Tema II: Sistemas de ecuaciones lineales

Forma matricial de un sistema:

Consideremos el siguiente mxn de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = d_n \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D}$$

A: se llama matriz de coeficientes

X: vector incógnita

D: se llama vector constante

Matriz aumentada: la matriz aumentada del sistema anterior es la matriz de tamaño mx(n+1) definida por

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_n \end{array}\right)$$

$$\left(A|D\right)$$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{array} \Rightarrow \left(A|D\right): \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 6 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

af_i : multiplicar la fila i por una constante no nula.

$af_i + f_j$: multiplicar la fila i por un número real "a" y sumarla a la fila j.

$f_i \leftrightarrow f_j$: intercambiar las filas i y j.

Ejemplo: sea la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Definición: se dice que una matriz B es equivalente por filas a una matriz A, si B se obtiene de A mediante una secuencia finita de operaciones elementales y se escribe $B \sim A$.

Matriz escalonada: se dice que una matriz es escalonada si es nula o si satisface las condiciones siguientes

a) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es un 1.
b) El primer 1 de la segunda fila y sucesivas está a la derecha del primer 1 de la fila anterior.
c) Si hay filas nulas, estas aparecen debajo de las filas no nulas.

$$escalonadas: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$no\ escalonadas: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: determinar una matriz escalonada equivalente por filas a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{3}f_2]{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reducción de Gauss-Jordan

Definición: una matriz A, mxn es escalonada reducida si es escalonada y además todo elemento en una columna, arriba del primer 1 de cualquier fila, es un 0.

Ejemplo: determinar la matriz escalón reducida equivalente por filas a

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & 8 & 10 & -3 \\ 6 & -11 & 18 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 8 & 10 & -3 \\ 6 & -11 & 18 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-4f_1+f_3 \\ -6f_1+f_4}]{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -10 & 9 \\ 0 & 7 & -12 & -10 & 9 \\ 0 & 7 & -12 & -20 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_2+f_4]{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{10}f_4]{-f_4+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_4]{-5f_4+f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -12 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{7} & 0 & \frac{-1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{7} & 0 & \frac{-1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \sim R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{7} & 0 & \frac{-1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Caracterización de los sistemas por su solución

Resolver el sistema
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=-2\\ x+3y-2z&=12\\ -3x+y+3z&=-3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -2 & 12\\ -3 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 12\\ 2 & -1 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 12\\ 0 & -7 & 5 & -26\\ 0 & 10 & -3 & 33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 12\\ 0 & -7 & 5 & -26\\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_3+f_2]{-f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 9 & -12\\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 9 & -12\\ 0 & 0 & 29 & -29 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{29}f_3]{-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -9 & 12\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[9f_3+f_2]{4f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow x=1, y=3, z=-1$$

El sistema es consistente, tiene solución única: $S:\{(1,3,-1)\}$

Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ -2x+y-z&=-2\\ -4x+7y+3z&=6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ -2 & 1 & -1 & -2\\ -4 & 7 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[4f_1+f_3]{2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 5 & 5 & 10\\ 0 & 15 & 15 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}f_2]{-3f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x+z=2 \quad y+z=2$

$\Rightarrow x=2-z \quad y=2-z$, tómese $z=t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x=2-t \quad y=2-t$

El sistema tiene infinitas soluciones y se expresa de la siguiente manera

$$S:\{(2-t,2-t,t)/t\in\mathbb{R}\}$$

Resolver el siguiente sistema $\begin{aligned} x-2y+z&=2\\ 3x+y-2z&=4\\ 5x-3y&=7 \end{aligned}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -2 & 4\\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-5f_1+f_3]{-3f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -5 & -2\\ 0 & 7 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}f_2]{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow x-\tfrac{3}{7}z=\tfrac{10}{7} \quad y-\tfrac{5}{7}z=-\tfrac{2}{7} \quad 0z=-1\otimes$$

El sistema es inconsistente, es decir, no tiene solución: $S:\varnothing$

Definición: el rango de una matriz A, Rang(A) es el número de filas no nulas de la matriz R equivalente a A.

Teorema: dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax=D$, de m ecuaciones y n incógnitas con $Rang(A)=r$ y $Rang(A|D)=s$. Se tiene:

1) Si $r=s=n$ entonces el sistema tiene solución única. Es decir, si el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz aumentada son iguales al número de variables del sistema.
2) Si $r=s<n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones y el número de parámetros en la solución es $n-r$.
3) Si $s>r$ entonces el sistema no tiene solución. Es decir, si el rango de la matriz aumentada es mayor que el rango que el rango de la matriz de coeficientes.

Ejercicios: resolver los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} -2x+6y-4z&=-28\\ -x+3y-z&=-8\\ 5x-15y+10z&=70\\ x-3y&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x+9y-3z&=0\\ y+z&=1\\ -2x-5y+4z&=4\\ -2x-6y+3z&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x+y+5z&=-36\\ -2y+4z&=-30\\ x-3y&=-1\\ -3x+9y&=3 \end{aligned}$$

Sistemas homogéneos:

Un sistema $Ax = b$ es homogéneo si $b = 0$, entonces $Ax = 0$ y $Rang(A) = Rang(A|0)$.

Teorema:

Todo sistema homogéneo $Ax = 0$, mxn con $Rang(A) = r$, es consistente.

a) $X = 0_n$, el vector de n ceros, es solución del sistema.
b) Si $Rang(A) = n$ el sistema tiene solución única; el vector nulo $X = 0_n$.
c) Si $Rang(A) < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de $n - r$ parámetros.

Teorema:

Si A es una matriz nxn, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $Rang(A) = n$.
2) A es equivalente a la identidad $(A \sim I_n)$.
3) $Ax = 0$ tiene solución única.
4) $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo: de sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.