Regla de L' Hôpital

Introducción

Hasta el momento hemos resuelto una familia de límites, los cuales hacen uso de propiedades algebraicas, pero, como resolver

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{ln(x)}$$

Regla de L' Hôpital

Introducción

Regla de L' Hôpital

Teorema

Teorema (Regla de L'Hôpital). *Sean f, g funciones reales de dominio real, derivables en $x = a$ y tales que*

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \vee \quad f(x), g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty$$

entonces

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

La misma propiedad se cumple si cambiamos el límite "$x \to a$" por límites laterales o por límites infinitos:

$$f, g \xrightarrow[x \to a^+]{} 0 \ \vee \ f, g \xrightarrow[x \to a^+]{} \infty \implies \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f, g \xrightarrow[x \to a^-]{} 0 \ \vee \ f, g \xrightarrow[x \to a^-]{} \infty \implies \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f, g \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \ \vee \ f, g \xrightarrow[x \to +\infty]{} \infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f, g \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \ \vee \ f, g \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty \implies \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L' Hôpital

Ejemplo 29

Determine el valor de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} + x - 1}{e^{2x} + x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^{x} - 1} \right)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \sqrt{x} \right)$

Regla de L' Hôpital

Ejemplo 29

Regla de L' Hôpital

Formas indeterminadas $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

Ahora que estudiamos límites que involucran funciones exponenciales y logarítmicas es posible que aparezcan estas nuevas formas indeterminadas: $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$.
Para poder resolver límites en estos casos tenemos la siguiente propiedad:
Si f es una función continua se cumple que

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = f\left(\lim_{x \to c} x\right)}$$

En particular, esto ocurre para la función logaritmo natural, de modo que

$$\lim_{x \to c} (ln(x)) = ln\left(\lim_{x \to c} x\right)$$

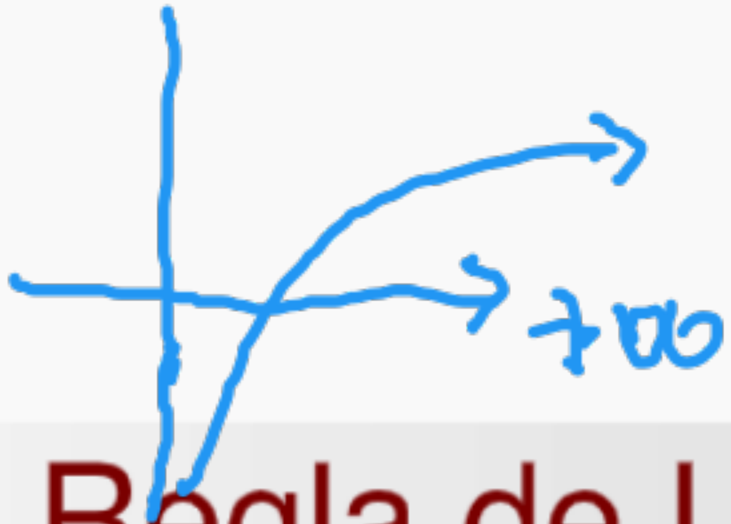
Regla de L' Hôpital

Formas indeterminadas $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

De lo anterior se puede desglosar un procedimiento para calcular límites de estas formas indeterminadas.

Procedimiento

- *Llamamos $\boxed{y}$ al límite que deseamos calcular.*
- *Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la igualdad.*
- *Aplicamos la propiedad de* ***intercambio*** *entre ln y* lim.
- *Usamos propiedad de logaritmos.*
- *Acomodamos la expresión para poder aplicar la regla de L' Hôpital.*
- *Despejamos y.*



$f(+\infty)^0$

Regla de L' Hôpital

Ejemplo 30

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x))^{2/x}$

Determine el valor de los siguientes límites

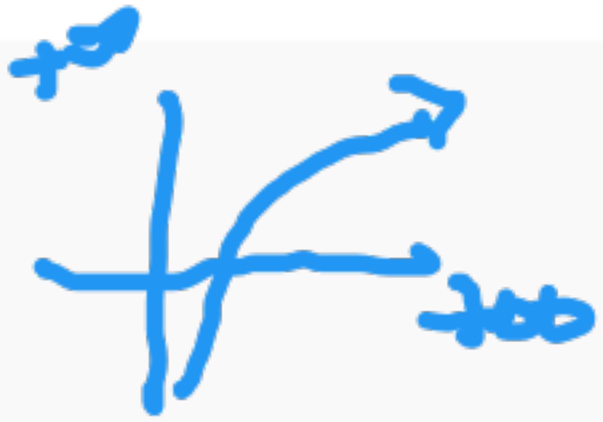
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(ln(x))^{\frac{2}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
3. $\lim\limits_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\sin(\theta))^{\sec(\theta)}$

$$L=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))^{2/x}$$

$$\ln(L)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))^{2/x}\right)$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left((\ln(x))^{2/x}\right)\right]$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\ln(\ln(x))\right)$$



Regla de L' Hôpital

Ejemplo 30

$$\ln(L) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(\ln(x))}{x}\right) \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$\frac{2}{\infty} \to 0$ 0

A partir de acá aplicamos la regla de L' Hopital...!!!

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}}{1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x\ln(x)}\right)$$

$$\boxed{\ln(L)=0} \Rightarrow L = e^0,\ L = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))^{2/x} = 1$$

$$\lim_{x\to c}(P(x))^{Q(x)}$$

$$\lim_{x\to c} Q(x)\cdot\ln[P(x)]$$

$$= e$$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 9/4$

Regla de L' Hôpital

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,7184$

Ejemplo 30

$f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$

$f(7) = \left(1 + 1/7\right)^7 \approx 2,54\ldots$

$L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + 1/x\right)^x$

$\ln(L) = \ln\left[\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + 1/x\right)^x\right]$, $\ln(L) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$

$\ln(L) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\underbrace{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\infty \cdot 0}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x}\right) \frac{0}{0}$

Vamos a aplicar L'Hopital...!!!

$\ln(L) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{1 + 1/x} \cdot \cancel{-1x^{-2}}}{\cancel{-x^{-2}}}\right)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2}$

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Regla de L' Hôpital

Ejemplo 30

$$\ln(L) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+1/x}\right) \quad 0$$

theta

$$\ln(L) = 1,\quad L = e^1 = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+1/x\right)^x = e}$$

$f: 1^\infty$

3) $\lim_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\operatorname{sen}(\theta)\right)^{\sec(\theta)}$, $\ln(L) = \ln\left[\lim_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\operatorname{sen}(\theta)\right)^{\sec(\theta)}\right]$ $\frac{0}{0}$

$$\ln(L) = \lim_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\sec(\theta)\cdot\ln(\operatorname{sen}(\theta))\right) = \lim_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\ln(\operatorname{sen}(\theta))}{\cos(\theta)}\right)$$

$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$

Regla de L' Hôpital

Ejemplo 30

$$\ln(L) = \lim_{\theta \to (\pi/2)^-} \left(\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \cdot \cos(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)} \right) \quad \frac{0}{1} = 0$$

$$= \lim_{\theta \to (\pi/2)^-} \left(\frac{-\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \right)$$

$$\ln(L) = 0 \qquad L = e^0 = 1$$

$$\lim_{\theta \to (\pi/2)^-} (\operatorname{sen}(\theta))^{\sec(\theta)} = 1 \;//$$

Ejercicios recomendados

- **Del libro de Marco Alfaro**
  - Pág 49 en adelante: no hay ejercicios recomendados.
- **Libro de ejercicios del TEC**
  - Pág 32 en adelante, ejercicios 4.3.1 (1,3,6,7,10,11,12,14,15,18,19,20,21)

Favor considerar que en ambos documentos vienen las respuestas de los ejercicios.