Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

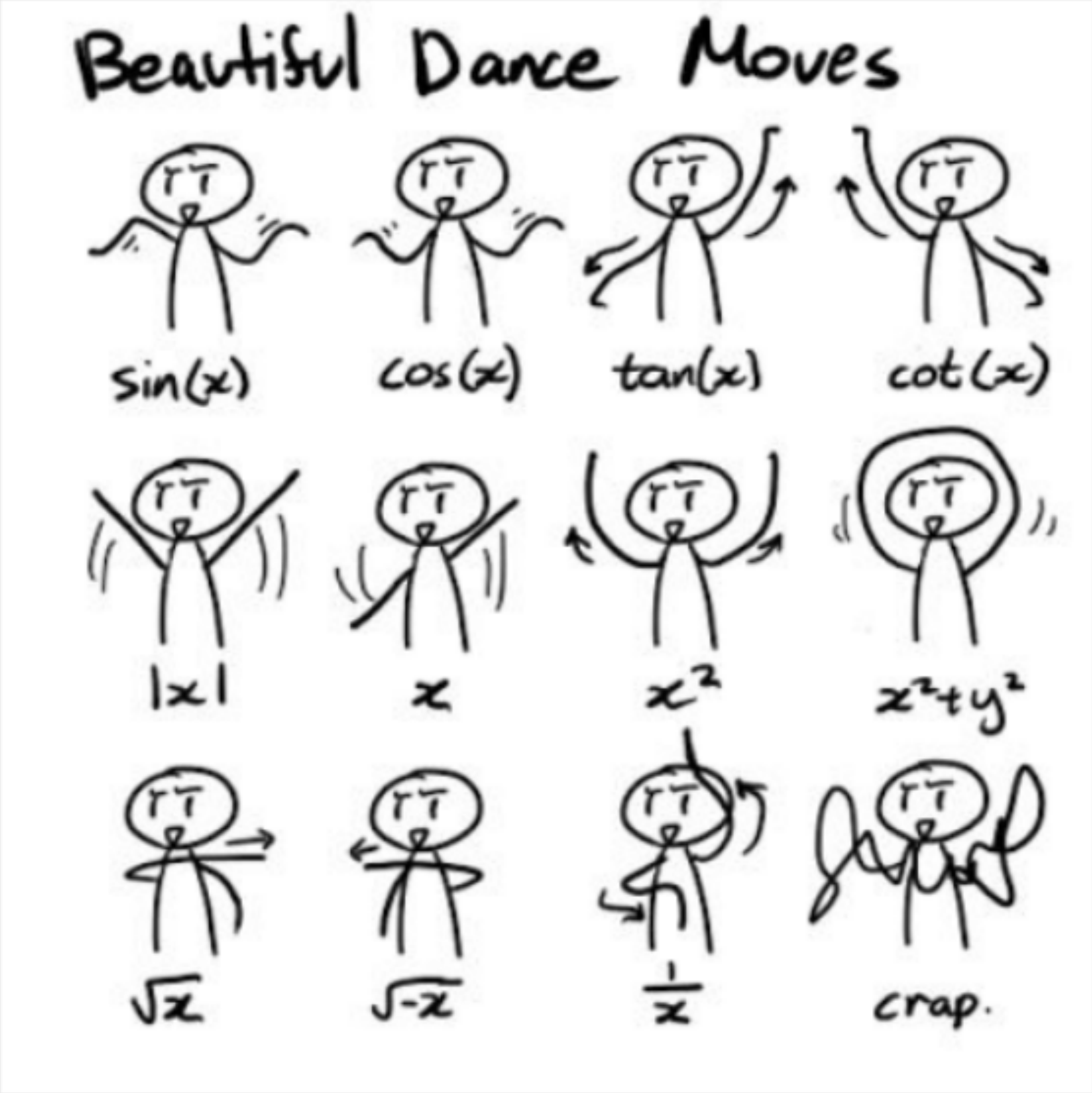
MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents

Tipos de funciones

Introducción

Describiremos algunos tipo de funciones, esto sin olvidar de que existen un sin fin de ellas.

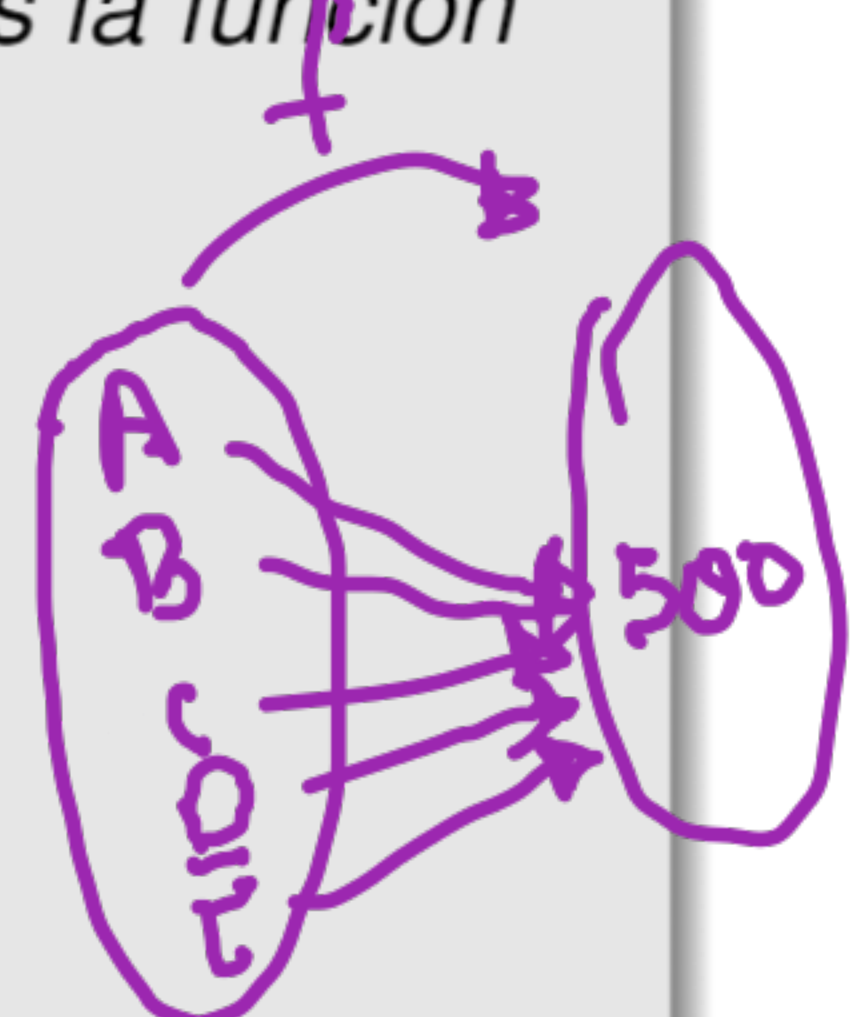


Tipos de funciones

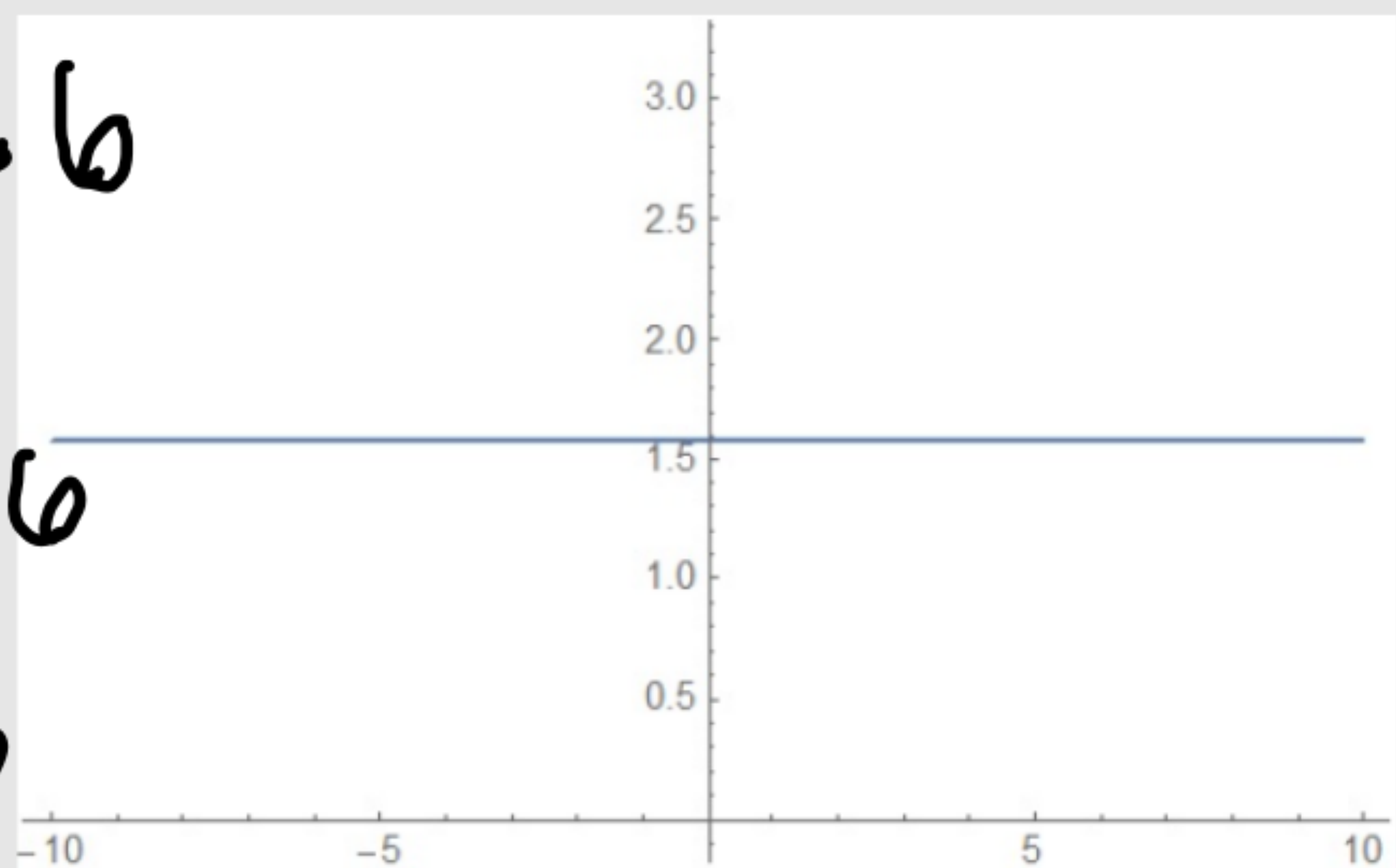
Función constante

(A, 500), (B, 500), (C, 500), (D, 500), (E, 500)

Sea f una función de A en B, si existe un elemento $k \in B$, tal que $\forall x \in A$, se tiene que $f(x) = k$, entonces se dice que f es la función constante de valor k.



$f(x) = 1.6$



$f(3) = 1.6$

$f(7) = 1.6$

$f(-4) = 1.6$

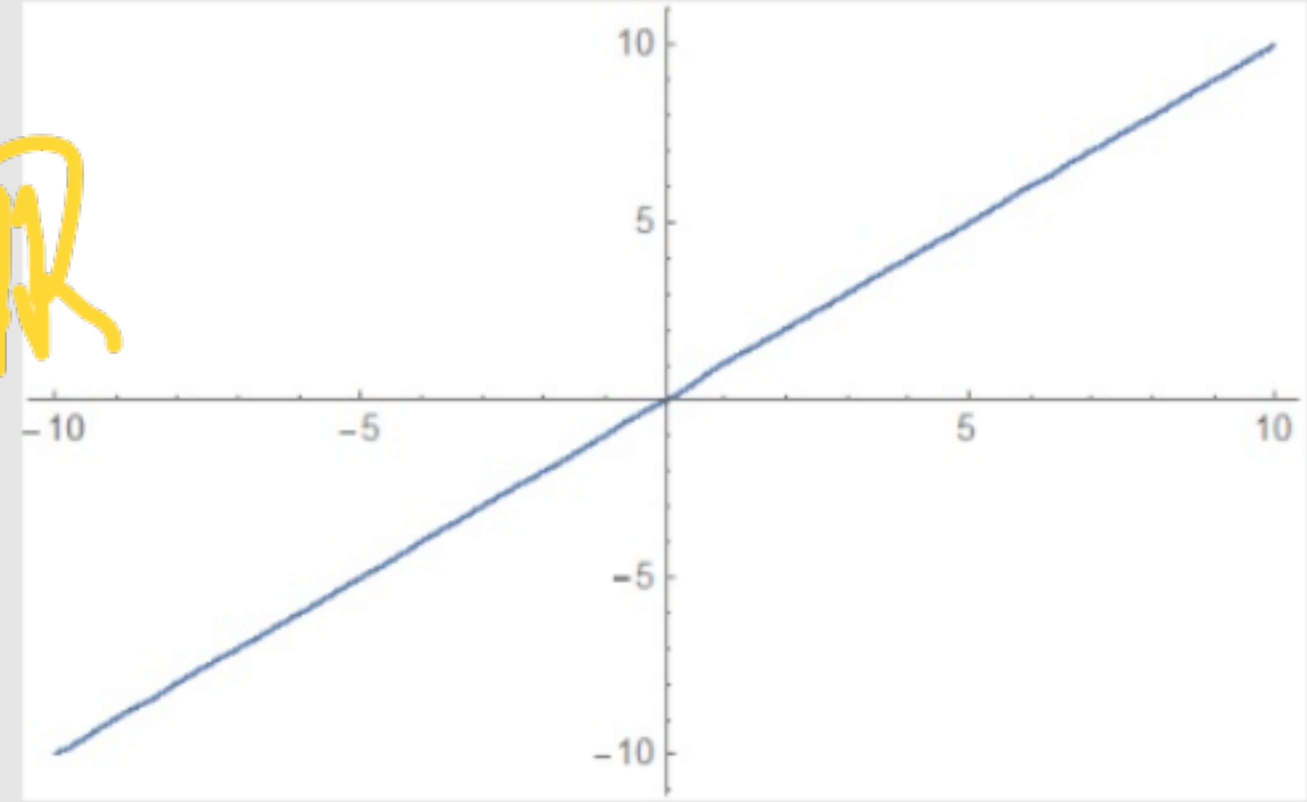
Tipos de funciones

Función identidad

$(2,2), (0,0), (-5,-5)$

La función de A en A, denotada por id tal que $\forall x \in A$, se tiene que $id(x) = x$, se llama función identidad de A.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(2) = 2$

$f(0) = 0$

$f(-5) = -5$

Ejemplo 7: Si $f : \{0, 2, 3, 5\} \to \{0, 2, 3, 5\}$, la función identidad sobre este conjunto tiene como gráfico a $G_f = \{(0,0), (2,2), (3,3), (5,5)\}$.

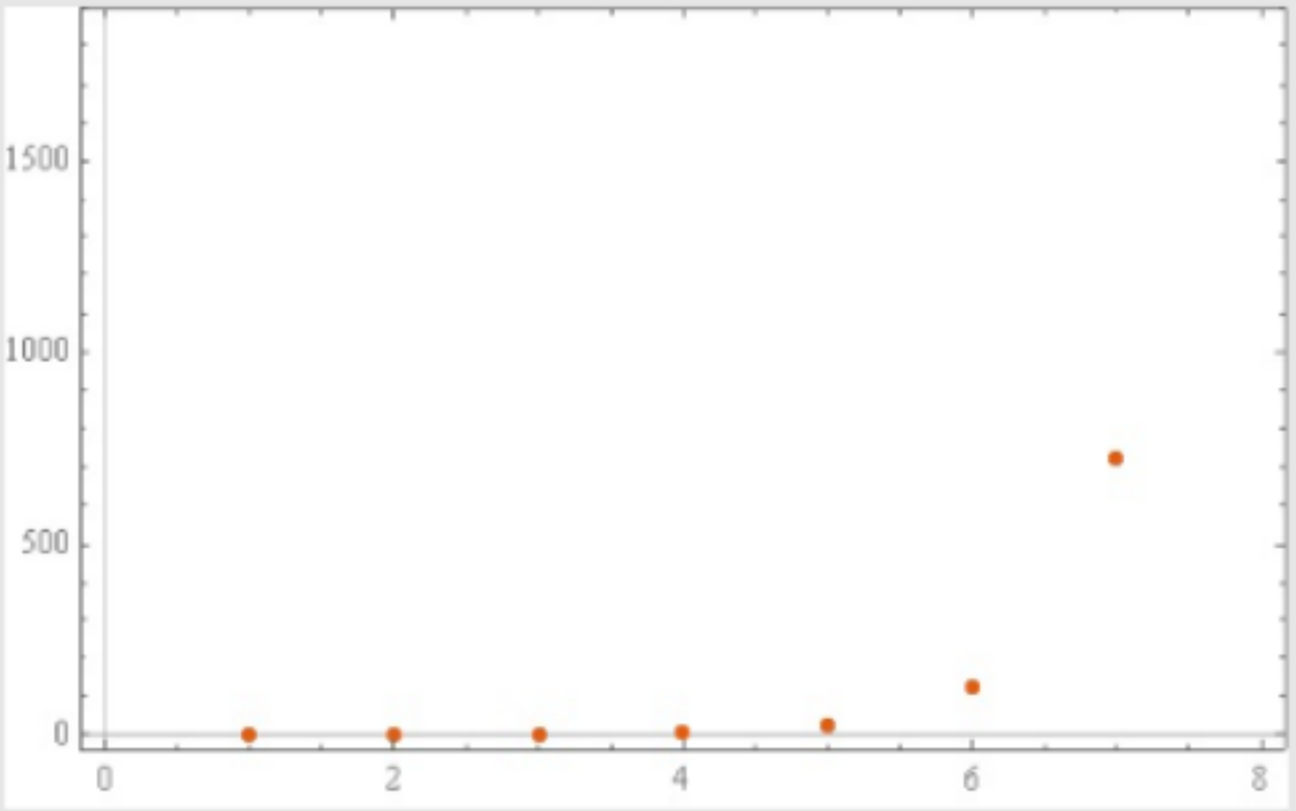
Tipos de funciones

Función factorial

La *función factorial* *de n,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *denotada por* $f(n) = n!$, *está definida por*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

donde además se tiene $0! = 1$.
Es importante recordar $\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$



$$\frac{274 \cdot 273 \cdot 272 \cdot \cancel{271!}}{\cancel{271}!}$$

Ejemplo 7: determine el valor numérico de la expresión, $\dfrac{274!}{271!} = 20\,346\,144$

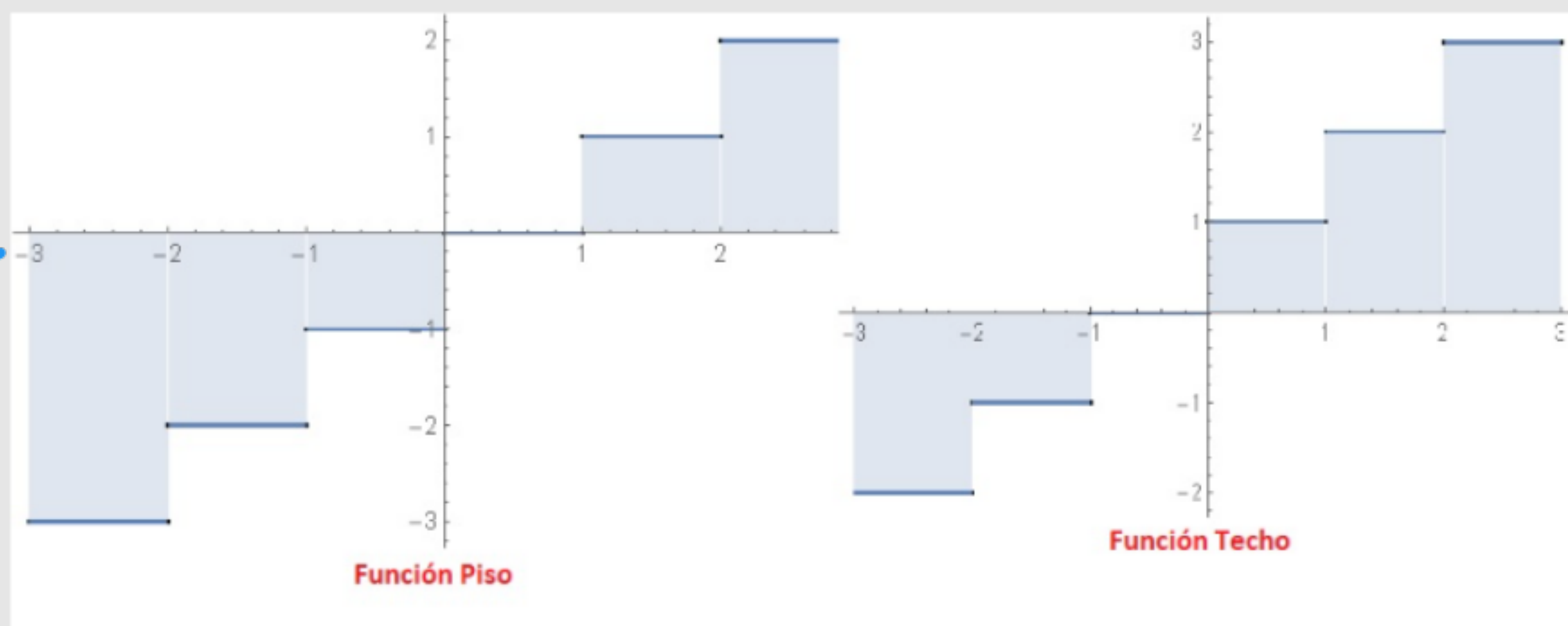
Tipos de funciones

Función parte entera

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *definida por* $f(x) = n$ *donde* n *es el entero que satisface* $n \leq x < n + 1$, *se llama **función parte entera** o la **función piso**, es decir, la función piso de* x *corresponde al entero más grande que sea menor o igual a* x. *Se denota por* $\lfloor x \rfloor$.
*De forma análoga se define la **función techo**, que se denota por* $\lceil x \rceil$, *como el entero más peque~no que sea mayor o igual a* x.

$\lfloor 0.3 \rfloor = 0$

$\lfloor 1.2 \rfloor = 1$



$\lceil 0.3 \rceil = 1$

$\lceil 1.2 \rceil = 2$

Tipos de funciones

Función parte entera

Ejemplo 8: determine el valor numérico de la expresión

$$\left\lfloor \left(\frac{\lceil \pi \rceil}{\sqrt{2} + \lfloor 5.74 \rfloor} \right) \right\rfloor$$

3,1415...

Tenemos:

$$\left\lfloor \frac{4}{\sqrt{2}+5} \right\rfloor = \lfloor 0,6236\ldots \rfloor$$

$$= 0$$

Tipos de funciones

Función parte entera

Con algunas de las funciones anteriores se puede definir un resultado muy interesante en la teoría de números

Si $E_p(m)$ denota el exponente del primo p en la factorización prima de m, entonces

$$E_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \cdots \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor + \cdots$$

donde la suma es finita, pues es claro que, a partir de algún s, la potencia p^s será mayor que n y los términos sucesivos serán cero.

Ejemplo 9: resolver los siguientes ejercicios

1. Determinar $E_3(486)$ $= 5$, $E_2(486) = 1$, $E_7(486) = 0$
2. Determinar $E_3(85!)$
3. Pruebe que los últimos 20 dígitos de 85! son iguales a 0.

Tipos de funciones

Ejemplo 9

NO

$$E_3(85!) = \left\lfloor \frac{85}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{3^6} \right\rfloor$$

$$= 28 + 9 + 3 + 1 + 0$$

$$E_3(85!) = 41$$

$\underbrace{9-c}$ $\quad 5 \quad , \quad 5 \times \underbrace{10}^{20}$

$\underbrace{100\ldots\ldots0}_{20 \text{ ceros}}$

$10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow ¿\underbrace{2^{20} \cdot 5^{20}}?$

$(2 \cdot 5)^{20} = 10^{20}$

$¿E_2(85!) \geq 20?$ $\quad ¿E_5(85!) \geq 20?$

$$E_2(85!) = \left\lfloor \frac{85}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{64} \right\rfloor$$

$= 42 + 21 + 10 + 5 + 2 + 1 = 81$

$$(2\cdot 5)^{20} = 2^{20}\cdot 5^{20}$$

$$2^{81} = \underbrace{2^{61}} \cdot 2^{20} \cdot 5^{20}$$

$$E_5(85!) = \left\lfloor \frac{85}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{85}{5^2} \right\rfloor$$

$$17+3 = 20$$

Con la argumentación anterior se demuestra que 85! termina con 20 ceros...!

Tipos de funciones

Función característica

$\chi \rightarrow$ chi

Sea E un conjunto y $A \subseteq E$. La función $\chi_A : E \rightarrow \{0,1\}$ definida por:

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

se llama función característica de A.

Ejemplo 10: Si $E = \{1,2,3,4,5\}$ determinar

1. $\chi_{\{2,5\}}(1) = 0$, $\chi_{\{2,5\}}(2) = 1$
2. $G_{\chi_{\{2,5\}}}$

$= \{(1,0),(2,1),(3,0),(4,0),(5,1)\}$

Tipos de funciones

Funciones polinomiales

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función polinomial de orden n a la expresión

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$ Los casos más conocidos suelen ser

1. *Función lineal: $f(x) = mx + b$.*
2. *Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.*
3. *Función cúbica: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.*