Resolución de relaciones de recurrencia

Luis Eduardo Amaya
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Noviembre 2019

Una relación de recurrencia **homogénea lineal con coeficientes constantes de orden** k es aquella de la forma

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \cdots + \beta_k a_{n-k}$$

sujeta a k condiciones iniciales $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \cdots, a_{k-1} = c_{k-1}$, esto $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
A la ecuación

$$t^k - \beta_1 t^{k-1} - \beta_2 t^{k-2} - \cdots - \beta_k = 0$$

se le denomina **ecuación característica asociada a la relación de recurrencia**.

Teorema

Teorema

Sea la relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2}$$

con $a_0 = c_0, a_1 = c_1$

- *Si la ecuación característica* $t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0$ ***tiene dos raíces distintas*** r_1 ***y*** r_2, *la solución de la relación de recurrencia viene dada por*

  $$a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n$$

  esto $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, *siendo* b_1 *y* b_2 *dos constantes obtenidas de las condiciones inciales.*

Teorema

- *Si la ecuación $t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0$ **tiene una raíz única** r, la solución de la relación de recurrencia viene dada por*

$$a_n = b_1 r^n + b_2 n r^n$$

esto $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, siendo b_1 y b_2 dos constantes obtenidas de las condiciones inciales.

Tomar en cuenta...

Nota

- *El teorema es válido si no se comienza en $n = 0$.*
- *El teorema también aplica si tenemos una relación de recurrencia homogénea lineal de orden 3, la cual tendría como ecuaciones*
  - *En caso de tener tres soluciones r_1, r_2 y r_3 distintas entre sí*

    $$a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n + b_3 r_3^n$$

  - *En caso de tener r_1 repetida dos veces, y existir un r_2, donde $r_2 \neq r_1$*

    $$a_n = b_1 r_1^n + b_2 n r_1^n + b_3 r_2^n$$

- *El estudiante puede deducir o investigar que pasa si r_1 se repite 3 veces.*

Ejemplos

Ejemplo

1. *Determinar la fórmula explícita para cada una de las relaciones de recurrencia dadas*
   1. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, *con* $a_1 = 3$, $a_2 = 21$.
   2. $b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2}$, *con* $b_1 = 0$, $b_2 = -9$.
   3. $3a_n = 7a_{n-1} - 2a_{n-2}$, *con* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
   4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, *con* $a_1 = a_2 = 0$.
   5. $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, *con* $a_0 = -1$, $a_1 = 10$, $a_2 = -2$.
   6. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$, *con* $a_0 = 6$, $a_1 = 1$, $a_2 = 12$.
2. *Sea la sucesión* $\{3, 4, -16, -192, -1280, -7168, -36864, \cdots\}$, *con el comando FindLinearRecurrence de Mathematica, verifique que la relación de recurrencia asociada a dicha sucesión es,* $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, *con* $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, *luego determine la fórmula explícita.*
3. *Determinar la fórmula por recurrencia para la relación* b_n *definida explícitamente por* $b_n = 2 \cdot 3^n + 2 + n$.