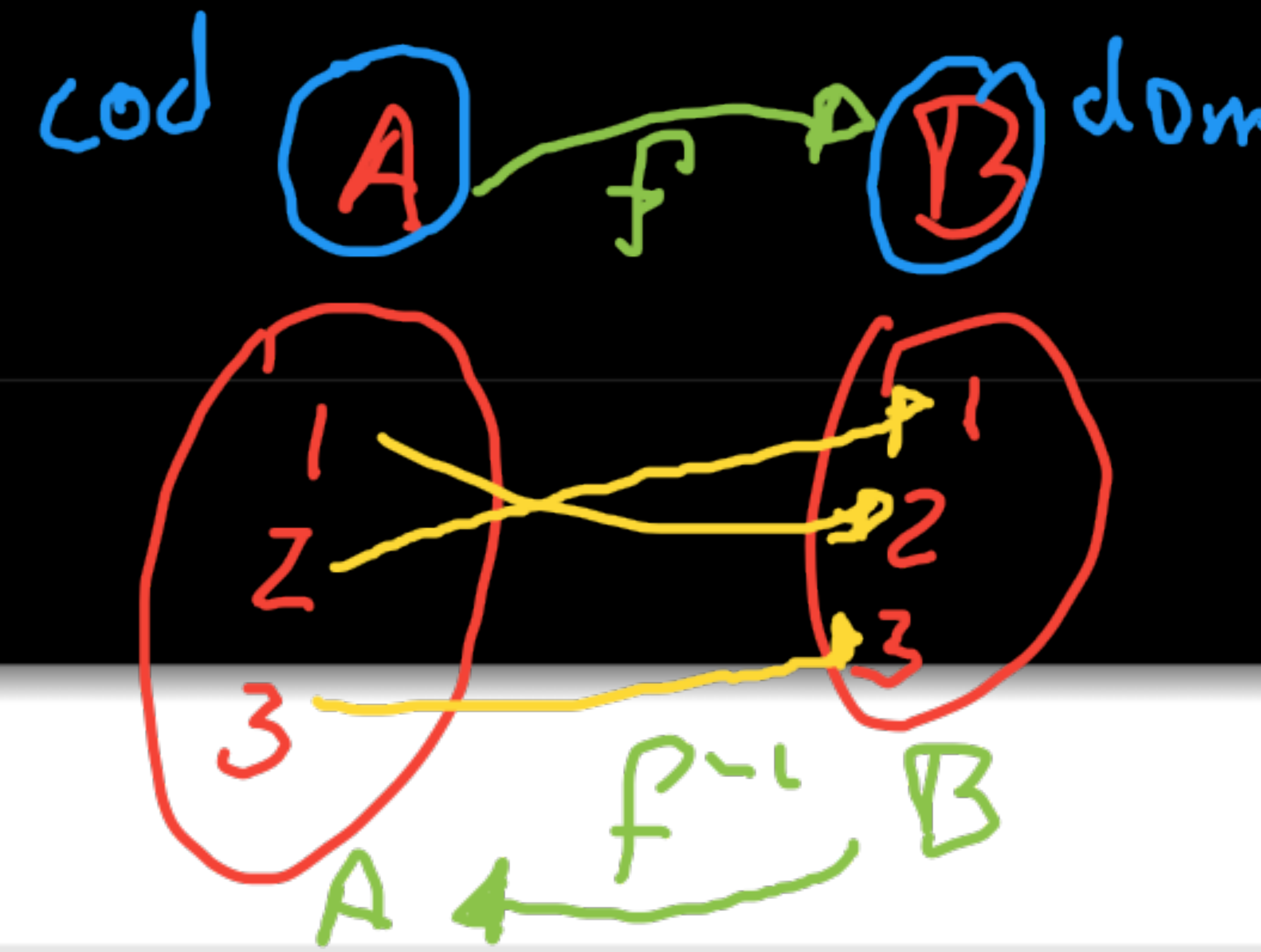
Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents



Funciones inversas

Definición

$(2,1) \in G_f$

$(1,2) \in G_{f^{-1}}$

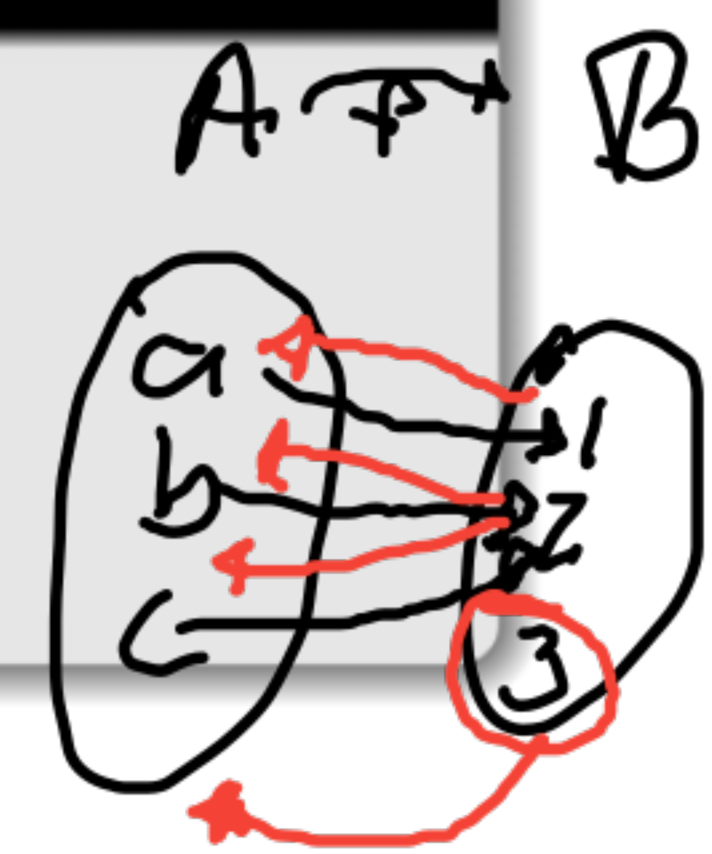
Si f es una función de A en B, se dice que f es ***invertible*** *o que f tiene función inversa si y solo si su relación inversa f^{-1} también es función. Además, esto sucederá si y solo si f es biyectiva.*

Nota

Con sus respectivos dominios bien definidos se cumple:

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$



Funciones inversas

Ejemplo 27

1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio es $f(x) = 5x - 4$.
   1. Pruebe que f es invertible.
   2. Determine el criterio de $f^{-1}(x)$
   3. Calcule $\left(f^{-1} \circ f\right)(x)$.
2. Considere $f: \mathbb{R} - \{2\} \to B$ con $B \subseteq \mathbb{R}$, cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.
   1. Determine el conjunto B de manera que f sea biyectiva.
   2. Pruebe que es biyectiva.
   3. Determine el criterio de $f^{-1}(x)$.
   4. Calcule $\left(f^{-1} \circ f\right)(x)$.

a) Invertible, f es biyectiva $\quad f(x)=5x-4$

i) Inyect. $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$

$$5a-\cancel{4}=5b-\cancel{4}$$

$$\cancel{5}a=\cancel{5}b, \quad a=b \,//\quad f \text{ es inyect.}$$

ii) Sobrey $\quad b=f(a)\,,\ b\in\mathbb{R}$

$$b=5a-4, \quad b+4=5a, \quad a=\frac{b+4}{5}, \ a\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f es sobrey

De (i) y (ii) es biyect $\Rightarrow$ f es invertible

b) f^{-1}, $\quad y=f(x), \quad y=5x-4, \quad y+4=5x$

$$\frac{y+4}{5}=x, \quad f^{-1}(x)=\frac{x+4}{5}, \quad f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

c) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)]$

$$= \frac{f(x)+4}{5} = \frac{(5x-\cancel{4}) + \cancel{4}}{5} = \frac{5x}{5} = x$$

2 $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, $f: \mathbb{R} - \{2\} \to B$

a) $B = ?$, sobrey $b = f(a)$

$b = \dfrac{3a+1}{a-2}$, $b(a-2) = 3a+1$, $ab - 2b = 3a+1$

$ab - 3a = 2b+1$, $a(b-3) = 2b+1$, $a = \dfrac{2b+1}{b-3}$

$Codf = B = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad b \neq 3$

(b) iny $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$

$\frac{3a+1}{a-2} = \frac{3b+1}{b-2}$, $(3a+1)(b-2)=(a-2)(3b+1)$

$\cancel{3ab}-6a+b-\cancel{2} = \cancel{3ab}+a-6b-\cancel{2}$

$-7a=-7b$, $a=b$, f es inyect

f es biyect (f es invertible)

(3) $f^{-1}(x)=?$, $y=\frac{3x+1}{x-2}$, $y(x-2)=3x+1$

$yx-2y=3x+1$, $yx-3x=2y+1$, $x(y-3)=2y+1$

$x=\frac{2y+1}{y-3}$, $f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, $f^{-1}: \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$

Funciones inversas

Ejemplo 28

Considere la función $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x \geq 1 \quad (1) \\ x - 1 & si \quad x < 1 \quad (2) \end{cases}$$

Encuentre el criterio de $f^{-1}(x)$.

(1) $y = 2x+1$, $y - 1 = 2x$, $x = \frac{y-1}{2}$ $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}}$

$f^{-1}(x) \geq 1$, $\frac{x-1}{2} \geq 1$, $x - 1 \geq 2$, $\boxed{x \geq 3}$

(2) $y = x - 1$, $x = y + 1$, $\boxed{f^{-1}(x) = x + 1}$

$f^{-1}(x) < 1$, $x + 1 < 1$, $\boxed{x < 0}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{s} \quad x \geq 3 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f^{-1} : \left]-\infty, 0\right[\cup \left[3, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Funciones de permutación

Definición

Si $f : A \to A$ es una función biyectiva, se dice que f es una permutación del conjunto A.

Si p es una permutación sobre el conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, es posible representarla por medio del arreglo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

En la primera fila se ubican los elementos de A y en la segunda las imágenes de ellos.

Funciones inversas

Ejemplo 29

Sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere las permutaciones:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $p_1 \circ p_2$. $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$(p_1 \circ p_2)(1) = p_1(\overbrace{p_2(1)}^{3}) = p_1(3) = 4$

$(p_1 \circ p_2)(2) = p_1(\overbrace{p_2(2)}^{2}) = p_1(2) = 1$

$(p_1 \circ p_2)(3) = 2$

$(p_1 \circ p_2)(4)$

Funciones inversas

Ejemplo 30

Sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere las permutaciones:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calcule $p_1 \circ p_2$. $\longrightarrow$ estud.
2. Calcule p_2^{-1}.

$p_2^{-1}(1) = 4$, $p_2^{-1}(2)$

$$p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

Las matemáticas no son tan malas a como las pintamos, de repente el que traza esa pintura ni siquiera hace el intento de querer pintar...

MaLu

Máquinas de estado finito y Autómatas

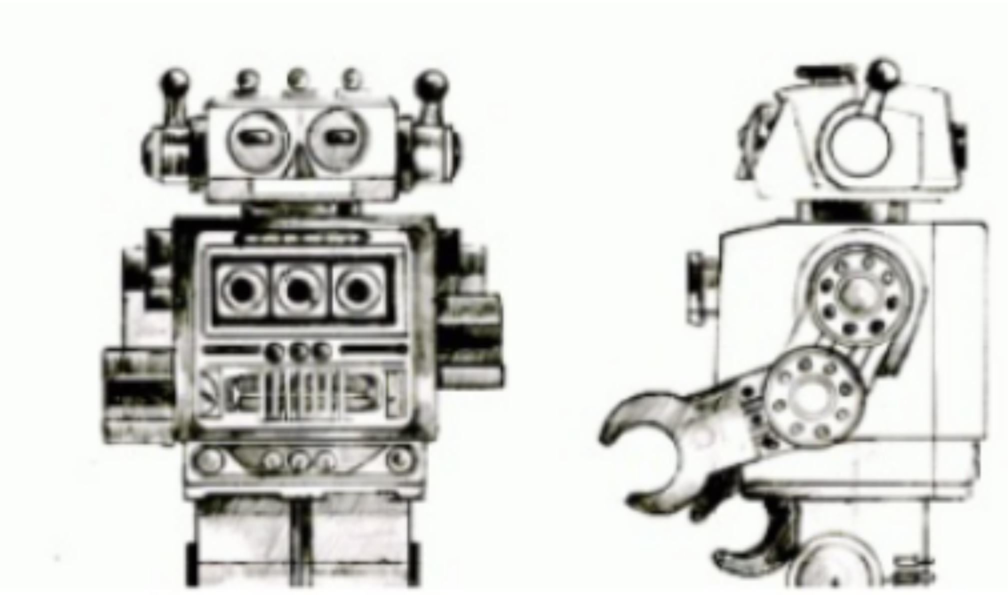
Luis Eduardo Amaya B.
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Noviembre 2020

Contents

Introducción

Las máquinas de estado finito constituyen un modelo abstracto para explicar el funcionamiento de una computadora o una máquina con una memoria simple o primitiva.
A diferencia de otras formas de representación teóricas, las máquinas de estado finito incluyen el factor de memoria como un condicionante para establecer las acciones subsiguientes que establecería un ordenador.
Gran parte de lo estudiado en este tema lo debemos al gran Alan Turing.



Máquinas de estado finito

Definición

Una máquina de estado finito denota MEF es una 6-tupla M, donde $M = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, donde:

1. *σ se llama conjunto de estados de la MEF.*
2. *τ es el conjunto de símbolos de entrada.*
3. *δ es el conjunto de símbolos de salida de la MEF.*
4. *σ^* es un estado del conjunto σ llamado estado inicial.*

Máquinas de estado finito

Definición

5. Δ *es una función, tal que* $\Delta : \sigma \times \tau \to \sigma$, *es decir, la función toma un elemento del dominio, como un par ordenado constituido por un estado y un dato de entrada, retornando como imagen, otro estado. Esta imagen representa el estado del sistema después del procesamiento indicado por el par ordenado* $(estado, salida)$
6. Ω *es una función,* $\Omega : \sigma \times \tau \to \delta$, *es decir, al igual que la función* Δ, *un elemento del dominio es un par ordenado* $(estado, salida)$ *con la diferencia de devolver como imagen, un símbolo de salida. Este símbolo es el "output" del sistema en ese instante del tiempo.*

Máquinas de estado finito

Ejemplo 1

Determine si el siguiente arreglo $M = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$ es una *MEF*, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\delta = \{0, 1, 2, 3\}$, $\sigma^* = \sigma_0$ y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_2, a)	(σ_2, b)
Δ	σ_1	σ_0	σ_1	σ_2	σ_0	σ_1
Ω	0	2	1	0	3	2

Máquinas de estado finito

Ejemplo 1

- Por la definición vista, el ejemplo 1 es una *MEF* pues satisface todas las condiciones.
    - Las *MEF* tienen una forma de representación a través de un digrafo, donde los nodos son los estados conectados entre sí por una arista.
    - Si al unir dos estados μ y μ^* existe un par ordenado (μ, *entrada*) cuya imagen en la función Δ da como resultado μ^*.
    - Las aristas tienen etiquetas asociadas de estructura *entrada/salida* donde la imagen del par (μ, *entrada*) en Ω devuelve el símbolo de δ; *salida*.
    - Además se añade una flecha que indica cual es el estado inicial de la máquina *M*.
    - A este grafo dirigido se le llama "diagrama de transición" de M
- Se puede observar que en un sentido estricto el diagrama de transición no es un digrafo por la flecha que apunta al estado σ^*.

Máquinas de estado finito

Ejemplo 1