Nivel de Lógica Digital: Aritmética en base "b"

Ing. Ronald Caravaca Mora

IF4000 - Arquitectura de Computadores Informática Empresarial

21 de agosto de 2021



- 1 Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
- 4 Conversión entre bases

- 1 Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
- 4 Conversión entre bases

Introducción I

- 1 El actual periodo tecnológico se conoce como "era digital".
- 2 Una característica de los sistemas digitales es su capacidad para manipular elementos discretos de información.
- 3 Las primeras computadoras digitales se usaron para efectuar cálculos numéricos. En este caso, los elementos discretos que se usaron fueron los dígitos. De ahí el término digital.
- 4 Los sistemas digitales electrónicos actuales, las señales emplean sólo dos valores discretos, por lo que decimos que son binarios. Un dígito binario, llamado bit (binary digit), tiene dos valores: 0 y 1.

Introducción II

- 5 El sistema numérico que se utiliza es el binario.
- 6 Tanto los datos como las instrucciones están codificados en un sistema binario.
- 16 bits, para cual se utilizan los sistemas octal y hexadecimal.

- 1 Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
- 4 Conversión entre bases

Sistemas de notación posicional I

Los sistemas de notación posicional están formados por un conjunto de *n* cantidad de símbolos, cuya combinación representa valores diferentes. El concepto de criterio posicional es que cada dígito tiene un **peso** distinto según el lugar que ocupa; el peso es la base elevada a la posición que ocupa dentro del número. La suma de cada dígito multiplicado por su **peso** permitirá obtener el valor final del número.

En todo sistema posicional, dada una base B se tienen B dígitos posibles, de 0 a B-1.

Sistemas de notación posicional II

Al símbolo con menor peso se le conoce como: "menos significativo", mientras que al símbolo con mayor peso se le conoce como: "mas significativo".

En el caso del sistema binario se tiene:

- Bit menos significativo o LSB (Less Significant Bit).
- Bit mas significativo o MSB (Most Significant Bit).

Expresión generalizada

Se expande el número en base B en la siguiente serie de potencias:

$$N = d_n \cdot B^n + d_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0$$

$$\bigvee_{\substack{\text{digitor} \\ \text{buse}}} \text{buse}$$

Expresión generalizada

Se expande el número en base B en la siguiente serie de potencias:

$$N = d_n \cdot B^n + d_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0$$

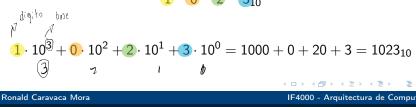
Por ejemplo, el sistema decimal es un sistema de notación posicional formado por 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Entonces, el número 1023 estará conformado por la suma de las siguientes cantidades:

Expresión generalizada

Se expande el número en base B en la siguiente serie de potencias:

$$N = d_n \cdot B^n + d_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0$$

Por ejemplo, el sistema decimal es un sistema de notación posicional formado por 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Entonces, el número 1023 estará conformado por la suma de las siguientes cantidades:



- 1 Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
 - Sistema binario o base 2 Sistema octal o base 8 Sistema hexadecimal o base 16
- 4 Conversión entre bases

- 1 Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
 Sistema binario o base 2
 Sistema octal o base 8
 Sistema hexadecimal o base 16
- 4 Conversión entre bases

Sistema binario o base 2

Es un sistema de notación posicional, formado por dos símbolos (0,1) a los que se denomina bits. También se les llama:

0	1
OFF	ON
Falso	Verdadero
No	Si

Sistema binario o base 2

Es un sistema de notación posicional, formado por dos símbolos (0,1) a los que se denomina bits. También se les llama:

0	1
OFF	ON
Falso	Verdadero
No	Si

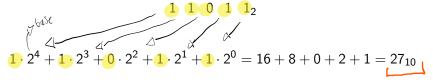
Ejemplo:

Sistema binario o base 2

Es un sistema de notación posicional, formado por dos símbolos (0,1) a los que se denomina bits. También se les llama:

0	1
OFF	ON
Falso	Verdadero
No	Si

Ejemplo:



- Introducción
- Sistemas de notación posicional
- Sistemas numéricos

 - Sistema octal o base 8
- 4 Conversión entre bases

Sistema octal o base 8

Es un sistema posicional formado por ocho símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 8.

Sistema octal o base 8

Es un sistema posicional formado por ocho símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 8.

Ejemplo:

 275_{8}

Sistema octal o base 8

Es un sistema posicional formado por ocho símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 8.

Ejemplo:

- Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- Sistemas numéricos

 - Sistema hexadecimal o base 16
- 4 Conversión entre bases

Sistema hexadecimal o base 16

En general se abrevia con las siglas "Hexa", "H", "h" y algunos casos "x", es un sistema posicional formado por dieciséis símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) que representan los valores decimales de 0 a 15; el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 16.

Sistema hexadecimal o base 16

En general se abrevia con las siglas "Hexa", "H", "h" y algunos casos "x", es un sistema posicional formado por dieciséis símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) que representan los valores decimales de 0 a 15; el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 16.

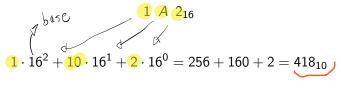
Ejemplo:

 $1 A 2_{16}$

Sistema hexadecimal o base 16

En general se abrevia con las siglas "Hexa", "H", "h" y algunos casos "x", es un sistema posicional formado por dieciséis símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) que representan los valores decimales de 0 a 15; el peso de cada cifra son las potencias sucesivas de 16.

Ejemplo:



Expresión generalizada con punto fraccionario

Que pasa si queremos expresar el número 11010,112 en base 10?

Expresión generalizada con punto fraccionario

Que pasa si queremos expresar el número 11010,112 en base 10?

$$N = d_n \cdot B^n + d_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0 + d_{-1} \cdot B^{-1} + d_{-2} \cdot B^{-2} + \ldots + d_{-m} \cdot B^{-m}$$

Expresión generalizada con punto fraccionario

Que pasa si queremos expresar el número 11010,112 en base 10?

$$N = d_n \cdot B^n + d_{n-1} \cdot B^{n-1} + \dots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0 + d_{-1} \cdot B^{-1} + d_{-2} \cdot B^{-2} + \dots + d_{-m} \cdot B^{-m}$$

$$N = \underbrace{1 \cdot 2^{4} + 1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-1}}_{Q = cime} + \underbrace{1 \cdot 2^{4} + 1 \cdot 2^{2}}_{Q = cime}$$

$$N = 16 + 8 + 0 + 2 + 0 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2}}}_{Q = cime}$$

$$N = 26.75_{Q}$$

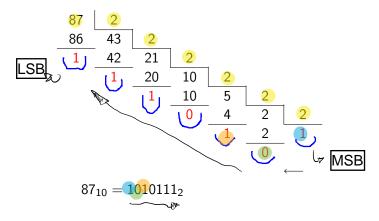
- 2 Sistemas de notación posicional
- 3 Sistemas numéricos
- 4 Conversión entre bases

Conversión entre bases I

- 1 Para convertir cualquier número de cualquier base B a base 10, se expande el número usando la expresión generalizada con series de potencias como se explicó anteriormente.
- 2 La conversión inversa, de base 10 a base B se efectúa dividiendo el número y todos sus cocientes sucesivos entre B y acumulando los residuos.
- Si el número tiene punto fraccionario, será necesario separar la parte entera de la parte fraccionaria, pues cada parte se convierte de manera distinta.

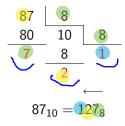
Conversión entre bases II

Ejemplo 1. Si queremos convertir el número 87_{10} a base 2.



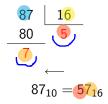
Conversión entre bases III

Ejemplo 2. Si queremos convertir el número 87₁₀ a base 8.



Conversión entre bases IV

Ejemplo 3. Si queremos convertir el número 87_{10} a base 16.



Conversión entre bases V

Ejemplo 4. Si queremos convertir el número 418_{10} a base 16.

$$\begin{array}{c|ccccc}
418 & 16 & \\
416 & 26 & 16 & \\
\hline
2 & 16 & 1 & \\
\hline
10 & A & \\
418_{10} & = 142_{16} & \\
\hline
418_{10} & = 142_{16} & \\
\hline
\end{array}$$

Conversión entre bases VI

Ejemplo 5. Si queremos convertir el número 0,6875₁₀ a base 2.

$$0.6875 \cdot 2 = 1.348$$
 $0.375 \cdot 2 = 0.75$
 $0.75 \cdot 2 = 1.5$
 $0.5 \cdot 2 = 1.0$
LSB
 $0.6875_{10} = 1011_{2}$

Conversión entre bases VII

Ejemplo 8. Si queremos convertir el número 0,513₁₀ a base 8.

 $0.513 \cdot 8 = 4.104$

$$0.104 \cdot 8 = 0.832$$

$$0.832 \cdot 8 = 6.656$$

$$0.656 \cdot 8 = 5.248$$

$$0.248 \cdot 8 = 1.984$$

$$0.984 \cdot 8 = 7.872$$

$$\vdots$$

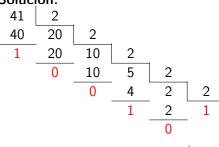
$$0.513_{10} = 0.406517..._{8}$$
(1)

Conversión entre bases VIII

Como practica:

La conversión de números decimales que tienen tanto parte entera como parte fraccionaria se efectúa convirtiendo por separado las dos partes y combinando después las dos respuestas. Por tanto, desarrolle la conversión de los siguientes números:

- Convertir el número 41,23₁₀ a base 2.
- Convertir el número 153,56₁₀ a base 8.



$$\bigcirc$$

 $41_{10} = 101001_2$

$$0.46 \cdot 2 = 0.92$$

$$0.92 \cdot 2 = 1.84$$

$$0.84 \cdot 2 = 1.68$$

$$0.68 \cdot 2 = 1.36$$

$$0,36 \cdot 2 = 0,72$$

 $0.72 \cdot 2 = 1.44$

$$41,23_{10} = 101001,0011101...$$



Solución: 153 8 152 19 16

$$53,56_{10} = 231_8$$

Conversión entre bases

000000000000

$$153,56_{10} = 231,4365605..._8$$



- Introducción
- 2 Sistemas de notación posicional
- Sistemas numéricos
- 4 Conversión entre bases
- 6 Aritmética binaria

Representación de números

Números con diferente base

Decimal (base 10)	Binario Octal (base 2) (base 8)		Hexadecimal (base 16)	
00	0000	00	0	
01	0001	01	1	
02	0010	02	2	
03	0011	03	3	
04	0100	04	4	
05	0101	05	5	
06	0110	06	6	
07	0111	07	7	
08	1000	10	8	
09	1001	11	9	
10	1010	12	A	
11	1011	13	В	
12	1100	14	C	
13	1101	15	D	
14	1110	16	E	
15	1111	17	F	



10
$$\overset{4}{110}$$
 001 101 011 ,111 100 000 $110_2 = 26153,7406_8$
2 6 1 5 3 ,7 4 0 6

10 1100 0110 1011 ,1111 0010 =
$$2C6B, F2$$

2 C 6 B , F 2 (2)

Representación de números

Pontecia de 2	Valor en bina	rio Valor en decimal
20	1	1
2 ¹	10	2
2 ²	100	4
23	1000	8
2 ⁴	10000	16
2 ⁵	100000	32
260	(1000000	64

Pontecia de 2	Valor en binario	Valor en decimal	
2 ⁷	10000000	128	
2 ⁸	100000000	256	
2 ⁹	100000000	512	
2 ¹⁰	10000000000	1024	
2 ¹¹	100000000000	2048	
2 ¹²	1000000000000	4096	
2 ¹³	100000000000000	8182	

Suma de números binarios

$$0+0=0$$

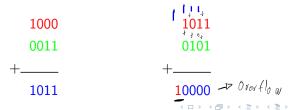
 $0+1=1$
 $1+0=1$
 $1+1=0$ y acarreo 1

Suma de números binarios

$$0+0=0$$

 $0+1=1$
 $1+0=1$
 $1+1=0$ y acarreo 1

Ejemplos: Sumar en binario los números 8₁₀ y 3₁₀ y los números 11_{10} y 5_{10} con 4 bits.



Representación de números negativos

La representación de números negativos se puede hacer de dos maneras:

- Signo y magnitud
- 2 Complemento

Signo y magnitud

Se utiliza el bit mas significativo (MSB) para codificar el signo, y los bits restantes para la magnitud.

Magnitud con signo
0111
0110
0101
0100
0011
0010
0001
0000
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
_

38 / 50

Signo y magnitud

Se utiliza el bit mas significativo (MSB) para codificar el signo, y los bits restantes para la magnitud.

Ejemplo:

Con 4 bits puedo representar 16 números; los positivos del 0 a 15, o los negativos de -7 al -0 y lo positivos del 0 al 7.

0	~ 7	positivo
	~7	negative

Decimal	Magnitud con signo
+7	/ 0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
+0	0000
-0	1000
-1	1001
-2	1010
-3	1011
-4	1100
-5	1101
-6	1110
-7	1111
-8	_

Signo y magnitud

Se utiliza el bit mas significativo (MSB) para codificar el signo, y los bits restantes para la magnitud.

Ejemplo:

Con 4 bits puedo representar 16 números; los positivos del 0 a 15, o los negativos de -7 al -0 y lo positivos del 0 al 7.

Problemas:

1 Complejidad de implementación.

2 Doble representación del 0.

SB) para	Decimal	Magnitud con signo
	+7	/ 0111
s para	+6	0110
	+5	0101
	+4	0100
	+3	0011
	+2	0010
neros;	+1	0001
10103,	+0	0000
/OS	-0	(1000)
(97)	-1	1001
~ (V)	-2	1010
70 70 6	-3	1011
$\mu_{\scriptscriptstyle O}$	-4	1100
. no co	-5	1101
. 100	-6	1110
	-7	1111
	-8	_

38 / 50

Números en complemento de base

Dado un número N en base B que tiene n dígitos, el complemento a (B-1) de N se define como $(B^n-1)-N$.

Dado un número N en base B que tiene n dígitos, el complemento a (B-1) de N se define como $(B^n-1)-N$.

En el caso de números decimales, B=10 y B-1=9, así que el complemento a nueve de N es $(10^n - 1) - N$. En este caso, 10^n representa un número que consiste en un uno seguido de n ceros y $10^{n}-1$ es un número representado por *n* nueves. Por ejemplo, si n = 4, tenemos $10^4 = 10000 \text{ y}$, $10^4 - 1 = 9999$.

Dado un número N en base B que tiene n dígitos, el complemento a (B-1) de N se define como $(B^n-1)-N$.

17 base decimul En el caso de números decimales, B = 10 y B - 1 = 9, así que el complemento a nueve de N es $(10^n - 1) - N$. En este caso, 10^n representa un número que consiste en un uno seguido de n ceros y $10^{n}-1$ es un número representado por *n* nueves. Por ejemplo, si n = 4, tenemos $10^4 = 10000 \text{ y } 10^4 - 1 = 9999$.

Eiemplo:

El complemento a nueve de 546700 es (999999) - 546700 = 453299.

El complemento a nueve de 012398 es 999999 - 012398 = 987601.

Dado un número N en base B que tiene n dígitos, el complemento a (B-1) de N se define como $(B^n-1)-N$.

En el caso de números decimales, B = 10 y B - 1 = 9, así que el complemento a **nueve** de N es $(10^n - 1) - N$. En este caso, 10^n representa un número que consiste en un uno seguido de n ceros y $10^{n}-1$ es un número representado por *n* nueves. Por ejemplo, si n = 4, tenemos $10^4 = 10000 \text{ y } 10^4 - 1 = 9999$.

Ejemplo:

6 digital 6 digital

El complemento a nueve de 546700 es 999999 - 546700 = 453299.

El complemento a nueve de 012398 es 999999 - 012398 = 987601.

El complemento a (B-1) de los números octales y hexadecimales se obtiene restando cada dígito a 7 y F (15 decimal), respectivamente.

Números en complemento de base

En el caso de los números binarios, B=2 y B-1=1, así que el complemento a uno de N es $(2^n - 1) - N$. Por ejemplo, si n = 4, tenemos $24 = 10000_2$ y $24 - 1 = 1111_2$. Así, el complemento a uno de un número binario se obtiene restando cada dígito a uno. Sin embargo, al restar dígitos binarios a 1 podemos tener 1-0=1 o bien 1-1=0, lo que hace que el bit cambie de 0 a 1 o de 1 a 0. Por tanto, el complemento a uno de un número binario se forma cambiando los unos a ceros y los ceros a unos. He aquí algunos ejemplos numéricos:

En el caso de los números binarios, B=2 y B-1=1, así que el complemento a **uno** de N es $(2^n - 1) - N$. Por ejemplo, si n = 4, tenemos $24 = 10000_2$ y $24 - \overline{1} = 1111_2$. Así, el complemento a uno de un número binario se obtiene restando cada dígito a uno. Sin embargo, al restar dígitos binarios a 1 podemos tener 1-0=1 o bien 1-1=0, lo que hace que el bit cambie de 0 a 1 o de 1 a 0. Por tanto, el complemento a uno de un número binario se forma cambiando los unos a ceros y los ceros a unos. He aquí algunos ejemplos numéricos:

Ejemplo:

El complemento a uno de 1011000 es 0100111. El complemento a uno de 0101101 es 1010010.

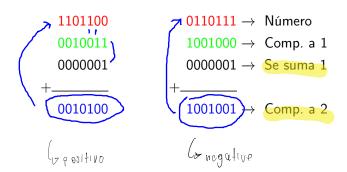


Complemento a 2

El complemento a B de un número N de n dígitos en base B se define como $B^n - N$, para $N \neq 0$, y 0 para N = 0. Si comparamos con el complemento a (B-1), veremos que el complemento a B se obtiene sumando 1 al complemento a (B-1), ya que $(B^n - N = [(B^n - 1) - N] + 1.$

Cuando B = 2, se tiene que el complemento a 2 se obtiene sumando un 1 al complemento a uno.

Complemento a 2

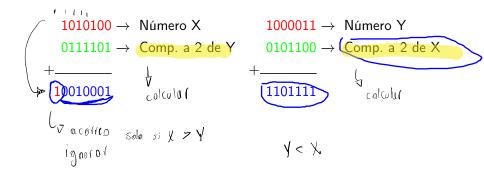


La resta de dos números de n dígitos sin signo, (M) en base Bse efectúa así:

- 1 Sume el minuendo, M, al complemento a B del sustraendo, N. Esto da $M + (B^n - N) = M - N + B^n$.
- 2 Si $(M) \ge N$, la suma producirá un acarreo final, B^n , que puede desecharse; lo que queda es el resultado $\overline{M} - \overline{N}$.
- 3 Si M < N, la suma no produce un acarreo final y es igual a $\sqrt{2}$ n-(N-M), que es el complemento a B de (N-M). Para obtener la respuesta en una forma conocida, se toma el complemento a B de la suma y se le antepone un signo de menos.



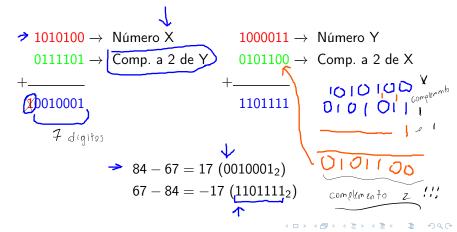
Dados los números binarios (X) = 1010100 y (Y) = 1000011, realizar las restas a) (X - Y) y b) (Y - X) empleando complementos a dos.



Resta de números binarios

7 digitos

Dados los números binarios X = 1010100 y Y = 1000011, realizar las restas a) X - Y y b) Y - X empleando complementos a dos.



1000	<u>/</u> _
*0001,	
0100	(
1100	

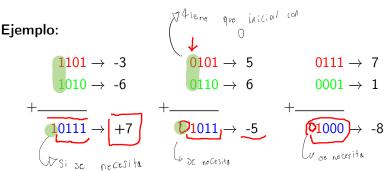
Complemento a uno con signo 0111 0110 0101	Magnitud con signo 0111 0110 0101
0110 0101	0110
0101	
	0101
0400	0101
0100	0100
0011	0011
0010	0010
0001	0001
0000	0000
1111	1000
1110	1001
1101	1010
1100	1011
1011	1100
1010	1101
1001	1110
1000	1111
_	_
	0100 0011 0010 0001 0000 1111 1110 1101 1100 1011 1010 1001

Desborde (Overflow)

- No pasa con números de diferente signo.
- Pero si pasa con numero de igual signo cuando resultado supera la cantidad de bits disponibles o el bit de signo del resultado no es consistente.

Desborde (Overflow)

- No pasa con números de diferente signo.
- Pero si pasa con numero de igual signo cuando resultado supera la cantidad de bits disponibles o el bit de signo del resultado no es consistente.



Desborde (Overflow)

Como se soluciona?

- 1 Analizando el bit de signo: Si ambos números tiene el mismo signo, debemos esperar que el resultado mantenga el mismo signo, si no es así, se levanta un bandera que le avise al procesador que hubo overflow.
- 2 Cuando hay un acarreo al sumar los bits MSB, se levanta un bandera que le avise al procesador que hubo *overflow*.

Códigos binarios I

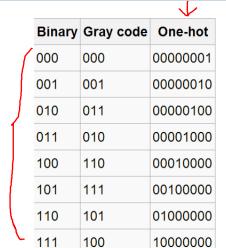




Dígito	Código	Código	Código	Código	Código
decimal	BCD	6-3-1-1	exceso 3	2 de 5	Gray
0	0000	0000	0011	00011	0000
1	0001	0001	0100	00101	0001
2	0010	0011	0101	00110	0011
3	0011	0100	0110	01001	0010
4	0100	0101	0111	01010	0110
5	0101	0111	1000	01100	1110
6	0110	1000	1001	10001	1010
7	0111	1001	1010	10010	1011
8	1000	1011	1011	10100	1001
9	1001	1100	1100	11000	1000



48 / 50





49 / 50

Preguntas?