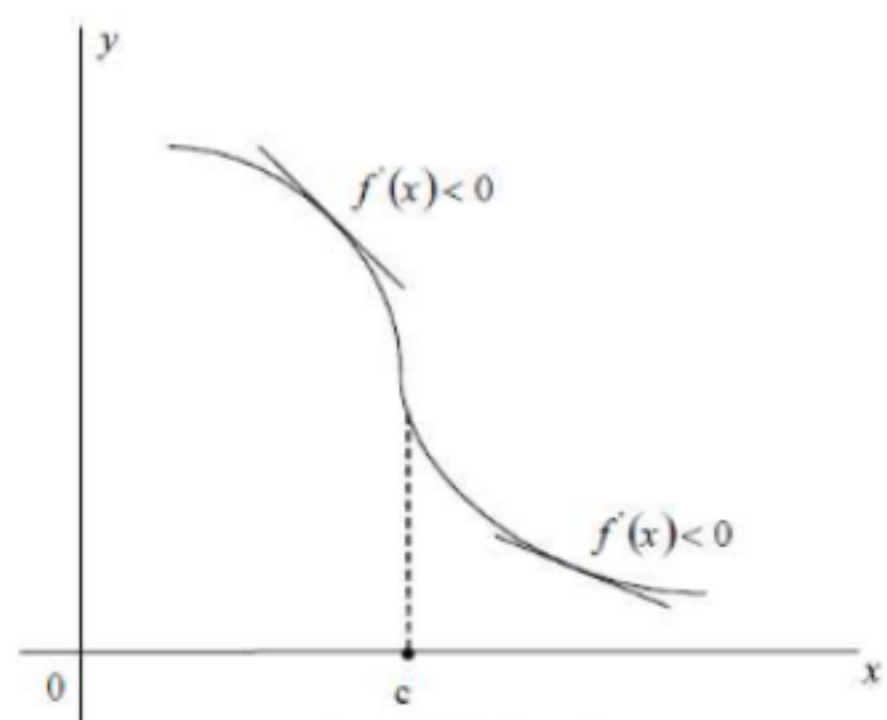


Figura 10: No hay extremo

2 - 2) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x) = \dfrac{5-x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$

$f'(x) = 0$, $5 - x = 0$

$\boxed{x = 5}$

$f'(x) = \nexists$ $\sqrt{(x^2+5)^3} = 0$

No es punto crítico $5 \notin [-2,2]$

$S = \emptyset$

$f(2) = \dfrac{2-1}{\sqrt{2^2+5}} = 1/3$ máx

$f(-2) = \dfrac{-2-1}{\sqrt{(-2)^2+5}} = \dfrac{-3}{3} = -1$ mín

El punto (2,1/3) es el valor máximo, y (-2,-1) es el valor mínimo de f(x) en el intervalo [-2,2].