Teoría de Conjuntos

Luis Eduardo Amaya B.
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Agosto 2020

$(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$

¡ojo!

$\boxed{A-B\neq B-A}$

Operaciones entre conjuntos

Conceptos básicos

A partir de dos conjuntos, A y B, se definen los conjuntos:

- **unión**, como $A\cup B=\{x\ /\ \ x\in A\vee x\in B\}$ $A\cup B=B\cup A$
- **intersección**, como $A\cap B=\{x\ /\ \ x\in A\wedge x\in B\}$ $A\cap B=B\cap A$
- **diferencia**, como $A-B=\{x\ /\ \ x\in A\wedge x\notin B\}$
- **diferencia simétrica**, como $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ $B\triangle A$

$A=\{1,3,29\}$, $B=\{3,25,35\}$

$A\cup B=\{1,3,25,29,35\}$, $A-B=\{1,29\}$

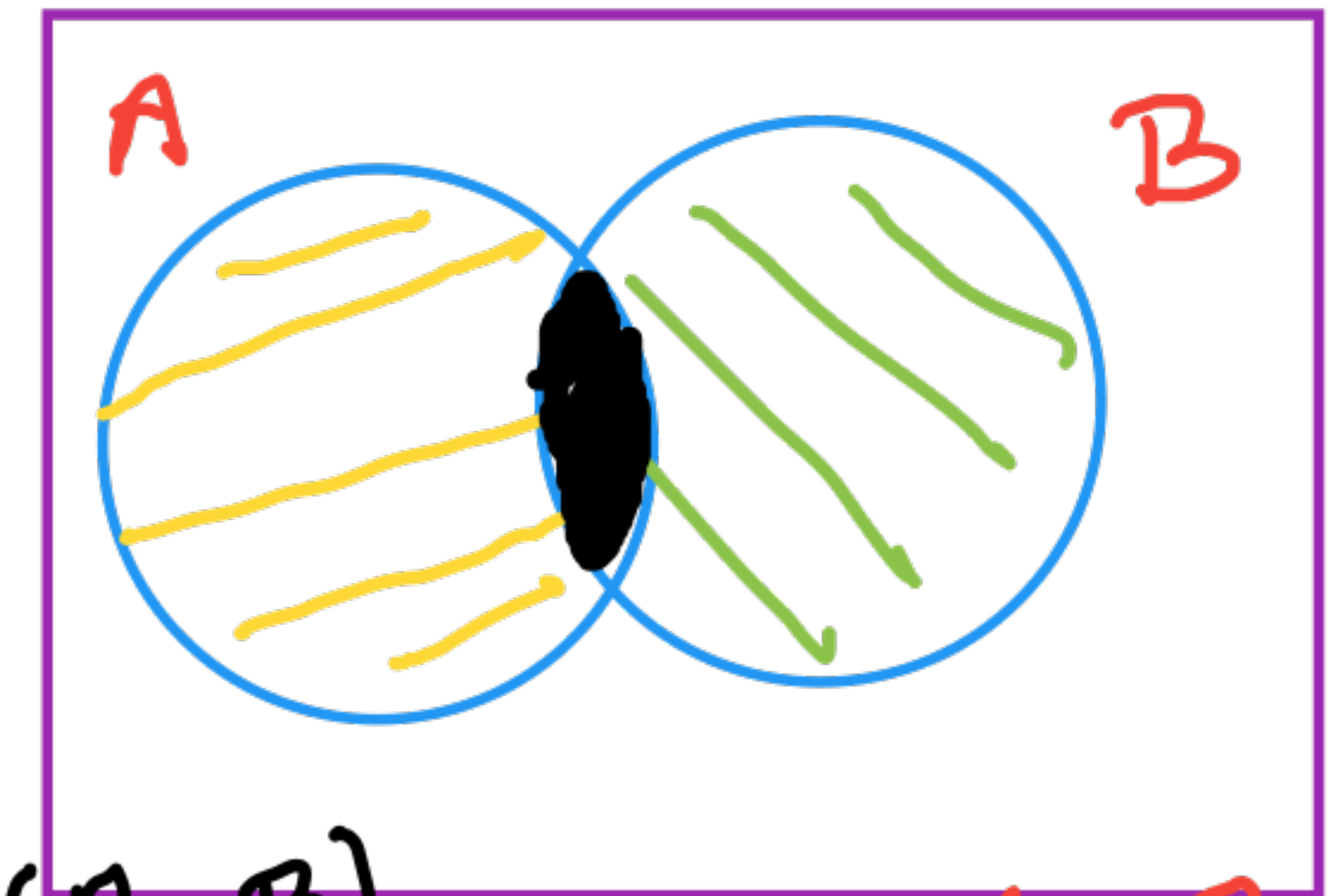
$A\cap B=\{3\}$, $B-A=\{25,35\}$, $A\triangle B=\{1,29,25,35\}$

Operaciones entre conjuntos

Diagramas de Venn

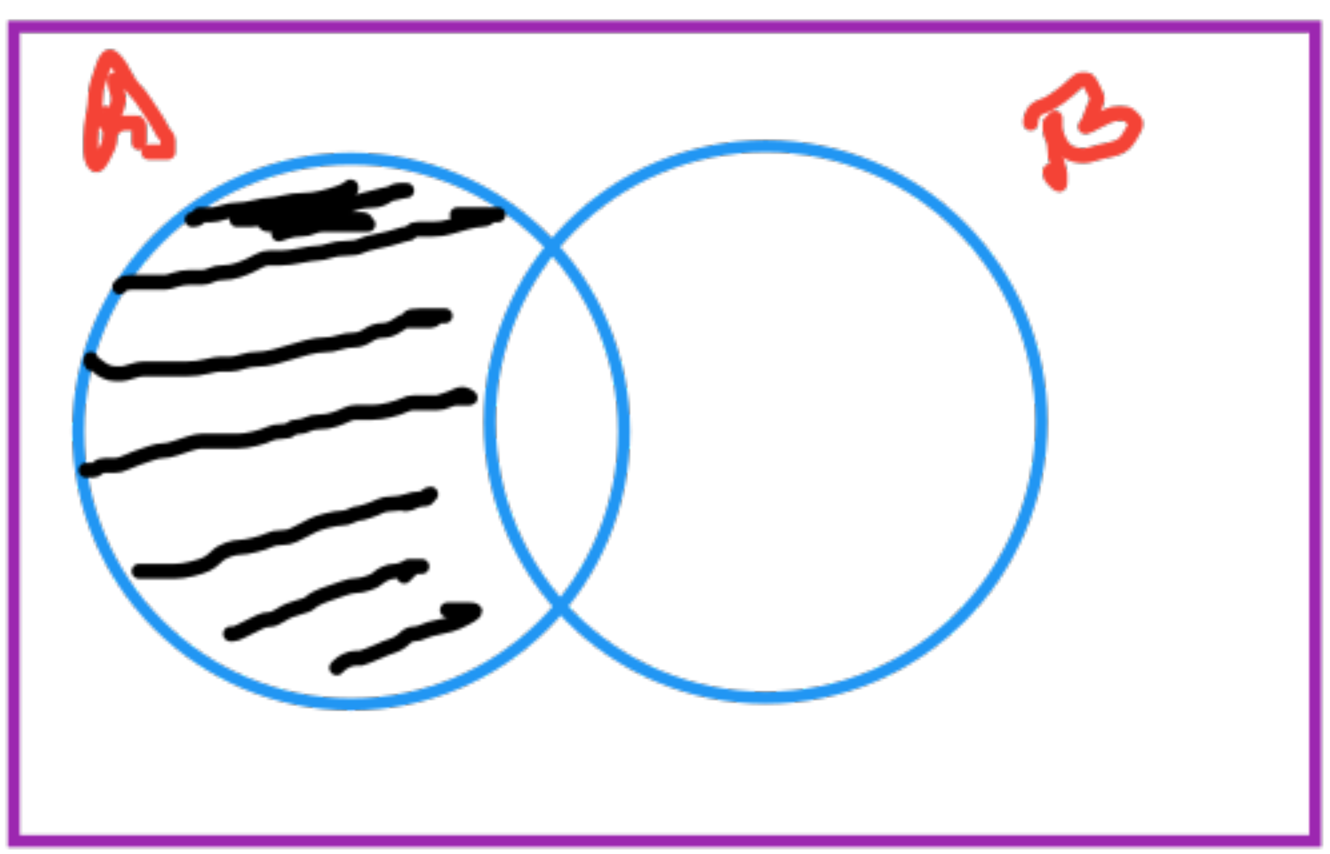
$A \cup B$

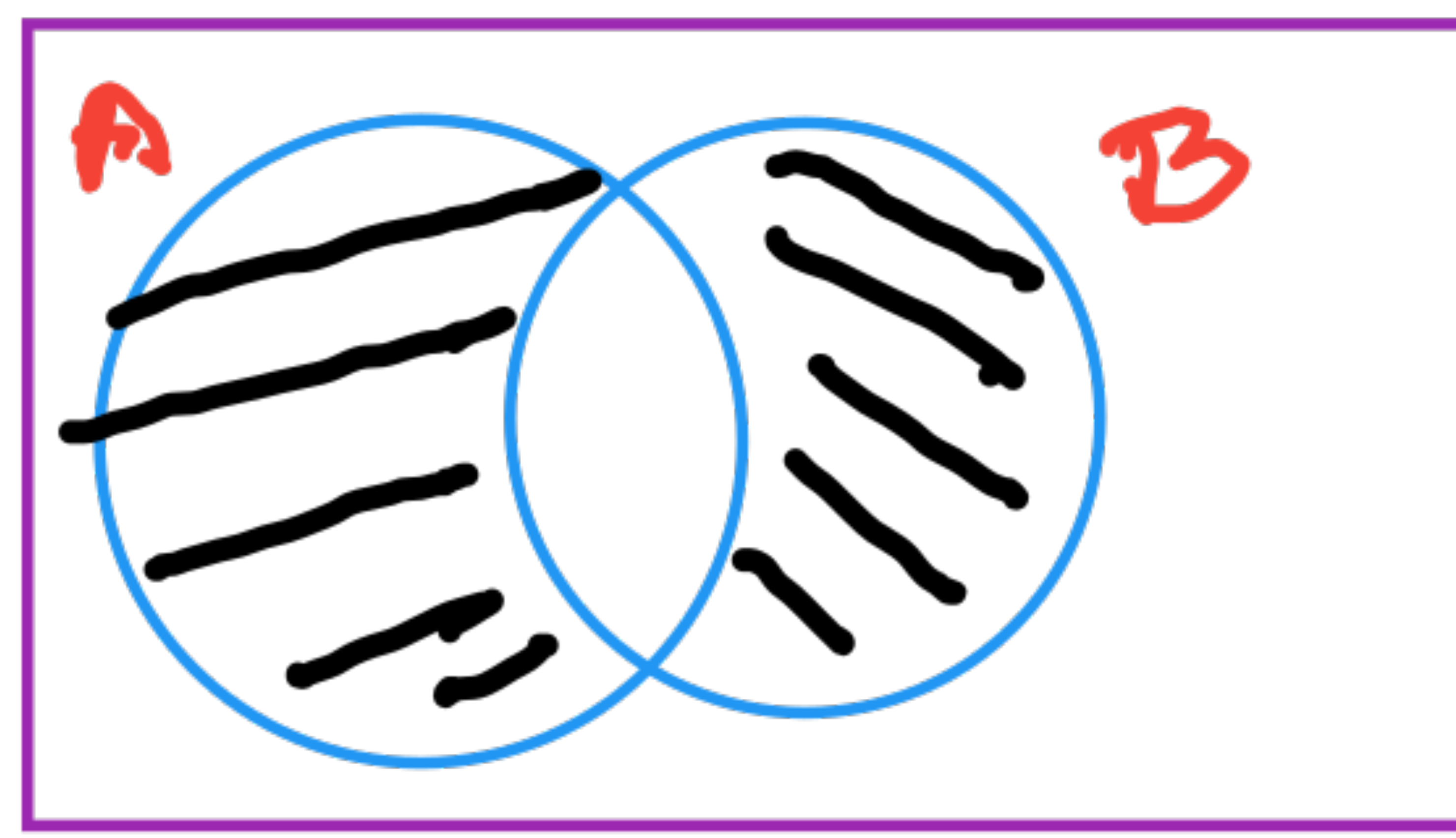
$A \cap B$



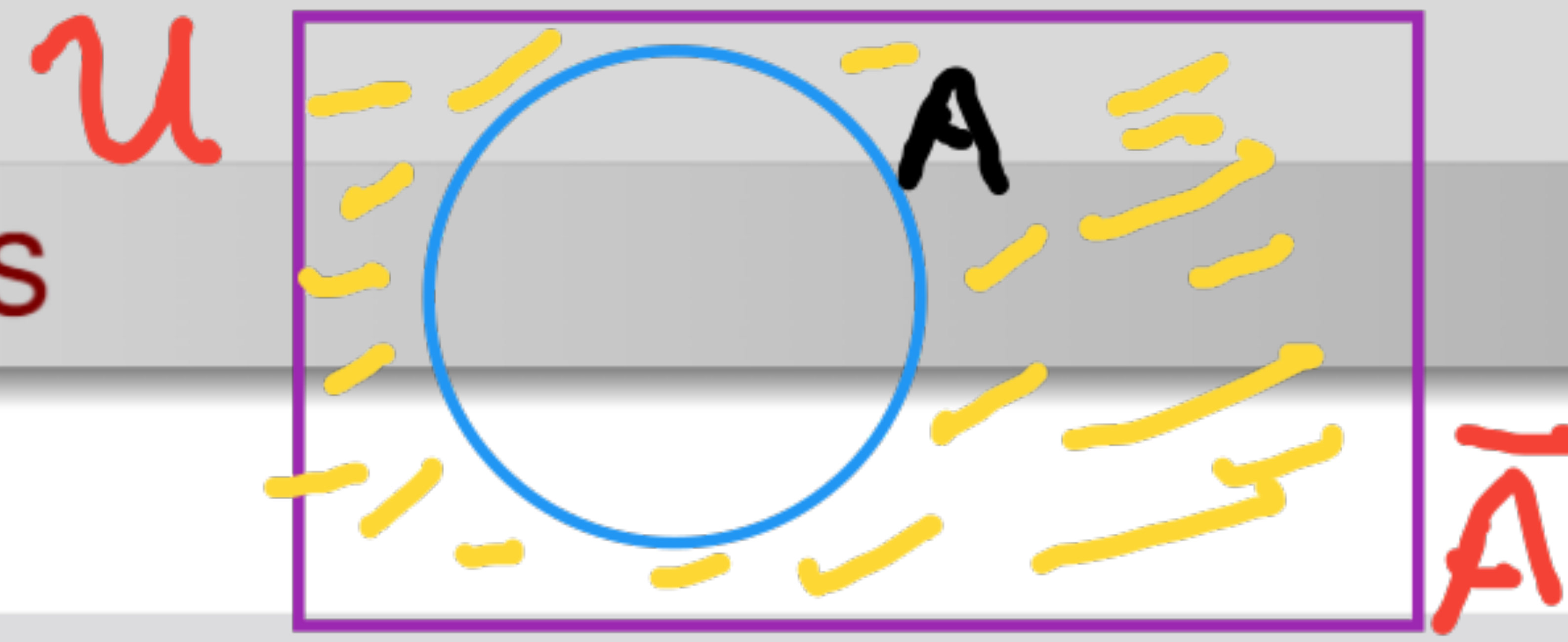
$A - B = A - (A \cap B)$

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$





Operaciones entre conjuntos



Si se tiene un conjunto A y otro conjunto $\mathcal{U}$ tal que $A \subseteq \mathcal{U}$, se define el **complemento de A con respecto a $\mathcal{U}$** como:

$$\overline{A} = \mathcal{U} - A$$

Al conjunto $\mathcal{U}$ se le llama **universo relativo** y en ocasiones $\overline{A}$ se denota como $\complement^{\mathcal{U}}_{A}$.

$|U| = 5$ $|A| = 3$ $|B| = 2$, $|\emptyset| = 0$

Ejemplo 5: Si U es el conjunto universo definido por, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, determine

1. $\overline{A \cup B}$ $= \overline{\{1, 2, 4, 5\}} = \{3\}$
2. $\overline{A \cap B}$ $\hookrightarrow \overline{\{2\}} = \{1, 3, 4, 5\}$
3. $\overline{B - A}$
4. $(U \cup A) \cup (U \cap A)$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo 5

3) $\overline{B-A} = \overline{\{4\}} = \{1,2,3,5\}$

4) $\underbrace{(U \cup A)}_{U} \cup \underbrace{(U \cap A)}_{A}$

$U \cup A$

$\{1,2,3,4,5\} \cup \{1,2,5\} = U = \{1,2,3,4,5\}$

i) $A \cup \emptyset = A$, ii) $A \cap \emptyset = \emptyset$, iii) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

iv) $A \cup \bar{A} = U$

Operaciones entre conjuntos

Pseudocódigo unión

$A = \{2, 3, 5\}$

$i = 1, \dots, 3$

$B = \{3, 4, 5\}$

$j = 1, \dots, 3$

$A[[1]] = 2$

$A[[2]] = 3$

```
Unionconj[A_, B_] := Module[{Uni = {}, i, j},
                     módulo
  Uni = A;
  For[i = 1, i ≤ Length[A], i++,
  para cada     longitud
   For[j = 1, j ≤ Length[B], j++,
   para cada    longitud
     If[A[[i]] != B[[j]],
     si
       Uni = Append[Uni, B[[j]]];
             añade
     ];
    ];
  ];
  Uni = DeleteDuplicates[Uni];
        elimina repeticiones
  Print["La unión del conjunto A=", A, ", con el conjunto B=", B, " da como el resultado el conjunto, A⋃B=", Uni];
  escribe
 ];
```

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A-B=\{x \,/\, x\in A \wedge x\notin B\}$

Operaciones entre conjuntos

Pseudocódigo diferencia

$A=\{2,3,4,6\}$, $B=\{3,4,7\}$

Recorrer A: $i=1$, $A[[i]]=2$, $i=2$. $A[[2]]=3$

$A-B=\{2,6\}$

```
Difer[A_, B_] := Module[{Dif = {}, i, j},
                 |módulo
  For[i = 1, i ≤ Length[A], i++,
  |para cada     |longitud
   If[MemberQ[A, A[[i]]] == True,
   |si |¿contenido en?         |verdadero
     If[ MemberQ[B, A[[i]]] == False,
     |si |¿contenido en?          |falso
       Dif = Append[Dif, A[[i]]];
             |añade
     ];
   ];
  ];
  Print["La diferencia del conjunto A=", A, ", con el conjunto B=", B, "da como el resultado el conjunto, A-B=", Dif];
  |escribe
 ];
```

Operaciones entre conjuntos

Pseudocódigo diferencia

Entrada: A, B

Salida: A - B

```
Inicio
 Dif = { }
 Para i=1 hasta i ≤ largo[A]
   Si A[[i]] no es miembro de B, entonces
     Dif = Append[Dif, A[[i]]];
   fin If
 Fin ciclo
Print: A - B = Dif
Fin
```

Operaciones entre conjuntos

Conceptos básicos

$|A|$ = cardinalidad de A = # de elementos de A.

Se dice que dos conjuntos A y B son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

Para el conjunto A, se define el **conjunto potencia** o **conjunto de partes de A**, que se denota $\boldsymbol{P(A)}$, como el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, es decir:

$\boxed{\begin{array}{c} \varnothing \subseteq A \\ A \subseteq A \end{array}}$

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$$P(A) = \{S \ / \ S \subseteq A\}$$

En ocasiones, el conjunto $P(A)$ se denota $\mathbf{2^A}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$

Para los conjuntos A y B, se define el **producto cartesiano de A y B** como el conjunto

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$(a,b) \neq (b,a)$

$$A \times B = \{(a,b) \ / \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo 6

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, 10, 20, 30\}$, $B = \{b, c, d, 20, 30, 40\}$, $C = \{b, e, 20, 35, 40\}$. Determinar

1. $(A \cap B \cap C) - A$.
2. $P(C - B)$.

① $(A \cap B \cap C) - A = \{b, 20\} - \{a, b, c, 10, 20, 30\}$

$= \emptyset$

② $C - B = \{e, 35\}$, $|C - B| = 2$, $|P(C-B)| = 2^2 = 4$

$P(C-B) = \{\emptyset, \overset{C-B}{\{e, 35\}}, \{e\}, \{35\}\}$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo 7

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$(A \cup B) - (B \cap A)$

Dados los siguientes conjuntos numéricos:

$$U = \{1, 2, ..., 7, 8\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 4, 5\}$$

1. Calcule la expresión $\overline{(A \triangle B) \cap C}$.
2. Calcule la expresión $P(B - C) \cap P(A - C)$

1. $\overline{\{1, 3, 4, 6\} \cap \{1, 4, 5\}} = \overline{\{1, 4\}} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

2. $B - C = \{2, 6\}$, $P(B - C) = \boxed{\{\emptyset, \{2, 6\}, \{2\}, \{6\}\}}$

$A - C = \{2, 3\}$, $P(A - C) = \boxed{\{\emptyset, \{2, 3\}, \{2\}, \{3\}\}}$

$P(B - C) \cap P(A - C) = \{\emptyset, \{2\}\}$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo 8

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, 10, 20, 30\}$, $B = \{b, c, d, 20, 30, 40\}$, $C = \{b, e, 20, 35, 40\}$. Determinar

1. $(B - A) \times (C \cap A)$.
2. $P(C - A)$.

2 2

① $B - A = \boxed{\{d, 40\}}$, $C \cap A = \boxed{\{b, 20\}}$

$(B - A) \times (C \cap A) = \{(d, b), (d, 20), (40, b), (40, 20)\}$

② $C - A = \{e, 35, 40\}$, $2^3 = 8$

$P(C - A) = \{\emptyset, \{e, 35, 40\}, \{e\}, \{35\}, \{40\}, \{e, 35\}, \{e, 40\}, \{35, 40\}\}$