Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Tarea 3

II Ciclo 2020

Fecha de entrega: 17 de octubre del 2020

Solución

---

1. **[10 Puntos]** Realizar una revisión bibliográfica en la cual se debe investigar con respecto a:

   a) Benoit Mandelbrot ¿quién fue?, principales aportes matemáticos realizados, aplicaciones de sus aportes matemáticos a la computación.

   b) Principales conceptos de la teoría de la criptografía.

   c) Dar la teoría matemática, pseudocódigo e implementación en algún software de al menos tres fractales.

   d) Si alguien lo desea puede ingresar a la ayuda en Mathematica y escribir: **ref/Nest**, esto por si alguien se desea animarse a realizar fractales en Mathematica.

2. **[30 Puntos]** Del libro que se encuentra en mediación virtual titulado: Matemáticas discretas con aplicaciones de Susanna S. Epp,

   a) Realizar de la página 257 en adelante los ejercicios: 6,7,8,9,13,14,16.

   Demuestre cada enunciado en los ejercicios del 6 al 9 con inducción matemática. No deduzca de ellos el teorema 5.2.2 o el teorema 5.2.3.

   6) Para todo entero $n \geq 1, 2+4+6+...+2n = n^2+n$

      i) Probar para $n = 1$

      $2 \cdot 1 = 1^2 + 1$
      $2 = 2$
      $\rightarrow$ Se demuestra para $n = 1$, se comprueba para los primeros n números.

      $\boxed{\text{H.I: } 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n}$

ii) Probar para $n+1$

H.q.d: $(n+1) = (n+1)^2 + (n+1)$

$n^2 + n + 2(n+1) = (n+1)^2 + (n+1)$

$n^2 + n + 2n + 2 = (n+1)^2 + (n+1)$

$(n^2 + 3n + 2) = (n+1)^2 + (n+1)$

$(n+2)(n+1) = (n+1)(n+1) + 1$

$(n+2)(n+1) = (n+1)(n+2)$

$\boxed{\text{(n+2)(n+1) = (n+2)(n+1)}}$ $\rightarrow$ Se cumple para $n+1$.

7) Para todo entero $n \geq 1, 1 + 6 + 11 + 16 + ... + (5n-4) = \dfrac{n(5n-3)}{2}$

i) Probar para $n = 1$

$$5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$5 \cdot 1 - 4 = \frac{1(5 \cdot 1 - 3)}{2}$$

$1 = 1$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 1$, se comprueba para los primeros n números.

$$\boxed{\text{H.I: 5n-4} = \frac{n(5n-3)}{2}}$$

ii) Probar para $n+1$

H.q.d: $(5n-4) + [5(n+1) - 4] = \dfrac{(n+1)(5(n+1)-3)}{2}$

$$\frac{n(5n-3)}{2} + \frac{5(n+1)-4}{1} = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

$$\frac{n(5n-3)+2(5n+1)}{2}=\frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$
$$\frac{5n^2-3n+10n+2}{2}=\frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$
$$\frac{5n^2-7n+2}{2}=\frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$
$$\frac{(5n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$
$$\frac{(n+1)(5n+2)}{2}=\frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$ $\rightarrow$ Se cumple para $n+1$.

8) Para todo entero $n \geq 0, 1+2+2^2+...+2^n = 2^{n+1}-1$

i) Probar para $n=0$

$2^0 = 2^{0+1}-1$

$1 = 1$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n=1$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } 2^n = 2^{n+1}-1}$

ii) Probar para $n+1$

H.q.d: $2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1+1}-1$

$2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$

$2^{n+2}-1 = 2^{n+2}-1 \rightarrow$ Se demuestra para $n+1$

9) Para todo entero $n \geq 3, 4^3+4^4+4^5+...+4^n = \frac{4(4^n-16)}{3}$

i) Probar para $n=3$

$4^3 = \frac{4(4^3-16)}{3}$

$64 = 64$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n=1$, se comprueba para los primeros n números.

$$\boxed{\text{H.I: } 4^n = \frac{4(4^n - 16)}{3}}$$

ii) Probar para $n+1$

$$4^n = \frac{4(4^n - 16)}{3}$$
$$\frac{4(4^n - 16)}{3} + 4^{n+1} = \frac{4^{n+2} - 64}{3}$$
$$\frac{4^n - 64 + 3(4^{n+1})}{3} = \frac{4^{n+2} - 64}{3}$$
$$\frac{4(4^{n+1}) - 64}{3} = \frac{4^{n+2} - 64}{3}$$
$$\frac{4^{n+2} - 64}{3} = \frac{4^{n+2} - 64}{3} \rightarrow \text{Se demuestra para } n+1$$

13) Para todo entero $n \leq 2$, $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n-1) = \frac{n(n-1(n+1))}{3}$$

i) Probar para $n = 2$

$$1 \cdot 2 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3}$$

$2 = 2$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 1$, se comprueba para los primeros n números.

$$\boxed{\text{H.I: } (n-1)(n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}}$$

ii) Probar para $n+1$

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$\frac{n(n-1)(n+1) + 3n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$\frac{n(n+1)((n-1)+3)}{3} = \frac{n(n+1)(k+2)}{3}$$

$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \rightarrow$ Se demuestra para $n+1$

14) Para todo entero $n \leq 0, \sum\limits_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$

i) Probar para $n = 0$

$1 \cdot 2^1 = 2$
$2 \cdot 2^2 = 8$
$3 \cdot 2^3 = 24$

$(0+1)(2^{0+1}) = 2$
$0 \cdot 2^{0+2} + 2 = 2$

$\boxed{\text{H.I: } (n+1)(2^{n+1}) = n \cdot 2^{n+2}}$

ii) Probar para $n+1$

$(n+1)(2^{n+1}) = n \cdot 2^{n+2} + 2$

$(n+1)(2^{n+1}) + (n+2)(2^{n+2}) = (n+1)(n^{+3}) + 2$

$n + 2^{n+2} + 2 + 2^{n+2} + 2^{n+3} = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2$

$n + 2^{n+2} + 2 + 2^{n+2} \cdot n + 2^{n+3} = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2$

$n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2 = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2 \rightarrow$ Se demuestra para $n+1$

16) Para todo entero $n \leq 2, (1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2})...(1 - \dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{n+1}{2n}$

i) Probar para $n = 2$

$(1 - \dfrac{1}{2^2}) = \dfrac{2+1}{2 \cdot 2}$

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{\text{H.I: } (1 - \dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{n+1}{2n}}$

ii) Probar para $n+1$

$$(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$$
$$(\frac{n+1}{2n})(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{(n+2)}{2(n+1)}$$
$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{(n+2)}{2(n+1)}$$
$$\frac{n+1^2-1}{2n\cdot(n+1)}=\frac{(n+2)}{2(n+1)}$$
$$\frac{n^2+2n+1-1}{2n\cdot(n+1)}=\frac{(n+2)}{2(n+1)}$$
$$\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}\rightarrow \text{Se demuestra para } n+1$$

b) Realizar de la página 266 en adelante los ejercicios: 3,8,9,12,17,18.

16) Observe que

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}=\frac{4}{9}$$

$$\boxed{\text{Fórmula General: } \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}}$$

i) Probar para $n=1$

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{2\cdot +1}$$
$$\frac{1}{(1)\cdot(3)}=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 1$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}}$

ii) Probar para $n + 1$

$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$
$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$
$\frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow$ Se demuestra para $n + 1$

8) $5^n - 1$ es divisible por 4, para cada entero $n \geq 0$

i) Probar para $n = 0$

$5^0 - 1$

$1 - 1 = 0$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 0$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } 5^n - 1 = 4k}$ 1 $5^n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$

ii) Probar para $n + 1$
$5^{n+1} - 1 = 4k$

$5^n \cdot 5^1 - 1 = 4k$

$(4k + 1)4 = 4k$ 1

$4k_1 = 4 * k \rightarrow$ Se comprueba cuando damos el paso inductivo a $n + 1$, la expresión es divisible por 4

9) $7^n - 1$ es divisible por 6, para cada entero $n \geq 0$

i) Probar para $n = 0$

$7^0 - 1$

$1 - 1 = 0$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 0$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } 7^n - 1 = 6k}$ 1 $7^n = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}$

ii) Probar para $n + 1$

$7^n - 1 = 6k$

$7^{n+1} - 1 = 6k$

$7^n * 7^1 - 1 = 6k$

$(6k + 1) + 6 = 6k$ 1

$6k_1 = 6k \rightarrow$ Se comprueba cuando damos el paso inductivo a $n + 1$, la expresión es divisible por 6

12) Para cualquier entero $n \geq 0$, $7^n - 2^n$ es divisible por 5.

i) Probar para $n = 0$

$7^0 - 2^0$

$1 - 1 = 0$

$\boxed{\text{H.I: } 7^n - 2^n = 5k,\ k \in \mathbb{Z}}$ 1 $7^n = 5k + 2^n$

ii) Probar para $n + 1$

$7^{n+1} - 2^{n+1}$

$7^n \cdot 7^1 - 2^{n+1}$

$(5k + 2^n)\ 7 - 2^n \cdot 2$

$35k + 7 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^n$

$35k + 5 \cdot 2^n$

$5(7k + 2^2) \rightarrow$ Se comprueba cuando damos el paso inductivo a $n+1$, la expresión es divisible por 5

17) $1 + 3n \leq 4^n$, para cada entero $n \geq 0$

i) Probar para $n = 0$

$1 + 3(0) \leq 4^0$

$1 \leq 1$
$\rightarrow$ Se demuestra para $n = 0$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } 1 + 3n \leq 4^n}$

ii) Probar para $n + 1$

a$1 + 3n + 1 \leq 4^n + 1$c

$\rightarrow$ Partiendo de H.I

$1 + 3n \leq 4^n$

$1 + 3n + 1 \leq 4^n + 1$

$\rightarrow$ Basta demostrar que $b < c$

$4^n + 1 < 1 + 3n + 1$

$4^n + 1 < 3n + 2$

$4^n - 1 < 1 + 3n$

$$\frac{4^n - 1}{3} < n$$

$\rightarrow$ Para nuestra proposición se demuestra que $n \geq 0$

18) $5^n + 9 < 6^n$, para cada entero $n \geq 2$

Probar para n=2

$5^2 + 9 < 6^2$

$34 < 36$
→ Se demuestra para $n = 0$, se comprueba para los primeros n números.

$\boxed{\text{H.I: } 5^n + 9 < 6^n}$

ii) Probar para $n + 1$

$5^{n+1} + 9 < 6^{n+1}$

→ Partiendo d H.I

a$5^n + 9 < 6^n + 1$c

→ Basta demostrar que $b \leq c$

$6^n + 1 \leq 6^n + 1$

→ Para nuestra proposición se demuestra que $n \geq 2$

c) Realizar de la página 448 en adelante los ejercicios: 1-a,3,5,7,8,10,11,21.

1-a) La congruencia módulo 2 es una relación E que se define $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ como sigue: Para todos los enteros m y n, m ∈ n $\iff$ $3|(m - n)$

1. ¿Es 0 in 0?
Si, $0 - 0 = 0$, 0 es par.

2. ¿Es 5 in 2?
No, $5 - 2 = 3$, 3 no es par.

3. ¿Es $(6, 6) \in E$?
Si, $6 - 6 = 0$, 0 es par.

4. ¿Es $(-1, 7) \in E$?
Si, $-1 - 7 = -8$, -8 es par.

3) La relación congruencia módulo 3, T, se define $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ como sigue: para todos los enteros m y n, m T n $\iff 3|(m-n)$

1a) ¿Es 10 T 1?
No, debido a que: $\dfrac{3}{10-1} = \dfrac{1}{3}$

2a) ¿Es 1 T 10?
No, debido a que: $\frac{3}{1-10}$

3a) ¿Es (2, 2) $\in$ T ?
No, debido a que:$\dfrac{3}{2-2} = \dfrac{3}{0}$

4a) ¿Es (8, 1) $\in$ T ?
No, debido a que:$\dfrac{3}{8-1} = \dfrac{3}{7}$

b) Enumere cinco enteros n tal que n T 0.
(-3,-1,1,3)

c) Liste cinco enteros n tal que n T 1.
(4,2,-2,0)

d) Enumere cinco enteros n tal que n T 2.
(5,-1,3,1)

e) Haga y demuestre una conjetura acerca de cuáles enteros están relacionados por T a 0, cuáles enteros están relacionados por T a 1 y cuáles enteros están relacionados por T a 2.

Todos los enteros de la forma 3k, para algún entero k, están relacionados por T a 0.

Todos los enteros de la forma 3k+1, para algún entero k, están relacionados por T a 1.

Todos los enteros de la forma 3k+2, para algún entero k, están relacionados por T a 2.

5) Sea $X = \{a, b, c\}$. Recuerde que $P(X)$ es el conjunto potencia de X. Defina una relación R en P(X) como sigue: Para toda $A, B \in P(X)$

A R B $\iff$ A tiene el mismo número de elementos que B

a) ¿Es {a, b} R {b, c}?
Sí, {a, b} y {b, c} tienen la misma cantidad de elementos.

b) ¿Es {a} R {a, b}?
No, {a} y {a, b} tienen la misma cantidad de elementos.

C) ¿Es {c} R {b}?
Sí, {c} y {b} tienen la misma cantidad de elementos.

7) Se define una relación R sobre Z como sigue: Para todos los enteros m y n.

m R n $\iff$ $5|(m^2 - n^2)$

a) ¿Es 1 R(-9)?
Si, $1^2 - (-9)^2 = -80$ y $\dfrac{5}{-80}$
$\rightarrow -80 = 5 \cdot -16$

b) ¿Es 2 R 13?
No, $2^2 - 13^2 = -156$ y $\dfrac{5}{-156}$

c) ¿Es 2 R(-8)?
Si, $2^2 - (-8)^2 = -60$ $\dfrac{5}{-60}$
$\rightarrow -60 = 5 \cdot (-12)$

d) ¿Es (-8) R 2?
Si, $(-8)^2 - 2^2 = 60$ y $\dfrac{5}{60}$
$\rightarrow 60 = 50 \cdot 12$

8) Sea A el conjunto de todas las cadenas de a y b de longitud 4. Se define una relación R sobre A como sigue: Para todas s, t $\in A$

s R t $\iff$ s tiene los mismos dos primeros caracteres que t

a) ¿Es abaa R abba?

Sí, por que en los primeros 2 caracteres s y t tenemos S=ab y T=ab.

b) ¿Es aabb R bbaa?
No, por que en los primeros 2 caracteres s y t tenemos S=aa y T=bb.

c) ¿Es aaaa R aaab?
Si, por que en los primeros 2 caracteres s y t tenemos S=aa y T=aa.

d) ¿Es baaa R abaa?
No, por que en los primeros 2 caracteres s y t tenemos S=ba y T=ab.

10) Sea A = {3, 4, 5} y B = {4, 5, 6} y sea R la relación “menor que”. Es decir, para toda (x, y) $\in AxB$

x R y $\iff x < y$

Establezca explícitamente que pares ordenados están en R y en R^{-1}

R= {(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}

R^{-1}= {(4,3),(5,3),(6,3),(5,4),(6,4),(6,5)}

11) Sea A ={3, 4, 5} y B ={4, 5, 6} y sea S la relación “divide”. Es decir, para todo $(x, y) \in AxB$

x S y $\iff x|y$

Establezca explícitamente que pares ordenados están en S y en S^{-1}

S = {(4,4),(5,5), (3,6)}

S^{-1} = {(4,4),(5,5),(6,3)}

21) Se definen las relaciones R y S sobre R como sigue:

R = $\{(x, y) \in RxR | x < y\}$ y S = $\{(x, y) \in RxR | x = y\}$

Es decir, R es la relación “menor que” y S es la relación “igual” en R. Trace la gráfica de R, S, $R \cup S$ y $R \cap S$ en el plano cartesiano.

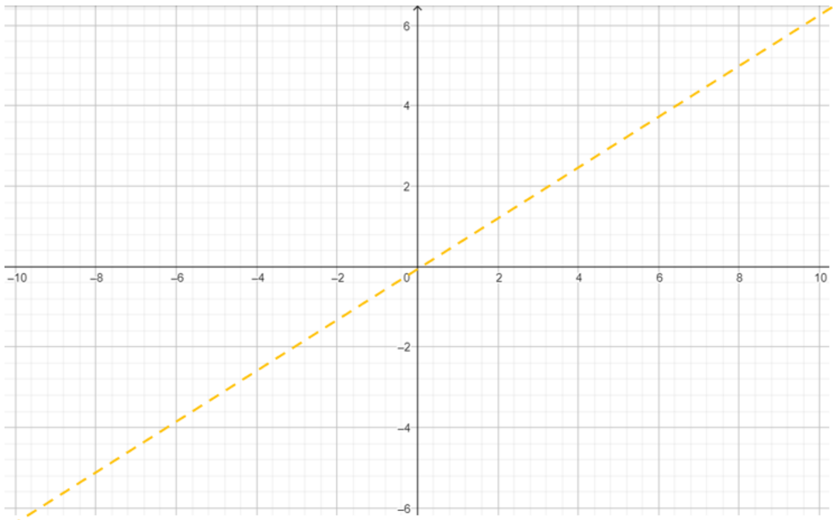

Figura 1: Recta R: Cualquier elemento que este arriba de la recta amarilla, cumple con x<y

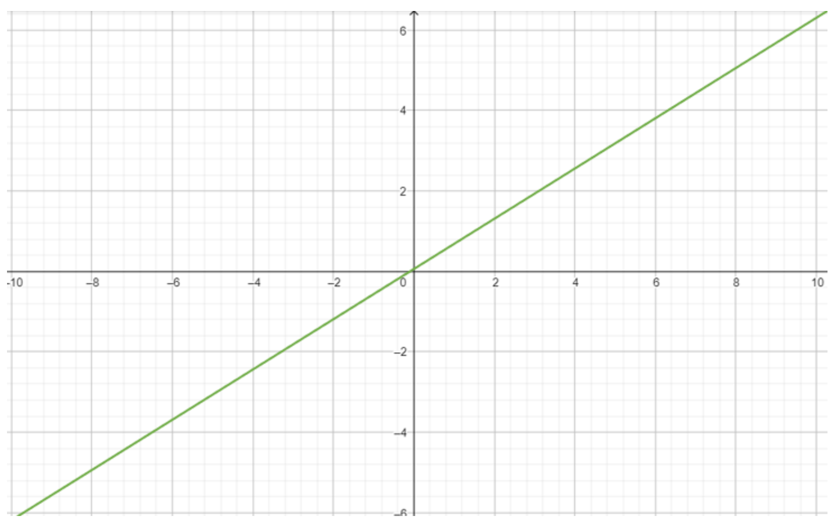

Figura 2: Recta S

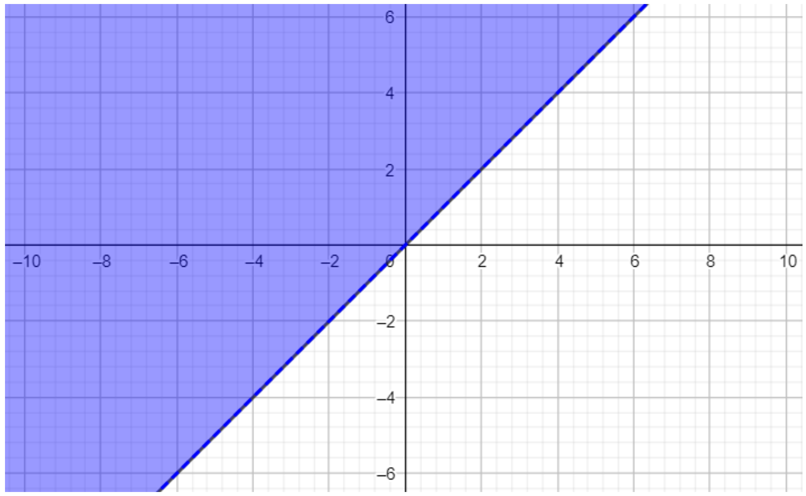

Figura 3: Recta R U S

$R \cap S : \emptyset$

3. **[15 Puntos]** Escriba un programa recursivo y otro no recursivo para calcular $n!$. Determine el valor de 200 y compare los tiempos requeridos por los programas. Se presenta la implementación en Mathematica

   a) De forma recursiva

```
(*Rutina recursiva*)
Factorialn[n_] := If[Or[n == 0, n == 1], Return[1], n * Factorialn[n - 1]];
                  si  operación o           retorna

Timing[Factorialn[200]]
cronometra
{0.,
 788 657 867 364 790 503 552 363 213 932 185 062 295 135 977 687 173 263 294 742 533 244 359 449 963 403 342 920 304 284 011 984
  623 904 177 212 138 919 638 830 257 642 790 242 637 105 061 926 624 952 829 931 113 462 857 270 763 317 237 396 988 943 922 445
  621 451 664 240 254 033 291 864 131 227 428 294 853 277 524 242 407 573 903 240 321 257 405 579 568 660 226 031 904 170 324 062
  351 700 858 796 178 922 222 789 623 703 897 374 720 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000}
```

Figura 4: Forma recursiva

   b) De forma iterativa

   c) Como una simple curiosidad, se le insta al estudiante a dar un valor al factorial, en el cual el tiempo de ejecución empiece a ser diferente de cero.

```
(*Rutina iterativa*)

FactorIter[n_] := Module[{i, x = n, fact = 1},
  While[x > 1,
   fact = fact * x;
   x--
   ];
  Return[fact];
  ];
```

```
Timing[FactorIter[200]]
```

```
{0.,
 788657867364790503552363213932185062295135977687173263294742533244359449963403342920304284011984623904177212138919638830\
  257642790242637105061926624952829931113462857270763317237396988943922445621451664240254033291864131227428294853277524242\
  407573903240321257405579568660226031904170324062351700858796178922222789623703897374720000000000000000000000000000000000\
  000000000000000}
```

Figura 5: Forma iterativa

4. **[20 Puntos]** Considere la sucesión

$$a_n = \{-2, -6, -12, -20, -30, \ldots\}$$

a) Escriba la sucesión de manera recursiva y en forma explícita.
Tenemos

- $a_1 = -2$, $a_2 = -6$, el cual es igual a $a_2 = -2 - 4$, $a_2 = a_1 - 2(2)$
- $a_3 = -12$, el cual es igual a $a_3 = -6 - 6$, $a_3 = a_2 - 2(3)$
- $a_4 = -20$, el cual es igual a $a_4 = -12 - 8$, $a_4 = a_3 - 2(4)$, de acá ya podemos ver con claridad el comportamiento recursivo el cual corresponde a,

$$a_n = a_{n-1} - 2 \cdot n$$

Por otro lado para determinar la fórmula explícita podemos apoyar en la rutina **FindSequenceFunction** de Mathematica, en ella se encuentra

$$a_n = -n^2 - n$$

b) Haciendo uso del comando RecurrenceTable visto en clase, y a partir de lo encontrado en el punto anterior, determine los primeros 50 términos de dicha sucesión.

Nota: se adjunta la gráfica de los puntos, pero ello no se solicita en la tarea, es únicamente para que el estudiante pueda observar el comportamiento decreciente del conjunto.

```
FindSequenceFunction[{-2, -6, -12, -20, -30}, n]
|encuentra función de secuencia

-n - n^2
```

```
RecurrenceTable[{a[n] == a[n - 1] - 2 n, a[1] == -2}, a, {n, 1, 50}]
|tabla de recurrencia

{-2, -6, -12, -20, -30, -42, -56, -72, -90, -110, -132, -156, -182, -210, -240, -272, -306, -342,
 -380, -420, -462, -506, -552, -600, -650, -702, -756, -812, -870, -930, -992, -1056, -1122, -1190, -1260,
 -1332, -1406, -1482, -1560, -1640, -1722, -1806, -1892, -1980, -2070, -2162, -2256, -2352, -2450, -2550}
```

```
ListPlot[%7]
|representación de lista
```

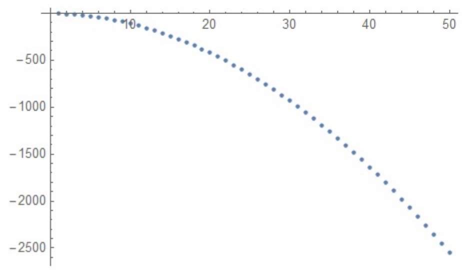

Figura 6: 50 primeros elementos

c) Escriba un pseudocódigo recursivo que calcule el n-ésimo término de la sucesión.

Algoritmo .1: Algoritmo[n]

Data: n, valor por calcular del conjunto.
Result: a_n valor del n-ésimo encontrado.

```
if n = 1 then
    Return[-2]
else
    Return[Algoritmo[n - 1] - 2n]
```

---

d) Demuestre que el programa converge por medio del principio de demostración por recursividad.

a. Dominio bien fundamentado: tomar el conjunto de números Naturales.

b. Existe el caso raíz, $n = 1$, el cual devuelve -2, el algoritmo se detendrá al llegar a $n = 1$.

c. Se cumple que el algoritmo es decreciente, ya que se llama a Algoritmo[n-1], donde $(n-1) < n$.

- De los puntos anteriores se da que el algoritmo cumple el principio de demostración por recursividad.

e) Realice la implementación del pseudocódigo en Mathematica.

Nota: en la imagen se muestra el algoritmo solicitando el cuarto elemento del conjunto, el cual es -20.

```
Funcion[n_] := If[n == 1,
                  si
    Return[-2],
    retorna
    Return[Funcion[n - 1] - 2 n]];
    retorna

Funcion[4]

-20
```

Figura 7: Implementación en Mathematica

5. **[25 Puntos]** Se adjunta el Capítulo 1 del libro de Enrique Vilchez, mismo que esta en mediación virtual. En este capítulo viene el pseudocódigo y la implementación en Mathematica del algoritmo de ordenamiento Quicksort, a partir de lo anterior:

   a) Mencione y describa otros algoritmos de ordenamiento.

   b) La importancia de los algoritmos de ordenamiento.

   c) Modifique el algoritmo Quicksort para ordenar una lista de números reales de forma descendente.

```
LISTA = {};
n = Input["Ingrese el tamaño de la LISTA:"];
    entra
For[i = 1, i <= n, i++,
para cada
  m = Input [i "° dato de la LISTA:"];
      entra
  LISTA = Append[LISTA, m];];
          añade
Print["La LISTA es: ", LISTA];
escribe

Quicksort[begin_, end_] := If[ begin < end,
                              si
   i = begin;
   j = end;
   piv = LISTA[[Floor[(begin + end) / 2]]
                 entero inferior
    ];
   While[i <= j,
   mientras
    While[LISTA[[i]] > piv, i++];
    mientras
    While[LISTA[[j]] < piv, j--];
    mientras
    If[i ≤ j, aux = LISTA[[i]];
    si
     LISTA[[i]] = LISTA[[j]];
     LISTA[[j]] = aux;
     i++;
     j--]
   ];

   If[begin < j, Quicksort[begin, j]];
   si
   If[i < end, Quicksort[i, end]]
   si
  ];
begin = 1;
end = n;
Quicksort[begin, end]
Print["La LISTA ordenada es: ", LISTA];
```

Figura 8: Implementación en Mathematica

d) Construya en Mathematica un algoritmo recursivo para determinar el máximo de una lista de n números reales. **Sugerencia:** utilice como base el algoritmo Quicksort.

En este apartado se puede realizar con el algoritmo anterior, pero modificando en la rutina, que a la hora de imprimir, solo muestre el primer valor de la lista resultante, que en este caso siempre sera el número mayor de la lista; es decir

$$Print[LISTA[[1]]];$$

También se puede realizar de forma recursiva sin utilizar el Algoritmo Quicksort.

```
In[*]:= (*MAYOR OPCION 1*)
lista = {2, 5, 7, 2, 3, 4, 7, 88, 8, 9, 10, 29, 2, 3};
Maximo[indice_, maximo_, lista_] := Module[{max = maximo},

   (*COMPARAR*)
   If[(max) < lista[[indice]],
    max = lista[[indice]];];

   (*RECORRER*)
   If[indice == Length[lista],
    Return[max],
    Return[Maximo[(indice + 1), max, lista]]];];

Print[Maximo[1, 0, lista]];

88
```

Figura 9: Implementación en Mathematica, opción 1

Un simple: muchas gracias, puede ayudar a que el mundo sea un lugar mejor, todo radica en los valores...

MaLu