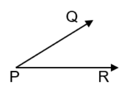
1) Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P=(1,-2,3)$, $Q=(5,3,2)$, $R=(7,-1,4)$.

a) Verifique que los puntos son no colineales.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & -4 & 4 \end{vmatrix} \underset{-7f_1+f_3}{\overset{-5f_1+f_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & 13 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -13 \\ 13 & -17 \end{vmatrix} = 13\cdot -17 + 13\cdot 13 = -52 \neq 0$$

b) Escribir las ecuaciones escalares paramétricas del plano Π que definen P, Q y R.



$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (5,3,2) - (1,-2,3) = (4,5,-1)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (7,-1,4) - (1,-2,3) = (6,1,1)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (1,-2,3) + s(4,5,-1) + t(6,1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4s + 6t \\ y = -2 + 5s + t \\ z = 3 - s + t \end{cases}$$

c) Escriba la ecuación normal (cartesiana) del plano Π.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (6,-10,-26) = 2(3,-5,-13)$$

$$\vec{n}X = \vec{n}P$$

$$(3,-5,-13)(x,y,z) = (3,-5,-13)(1,-2,3)$$

$$3x - 5y - 13z = -31$$

2) Obtenga una ecuación normal para el plano con las condiciones dadas, en cada caso:

a) Es perpendicular a la recta $(x,y,z)=(2-2t,t,1+t)$ y contiene al punto $(2,1,2)$.

$$(x,y,z)=(2,0,1)+t(-2,1,1)\Rightarrow \vec{v}=(-2,1,1)$$

$$\text{Sí } L\perp\Pi \Leftrightarrow \vec{v}\parallel\vec{n} \quad \text{tomamos } \vec{n}=\vec{v}=(-2,1,1) \text{ con } P=(2,1,2)$$

$$\vec{n}X=\vec{n}P$$

$$(-2,1,1)(x,y,z)=(-2,1,1)(2,1,2).$$

$$-2x+y+z=-1$$

b) Es paralela a la recta $(x,y,z)=(2-2t,t,1+t)$ contiene a la recta $\frac{2-x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}$

Tenemos dos rectas en cuestión:

$$L_1:(x,y,z)=(2,0,1)+t(-2,1,1)$$
$$\Rightarrow \vec{v_1}=(-2,1,1)$$

$$L_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}\Rightarrow \vec{v_2}=(-2,-3,4)$$

$$\text{Sí } L_1\parallel\Pi \Leftrightarrow \vec{v_1}\perp\vec{n} \qquad \text{tomamos } \vec{n}=(1,1,1) \text{ (hay muchos)}$$

Ahora debemos encontrar a P que debe estar o pertenecer a L_2

$$L_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}\Rightarrow \begin{array}{l} x=2-2t\\ y=1-3t\\ z=-3+4t\end{array} \quad \text{con } t=1\Rightarrow \begin{array}{l} x=2-2\cdot1=0\\ y=1-3\cdot1=-2\\ z=-3+4\cdot1=1\end{array}\Rightarrow P=(0,-2,1)$$

$$\vec{n}X=\vec{n}P$$

$$(1,1,1)(x,y,z)=(1,1,1)(0,-2,1)$$

$$x+y+z=-1$$

c) Contiene al punto $(0,-3,1)$ y es paralelo al plano $(x,y,z)=(2-3t+s,t-s,5t)$.

$$(x,y,z)=(2,0,0)+t(-3,1,5)+s(1,-1,0)\Rightarrow \vec{u}=(-3,1,5)\wedge \vec{v}=(1,-1,0)$$

$$\text{Sí } \Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}$$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=e_1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-e_2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+e_3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(5,5,2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}=(5,5,2)$$

$$\vec{n}X=\vec{n}P$$

$$(5,5,2)(x,y,z)=(5,5,2)(0,-3,1)$$

$$5x+5y+2z=-13$$

3) En $\mathbb{R}^3$ considere los puntos $P=(1,2,3)$, $Q=(2,4,5)$ y la recta L1 de ecuación vectorial $(x,y,z)=(0,1,2)+t(2,-1,1)\quad t\in\mathbb{R}$.

a) Determine las ecuaciones simétricas de la recta L2 que pasa por el punto P y Q.

$$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,4,5)-(1,2,3)=(1,2,2)$$

$$\Rightarrow L_2:(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,2,2)$$

$$\text{Ecuaciones simétricas: } \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$$

b) Verifique que las rectas L1 y L2 no se cortan.

Igualamos ambas ecuaciones vectoriales de las rectas, para definir un sistema lineal:

$$(0,1,2)+t(2,-1,1)=(1,2,3)+s(1,2,2)\Rightarrow \begin{array}{l} 2t-s=1 \\ -t-2s=1 \\ t-2s=1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[f_3+f_2]{-2f_3+f_1}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{f_1+f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[-2f_2+f_3]{3f_2+f_1}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ que el sistema es inconsistente $\Rightarrow$ S:$\varnothing$

$\Rightarrow$ Las rectas no se cortan.

c) Determine la ecuación normal del plano Π que contiene a L1 y es paralela a L2.

$$\Pi \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{v_2}\quad \text{Ahora } \overrightarrow{v_2}=(1,2,2)\Rightarrow \vec{n}=(-2,0,1)$$

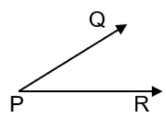
$$\text{Cálculo de } P\in L_1 \text{ en } (x,y,z)=(0,1,2)+t(2,-1,1)\quad \text{tomando } t=0\Rightarrow P=(0,1,2)$$

$$\vec{n}X=\vec{n}P$$

$$(-2,0,1)(x,y,z)=(-2,0,1)(2,1,2)$$

$$-2x+z=-2$$

4) Consideremos el plano Π_1 que pasa por los puntos no colineales $P=(1,1,1)$, $Q=(2,1,2)$, $R=(0,2,-1)$. Encuentre la ecuación vectorial y la ecuación cartesiana de ese plano.



$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,1,2)-(1,1,1)=(1,0,1)$$
$$\vec{v}=\overrightarrow{PR}=R-P=(0,2,-1)-(1,1,1)=(-1,1,-2)$$

ecuación vectorial: $(x,y,z)=(1,1,1)+t(1,0,1)+s(-1,1,-2)$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=e_1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-e_2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+e_3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,1,1)$$

$$\vec{n}X=\vec{n}P$$

$$(-1,1,1)(x,y,z)=(-1,1,1)(1,1,1)$$

$$-x+y+z=1$$

5) Calcule la intersección (si existe) entre el plano $\Pi: x-2y+3z=1$ y la recta $L:(x,y,z)=(1,2,1)+t(0,2,3)$.

Ecuaciones paramétricas de L: $\begin{array}{l} x=1 \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{array}$

Sustituimos x, y, z en la ecuación del plano Π: $x-2y+3z=1$

$$1-2(2+2t)+3(1+3t)=1$$

$$1-4-4t+3+9t=1$$

$$-4t+9t=1-1+4-3$$

$$5t=1$$

$$t=\frac{1}{5}$$

Punto de intersección:

$$(x,y,z)=(1,2,1)+t(0,2,3) \text{ con } t=\frac{1}{5}$$

$$(x,y,z)=(1,2,1)+\frac{1}{5}(0,2,3)$$

$$(x,y,z)=\left(1,2+\frac{2}{5},1+\frac{3}{5}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(1,\frac{12}{5},\frac{8}{5}\right) \text{ que es el punto de intersección.}$$

6) Sean $\Pi_1 : x+y+z=1,\ \Pi_2 : x-y-z=1,\ \Pi_3 : x+y+z=5$ y $L_1 : X=(1,5,9)+t(1,-2,3)$

a) Encuentre la ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L_2 que es la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad x=1 \wedge y+z=0 \Rightarrow y=-z \text{ con } z=t \quad \Rightarrow x=1, y=-t, z=t$$

$$\Rightarrow L_2 : (x,y,z)=(1,-t,t) \quad \Rightarrow L_2 : (x,y,z)=(1,0,0)+t(0,-1,1)$$

$$\text{ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\text{ecuaciones simétricas: } x=1, \frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$$

b) Encuentre la distancia del punto $P=(1,0,1)$ al plano Π_1.

$$d(P,\Pi_1)=\frac{|a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1-d|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1-1|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

c) Encuentre la distancia entre los planos paralelos Π_1 y Π_3

$$\Pi_1 : x+y+z=1 \wedge \Pi_3 : x+y+z=5 \Rightarrow D_1=1 \wedge D_2=5$$

$$\Rightarrow d(\Pi_1,\Pi_3)=\frac{|5-1|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$