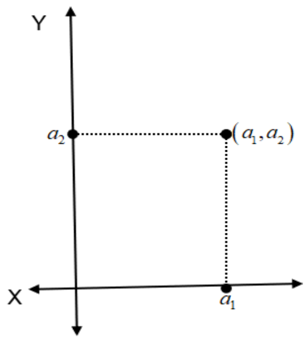
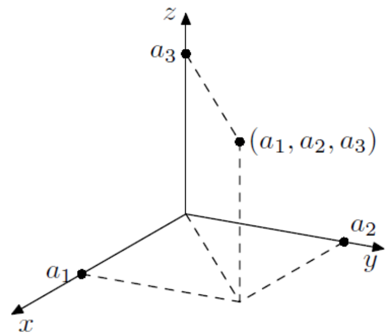
Tema V: Geometría Vectorial

Representación geométrica de un vector

A partir de la representación de $\mathbb{R}$, como la recta numérica, los elementos $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ se asocian a puntos en el plano.





Los vectores se pueden representar mediante segmentos de recta dirigidos, o flechas, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. La dirección de la flecha indica la dirección del vector y la longitud de la flecha determina su magnitud.

Notación:

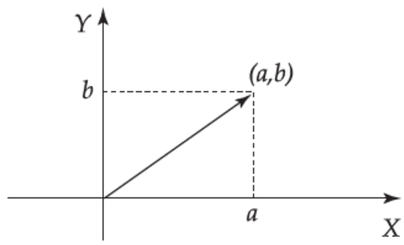
$\vec{v},\ \vec{y},\ \vec{z}$ representan vectores, letras minúsculas y flechas

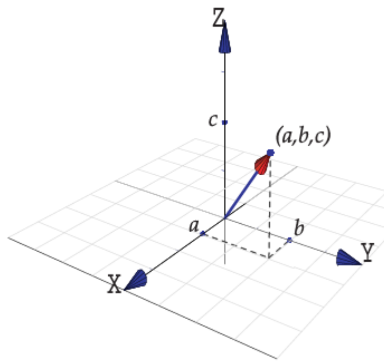
A, B, C denotan puntos, letras mayúsculas

$\alpha,\ \beta,\ k$ representan escalares (números reales)

$\vec{0} = (0,0,0)$ el vector nulo

$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vector de $\mathbb{R}^n$





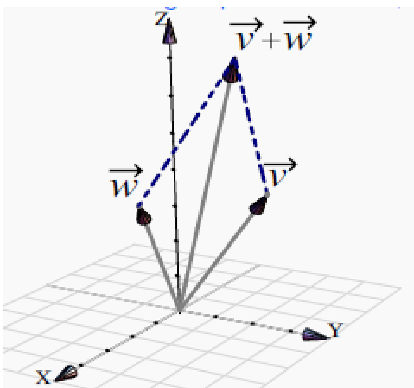
Suma y producto por un escalar

Definición (suma): Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, se define la suma de la siguiente manera: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$ (de igual manera la resta)

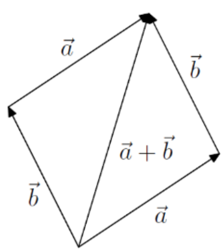
Ejemplo: Sean $\vec{v} = (1,3,4)$ y $\vec{w} = (3,1,4)$. Entonces

$$\vec{v} + \vec{w} = (1,3,4) + (3,1,4) = (4,4,8)$$

Que geométricamente se representa

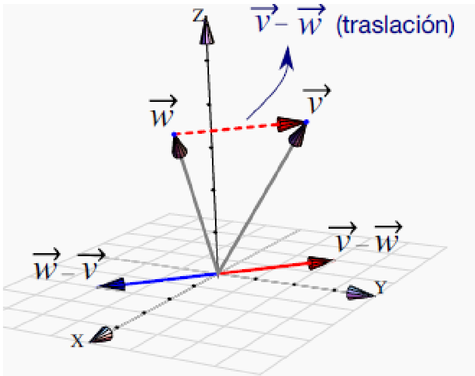


Paralelogramo definido en $\mathbb{R}^n$



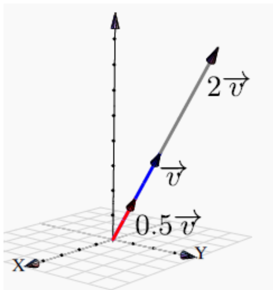
Puede observarse que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Ejemplo: Sean $\vec{v}=(1,3,4)$ y $\vec{w}=(3,1,4)$. Entonces $\vec{v}-\vec{w}=(1,3,4)-(3,1,4)=(-2,2,0)$ y $\vec{w}-\vec{v}=(2,-2,0)$



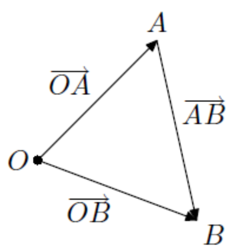
Definición (producto por un escalar): Sea el vector $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ y el escalar $k\in\mathbb{R}$, entonces: $k\vec{v}=(kv_1,kv_2,\ldots,kv_n)$.

Ejemplo: Sea $\vec{v}=(1,5,4)$. Entonces $2\vec{v}=(2,10,8)$



Definición: dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ se dicen paralelos si existe un $k\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{v}=k\cdot\vec{u}$. Cuando k>0, los vectores tienen la misma dirección y si k<0, tienen dirección opuesta.

Definición: dados $A,B\in\mathbb{R}^n$, se llama flecha localizada de A a B al vector $\overrightarrow{AB}=B-A\in\mathbb{R}^n$ y que geométricamente se asocia con la única flecha que se origina en el punto A y termina en el punto B. Sea $0=(0,0,\ldots,0,0)\in\mathbb{R}^n$, entonces $\overrightarrow{OA}=A$ y $\overrightarrow{OB}=B$.



Producto punto de un vector

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2 \dots, a_n)^t$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$. El producto escalar, o producto punto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el siguiente número real: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$.

Ejemplo: sea $\vec{a} = (1,2,3)^t$ y $\vec{b} = (-2,1,1)^t$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$$

Teorema: si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquier de $\mathbb{R}^n$, entonces:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq 0$ además $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si $\vec{u} = 0$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Norma de un vector

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, se llama norma (o magnitud de $\vec{u}$) y se denota

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Ejemplo: si $\vec{u} = (1,2,3)^t$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(1,2,3) \cdot (1,2,3)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Teorema: si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$ se cumplen la siguientes propiedades:

1) $\left\|\vec{u}\right\| \geq 0$ y $\left\|\vec{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$
2) $\left\|a\vec{u}\right\| = |a| \left\|\vec{u}\right\|$
3) $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \left\|\vec{v} - \vec{u}\right\|$
4) $\left|\vec{u} - \vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)
5) $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ (desigualdad triangular)

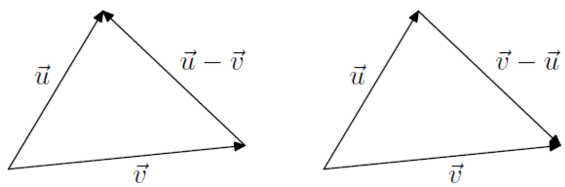
Observación: un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es unitario si $\left\|\vec{v}\right\| = 1$.

$\vec{v} = (1,0,0) \Rightarrow \left\|(1,0,0)\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

Distancia entre dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ en $\mathbb{R}^n$ se define la distancia entre estos vectores como a norma del vector diferencia.

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|,\ \text{es decir},\ d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - u_n)}$$



Teorema: Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, entonces:

1) $d(A, B) = d(B, A)$
2) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Ángulo entre dos vectores

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ no nulos, el ángulo entre estos vectores es el valor θ único, $\theta \in [0, \pi]$, tal que:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{o bien } \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)$$

Ejemplo: sean $\vec{u} = (0,2,2), \vec{v} = (2,0,2)$. Calcule el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(0,2,2) \cdot (2,0,2)}{\|(0,2,2)\| \cdot \|(2,0,2)\|} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

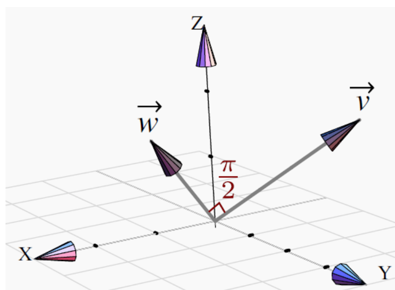
Proyección ortogonal

Teorema: los vectores $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si y solo si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (es decir, si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$).

Ejemplo: los vectores $\vec{w}=\left(1,0,\sqrt{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(-2,1,\sqrt{2}\right)$, son ortogonales

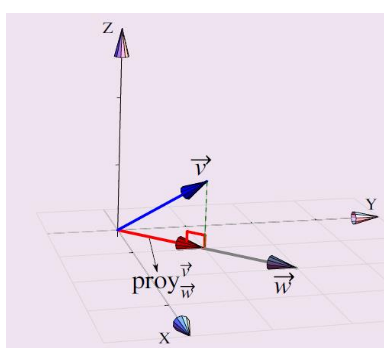
$$\vec{w}\cdot\vec{v}=\left(1,0,\sqrt{2}\right)\cdot\left(-2,1,\sqrt{2}\right)=1\cdot-2+0\cdot1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=0$$

$$\text{note que:}\quad \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}=0 \qquad \Rightarrow\theta=\arccos\left(0\right)=\frac{\pi}{2}$$



Proyección ortogonal

Si $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ y $\vec{w}\neq0$, se llama proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ y se denota $\text{Proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}$ al vector: $\text{Proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{w}\right\|^2}\cdot\vec{w}$, el vector $\vec{v}-\text{Proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}$ se conoce como la componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{w}$.



Ejemplo: sea $\vec{v}=\left(5,0,\sqrt{2}\right)$ y $\vec{w}=\left(2,1,\sqrt{2}\right)$, encuentre $\text{Proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}$

$$\text{Proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{w}\right\|^2}\cdot\vec{w}=\frac{\left(2,1,\sqrt{2}\right)\cdot\left(5,0,\sqrt{2}\right)}{\left\|\left(2,1,\sqrt{2}\right)\right\|^2}\cdot\left(2,1,\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{2\cdot5+1\cdot0+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(2,1,\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{12}{7}\left(2,1,\sqrt{2}\right)=\left(\frac{24}{7},\frac{12}{7},\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)$$

Observación: Sean $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, entonces:

1) $Si\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$
2) $Si\ \vec{u}\cdot\vec{v}<0\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$
3) $Si\ \vec{u}\cdot\vec{v}>0\Rightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

Producto Cruz (producto vectorial en $\mathbb{R}^3$)

Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ entonces el producto cruz de $\vec{v}$ con $\vec{w}$ es un nuevo vector de $\mathbb{R}^3$, denotado por $\vec{v}\times\vec{w}$.

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \\ \vec{w_1} & \vec{w_2} & \vec{w_3} \end{vmatrix}$$

donde $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$

$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$

Ejemplo: si $\vec{v}=(1,2,3)$ y $\vec{w}=(2,-1,0)$ encuentre $\vec{v}\times\vec{w}$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{e_1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-\vec{e_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\vec{e_3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\overrightarrow{3e_1}+6\,\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{5e_3}$$

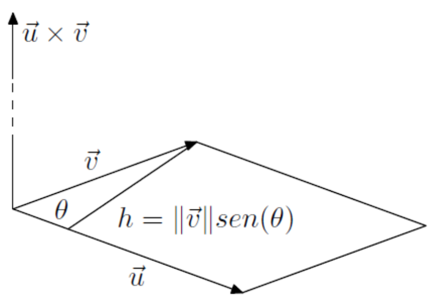
$$=(3,6,-5)$$

Propiedades del producto Cruz: Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ y $a\in\mathbb{R}$ un escalar. Se definen las siguientes propiedades:

1) $\vec{w}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{w}=\vec{0}$
2) $\vec{v}\times\vec{w}=-\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)=-\vec{w}\times\vec{v}$
3) $a\vec{v}\times\vec{w}=a\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$
4) $\vec{v}\times a\vec{v}=\vec{0}$
5) $\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
6) El vector $\vec{v}\times\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $\vec{w}$
7) $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$
8) $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{w}=\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\cdot\vec{v}-\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)\cdot\vec{u}$

Teorema: si θ es el ángulo entre dos vectores $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, entonces $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|sen\theta$

Observación: En $\mathbb{R}^3$ el paralelogramo generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (no nulos) es el siguiente



$$A=b\cdot h=\left\|\vec{u}\right\|h \qquad\qquad sen\theta=\frac{h}{\left\|\vec{v}\right\|}\ \Rightarrow h=\left\|\vec{v}\right\|sen\theta$$

$$A=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|sen\theta$$

$$A=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\frac{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$$

$$\Rightarrow A=\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$$

Ejemplo: sean $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (1,3,0)$. Calcule el área del paralelogramo generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e_1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{e_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{e_3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-9,3,1)$$

$$A = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| = \sqrt{(-9)^2+3^2+1^2} = \sqrt{91}$$

Volumen de un Paralelepípedo generado por: $\vec{w},\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$V = \pm\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.