Tema IX: Transformaciones Lineales

Definición: Sean V y W espacios vectoriales, se llama transformación lineal de V a W, a toda función $T: V \to W$ que satisface $\forall v, u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, lo siguiente:

a) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

b) $T(v+u) = T(v) + T(u)$

Observaciones importantes:

1) Una consecuencia directa de la propiedad (b) de la definición, es que T hace corresponder el "cero" de V con el cero de W. Es decir,

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V) = 0_W + O_W = 0_W \Rightarrow T(0_V) = 0_W$$

2) Las propiedades a y b se resumen de la siguiente manera:

$$T(\alpha v + u) = \alpha T(v) + T(v) \quad \forall v, u \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, y)$, comprobar que T es lineal.

$$T(0,0) = (0+0, 0-0, 0) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha(x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= T(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2) \\
&= (\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2, \alpha x_1 + x_2 - (\alpha y_1 + y_2), \alpha y_1 + y_2) \\
&= (\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2, \alpha x_1 + x_2 - \alpha y_1 - y_2, \alpha y_1 + y_2) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) \\
&= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) \\
&= \alpha T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&\Rightarrow \text{T es lineal}
\end{aligned}$$

Ejemplo: probar que $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}$ es lineal.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1 + x_2) \\ \alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha x_1 + \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \text{ T es lineal}
\end{aligned}$$

Ejemplo: sea $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ la aplicación $T_A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $T_A(X) = AX$, probar que T es lineal.

$$T_A(0) = A\cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
T_A(\alpha X + Y) &= A(\alpha X + Y) \\
&= A(\alpha X) + AY \\
&= \alpha(AX) + AY \\
&= \alpha T_A(X) + T_A(Y) \\
&\Rightarrow \text{ T es lineal}
\end{aligned}$$

Ejemplo: sea $T: P_3 \to P_2$ tal que $T\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=bx^2+d$, probar que T es lineal.

$$T\left(0x^3+0x^2+0x+0\right)=0x^2+0=0$$

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha p(x)+q(x)\right) &= T\left(\alpha\left(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right)+\left(a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2\right)\right)\\
&= T\left(\left(\alpha a_1+a_2\right)x^3+\left(\alpha b_1+b_2\right)x^2+\left(\alpha c_1+c_2\right)x+\left(\alpha d_1+d_2\right)\right)\\
&= \left(\alpha b_1+b_2\right)x^2+\left(\alpha d_1+d_2\right)\\
&= \alpha b_1x^2+\alpha d_1+b_2x^2+d_2\\
&= \alpha\left(b_1x^2+d_1\right)+\left(b_2x^2+d_2\right)\\
&= \alpha T\left(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right)+T\left(a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2\right)\\
&= \alpha T\left(p(x)\right)+T\left(q(x)\right) \qquad \Rightarrow \text{ T es lineal}
\end{aligned}$$

Las imágenes de los vectores de una base determinan una transformación lineal

Supongamos que para la TL $T: V \to W$ se conocen los valores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$, donde $B=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces para cualquier $v \in V$, se tiene que:

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n$$

y es posible determinar $T(v)$ mediante:

$$T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)+\cdots+\alpha_n T(v_n)$$

Ejemplo: se la TL $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuyos valores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son $T(e_1)=(1,1), T(e_2)=(0,1), T(e_3)=(1,-1)$, obtenga la expresión general de $T(x,y,z)$.

$$(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$$

$$T(x,y,z)=xT(e_1)+yT(e_2)+zT(e_3)$$

$$T(x,y,z)=x(1,1)+y(0,1)+z(1,-1)$$

$$T(x,y,z)=(x+z, x+y-z)$$

Ejemplo: sea $B=\{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$, se T una TL $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0)=(1,1,1);T(0,1)=(1,0,-1)$, encontrar $T(x,y)$.

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

$$T(x,y)=xT(1,0)+yT(0,1)$$

$$T(x,y)=x(1,1,1)+y(1,0,-1)$$

$$T(x,y)=(x+y,x,x-y)$$

Ejemplo: sea la TL $T:M(2,\mathbb{R})\to P_2$, tal que $T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=x^2+x, T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=x+1,$ $T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=x^2-1, T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=2$. Calcule $T\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=aT\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+bT\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+cT\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+dT\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a(x^2+x)+b(x+1)+c(x^2-1)+2d$$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a+c)x^2+(a+b)x+(b-c+2d)$$

$$T\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}=(1+1)x^2+(1-1)x+(-1-1+2\cdot 2)=2x^2+2$$

Ejemplo: dada la base $B=\{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, siendo $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una TL tal que: $T(1,1.1)=(3,4), T(1,0,-1)=(2,1), T(-1,1,0)=(-1,2)$. Determinar $T(x,y,z)$ y calcule $T(-3,4,2)$, $T(-1,1,2)$ y $T(0,2,-3)$.

$$(x,y,z)=a(1,1,1)+b(1,0,-1)+c(-1,1,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow[-f_1+f_3]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 2 & -x+y \\ 0 & -2 & 1 & -x+z \end{array}\right) \xrightarrow[-2f_2+f_3]{f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 2 & -x+y \\ 0 & 0 & -3 & x-2y+z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{-1}{3}f_3]{-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -2 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-x+2y-z}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[2f_3+f_2]{-f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y+z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x+y-2z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-x+2y-z}{3} \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right)(1,1,1)+\left(\tfrac{x+y-2z}{3}\right)(1,0,-1)+\left(\tfrac{-x+2y-z}{3}\right)(-1,1,0)$$

$$T(x,y,z)=\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right)T(1,1,1)+\left(\tfrac{x+y-2z}{3}\right)T(1,0,-1)+\left(\tfrac{-x+2y-z}{3}\right)T(-1,1,0)$$

$$T(x,y,z)=\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right)(3,4)+\left(\tfrac{x+y-2z}{3}\right)(2,1)+\left(\tfrac{-x+2y-z}{3}\right)(-1,2)$$

$$T(x,y,z)=(2x+y,x+3y)$$

Ahora:

$$T(-3,4,2)=(2\cdot -3+4,-3+3\cdot 4)=(-2,9)$$

$$T(-1,1,2)=(2\cdot -1+1,-1+3\cdot 1)=(-1,2)$$

$$T(0,2,-3)=(2\cdot 0+2,0+3\cdot 2)=(2,6)$$

Ejemplo: dada la base $B=\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, determinar $T(x,y)$ siendo $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ una TL tal que: $T(1,1)=(2,2,0), T(1,-1)=(4,0,-2)$.

$$(x,y)=a(1,1)+b(1,-1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\ 1 & -1 & y\end{array}\right)\xrightarrow{-f_1+f_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\ 0 & -2 & -x+y\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{-1}{2}f_2]{\frac{1}{2}f_2+f_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{x+y}{2}\\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2}\end{array}\right)$$

Es decir:
$$(x,y)=\tfrac{x+y}{2}(1,1)+\tfrac{x-y}{2}(1,-1)$$

$$T(x,y)=\tfrac{x+y}{2}T(1,1)+\tfrac{x-y}{2}T(1,-1)$$

$$T(x,y)=\tfrac{x+y}{2}(2,2,0)+\tfrac{x-y}{2}(4,0,-2)$$

$$T(x,y)=(x+y,x+y,0)+(2x-2y,0,-x+y)$$

$$T(x,y)=(3x-y,x+y,-x+y)$$

Observación: Sea $A\in M(m,n,\mathbb{R})$, como se definió anteriormente, existe la TL $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ tal que $T_A(x)=Ax\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: la TL $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\x+y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Además, las columnas son las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\left(T(e_1)\quad T(e_2)\quad T(e_3)\right)$$

Asociación de matrices a transformaciones lineales

Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se puede asociar a T una matriz de la siguiente manera, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n)$$

$$T(x) = Ax$$

Donde $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{pmatrix}$ es una matriz mxn que se asocia a la transformación T y se denomina matriz canónica de T.

Matriz de una transformación lineal

La matriz de T en el par de bases B1 y B2, tales que:

$$\left[T(v_1)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \left[T(v_2)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \left[T(v_n)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.\ \textit{Se define}:$$

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \left[T(v_1)\right]_{B_2} & \cdots & \left[T(v_n)\right]_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $V = W$ y $B_1 = B_2$ se escribe $[T]_{B_1}$ en lugar de $[T]_{B_1}^{B_2}$

Teorema:

Sea $T \in L(V,W); B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de W. Si $A = (a_{ij})_{m\times n} = [T]_{B_1}^{B_2}$ es la matriz de T en las bases B1 y B2, entonces

$$\left[T(x)\right]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}[x]_{B_1}\ \forall x \in V$$

Proceso para el cálculo de $[T]_{B_1}^{B_2}$:

1) Sea A la matriz mxn que tiene como columnas, en el mismo orden $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ en la base B1 y sea B la matriz nxn que tiene como columnas a los vectores del mismo orden, de B2. Defina $(B|A)$.
2) Aplique el método Gauss-Jordan a $(B|A) \sim (I|C)$, donde $C = [T]_{B_1}^{B_2}$.

Ejemplo: considere la TL $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\3x-z\end{pmatrix}$

Sea $C_1=\{e_1,e_2,e_3\},C_2=\{e_1',e_2'\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Además $B_1=\left\{(1,1,2)^t,(-3,0,1)^t,(2,4,3)^t\right\}$ y $B_2=\left\{(4,1)^t,(3,1)^t\right\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Encuentre las matrices: $[T]_{C_1}^{C_2}$ y $[T]_{B_1}^{B_2}$

<u>Calculamos</u> $[T]_{C_1}^{C_2}$: $T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=e_1'+3e_2'\Rightarrow[T(e_1)]_{C_2}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$$T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1'+0e_2'\Rightarrow[T(e_2)]_{C_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(e_3)=T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0e_1'-1e_2'\Rightarrow[T(e_3)]_{C_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_1}^{C_2}=\left([T(e_1)]_{C_2}\quad[T(e_2)]_{C_2}\quad[T(e_3)]_{C_2}\right)=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&-1\end{pmatrix}$$

<u>Calculamos</u> $[T]_{B_1}^{B_2}$: $T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\quad con \quad T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\3x-z\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}4&3&2&-3&6\\1&1&1&-10&3\end{array}\right)\xrightarrow{f_1\leftrightarrow f_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&-10&3\\4&3&2&-3&6\end{array}\right)\xrightarrow{-4f_1+f_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&-10&3\\0&-1&-2&37&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-f_2]{f_2+f_1}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&-1&27&-3\\0&1&2&-37&6\end{array}\right)$$

$$[T]_{B_1}^{B_2}=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]_{B_2}\quad\left[T\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2}\quad\left[T\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right]_{B_2}\right)=\begin{pmatrix}-1&27&-3\\2&-37&6\end{pmatrix}$$

Ejemplo: usando la matriz $[T]_{B_1}^{B_2}$ de ejercicio anterior, calcule $T\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$

Se sabe que: $\left[T(x)\right]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}[x]_{B_1}$

$$\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 0\\1 & 0 & 4 & 5\\2 & 1 & 3 & 6\end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 5\\1 & -3 & 2 & 0\\2 & 1 & 3 & 6\end{array}\right) \xrightarrow[-2f_1+f_2]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 5\\0 & -3 & -2 & -5\\0 & 1 & -5 & -4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 5\\0 & 0 & -17 & -17\\0 & 1 & -5 & -4\end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{\frac{-1}{17}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 5\\0 & 1 & -5 & -4\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[5f_3+f_2]{-4f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Es decir, $[x]_{B_1} = \left[\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}\right]_{B_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\left[T(x)\right]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}[x]_{B_1} = \begin{pmatrix}-1 & 27 & -3\\2 & -37 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\-29\end{pmatrix}$$

Finalmente: $T\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix} = 23\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - 29\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

Ejemplo: considere la TL $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(2x+y,2y-z)$

1) Determinar $[T]_C^B$, B y C bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

$$T(1,0,0)=(2,0)$$

$$T(0,1,0)=(1,2)$$

$$T(0,0,1)=(0,-1)$$

$$\Rightarrow [T]_C^B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Determinar $[T]_E^D$, con $D=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, E=\{(1,1),(1,0)\}$.

$$T(1,1,1)=(3,1)$$

$$T(1,1,0)=(3,2)$$

$$T(1,0,0)=(2,0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [T]_E^D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices de Cambio de Base

Considérese la TL identidad de $\mathbb{R}^n, I(x)=x$, en el par de bases $B_1=\{u_1,\ldots,u_n\}, B_2=\{v_1,\ldots,v_n\}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$[x]_{B_2}=\left[I(x)\right]_{B_1}=[I]_{B_1}^{B_2}[x]_{B_1}$$

Es decir, $[I]_{B_1}^{B_2}$ cambia las coordenadas de la base B_1 a la base B_2.

Definición: Si B_1 y B_2 son dos bases de un mismo espacio V e I la transformación identidad de V, se llama matriz de cambio de base de B_1 a la base B_2 a la matriz $[I]_{B_1}^{B_2}$.

Procedimiento: con $B_1=\{u_1,\ldots,u_n\}, B_2=\{v_1,\ldots,v_n\}$, entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \cdots & v_n & u_1 & \cdots & u_n\end{array}\right)\xrightarrow{\cdots}\left(I_n \,\middle|\, [I]_{B_1}^{B_2}\right)$$

Ejemplo: considere las bases de $\mathbb{R}^3$, $B_1=\left\{(1,0,1)^t,(0,1,1)^t,(-1,0,1)^t\right\}$, $B_2=\left\{(0,-1,1)^t,(1,0,-1)^t,(1,0,1)^t\right\}$. Determine la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[-f_2]{f_2+f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1\leftrightarrow f_2]{f_1+f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}f_3]{-\frac{1}{2}f_3+f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [I]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Observación importante: la transformación identidad I de V cumple: $I\circ T=T\circ I=T$

Definición: dados dos espacios vectoriales V, W, y U y dos TL $S \in L(V,W)$ y $T \in L(W,U)$:

$$V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} U$$

Se define la función: $T \circ S : V \to U$, por $(T \circ S)(x) = T(S(x)) \quad \forall x \in V$.

Teorema: considere las TL como en le esquema

$$V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} U$$
$$B_1 \to B_2 \to B_3$$

Donde $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *base de* V, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W, $B_3 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ base de U

entonces: $[T \circ S]_{B_1}^{B_3} = [T]_{B_2}^{B_3} [S]_{B_1}^{B_2}$

Ejemplo: sean $B_1 = \{(1,1,2)^t, (-3,0,1)^t, (2,4,3)^t\}, B_2 = \{(4,1),(3,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente; además $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix}$ y $B_3 = \{(-1,1)^t, (4,-5)^t\}$, calcule $[T]_{B_1}^{B_3}$.

$$[T]_{B_1}^{B_3} = [I \circ T]_{B_1}^{B_3} = [I]_{B_2}^{B_3} [T]_{B_1}^{B_2}$$

$$[I]_{B_2}^{B_3} : \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{5f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -24 & -19 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -24 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [I]_{B_2}^{B_3} = \begin{pmatrix} -24 & -19 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_1}^{B_3} = [I]_{B_2}^{B_3} [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -24 & -19 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 55 & -42 \\ -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B_1}^{B_3} = \begin{pmatrix} -14 & 55 & -42 \\ -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

Observación importante: si $T:V\rightarrow W$ es una TL y B_1 como B_3 son bases de V y B_2 y B_4 son bases de W. entonces:

$$[T]_{B_3}^{B_4}=[I_W]_{B_2}^{B_4}[T]_{B_1}^{B_2}[I_V]_{B_3}^{B_1}$$

Pues se cumple: $V\xrightarrow{I_V}V\xrightarrow{T}W\xrightarrow{I_W}W;\quad T=I_W\circ T\circ I_V$

Observación importante: si $T:V\rightarrow W$ es una TL y B_1 como B_3 son bases de V y B_2 y B_4 son bases de W. entonces se cumplen las siguientes posibilidades:

(I) $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$

$$= [I]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_4}$$
$$= [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$
$$= [I]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

(II) $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_4}$

$$= [I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$$
$$= [I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$
$$= [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

(III) $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$

$$= [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$
$$= [I]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_4}[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$
$$= [I]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}$$

(IV) $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}$

$$= [I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$
$$= [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_4}[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$
$$= [I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$$

Definición: sea $T\in L(V,W)$:

a) El conjunto $Nuc(T)=\{v\in V\,/\,T(v)=0_W\}$ se llama núcleo de T.

b) El conjunto $\operatorname{Im}g(T)=\{T(x)\,/\,x\in V\}$ se llama imagen de V bajo T, o simplemente imagen de T.

Teorema: sea $T\in L(V,W)$. El núcleo $Nuc(T)$ y la imagen $\operatorname{Im}g(T)$ son subespacios de V y W respectivamente.

Ejemplo: sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, definidas por $T(x,y)=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calcular una base para el núcleo de T.

Es decir $T(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(2x-2y,-x+y,x-y)$

$(x,y)\in Nuc(T)\Rightarrow T(x,y)=0 \;\Rightarrow (2x-2y,-x+y,x-y)=0$

$$\Rightarrow 2x-2y=0\wedge -x+y=0\wedge x-y=0 \quad \Rightarrow x=y$$

$$(x,y)=(x,x)=x(1,1) \;\Rightarrow Nuc(T)=C\ell\{(1,1)\}$$

Ejemplo: sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ tal que $T(x,y,z)=(x+2y,0,\frac{1}{2}x+y,0)$. Determine el núcleo y la imagen de T.

Sea $x\in Nuc(T) \;\Rightarrow T(x,y,z)=(0,0,0,0)$

$$\Rightarrow x+2y=0\wedge \tfrac{1}{2}x+y=0 \;\Rightarrow x=-2y$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(-2y,y,z)=y(-2,1,0)+z(0,0,1)$$

$\Rightarrow Nuc(T)=C\ell\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$ o también $Nuc(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-2y\}$

$Sea\,(a,b,c,d)\in \operatorname{Im}g(T) \;\Rightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x,y,z)=(a,b,c,d) \quad \text{es decir}$$

$$(x+2y,0,\tfrac{1}{2}x+y,0)=(a,b,c,d)$$

$\Rightarrow x+2y=a\wedge \frac{1}{2}x+y=c\wedge b=d=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ \frac{1}{2} & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{2f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 2c \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & -a+2c \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -a+2c=0 \;\Rightarrow a=2c$

$$(a,b,c,d)=(2c,0,c,0)=c(2,0,1,0)$$

$$\operatorname{Im}g(T)=c\ell(2,0,1,0)$$

o también $\operatorname{Im}g(T)=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 / a=2c,\; b=c=0\}$

Definición: sea $T:E\to F$ una TL:

a) T es inyectiva si $\forall v_1, v_2 \in E$, $T(v_1)=T(v_2)\Leftrightarrow v_1=v_2$.

b) T es sobreyectiva $\forall w\in F$ existe $v\in E$ tal que $T(v)=w$

c) T es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Teorema: sea $T\in L(V,W)$. Se tiene que T es inyectiva sí y solamente sí $Nuc(T)=\{0\}$

Ejemplo: sea $T\in L\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3\right)$ definida por $T(x,y,z)=(x-y,-x+y+z,-y+z)$, verifique que T es sobreyectiva e inyectiva.

T es sobreyectiva si $T=(a,b,c)$ tiene solución $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

es decir $(x-y,-x+y+z,-y+z)=(a,b,c)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & -1 & 0 & -a-b+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-f_3]{-f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & a+b-c \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a+b-c \\ 0 & 1 & 0 & a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{array}\right)$$

es decir, $\forall$ $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ el sistema tiene solución $\Rightarrow$ T es sobreyectiva

T es inyectiva, por teorema anterior, concluimos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow Nuc(T)=\{0\}\Rightarrow T$ es inyectiva

Teorema: Sea $T \in L(V,W)$

a) Si $V = c\ell\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ entonces $\operatorname{Im} g(T) = c\ell\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$.

b) Si T es inyectiva y $v_1, \ldots, v_n$ son li entonces $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ son li. En particular $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im} g(T))$.

Ejemplo: Sea $T(x,y,z) = (x+z, x+y+2z, y+z, x+z)$ obtenga una base para $Nuc(T), \operatorname{Im} g(T)$.

Base $\operatorname{Im} g(T)$: consideremos la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ $\Rightarrow \operatorname{Im} g(T) = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$

$$T(1,0,0) = (1,1,0,1), T(0,1,0) = (0,1,1,0), T(0,0,1) = (1,2,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} g(T) = c\ell\{(1,0,-1,1), (0,1,1,0)\}$$

Base $Nuc(T)$: $(x,y,z) \in Nuc(T) \Rightarrow T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$x+z=0 \wedge x+y+2z=0 \wedge y+z=0$$

$$\Rightarrow x=-z \wedge y=-z$$

$$Nuc(T) = (-z,-z,z) \Rightarrow Nuc(T) = c\ell\{(-1,-1,1)\}$$

Teorema: Sea $T \in L(V,W)$ y $\dim(V) = \dim(W) = n$. Entonces T es inyectiva $\Leftrightarrow$ T es sobreyectiva.

Ejemplo: sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, definida por $T(x,y,z) = (x-y, -x+y+z, -y+z)$.

para esta TL $\dim(V) = \dim(W) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow Nuc(T) = \{0\} \Rightarrow T \text{ es inyectiva } \Rightarrow T \text{ es sobreyectiva}$$

Teorema: Sea $T \in L(V,W)$ y V de dimensión finita, entonces

$$\dim(V) = \dim\left(Nuc(T)\right) + \dim\left(\operatorname{Im} g(T)\right)$$

Transformaciones invertibles

Sea $T \in L(V,W)$. T se llama invertible si existe una TL $T^{-1}: W \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ y $T^{-1} \circ T = I_V$ donde I_V e I_W son las identidades de V y W respectivamente.

Teorema:

a) Sea $T \in L(V,W)$. T es invertible $\Leftrightarrow$ T es biyectiva.

b) Sea $T \in L(V,W)$. Entonces T es invertible $\Leftrightarrow [T]_{B_1}^{B_2}$ lo es y si este es el caso, entonces: $\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$.

Ejemplo: Sea $T \in L\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Compruebe que T es invertible, calcule $T^{-1}(x,y,z)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-5f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}f_3]{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\left[T^{-1}\right]_C = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left[T^{-1}(x)\right]_C = A^{-1}[x]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}[x]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) = \tfrac{1}{3}\left(x-2y+4z, x+y-2z, -x-y+5z\right)$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.