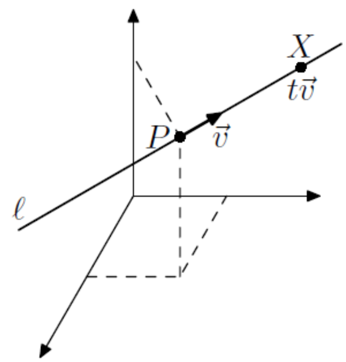
Tema VI: Rectas y planos

Sean $P, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$



Tenemos lo siguiente: $\overrightarrow{PX} = t\,\vec{v}$

$$X - P = t\,\vec{v}$$

$$X = P + t\,\vec{v}$$

Rectas en $\mathbb{R}^n$

Se llama recta ℓ que contiene a P en la dirección del vector $\vec{v}$, y se denota $\ell(P,\vec{v})$ al conjunto de puntos $\left\{X \in \mathbb{R}^n \,/\, X = P + t\,\vec{v}, \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\right\}$

También se dice que $X = P + t\,\vec{v}$ es una ecuación vectorial de la recta $\ell(P,\vec{v})$.

Ejemplo: determine una ecuación vectorial para la recta que contiene los puntos $A = (-1,2,2), B = (3,-1,6)$.

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,-1,6) - (-1,2,2) = (4,-3,4)$

$$\Rightarrow \ell = (x,y,z) = (-1,2,2) + t(4,-3,4)$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas $\ell_1(P,\vec{v})$, $\ell_2(Q,\vec{u})$ son paralelas si $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores paralelos y se dicen perpendiculares si $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores perpendiculares.

Ejemplo:

a) Las siguientes rectas son perpendiculares:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -1) \text{ y } (x, y, z) = (-1, 2, 2) + t(4, -3, 4)$$

Tenemos $\vec{v} = (1, 0, -1)$, $\vec{u} = (4, -3, -4)$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = (1, 0, -1) \cdot (4, -3, 4) = 0$$

b) Las siguientes rectas son paralelas:

$$(x, y, z) = (3, 4, 5) + t(1, 2, 3) \text{ y } (x, y, z) = (0, 1, -2) + t(3, 6, 9)$$

Tenemos $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (3, 6, 9)$

$$\Rightarrow \vec{u} = 3\vec{v}$$

Ecuaciones paramétricas escalares y simétricas de rectas en $\mathbb{R}^3$

Dada una ecuación vectorial para una recta $\ell(P, \vec{v})$ en $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$, expresada de la siguiente manera

$$(x, y, z) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$$

Separando tenemos: $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases}$ (ecuaciones paramétricas escalares de la recta)

Despejando t: $t = \dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} = \dfrac{z - p_3}{v_3}$ (ecuaciones simétricas de la recta)

con $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, con $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vector director

Ejemplo: considere la recta que pasa por los puntos $A=(1,-2,3), B=(-2,3,4)$. Encuentre las ecuaciones simétricas.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,3,4)-(1,-2,3)=(-3,5,1)$

$$\Rightarrow \text{ecuación vectorial: } (x,y,z)=(1,-2,3)+t(-3,5,1)$$

$$\text{ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+5t \\ z=3+t \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{1} \quad (\text{ecuaciones simétricas})$$

Ejemplo: dada la siguiente ecuación simétrica $\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{2}=z-1=t$. Determine tres puntos que pertenezcan a esta recta.

$$\text{ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x=2-3t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Ahora le damos valores arbitrarios a t:

$$t=1\Rightarrow \begin{cases} x=2-3\cdot 1=-1 \\ y=2\cdot 1=2 \\ z=1+1=2 \end{cases} \Rightarrow P_1=(-1,2,2)$$

$$t=0\Rightarrow \begin{cases} x=2-3\cdot 0=2 \\ y=2\cdot 0=0 \\ z=1+0=1 \end{cases} \Rightarrow P_2=(2,0,1)$$

$$t=-1\Rightarrow \begin{cases} x=2-3\cdot -1=5 \\ y=2\cdot -1=-2 \\ z=1+-1=0 \end{cases} \Rightarrow P_3=(5,-2,0)$$

Ejemplo: considere las siguientes rectas $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$. Pruebe que estas rectas se intersecan ortogonalmente.

Ecuaciones simétricas: $t = \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ $\qquad s = \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$

Vectores directores: $\vec{v}_1 = (1,-1,1), \vec{v}_2 = (-1,1,2)$

$\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1,-1,1)\cdot(-1,1,2) = 0$ son ortogonales

Igualamos ambas rectas: $\begin{matrix} x = 1+t & x = 3-s \\ y = 1-t & y = -1+s \\ z = 1+t & z = 1+2s \end{matrix}$

$$\begin{matrix} 1+t = 3-s \\ 1-t = -1+s \\ 1+t = 1+2s \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t+s = 3-1 \\ \Rightarrow -t-s = -1-1 \\ t-2s = 1-1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t+s = 2 \\ \Rightarrow -t-s = -2 \\ t-2s = 0 \end{matrix}$$

Resolvemos el último sistemas lineal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-f_1+f_3]{f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{3}f_3]{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow t = \tfrac{4}{3}, s = \tfrac{2}{3}$$

Calculamos el punto de intersección utilizando "t" (o "s"):

$$t = \tfrac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1-\frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \\ z = 1+\frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow P = \left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{7}{3}\right)$$

Proposición: sean $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)\in\mathbb{R}^3$, consideremos las rectas $L_1:(x,y,z)=P+t\vec{v}$ $L_2:(x,y,z)=Q+s\vec{w}$. Para determinar si hay intersección igualamos las ecuaciones $P+t\vec{v}=Q+s\vec{w}$

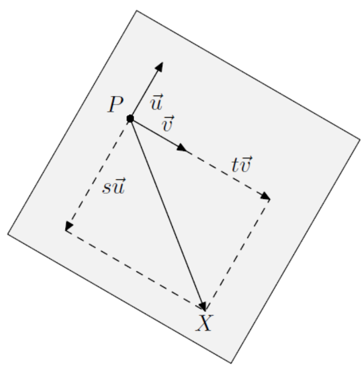
$$\begin{aligned} tv_1-sw_1&=q_1-p_1\\ tv_2-sw_2&=q_2-p_2\\ tv_3-sw_3&=q_3-p_3 \end{aligned}$$

Como el sistema es lineal, puede suceder lo siguiente:

1) Hay solución única: las rectas se intersecan en un solo punto.
2) Hay infinitas soluciones: las rectas coinciden.
3) No hay solución: las rectas no se intersecan.

Ecuación vectorial de un plano

Sean $P,X\in\mathbb{R}^n$ puntos, $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ flechas



$$\overrightarrow{PX}=t\vec{u}+s\vec{v} \quad \text{para algunos } t,s\in\mathbb{R}$$

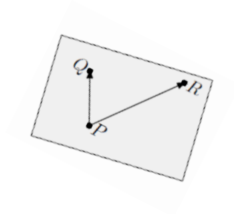
$$X-P=t\vec{u}+s\vec{v}$$

$$X=P+t\vec{u}+s\vec{v}$$

Planos en $\mathbb{R}^n$

Dado un punto P y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no paralelos, se llama plano que contiene a P en la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al conjunto $\{X\in\mathbb{R}^n / X=P+t\vec{u}+s\vec{v},\ t,s\in\mathbb{R}\}$ y se denota $\mathrm{P}(P,\vec{u},\vec{v})$. La ecuación $X=P+t\vec{u}+s\vec{v}$ se denomina ecuación vectorial del plano $\mathrm{P}(P,\vec{u},\vec{v})$.

Ejemplo: dados los puntos $P=(1,1,-4)$, $Q=(2,-2,3)$ y $R=(-3,1,4)$, determine la ecuación vectorial del plano que los contiene.

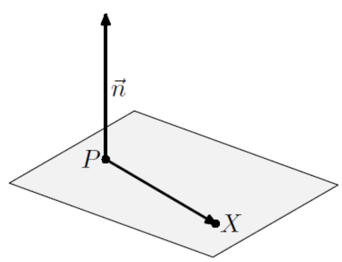


$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,-2,3)-(1,1,-4)=(1,-3,7)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{PR}=R-P=(-3,1,4)-(1,1,-4)=(-4,0,8)$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(1,1,-4)+t(1,-3,7)+s(-4,0,8)$$

Ecuación normal de un plano en $\mathbb{R}^3$



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}=0$$

$$\vec{n}\cdot(X-P)=0$$

$$\vec{n}\,X-\vec{n}\,P=0$$

$$\vec{n}\,X=\vec{n}\,P \quad \text{ecuación normal del plano } \Pi$$

Si $\vec{n}=(a,b,c)$ y $P=(p_1,p_2,p_3)$

$$\vec{n}\,X=\vec{n}\,P$$

$$(a,b,c)\cdot(x,y,z)=(a,b,c)\cdot(p_1,p_2,p_3)$$

$$ax+by+cz=ap_1+bp_2+cp_3$$

$$ax+by+cz=d \quad \text{ecuación cartesiana del plano } \Pi$$

Definición: todos los puntos (x, y, z) de un plano que contenga al punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y sea perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$, y solo estos satisfacen que $ax + by + cz = d$ donde $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$. Además se dice que el vector $\vec{n}$ es normal al plano, o que el plano contiene a P y es normal a $\vec{n}$.

Ejemplo: determine la ecuación normal del plano que contiene los puntos $P = (1,1,-4)$, $Q = (2,-2,3)$ y $R = (-3,1,4)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,-2,3) - (1,1,-4) = (1,-3,7)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (-3,1,4) - (1,1,-4) = (-4,0,8)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 7 \\ -4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-24,-36,-12) = -12(2,3,1)$$

Tómese $\vec{n} = (2,3,1)$

$$\vec{n}\, X = \vec{n}\, P$$

$$(2,3,1) \cdot (x, y, z) = (2,3,1) \cdot (1,1,-4)$$

$$2x + 3y + z = 1$$

Ejemplo: si la ecuación vectorial de un plano es $(x, y, z) = (1,1,2) + t(1,0,2) + s(0,1,2)$. Determine su ecuación normal.

Los vectores directores son: $\vec{u} = (1,0,2), \vec{v} = (0,1,2)$

$$\vec{n} = (1,0,2) \times (0,1,2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,1)$$

$$\vec{n}\, X = \vec{n}\, P$$

$$(-2,-2,1) \cdot (x, y, z) = (-2,-2,1) \cdot (1,1,2)$$

$$-2x-2y+z=-2$$

Observaciones importantes:

1) Tres puntos $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ y $R=(r_1,r_2,r_3)$ son no colineales sí $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0$.
2) Dos planos con vectores normales paralelos son paralelos.
3) Dos planos con vectores normales ortogonales son perpendiculares.
4) Una recta con un vector director ortogonal a un vector normal a un plano es paralelo al plano.
5) Una recta con un vector director normal a un plano es perpendicular al plano.

Observaciones importantes:

Consideremos la recta L_1, $\vec{v}$ vector director de L_1, y los planos Π_1 y Π_2. Entonces siendo $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ normales a Π_1 y Π_2, tenemos:

1) $\Pi_1 \| \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \| \vec{n}_2$
2) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
3) $L_1 \| \Pi_1 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{v}$
4) $L_1 \perp \Pi_1 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \| \vec{v}$
5) El ángulo entre los planos Π_1 y Π_2, es el ángulo entre los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

Hiperplanos: dado un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y un vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, se denomina hiperplano que contiene a P ortogonal a $\vec{a}$, al conjunto de puntos $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overrightarrow{PX}$ es perpendicular a $\vec{a}$, o sea al conjunto $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) / a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d\}$.

Fórmulas de distancia:

a) Distancia entre planos paralelos:

$$\Pi_1 : Ax + By + Cz = D_1,\ \Pi_2 : Ax + By + Cz = D_2 \ \Rightarrow d\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \frac{\left|D_2 - D_1\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}.$$

b) Distancia de un punto a un plano.

$$Q = \left(x_1, y_1, z_1\right) \in \Pi : ax + by + cz = d \Rightarrow d\left(Q, \Pi\right) = \frac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 - d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

c) Distancia de una recta a un plano:

i) Si la recta L_1 no es paralela al plano $\Pi \ \Rightarrow d\left(L, \Pi\right) = 0$

ii) Si la recta L_1 es paralela al plano $\Pi \ \Rightarrow d\left(L, \Pi\right) = d\left(P, \Pi\right),\ P \in L_1$

d) Distancia entre dos rectas diferentes entre planos paralelos Π_1 y Π_2

$$L_1 = P + t\vec{v},\ L_2 = Q + t\vec{u},\ \mathrm{L}_1 \in \Pi_1,\ \mathrm{L}_2 \in \Pi_2$$

$$d\left(L_1, L_2\right) = d\left(P, \Pi_2\right) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.