UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Modelos de programación lineal

Curso IF-7200 Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Contenido

- Introducción
- Requerimientos de un problema de programación lineal
- Formulación de problemas de PL
- Solución gráfica de un problema de PL
- Solución de problemas con PL
- Casos especiales de PL

Introducción

Muchas decisiones administrativas implican tratar de hacer un uso más eficaz de recursos limitados.

La programación lineal (PL) es una técnica de modelado matemático ampliamente utilizada, diseñada para ayudar a los gerentes en la planeación y la toma de decisiones respecto de la asignación de recursos.

Pertenece a la categoría más general de programación matemática, en este sentido programación se refiere a la modelación y resolución de un problema matemáticamente.

Requerimientos de un problema de PL

Todos los problemas de PL tienen 4 propiedades en común:

costos, inventario

- Todos los problemas buscan maximizar o minimizar alguna cantidad (la función objetivo).

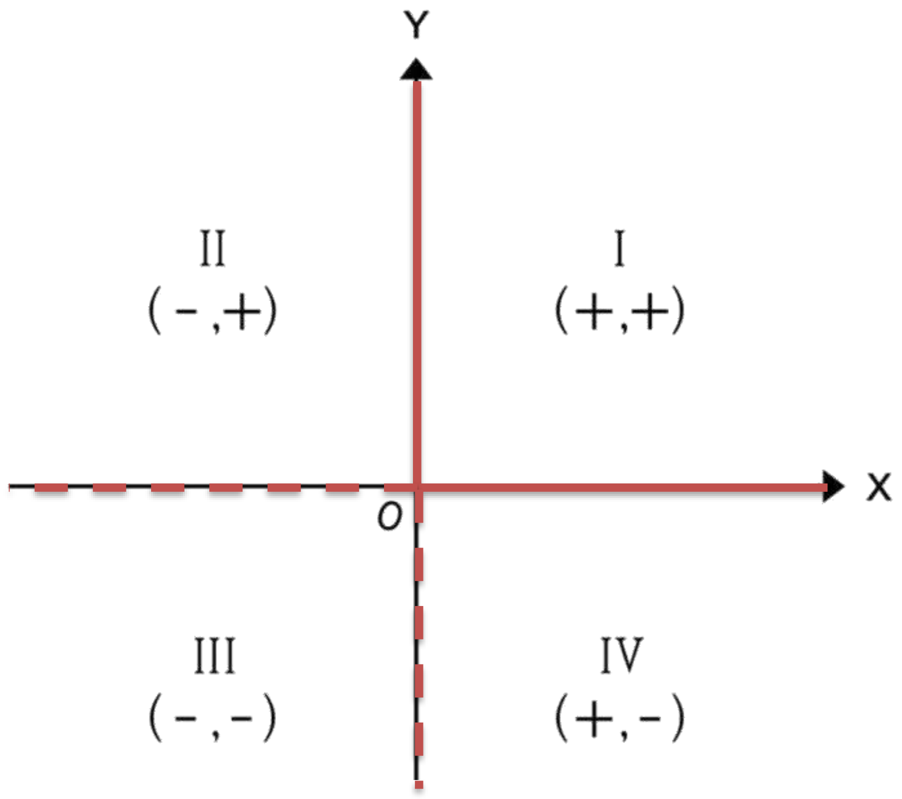
capital disponible, tiempo, espacio

- Hay limitaciones o restricciones que acotan/delimitan el grado en que se puede alcanzar el objetivo.
- Debe haber disponibles cursos de acción alternativos .
- El objetivo y las restricciones en los problemas se tienen que expresar en términos de ecuaciones lineales o desigualdades.

Propiedades y supuestos de la PL

- Una función objetivo
- Una o más restricciones
  Requerimientos grado 1
- Cursos de acción alternativos
- La función objetivo y las restricciones son lineales
  grado 1
- Certeza
  deterministicos = los valores se conocen con certeza
- Variables no negativas
  primer cuadrante

Variables no negativas



Formulación de problemas de PL

La formulación de un programa lineal implica el desarrollo de un modelo matemático que represente el problema administrativo.

Los pasos en la formulación de un programa lineal son los siguientes:

- Entender cabalmente el problema administrativo que se enfrenta.
- Identificar el objetivo y las restricciones.
- Definir las variables de decisión.
- Utilizar las variables de decisión para escribir expresiones matemáticas tanto de la función objetivo como de las restricciones.

Mucha práctica

Formulación de problemas de PL

- Una de las aplicaciones más comunes de la PL es el problema de la mezcla de productos.
- Dos o más productos se fabrican con recursos limitados como personal, maquinaria y materia prima.
- La utilidad que la empresa busca maximizar se basa en la contribución a la utilidad por unidad de cada producto.
- La compañía quiere determinar cuántas unidades de cada producto se deberían fabricar para maximizar la utilidad general dados sus recursos limitados.

Ejemplo caso PL: Compañía Flair Furniture

∀ => para todo

La compañía Flair Furniture fabrica mesas y sillas de bajo precio. El proceso de fabricación de cada una es similar ya que ambas requieren cierto número de horas de trabajo de carpintería así como cierto número de horas de trabajo en el departamento de pintura y barnizado.

Restricción de Requerimiento -> por cada mesa hay 4 sillas

Cada mesa requiere de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de pintura y barnizado.

Cada silla requiere de 3 horas de carpintería, y 1 hora en la pintura y barnizado.

Restricciones de tipo limitaciones

Están disponibles 240 horas de tiempo de carpintería, así como 100 horas de tiempo de pintura y barnizado

Cada mesa vendida genera una utilidad de $70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de $50.

La compañía quiere determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima.

Objetivo

Excel

Ejemplo caso PL: Compañía Flair Furniture

Aplicando método gráfico

1. **Determine las variables de decisión.**

2. **Determine la función objetivo (Z).**

3. **Determine las restricciones. Se expresa de manera de inecuaciones.**

   → No negatividad

4. **Determine el conjunto de soluciones factibles y la representación gráfica respecto a las restricciones.**

5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**

6. **Calcule la función objetivo con cada uno de los vértices de las soluciones factibles para ver en cual de ellos se presenta el valor máximo o mímino según lo solicite el problema.**

7. **Brinde la solución.óptima.**

Solución caso: Compañía Flair Furniture

1. **Determine las variables de decisión.**

X = número de mesas producidas por semana
Y = número de sillas producidas por semana

Como parte de la determinación de las variables de decisión hay oportunidad de estructurar un cuadro informativo que represente la relación de la línea de producción con las variables, sus limitantes o restricciones y utilidades o costos.

Línea de producción	Variables de decisión		Limitantes o restricciones
	X	Y	
Costo o utilidad			

Solución caso: Compañía Flair Furniture

1. **Determine las variables de decisión.**

Departamento	Horas requeridas por unidad		Horas disponibles
	X	Y	
Carpintería	4	3	240
Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad por unidad	$70	$50	

2. **Determine la función objetivo.**

Maximizar $Z = 70x + 50y$ o Max $Z = 70x + 50y$

Solución caso: Compañía Flair Furniture

3. **Determine las restricciones. Se expresa de manera de inecuaciones.**

Departamento	Horas requeridas por unidad		Horas disponibles
	X	Y	
Carpintería	4	3	240
Pintura y barnizado	2	1	100

Primera restricción, carpintería: $4x + 3y <= 240$

Segunda restricción, pintura y barnizado: $2x + y <= 100$

Tercera restricción, no negatividad:

$$\left.\begin{array}{l} x >= 0 \\ y >= 0 \end{array}\right\} x, y >= 0$$

Solución caso: Compañía Flair Furniture

3. Determine las restricciones. Se expresa de manera de inecuaciones.

$$4x + 3y <= 240$$

$$2x + y <= 100$$

$$x, y >= 0$$ → no negatividad

4. Determine el conjunto de soluciones factibles y la representación gráfica respecto a las restricciones.

El objetivo es determinar por cada una de las restricciones, pares ordenados que nos permitan graficar las mismas en el plano cartesiano.

(x , y)

Así las cosas para 4x + 3y <= 240, cual es el valor de x, cual es el valor de y?.

Solución caso: Compañía Flair Furniture

4. **Determine el conjunto de soluciones factibles y la representación gráfica respecto a las restricciones.**

Para determinar los valores de las variables de decisión en este punto, por medio de ecuaciones realizamos igualdades a 0.

Trabajemos con la primera restricción

$$4x + 3y <= 240 \longrightarrow 4x + 3y = 240$$

Cuando y = 0 entonces x = ?

$4x + 3y = 240$

Se despeja para obtener los

$4x + 3(0) = 240$

$4x = 240$

$x = 240 / 4$

$x = 60$

Par ordenado

(x , y)

(60, 0)

Cuando x = 0 entonces y = ?

$4x + 3y = 240$

$4(0) + 3y = 240$

$3y = 240$

$y = 240 / 3$

$y = 80$

Par ordenado

(x , y)

(0, 80)

Solución caso: Compañía Flair Furniture

4. **Determine el conjunto de soluciones factibles y la representación gráfica respecto a las restricciones.**

Entonces, los pares ordenados para la primera restricción corresponde a:

(60, 0) (0, 80)

4x + 3y <= 240

Trabajemos con la segunda restricción

2x + y <= 100 → 2x + y = 100

Cuando y = 0 entonces x = ?

2x + y = 100

2x + 0 = 100

2x = 100

x = 100 / 2

Par ordenado

(x , y)

(50, 0)

Cuando x = 0 entonces y = ?

2x + y = 100

2(0) + y = 100

0 + y = 100

y = 100

Par ordenado

(x , y)

(0, 100)

Solución caso: Compañía Flair Furniture

4. **Determine el conjunto de soluciones factibles y la representación gráfica respecto a las restricciones.**

Para el paso 4, a este momento tenemos lo siguiente:

Restricción	Pares ordenados
$4x + 3y <= 240$	(60, 0) (0, 80)
$2x + y <= 100$	(50, 0) (0, 100)

Par ordenado

Trabajemos con la tercera restricción

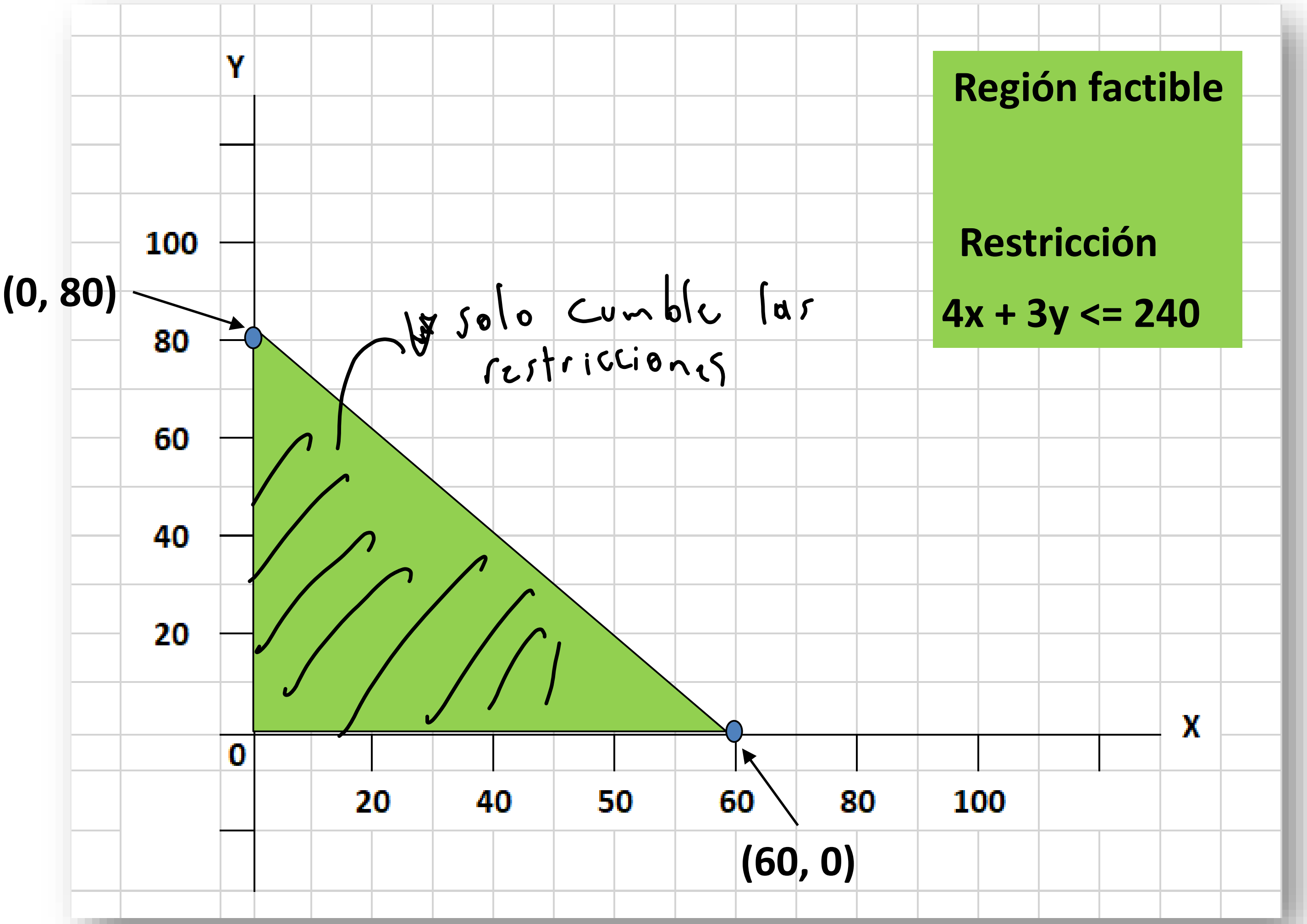
$x, y >= 0 \longrightarrow x, y = 0$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (x , y) \\ (0, 0) \end{matrix}$$

Para avanzar con el paso 4, debemos efectuar la representación gráfica.

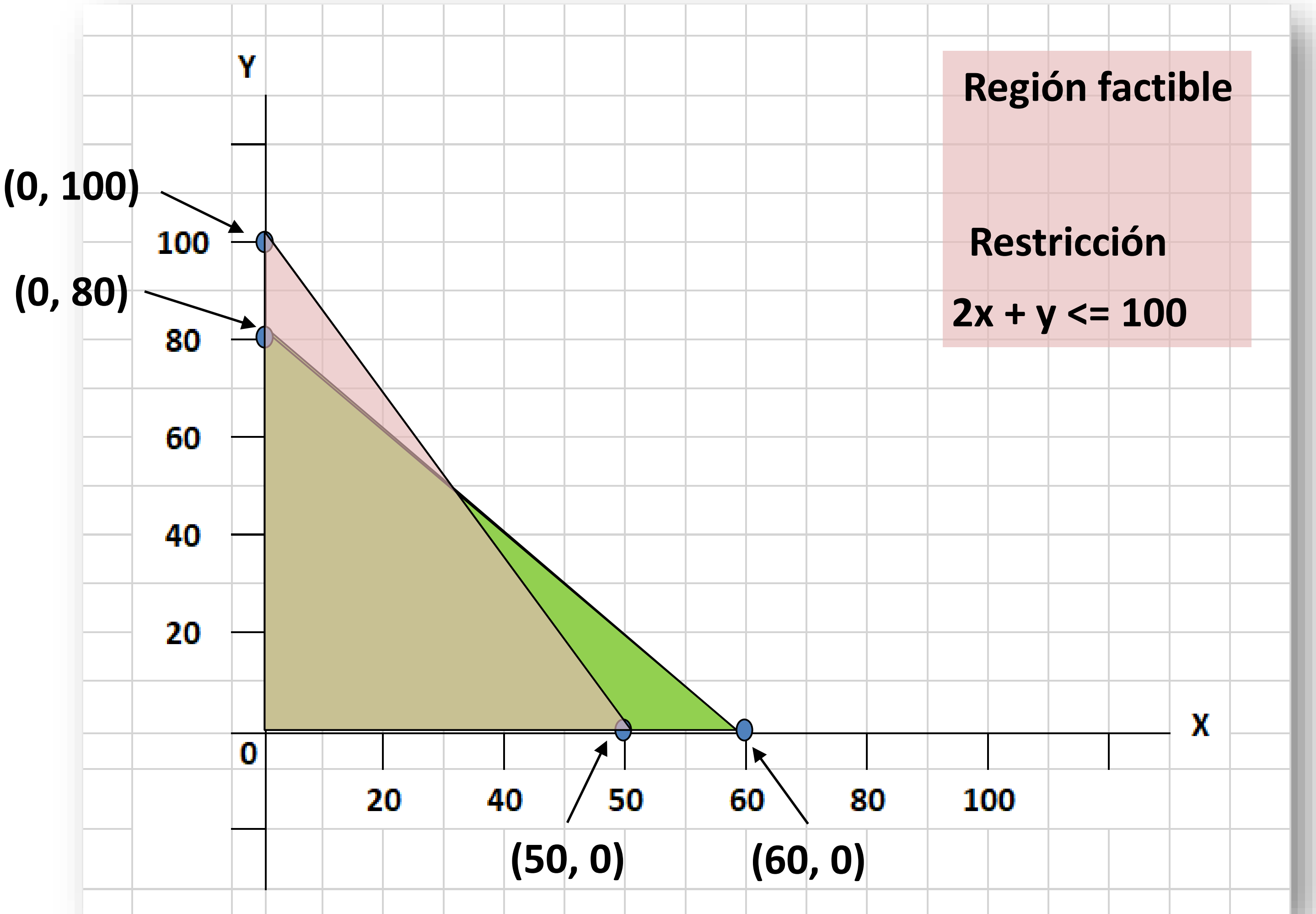
Solución caso: Compañía Flair Furniture

Trabajemos con la gráfica de los pares ordenados de la primera restricción

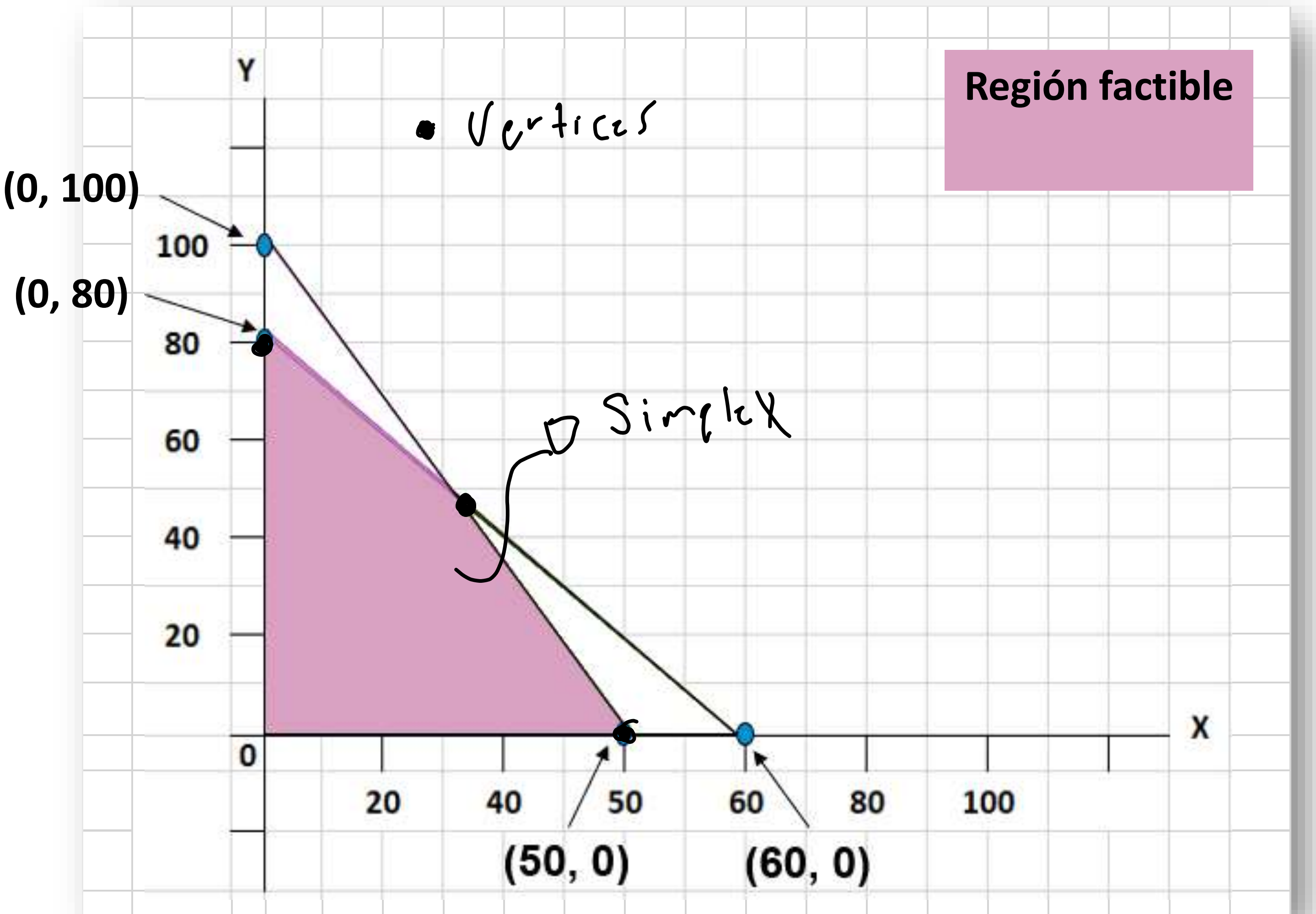


Solución caso: Compañía Flair Furniture

Trabajemos con la gráfica de los pares ordenados de la segunda restricción

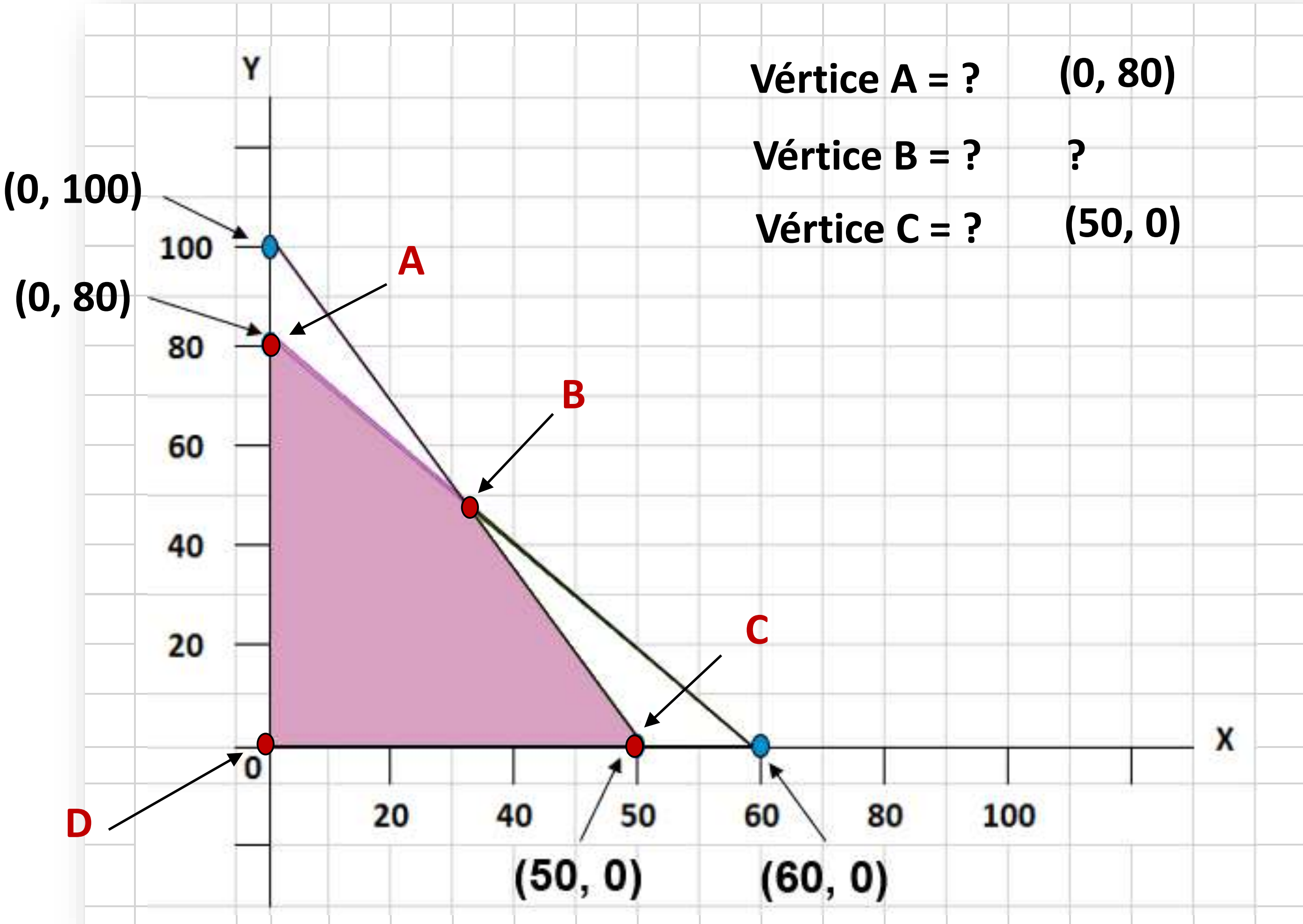


Solución caso: Compañía Flair Furniture



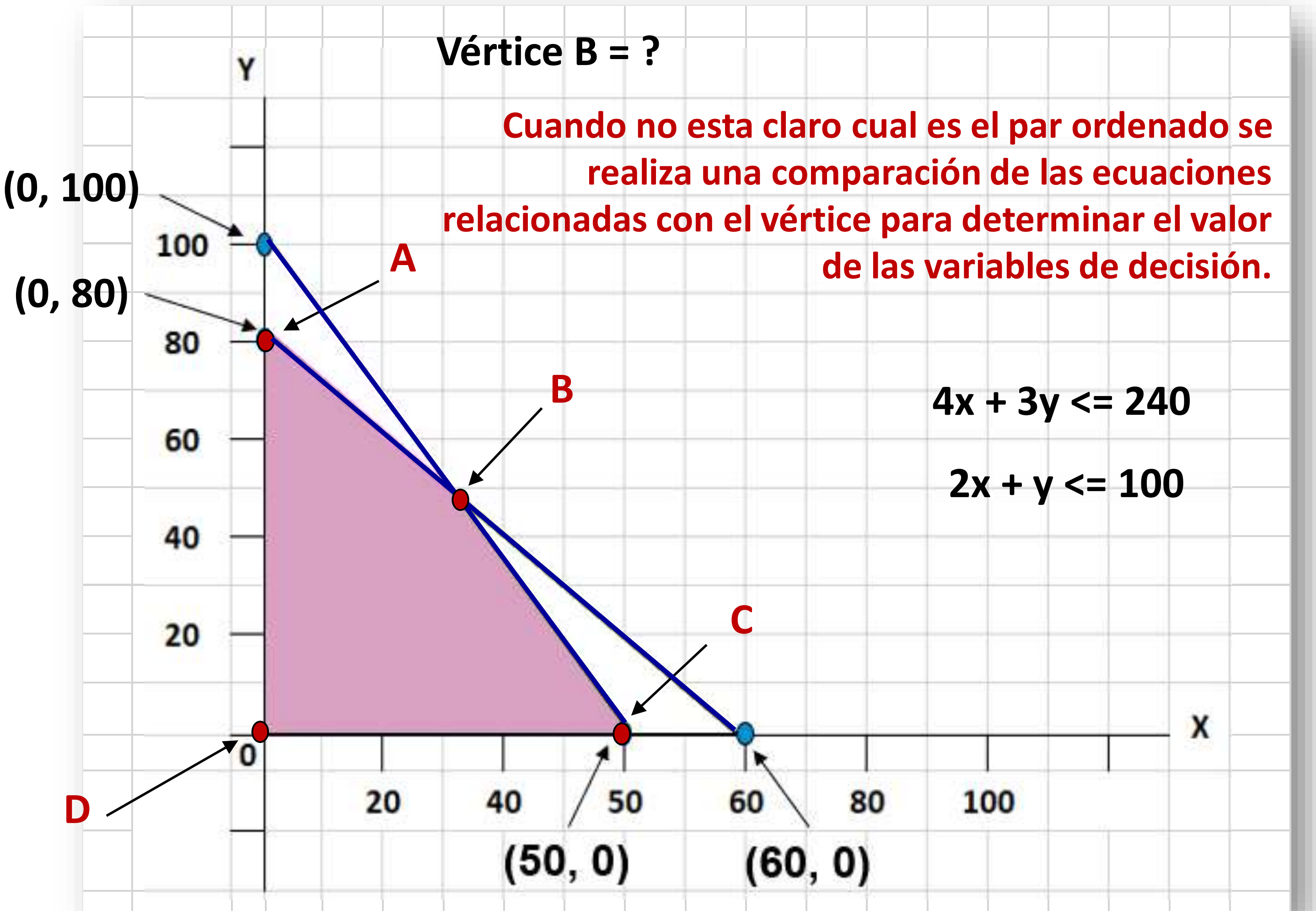
Solución caso: Compañía Flair Furniture

5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**



Solución caso: Compañía Flair Furniture

5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**



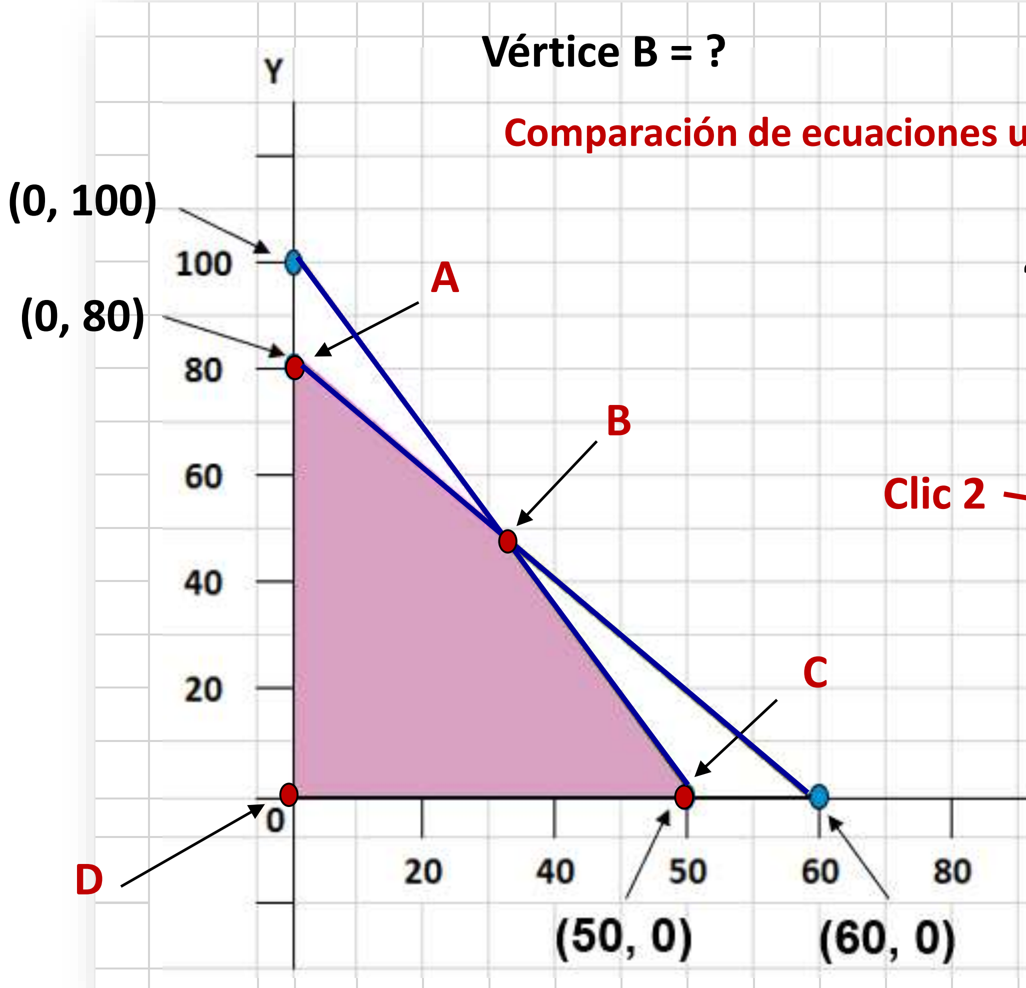
5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**

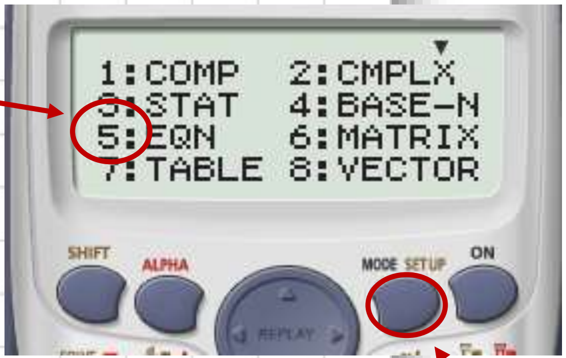
Vértice B = ?

Comparación de ecuaciones utilizando calculadora

$4x + 3y <= 240$

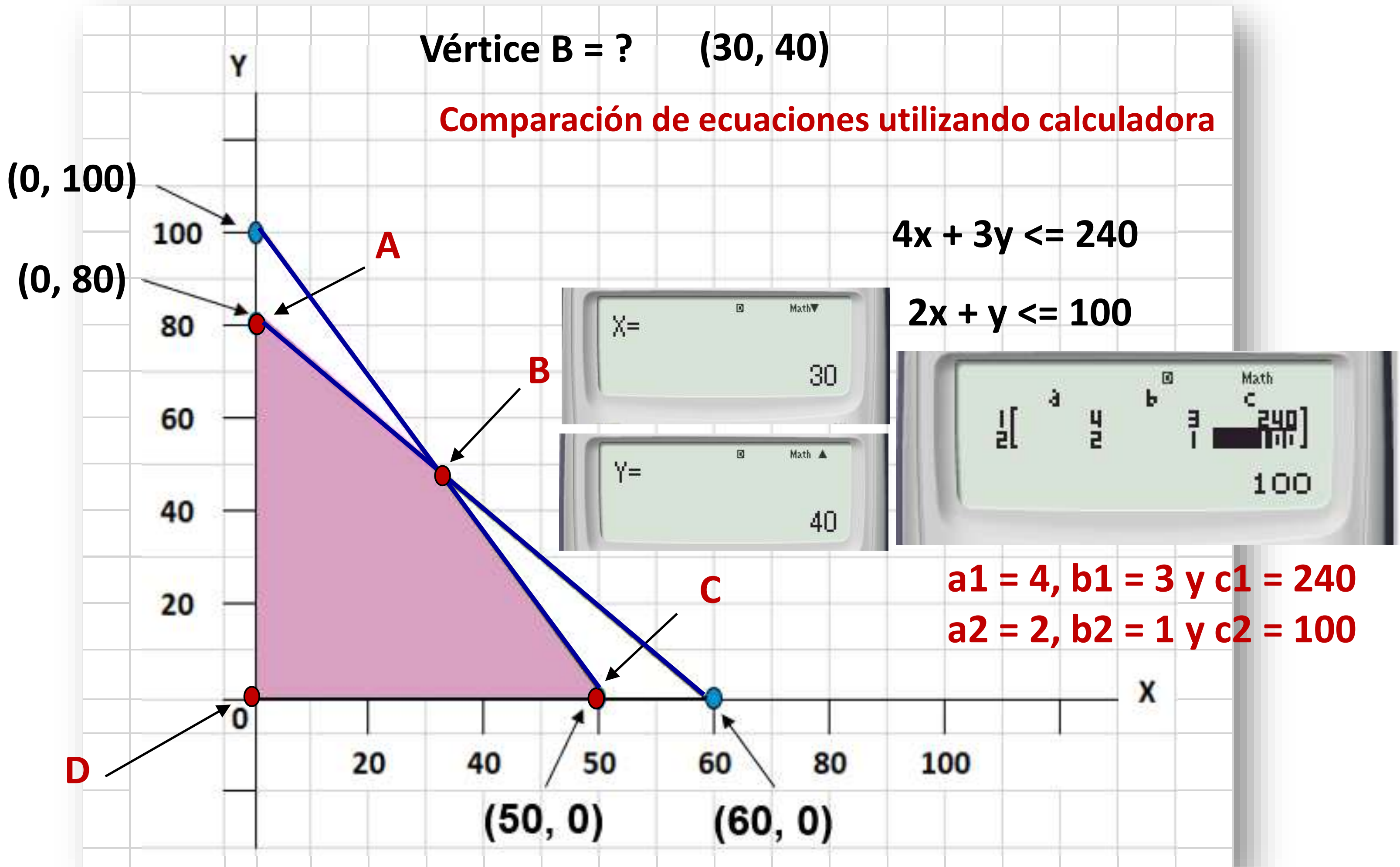
$2x + y <= 100$





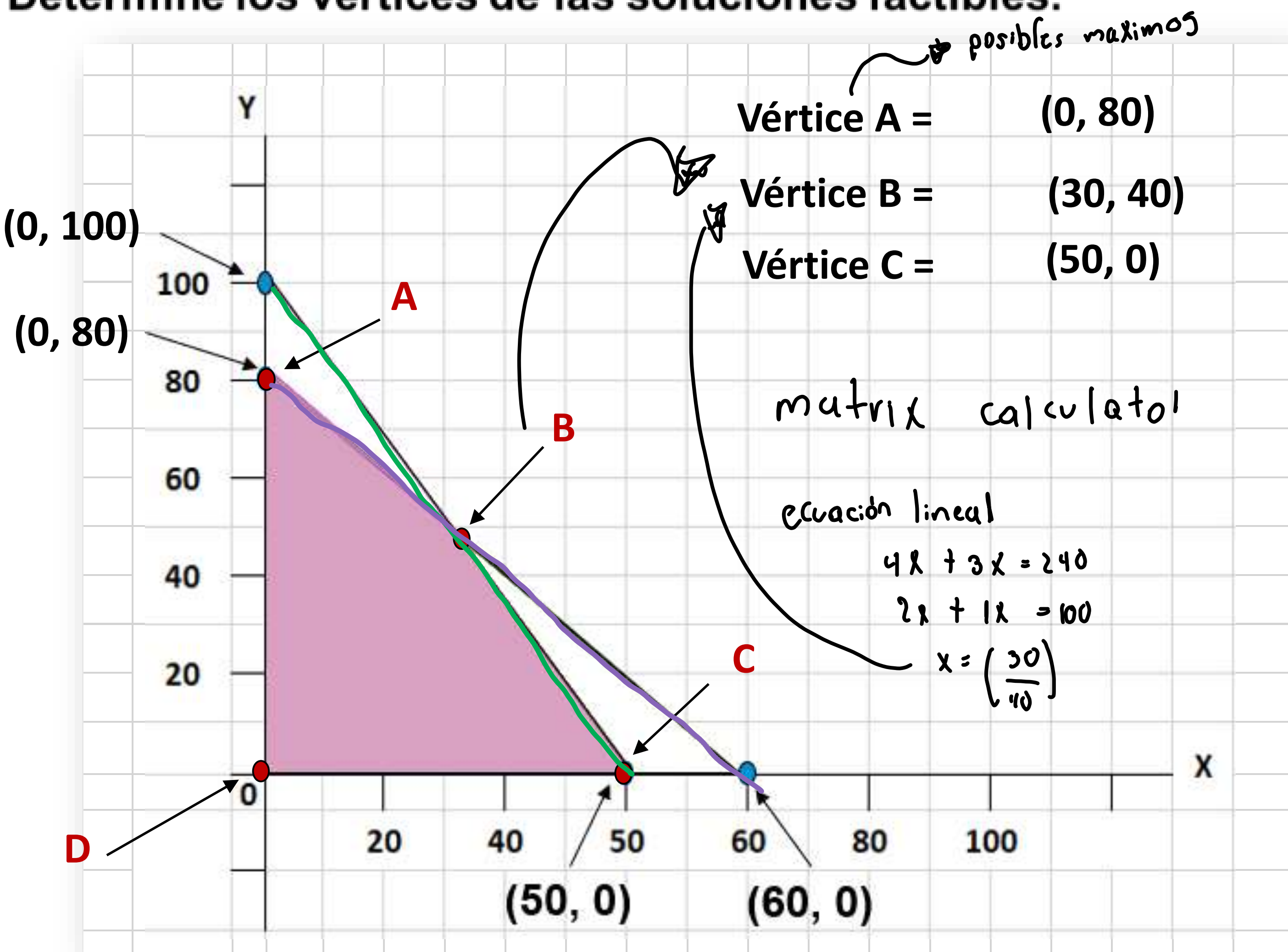
En MODE EQN elegir opción 1

5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**



Solución caso: Compañía Flair Furniture

5. **Determine los vertices de las soluciones factibles.**



Solución caso: Compañía Flair Furniture

6. Calcule la función objetivo con cada uno de los vértices de las soluciones factibles para ver en cual de ellos se presenta el valor máximo o mímino según lo solicite el problema.

Max Z = 70x + 50y

Vértice A =	(0, 80)	→	Z = 70(0) + 50(80)	Z = 4.000
Vértice B =	(30, 40)	→	Z = 70(30) + 50(40)	Z = 4.100
Vértice C =	(50, 0)	→	Z = 70(50) + 50(0)	Z = 3.500

7. Brinde la solución.

Analicemos lo solicitado: La compañía quiere determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima.

R/= La compañía debe fabricar 30 mesas y 40 sillas para alcanzar la utilidad máxima estimada en $4.100

Casos especiales de PL

Algunas veces surgen cuatro casos especiales y dificultades cuando se utiliza el método gráfico para resolver problemas de PL.

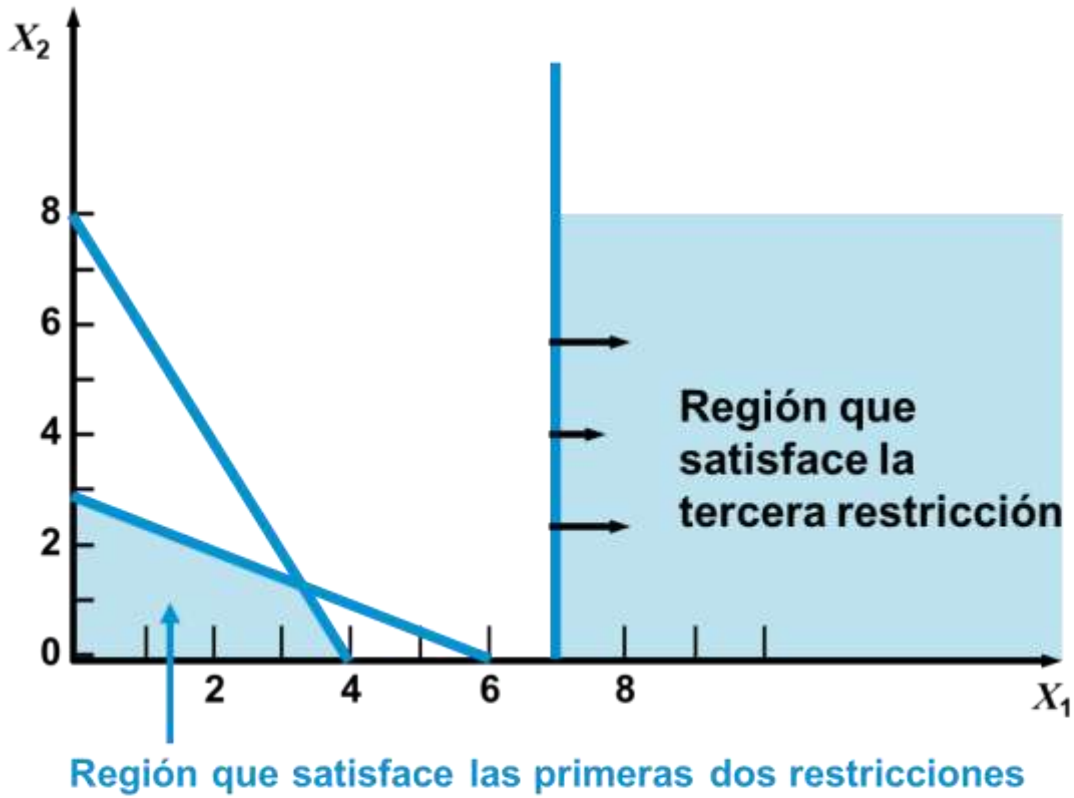
- Solución no factible. → zonas no coinciden
- Región no acotada.
- Redundancia.
- Soluciones óptimas múltiples.

Solución no factible

- Sucede cuando no hay solución a un problema de PL que satisfaga todas las restricciones dadas.
- No hay una región de solución factible.
- Es un hecho frecuente en la vida real.
- Por lo general, se relajan una o más restricciones hasta que se encuentra una solución.

Solución no factible

Un problema sin una solución factible

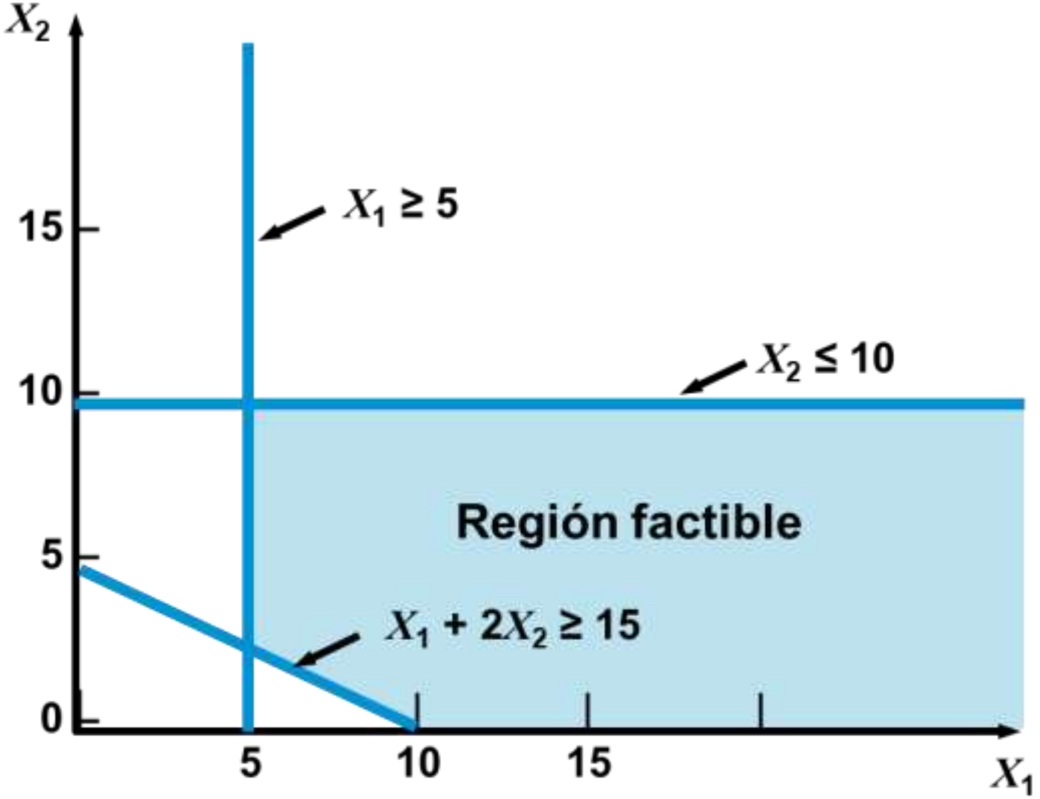


Región no acotada

- En ocasiones un problema de PL no tiene solución finita.
- En un problema de maximización, una o más variables de solución, y la utilidad, se pueden hacer infinitamente grandes sin contravenir ninguna restricción.
- En una solución gráfica, la región factible se extiende infinitamente hacia la derecha, es ilimitada o existe una solución sin acotar.
- Esto implica que el problema se ha formulado incorrectamente.

Región no acotada

Una región factible no acotada por la derecha

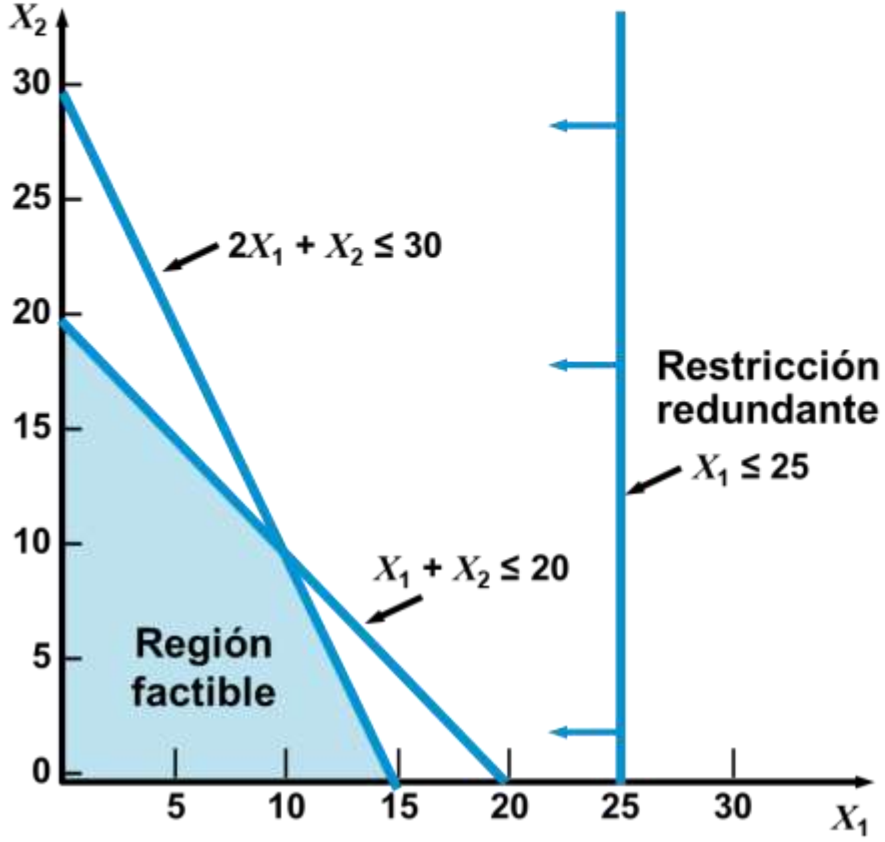


Redundancia

- Una restricción redundante es aquella que no afecta la región de solución factible.
- Una o más restricciones pueden estar enlazadas.
- En un hecho frecuente en la vida real.
- No causa problemas particulares, pero la eliminación de las restricciones redundantes simplifica el modelo.

Redundancia

Problema con una restricción redundante

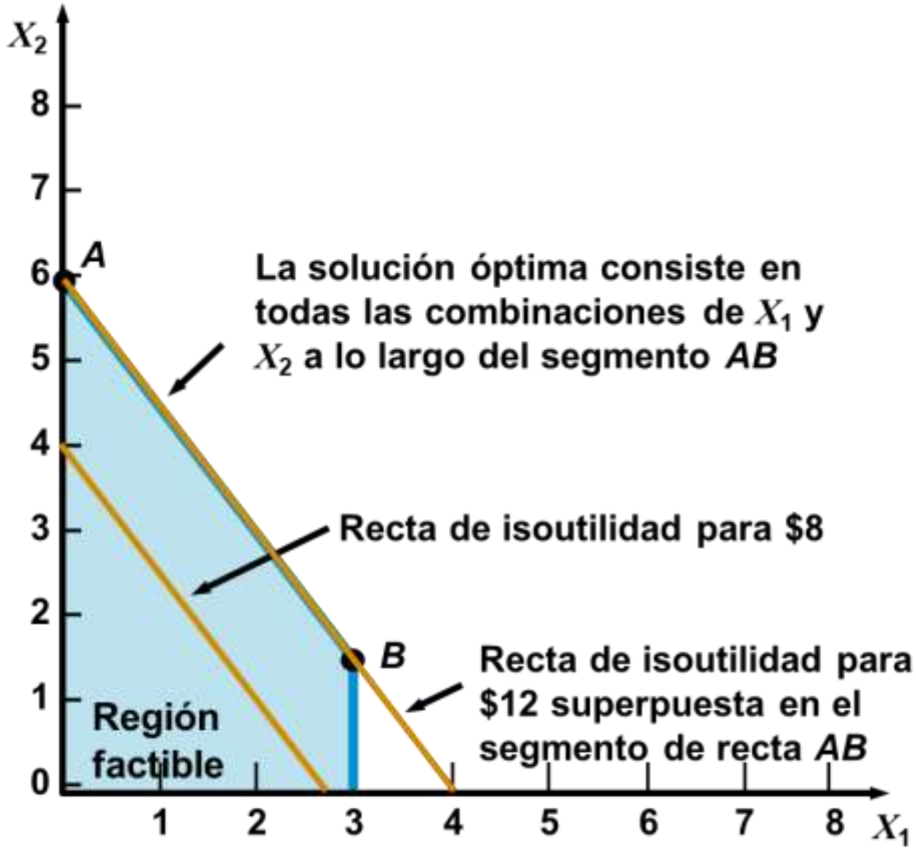


Soluciones óptimas múltiples

- Algunas veces hay dos o más soluciones óptimas múltiples.
- Gráficamente, este es el caso cuando la recta de isocosto o de isoutilidad de la función objetivo corre perfectamente paralela a una de las restricciones del problema.
- En realidad esto permite una gran flexibilidad a la administración para decidir qué combinación seleccionar ya que la utilidad es la misma en cada solución alternativa.

Soluciones óptimas múltiples

Ejemplo de soluciones óptimas múltiples



Análisis de sensibilidad

- Las soluciones óptimas a los problemas de PL se han encontrado en lo que se llaman suposiciones deterministas.
- Esto significa que suponemos toda la certeza en los datos y las relaciones de un problema.
- No obstante, en el mundo real las condiciones son dinámicas y cambiantes
- Se analiza que tan sensible es una solución determinista a los cambios en las suposiciones del modelo.
- **Esto se llama análisis de sensibilidad, análisis de posoptimalidad, programación paramétrica o análisis de optimalidad.**

Análisis de sensibilidad

- El análisis de sensibilidad también implica a menudo una serie de preguntas del tipo ¿qué pasaría si? sobre las restricciones, los coeficientes de las variables y la función objetivo.
- Una manera de hacer esto es el método de ensayo y error, donde los valores cambian y se ha resuelto el modelo completo.
- La forma preferida es utilizar un análisis post-óptimo analítico.
- Después de que se ha resuelto un problema, se determina una serie de cambios en los parámetros del problema, que no afectarán la solución óptima o cambiarán las variables de la solución.

Caso Compañía High Note Sound

La empresa High Note Sound fabrica equipos de sonido con reproductor de discos compactos (CD) y radiorreceptores estereofónicos de alta calidad.

Cada uno de estos productos requiere una cierta cantidad de mano de obra especializada que está limitada.

La empresa formula el siguiente problema de PL.

Maximizar la utilidad = $\$50X_1 + \$120X_2$

sujeta a

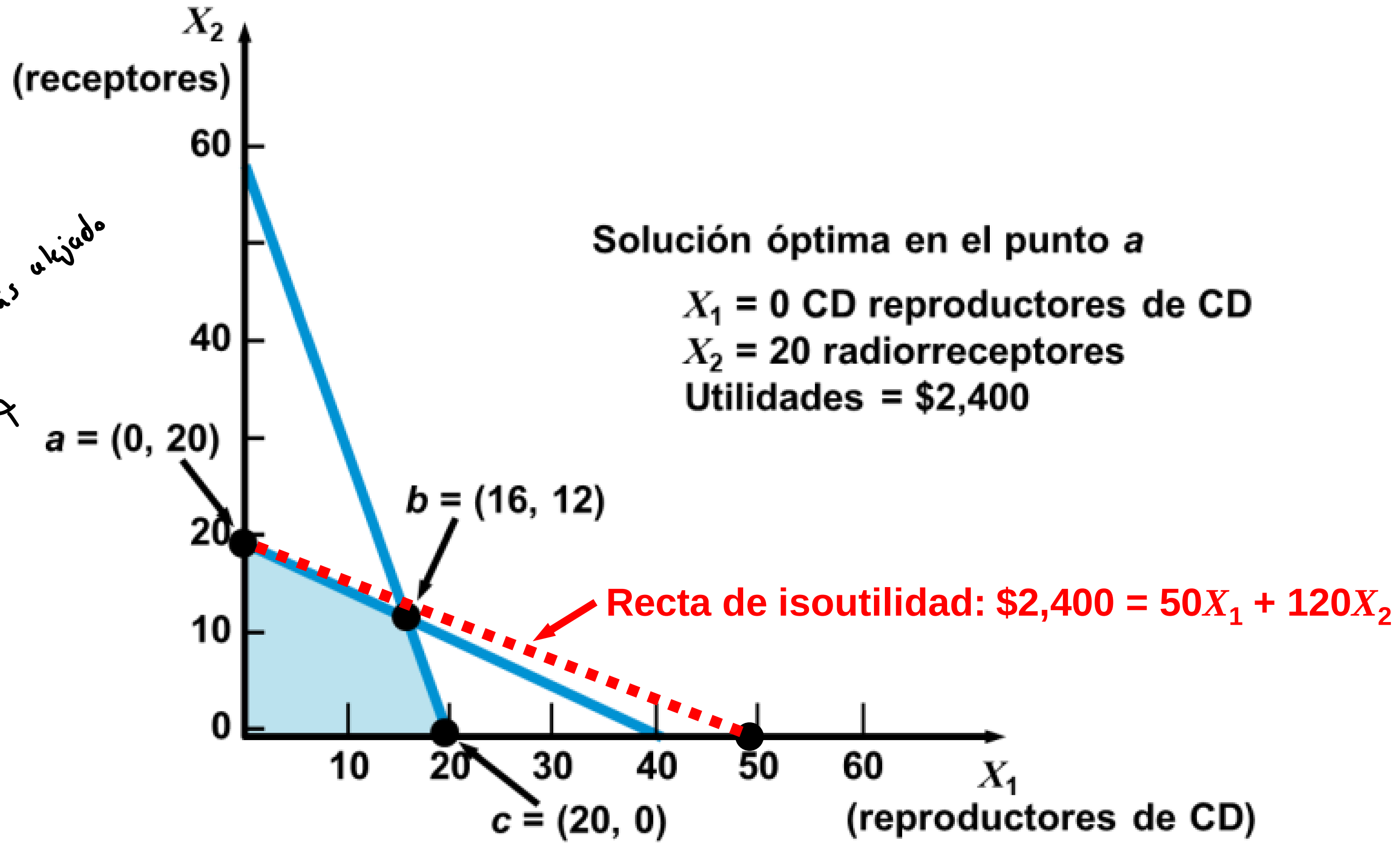
$2X_1 + 4X_2 \leq 80$ (horas de tiempo disponible de electricistas)

$3X_1 + 1X_2 \leq 60$ (horas de tiempo disponible de técnicos de sonido)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solución gráfica caso Compañía High Note Sound

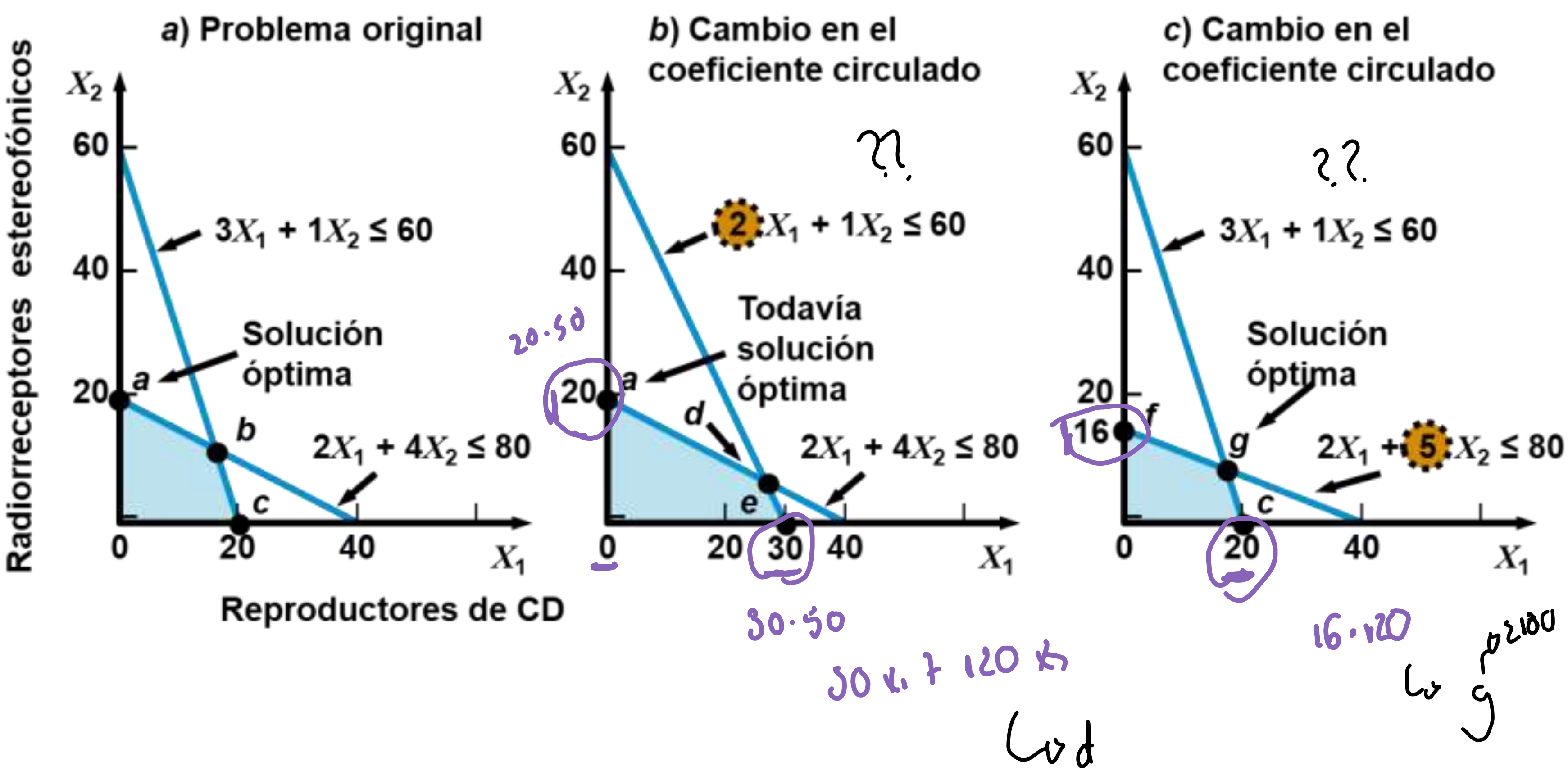
Zona más alejado



Cambio en los coeficientes tecnológicos

- Los cambios en los coeficientes tecnológicos a menudo reflejan los cambios en el estado de la tecnología.
- Si la cantidad de recursos necesarios para producir un producto cambia, los coeficientes de las ecuaciones de restricción va a cambiar.
- Esto no cambia la función objetivo, pero puede producir un cambio significativo en la forma de la región factible.
- Esto puede causar un cambio en la solución óptima.

Caso Compañía High Note Sound



Caso No. 1 practica: Winkler Furniture

Winkler Furniture fabrica dos tipos diferentes de vitrinas para porcelana: un modelo Francés Provincial y un modelo Danés Moderno. Cada vitrina producida debe pasar por tres departamentos: carpintería, pintura y terminado.

La tabla que sigue contiene toda la información relevante respecto a tiempos de producción por vitrina y capacidades de producción diarias para cada operación, al igual que el ingreso neto por unidad producida. La empresa tiene un contrato con un distribuidor de Indiana para producir un mínimo de 300 de cada tipo de vitrina por semana (o 60 vitrinas por día).

Restricciones

$x_1 \geq 60$

$x_1 \geq 60$

Caso No. 1 practica: Winkler Furniture

El dueño Bob Winkler quiere determinar una mezcla de productos que maximice su ingreso diario.

objetivo

ESTILO DE VITRINA	CARPINTERÍA (HORAS/ VITRINA)	PINTURA (HORAS/ VITRINA)	TERMINADO (HORAS/ VITRINA)	INGRESO NETO/ VITRINA ($)
Francés Provincial	3	1.5	0.75	28
Danés Moderno	2	1	0.75	25
Capacidad del departamento (horas)	360	200	125	

variables

Restricciones

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

negatividad

Caso No. 2 practica: Minería

Dos empresas mineras extraen dos tipos diferentes de minerales los cuales son sometidos a un proceso de trituración con tres grados: alto, medio y bajo.

Las compañías han firmado un contrato para proveer de mineral a una planta de fundición, cada semana, 12 toneladas de mineral de grado alto, 8 toneladas de grado medio y 24 toneladas de grado bajo. Cada una de las empresas tiene diferentes procesos de fabricación.

Caso No. 2 practica: Minería

La siguiente tabla muestra el coste y la producción de toneladas por día para cada mineral.

cantidad días de producción

MINERALES	COSTE ($)	TONELADA POR GRADO DE PRODUCCIÓN		
		ALTO	MEDIO	BAJO
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

y empresas

Considerando otra limitante que solo pueden haber cinco (5) días de producción para cada mineral, la empresa desea minimizar sus operaciones. ¿Cuál sería su recomendación?

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Modelos de programación lineal

Curso IF-7200 Métodos cuantitativos para la toma de decisiones