Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Tercer Examen II Ciclo 2020

Viernes 04 de Diciembre

Solución

---

1. Sea $A = \{2,3,5\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$, considere la función

$$f : A \times B \to \{1,2,3,4,5,6\}$$

definida por

$$f((a,b)) = \begin{cases} 2a & si \quad a < b \\ b & si \quad a > b \\ a+b & si \quad a = b \end{cases}$$

a) **[4 Puntos]** Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.
Tenemos

- f no es inyectiva, ya que existen diferentes preimagenes con la misma imagen, por ejemplo $f((2,3)) = f((2,4)) = 4$.
- f no es sobreyectiva, existe un elemento del codomio, el cual nunca será imagen de nadie, no existe $f((a,b)) = 5$

b) **[3 Puntos]** Calcule $f^{-1}(\{1,3,5,\})$, $f(f^{-1}(\{4,5\}))$
Tenemos

- Para $f^{-1}(\{1,3,5\})$, necesitamos encontrar todos aquellos pares cuya imagen sea 1, 3 ó 5; del ejercicio anterior se sabe que ningún par tendrá como imagen a 5, entonces $f^{-1}(\{1,3,5\}) = \{(2,1),(3,1),(5,1),(5,3)\}$
- Para $f(f^{-1}(\{4,5\}))$, primero determinamos $f^{-1}(\{4,5\})$, de donde obtenemos $f^{-1}(\{4,5\}) = \{(2,3),(2,4),(2,2)\}$, luego $f(f^{-1}(\{4,5\})) = f((2,3),(2,4),(2,2)) = 4$

c) **[3 Puntos]** Calcule $f((f(3,2), f((f(3,2), f(3,2)))))$
Tenemos
$f((f(3,2), f((f(3,2), f(3,2))))) = f((2, f((2,2))))$
$f((2, f((2,2)))) = f((2,4)) = 4$

2. **[5 Puntos]** Determine el dominio máximo de la siguiente función

$$h(x) = \log\left(-2x - \frac{x}{x+1}\right) + \frac{x^2}{x^4 - x^2 - 2}$$

Debemos analizar 2 situaciones por separado, para luego realizar la intersección de dichos dominios particulares

- Dominio del logaritmo, para el mismo debemos plantear $-2x - \dfrac{x}{x+1} > 0$, lo cual se simplifica en $\dfrac{-2x^2 - 3x}{x+1} > 0$, y luego al factorizar se tiene $\dfrac{-x(2x+3)}{x+1} > 0$
lo anterior se analiza con una tabla de signos

	$-\infty$, $-3/2$	$-3/2$, -1	-1 , 0	0 , $+\infty$
$-x$	+	+	+	-
$x+1$	-	-	+	+
$2x+3$	-	+	+	+
*	+	-	+	-

de acá se obtiene que el dominio máximo corresponde a $\left]-\infty, \frac{-3}{2}\right[\cup \left]-1, 0\right[$

- El otro caso por analizar es el de la función racional $\dfrac{x^2}{x^4 - x^2 - 2}$, el mismo corresponde a $\mathbb{R}$ excepto los valores donde el denominador se hace cero, por ello
$x^4 - x^2 - 2 = 0,\ (x^2-2)(x^2+1) = 0,\ \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x^2+1) = 0$
De donde se obtiene que el dominio es $\mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$

- Por último el dominio de la función $h(x)$ corresponde a la intersección de los dos conjuntos encontrados anteriormente, $D_h = \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right[\cup \left]-1, 0\right[$.

3. **[5 Puntos]** Determine los puntos de intersección con los ejes e intervalos donde la función es positiva y negativa.

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

Primero determinamos los puntos de intersección

- $\cap y$: $f(0) = \sqrt{0^3 - 5\cdot 0^2 + 6\cdot 0} = 0$, $\cap y = (0,0)$.

- $\cap x: f(x)=0$, es decir $f(x)=\sqrt{x^3-5x^2+6x}=0$, de acá obtenemos $x(x-2)(x-3)=0$, $\cap x: (0,0),(2,0),(3,0)$.

Para analizar el signo, necesitamos construir una tabla de signo con los factores del polinomio incluido en la raíz cuadrada.

	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	•	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	•	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	•	$+$	
$*$		$-$		$+$		$-$		$+$	

De la tabla anterior obtenemos

- $f(x)>0:]0,2[\cup]3,+\infty[$
- $f(x)<0$, nunca se dará, ya que no pueden tomarse valores negativos del polinomio ya que indefinen la raíz.

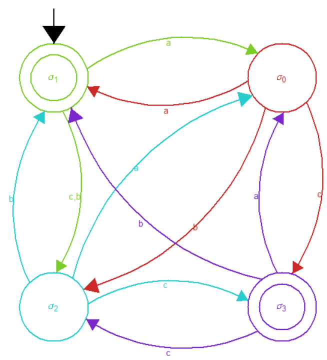
4. **[10 Puntos]** Considere las dos funciones f y g, definidas sobre sus respectivos dominios de números reales, con $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$, $f(x)=x-1$. Verifique que $(g^{-1}\circ f\circ g)(x)=\dfrac{-4}{x+4}$.
Primero vamos a determinar g^{-1}.
Planteamos
$y=\dfrac{x}{x+2}, \Rightarrow y(x+2)=x, \Rightarrow yx-x=-2y, \Rightarrow x=\dfrac{-2y}{y-1}$
$g^{-1}(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$
Ahora, $(g^{-1}\circ f\circ g)(x)=g^{-1}\left[f\left(g(x)\right)\right]$, donde,
$f\left(g(x)\right)=g(x)-1=\dfrac{x}{x+2}-1=\dfrac{-2}{x+2}$
luego
$$g^{-1}\left[f\left(g(x)\right)\right]=\frac{-2f\left(g(x)\right)}{f\left(g(x)\right)-1}=\frac{-2\left(\dfrac{-2}{x+2}\right)}{\dfrac{-2}{x+2}-1}=\frac{\dfrac{4}{x+2}}{\dfrac{-(x+4)}{x+2}}=\frac{-4}{x+4}$$

5. Dado el siguiente autómata de estado finito determinístico, $A=\left(\sigma,\tau,\sigma^*,\Delta,\widehat{A}\right)$, donde $\sigma=\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, $\tau=\{a,b,c\}$, $\sigma^*=\sigma_1$, $\widehat{A}=\{\sigma_1,\sigma_3\}$, y:

	(σ_0, a)	(σ_0, b)	(σ_0, c)	(σ_1, a)	(σ_1, b)	(σ_1, c)
Δ	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0	σ_2	σ_2

	(σ_2, a)	(σ_2, b)	(σ_2, c)	(σ_3, a)	(σ_3, b)	(σ_3, c)
Δ	σ_0	σ_1	σ_3	σ_0	σ_1	σ_2

a) **[5 Puntos]** Elabore a mano el diagrama de transición del mismo.
Se adjunta el autómata generado con la ayuda de Mathematica.



b) **[5 Puntos]** En Mathematica, determine si la hilera $\alpha = cabcabbaccaabbbcbcbcbcbcbabcabcabca$ es aceptada por el autómata.
Se adjunta la solución encontrada en Mathematica.

```
A = MakeAutomaton[DFA, {σ0, σ1, σ2, σ3}, {{σ0, a, σ1}, {σ0, b, σ2}, {σ0, c, σ3}, {σ1, a, σ0}, {σ1, b, σ2},
    {σ1, c, σ2}, {σ2, a, σ0}, {σ2, b, σ1}, {σ2, c, σ3}, {σ3, a, σ0}, {σ3, b, σ1}, {σ3, c, σ2}}, σ1,
   {σ1, σ3}, {a, b, c}];

AcceptedBy[A, {c, a, b, c, a, b, b, a, c, c, a, a, b, b, b, c, b, c, b, c, b, c, b, c, b, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a},
 Trace]
 traza

{False, {σ1, σ2, σ0, σ2, σ3, σ0, σ2, σ1, σ0, σ3, σ2, σ0, σ1, σ2,
  σ1, σ2, σ3, σ1, σ2, σ1, σ2, σ1, σ2, σ1, σ2, σ1, σ0, σ2, σ3, σ0, σ2, σ3, σ0, σ2, σ3, σ0}}
```

6. **[10 Puntos] La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica.**
Implemente una rutina en Mathematica que reciba, un conjunto A, el cual es el conjunto de partida, un conjunto B, el cual es el conjunto de llegada, la gráfica de una relación $G_{\mathcal{R}}$ y determine si dicha relación es una función, en caso de que $G_{\mathcal{R}}$ sea una función debe determinar si la misma

- es inyectiva.
- es sobreyectiva.

- es biyectiva.

Nota: usted debe comentar los principales elementos de su rutina.

Se esta terminando de editar...