Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents

Tipos de funciones

Funciones polinomiales

*Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama **función polinomial de orden n** a la expresión*

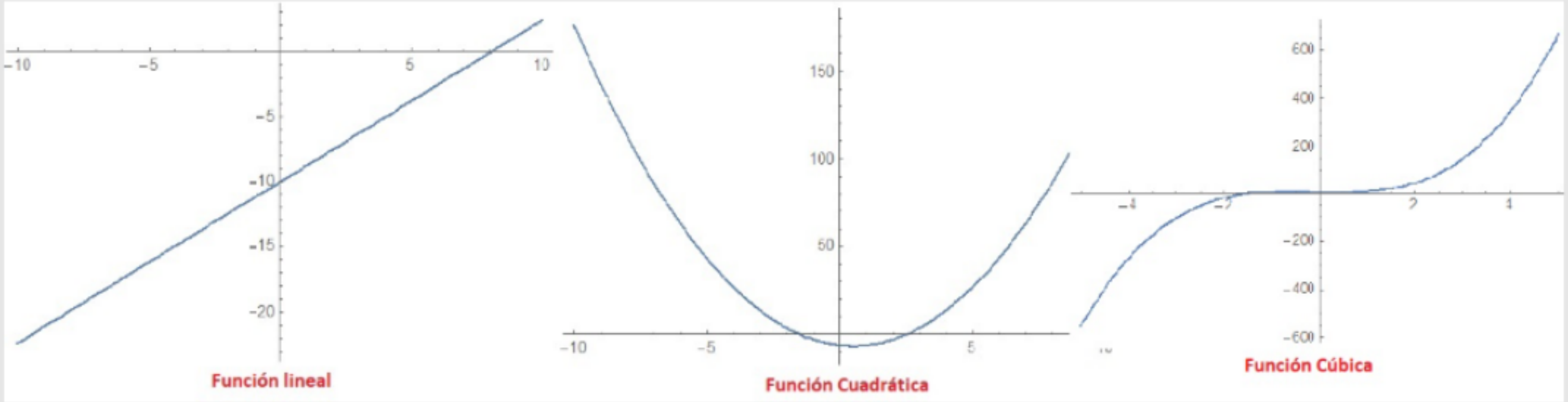
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ Los casos más conocidos suelen ser

1. *Función lineal: $f(x) = mx + b$.*
2. *Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.*
3. *Función cúbica: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.*

Tipos de funciones

Funciones polinomiales



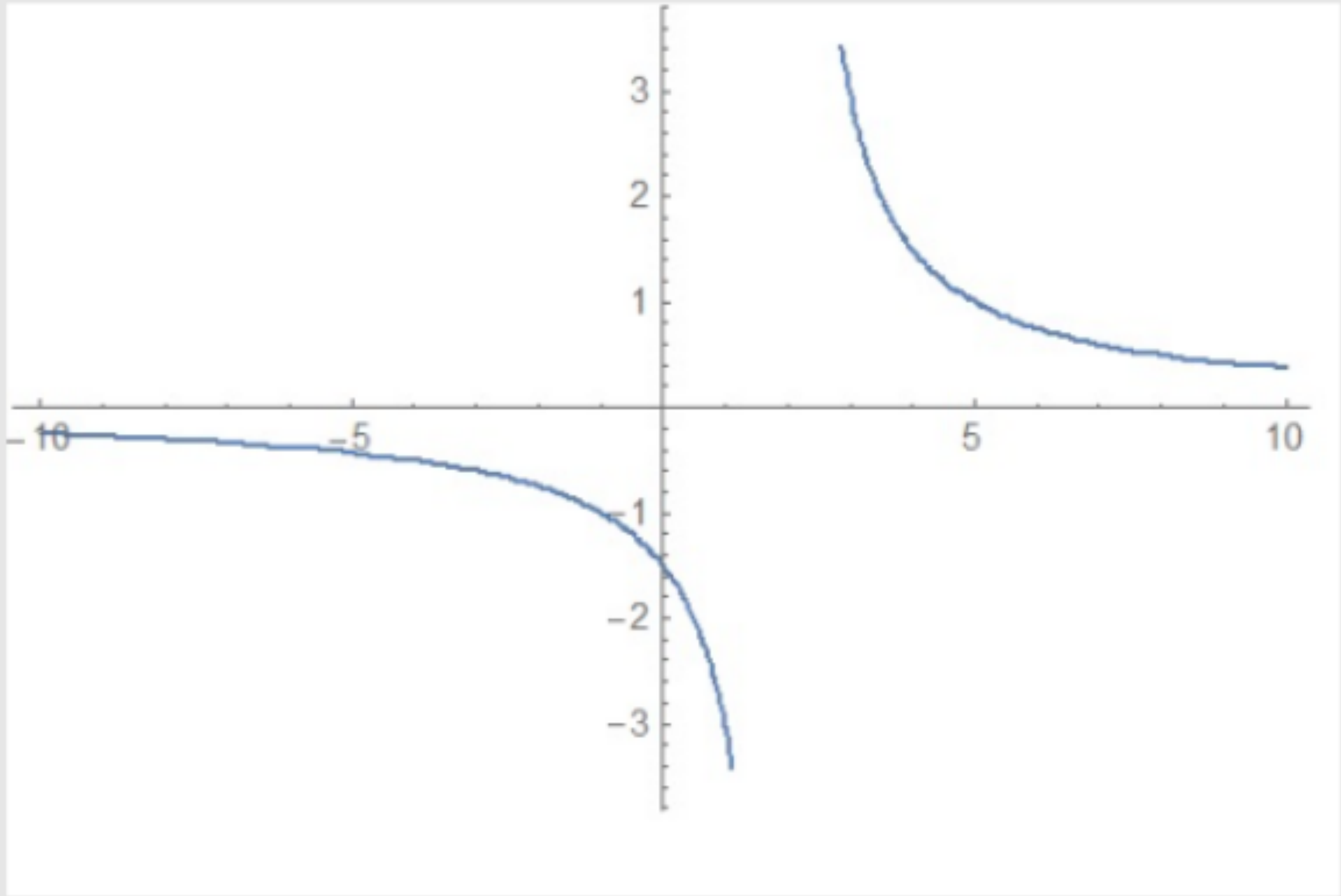
Nota: no es el objetivo de este curso entrar en análisis de las funciones lineales o cuadráticas, ya que ellas son estudiadas a nivel de secundaria.

Tipos de funciones

Función racional

Dada una función $f : D_f \to \mathbb{R}$ llamada función racional, la cual se define como

$$f(x) = \frac{c}{(x-a)^n}$$

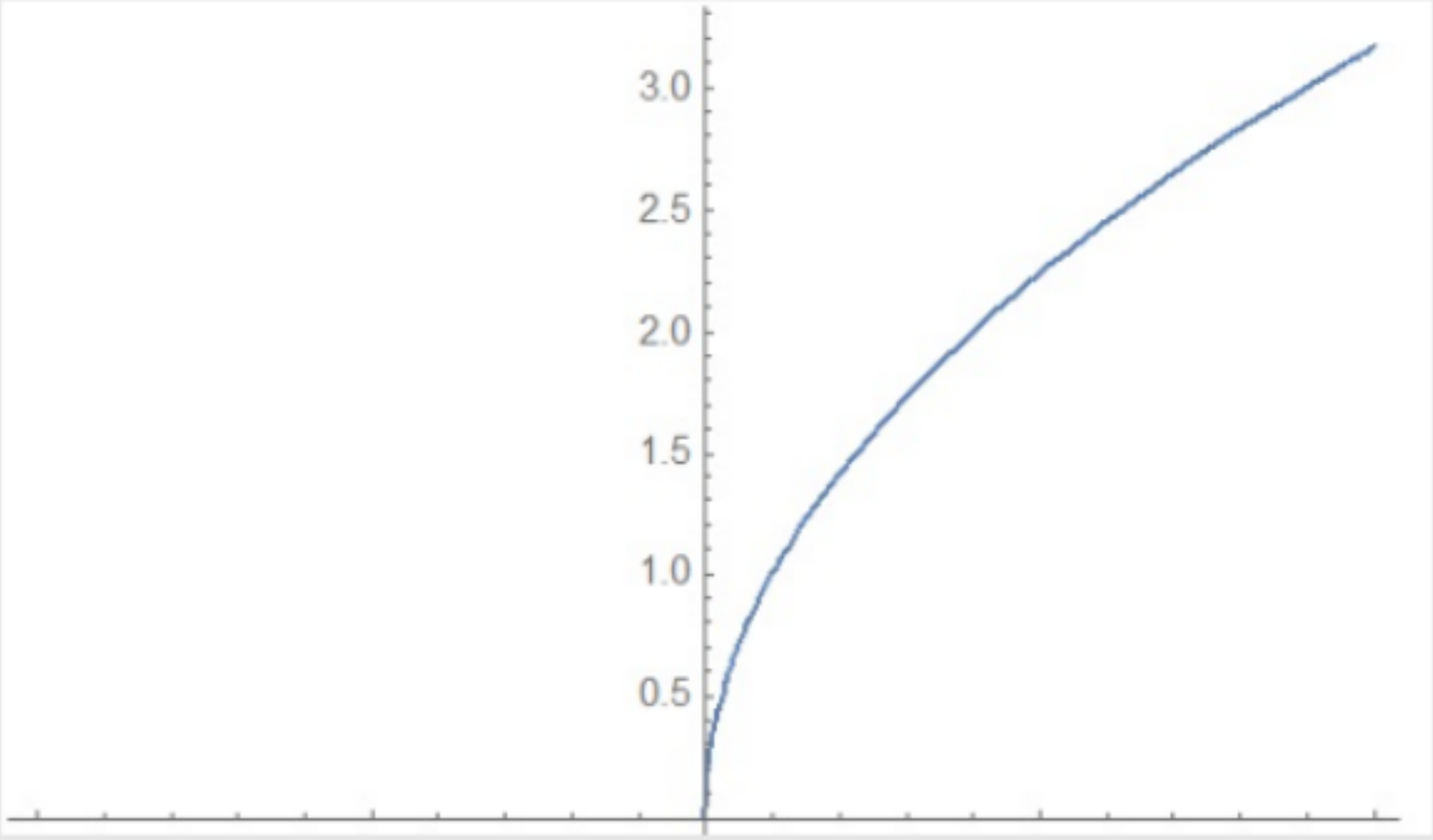


Tipos de funciones

Función raíz cuadrada

Dada una función $f : D_f \to \mathbb{R}$ llamada ***función raíz cuadrada****, la cual se define como*

$$f(x) = \sqrt{x+a} + b$$



Tipos de funciones

Función definida por trozos

Debemos considerar casos de funciones en donde para un intervalo del dominio se asigna una función $f_1(x)$, para otro intervalo otra función $f_2(x)$ y así sucesivamente, como por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si \quad x \leq -2 \\ 5 \quad si & -2 < x < 5, \quad donde \quad f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x^2 - 3x & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

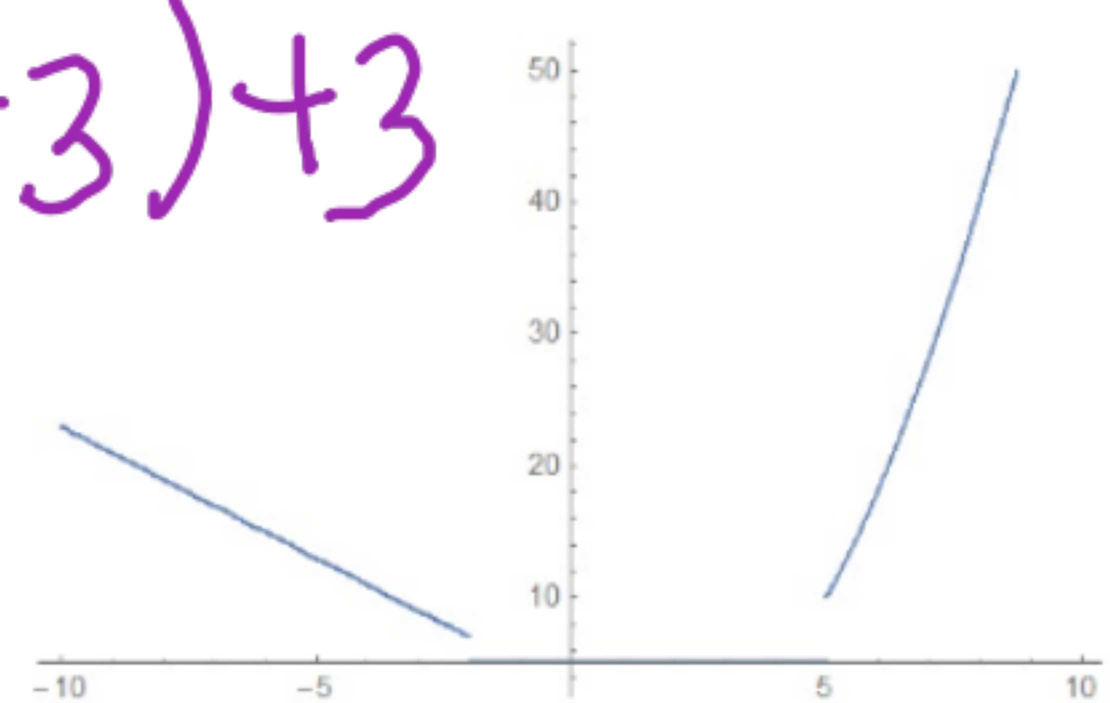
$(1,5)$

$f(1) = 5$

$f(-3) = -2(-3)+3$

$= 9$

$(-3,9)$



$f(6) = 6^2 - 3(6)$

$= 18$

$(6,18)$

Tipos de funciones

Ejemplo 11

Si tenemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si \quad x \leq -2 \\ 5 & si \quad -2 < x < 5 \\ x^2 - 3x & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

$f(-5) = -2(-5)+3$
$= 13$

$f(6) = 18$

$f(4) = 5$

Determinar

1. $\dfrac{f(-5) + 3f(4)}{[f(6)]^2} = \dfrac{13 + 3(5)}{18^2} = \dfrac{28}{324} = \dfrac{7}{81}$
2. La preimagen de 12.

R/ $x = -9/2$

$f(x) = 12$

① $-2x + 3 = 12$
$-2x = 9$
$x = -9/2$

② $x^2 - 3x = 12$
$x^2 - 3x - 12 = 0$
$(x-4)(x+3) = 0$
$x = 4$, $x = -3$

$x \geq 5$

Dominio máximo de una función real

Definición

- *El dominio máximo de una función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el cual $f(x)$ está definida. Para denotarlo, se usa la simbología D_f.*
- *Conocer el dominio de una función es importante para poder hacer la gráfica de la función en el plano cartesiano.*
- *El dominio máximo depende del tipo de función con la cual se trabaja.*

Dominio máximo de una función real

Función polinomial

El dominio máximo de una función polinomial es todo el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$*.*
Funciones como: $f(x) = -3x + 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ *tienen* $D_f = \mathbb{R}$

Dominio máximo de una función real

Función racional

El dominio máximo de una función racional del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *es aquel conjunto de números reales donde se exceptuan los casos donde* $Q(x) = 0$*, en otras palabras*

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) = 0\}$$

Ejemplo 12: determine el dominio máximo de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2}$, $(x-1)^2 = 0$, $x-1=0$, $x=1$

   $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

2. $f(x) = \dfrac{5x-2}{x^2-x-2}$, $x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

   $x=2$, $x=-1$

   $Df = \mathbb{R} - \{-1,2\}$

Dominio máximo de una función real

Función radical

El dominio máximo de una función racional del tipo $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, *donde n es un número par, es aquel conjunto de números reales donde* $P(x) \geq 0$, *en otras palabras*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\}$$

$-3x+2 \geq 0$, $-3x \geq -2$, $x \leq \frac{2}{3}$, $]-\infty, \frac{2}{3}]$

Ejemplo 13: determine el dominio máximo de las siguientes funciones

1. $f(x) = \sqrt{-3x+2}$ $D_f =]-\infty, 2/3]$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^2+5x-3}$ $D_g = \mathbb{R}$
3. $h(x) = \sqrt[6]{-6x^2+x+2}$

$-6x^2+x+2 \geq 0$, $(-3x+2)(2x+1) \geq 0$

$(-3x+2)(2x+1) \overset{+}{\geq} 0 \rightarrow$ tabla signos

decreciente

	$-\infty$	$-1/2$	$2/3$	$+\infty$
$\boxed{-3}x+2$	+	+	−	
$\boxed{2}x+1$	−	+	+	
*	−	+	−	

creciente

ceros

i) $-3x+2=0$

$$\boxed{x = 2/3}$$

ii) $2x+1=0$

$$\boxed{x = -1/2}$$

$D_h: \left[-1/2, 2/3\right]$

Dominio máximo de una función real

Función logaritmica

El dominio máximo de una función logaritmica del tipo $f(x) = \log_a[P(X)]$, *donde* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, *es aquel conjunto de números reales donde* $P(x) > 0$, *en otras palabras*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) > 0\}$$

Ejemplo 14: determine el dominio máximo de las siguientes funciones

1. $f(x) = \log_4\left(x - \dfrac{3}{x-2}\right)$
2. $g(x) = \log\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)$

① $f(x) = \log_4\left(x - \frac{3}{x-2}\right)$, $\frac{x}{1} - \frac{3}{x-2} > 0$

$\frac{x(x-2) - 3}{x-2} > 0$, $\frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} > 0$

$\frac{(x-3)(x+1)}{x-2} > 0$ → tabla signal

ceros

$x - 3 = 0$, $x = 3$

$x + 1 = 0$, $x = -1$

$x - 2 = 0$, $x = 2$

	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$1 \cdot x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$1 \cdot x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$1 \cdot x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$	
*	$-$	$+$	$-$	$+$	

$D_f : \left]-1, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

5 $f(x) = \log(\underbrace{x^3 - 5x^2 + 6x})$

$x^3 - 5x^2 + 6x > 0$

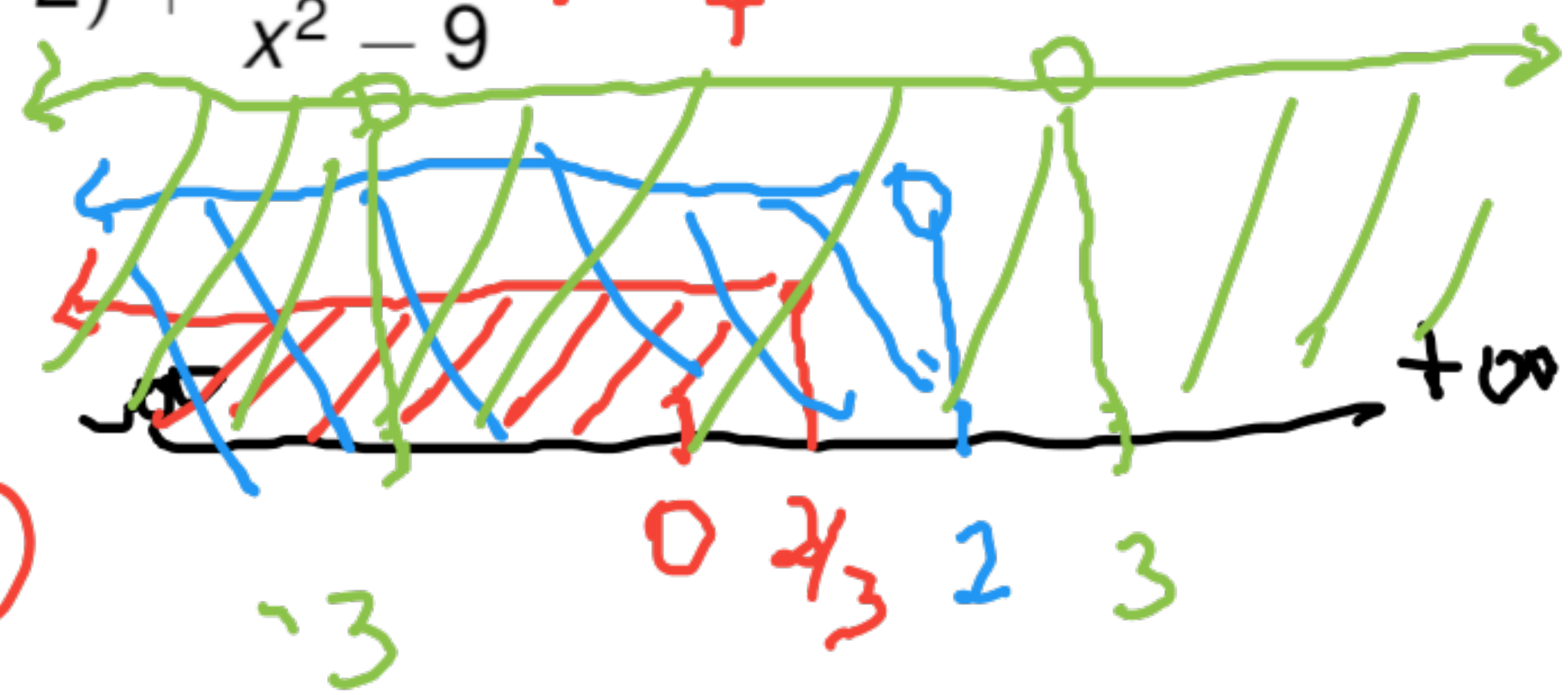
$x(x^2 - 5x + 6) > 0 \quad , \quad \underbrace{x(x-3)(x-2) > 0}$

terminar

Dominio máximo de una función real

Ejemplo 15

1. $f(x) = \sqrt{-3x+2} - 2\log(-x+2) + \dfrac{5x-2}{x^2-9}$, $D_f = \left]-\infty, \tfrac{2}{3}\right] - \{-3\}$
2. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2+3x}{x^2-x+1}}$



$D_f = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

$D_1 : -3x+2 \geq 0$, $-3x \geq -2$, $x \leq 2/3$: $\left]-\infty, 2/3\right]$

$D_2 : -x+2 > 0$, $-x > -2$, $x < 2$: $\left]-\infty, 2\right[$

$D_3 : \mathbb{R} - \{x^2-9=0\}$, $(x-3)(x+3)=0$, : $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$

② $g(x) = \sqrt{\dfrac{2+3x}{x^2-x+1}}$

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$	
$*$		$-$		$+$	

$2+3x=0$

$x=-2/3$

$$\frac{2+3x}{x^2-x+1} \geq 0$$

, $a=1$, $b=-1$, $c=1$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3$

ax^2+bx+c

$\Delta = b^2-4ac$, $\Delta < 0 \rightarrow$ no fact

D_g : $[-2/3, +\infty[$

Puntos de intersección

Definición

Dada una función $y = f(x)$ con un dominio bien definido se define

- *El punto (puntos) donde $f(x)$ interseca al eje x en aquellos casos en donde*

  $$f(x) = 0$$

  Nota: *una función puede poseer uno, ninguno o muchos puntos de intersección con el eje x.*

- *El punto (puntos) donde $f(x)$ interseca al eje y en aquellos casos en donde*

  $$y = f(0)$$

  Nota: *una función puede tener uno o ningún punto de intersección con el eje y*

Puntos de intersección

Ejemplo 16

Determime los puntos de intersección con los ejes, de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$