UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Aplicaciones modelos de programación lineal

Curso IF-7200 Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Contenido

- Introducción
- Modelos gráficos y por computadora
- Aplicaciones de manufactura
- Aplicaciones de programación de mano de obra
- Aplicaciones de transporte

Introducción

El método gráfico de PL es útil para entender cómo formular y resolver problemas sencillos de PL.

Hay muchos tipos de problemas que pueden resolverse utilizando PL.

Los principios desarrollados aquí son aplicables a problemas más grandes.

Mezcla de productos

- PL se puede utilizar para planear la mezcla óptima de productos que se fabrican.

- Una compañía debe cumplir numerosas restricciones que van desde preocupaciones financieras hasta la demanda de ventas, pasando por los contratos de materiales y las demandas laborales sindicales.

- La meta principal de la empresa es generar la mayor utilidad posible.

Caso Fifth Avenue Industries

Fifth Avenue Industries produce cuatro variedades de corbatas:

- Una es costosa de seda pura.
- Otra es de poliéster.
- Una más es mezcla de algodón y poliéster.
- Y la última es una mezcla de seda y algodón.

La tabla de la siguiente muestra el costo y la disponibilidad de los diferentes materiales utilizados en el proceso de producción:

MATERIAL	COSTO POR YARDA ($)	DISPONIBILIDAD DE MATERIAL AL MES (YARDAS)
Seda	24	1,200
Poliéster	6	3,000
Algodón	9	1,600

Caso Fifth Avenue Industries

La firma tiene contratos fijos con varias grandes cadenas de tiendas departamentales para comercializar las corbatas.

Los contratos requieren que la empresa surta una cantidad mínima de cada corbata.

El objetivo de Fifth Avenue es maximizar su ganancia mensual teniendo en cuenta las siguientes variables de decisión:

X_1 = número de corbatas de seda producidas por mes

X_2 = número de corbatas de poliéster

X_3 = número de corbatas de la mezcla 1, poliéster y algodón

X_4 = número de corbatas de la mezcla 2, algodón y seda

Datos caso Fifth Avenue Industries

	VARIEDAD DE CORBATAS	PRECIO DE VENTA POR CORBATA ($)	MÍNIMO DEL CONTRATO MENSUAL	DEMANDA MENSUAL	MATERIAL REQUERIDO POR CORBATA (YARDAS)	REQUERIMIENTOS DE MATERIAL
x_1	Toda de seda	19.24	5,000	7,000	0.125	100% seda
x_2	Toda de poliéster	8.70	10,000	14,000	0.08	100% poliéster
x_3	Mezcla 1, poliéster y algodón	9.52	13,000	16,000	0.10	50% poliéster – 50% algodón
x_4	Mezcla 2, seda y algodón	10.64	5,000	8,500	0.11	60% seda – 40% algodón

Fifth Avenue Industries cálculo de ganancias

	VARIEDADES DE CORBATAS	PRECIO DE VENTA POR CORBATA ($)	MATERIAL REQUERIDO POR CORBATA (YARDAS)	COSTO DEL MATERIAL POR YARDA ($)	COSTO POR CORBATA ($)	GANANCIA POR CORBATA ($)
x_1	Toda de seda	$19.24	0.125	$24	$3.00	$16.24
x_2	Toda de poliéster	$8.70	0.08	$6	$0.48	$8.22
x_3	Mezcla 1, poliéster y algodón	$9.52	0.05	$6	$0.30	
			0.1 0.05	$9	$0.45	$8.77
x_4	Mezcla 2, seda y algodón	$10.64	0.06	$24	$1.44	
			.12 0.06	$9	$0.54	$8.66

60 % seda
40 % algodon

Solución Fifth Avenue Industries con hoja de cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Fifth Avenue Industries**							
2								
3		**All silk**	**All poly.**	**Blend 1**	**Blend 2**			
4	**Variables**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**			
5	**Values**	5112	14000	16000	8500	**Total Profit**		
6	**Profit**	16.24	8.22	8.77	8.66	412028.88		
7								
8	**Constraints**					**LHS**		**RHS**
9	**Silk available**	0.125			0.066	1200	≤	1200
10	**Polyester available**		0.08	0.05		1920	≤	3000
11	**Cotton available**			0.05	0.044	1174	≤	1600
12	**Maximum silk**	1				5112	≤	7000
13	**Maximum polyester**		1			14000	≤	14000
14	**Maximum blend 1**			1		16000	≤	16000
15	**Maximum blend 2**				1	8500	≤	8500
16	**Minimum silk**	1				5112	≥	5000
17	**Minimum polyester**		1			14000	≥	10000
18	**Minimum blend 1**			1		16000	≥	13000
19	**Minimum blend 2**				1	8500	≥	5000

Planeación de mano de obra

En este aspecto, los problemas se refieren a las necesidades de personal durante un periodo determinado.

Es útil cuando los gerentes tienen flexibilidad en la asignación de los trabajadores que requieren talentos afines o intercambiables.

Caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

El Hong Kong Bank of Commerce and Industry tiene el requerimiento de entre 10 y 18 cajeros dependiendo de la hora del día.

La hora de la comida, entre 12 p.m. y 2 p.m suele ser la más pesada.

El banco emplea a 12 cajeros de tiempo completo, aunque tiene en su lista a empleados de tiempo parcial.

Un empleado de medio tiempo debe cubrir cuatro horas diarias y puede iniciar sus actividades entre 9 a.m. y 1 p.m.; este grupo es de bajo costo.

Los empleados de tiempo completo trabajan de 9 a.m. a 3 p.m. con una hora de comida.

Caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

Requisitos de horario de la mano de obra para el Hong Kong Bank of Commerce and Industry

PERIODO	NÚMERO DE CAJEROS REQUERIDOS
9 am – 10 am	10
10 am – 11 am	12
11 am – 12 pm	14
12 pm – 1 pm	16
1 pm – 2 pm	18
2 pm – 3 pm	17
3 pm – 4 pm	15
4 pm – 5 pm	10

Datos caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

El banco limita las horas de tiempo parcial a un máximo de 50% del requerimiento diario total.

El empleado de tiempo parcial gana en promedio $8 por hora.

Y el trabajador de tiempo completo gana en promedio $100 diarios más prestaciones.

El banco desea establecer un programa que minimice sus costos totales del personal.

De modo que se despedirá a uno o más de sus trabajadores de tiempo completo, si ello es redituable.

Datos caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

Sean:

Variables

x_1 F = **cajeros de tiempo completo**

x_2 P_1 = **cajeros de tiempo parcial que inician a las 9 am (y salen: 1 pm)**

x_3 P_2 = **cajeros de tiempo parcial que inician a las 10 am (y salen: 2 pm)**

x_4 P_3 = **cajeros de tiempo parcial que inician a las 11 am (y salen: 3 pm)**

x_5 P_4 = **cajeros de tiempo parcial que inician a las 12 pm (y salen: 4 pm)**

x_6 P_5 = **cajeros de tiempo parcial que inician a la 1 pm (y salen: 5 pm)**

Datos caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

Función objetivo:

Minimizar el costo diario total del personal $= \$100F + \$32(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$

sujeto a

$$
\begin{array}{llllllll}
F & + P_1 & & & & & \geq 10 & \text{(necesidades de 9 am – 10 am)} \\
F & + P_1 & + P_2 & & & & \geq 12 & \text{(necesidades de 10 am – 11 am)} \\
0.5F & + P_1 & + P_2 & + P_3 & & & \geq 14 & \text{(necesidades de 11 am –12pm)} \\
0.5F & + P_1 & + P_2 & + P_3 & + P_4 & & \geq 16 & \text{(necesidades de 12 pm– 1 pm)} \\
F & & + P_2 & + P_3 & + P_4 & + P_5 & \geq 18 & \text{(necesidades de 1 pm – 2 pm)} \\
F & & & + P_3 & + P_4 & + P_5 & \geq 17 & \text{(necesidades de 2 pm – 3 pm)} \\
F & & & & + P_4 & + P_5 & \geq 15 & \text{(necesidades de 3 pm – 4 pm)} \\
F & & & & & + P_5 & \geq 10 & \text{(necesidades de 4 pm – 5 pm)} \\
F & & & & & & \leq 12 & \text{(12 cajeros de tiempo completo)} \\
 & 4P_1 & + 4P_2 & + 4P_3 & + 4P_4 & + 4P_5 & \leq 0.50(112) & \text{(máx 50\% de cajeros de ½ tiempo.}
\end{array}
$$

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \geq 0$$

no puede superar

Datos caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry

Existen varios programas óptimos diferentes que puede seguir el Hong Kong Bank:

soluciones multiples

- F = 10, P2 = 2, P3 = 7, P4 = 5, P1, P5 = 0
- F = 10, P1 = 6, P2 = 1, P3 = 2, P4 = 5, P5 = 0

El costo de cualquiera de estas dos políticas es de $1,448 diarios.

Aplicaciones de programación de mano de obra

Solución caso Hong Kong Bank of Commerce and Industry con hoja de cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Labor Planning Example**									
2										
3										
4	**Variables**	**F**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**			
5	**Values**	10	0	7	2	5	0	**Total Cost**		
6	**Cost**	100	32	32	32	32	32	1448		
7										
8	**Constraints**							**LHS**	**Sign**	**RHS**
9	**9 a.m. - 10 a.m.**	1	1					10	≥	10
10	**10 a.m. - 11 a.m.**	1	1	1				17	≥	12
11	**11 a.m. - noon**	0.5	1	1	1			14	≥	14
12	**noon - 1 p.m.**	0.5	1	1	1	1		19	≥	16
13	**1 p.m. - 2 p.m.**	1		1	1	1	1	24	≥	18
14	**2 p.m. - 3 p.m.**	1			1	1	1	17	≥	17
15	**3 p.m. - 4 p.m.**	1				1	1	15	≥	15
16	**4 p.m. - 5 p.m.**	1					1	10	≥	10
17	**Max. Full time**	1						10	≤	12
18	**Total PT hours**		4	4	4	4	4	56	≤	56

Problema de embarques

El problema de embarques o de envíos implica determinar la cantidad de bienes o artículos que se vayan a transportar desde varios orígenes (o fuentes) hacia varios destinos .

El objetivo es minimizar tanto los costos totales como las distancias del envío.

Lo anterior es un caso específico de PL y un especial algoritmo se ha desarrollado para resolverlo.

Caso Top Speed Bicycle Co.

La Top Speed Bicycle Co. fabrica y comercializa una línea de bicicletas de 10 velocidades.

La empresa tiene plantas de ensamble final en dos ciudades donde el costo de la mano de obra es bajo.

Los tres principales almacenes se localizan cerca de las áreas de mercado más grandes.

Los requerimientos de ventas para el próximo año son:

- Nueva York: 10,000 bicicletas
- Chicago: 8,000 bicicletas
- Los Ángeles: 15,000 bicicletas

La capacidad de fabricación es:

- New Orleans: 20,000 bicicletas
- Omaha: 15,000 bicicletas

Caso Top Speed Bicycle Co.

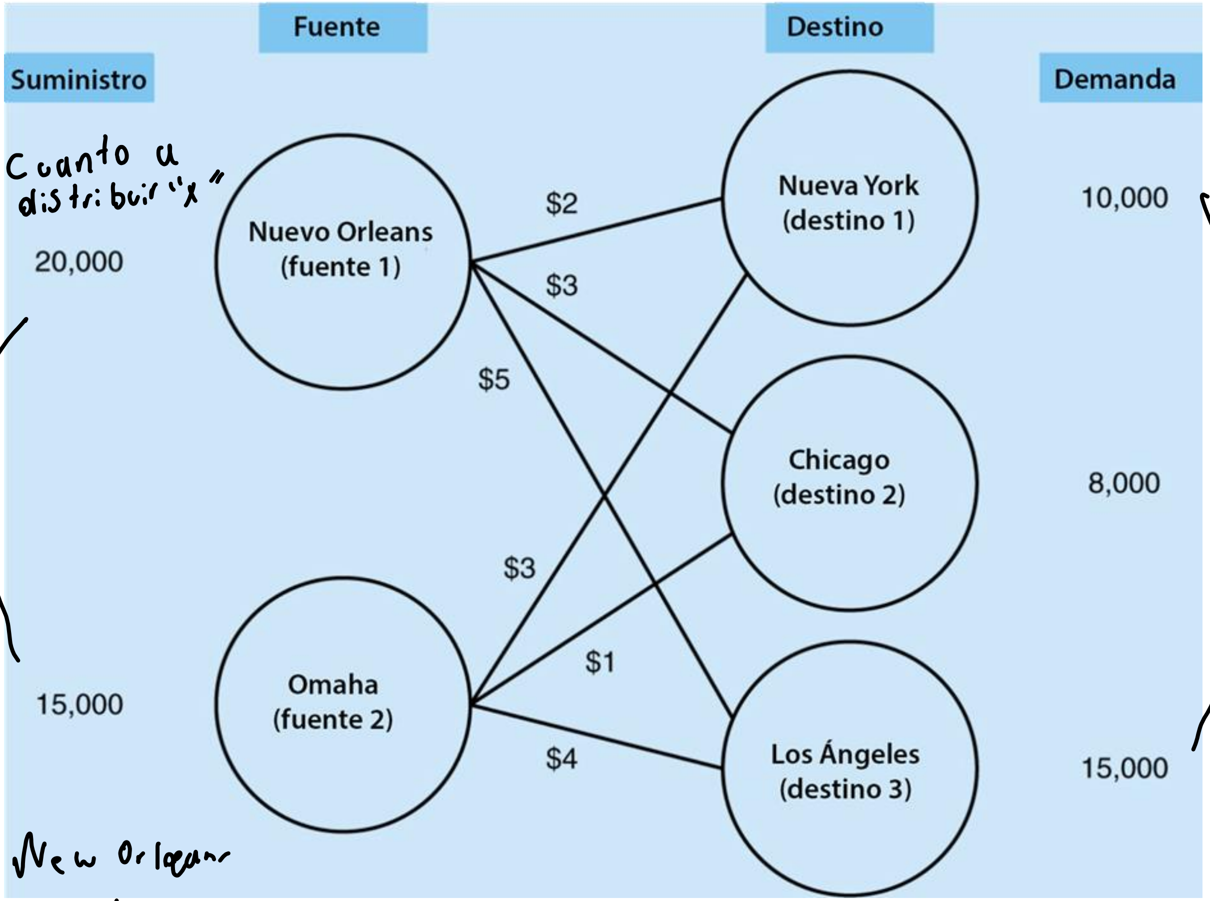
El costo de envío de una bicicleta de cada fábrica a cada almacén difiere; la siguiente tabla muestra el costo de envío por unidad:

DESDE \ HASTA	NUEVA YORK	CHICAGO	LOS ÁNGELES
Nueva Orleans	$2	$3	$5
Omaha	$3	$1	$4

La compañía quiere desarrollar un programa de embarques que minimice sus costos totales anuales de transporte.

Representación en red caso Top Speed Bicycle Co.

oferta
35



demanda
33

6 variables
incognitas
↳ 3 New Orleans
3 omaha

Aplicaciones de transporte

Caso Top Speed Bicycle Co.

Las variables de doble subíndice representarán la fábrica de origen y El almacén de destino:

X_{ij} = número de unidades de la fuente *I* al destino *j*

X_{11} X_{12} X_{13} → → new orleands
X_{21} X_{22} X_{23} → omaha

De manera que:

X_{11} = número de bicicletas enviadas de Nueva Orleans a Nueva York
X_{12} = número de bicicletas enviadas de Nueva Orleans a Chicago
X_{13} = número de bicicletas enviadas de Nueva Orleans a Los Ángeles
X_{21} = número de bicicletas enviadas de Omaha a Nueva York
X_{22} = número de bicicletas enviadas de Omaha a Chicago
X_{23} = número de bicicletas enviadas de Omaha a Los Ángeles

Caso Top Speed Bicycle Co.

Objetivo:

Minimizar el costo total del envío $= 2X_{11} + 3X_{12} + 5X_{13} + 3X_{21} + 1X_{22} + 4X_{23}$

sujeto a

$X_{11} + X_{21} = 10{,}000$ (demanda en Nueva York)

$X_{12} + X_{22} = 8{,}000$ (demanda en Chicago)

$X_{13} + X_{23} = 15{,}000$ (demanda en Los Ángeles)

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 20{,}000$ (suministro en la fábrica de New Orleans)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 15{,}000$ (suministro en la fábrica de Omaha)

Todas las variables ≥ 0

Solución caso Top Speed Bicycle Co. con hoja de cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Top Speed Bicycle Company									
2		N.O. to	N.O. to	N.O. to	Omaha to	Omaha to	Omaha to			
3		NY	Chicago	LA	NY	Chicago	LA			
4	**Variables**	X11	X12	X13	X21	X22	X23			
5	**Values**	10000	0	8000	0	8000	7000	Total Cost		
6	**Cost**	2	3	5	3	1	4	96000		
7										
8	Constraints							LHS	Sign	RHS
9	NY Demand	1			1			10000	=	10000
10	Chi. Demand		1			1		8000	=	8000
11	LA Demand			1			1	15000	=	15000
12	N.O. Supply	1	1	1				18000	≤	20000
13	Omaha Supply				1	1	1	15000	≤	15000

Solución caso Top Speed Bicycle Co. con hoja de cálculo

DE \ A	NUEVA YORK	CHICAGO	LOS ÁNGELES
Nuevo Orleans	10,000	0	8,000
Omaha	0	8,000	7,000

El costo total del envío es de $96,000.

Los problemas de transporte son un caso especial de PL; note que todos los coeficientes de una variable en las restricciones son iguales a 1.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Aplicaciones modelos de programación lineal