Funciones

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Octubre 2020

Contents

Puntos de intersección

Definición

Dada una función $y = f(x)$ con un dominio bien definido se define

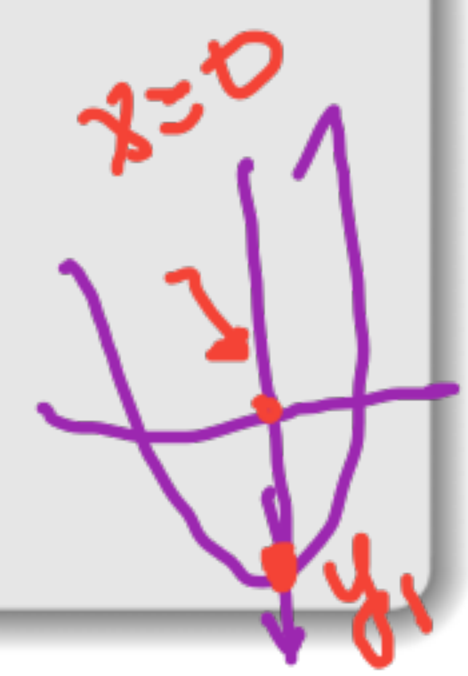
- *El punto (puntos) donde $f(x)$ interseca al eje x en aquellos casos en donde*

$$\boxed{f(x) = 0}$$ evaluar.

Nota: *una función puede poseer uno, ninguno o muchos puntos de intersección con el eje x.* $\cap x: (x_1, 0), (x_2, 0)$.

- *El punto (puntos) donde $f(x)$ interseca al eje y en aquellos casos en donde*

$$y = f(0)$$ evaluar



Nota: *una función puede tener uno o ningún punto de intersección con el eje y* $\cap y: (0, y)$

Puntos de intersección

Ejemplo 16

Determime los puntos de intersección con los ejes, de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$
3. $f(x) = \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)\sqrt[3]{\dfrac{2x-7}{x^2+1}}$

① $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

i) $\cap y: f(0) = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4, \cap y: (0,4)$

ii) $\cap x: f(x) = 0, \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $(x^2-1)(x^2-4) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$

$x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$

$\cap x : (1,0), (-1,0), (2,0), (-2,0)$

ii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

$\cap y : f(0) = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 0 - 2}{0+1}} = \sqrt{\dfrac{-2}{1}} = \nexists \rightarrow \cap y = \phi$

$\cap x : f(x) = 0$, $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}} = 0$, $\dfrac{3x-2}{x+1} = 0$

$$\frac{3x-2}{x+1} = 0, \quad 3x-2=0, \quad x = 2/3$$

$x \neq -1$ restric.

$\cap x : (2/3, 0)$

i ii) $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2x-7}{x^2+1}}$

$\cap y: f(0) = 6 \cdot \sqrt[3]{-7}, \quad (0, -6\sqrt[3]{7})$

$\cap x: f(x) = 0, \quad (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2x-7}{x^2+1}}$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \vee \quad \dfrac{2x-7}{x^2+1} = 0$

Signo de una función real

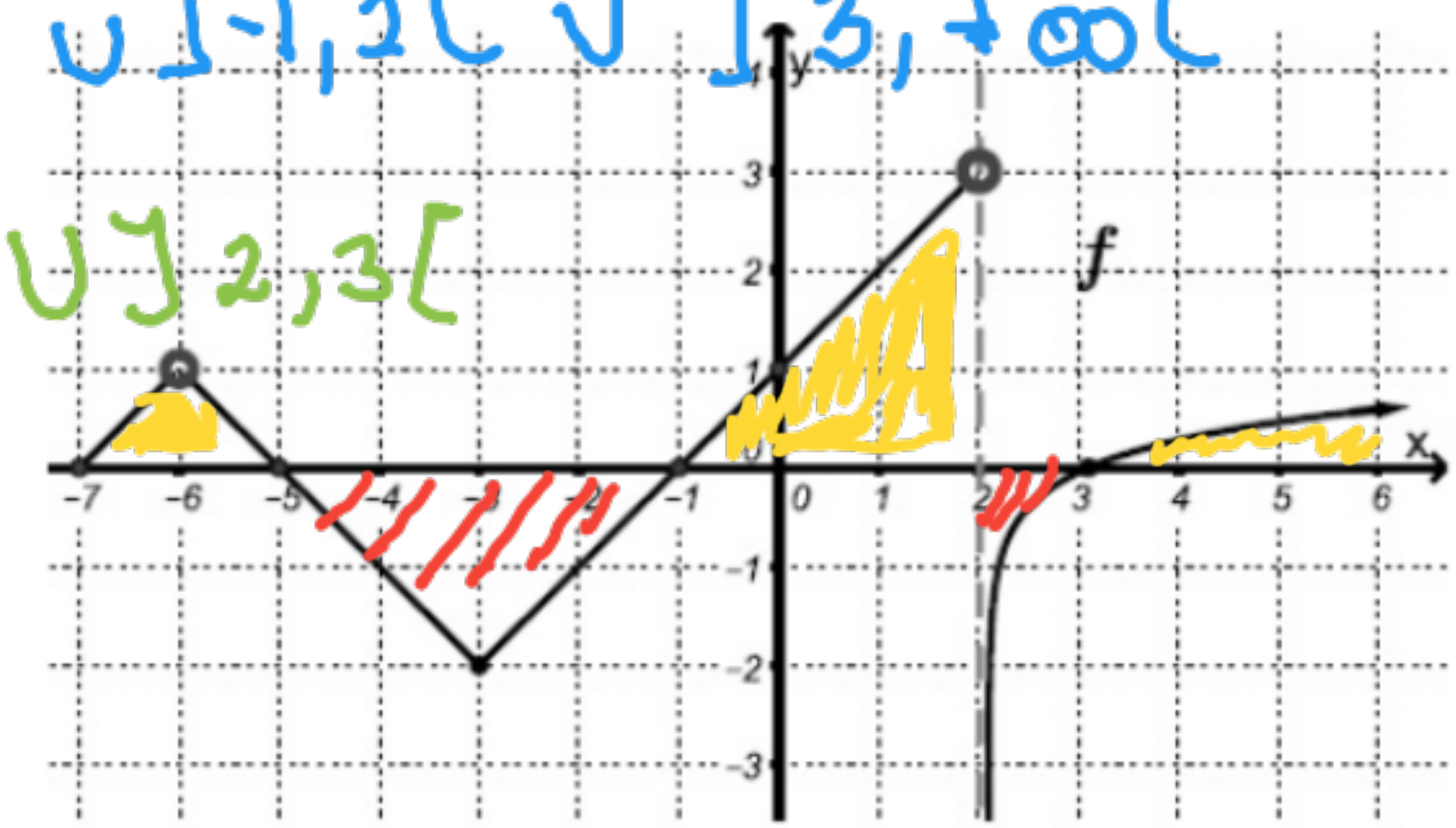
Definición

Dada una función real $f : D_f \to \mathbb{R}$, *si* $]a, b[\subseteq D_f$, *tal que* $\forall x \in]a, b[$ *si:*

- $f(x) > 0$ *se dice que* f *es una* *función positiva* *en* $]a, b[$.
- $f(x) < 0$ *se dice que* f *es una* *función negativa* *en* $]a, b[$.

$f_{(+)}:]-7,-5[\cup]-1,2[\cup]3,+\infty[$

$f_{(-)}:]-5,-1[\cup]2,3[$



Signo de una función real

Ejemplo 17

Determinar los valores donde la función es positiva o negativa

1. $f(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x+1}$
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2(3x+1)}}{2x-6x^2}$
3. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 13x^2 - 5x - 10$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x+3}}{x^2-2x-3}$

$-x+8$

$2x+2-3x+6$

① $f(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-3(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$$f(x) = \frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}$$

	$-\infty$	-1	2	8	$+\infty$
$-x+8$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$*$	$+$	$-$	$+$	$-$	

$f(x) > 0 : \left]-\infty, -1\right[\cup \left]2, 8\right[$

$f(x) < 0 : \left]-1, 2\right[\cup \left]8, +\infty\right[$

② $$g(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(3x+1)}}{2x-6x^2}$$

$2x(1-3x)$

	$-\infty$	$-1/3$	0	$1/3$	2	$+\infty$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$3x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$1-3x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$*$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	

$f(x) > 0 : \left]-\infty, -1/3\right[\cup \left]0, 1/3\right[$

$f(x) < 0 : \left]-1/3, 0\right[\cup \left]1/3, +\infty\right[$

Paridad de una función

Definición

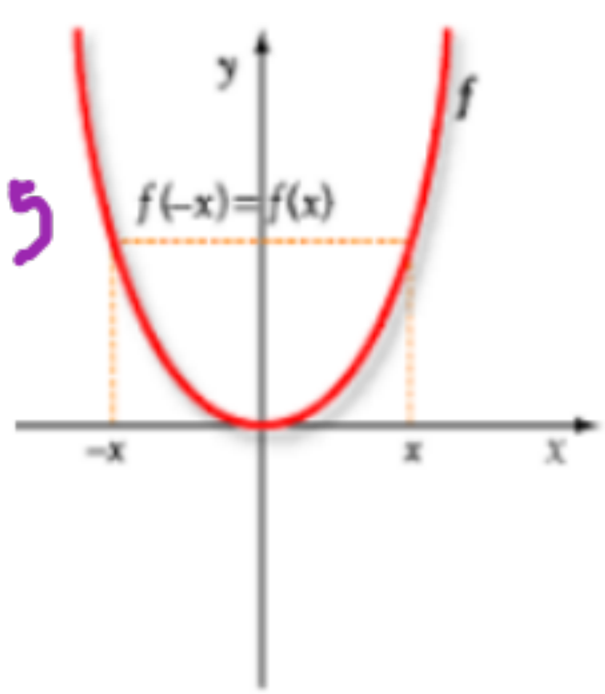
Sea f una función real de variable real, se dice que f es:

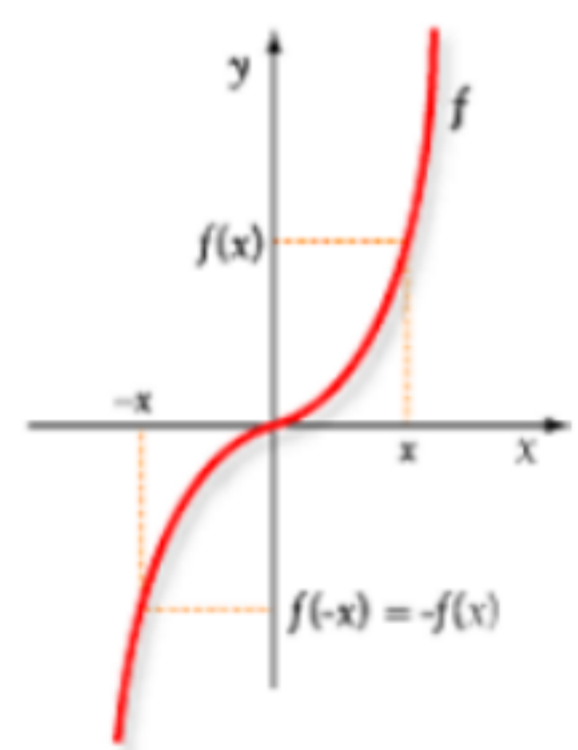
- *Una **función par** si satisface que $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio. Un ejemplo clásico es la función coseno.*
- *Una **función impar** si satisface que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio. Un ejemplo clásico es la función seno.*

$f(x) = x^2 + 1$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$





$f(x) = x^3$

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$-f(2)$

Paridad de una función real

Ejemplo 18

1. Verifique que la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x + 4x^5}$ es par.
2. Verifique que $g(x) = 2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{1-x}$ es una función impar.
3. Verifique que $g(x) = x^2 - \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{1-x}$ es una función par.
   Ejercicio estudiante.
4. Demostrar que el producto de dos funciones impares es una función par.
5. Demostrar que el producto de una función par y una impar es impar. **Ejercicio estudiante.**

① $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x + 4x^5}$ es par

H.q.d $f(-x) = f(x)$

tenemos $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x) + 4(-x)^5}$

$$= \frac{-x^3 + 2x}{-x - 4x^5} = \frac{-(x^3 - 2x)}{-(x + 4x^5)} = \frac{x^3 - 2x}{x + 4x^5}$$

$$= f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ es impar

(2) $g(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}$, es impar

H.q.d $g(-x) = -g(x)$

tenemos $g(-x) = 2(-x) + \frac{1}{(-x)+1} - \frac{1}{1-(-x)}$

$$= -2x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

$$= -2x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}$$

$$= -g(x) \;// \Rightarrow g(x) \text{ es impar}$$

4. Demostrar que el producto de 2 funciones impares da como resultado una función par

Sean f y g funciones impares

$f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

H q d. $(f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$

$\Rightarrow f(-x) \cdot g(-x)$, al ser impares

$\Rightarrow -f(x) \cdot -g(x)$

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x)$ //.

$P \Rightarrow Q$

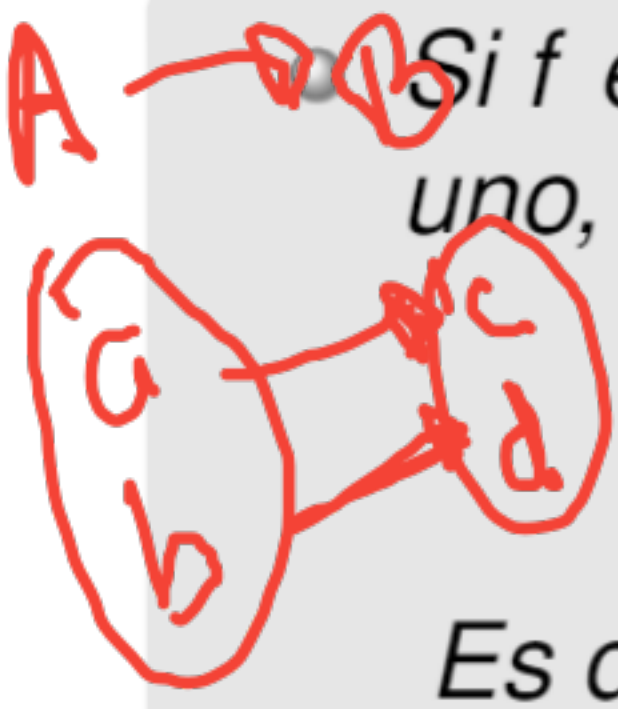
$\neg Q \Rightarrow \neg P$

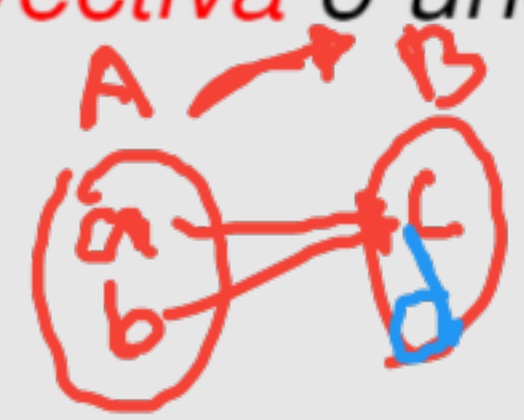
Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición

sí

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$





NO

- *Si f es una función de A en B, se dice que f es inyectiva o uno a uno, si y solo si para todo a y b en A se cumple*

$$\boxed{a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)}$$

  Es decir, elementos diferentes de A poseen imágenes diferentes en B.

- *Si f es una función de A en B, se dice que f es sobreyectiva si y solo si $f(A) = B$. Es decir, f es sobreyectiva si el ámbito y el codominio de f son iguales.*

- *Si f es una función de A en B, se dice que f es biyectiva si y solo si es **inyectiva** y **sobreyectiva**.*

$|a-b| = |b-a|$

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 19

$\to \{0, 1, 2, 3\}$

Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y considere la función $f : A \times A \to \mathbb{Z}$ definida por $f((a, b)) = |a - b|$.

$, \; f((1,2)) = |1-2| = 1$

1. Calcule el rango de f.
2. Determine si f es sobreyectiva.
3. Calcule la imagen del conjunto $\{(1, 2), (2, -1), (2, 1)\}$.
4. Calcule la imagen inversa del conjunto $\{2\}$.
5. Determine si f es inyectiva.

1. $f((1,1)) = |1-1| = 0$, $f((1,2)) \to 1$

$f((0,2)) = |0-2| = 2$, $f((-1,2)) = |-1-2| = 3$

$A_f = \{0, 1, 2, 3\}$ // 2. No es sobrey

$A_f \neq \mathbb{Z}$

③ $f(\{(1,2),(2,-1),(2,1)\}) = \{1,3\}$

$f((1,2)) = |1-2| = 1$, $f((2,-1)) = |2-(-1)| = 3$

$f((2,1)) = |2-1| = 1$

④ $f^{-1}(\{2\}) = \{(2,0),(0,2),(-1,1),(1,-1)\}$

⑤ f no es inyect. , $f((2,0)) = f((0,2))$

$(2,0) \neq (0,2)$

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 20

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio es $f(x) = 5x - 4$. Pruebe que f es biyectiva.

i) Inyect $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$5a - \cancel{4} = 5b - \cancel{4}$

$\Rightarrow \cancel{5}a = \cancel{5}b$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow f$ es inyect

ii) Sobrey. $a \in \mathbb{R}$ t.q. $b = f(a)$

$b = 5a + 4$

$\Rightarrow b = 5a - 4$

$\Rightarrow b + 4 = 5a$

$\Rightarrow a = \dfrac{b+4}{5}$

Es decir, siempre existe algún "a", para algún elemento "b".

$\left(\dfrac{b+4}{5}, b\right)$

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Ejemplo 21

Considere la función $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x - 4}$. Pruebe que f es biyectiva.