Universidad de Costa Rica - Sede Guanacaste
Estructuras Discretas (MA-0320) - Práctica III

Prof. Luis Edo. Amaya B.

Noviembre 2020

1. Funciones

1.1. Ejercicios con Mathematica

1. Implemente una rutina en Mathematica que reciba $G_{\mathcal{R}}$ y determine si dicha relación es una función.

2. Diseñe una rutina, que reciba el criterio de una función y regrese: puntos de intersección con los ejes, intervalos donde es positiva, intervalos donde es negativa, determine si la función es par o impar, muestre la gráfica de la función.

3. Para: $E_p(m)$ denota el exponente del primo p en la factorización prima de m, entonces

$$E_p\left(n!\right) = \lfloor\frac{n}{p}\rfloor + \lfloor\frac{n}{p^2}\rfloor + \cdots \lfloor\frac{n}{p^k}\rfloor + \cdots$$

   donde la suma es finita, pues es claro que, a partir de algún s, la potencia p^s será mayor que n y los términos sucesivos serán cero. Diseñe una rutina en Mathematica que apartir de la propiedad anterior determine $E_p\left(n!\right)$

1.2. Ejercicios de cálculo

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_4$ definidas sobre A, cuyos gráficos respectivos son:

   a) $G_1 = \{(1, 1), (2, 3)\}$
   b) $G_2 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$
   c) $G_3 = \{(2, 1), (3, 1), (1, 3)\}$
   d) $G_4 = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$

Para cada una de estas relaciones, determine si son funciones.

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A, cuya gráfica H viene dada por $H = \{(1, 1), (2, 3), (4, 2), (5, 4), (3, 5)\}$. Justifique si $\mathcal{R}$ es una función biyectiva.

3. Determine todas las funciones biyectivas sobre $A = \{1, 2, 3\}$.

4. Determine todas las funciones sobreyectivas de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{1, 2\}$.

5. Si $|A| = 4$ y $|B| = 6$, ¿cuántas funciones existen de A en B?, ¿cuántas funciones inyectivas existen de A en B?

6. Sea $A = \{a, b, c\}$ y considere la función $f : P(A) \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(B) = |B|$.

   a) Determine $f(\{a, c\})$ y $f(\{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\})$
   b) Determine $f^{-1}(\{2, 4\})$
   c) Determine si f es inyectiva o sobreyectiva.

7. Para $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la función $f : A \to A$ definida por:

$$f(a) = \begin{cases} a - 3 & si \quad a \geq 4 \\ a + 3 & si \quad a < 4 \end{cases}$$

   a) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.
   b) Calcule $f(\{0, 3, 6\})$
   c) Calcule $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(f(\{6\}))$

8. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \times A \to B$, definida por

$$f((a, b)) = f(a) = \begin{cases} 1 & si \quad a < b \\ 3 & si \quad a > b \\ 4 & si \quad a = b \end{cases}$$

   a) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.
   b) Determine $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$

9. Sea $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, considere la función

$$f : A \times B \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

definida por

$$f((a, b)) = f(a) = \begin{cases} 2a & si \quad a < b \\ b & si \quad a > b \\ a + b & si \quad a = b \end{cases}$$

a) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.

b) Calcule $f^{-1}(\{1,3,5,\})$, $f(f^{-1}(\{5\}))$, $f(f^{-1}(\{4,5\}))$

c) Calcule $f((f(3,2), f((f(3,2), f(3,2)))))$

10. Pruebe que los últimos diez dígitos del número 45! son iguales a 0.

11. Calcule el valor de las siguientes expresiones

a) $\dfrac{100! - 99!}{98!}$

b) $\dfrac{100! \cdot 101!}{(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100)^2}$

12. Calcule el exponente del 2 en la factorización prima de 75!.

13. Determine si las siguientes funciones son par, impar o ninguna de las anteriores.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = \dfrac{2 - x^3}{2x + x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x}$

14. Determine el criterio de una función que sea par e impar al mismo tiempo.

15. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \quad si \quad x < 2 \\ 3 \quad si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Con la ayuda de Mathematica realice la gráfica en el plano cartesiano de la función.

b) Calcule las imágenes de 1, 2, 3 y las preimágenes de 1, 2, 3.

c) Determine el dominio, el codominio y el ámbito de f.

d) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

e) Calcule $f([0,4])$, es decir, la imagen directa de $[0,4]$.

16. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \quad si \quad x < -1 \\ 3 \quad si \quad -1 < x < 1 \\ -x + 2 \quad si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Con la ayuda de Mathematica realice la gráfica en el plano cartesiano de la función.
b) Calcule las imágenes de -2, 0, 3 y las preimágenes de -2 y de 1.
c) Determine el dominio, el codominio y el ámbito de f.
d) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

17. Considere las funciones $f(x) = 3x+2$ y $g(x) = 1-2x$. Calcule los criterios $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y $(g \circ g)(x)$.

18. Encuentre las funciones lineales f tales que $(f \circ f)(x) = 4x + 1$.

19. Encuentre las funciones lineales f tales que $(f \circ f \circ f)(x) = -8x + 5$.

20. Sea $f(x) = 7 + \dfrac{1}{6-x}$. Pruebe que $(f \circ f \circ f)(x) = x$. Además, determine el dominio de f y el dominio de $f \circ f \circ f$.

21. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que satisface $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$. Determine el criterio de $f(x)$.

22. Considere las funciones reales de variable real f, g, h, i, con criterios $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 3$, $h(x) = 4 - x$, $i(x) = \sqrt[4]{4}$. Calcule los siguientes criterios de las respectivas funciones y su dominio:

a) $[f \circ (h - g)](x)$
b) $\left(\dfrac{f}{g \cdot h}\right)(x)$
c) $(f \circ g - i \circ g)(x)$

23. Para cada caso, determine dos funciones f y g, diferentes de la función identidad, de manera que se cumpla que $h(x) = (f \circ g)(x)$:

a) $h(x) = (2x+3)^4$, y que g no sea una función lineal.
b) $h(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1$
c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 5$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + 2x} - 2x + 4$

24. Determine el dominio máximo de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{5 - x}} - \log(x^3 - 8)$
b) $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2 - 5x}} + \sqrt[6]{-x^2 + 7x} + 8$

c) $h(x) = \log\left(-2x - \dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{x^2}{x^4 - x^2 - 2}$

25. Determine los puntos de intersección con los ejes e intervalos donde la función es positiva y negativa.

    a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}$

    b) $f(x) = \dfrac{-x}{x+2} - \dfrac{5}{x-2}$

26. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x \geq 2 \\ -x + 2 & si \quad x < 2 \end{cases}$$

    y la función g definida por $g(x) = x^2 + x + 2$.

    a) Determine el criterio de $(f+g)(x)$

    b) Determine el criterio de $(f \circ g)(x)$.

27. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x \leq 1 \\ 1 - 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

    y la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -x + 2 & si \quad x \leq 3 \\ x - 5 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

    a) Determine el criterio de $(f+g)(x)$

    b) Determine el criterio de $(f \circ g)(x)$.

28. Si $f(x) = -3x + 1$, calcule $(f \circ f \circ f)^{-1}(x)$.

29. Considere las dos funciones f y g, definidas sobre sus respectivos dominios de números reales, con $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $f(x) = x - 1$. Verifique que $(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = \dfrac{-4}{x+4}$.

30. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva, si $(2,3) \in G_f$ y además $f^{-1}\left(\dfrac{k+3}{k-2}\right) = 2$, calcule el valor de k.

31. Dé un ejemplo de una función que sea inyectiva y no invertible.

32. Dé un ejemplo de una función que sea sobreyectiva y no invertible.

33. Sea $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$ definida por $f(x) = \dfrac{5x+3}{3x-2}$.

    a) Pruebe que f es una función biyectiva.
    b) Calcule $f^{-1}(x)$ y compruebe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

34. Sea $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x-7}{9x+6}$.

    a) Si se sabe que f es biyectiva, calcule el criterio de f^{-1}.
    b) Compruebe que $f^{-1}(x) = (f \circ f)(x)$.

35. Sea $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-3}$. Pruebe que f es inyectiva pero no es sobreyectiva.

36. Considere la función $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \geq 1 \\ x-1 & si \quad x < 1 \end{cases}$$

    Encuentre el criterio de $f^{-1}(x)$

37. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad x \geq 0 \\ x+1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

    a) Encuentre el criterio de $f^{-1}(x)$.
    b) Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en un mismo sistema cartesiano.
    c) Encuentre los puntos en donde se intersecan f y f^{-1}.

38. Considere la función $f : \mathbb{R} \to]-\infty, -1[\cup]1, 3]$ definida por: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2}$.

    a) Demuestre que f es biyectiva.
    b) Determine el criterio de $f^{-1}(x)$.
    c) Compruebe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

39. Sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere las permutaciones

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

    a) Calcule $p_2 \circ p_2$
    b) Calcule $p_1 \circ p_2$
    c) Calcule p_2^{-1}

2. Máquinas de estado finito

2.1. Ejercicios Programados

1. Realice con ayuda de *Mathematica* , el diagrama de transición de las siguientes máquinas de estado finito:

   a) $M = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\delta = \{0, 1, 2\}$, $\sigma^* = \sigma_0$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_2, a)	(σ_2, b)
Δ	σ_1	σ_0	σ_1	σ_2	σ_0	σ_1
Ω	0	2	1	0	3	2

   b) $M = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\delta = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \sigma_2$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)
Δ	σ_1	σ_2	σ_0	σ_0	σ_1
Ω	1	0	1	0	1

	(σ_1, c)	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)
Δ	σ_2	σ_1	σ_0	σ_2
Ω	1	0	1	0

   c) $M = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\delta = \{0, 1, 2\}$, $\sigma^* = \sigma_3$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_1, c)
Δ	σ_3	σ_1	σ_0	σ_3	σ_1	σ_3
Ω	2	2	1	2	0	0

	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_3, a)	(σ_3, b)	(σ_3, c)
Δ	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_3	σ_0
Ω	2	1	0	2	0	1

2. Procese, con soporte de *software*, las siguientes hileras de símbolos de entrada en las máquinas de estados finitos del ejercicio 1.

   a) a = aabbaaabbbaaabbababababababababaaaabbbabbaabba, máquina (1).

   b) a = cabcabbaccaabbbcbcbcbcbcbcbcbcabcabcaccbboaccccbbaabbaccacbccbcab, máquina (2).

   3. a = cccababababcbcbaaoabcabaaabccheceaabbecbaccbaaaccbb caaabbbccbcbcbcbaacacacabaa-be, máquina (3).

3. Diseñe una máquina de estado infinito que resuelva la esta entre dos números binarios. En este caso, a tabla de restas básicas entre dos *bits*, corresponde a:

0 - 0 = 0
1 - 0 = 1
1 - 1 = 0
0 - 13 no cabe o se pide prestado al siguiente

4. En la dirección electrónica:

http://demonstrations.wolfram.com/AFiniteAutomatonEditor

se encuentra disponible un editor de autómatas de estado finito. Utilice este recurso para representar los DFA de los ejemplos 8 y 9.

5. Elabore con ayuda de *Mathematica* , los diagrama de transición de los autómatas de estado infinito determinísticos $A = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \hat{\text{A}})$

a) $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_2$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_0\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_1, c)
Δ	σ_0	σ_0	σ_0	σ_0	σ_1	σ_3

	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_3, a)	(σ_3, b)	(σ_3, c)
Δ	σ_3	σ_3	σ_1	σ_1	σ_2	σ_0

b) $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_1$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_1, \sigma_3\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_1, c)
Δ	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0	σ_2	σ_2

	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_3, a)	(σ_3, b)	(σ_3, c)
Δ	σ_0	σ_1	σ_3	σ_0	σ_1	σ_2

c) $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b, c, d\}$, $\sigma^* = \sigma_0$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_0, d)	(σ_1, a)	(σ_1, b)
Δ	σ_0	σ_1	σ_2	σ_0	σ_0	σ_1

	(σ_1, c)	(σ_1, d)	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_2, d)
Δ	σ_2	σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_0

6. Determine con soporte de software si las hileras de símbolos de entrada dadas, son aceptadas en los autómatas de estado finito del ejercicio 5.

   a) a = caabbaaabbccbaccaabbababababababababaaaccabbbbbabccbbaabbaccc, DFA (1).

   b) a = cabcabbaccaabbbcbcbcbcbcbabcabcabcaccbbaccccbbaabbaccacbccbcccacccabcba DFA (2).

   c) a = ddcccababdaddbabcbcbabddcabcabcaabccbccccaabbccba ccbcaaccbbdcdadadadbdbcdcbdcdbcbc cacdacdabcabcdd, DFA (3).

7. Utilizando el comando **Languages** halle A° en los autómatas de estado finito del ejercicio 5.

8. Encontrar DFA con una cantidad mínima de estados, equivalentes de manera respectiva, a cada uno de los autómatas del ejercicio 5. Explique en cada caso.

9. Trace el diagrama de transición de un autómata de estado finito determinista que acepte el conjunto no nulo de hileras de símbolos de entrada $\{a, b\}$ dado. Realice distintas pruebas con *Mathematica* para verificar los resultados.

   a) Cadenas de caracteres que posean un número impar de $b's$.

   b) Hileras que empiecen con bab y terminen con aba.

   c) Arreglos que contengan exactamente tres a y tres b.

10. Con ayuda de *Mathematica* forme el diagrama de transición de los autómata de estado finito no determinísticos $A = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \hat{\text{A}})$, siguientes:

    a) $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_1$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)
Δ	$\emptyset$	$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_2\}$

	(σ_1, c)	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)
Δ	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0\}$

    b) $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\sigma^* = \sigma_3$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_2\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_1, a)	(σ_1, b)
Δ	$\{\sigma_0, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_0\}$

	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_3, a)	(σ_3, b)
Δ	$\{\sigma_1\sigma_3\}$	$\emptyset$	$\{\sigma_0\sigma_2\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$

    c) $\{\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\, \sigma_3, \sigma_4\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_0$, $\hat{\text{A}} = \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3\}$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)
Δ	$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_3\sigma_4\}$	$\emptyset$	$\{\sigma_3, \sigma_4\}$	$\{\sigma_0\}$

	(σ_1, c)	(σ_2, b)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_3, a)
Δ	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_3, \sigma_4\}$	$\emptyset$	$\{\sigma_3, \sigma_4\}$	$\{\sigma_0\}$

	(σ_3, b)	(σ_3, c)	(σ_4, a)
Δ	$\{\sigma_0\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{\sigma_0\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$

	(σ_4, b)	(σ_4, c)
Δ	$\{\sigma_1\sigma_3, \sigma_4\}$	$\{\sigma_0, \sigma_4\}$

11. Con soporte de software, establezca si las hileras de símbolos de entrada dadas se aceptan en los autómatas de estado finito no deterministas del ejercicio 10.

    a) a = caabbaaabbccbaccaabbababababababababaaaccabbbbbabccbbaabbaccc, NDFA (1).

    b) a = babaabbabbaabbbabbbabbbababbabbabbabbbbabaaabbaabbabb abbaabbbbaaaaabb-ba, NDFA (2).

    c) a = abcccababaaccbabcbcbabbaccabcabcaabccbccccaabbcc baccbcaaccbbccbabacacbbbcccbcccbcbb-cacbacbabcabcca, NDFA (3).

12. Encuentra un autómata de estado finito equivalente para cada uno de los NDFA del ejercicio 10. Verifique los resultados simplificando el DFA y a través del uso del comando **NDFAToDFA**.

13. Considere la máquina de *Turing* dada a continuación. Conjeture cual es su lenguaje, $MT = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \hat{\mathrm{A}}, \mathit{\Gamma}, B)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$, $\tau = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \sigma_0$, $\hat{\mathrm{A}} = \{\sigma_6\}$, $\mathit{\Gamma} = \{0, 1, B\}$ y:

	$(\sigma_0, 0)$	$(\sigma_0, 1)$	$(\sigma_1, 0)$	$(\sigma_1, 1)$	$(\sigma_2, 0)$
Δ	$\{\sigma_2, 1, 1\}$	$\{\sigma_6, 0, 0\}$	$\{\sigma_0, B, 1\}$	$\{\sigma_1, 1, -1\}$	$\{\sigma_3, 0, -1$

	$(\sigma_2, 0)$	(σ_2, B)	$(\sigma_3, 0)$	$(\sigma_3, 1)$	(σ_3, B)
Δ	$\{\sigma_4, 1, -1\}$	$\{\sigma_3, B, -1\}$	$\{\sigma_1, 0, -1\}$	$\{\sigma_3, B, 1\}$	$\{\sigma_0, B, 1$

	$(\sigma_4, 0)$	$(\sigma_4, 1)$	(σ_4, B)	$(\sigma_5, 0)$	$(\sigma_5, 1)$
Δ	$\{\sigma_2, 1, -1\}$	$\{\sigma_5, B, 1\}$	$\{\sigma_4, 0, -1\}$	$\{\sigma_6, B, 0\}$	$\{\sigma_5, 1, 1$

14. Construya una máquina de *Turing* que realiza la multiplicación de dos números enteros positivos. Probar la MT con: $5 \cdot 3$. Sugerencia: recuerde que una multiplicación entera $a \cdot b$ es la suma de a consigo mismo, la cantidad de veces indicada por b.