Tema I: Matrices

Definición: una matriz de tamaño mxn, con entradas en $\mathbb{R}$, es un arreglo rectangular de números reales constituido por m filas y n columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & (a_{ij}) & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Donde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ con } i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$. Se dice que la matriz tiene m filas y n columnas, de tamaño mxn. Además, la componente a_{ij} representa a la posición en la fila *i-ésima* y la columna *j-ésima*.

Notación: el conjunto formado por todas las matrices de tamaño mxn se denota M_{mxn} o $M(m, n, \mathbb{R})$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 11 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \text{ vector columna} \qquad (-3, \quad -5, \quad 4)_{1\times 3} \text{ vector fila}$$

Propiedades y tipos de matrices

Matriz cuadrada: es una matriz de tamaño nxn, se dice que es de orden n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forma la diagonal.

Matriz diagonal:

Una matriz $D=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$ se llama matriz diagonal sí todos los elementos fuera de la diagonal son nulos, esto es $d_{ij}=0 \text{ si } i\neq j$.

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz identidad:

Es una matriz cuadrada $I_n=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$ con $\begin{cases} 1 & si \;\; i=j \\ 0 & si \;\; i\neq j \end{cases}$, es decir

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se denomina matriz identidad de orden n.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}, I_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Matriz triangular:

Es una matriz $T_n=\left(t_{ij}\right)_{n\times n}$ se llama matriz triangular inferior (superior) si todos los elementos de arriba (abajo) de la diagonal son cero, esto es $t_{ij}=0, \text{ si } i<j\left(i>j\right)$. Y se llama triangular si es triangular superior o inferior.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica:

$S = (s_{ij})_{nxn}$ es simétrica si su entrada en la fila i y la columna j es igual a la entrada en la fila j columna i, para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Es decir, si $s_{ij} = s_{ji}$ para todo i y j.

Matriz transpuesta:

Sea $A \in M(m, n, \mathbb{R})$, la matriz transpuesta de A se define por A^t y se define como la matriz nxm que se obtiene al escribir las filas de A como columnas (o equivalentemente, poner las columnas de A como filas, simbólicamente: *Si* $A = (a_{ij})_{mxn}$ *entonces* $A^t = (a_{ji})_{nxm}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & -8 \\ 3 & 5 & 7 & -5 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & -8 & -5 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Observación: una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es simétrica sí $A^t = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices y propiedades

Definición:

Sea $A,B \in M(m,n,\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R},\ A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$. Definimos:

1. $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j$
2. $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$
3. $\alpha A=(\alpha a_{ij})$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & -1+0 & 5+-1 \\ 4+4 & 3+-1 & 0+2 & 2+6 \\ 1+7 & -4+8 & 3+-1 & 6+-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema:

Sea $A,B,C \in M(m,n,\mathbb{R}),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$. Entonces:

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$
2) $A+B=B+A$
3) $0+A=A+0=A$ (0 es la matriz nula mxn)
4) $-A+A=0 \ \ donde \ \ -A=(-a_{ij})$
5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
7) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

Producto de matrices: Sea $A \in M(m,n,\mathbb{R})$, $B \in M(n,p,\mathbb{R})$. El producto AB es la matriz $C \in M(m,p,\mathbb{R})$, definida por:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Observación: el producto de matrices está bien definido, si el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B.

AB se obtiene al operar la fila i de A con la columna j de B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

Ejemplo:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 3 \bullet 3 \times 2 = 2 \times 2$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix}-2, & 1, & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad 1\times 3 \bullet 3\times 1 = 1\times 1$

$$AB=\begin{pmatrix}-2, & 1, & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}=-2\cdot -2+1\cdot 0+4\cdot 4=20$$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\3 & 1 & 0 & 1\\0 & -4 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad 3\times 4 \bullet 4\times 2 = 3\times 2$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\3 & 1 & 0 & 1\\0 & -4 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot -1+-1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+-1\cdot 0+0\cdot 1\\3\cdot 1+1\cdot -1+0\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1\\0\cdot 1+-4\cdot -1+1\cdot 1+-1\cdot 0 & 0\cdot 2+-4\cdot 1+1\cdot 0+-1\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4\\2 & 8\\5 & -5\end{pmatrix}$$

Teorema: suponga que en cada caso A, B y C son matrices con entradas reales con los tamaños apropiados para que los productos y sumas abajo indicados estén bien definidos, y que $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces el producto matricial tiene las siguientes propiedades:

1. Asociatividad: $A(BC)=(AB)C$.
2. Neutros: si A es nxm, $I_nA=AI_m=A$.
3. Distributividad del producto respecto a la suma:

$$A(B+C)=AB+AC \text{ y } (B+C)D=BD+CD\,.$$

4. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

Teorema: la transposición de matrices tiene las siguientes propiedades

1. Si $A,B\in M(n,m,\mathbb{R})$, entonces $(A+B)^t=A^t+B^t$.
2. Si $A\in M(n,m,\mathbb{R})$ y $B\in M(m,p,\mathbb{R})$ entonces $(AB)^t=B^tA^t$.

Observación: otras propiedades

1) Una matriz A de orden n es idempotente $\Leftrightarrow A^2 = A$
2) Una matriz A de orden n es nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_n$
3) Una matriz A de orden n es unipotente $\Leftrightarrow A^2 = I_n$
4) Una matriz A de orden n es antisimétrica $\Leftrightarrow A^t = -A$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.