Tema III: matrices invertibles

Definición: sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. Una matriz $B \in M(n, \mathbb{R})$, se llama inversa izquierda de A si $BA = I$, y es inversa derecha de A sí $AB = I$. Cuando $AB = I = BA$, B se llama inversa de A y decimos que A es invertible.

Notación: a la matriz B se le denota como A^{-1}, además se cumple, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Ejemplo: sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B = A^{-1}$$

Teoremas:

1) Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. Si A es invertible su inversa es única.

2) Si $A \in M(n, \mathbb{R})$, las siguientes propiedades son equivalentes:

i) A es invertible
ii) A es equivalente a la identidad
iii) El rango de A es n

3) Sea $A, B \in M(n, \mathbb{R})$

i) Si A es invertible, entonces A^{-1} es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

ii) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) Si A es invertible, A^t es invertible y $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

<u>Procedimiento para calcular</u>: A^{-1}

1) Se construye la matriz $\left(A \mid I_n\right)_{n\times 2n}$
2) Por medio de operaciones elementales se obtiene: $\left(A \mid I_n\right) \sim \left(I_n \mid A^{-1}\right)$

<u>Ejemplo:</u> Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{\substack{\frac{1}{2}f_1 \\ -2f_1+f_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales:

Se llama matriz elemental de orden n a toda matriz que se obtiene aplicando sobre la matriz identidad de orden n, una única operación elemental. Estas matrices se denotan:

$$E(af_i),\ E(f_i \leftrightarrow f_j),\ E(af_i + f_j)$$

Utilizando la operación elemental que se origina.

Ejemplo: para una matriz 3x3

$$E(3f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(f_1 \leftrightarrow f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2f_1 + f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema:

1) Sea $A \in M(m, n, \mathbb{R})$. Hacer una operación elemental fila sobre A, es lo mismo que multiplicar esta matriz por la izquierda con la respectiva matriz elementa de orden m. Es decir,

$$E(af_i)A = B \Leftrightarrow A \xrightarrow{af_i} B$$

$$E(f_i \leftrightarrow f_j)A = B \Leftrightarrow A \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} B$$

$$E(af_i + f_j)A = B \Leftrightarrow A \xrightarrow{af_i + f_j} B$$

2) Las matrices elementales son invertibles:

$$\left(E(af_i)\right)^{-1} = E\left(\tfrac{1}{a} f_i\right) \ si\ a \neq 0$$

$$E(f_i \leftrightarrow f_j)^{-1} = E(f_i \leftrightarrow f_j)$$

$$\left(E\left(af_i + f_j\right)\right)^{-1} = E\left(-af_i + f_j\right)$$

Ejemplo: sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Definamos: $E\left(f_1 \leftrightarrow f_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E\left(2f_1 + f_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E\left(f_1 \leftrightarrow f_3\right)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E\left(2f_1 + f_2\right)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.