Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

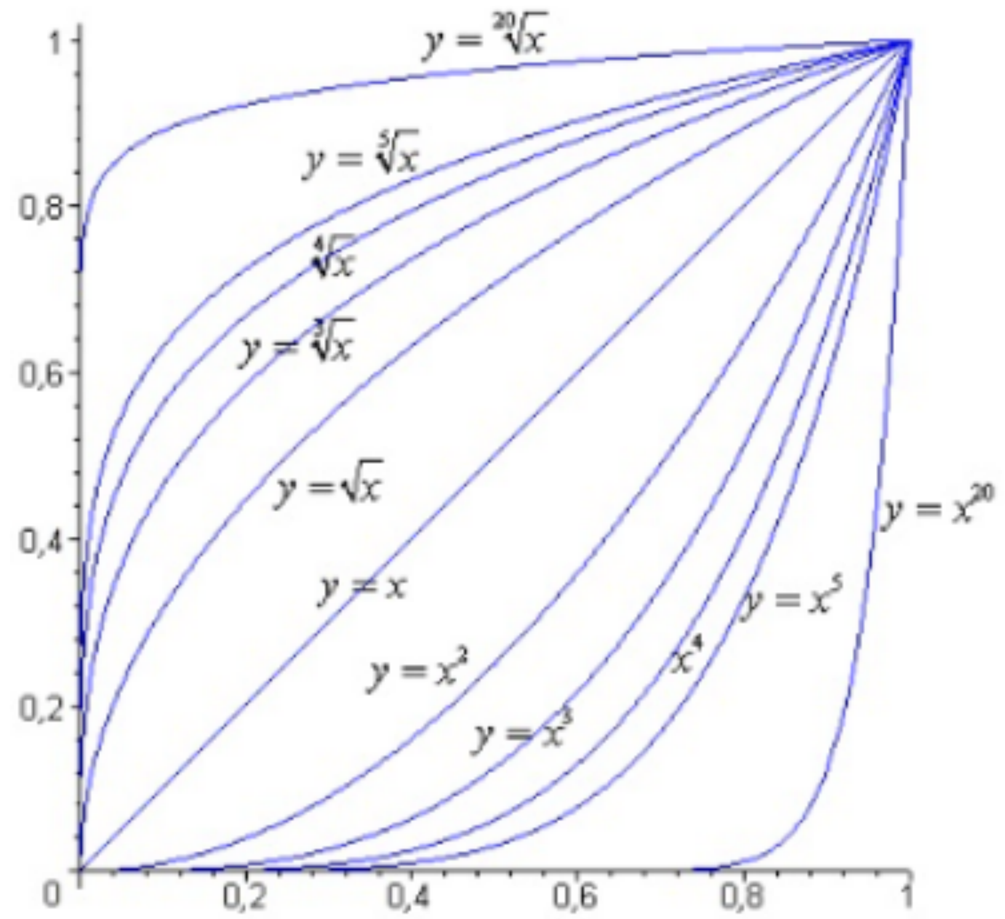
Contents

Introducción

Justificación

El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender,por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad.

M. Spivak.



Introducción

Justificación

En las ciencias computacionales las funciones son de suma importancia es un sin fin de áreas, aunque no las reconozcamos.
Muchos desarrollos computacionales obedecen a comportamientos de funciones.
Modelaciones del mundo que nos rodea se hacen con funciones...!

El concepto de función, como se entiende hoy en día, se consolida en el año 1837, con el matemático Gustav Dirichlet. Sin embargo, algunos autores atribuyen a Galileo la introducción de manera formal del concepto de función en las matemáticas

(a) Galileo Galilei

(b) Gustav Dirichlet

Conceptos básicos

Relación con el tema de Relaciones

En el tema anterior se definieron las relaciones, las funciones serán un caso particular de ellas, es decir, las funciones son relaciones entre dos conjuntos, en donde el conjunto emisor debe ser el dominio y, además, los elementos del conjunto de salida deben tener una sola imagen.
Esto es natural, ya que en el entorno es importante relacionar, por ejemplo, a cada persona con un único peso, edad, carné universitario, entre otros, donde las variables relacionadas son personas con datos discretos y no continuos.

Conceptos básicos

Definiciones

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una ***función*** *f de A en B es una relación de A en B tal que:*

- *$D_f = A$, es decir, el dominio es el conjunto emisor.*
- *Si (a, b) y (a, c) pertenecen al gráfico de f, entonces $b = c$, es decir, cada elemento de A se relaciona con un único elemento de B.*

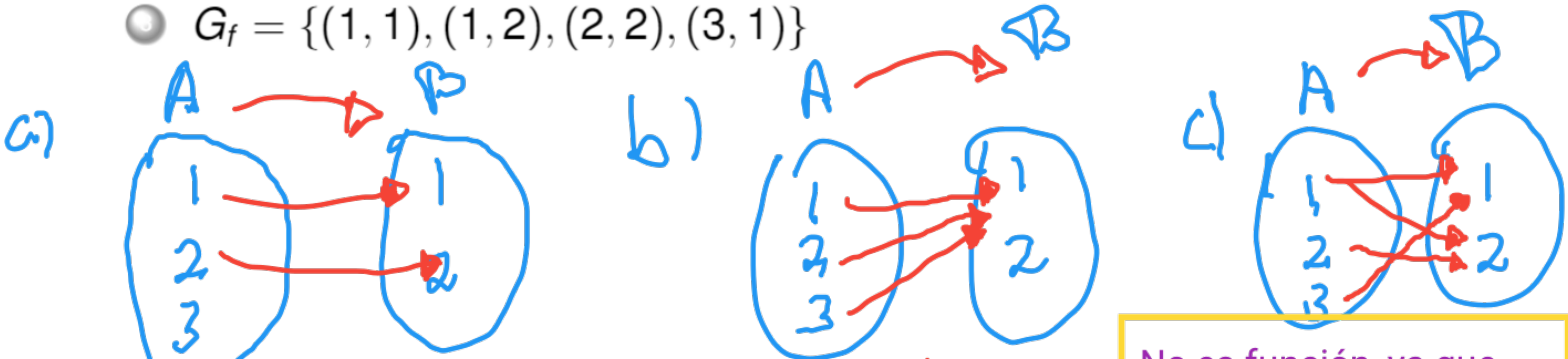
Conceptos básicos

Ejemplo 1

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ en los cuales se define una posible función f de A en B. Para cada uno de los gráficos de la función construya un diagrama de Venn y determine cual representa a una función.

1. $G_f = \{(1, 1), (2, 2)\}$
2. $G_f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$
3. $G_f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$

$(2, 1)$, $f(2) = 1$



No es función, porque hay un elemento del dominio, que no tiene imagen (no esta relacionado con nadie del conjunto B).

Sí es función

No es función, ya que un elemento del dominio tiene 2 imagenes.

Conceptos básicos

Notación

- *Una función f de A en B, consecuente con la notación de relaciones, se puede representar como $f = (G_f, A, B)$. Sin embargo, es usual representarla como $f : A \to B$. Al conjunto de llegada B se le llama codominio.*
- *Si (a, b) pertenece al gráfico de f, se dice que b es la imagen de a por f y se escribe $b = f(a)$. Análogamente, se dice que a es una preimagen de b por f.*
- *En general, se dice que una función $f : A$ es de variable en A con valores en B.*
- *Si la función es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que es una función real de variable real.*

preimagen

(x, y) → imagen

var. ind. → depend.

$y = f(x)$

Conceptos básicos

Ejemplo 2

1. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^2+1$, determinar $f(2)$, $f(-2)$, $\dfrac{-2f(3)}{1+f(4)}$, $f(3x-2)$ también determinar la preimagen de 5.
2. Resolver el ejercicio anterior con comandos en Mathematica.
3. Si tenemos $f:\{0,2,3,5\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$ con $f(x)=x+1$, determinar el gráfico de la función

2-1) $f(x)=x^2+1$, · $f(2)=(2)^2+1=5$, $(2,5)$

· $f(-2)=(-2)^2+1=5$, $(-2,5)$

· $\dfrac{-2f(3)}{1+f(4)}=\dfrac{-2\left((3)^2+1\right)}{1+\left((4)^2+1\right)}=\dfrac{-2\cdot 10}{18}=\dfrac{-10}{9}$

Conceptos básicos

Ejemplo 2

$f(x) = x^2 + 1$

· $f(3x-2) = (3x-2)^2 + 1$

$= 9x^3 - 12x + 4 + 1$

$= 9x^2 - 12x + 5$ //

· Determinar preimagen de 5 · $(x, 5)$

$f(x) = 5$, $x^2 + 1 = 5$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$, $|x| = 2$

$x = \pm 2$

$\boxed{2-3}$ $f: \{0, 2, 3, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$f(x) = x+1$, grafico.

$f(0) = 0+1 = 1$, $(0,1)$

$f(2) = 2+1 = 3$, $(2,3)$

$f(3) = 3+1 = 4$, $(3,4)$

$f(5) = 5+1 = 6$, $(5,6)$

$A_f = f(A)$

$= \{1, 3, 4, 6\}$

$G_f = \{(0,1), (2,3), (3,4), (5,6)\}$

Conceptos básicos

Definición

- Sea f una función de A en B. Sea $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$, entonces, el conjunto definido por:

  $$f\left[A\right] = \{b \in B / \exists a \in A \ tal \ que \ b = f(a)\}$$

  se llama ámbito o imagen de f.
- El conjunto definido por:

  $$f\left[E\right] = \{b \in B / \exists a \in E \ tal \ que \ b = f(a)\}$$

  se llama la imagen directa de E por f.
- Al conjunto definido por:

  $$f^{-1}\left(F\right) = \{a \in A / \exists b \in F \ tal \ que \ b = f(a)\}$$

  se llama la imagen inversa de F por f.

Conceptos básicos

Ejemplo 3

Sea $A = \{1, 2, 3, 7\}$; defina la función $f : A \to \mathbb{N}$ cuyo criterio es $f(n) = 3n - 2$. Calcule el ámbito de f, el gráfico de f y la imagen inversa de $\{1, 2, 6, 7\}$.

- $f(1) = 3(1) - 2 = 1$, $(1,1)$
- $f(2) = 3(2) - 2 = 4$, $(2,4)$
- $f(3) = 3(3) - 2 = 7$, $(3,7)$
- $f(7) = 3(7) - 2 = 19$, $(7,19)$

$G_f = \{(1,1), (2,4), (3,7), (7,19)\}$

$A_f = \{1, 4, 7, 19\}$

$f^{-1}(\{1, 2, 6, 7\}) = \{1, 7\}$

Conceptos básicos

Ejemplo 4

Sea $A = \{1, 2, 3, 5, 12\}$; defina la función

$$f : P(A) \to \mathbb{N}$$

de manera que $f(\emptyset) = 0$ y $f(X)$ es el mínimo elemento de X cuando $X \neq \emptyset$.

1. Calcule la imagen directa de $B = \{\{2, 5\}, \{2, 3, 12\}, \{3, 5\}\}$.
2. Determine la imagen inversa de $C = \{3, 10\}$.

1. $f(\{2,5\}) = 2$, $f(\{2,3,12\}) = 2$, $f(\{3,5\}) = 3$

La imagen directa es: {2,3}

2. $f^{-1}(\{3,10\}) = \{\{3\}, \{3,5\}, \{3,12\}, \{3,5,12\}\}$

Conceptos básicos

Ejemplo 5: ejercicio para estudiantes

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ en los cuales se define una posible función f de A en B. Para cada uno de los gráficos de la función construya un diagrama de Venn y determine cual representa a una función.
   1. $G_f = \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), (5, 3)\}$
   2. $G_f = \{(1, 1), (2, 1), (4, 1), (4, 2)\}$
   3. $G_f = \{(1, 2), (5, 2), (4, 2), (5, 2)\}$
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 + x - 6$, determinar $f(1)$, $f(-3)$, $\dfrac{-2 + f(4)}{1 - f(0)}$, también determinar la preimagen de -8.
3. Corrobore las respuestas encontradas en el punto anterior con Mathematica, además realice la gráfica de la función.
4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; defina la función $f : A \to \mathbb{N}$ cuyo criterio es $f(n) = -2n + 5$. Calcule el ámbito de f, el gráfico de f y la imagen inversa de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.