Tema IV: Determinantes

Sea $A \in M(2,\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la función determinante, D, se define por:

$$D : M(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto D(A) = ad - bc$$

Notaciones: $D(A)=\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

Ejemplo: sea

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\bullet 4-2\bullet 3=-2$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B)=-1\bullet 0-5\bullet 0=0$$

Propiedades para una matriz 2x2:

a) D es lineal en cada fila:

$$\begin{vmatrix} x_1+\alpha y_1 & x_2+\alpha y_2 \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{vmatrix}+\alpha\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_1+\alpha y_1 & x_2+\alpha y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}+\alpha\begin{vmatrix} a & b \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

b) D es alternada. Es decir, si dos filas adyacentes (0 columnas) son iguales, entonces $|A|=0$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix}=0$$

c) $D(I_2)=1$

Determinante de una matriz de orden n (cofactores)

Sea $D: M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, se define por:

a) Para $n=1;\ D(a)=a$
b) Para n>1 y para cualquier fila i:

$$D(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}D(A_{i2})+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}D(A_{in})$$

Donde A_{ij} es la submatriz que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

Ejemplo: aplicar lo anterior para calcular det(A) si $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$Recuerde\ que:\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} fila1 \\ fila2 \\ fila3 \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$fila1 \to |A|=(-1)^{1+1}\cdot 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot -2+2\cdot 1+2\cdot 2=0$$

$$fila2 \to |A|=(-1)^{2+1}\cdot 1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot -4+0\cdot 2+-1\cdot 4=0$$

$$fila3 \to |A|=(-1)^{3+1}\cdot -1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 0\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot -2+-2\cdot 1+0\cdot 2=0$$

Nota: se pueden generalizar las tres propiedades anteriores de determinantes 2x2.

1) D es lineal en cada fila:

$$D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{r-1} \\ \alpha x + y \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{r-1} \\ x \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{r-1} \\ y \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

2) D es alternada. Es decir, si las filas adyacentes (o columnas) son iguales, entonces D vale cero.
3) $D(I_n)=1$

Teorema:

Si $A \in M(n,\mathbb{R})$ y los vectores filas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son las filas de A, entonces:

1) $D(A)=0$ si alguna fila de A es nula.

2) $D(\alpha A)=\alpha^n D(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3) D cambia de signo si dos filas de k, r se intercambian:

$$D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

4) $D(A)=0$ sí dos filas (o columnas) de A son iguales.

5) La operación elemental $\alpha f_k + f_r$ no altera el valor del determinante. Es decir, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_r + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Teorema:

Sí $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, entonces:

1) $D(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ es invertible.
2) $D(A) = 0 \Leftrightarrow A$ no es invertible.
3) $D(A) = D(A^t) \ \ \forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$.
4) $D(AB) = D(A) \cdot D(B) \ \ \forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$.
5) Si A es invertible $D(A^{-1}) = \dfrac{1}{D(A)}$

Ejemplo: usando solo las propiedades de los determinantes deduzca que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b+c & a+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b+c & a+c \end{vmatrix} \underset{f_1+f_2}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: calcule el $det(A)$, utilizando las propiedades de los determinantes

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{f_1\leftrightarrow f_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{-2f_1+f_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -(-7+12) = -5$$

Ejemplo: demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{-f_1+f_2 \\ -f_1+f_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y-x & (y+x)(y-x) \\ z-x & (z+x)(z-x) \end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y)$$

Teorema:

Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matriz triangular (superior 0 inferior), entonces el determinante de A es igual, al producto de los elementos de la diagonal.

Ejemplo: sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot -1 \cdot 4 = -8$$

Regla de Cramer

Teorema:

Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ y $D(A) \neq 0$, entonces el sistema $Ax = b$ donde $b \in \mathbb{R}^n$, tiene solución única $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dada por $x_i = \dfrac{D(A_1, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n)}{D(A)}$, $i = 1, \ldots, n$. Expresión en la cual $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son las columnas de A.

Ejemplo: resolver el sistema $\begin{array}{c} 2x+y+z=0 \\ x-y+5z=0 \\ y-z=4 \end{array}$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{-2f_2+f_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+9)=-6$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{-1}{6}\cdot 4\cdot 6=-4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\cdot -4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{-1}{6}\cdot -4\cdot 9=6$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\cdot 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{-1}{6}\cdot 4\cdot -3=2$$

$$\Rightarrow S:\{(-4,\quad 6,\quad 2)\}$$

Matriz adjunta y matrices inversas

La matriz adjunta de la matriz cuadrada $A \in M(n,\mathbb{R})$ es:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11}(A) & C_{21}(A) & \cdots & C_{n1}(A) \\ C_{12}(A) & C_{22}(A) & \cdots & C_{n2}(A) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1n}(A) & C_{2n}(A) & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde $C_{ij}(A)$ es el cofactor de A.

Ejemplo: sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcule la Adj(A)

$$adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -2 & -11 & 3 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Proposición:

Si $A \in M(n,\mathbb{R})$ y $\det(A) \neq 0$, entonces, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$.

<u>Ejemplo:</u> calcule la inversa de $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$adj(A)=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -2 & -11 & 3 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2+f_1 \\ -3f_2+f_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot adj(A)=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -2 & -11 & 3 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-10}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.