Introducción a las matrices

Luis Eduardo Amaya B.
Sede Guanacaste, Universidad de Costa Rica.

MA-0320 - Matemáticas Discretas
Setiembre 2020

Contents

Matrices booleanas

No es de nuestro interés profundizar en el tema general de las matrices, para ello existe el curso de *álgebra lineal*, a nosotros nos interesa concentrarnos en el caso particular de las matrices booleanas.

Definición

Una matriz de tamaño $m \times n$ se llama booleana si sus entradas pueden ser solamente 0 o 1.

Estas serán de suma utilidad para representar los gráficos de las relaciones definidas sobre conjuntos finitos, tema que se estudiará en el capítulo de Relaciones.

Operaciones entre matrices booleanas

Transpuesta de una matriz

Definición

Se define la matriz traspuesta de M como la matriz cuyas columnas son las filas de M y las filas son las columnas de M. Esta nueva matriz se denota por M^t.
Si la matriz M, posee tamaño $m \times n$, entonces M^t posee tamaño $n \times m$.
Simbólicamente, si $M = (m_{ij})$ se tiene que

$$M^t = (m_{ji})$$

.

Operaciones entre matrices booleanas

Transpuesta de una matriz

$(m)_{12} = (m^t)_{21}$

Ejemplo

Ejemplo 4: *para la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ *determinar su transpuesta.* $M^t_{3\times 2}$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$\dim M = \{2, 3\}$

$T_{3\times 2}$

Operaciones entre matrices booleanas

Transpuesta: implementación en Mathematica

```
TranspuestaMatrices[A_] := Module[{dimA = 0, x = 0},
                           módulo
  dimA = Dimensions[A];
         dimensiones
  (*El estudiante podría leer un poco mas sobre la estructura del comando Dimens
  T = ConstantArray[0, {dimA[[2]], dimA[[1]]}];
      arreglo constante
  For[i = 1, i ≤ dimA[[1]], i++,
  para cada
   For[j = 1, j ≤ dimA[[2]], j++,
   para cada
     T[[i, j]] = A[[j, i]];
    ];
  ];
  Print["La transpuesta de la matriz ", MatrixForm[A], " es:", MatrixForm[T]];
  escribe                                forma de matriz       forma de matriz
 ];
```

Operaciones entre matrices booleanas

Disyunción

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Definición

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices booleanas de $m \times n$, se define la *disyunción de A y B* *como la nueva matriz $A \vee B = D$, donde las entradas son:*

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & si \quad a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0 \end{cases}$$

$A \vee B = B \vee A$

Operaciones entre matrices booleanas

Disyunción

Ejemplo

Ejemplo 5: *dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3×4

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3×4 *determinar* $A \vee B$.

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A \vee B)}_{D} \vee C$$

$$D \vee C$$

Operaciones entre matrices booleanas

Disyunción: implementación en Mathematica

```
DisjuncionMatrices[A_, B_] := Module[{dimA = 0, dimB = 0},
                              módulo
   dimA = Dimensions[A];
          dimensiones
   dimB = Dimensions[B];
          dimensiones
   (*El estudiante podría leer un poco mas sobre la estructura del comando Dimensions*)

   If[dimA ≠ dimB,
   si
    Print["Los tamaños de las matrices son diferentes, y no se puede realizar la disjunción"],
    escribe
    (*Necesitamos crea una matriz "vacía" de ceros, en la cual se va a almacenar el resultado de la suma*)
    T = ConstantArray[0, {dimA[[1]], dimA[[2]]}];
        arreglo constante
    For[i = 1, i ≤ dimA[[1]], i++,
    para cada
     For[j = 1, j ≤ dimA[[2]], j++,
     para cada
       If[(A[[i, j]] == 1) || (B[[i, j]] == 1),
       si
         T[[i, j]] = 1;
        ];



      ];
    ];
    Print["El resultado de realizar la disjunción de  la matriz ", MatrixForm[A], " con la matriz ", MatrixForm[B], " es:", MatrixForm[T]];
    escribe                                                       forma de matriz                     forma de matriz      forma de matriz
   ];

  ];
```

Operaciones entre matrices booleanas

Conjunción

Definición

Si $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$ *son dos matrices booleanas de* $m \times n$*, se define la conjunción de A y B como la nueva matriz* $A \wedge B = D$*, donde las entradas son:*

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & si \quad a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$$

Operaciones entre matrices booleanas

Conjunción

Ejemplo

Ejemplo 6: *dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *determinar* $A \wedge B$.

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \odot B \neq B \odot A$

Operaciones entre matrices booleanas

Multiplicación

$A_{m \times n} \odot B_{n \times p}$

$\dim A[[2]] = \dim B[[1]]$

Definición

Considere las matrices $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de tamaño $n \times p$. La multiplicación booleana de A y B es la nueva matriz de tamaño $m \times p$ que se denota por $A \odot B$, de manera que:

- $(A \odot B)[i, j] = 1$, *si existe un 1 en la misma posición en la fila i de A y en la columna j de B.*
- $(A \odot B)[i, j] = 0$ *si no hay coincidencia.*

Operaciones entre matrices booleanas

Multiplicación

Ejemplo

Ejemplo 7: *Si tenemos las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *determinar* $A \odot B$. *¿ Se puede calcular* $B \odot A$?

3×3 $\quad$ 3×2

$$\underset{3\times 3}{A} \odot \underset{3\times 2}{B} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}$$

3×2

$(A \odot B)_{3 \times 2}$

$i \quad j$

$$\underset{3\times 2}{B} \odot \underset{3\times 3}{A} \qquad 2 \neq 3$$

Operaciones entre matrices booleanas

Multiplicación: implementación en Mathematica

```
ProductoMatrices[A_, B_] := Module[{dimA = 0, dimB = 0, x = 0},
                           módulo
  dimA = Dimensions[A];
         dimensiones
  dimB = Dimensions[B];
         dimensiones

  If[dimA[[2]] ≠ dimB[[1]],
  si
   Print["Los tamaños de las matrices no permiten realizar la multiplicación"],
   escribe
   (*Necesitamos crea una matriz "vacía" de ceros, en la cual se va a almacenar el resultado de la suma*)
   T = ConstantArray[0, {dimA[[1]], dimB[[2]]}];
       arreglo constante
   For[i = 1, i ≤ dimA[[1]], i++,
   para cada
    For[j = 1, j ≤ dimB[[2]], j++,
    para cada
      For[k = 1, k ≤ dimA[[2]], k++,
      para cada
        If[A[[i, k]] == B[[k, j]],
        si
          T[[i, j]] = 1;
          Break;
          finaliza iteración
         ];


       ];
     ];
   ];
   Print["El resultado de multiplicar la matriz ", MatrixForm[A], " con la matriz ", MatrixForm[B], " es:", MatrixForm[T]];
   escribe                                        forma de matriz                      forma de matriz          forma de matriz
  ];
```

$i = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{ik} \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$j = 1$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \\ b_{21} & \\ b_{31} & \\ \vdots & \\ b_{kj} & \end{pmatrix}$$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operaciones entre matrices booleanas

Operaciones combinadas

Ejemplo

Ejemplo 8: *Si tenemos las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2×3 $\quad$ 3×2

determinar $[[(A \odot B) \wedge I_2] \vee 0_{2\times 2}]^t$

i) $A \odot B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $(A \odot B) \wedge I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$H = H^t \rightarrow$ simétrica

Operaciones entre matrices booleanas

Ejemplo 8

$H \vee O_{n \times n} = H$

$H \wedge O_{n \times n} = O_{n \times n}$

iii) $[(A \odot B) \wedge I_2] \vee O_{2 \times 2} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $[[(A \odot B) \wedge I_2] \vee O_{2 \times 2}]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operaciones entre matrices booleanas

Operaciones combinadas

Ejemplo

Ejemplo 9: *Si tenemos las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1x3

3x1

determinar $\left[(A \odot B)^t \wedge 1_{3\times 3}\right] \vee I_3$