Relaciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents

Relaciones de Orden

Definición

Si $\mathcal{R}$ es una relación sobre el conjunto A, se dice que la relación $\mathcal{R}$ es de:

- *Pre-Orden si y solo si es reflexiva y transitiva.*
- *Orden (parcial) si y solo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Orden Total si y solo si es de orden y es total.*

Relaciones de Orden

Ejemplo 27

Ejemplo

Se debe tener cuidado al "ordenar", no es lo mismo ordenar personas por estatura, que por edad o por peso.
Sea $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ *y* $\mathcal{R}$ *una relación definida sobre* E*, cuyo gráfico es*

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,d),(b,e),$$

$$(b,f),(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e),(f,f),(g,g),(g,f)\}$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ *es una relación de orden, pero no de orden total.*

a) Refl: $a\mathcal{R}a$, $b\mathcal{R}b$, $c\mathcal{R}c$, $d\mathcal{R}d$, $e\mathcal{R}e$, $f\mathcal{R}f$, $g\mathcal{R}g$

b) Antis: $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow (a=b)$

$(V \wedge f) \Rightarrow f \equiv$ Verd.

Todos estos pares del tipo: (a,b), (a,c)... en donde ambas entradas son diferentes y además no existe (b,a), (c,a) entran en la siguiente lógica...

$$(xRy \wedge y \not R x) \Rightarrow (x \neq y)$$

$$(aRb \wedge b \not R a) \Rightarrow (a \neq b)$$

$$(V \wedge f) \Rightarrow f$$

$$f \Rightarrow f \equiv V$$

Por el razonamiento anterior R, es antisimétrica.

c) Trans: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

$$(aRb \wedge bRd) \Rightarrow aRd$$

$aRc \wedge cRd \Rightarrow aRd$

$aRc \wedge cRe \Rightarrow aRe$

$bRd \wedge dRe \Rightarrow bRe$

$\boxed{\text{R es transitiva.}}$

$\boxed{\text{Como R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, R es una relación de orden...!}}$

¿Orden total? , R debe se

total : $aRb \vee bRa$

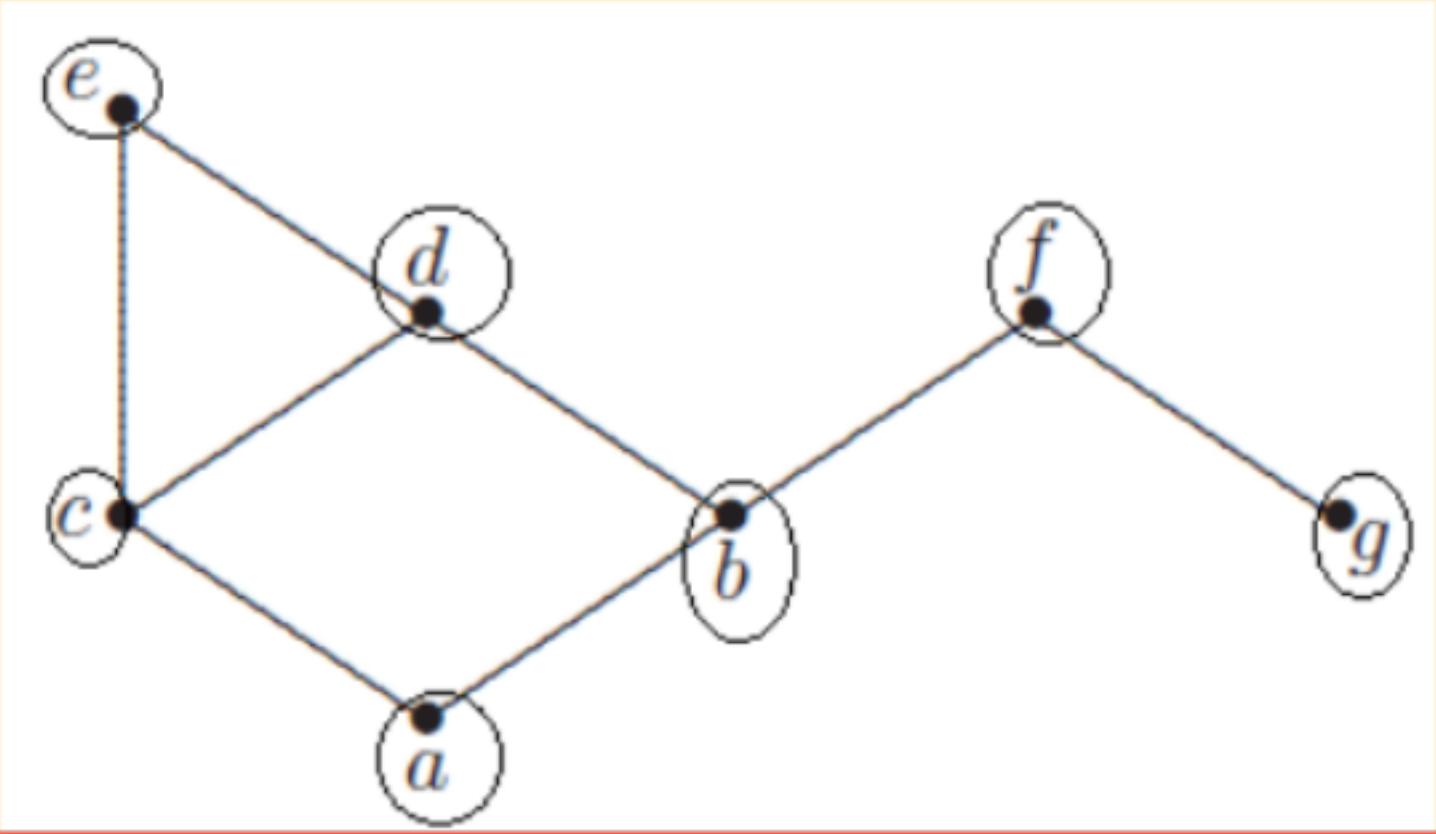
No: $a \not R g \vee g \not R a$

Relaciones de Orden

Definiciones

Ejemplo

El gráfico del ejemplo anterior se puede representar mediante siguiente organigrama



Considerar, x está en un nivel inferior que y para cuando $x\mathcal{R}y$; por ejemplo, en este organigrama se tiene que $a\mathcal{R}d$ y se verifica para cada uno de los elementos de su gráfico.

Relaciones de Orden

Definiciones

Definición

Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden sobre E, se dice que E está $\mathcal{R}-$ ordenado y se denota $(E, \mathcal{R})$.

Relaciones de Orden

Definiciones

Definición

Sea $(E, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado. Sea $A \subseteq E$, con $A \neq \emptyset$ y sea $x \in A$. Se dice que x es:

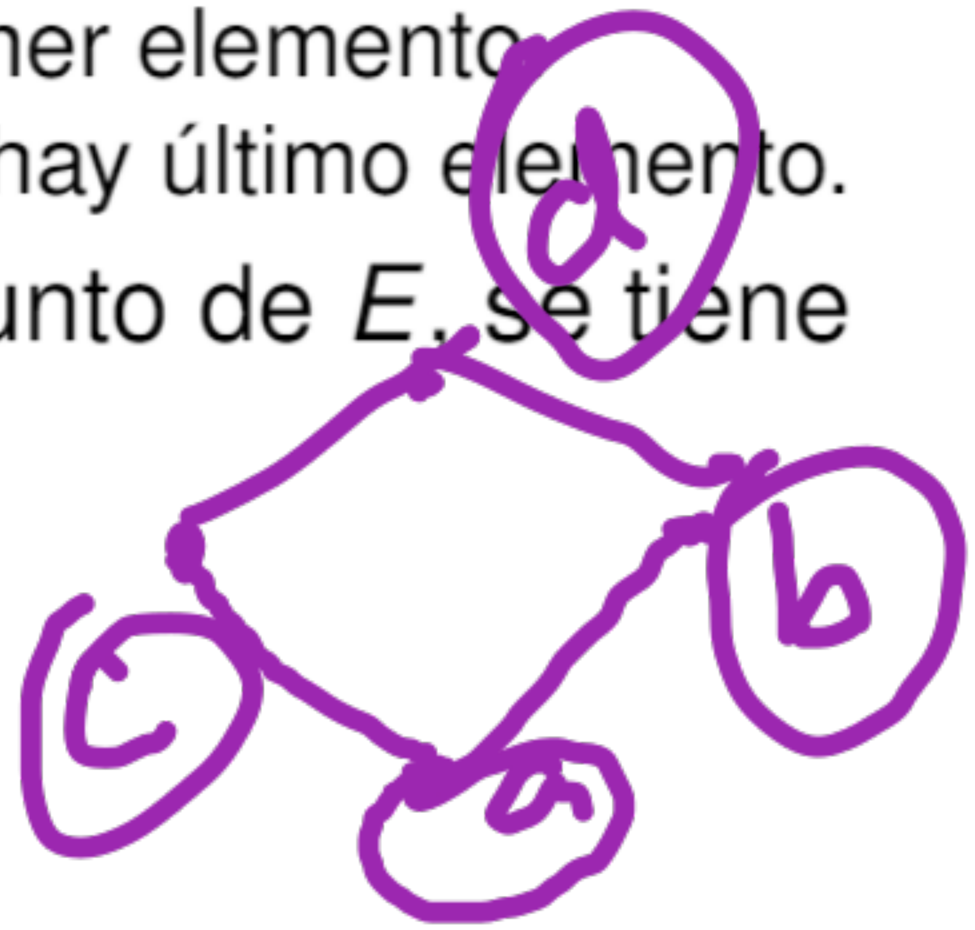
- *Un **elemento minimal** de A sii $\forall y \in A\ [y\mathcal{R}x \implies y = x]$. No tiene predecesores.*
- *Un **primer elemento** de A sii $x\mathcal{R}y, \forall y \in A$. Precede a todos, además todo primer elemento será minimal, pero no a la inversa.*
- *Un **elemento maximal** de A sii $\forall y \in A\ [x\mathcal{R}y \implies x = y]$. No tiene sucesores*
- *Un **último elemento** de A sii $y\mathcal{R}x, \forall y \in A$. Sucede a todos los demás, todo último elemento será maximal, pero no necesariamente a la inversa.*

Ejemplo 28

1. Sea $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $\mathcal{R}$ una relación definida sobre E, cuyo gráfico es

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, d), (b, e),$$
$$(b, f), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e), (f, f), (g, g), (g, f)\}$$

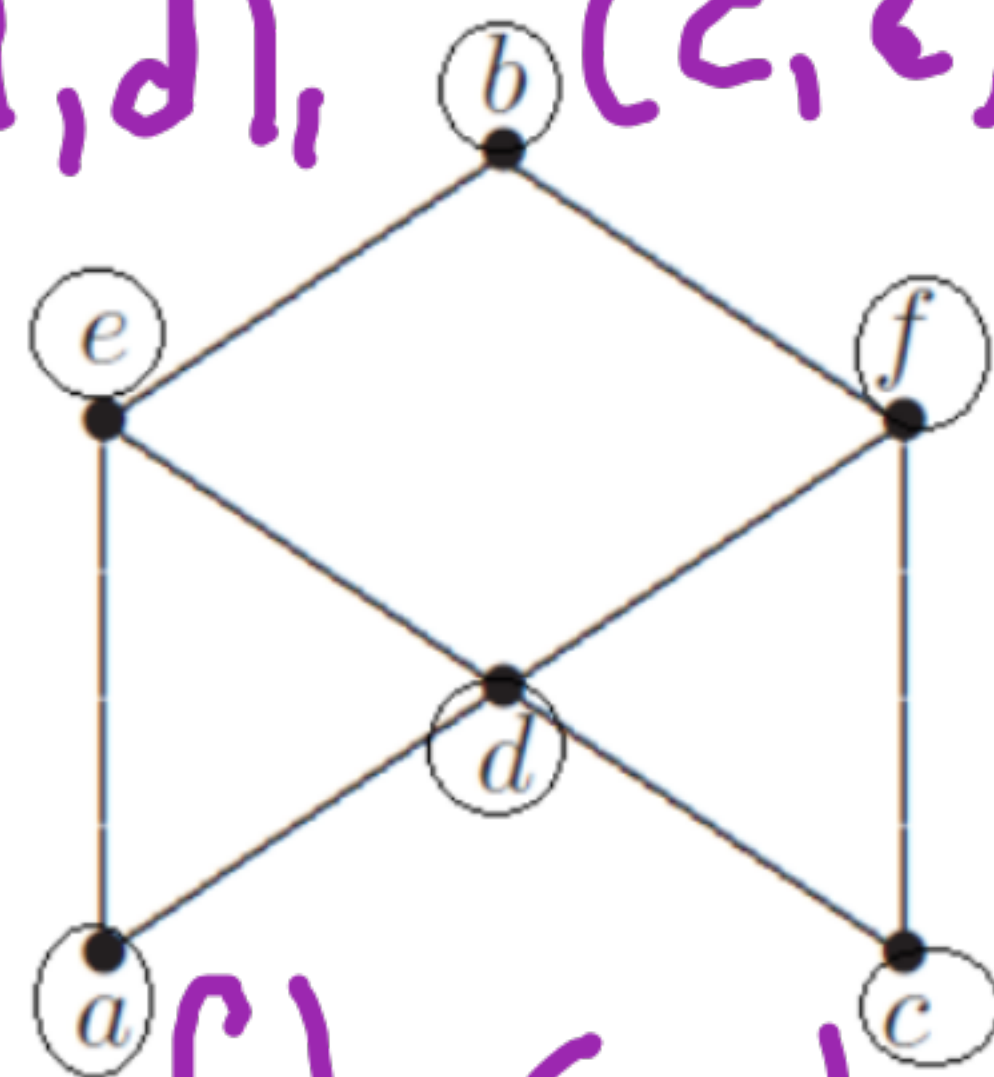
   se puede observar:
   - a y g son minimales de E, pero E no tiene primer elemento.
   - e y f son elementos maximales de E, pero no hay último elemento.
2. Si ahora se considera $A = \{a, b, c, d\}$ subconjunto de E, se tiene que
   - el elemento a es primer elemento de A.
   - el elemento d sería un último elemento de A.



Ejemplo 29

Sea $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $\mathcal{R}$ una relación definida sobre E, cuyo organigrama es

$G_R = \{(a,a), (d,d), (c,c), (f,f), (e,e), (b,b), (a,d), (a,e), (c,d), (c,f), (d,e), (d,f), (e,b), (f,b), (a,b), (a,f), (c,b), (c,e)\}$



1. Determinar el gráfico de $\mathcal{R}$.
2. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, pero no de orden total. Ejercicio para el estudiante.
3. Determinar los elementos minimales, primer y último elemento

- min. mat: a y c
- no hay primer elemento
- maximal y último elemento. b

Ejemplo 30

Ejemplo

Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}^*$, por

$$a\mathcal{R}b \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b^k)$$

Analice cuáles propiedades cumple la relación $\mathcal{R}$ y determine si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, de orden o de orden total.

a) Refl. $a\mathcal{R}a$

$a = a^K$, $k = 1$ ✓

$a = a$

$3\mathcal{R}3$

$3 = 3^1$ ✓

R es reflexiva, cuando k=1.

b) Simét. $aRb \Rightarrow bRa$

No, un contraejemplo es

$9R3 \Rightarrow 3 = (9)^{1/2}$ $1/2 \notin \mathbb{Z}$

$3 \not{R} 9$

$9 = 3^2$

Como R, no es simétrica descartamos que sea una relación de equivalencia.

c) Ant.s $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow (a=b)$

$(a \neq b) \Rightarrow (a \not R b \vee b \not R a)$

$$\left.\begin{array}{l} aRb: \ a = b^{k_1}, \ k_1 \in \mathbb{Z} \\ bRa: \ b = a^{k_2}, \ k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿a = b?$$

$$a = (a^{k_2})^{k_1} = \boxed{a^1 = a^{k_2 k_1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{k_2 \cdot k_1 = 1}_{k_1 = 1/k_2}$$

$k_1 = k_2 = 1$

$k_1 = k_2 = -1$

Con esos valores de k, se garantiza que la relación es antisimetrica.

d) Trans. $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

$$\underbrace{a = b^{k_1} \wedge b = c^{k_2}} \rightarrow a = c^{k_3} \ ?$$

k_1, k_2, k_3 son enteros

$$a = \left(c^{k_2}\right)^{k_1}$$

$$a = c^{k_2 \cdot k_1}, \quad k_3 = k_2 \cdot k_1$$

$$a = c^{k_3}$$

R es una relación transitiva...!

e) Total: $aRb \vee bRa$

No: contraejemplo $\quad 5 \not R 4 \vee 4 \not R 5$

Del análisis de los puntos anteriores, R es una relación de orden.

Ejemplo 31: ejercicio estudiantes

Sea $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $\mathcal{R}$ una relación definida sobre E, cuyo organigrama es:

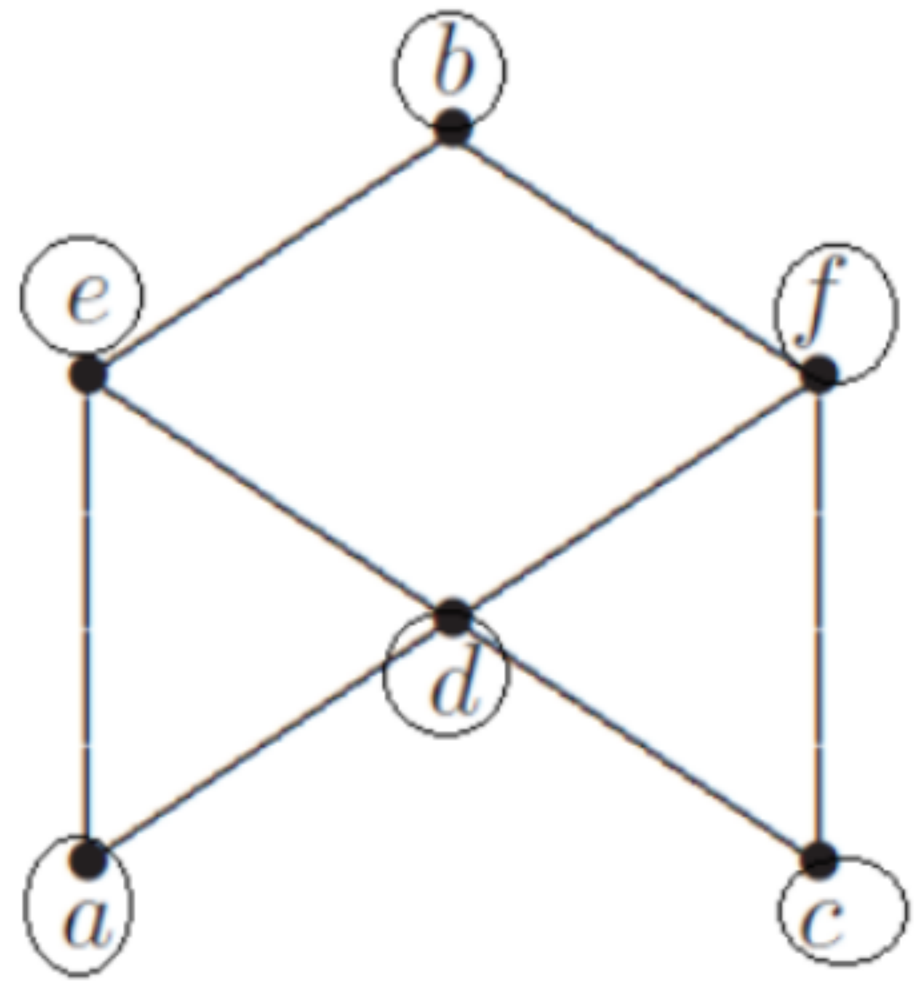


Figure: Organigrama

1. Determine el gráfico de $\mathcal{R}$.
2. Verifique que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, pero no de orden total.
3. Si existen, determine los elementos maximales, minimales, primero y último elemento.

Para reflexionar...

Acá estamos, con un futuro lleno de maravillas tecnológicas y nosotros con el temor de aprender matemáticas a como es debido...

MaLu