Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición

- *Si f es una función de A en B, se dice que f es inyectiva o uno a uno, si y solo si para todo a y b en A se cumple*

  $$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

  Es decir, elementos diferentes de A poseen imágenes diferentes en B.
- *Si f es una función de A en B, se dice que f es sobreyectiva si y solo si $f(A) = B$. Es decir, f es sobreyectiva si el ámbito y el codominio de f son iguales.*
- *Si f es una función de A en B, se dice que f es biyectiva si y solo si es **inyectiva** y **sobreyectiva**.*

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 21

Considere la función $\boxed{f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{5\}}$ cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{5x-2}{x-4}$. Pruebe que f es biyectiva.

i) Inyect. H.q.d $\boxed{f(a) = f(b)} \Rightarrow \boxed{a = b}$

$$\frac{5a-2}{a-2} = \frac{5b-2}{b-2} \Rightarrow (5a-2)(b-2) = (5b-2)(a-2)$$

$$\cancel{5ab} - 10a - 2b + \cancel{4} = \cancel{5ab} - 10b - 2a + \cancel{4}$$

$$-10a + 2a = -10b + 2b$$

$$-\cancel{8}a = -\cancel{8}b \qquad \Rightarrow f \text{ es inyect}$$

$$a = b \quad //.$$

ii) Sobreyectiva $b = f(a)$

$$b = \frac{5a-2}{a-4}, \quad b(a-4) = 5a-2,$$

$$ab - 4b = 5a - 2, \quad ab - 5a = 4b - 2$$

$$a(b-5) = 4b-2, \quad a = \frac{4b-2}{b-5}, \quad b \neq 5$$

$$\Rightarrow f(a) = b, \quad \left(\frac{4b-2}{b-5}, b\right)$$

$\Rightarrow f$ es sobrey.

De (i) y (ii) f es biyect.

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 22

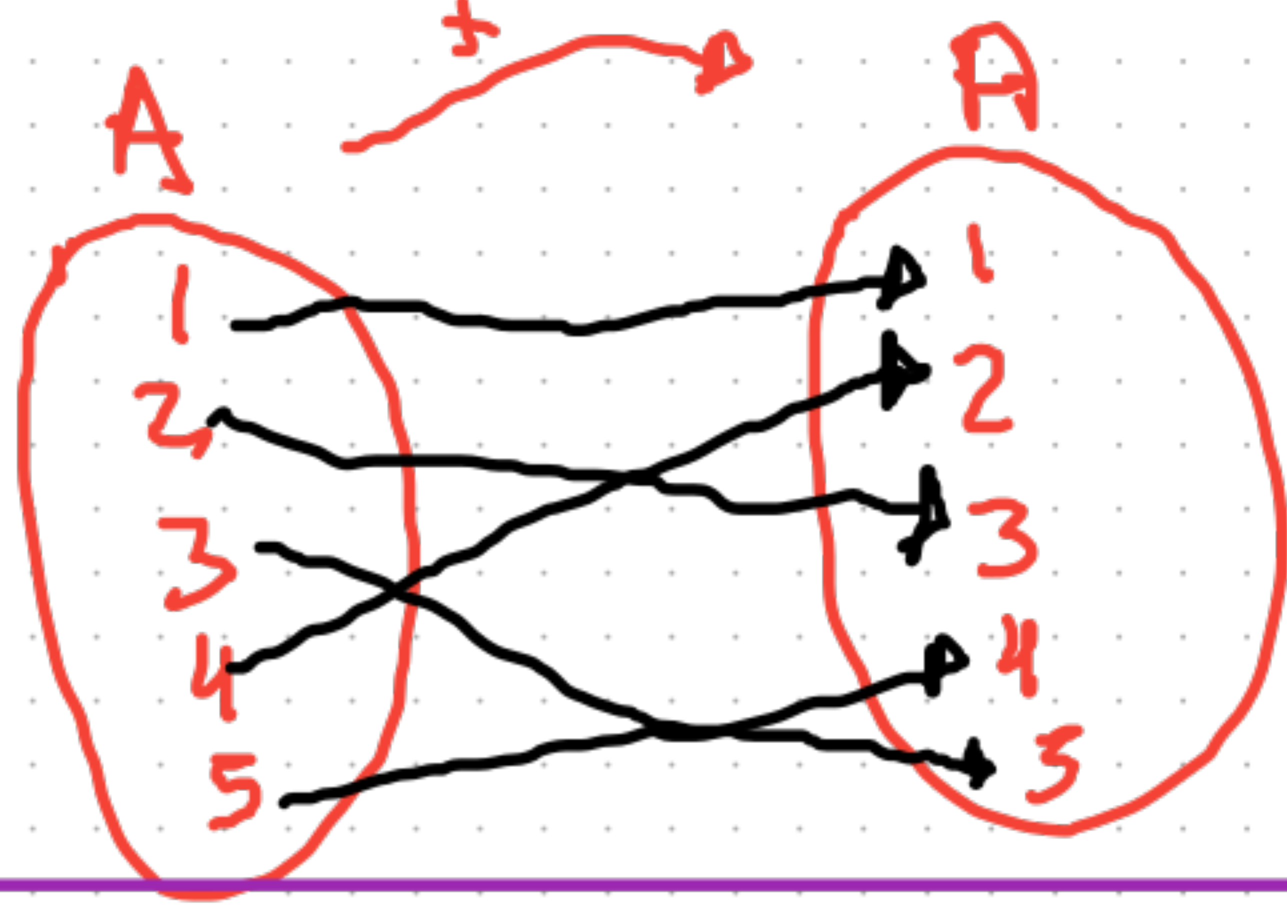
$A \to A$

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathbb{R}$ una relación definida en A, cuya gráfica H viene dada por $H = \{(1,1), (2,3), (4,2), (5,4), (3,5)\}$. Justifique si R es una función biyectiva.
2. Determine todas las funciones biyectivas sobre $A = \{1, 2, 3\}$.
3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \times A \to B$ definida por

$$f((a, b)) = \begin{cases} 1 & si \quad a < b \\ 3 & si \quad a > b \\ 4 & si \quad a = b \end{cases}$$

   1. Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.
   2. Determine $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$

1



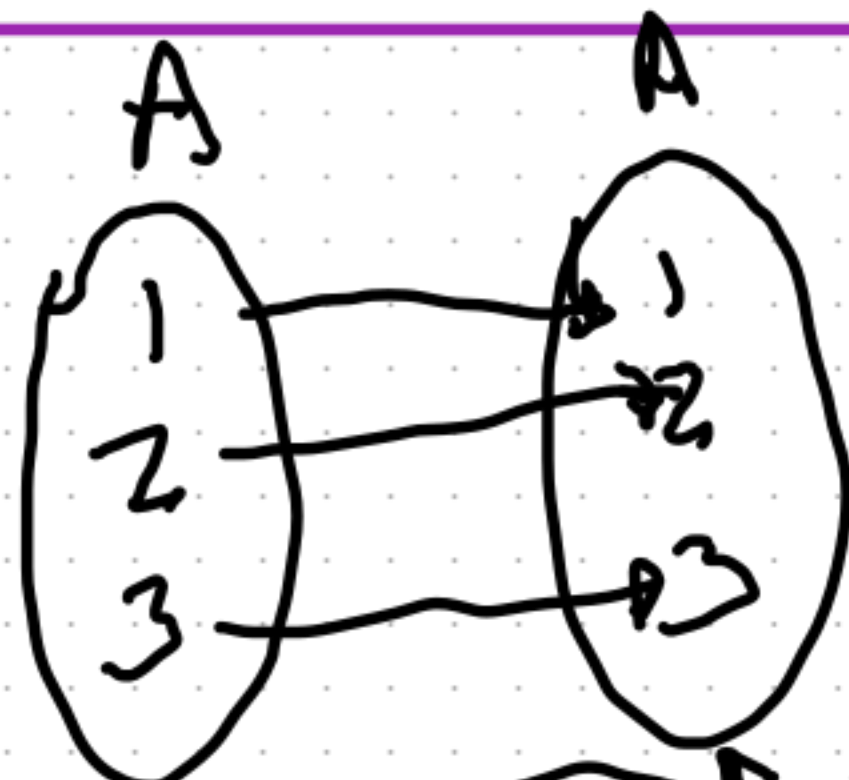
biyect → Iny.

biyect → sobrey.

f es inyectiva, ya que el diagrama se observa que para cualesquiera 2 preimagenes diferentes se tienen 2 imagenes diferentes, y además es sobreyectiva, porque el codominio es igual al ámbito de la función, por los elementos anteriores f es biyectiva.

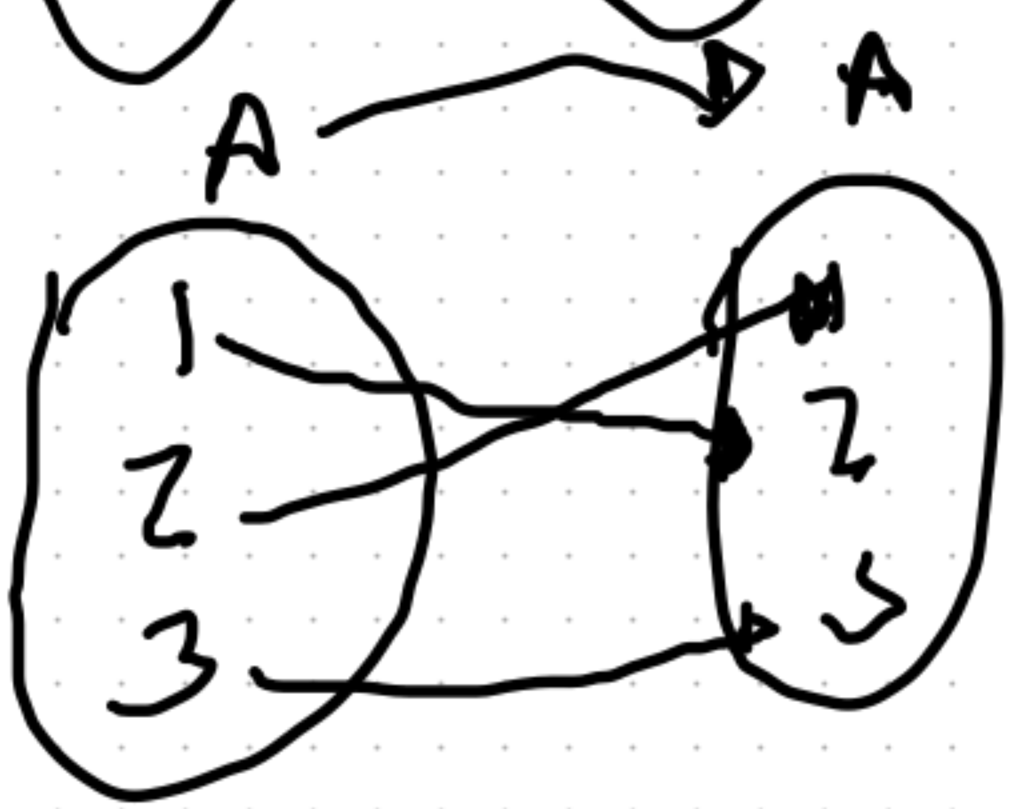
2

i)



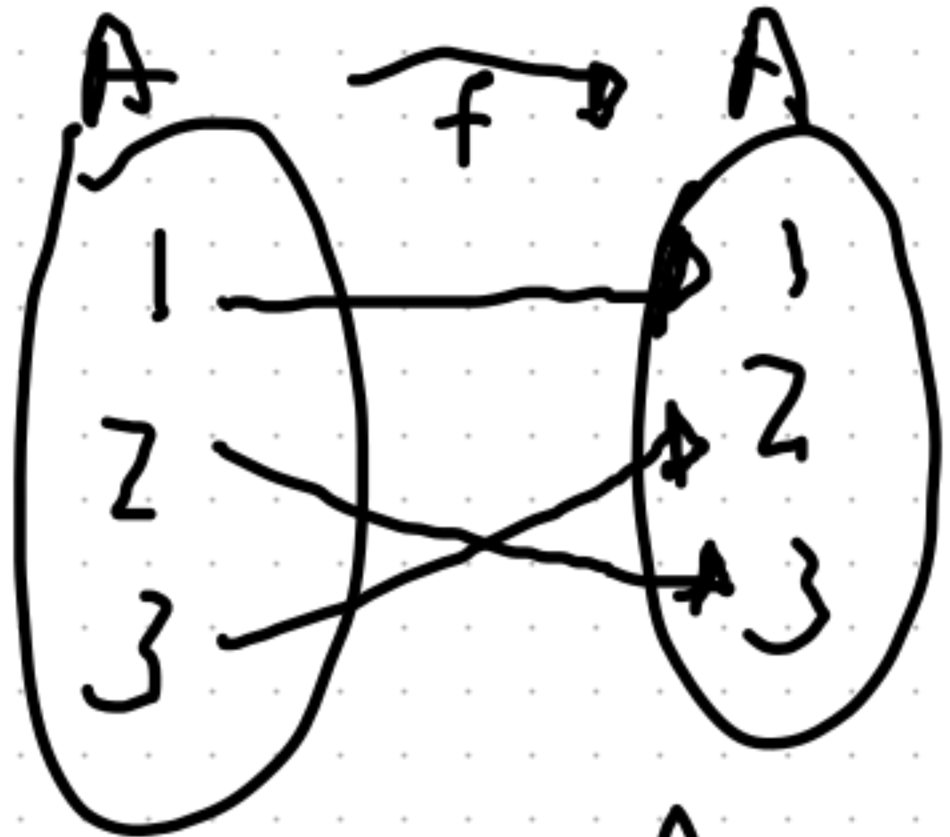
$G_R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

vi)



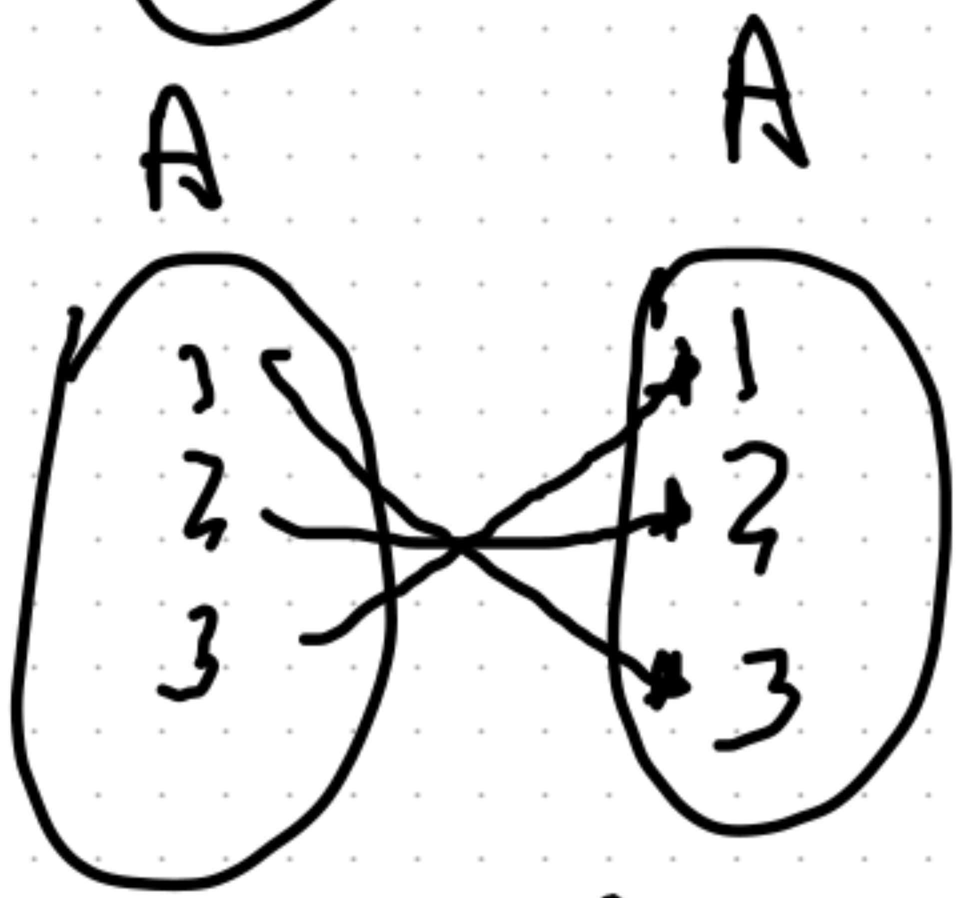
$G_R = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

iii)



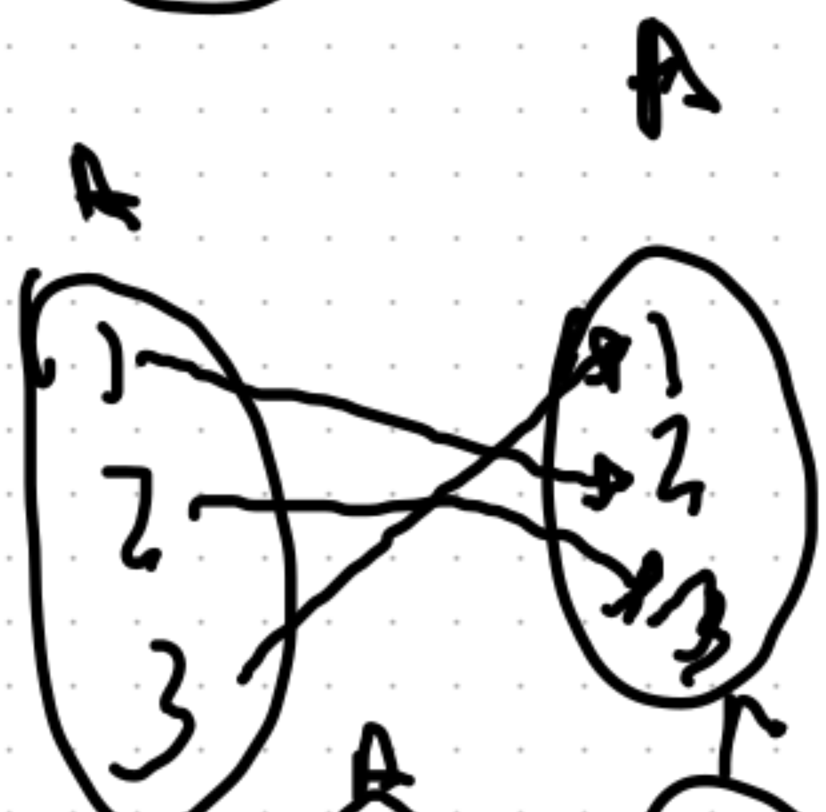
$G_R = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$

iv)



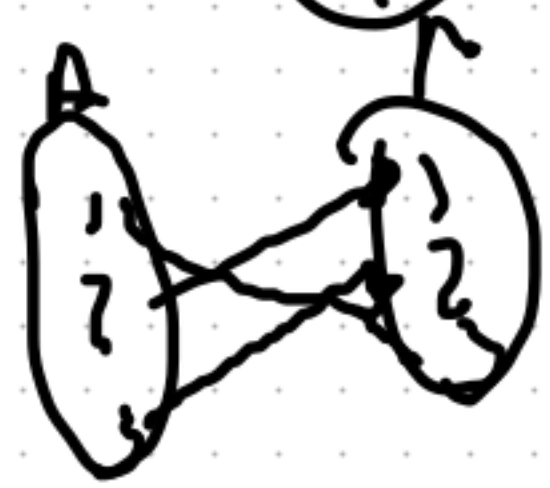
$G_R = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

v)



$G_R = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

vi)

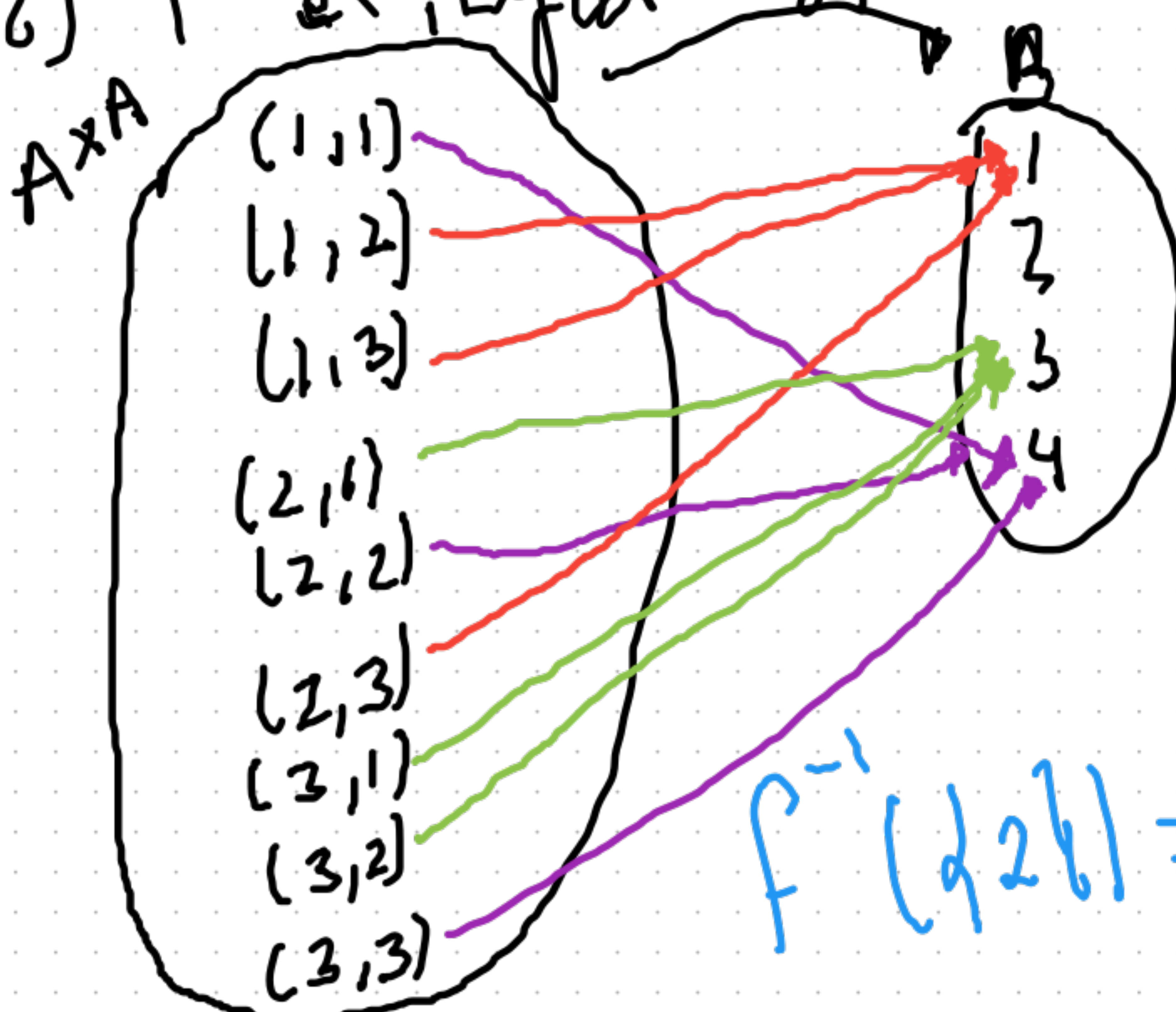


$G_R = \{(1,3), (2,1), (3,2)\}$

③ $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4\}$

$f: \underbrace{A \times A} \to B$, $f((a,b)) = \begin{cases} 1, & a<b \\ 3, & a>b \\ 4, & a=b \end{cases}$

i) f es inyect. y/o sobrey.



f, no es inyectiva, ya que existen diferentes preimagenes que tienen la misma imagen, como por ejemplo f((1,1))=4=f((2,2)).

f no es sobrey.

$A_f \neq Cod_f$

$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 23: ejercicio estudiantes

Sea $A = \{a, b, c\}$ y considere la función $f : P(A) \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$, definida por $f(B) = |B|$.

1. Determine $f(\{a, c\})$ y $f(\{a\}, \{a, b\}, \{b\})$
2. Determine $f^{-1}(\{2, 4\})$
3. Determine si f es inyectiva o sobreyectiva.

Operaciones con funciones

Definición

Dadas dos funciones, $f : A \to D$ y $g : B$, con A, B, C, D subconjuntos de $\mathbb{R}$, se define:

- $(cf)(x) = cf(x)$
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *siempre que* $g(x) \neq 0$

En la definición anterior de las últimas cuatro operaciones básicas con funciones, el dominio de la función resultante es la intersección de los dominios de cada función involucrada, es decir, $A \cap B$. En la división de funciones, de esta intersección de los dominios se deben eliminar los valores que anulan a la función g.

Operaciones con funciones

Ejemplo 24

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x - 4$ y $g(x) = 2x - 3$, determine el criterio y dominio de $(f - g)(x)$, $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, $(f \cdot g)(2)$

i) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= x^2 - 3x - 4 - (2x - 3)$$

$$= x^2 - 3x - 4 - 2x + 3$$

$(f-g)(x) = x^2 - 5x - 1$, $f-g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ii) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x-3}{x^2-3x-4}$, $(x-4)(x+1)=0$

$x=4, \quad x=-1$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-4}$, $\frac{g}{f} : \mathbb{R} - \{-1, 4\} \to \mathbb{R}$

iii) $(f\,g)(2) = f(2) \cdot g(2)$

$= (2^2 - 3\,2 - 4) \cdot (2\,2 - 3)$

$= -6 \cdot 1$

$= -6$

Operaciones con funciones

Composición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define la composición de las funciones f y g como la nueva función $(g \circ f) : A \to C$, que cumple:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

f(x):

g(x):

(f o g)(x):

(g o f)(x):

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Operaciones con funciones

Ejemplo 25

$g(1) = -(1)^2 + 5(1) - 2$, $g(x^3) = -(x^3)^2 + 5x^3 - 2$

- Si tenemos $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = -x^2 + 5x - 2$, ambas funciones de dominio real, determinar $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ f \circ f$.

$g[f \circ f]$

- Sea $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x - 4}$.

$D_f = \mathbb{R} - \{4\}$

1. Pruebe que $(f \circ f \circ f)(x) = x$.
2. Determine el dominio de f y el dominio de $f \circ f \circ f$.

① $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = -[f(x)]^2 + 5f(x) - 2$

$= -(3-2x)^2 + 5(3-2x) - 2$

$= -(9 - 12x + 4x^2) + 15 - 10x - 2$

$= -9 + 12x - 4x^2 + 15 - 10x - 2$

$(g \circ f)(x) = -4x^2 + 2x + 4$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = 3 - 2[f(x)]$

$$= 3 - 2(3 - 2x)$$

$$= 3 - 6 + 4x$$

$(f \circ f)(x) = 4x - 3$, $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $g \circ f \circ f = g[f \circ f] = -5[f \circ f]^2 + 5[f \circ f] - 2$

$$= -5(4x-3)^2 + 5(4x-3) - 2$$

$$= -5(16x^2 - 24x + 9) + 20x - 15 - 2$$

$$= -80x^2 + 140x - 62$$, $g \circ f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f\circ f\circ f)(x)=x\ ,\quad f(x)=5-\frac{1}{x-4}$$

$$f[\underbrace{f(f)}_{f\circ f}]=5-\frac{1}{f(f(x))-4}=5-\frac{1}{5-\frac{1}{f(x)-4}-4}$$

$$5-\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)-4}}=5-\frac{1}{1-\frac{1}{5-\frac{1}{x-4}-4}}=5-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{1}-\frac{1}{x-4}}}$$

$$5-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-5}{x-4}}}=5-\frac{1}{\frac{1}{1}-\frac{x-4}{x-5}}=5-\frac{1}{\underbrace{\cancel{x}-5-(-1)(\cancel{x}-4)}_{x-5}}$$

$$5\overset{+}{-}\frac{1}{\frac{-1}{x-5}}=\cancel{5}+x-\cancel{5}=x$$

$x\neq 5$

$$D_{f\circ f\circ f}=\mathbb{R}-\{4,5\}$$

Operaciones con funciones

Ejemplo 26

- Considere las funciones g definida por $g(x) = -x + 5$ y f definida por

$-3[g(x)]-1$
$-3(-x+5)-1$
$3x-16$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x \geq 2 \quad (a) \\ -3x - 1 & si \quad x < 2 \quad (b) \end{cases}$$

Determine el criterio de $(f \circ g)(x)$. $f[g(x)]$

- Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 8x^3 - 5$. Además, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra función que cumple $(f \circ g)(x) = 35 - 8x$. Determine el criterio $g(x)$.

(1) En (a) $f[g(x)] = 2[g(x)]+1 = 2(-x+5)+1 = -2x+11$

$g(x) \geq 2$, $-x+5 \geq 2$, $-x \leq -3$, $x \geq 3$ $\qquad g(x)<2$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2x+11, & si \quad x \geq 3 \\ 3x-16, & si \quad x<3 \end{cases}$$

$$f(x) = 8x^3 - 5 \quad , \quad g(x) = ?$$

$$(f \circ g)(x) = 35 - 8x$$

tenemos $f[g(x)] = 35 - 8x$

$$8[g(x)]^3 - 5 = 35 - 8x$$

$$8[g(x)]^3 = 40 - 8x$$

$$[g(x)]^3 = 5 - x \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{5 - x}$$