



UNIVERSIDAD DE  
**COSTA RICA**

# Análisis de Markov

---

Ing. Luis Delgado Lobo MBA



## Introducción

- Los Modelos de Markov son modelos probabilísticos que se usan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de determinados sistemas.
- Ejemplos: reparto del mercado entre marcas; dinámica de las averías de máquinas para decidir política de mantenimiento; evolución de una enfermedad,...
- Recibe su nombre del matemático ruso Andréi Márkov, que lo introdujo en 1906



A. A. Марков (1886).



## Definición del Análisis de Markov

- Existe un número limitado o **finito de estados posibles**.
- La probabilidad de cambiar de estados permanece igual con el paso del tiempo.
- Podemos predecir cualquier estado futuro a partir de los estados anteriores y de la matriz de probabilidades de transición.
- El tamaño y la composición del sistema no cambia durante el análisis.



## Proceso estocástico:

- Es un conjunto o sucesión de variables aleatorias:  $\{X(t) \mid t \in G\}$  definidas en un mismo espacio de probabilidad.
- Normalmente el índice  $t$  representa un tiempo y  $X(t)$  el estado del proceso estocástico en el instante  $t$ .
- El proceso puede ser de tiempo discreto o continuo si  $G$  es discreto o continuo.
- Si el proceso es de tiempo discreto, usamos enteros para representar el índice:  $\{X_1, X_2, \dots\}$



## Ejemplos de procesos estocásticos:

1. Serie mensual de ventas de un producto
2. Estado de una máquina al final de cada semana (funciona/averiada)
3. N° de clientes esperando en una cola cada 30 segundos
4. Marca de detergente que compra un consumidor cada vez que hace la compra. Se supone que existen 7 marcas diferentes
5. N° de unidades en almacén al finalizar la semana





## ELEMENTOS DE UNA CADENA DE MARKOV

- Un conjunto finito de ***M estados***, exhaustivos y mutuamente excluyentes (ejemplo: estados de la enfermedad)
- ***Ciclo de markov (“paso”)*** : periodo de tiempo que sirve de base para examinar las transiciones entre estados (ejemplo, un mes)
- ***Probabilidades de transición*** entre estados, en un ciclo (matriz P)
- ***Distribución inicial*** del sistema entre los M estados posibles



## PROPIEDAD MARKOVIANA

Un proceso estocástico tiene la propiedad markoviana si las probabilidades de transición en un paso sólo dependen del estado del sistema en el período anterior (memoria limitada)

### **3. Cumple la propiedad markoviana:**

$$P(x_{t+1} = j / x_t = i) = P_{ij}$$

### **4. Las probabilidades son estacionarias:**

$$P(x_{t+1} = j / x_t = i) = P(x_1 = j / x_0 = i) = P_{ij}$$

$$P(x_{t+n} = j / x_t = i) = P(x_n = j / x_0 = i) = P_{ij}^{(n)}$$

### **5. Existe un conjunto de probabilidades iniciales**

$$P\{x_0 = i\}$$

$V^0$  = Vector de probabilidades del estado inicial



## PROPIEDAD MARKOVIANA

✓ **Probabilidades de Transición**  $P_{ij}^{(n)}$

**Probabilidad de que partiendo del estado i  
llegue al estado j en n períodos**

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad ; \quad \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(n)} = 1$$

✓ **Calculo de probabilidades de Transición en n  
pasos**

$$\overline{P}^2 = \overline{P}\overline{P}$$

$$\overline{P}^3 = \overline{P}\overline{P}\overline{P} = \overline{P}^2\overline{P}$$

$$\overline{P}^{(n)} = \overline{P}^{(n-1)}\overline{P}$$

—  $P^{(n)}$  es la matriz de transición en n pasos, de orden  $(M+1) \times (M+1)$





## PROPIEDAD MARKOVIANA

Probabilidad de pasar o mantenerse a otro estado

<i>Estado</i>		0	1	2	...	$m$
$P^{(n)}$ =	0	$P_{00}^{(n)}$	$P_{01}^{(n)}$	$P_{02}^{(n)}$	...	$P_{0m}^{(n)}$
	1	$P_{10}^{(n)}$	$P_{11}^{(n)}$	$P_{12}^{(n)}$	...	$P_{1m}^{(n)}$
	2	$P_{20}^{(n)}$	$P_{21}^{(n)}$	$P_{22}^{(n)}$	...	$P_{2m}^{(n)}$
	...	...	...	...	...	...
	$m$	$P_{m0}^{(n)}$	$P_{m1}^{(n)}$	$P_{m2}^{(n)}$	...	$P_{mm}^{(n)}$

**Matriz de TRANSICIÓN en n pasos**



## PROPIEDAD MARKOVIANA

$V^0$  = Vector de probabilidades del estado inicial

- ✓ **Calculo del vector de probabilidades no condicionadas**

$$\vec{V}^{(n)} = \vec{V}^{(0)} \bar{P}^{(n)}$$

$$\vec{V}^1 = \vec{V}^{(0)} \bar{P}$$

$$\vec{V}^{(2)} = \vec{V}^{(1)} \bar{P} = (\vec{V}^{(0)} \bar{P}) \bar{P} = \vec{V}^{(0)} \bar{P}^{(2)}$$



Las cadenas de markov son un caso particular de modelos de markov

## Tipos de modelos de Markov:

- **Procesos de Markov (Modelos semi-markovianos):** Las probabilidades de transición entre estados pueden variar a medida que transcurren más ciclos
  - Ejemplo: para modelizar la esperanza de vida, el riesgo de muerte aumenta con la edad
- **Cadenas de Markov:** Las probabilidades de transición se suponen constantes a lo largo del tiempo



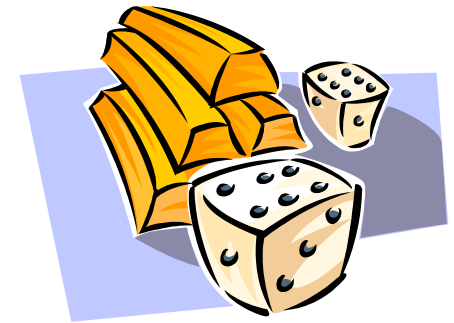
## PROPIEDAD MARKOVIANA

Ejemplos:

Comportamiento (sube/baja) del precio de las acciones hoy depende de lo ocurrido ayer



Problema de la ruina de un jugador de casino



Elección de marca: Con qué línea aérea volar a Madrid?





## Aplicaciones en el mundo

- Meteorología

Si consideramos el tiempo atmosférico de una región a través de distintos días, es plausible asumir que el estado actual sólo depende del último estado y no de toda la historia en sí, de modo que se pueden usar cadenas de Márkov para formular modelos climatológicos básicos. Por ejemplo, se han desarrollado modelos de recurrencia de las lluvias basados en cadenas de Márkov.<sup>3</sup>

- Modelos epidemiológicos

Una importante aplicación de las cadenas de Márkov se encuentra en el [proceso Galton-Watson](#). Éste es un proceso de ramificación que se puede usar, entre otras cosas, para modelar el desarrollo de una epidemia.

- Música

Diversos algoritmos de composición musical usan cadenas de Márkov, por ejemplo el software [Csound](#) o [Max](#)



## Aplicaciones en el mundo

- Internet

El PageRank de una página web (usado por Google en sus motores de búsqueda) se define a través de una cadena de Márkov, donde la posición que tendrá una página en el buscador será determinada por su peso en la distribución estacionaria de la cadena.

- Simulación

Las cadenas de Márkov son utilizadas para proveer una solución analítica a ciertos problemas de simulación, por ejemplo en teoría de colas el Modelo M/M/1 es de hecho un modelo de cadenas de Márkov.

### Juegos de azar

Son muchos los juegos de azar que se pueden modelar a través de una cadena de Márkov. El modelo de la ruina del jugador, (*Gambler's ruin*), que establece la probabilidad de que una persona que apuesta en un juego de azar finalmente termine sin dinero, es una de las aplicaciones de las cadenas de Márkov en este rubro.



## Aplicaciones en el mundo

### Economía y finanzas

Las cadenas de Márkov se pueden utilizar en modelos simples de valuación de opciones para determinar cuándo existe oportunidad de arbitraje, así como en el modelo de colapsos de una bolsa de valores o para determinar la volatilidad de los precios. En los negocios, se han utilizado para analizar los patrones de compra de los deudores morosos, para planear las necesidades de personal y para analizar el reemplazo de equipo.

### Genética

Se emplean cadenas de Márkov en teoría de genética de poblaciones, para describir el cambio de frecuencias génicas en una población pequeña con generaciones discretas, sometida a deriva genética. Ha sido empleada en la construcción del modelo de difusión de Motō Kimura.



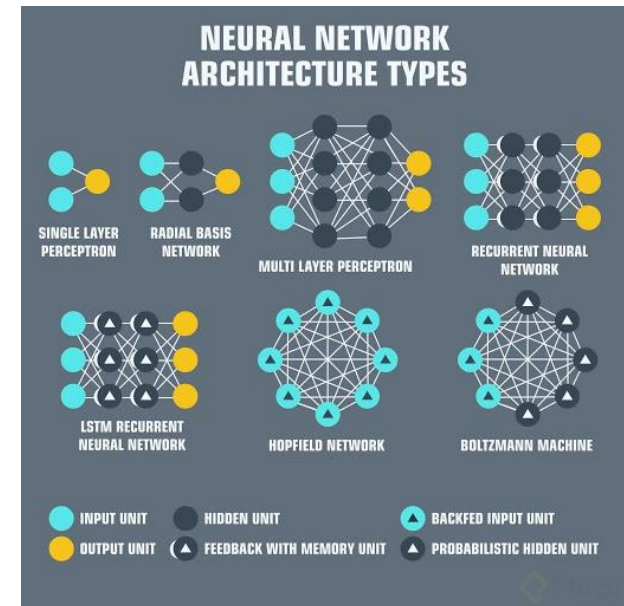
## Aplicaciones en el mundo

### Operaciones

Se emplean cadenas de Márkov en inventarios, mantenimiento, flujo de proceso

### Redes Neuronales

Se utilizan en las máquinas de Boltzmanns, un tipo de red neuronal recurrente estocástica







## Probabilidad de Transición en n pasos

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} * \mathbf{T}^n$$

donde

$\mathbf{p}^{(n)}$  = probabilidad en n pasos

$\mathbf{p}^{(0)}$  = Probabilidad en el estado inicial

$\mathbf{T}^n$  = Matriz de transición elevado a la n

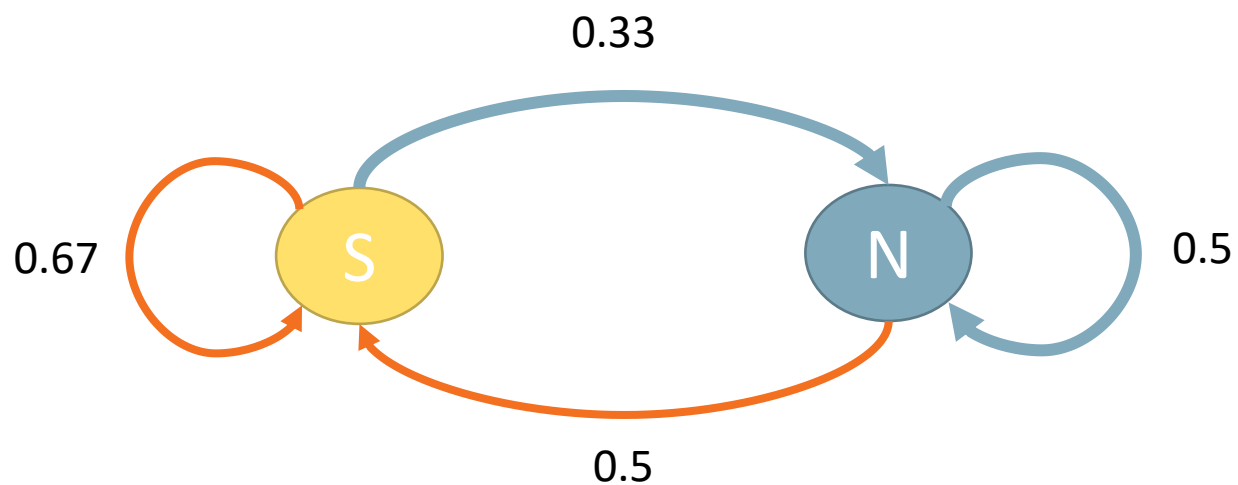


## Ejemplo 1

- En una cierta región el tiempo atmosférico sigue la siguiente secuencia: Un día se denomina soleado (S) si el sol luce más de la mitad del día, y se denomina nublado (N), si lo hace menos. Por experiencia, se sabe que si hay un día nublado, es igual de probable que el día siguiente sea también nublado. Si el día es soleado hay una probabilidad de  $2/3$  de que sea también soleado.
1. Construye la matriz de transición  $T$  de este proceso.
  2. Si hoy está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días esté también nublado? ¿y de que esté soleado?



## Diagrama de red





## Ejemplo 2

Tres agencias de viaje del Reino Unido disponen de información respecto de los desplazamientos en vacaciones de semana santa.

Estado Actual	No Viajar	Viajar entre Islas	Viajar fuera
No Viajar	40%	20%	40%
Viajar entre Islas	50%	10%	40%
Viajar fuera	10%	70%	20%

- Supuestos necesarios para considerar esta situación como cadena de Markov de primer orden
- Calcular la probabilidad de que los clientes que no han viajado estas vacaciones lo hagan fuera de las islas dentro de 2 años.



## Condición de equilibrio

Continuando con el ejemplo 1, que pasa cuando aumenta  $n$ ?

$$p^{(5)} = p^0 * T^5$$

$$p^5 = (1 \ 0) * \begin{pmatrix} 0,40008 & 0,59992 \\ 0,39995 & 0,60005 \end{pmatrix}$$

$$p^{(10)} = p^0 * T^{10}$$

$$p^{10} = (1 \ 0) * \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,40 & 0,60 \end{pmatrix}$$



## Condición de equilibrio

$$T^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = Q$$

$$n \rightarrow \infty, p^{(n)}$$

No *Las condiciones de estado estable existen si las probabilidades de estado no cambian después de un número grande de periodos.* arte

Entonces, como las probabilidades en el equilibrio son iguales

$$p^{(n+1)} = p^n \rightarrow p^n = p^n * T$$



## Condición de equilibrio

Para el ejemplo 1

$$(\pi_1 \ \pi_2) = (\pi_1 \ \pi_2) * \begin{pmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0,5\pi_1 + 0,33 \pi_2$$

$$\pi_2 = 0,5\pi_1 + 0,67 \pi_2$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi_1 = 0,6 \quad \pi_2 = 0,4$$



## Estados absorbentes y matriz fundamental

- Si se encuentra en un estado absorbente, *no puede ir a otro estado en el futuro.*
- Entonces la matriz de transición, se puede hacer una partición de la matriz como se muestra

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

- Donde,

$I$  = Matriz identidad

$0$  = Matriz de ceros

Con las matrices resultantes se hacen los siguientes cálculos

$$F = (I - B)^{-1} \text{ y luego } F * A$$

- La matriz  $FA$  indica que la probabilidad de se termine en un estado absorbente





## Estados absorbentes y matriz fundamental

### Ejemplo 3

• Un satélite de comunicaciones se lanza mediante un sistema propulsor que, a su vez, tiene un sistema de control de guía de tiempo discreto. Las señales de corrección del curso forman una secuencia donde el espacio de estado  $s$  es el siguiente:

- 1: No requiere corrección.
- 2: Aborto y destrucción del sistema.
- 3: Se requiere corrección menor.
- 4: Se requiere corrección mayor.

$$T = \begin{pmatrix} 1, 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1, 0 & 0 & 0 \\ 0, 6 & 0 & 0, 2 & 0, 2 \\ 0, 4 & 0, 1 & 0, 3 & 0, 2 \end{pmatrix}$$



## Estados absorbentes y matriz fundamental

### Ejemplo 3

$$T = \left( \begin{array}{cc|cc} 1, 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1, 0 & 0 & 0 \\ \hline 0, 6 & 0 & 0, 2 & 0, 2 \\ 0, 4 & 0, 1 & 0, 3 & 0, 2 \end{array} \right)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1, 0 & 0 \\ 0 & 1, 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0, 6 & 0 \\ 0, 4 & 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0, 2 & 0, 2 \\ 0, 3 & 0, 2 \end{pmatrix}$$



## Estados absorbentes y matriz fundamental

### Ejemplo 3

$$F = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1,38 & 0,34 \\ 0,52 & 1,38 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} 1,38 & 0,34 \\ 0,52 & 1,38 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,86 & 0,14 \end{pmatrix}$$