Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Primer Examen II Ciclo 2020

Viernes 18 de Setiembre

Tiempo Máximo: 240 Minutos **Puntaje: 42 Puntos**

Soluciones a los ejercicios

---

1. Dados los siguientes conjuntos de números enteros, donde el conjunto U, denota el universo para este ejercicio

$$U = \{-7, -6, \cdots, 0, \cdots, 14, 15\}$$
$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, 8\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z},\ -6 \leq x \leq 10,\ talque\ xmod2 \neq 0\}$$
$$C = \{-3, -2, 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 12\}$$

Determine el conjunto resultante de:

a) **[6 Puntos]** $P\left((B \cap C) - A\right)$
$B \cap C = \{-3, 5, 7\}$ y $(B \cap C) - A = \{\}$
$P\left((B \cap C) - A\right) = \{\emptyset\}$

b) **[6 Puntos]** $P\left((B \cap A) - C\right)$
$(B \cap A) = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$
$(B \cap A) - C = \{-1, 1, 3\}$
$P\left((B \cap A) - C\right) = \{\{-1, 1, 3\}, \emptyset, \{-1, 1\}, \{-1, 3\}, \{-1\}, \{1\}, \{3\}\}$

c) **[6 Puntos]** $(B \cap C) \times (B \cap A - C)$
$(B \cap C) = \{-3, 5, 7\}$
$(B \cap A) = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$
$(B \cap C) - C = \{-1, 1, 3\}$
$(B \cap C)X(B \cap A - C) = \{-3, 5, 7\}X\{-1, 1, 3\} =$
$\{(-3, -1), (-3, 1), (-3, 3), (5, -1), (5, -1), (5, 3), (7, , 1), (7, 3)\}$

d) **[6 Puntos]** $\left(\overline{C} \cap \overline{A}\right) \triangle \overline{B}$

$\overline{C} = \{-7, -6, -5, -4, -1, 1, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 15\}$
$\overline{A} = \{-7, -6, -5, -4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$\overline{B} = \{-7, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$\overline{C} \cap \overline{A} = \{-7, -6, -5, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} - \{-7, -6, -4, 10, 13, 14, 15\}$
$= \{-5, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12\}$

e) **[6 Puntos]** $\overline{(C - A) \cup \overline{B}}$

$C - A = \{11, 12\}$
$(C - A) - \overline{B} = \{-7, -6, -5, -4, -2, 0, 2, , 4, 6, 8, 10, , 12, 12, 13, 14, 15\}$

f) **[6 Puntos]** $\overline{(B \cup C)} - \overline{(B \cup A)}$

$B \cup C = \{-5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$
$\overline{B \cup C} = \{-5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$
$B \cup A = \{-5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\overline{B \cup A} = \{-7, -6, -4, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$\overline{(B \cup C)} - \overline{(B \cup A)} = \{\}$

g) **[6 Puntos]** $\overline{C \cup A} \times \overline{B \cap A}$

$A \cup A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$
$\overline{C \cup A} = \{-7, -6, -5, -4, 9, 10, 13, 14, 15\}$
$B \cap A = \{-3, -1, 3, 5, 7\}$
$\overline{B \cap A} = \{-7, -6, -5, -4, -1, 1, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 15\}$
Se deja planteado debido a que son 153 pares ordenados.

h) **[6 Puntos]** $\overline{C} \triangle \overline{A - B}$

$A - B = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$
$\overline{A - B} = \{-7, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, , 14, 15\}$
$\overline{C} = \{-7, -6, -5, -4, -1, 1, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 15\}$
$\overline{C} \triangle \overline{A - B} =$
$\{-7, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, , 14, 15\} - \{-7, -6, -5, -4, -1, 1, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 15\}$
$= \{-3, 5, 6, 7, 11, 12\}$

2. Para cada par de números a, b encuentre enteros s y t tales que:

$$mcd(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

a) **[5 Puntos]** $a = 2091$, $b = 4807$

480 mod 291 = 625
① $625 = 4807 - 2 \cdot 2091$, ahora 2091 mod 625 = 216
② $216 = 2091 - 3 \cdot 625$, ahora 625 mod 216 = 193
③ $193 = 635 - 2 \cdot 216$, ahora 216 mod 193 = 23
④ $23 = 216 - 1 \cdot 193$, ahora 193 mod 23 = 9

5 $9 = 193 - 8 \cdot 23$, ahora 23 mod 9 = 5
6 $5 = 232 - 2 \cdot 9$, ahora 9 mod 5 = 4
7 $4 = 9 - 1 \cdot 5$, ahora 5 mod 4 = 1
8 $1 = 5 - 1 \cdot 4$, ahora 4 mod 1 = 0

7 en 8 $1 = 5 - 1 \cdot (9 - 1 \cdot 5)$, 9 $1 = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 9$
6 en 9 $1 = 2(23 - 2 \cdot 9) - 1 \cdot 9$, 10 $1 \cdot 23 - 5 \cdot 9$
5 en 10 $1 = 2 \cdot 23 - 5(193 - 8 \cdot 23)$, 11 $1 = 42 \cdot 23 - 5 \cdot 9$
4 en 11 $1 = 42(216 - 1 \cdot 193) - 5 \cdot 193$, 12 $1 = 42 \cdot 216 - 47 \cdot 193$
3 en 12 $1 = 42 \cdot 2016 - 47(625 - 2 \cdot 216)$, 13 $1 = 136 \cdot 216 - 47 \cdot 625$
1 en 14 $1 = 136 \cdot 2091 - 455(4807 - 2 \cdot 2091)$ $1 = 1046 \cdot 2091 - 455 \cdot 4807$
$\boxed{\text{s=1046, t=-455}}$

b) **[5 Puntos]** $a = 2475$, $b = 32670$
32670 mod 2475= 495
$495 = 32670 - 15 \cdot 2475$, ahora 2475 mod 495 = 0
m.c.d(2475, 322670) = 495

$495 = 32670 - 15 \cdot 2475$
$\boxed{\text{s=-15, t=1}}$

c) **[5 Puntos]** $a = 67942$, $b = 4209$
6795 mod 4209 = 598
1 $598 = 6795 - 16 \cdot 4209$, ahora 4209 mod 598 =23
2 $23 = 4209 - 7 \cdot 598$, ahora 598 mod 23 = 0, m.c.d(67942,4209)=23

1 en 2 $23 = 4209 - 7 \cdot 598$
$23 = 4209 - 7(67942 - 16 \cdot 4209)$
$23 = 4209 - 7 \cdot 67942 + 112 \cdot 420$
$23 = -7 \cdot 67942 + 113 \cdot 4209$
$\boxed{\text{s=-7, t=113}}$

d) **[5 Puntos]** $a = 490256$, $b = 337$
490256 mos 337 = 258
1 $258 = 490256 - 4454 \cdot 337$, ahora 337 mod 258 = 79
2 $79 = 337 - 1 \cdot 258$, ahora 258 mod 79 = 21
3 $21 = 258 - 3 \cdot 79$, ahora 79 mod 21 =16
4 $16 = 79 - 3 \cdot 21$, ahora 21 mod 16 = 5
5 $5 = 21 - 1 \cdot 16$, ahora 16 mod 5 = 1
6 $1 = 16 - 3 \cdot 5$, ahora 5 mod 1 = 0, m.c.d(490256,337) = 1

5 en 6 $1 = 16 - 3(21 - 1 \cdot 16)$, 7 $1 = 16 - 3 \cdot 21 - 3 \cdot 21$
4 en 7 $4(79 - 3 \cdot 21) - 3 \cdot 21$, 8 $1 = 4 \cdot 79 - 12 \cdot 21 - 3 \cdot 21$

③ en ⑧ $1 = 4 \cdot 79 - 15(258 - 3 \cdot 79)$, ⑨ $1 = 4 \cdot 79 - 15 \cdot 258 + 45 \cdot 79$
② en ⑨ $1 = 49(33 - 1 \cdot 258) - 15 \cdot 338$, ⑩ $1 = 49 \cdot 337 - 49 \cdot 258 - 15 \cdot 258$
① en ⑩ $49 \cdot 337 - 64(490256 - 1454 \cdot 337)$, $1 = 49 \cdot 337 - 64 \cdot 490256 - 93056 \cdot 337$
$1 = 93105 \cdot 337 - 64 \cdot 490256$
$\boxed{\text{s=-64, t=93105}}$

e) **[5 Puntos]** $a = 315$, $b = 825$
825 mod 315 = 195
① $195 = 825 - 2 \cdot 315$, ahora 315 mod 195 = 120
② $120 = 1 \cdot 315 - 1 \cdot 195$, ahora 195 mod 120 = 75
③ $75 = 1 \cdot 195 - 1 \cdot 120$, ahora 120 mod 75 = 45
④ $45 = 1 \cdot 120 - 1 \cdot 75$, ahora 75 mod 45 = 30
⑤ $30 = 1 \cdot 75 - 1 \cdot 45$, ahora 45 mod 30 = 15
⑥ $15 = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 30$, ahora 30 mod 15 = 0, m.c.d(315,825) =1

⑤ en ⑥ $15 = 1 \cdot 45 - 1(1 \cdot 75 - 1 \cdot 45)$, ⑦ $15 = 2 \cdot 45 - 1 \cdot 75$
④ en ⑦ $15 = 2(1 \cdot 120 - 1 \cdot 75)$, ⑧ $15 = 2 \cdot 120 - 3 \cdot 75$
③ en ⑧ $15 = 2 \cdot 120 - 3(1 \cdot 195 - 1 \cdot 120)$, ⑨ $15 = 5 \cdot 120 - 3 \cdot 145$
② en ⑨ $15 = 5(1 \cdot 315 - 1 \cdot 1 \cdot 195) - 3 \cdot 195$, ⑩ $15 = 5 \cdot 315 - 2 \cdot 195$
① en ⑩ $15 = 5 \cdot 315 - 8(825 - 2 \cdot 315)$, $15 = 21 \cdot 315 - 8 \cdot 225$
$\boxed{\text{s=21, t=-8}}$

f) **[5 Puntos]** $a = 331$, $b = 993$
993 mod 331 = 0, m.c.d(331,993) = 331
$331 = 0 \cdot 995 + 1 \cdot 331$
$\boxed{\text{s=-1, t=0}}$

g) **[5 Puntos]** $a = 396$, $b = 480$
480 mod 396 = 84
① $84 = 480 - 1 \cdot 396$, ahora 396 mod 84 = 60
② $60 = 396 - 4 \cdot 84$, ahora 84 mod 60 = 24
③ $24 = 84 - 1 \cdot 60$, ahora 60 mod 24 = 12
④ $12 = 60 - 2 \cdot 24$, ahora 24 mod 12 = 0, m.c.d(396,480) = 12

③ en ④ $12 = 60 - 2(84 - 1 \cdot 60)$, ⑤ $12 = 3 \cdot 60 - 2 \cdot 84$
② en ⑤ $12(396 + 14 \cdot 84)$, ⑥ $12 = 3 \cdot 39 - 14 \cdot 84$
① en ⑥ $12 = 3 \cdot 396 - 14(480 - 1 \cdot 396)$, $12 = 17 \cdot 396 - 14 \cdot 498$
$\boxed{\text{s=17, t=-498}}$

h) **[5 Puntos]** $a = 12378$, $b = 3054$
12378 mod 3054 = 162
① $162 = 12378 - 9 \cdot 3054$, ahora 3054 mod 162 = 138
② $138 = 3054 - 18 \cdot 162$, ahora 162 mod 138 = 24

③ $24 = 162 - 1 \cdot 138 = 24$, ahora $138 \bmod 24 = 18$
④ $18 = 1 \cdot 138 - 5 \cdot 24$, ahora $24 \bmod 18 = 6$
⑤ $6 = 1 \cdot 24 - 1 \cdot 18$, ahora $18 \bmod 6 = 0$, m.c.d(12378,3054) $= 6$

④ en ⑤ $6 = 24 - 1(1 \cdot 138 - 5 \cdot 24)$, ⑥ $6 = 6 \cdot 24 - 1 \cdot 138$
③ en ⑥ $6 = 6(162 - 1 \cdot 138) - 1 \cdot 138$, ⑦ $6 = 6 \cdot 162 - 7 \cdot 138$
② en ⑦ $6 = 6 \cdot 162 - 7(3054 - 18 \cdot 162)$, ahora ⑧ $6 = 132 \cdot 162 - 7 \cdot 3054$
① en ⑧ $132(12378 - 4 \cdot 3054) - 7 \cdot 3054$, $6 = 132 \cdot 12378 - 535 \cdot 3054$
$\boxed{\text{s=132, t=-535}}$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ (c_{ij})_{3\times 3} = \begin{cases} 1 & si \quad i \geq j \\ 0 & si \quad i < j \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones

a) **[6 Puntos]** $(A \vee B)^t \wedge (A^t \odot C)$

$$(A \vee B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ (A \vee B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t \odot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \vee B)^t \wedge (A^t \odot C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[6 Puntos]** $(A \wedge B)^t \odot (B \vee C)^t$

$$(A \wedge B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ (A \wedge B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B \odot C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ (B \odot C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \wedge B)^t \odot (B \vee C)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) **[6 Puntos]** $\left[A \wedge (B \odot C)^t\right]^t$

$$B \odot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ (B \odot C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge (B \odot C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[A \wedge (B \odot C)^t\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) **[6 Puntos]** $[(A \vee I_3) \odot C] \wedge B^t$

$$A \vee I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \vee I_3) \odot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[(A \vee I_3) \odot C] \wedge B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) **[6 Puntos]** $(B \odot C) \odot (A^t \wedge I_3)$

$$(B \odot C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ A^t \wedge I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B \odot C) \odot (A^t \wedge I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) **[6 Puntos]** $(C \wedge A^t)^t \odot (B \wedge A)$

$$C \wedge A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ (C \wedge A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ B \wedge A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C \wedge A^t)^t \odot (B \wedge A) == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g)$ **[6 Puntos]** $[(A \wedge B) \vee C]^t \odot A^t$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[(A \wedge B) \vee C]^t \odot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h)$ **[6 Puntos]** $B \odot [(B^t \odot C^t) \vee A^t]^t$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \left[\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \odot [(B^t \odot C^t) \vee A^t]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Haciendo uso del principio de inducción matemática demuestre la validez de las siguientes expresiones

   $a)$ **[7 Puntos]** Demostrar que: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

i) Con $n = 1$, tenemos $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

H.I: $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

ii) H.q.d $\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ ⓐ, partiendo $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ⓑ

Basta con probar que ⓑ es igual a ⓐ.

¿$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$?

$\Rightarrow \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow$ se cumple para (n+1).

b) **[7 Puntos]** Demostrar que: $5^0 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

i) Con n=0 $5^0 = \frac{5^{0+1}-1}{4} \Rightarrow 1 = \frac{4}{4} \Rightarrow 1 = 1$, se cumple para n.

H.I $5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2}-1}{4}$

ii) H.q.d $5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2}-1}{4}$ ⓐ, partiendo de la H.I tenemos $5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n + 5^{m+1}$ ⓑ

Basta probar que ⓑ es igual a ⓐ

$\frac{5^{n+1}-1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2}-1}{4}$

$\frac{5^{n+1}-1+4 \cdot 5^n + 1}{4} = \frac{5^{n+2}-1}{4}$

$\frac{5 \cdot 5^{n+1}-1}{4} + = \frac{5^{n+2}-1}{4}$

$\dfrac{5^{n+2}-1}{4} = \dfrac{5^{n+2}-1}{4} \Rightarrow$ se cumple para n+1.

c) **[7 Puntos]** Demostrar que: $5^{n-2} < n!$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

i) Con n=1 $5^{1-2} < 1! \Rightarrow 5^{-}1 < 1 = \dfrac{1}{5} < 1$, se cumple para n. H.I $5^{n-2} < n!$

ii) H.q.d ⓐ $5^{n-1} < (n+1)!$ ⓒ, partiendo de la H.I, tenemos $5^{n+2} < n!$
$\Rightarrow 5^{n-2} \cdot 5 < 5 \cdot n!$
ⓐ $5^{n-1} < 5n!$ ⓑ

Basta demostar que ⓑ <ⓒ.
$\Rightarrow 5n! < (n+1)! \Rightarrow 5n! < (n+1) \cdot n! = 5 < n+1$
$4 < n, n > 4$, lo cual es cierto ya que $n \geq 1$
$5^{n-1} < (n+1)!$, queda demostrado para (n+1).

d) **[7 Puntos]** Demostrar que: $2n < 3^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

i) Probar para n=1
$2 \cdot 1 < 3^1$
$2 < 3 \Rightarrow$ Se cumple para los primeros n números.

ii) Probar para n+1
$2(n+1) < 3^{n+1}$
ⓐ $2n+2 < 3^{n+1}$ ⓒ
Partiendo de H.I
$2n+2 < 3^n$
ⓐ $2n+2 < 3^n+2$ ⓑ

Baste demostrar b<c
$3^n+2 < 3^{n+1}$
$3^n+2 < 3^n \cdot 3^1$
$2 < 3^1 = 2 < 3$
Para nuestra proposición se cumple que n>1.

e) **[7 Puntos]** Demostrar que: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

i) Probar para n=1
$\dfrac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$
$1 \geq 1 \Rightarrow$ Se cumple para los primeros n números.

ii) Probar para n+1
H.q.d = ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq$ ⓒ $\sqrt{n+1} \Rightarrow$ Partiendo de H.I

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$$
$$ⓐ\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq ⓑ\ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Basta demostrar $b > c$

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}$$

$\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\geq\sqrt{n+1}\Rightarrow$ Para nuestra proposición se cumple que n>1.

f) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión 5^n+15 es divisible por 20, para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$.

i) n=1 $5+15=20, 20120$, se cumple para n
$\Rightarrow H.I: 5^n+15=20k, k, \in\mathbb{Z}, 5^n=20k-15$ ①

ii) H.q.d $5^{n+1}+15=5\cdot 5^n+15$
$=5(20k-15)+15=100k-75+15=100k-60=20(5k-3)=20k$
$\Rightarrow 5^{n+1}+15$, es divisible para 20, se cumple para (n+1).

g) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión 6^n+24 es divisible por 30, para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$.

i) Propar para n=1
$6^1+24=30=\boxed{30\cdot 1}\Rightarrow$ Se cumple para los primeros n números.
$\boxed{\text{H.I: } 6^n+24=30\cdot k, k\in\mathbb{Z}}\Rightarrow$ ① $6^n=30k-24$

ii) Probar para n+1
H.q.d: $6^{n+1}+24=30k_1$
$6^n\cdot 6^1+24=30k_1$
$(30k-24)6+24=30k_1$
$180k-144+24=30k_1$
$180k-120=30k_1$
$30(6k-4)=30k_1$
$30k=30_1$
Se cumple, cuando damos el paso inductivo en (n+1), la expresión es divisible por 30.

h) **[7 Puntos]** Demostrar que la expresión n^3+11n es divisible por 6, para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$.

i) Probar para n=1
$1^3+11\cdot 1=\boxed{12=6\cdot 2}\Rightarrow$ Se cumple para los primeros n números.
$\boxed{\text{H.I: } n^2+11n=6\cdot k, k\in\mathbb{Z}}$

ii) Probar para n+1
H.q.d: $(n+1)^3+11(n+1)=6k_1$

$(n+1)^3 + 11n + 11 = 6k_1$
$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = 6k_1$
$(n^3 + 11n) + 3n^2 + 3n + 12$
$6k + 3(n^2 + 3 + 4) = 6k_1$
$6k_1 = 6k_1$
Se probó para el termino (n+1), se da la divisibilidad.

5. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**.

   a) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto A que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que son divisibles por 5. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, A debe ser igual a $A = \{5\}$.

   b) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto B que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que son primos. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, B debe ser igual a $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

   c) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto C que incluya los números enteros comprendidos entre a y b que sean divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 10$, C debe ser igual a $C = \{6\}$.

   d) **[2 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba a y b números enteros y devuelva un conjunto U que incluya los números enteros comprendidos entre a y b. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 6$, U debe ser igual a $U = \{2, 3, 4, 5\}$. Para ejercicios posteriores este conjunto U representará el universo del ejercicio.

Se mostrará la implementación del **5a**, los demás tienen lógicas similares

Algoritmo .1: Ejercicio 5a

Data: a y b números enteros.
Result: A conjunto

```
ConjuntoA=∅;
Largo=| b − a |;
x=a;
for i = 1, 2, ..., (Largo − 1) do
    x=x+1;
    if x mod 5 = 0 then
        ConjuntoA=Agregar [ConjuntoA, x];
    Fin IF;
    Fin Ciclo;
Return[ConjuntoA];
Fin Programa;
```

6. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**. Usando los conjuntos generados a partir de las rutinas del ejercicio 5 y usando rutinas brindadas en el curso o generadas en tareas

   a) **[4 Puntos]** Determinar: $\overline{A - B} \triangle C$. Utilizando $a = -50$, $b = 30$ para el conjunto A, $a = -29$, $b = 36$ para el conjunto B, $a = -51$, $b = 40$ para el conjunto C, $a = -60$, $b = 50$ para el conjunto U.

```
(*Ejercicio 6a*)

A1 = ConjuntoA[-50, 30]
B1 = ConjuntoB[-29, 36]
C11 = ConjuntoC[-51, 40]
U1 = ConjuntoU[-60, 50]
DifSim[Difer[U1, Difer[A1, B1]], C11]
(*A continuación se muestran, el conjunto A, conjunto B, conjunto C,
Universo y por último el conjunto resultante de la operación solicitada en el ejercicio*)
{-45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25}

{-23, -19, -17, -13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}

{-48, -42, -36, -30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36}

{-59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38,
 -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15,
 -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49}

{-59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -47, -46, -44, -43, -41, -39, -38, -37, -34, -33, -32, -31,
 -29, -28, -27, -26, -23, -22, -21, -19, -17, -16, -14, -13, -11, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11,
 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, -30, 0}
```

   b) **[4 Puntos]** Determinar: $(\overline{A} \cup \overline{B}) - \overline{C}$. Utilizando $a = -50$, $b = 30$ para el conjunto A, $a = -29$, $b = 36$ para el conjunto B, $a = -51$, $b = 35$ para el conjunto C, $a = -70$, $b = 40$ para el conjunto U.

```
(*Ejercicio 6b*)

A2 = ConjuntoA[-50, 30]
B2 = ConjuntoB[-29, 36]
C2 = ConjuntoC[-51, 35]
U2 = ConjuntoU[-70, 40]
Difer[Unionconj[Difer[U2, A2], Difer[U2, B2]], Difer[U2, C2]]
(*A continuación se muestran, el conjunto A, conjunto B, conjunto C,
Universo y por último el conjunto resultante de la operación solicitada en el ejercicio*)
{-45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25}

{-23, -19, -17, -13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}

{-48, -42, -36, -30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30}

{-69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47,
 -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23,
 -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,
 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39}

{-48, -42, -36, -24, -18, -12, -6, 6, 12, 18, 24, 30, -30, 0}
```

c) **[4 Puntos]** Determinar: $\overline{C - B} \times A$. Utilizando $a = -15$, $b = 17$ para el conjunto A, $a = -15$, $b = 6$ para el conjunto B, $a = -5$, $b = 18$ para el conjunto C, $a = -25$, $b = 20$ para el conjunto U.

```
(*Ejercicio 6c*)

A3 = ConjuntoA[-15, 17]
B3 = ConjuntoB[-15, 6]
C3 = ConjuntoC[-5, 18]
U3 = ConjuntoU[-25, 20]
ProdCart[Difer[U3, Difer[C3, B3]], A3]
(*A continuación se muestran, el conjunto A, conjunto B, conjunto C,
Universo y por último el conjunto resultante de la operación solicitada en el ejercicio*)
{-10, -5, 0, 5, 10, 15}

{-13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5}

{0, 6, 12}

{-24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

{{-24, -10}, {-24, -5}, {-24, 0}, {-24, 5}, {-24, 10}, {-24, 15}, {-23, -10}, {-23, -5}, {-23, 0}, {-23, 5}, {-23, 10}, {-23, 15}, {-22, -10}, {-22, -5}, {-22, 0},
 {-22, 5}, {-22, 10}, {-22, 15}, {-21, -10}, {-21, -5}, {-21, 0}, {-21, 5}, {-21, 10}, {-21, 15}, {-20, -10}, {-20, -5}, {-20, 0}, {-20, 5}, {-20, 10}, {-20, 15},
 {-19, -10}, {-19, -5}, {-19, 0}, {-19, 5}, {-19, 10}, {-19, 15}, {-18, -10}, {-18, -5}, {-18, 0}, {-18, 5}, {-18, 10}, {-18, 15}, {-17, -10}, {-17, -5}, {-17, 0},
 {-17, 5}, {-17, 10}, {-17, 15}, {-16, -10}, {-16, -5}, {-16, 0}, {-16, 5}, {-16, 10}, {-16, 15}, {-15, -10}, {-15, -5}, {-15, 0}, {-15, 5}, {-15, 10}, {-15, 15},
 {-14, -10}, {-14, -5}, {-14, 0}, {-14, 5}, {-14, 10}, {-14, 15}, {-13, -10}, {-13, -5}, {-13, 0}, {-13, 5}, {-13, 10}, {-13, 15}, {-12, -10}, {-12, -5}, {-12, 0},
 {-12, 5}, {-12, 10}, {-12, 15}, {-11, -10}, {-11, -5}, {-11, 0}, {-11, 5}, {-11, 10}, {-11, 15}, {-10, -10}, {-10, -5}, {-10, 0}, {-10, 5}, {-10, 10}, {-10, 15},
 {-9, -10}, {-9, -5}, {-9, 0}, {-9, 5}, {-9, 10}, {-9, 15}, {-8, -10}, {-8, -5}, {-8, 0}, {-8, 5}, {-8, 10}, {-8, 15}, {-7, -10}, {-7, -5}, {-7, 0}, {-7, 5}, {-7, 10},
 {-7, 15}, {-6, -10}, {-6, -5}, {-6, 0}, {-6, 5}, {-6, 10}, {-6, 15}, {-5, -10}, {-5, -5}, {-5, 0}, {-5, 5}, {-5, 10}, {-5, 15}, {-4, -10}, {-4, -5}, {-4, 0}, {-4, 5},
 {-4, 10}, {-4, 15}, {-3, -10}, {-3, -5}, {-3, 0}, {-3, 5}, {-3, 10}, {-3, 15}, {-2, -10}, {-2, -5}, {-2, 0}, {-2, 5}, {-2, 10}, {-2, 15}, {-1, -10}, {-1, -5},
 {-1, 0}, {-1, 5}, {-1, 10}, {-1, 15}, {1, -10}, {1, -5}, {1, 0}, {1, 5}, {1, 10}, {1, 15}, {2, -10}, {2, -5}, {2, 0}, {2, 5}, {2, 10}, {2, 15}, {3, -10}, {3, -5},
 {3, 0}, {3, 5}, {3, 10}, {3, 15}, {4, -10}, {4, -5}, {4, 0}, {4, 5}, {4, 10}, {4, 15}, {5, -10}, {5, -5}, {5, 0}, {5, 5}, {5, 10}, {5, 15}, {7, -10}, {7, -5}, {7, 0},
 {7, 5}, {7, 10}, {7, 15}, {8, -10}, {8, -5}, {8, 0}, {8, 5}, {8, 10}, {8, 15}, {9, -10}, {9, -5}, {9, 0}, {9, 5}, {9, 10}, {9, 15}, {10, -10}, {10, -5}, {10, 0}, {10, 5},
 {10, 10}, {10, 15}, {11, -10}, {11, -5}, {11, 0}, {11, 5}, {11, 10}, {11, 15}, {13, -10}, {13, -5}, {13, 0}, {13, 5}, {13, 10}, {13, 15}, {14, -10}, {14, -5}, {14, 0},
 {14, 5}, {14, 10}, {14, 15}, {15, -10}, {15, -5}, {15, 0}, {15, 5}, {15, 10}, {15, 15}, {16, -10}, {16, -5}, {16, 0}, {16, 5}, {16, 10}, {16, 15}, {17, -10}, {17, -5},
 {17, 0}, {17, 5}, {17, 10}, {17, 15}, {18, -10}, {18, -5}, {18, 0}, {18, 5}, {18, 10}, {18, 15}, {19, -10}, {19, -5}, {19, 0}, {19, 5}, {19, 10}, {19, 15}}
```

d) **[4 Puntos]** Determinar: $(B \cap A) \triangle \overline{C}$. Utilizando $a = -53$, $b = 62$ para el conjunto A, $a = -66$, $b = 55$ para el conjunto B, $a = -35$, $b = 49$ para el conjunto C, $a = -85$, $b = 70$ para el conjunto U.

```
(*Ejercicio 6d*)

A4 = ConjuntoA[-53, 62]
B4 = ConjuntoB[-66, 55]
C4 = ConjuntoC[-35, 49]
U4 = ConjuntoU[-85, 70]
DifSim[Interconj[B4, A4], Difer[U4, C4]]
(*A continuación se muestran, el conjunto A, conjunto B, conjunto C,
Universo y por último el conjunto resultante de la operación solicitada en el ejercicio*)
{-50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60}

{-61, -59, -53, -47, -43, -41, -37, -31, -29, -23, -19, -17, -13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53}

{-30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

{-84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57,
 -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31,
 -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4,
 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,
 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69}

{-84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58,
 -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31,
 -29, -28, -27, -26, -25, -23, -22, -21, -20, -19, -17, -16, -15, -14, -13, -11, -10, -9, -8, -7, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10,
 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53,
 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69}
```

Tal vez le sea útil recordar que: $\overline{H} = U - H$**.**

7. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica**. Construya una rutina en Mathematica, que reciba un número natural n, construya una matriz cuadrada M de orden n, donde

$$(m_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \left(i^2 - j\right)$$

y, que además determine el valor numérico máximo contenido en dicha matriz.
La rutina debe regresar

a) **[4 Puntos]** La matriz M, con $n = 60$.

b) **[2 Puntos]** El número más grande contenido en esa matriz, cuando $n = 60$.

Una solución que resuelve lo anterior posee como pseudocódigo:

Algoritmo .2: Ejercicio7

Data: n orden de la matriz cuadrada.
Result: M matriz, y máximo M

Conjunto=$\emptyset$;
M=ConstantArray[0, $\{n, n\}$];
Maximo=0;
for $i = 1, 2, ..., n$ **do**
    for $j = 1, 2, ..., n$ **do**
        $M[i, j] = (-1)^{i+j} \cdot (i^2 - j)$;
        Conjunto=$Agregar\,[Conjunto, M\,[[i, j]]]$;
        Fin Ciclo;
    Fin Ciclo;
Maximo=$Max\,[Conjunto]$;
Return[M];
Return[$Maximo$];
Fin Programa;
