Nivel de Lógica Digital: Mapas de Karnaugh y circuitos combinacionales

Ing. Ronald Caravaca Mora

IF4000 - Arquitectura de Computadores
Informática Empresarial

17 de septiembre de 2021

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
2. Circuitos digitales básicos
3. Circuitos combinacionales

Mapas de Karnaugh o Mapa K

Para realizar la simplificación de funciones booleanas también lo podemos hacer utilizando los mapas de Karnaugh.

Los mapas de Karnaugh son un diagrama hecho de cuadros o celdas, donde cada celda representa un minitérmino. Una función de Boole puede ser expresada en el mapa de Karnaugh, indicando con un 1 en una celda cuyo término mínimo se incluye en la función. El mapa tiene la característica de que cada celda adyacente a otra sólo difiere en un bit. Una función de Boole puede tener diferentes expresiones algebraicas.

Puntos importantes:

1. Se marca un 1 en cada celda para representar cada término mínimo de la función de Boole.
2. Se trata de agrupar los 1 de celdas adyacentes. El tamaño de los grupos debe ser 2^k, $0 < k \leq n$, $n =$ número de variables de la función. Entre más grande es el grupo, más simplificada queda la función.
3. Las expresiones simplificadas generadas por el mapa siempre están en una de las dos formas estándar: suma de productos o producto de sumas.
4. Si el grupo de 1's se encuentra completamente dentro de las columnas o filas correspondientes a una variable la que no cambia, la variable formará parte del término.
5. La expresión más simple no es única. Hay ocasiones en que es posible encontrar dos o más expresiones que satisfagan los criterios de minimización.

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
    - Mapa de dos variables
    - Mapa de tres variables
    - Mapa de cuatro variables
    - Mapa de cinco variables
    - Mapa con producto de sumas
2. Circuitos digitales básicos
3. Circuitos combinacionales

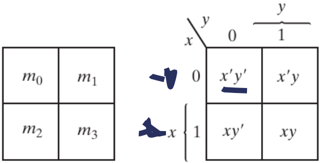
Mapa de dos variables

Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. Ejemplo: para la funcion $F = x'y + xy' + xy$

Mapa de dos variables

Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. Ejemplo: para la funcion $F = x'y + xy' + xy$

x y	**F**	**mj**
0 0	0	m0
0 1	**1**	m1
1 0	**1**	m2
1 1	**1**	m3

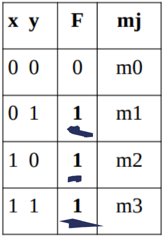


m_0	m_1
m_2	m_3

$x \backslash y$	0	1 (y)
0	$x'y'$	$x'y$
x 1	xy'	xy

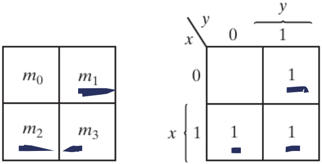
Mapa de dos variables

Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. Ejemplo: para la funcion $F = x'y + xy' + xy$



x y	F	mj
0 0	0	m0
0 1	**1**	m1
1 0	**1**	m2
1 1	**1**	m3

G: 1,2,4

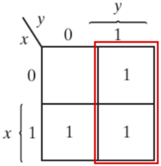


Mapa de dos variables

Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. Ejemplo: para la funcion $F = x'y + xy' + xy$

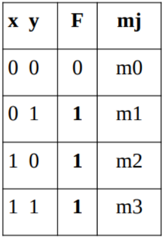
x y	**F**	**mj**
0 0	0	m0
0 1	**1**	m1
1 0	**1**	m2
1 1	**1**	m3

m_0	m_1
m_2	m_3

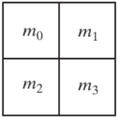


Mapa de dos variables I

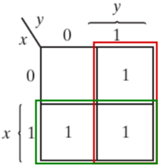
Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. Ejemplo: para la funcion $F = x'y + xy' + xy$



x y	F	mj
0 0	0	m0
0 1	**1**	m1
1 0	**1**	m2
1 1	**1**	m3



m_0	m_1
m_2	m_3



Por cada grupo, debemos ver cual variable es la que permanece constante. Del grupo **verde**, la que permanece constante es x y del grupo **rojo** la que permanece constante es y. La función sería $F = x + y$.

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
    - Mapa de dos variables
    - Mapa de tres variables
    - Mapa de cuatro variables
    - Mapa de cinco variables
    - Mapa con producto de sumas
2. Circuitos digitales básicos
3. Circuitos combinacionales

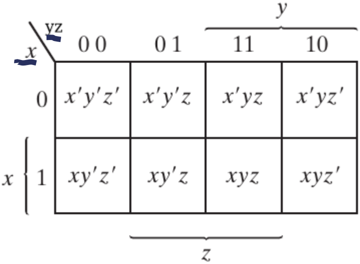
Mapa de tres variables I

Hay 8 minitérminos para 3 variables; por tanto, el mapa consiste en matriz de 2x4, uno para cada minitérmino. Ejemplo: Minimice la función de la siguiente tabla de verdad:

A	B	C	F	mj
0	0	0	0	m0
0	0	1	1	m1
0	1	0	1	m2
0	1	1	1	m3
1	0	0	0	m4
1	0	1	1	m5
1	1	0	0	m6
1	1	1	1	m7

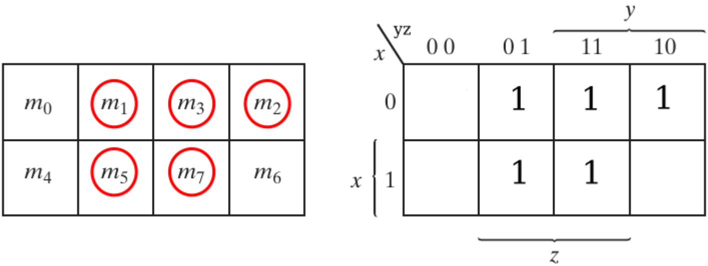
Mapa de tres variables I

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6



$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

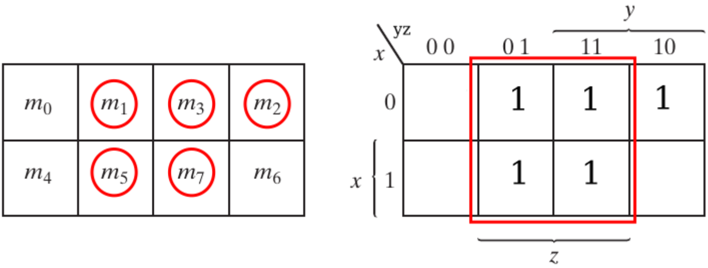
Mapa de tres variables II



m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

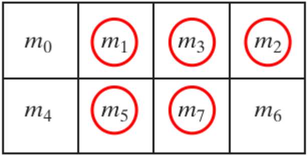
$x \backslash yz$	0 0	0 1	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

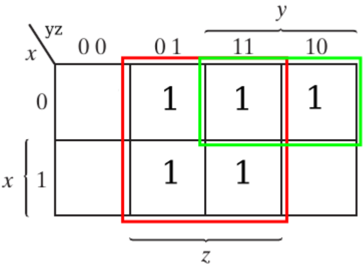
Mapa de tres variables III



Mapa de tres variables IV

m = 3 => 1,2,4,8

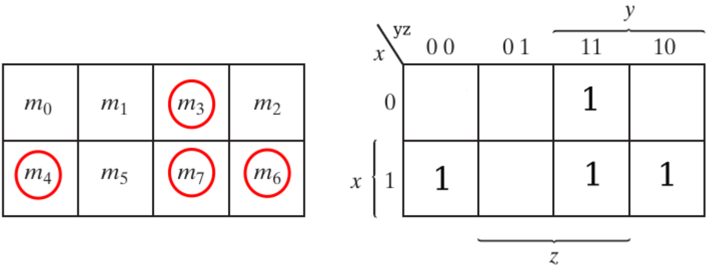




Del grupo **rojo**, la que permanece constante es z y del grupo **verde** x la que permanece constante en 0 y y en 1. La función sería $F = z + x'y$.

Mapa de tres variables I

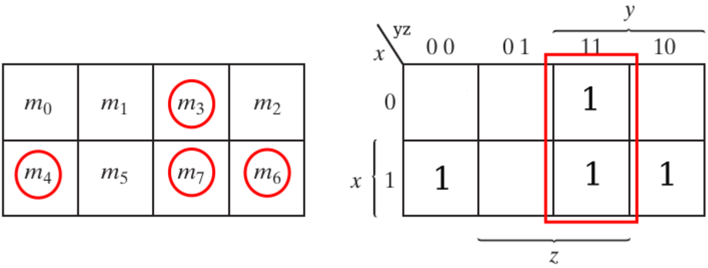
Otro ejemplo:



m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

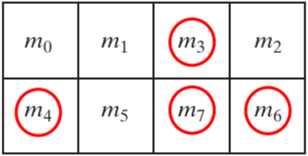
Mapa de tres variables II

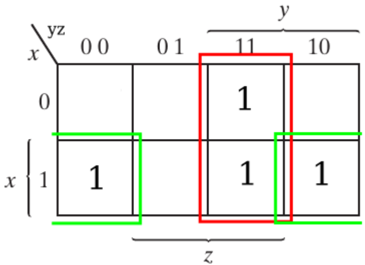


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

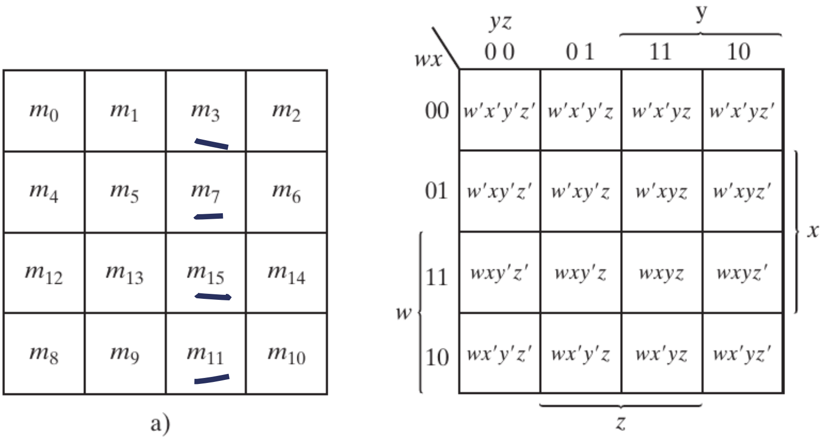
Mapa de tres variables III





Del grupo **rojo**, lo que permanece constante es yz y del grupo **verde** xz' la que permanece constante en 0 y y en 1. La función sería $F = yz + xz'$.

Mapa de cuatro variables I

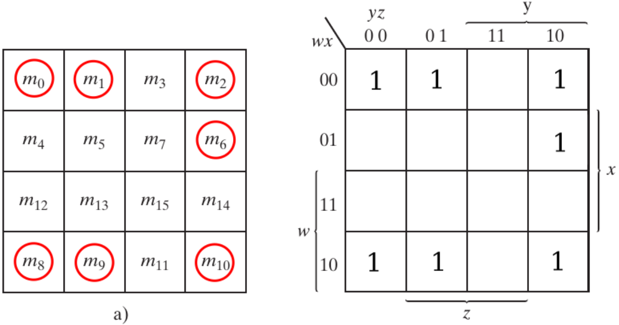


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

a)

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Mapa de cuatro variables II

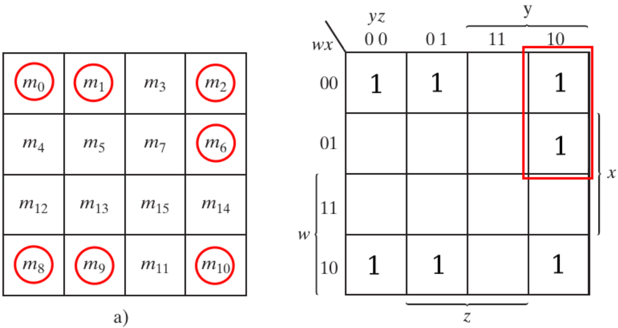


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

a)

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				
10	1	1		1

Mapa de cuatro variables III

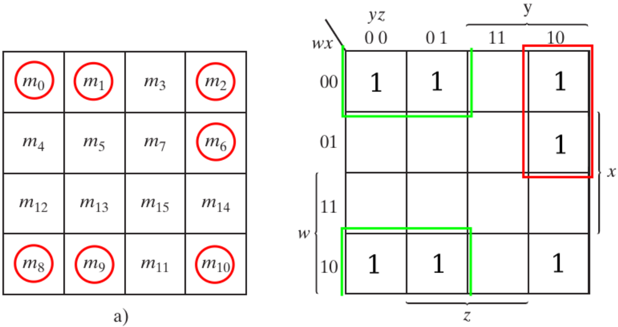


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

a)

wx \ yz	0 0	0 1	11	10
00	1	1		1
01				1
11				
10	1	1		1

Mapa de cuatro variables IV

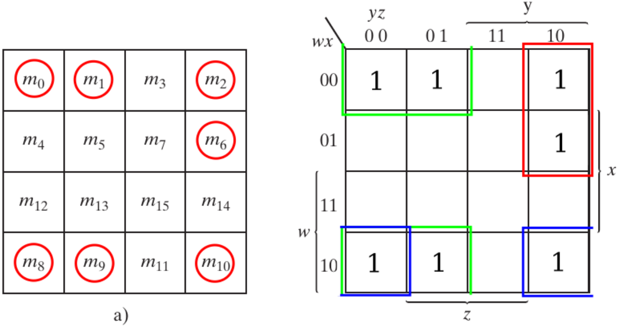


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

a)

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				
10	1	1		1

Mapa de cuatro variables V



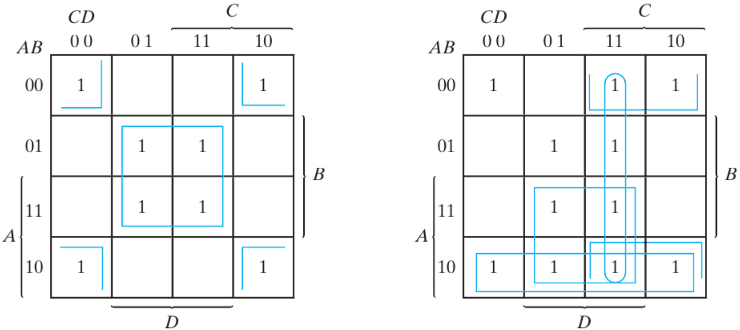
a)

Del grupo **rojo**, lo que permanece constante es $w'yz'$, del grupo **verde** permanece constante $x'y'$, y del grupo **azul** permanece constante $wx'z'$. La función sería $F = w'yz' + x'y' + wx'z'$.

Implicantes primos e implicantes primos esenciales I

Un implicante primo es un término de producto que se obtiene combinando el número máximo posible de cuadrados adyacentes en el mapa. Si un minitérmino de un cuadrado está cubierto por sólo un implicante primo, decimos que ese implicante primo es esencial.

Implicantes primos e implicantes primos esenciales II



	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

a) Implicantes primos esenciales BD y B′D′

	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

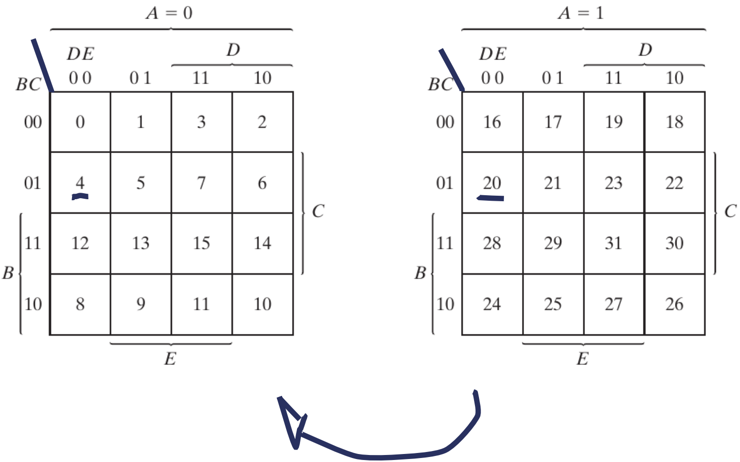
b) Implicantes primos CD, B′C AD y AB′

Implicantes primos e implicantes primos esenciales III

La expresión simplificada se obtiene de la suma lógica de todos los implicantes primos esenciales y los demás implicantes primos necesarios para cubrir los minitérminos restantes que no estén cubiertos por los implicantes primos esenciales. Ocasionalmente, habrá más de una manera de combinar cuadrados, y cada combinación podría dar pie a una expresión igualmente simplificada.

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
   - Mapa de dos variables
   - Mapa de tres variables
   - Mapa de cuatro variables
   - Mapa de cinco variables
   - Mapa con producto de sumas
2. Circuitos digitales básicos
3. Circuitos combinacionales

Mapa de cinco variables I



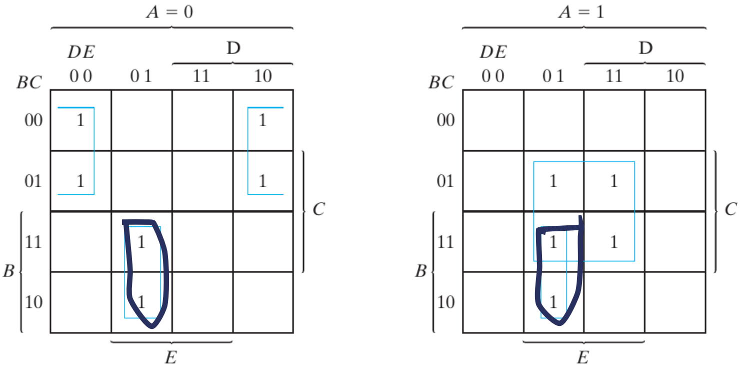
A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

Mapa de cinco variables II



$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
   - Mapa de dos variables
   - Mapa de tres variables
   - Mapa de cuatro variables
   - Mapa de cinco variables
   - Mapa con producto de sumas
2. Circuitos digitales básicos
3. Circuitos combinacionales

Mapa con producto de sumas I

También el mapa de Karnaugh se puede utilizar para simplificar y expresar la función como producto de sumas. El procedimiento es el siguiente:

1. Se marca con cero cada celda para representar cada término máximo de la función de Boole.
2. Se trata de agrupar los ceros de celdas adyacentes. El tamaño de los grupos debe ser $2^k, 0 < k \leq n$, $n =$ número de variables de la función. Entre más grande es el grupo, más simplificado queda la función.
3. Cada agrupación de celdas con un cero formará un término producto.

Mapa con producto de sumas II

4. Se observa si el grupo de 0's se encuentra completamente dentro de las columnas o filas correspondientes a una variable que no cambia, si es así, la variable formará parte del término suma.
5. Se obtiene la simplificación y se aplica el dual y se complementa (se cambian los signos y el valor de los literales).

1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
2. **Circuitos digitales básicos**
    - Decodificadores
    - Codificadores
    - Multiplexores
    - Demultiplexor
3. Circuitos combinacionales

Circuitos digitales básicos

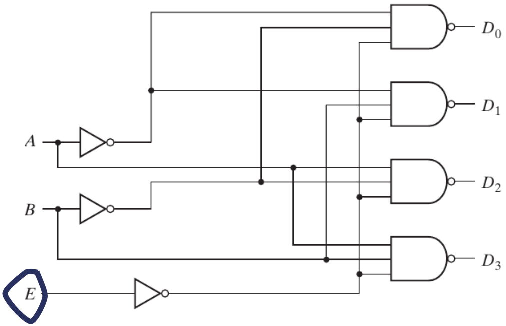
En los puntos anteriores se explicó como implementar tablas de la verdad y compuertas individuales. En la práctica, son pocos los circuitos que se construyen compuerta por compuerta. Los bloques de construcción usuales son módulos que contienen varias compuertas.

Decodificadores I

Es un circuito combinacional que tiene n entradas y un máximo de 2^n líneas únicas de salidas (cuando hay condiciones de no importa hay menos salidas). Para cada combinación de las variables de entrada, sólo una de las salidas toma valor igual a uno, todas las demás valen cero. Usos: cambiar de código, enrutar datos, direccionar memoria, etc.

Entradas			**Salidas**							
x	*y*	*z*	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

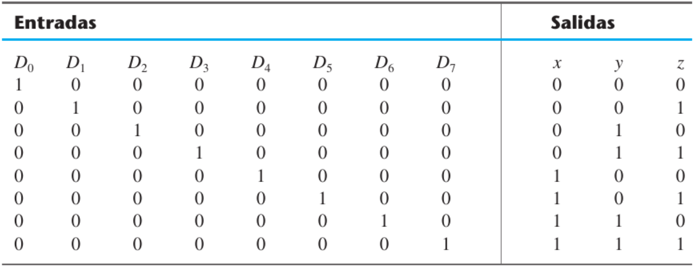
Decodificadores II



E	A	B	D_0	D_1	D_2	D_3
1	X	X	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0

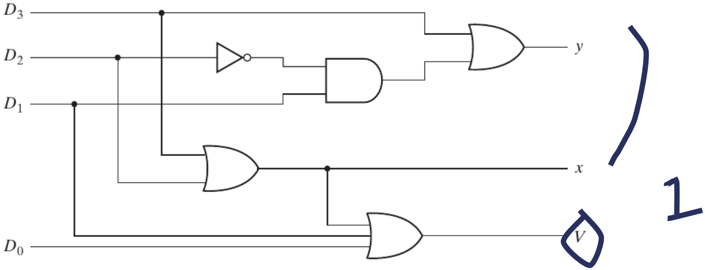
Codificadores I

Es el inverso del decodificador. Tiene 2^n (o menos) entradas y n salidas. Las líneas de salida generan el código binario para las 2^n variables de entrada.



Entradas								**Salidas**		
D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	x	y	z
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

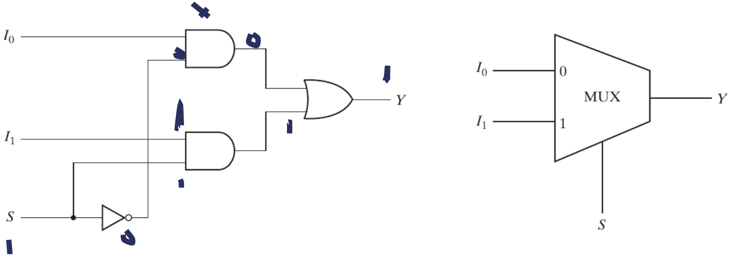
Codificadores II



1. Mapas de Karnaugh o Mapa K
2. Circuitos digitales básicos
   - Decodificadores
   - Codificadores
   - Multiplexores
   - Demultiplexor
3. Circuitos combinacionales

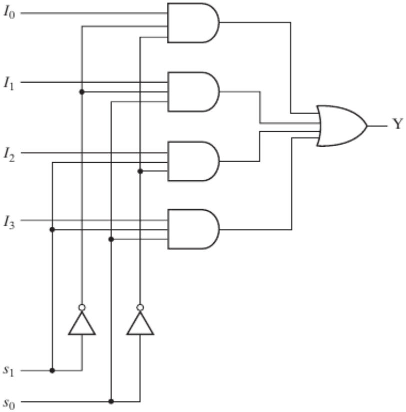
Multiplexores I

Es un circuito combinacional que selecciona una de entre muchas entradas para pasarla en la línea de salida. La selección de una línea de entrada se hace mediante varias entradas de selección. Si hay 2^n entradas entonces debe tener n líneas de selección.



Selección

Multiplexores II



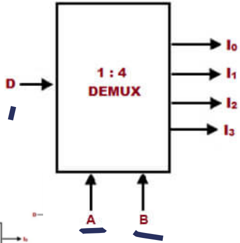
s_1	s_0	Y
0	0	I_0
0	1	I_1
1	0	I_2
1	1	I_3

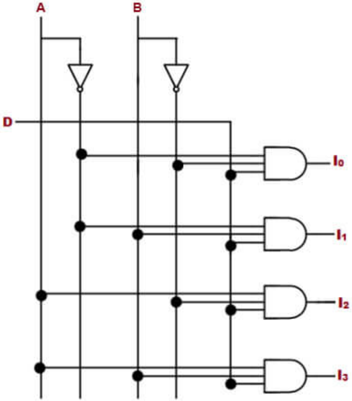
b) Tabla de función

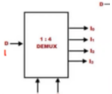
Demultiplexor I

Es un circuito que recibe información por una sola línea de entrada y transmite esta información a una de las 2^n salidas, según la combinación de n líneas de selección.

Demultiplexor II







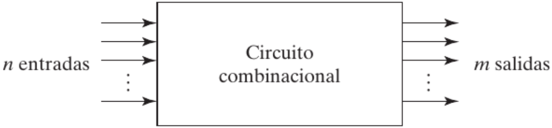
A	B	I_0	I_1
0	0	D	
0	1		D
1	0		
1	1		

Circuitos combinacionales

Un circuito combinacional consiste en variables de entrada, compuertas lógicas y variables de salida. Las compuertas lógicas aceptan señales en las entradas y generan señales en las salidas. Este proceso transforma información binaria de datos de entrada a datos de salida.

Circuitos combinacionales

Un circuito combinacional consiste en variables de entrada, compuertas lógicas y variables de salida. Las compuertas lógicas aceptan señales en las entradas y generan señales en las salidas. Este proceso transforma información binaria de datos de entrada a datos de salida.



Circuitos combinacionales

Para n variables de entrada, hay 2^n combinaciones posibles de valores de entrada binaria. Para cada combinación de entrada posible hay una y sólo una combinación de salida posible. Un circuito combinacional puede describirse por m funciones de Boole, una para cada variable de salida. Cada función de salida se expresa en términos de n variables de entrada.

Procedimiento de diseño

1. Se enuncia el problema.
2. Se determina el número requerido de variables de entrada y el número requerido de variables de salida.
3. Se le asignan letras a las variables de entrada y salida.
4. Se deduce la tabla de verdad que define las relaciones entre las entradas y las salidas.
5. Se obtiene la función de Boole simplificada para cada salida.
6. Se dibuja el diagrama lógico.

Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3

Diseñe un circuito combinacional que convierta los números del 0 al 9 codificados en BCD a código Exceso-3.

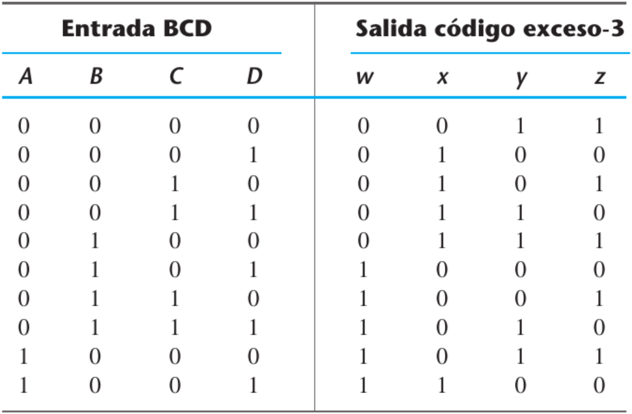
Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3

Diseñe un circuito combinacional que convierta los números del 0 al 9 codificados en BCD a código Exceso-3.

1. Se necesitan 4 variables para representar los números.
2. Se construye la tabla de verdad para las cuatro variables.
3. Se obtiene la expresión simplificada de las funciones.
4. Se construye el diagrama.

Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 I

0



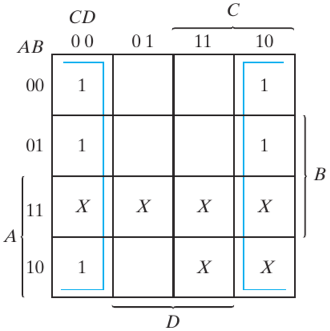
Entrada BCD				Salida código exceso-3			
A	*B*	*C*	*D*	*w*	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0

0

9

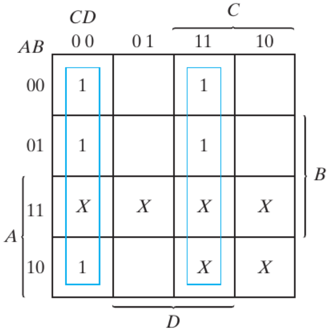
9

Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 II



AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	X	X	X	X
10	1		X	X

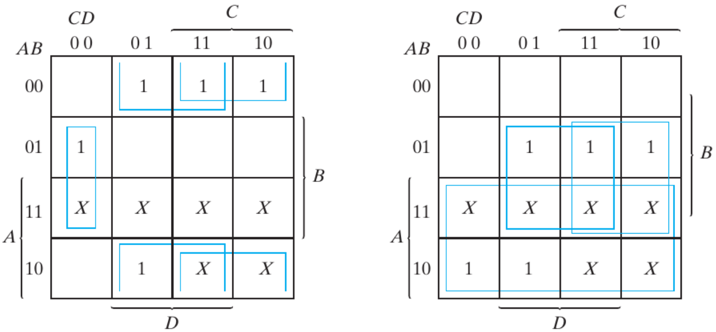
$z = D'$



AB	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11	X	X	X	X
10	1		X	X

$y = CD + C'D'$

Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 III



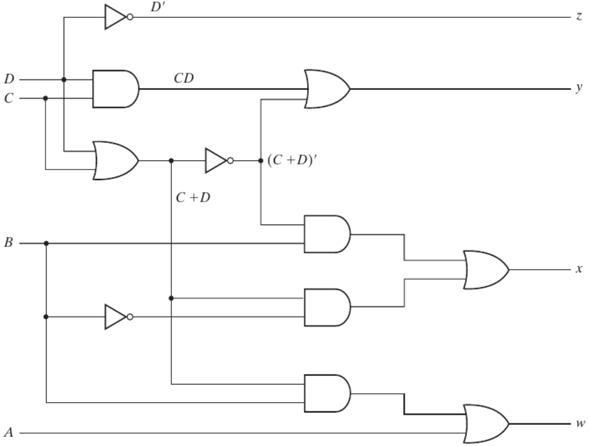
AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1			
11	X	X	X	X
10		1	X	X

$x = B'C + B'D + BC'D'$

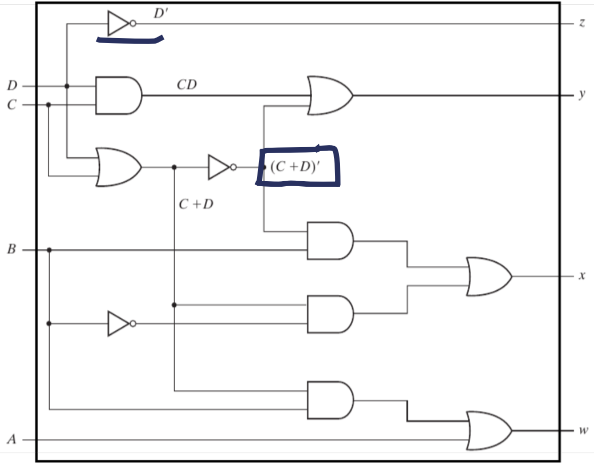
AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$w = A + BC + BD$

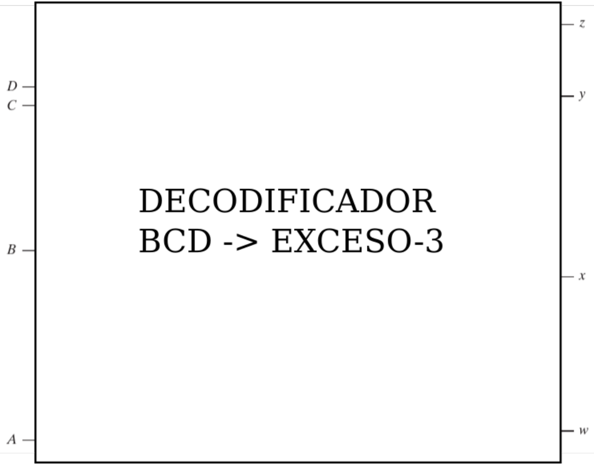
Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 IV



Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 V



Ejemplo: Conversión de código BCD a Exceso-3 VI



Preguntas?