UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

# Modelos de Transporte y Asignación

Sede Guanacaste

Ing. Luis Delgado Lobo MBA

# Métodos de transporte

- Introducción
- Esquina noroeste
- Costo mínimo
- Aproximación de Vogel
- Método MODI
- Método Húngaro o Algoritmo de Kuhn

# Introducción

El problema de transporte está enfocado principalmente para determinar la manera óptima de transportar bienes de un punto de destino a un punto de origen, optimizando los recursos y encontrando el costo mas bajo.

Para lo cual es necesario obtener modelos matemáticos que permitan una buena toma de decisiones, los cuales pueden ser resueltos mediante el **método de la esquina noroeste, método de Vogel, método de costo mínimo** para el problema de transporte.

# Propósito de los métodos de transporte

El objetivo principal de los modelos de transporte es la minimización de los costos totales al enviar un producto desde el punto o puntos de origen, hasta el punto o puntos de destino.

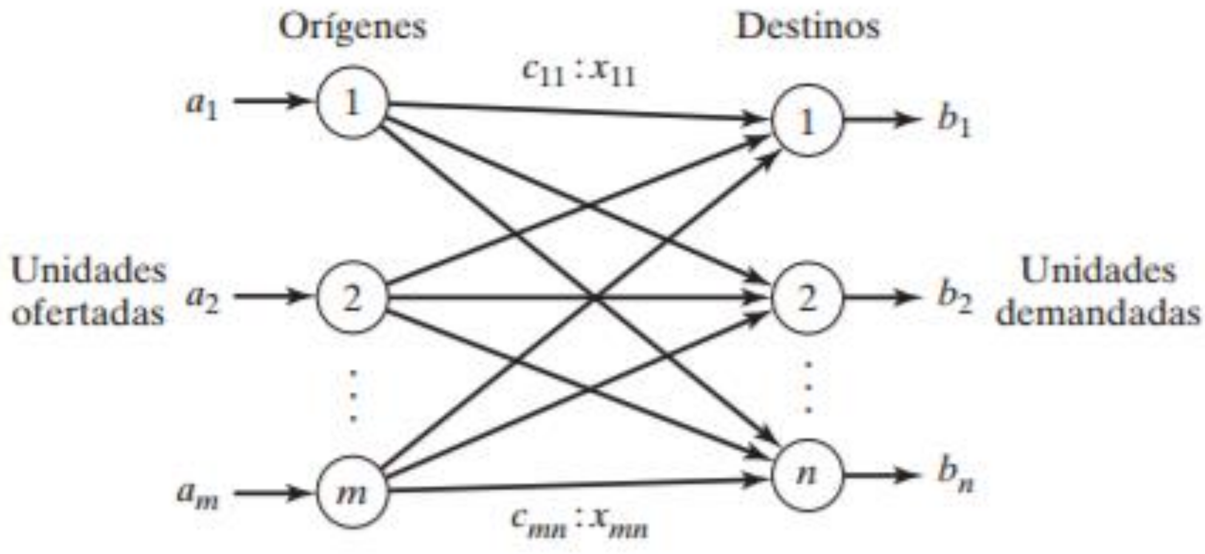
**Bajo las siguiente premisas:**

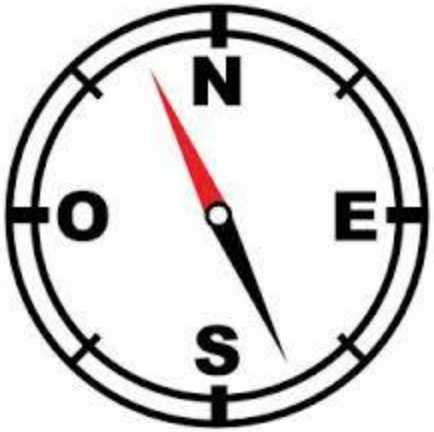
- La función objetivo y las restricciones deben ser lineales.
- Las mercancías para distribuir deben ser uniformes.
- La suma de la capacidad de todos los orígenes. deben ser iguales a la capacidad de los destinos; es decir oferta igual a demanda.

# Propósito de los métodos de transporte

Identificación de las restricciones:

- El embarque total de cada punto de origen no debe exceder su capacidad.
- El embarque total recibido por punto de demanda debe satisfacer sus requerimientos.






# Método de la esquina noroeste

Es un método que permite encontrar una solución inicial (sbf), una vez que se tenga la tabla del modelo de transporte balanceado o "equilibrado", es decir la oferta es igual a la demanda.

Este método es uno de los mas sencillos para encontrar una solución inicial factible. Sin embargo es considerado uno de los métodos menos probables para obtener una buena solución de "bajo costo" porque ignora la magnitud relativa de los costos.

# Procedimiento del método de la esquina noroeste

- Seleccionar la celda de la esquina noroeste (esquina superior izquierda) y cubra la demanda solicitada de manera que se cubra en su totalidad o hasta agotar completamente la disponibilidad de recursos.
- En caso que la totalidad de la oferta no haya cubierto la demanda solicitada continuar con el proceso de asignación de recursos hasta cumplir con la demanda. A este procedimiento o paso se le llama con frecuencia saturar.
- Corrija los números del suministro y requerimiento para reflejar lo que va quedando de suministro y vuelva al paso uno.

# Procedimiento del método de la esquina noroeste

Reglas para el desarrollo del método esquina noroeste:

- Los envíos son indicadores dentro de cada celda.
- Los suministros y requerimientos que quedan pueden ser registrados a la derecha de los números originales.
- Las filas correspondientes a los orígenes pueden ser eliminadas o señaladas, después de que sus requerimientos estén completamente llenos.

# PROBLEMA DE TRANSPORTE: MÉTODO DE ESQUINA NOROESTE

Ejemplo

La Able Company tiene 3 plantas cada una de las cuales puede fabricar los 3 productos de la compañía. Los precios de venta son independiente de la planta de origen, pero los costos variables difieren debido a las distintas edades de la maquinaria y a los costos de la mano de obra. La Able Company quiere saber qué cantidad de cada producto debe fabricarse en cada planta.

Costo por demanda del producto

| Planta | Capacidad | Producto | Demanda |
|---|---|---|---|
| 1 | 500 | Estándar | 1500 |
| 2 | 3000 | De lujo | 2000 |
| 3 | 3500 | De súper lujo | 2500 |

Costo por producto y planta

| Planta | Estándar | De lujo | De super lujo |
|---|---|---|---|
| 1 | \$4 | \$7 | \$5 |
| 2 | 6 | 8 | 7 |
| 3 | 5 | 4 | 4 |

- Plante el problema como un problema de transporte
- Encuentra una solución inicial
- Encuentra la solución óptima que maximice las ganancias de Able Company

# Construir de la tabla inicial y balanceo de oferta y demanda

| | Estándar | De Lujo | Súper lujo | Oferta |
|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4 | \$7 | \$5 | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | 3500 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | |

Oferta= 500+3000+3500=7000
Demanda=1500+2000+2500=6000

En este caso la oferta es mayor a la demanda por lo que es necesario balancear la oferta y demanda agregando en este caso una demanda ficticia

# Construir de la tabla inicial y balanceo de oferta y demanda

| | Estándar | Lujo | Súper Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Seleccionar la celda de la esquina noroeste y cubrir la demanda

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | 500 | | | | 500 / 0 |
| Planta 2 | | | | | 3000 |
| Planta 3 | | | | | 3500 |
| Demanda | 1500 / 1000 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Seleccionar la celda de la esquina noroeste y cubrir la demanda

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | 500 | | | | 0 |
| Planta 2 | 1000 | | | | 3000 2000 |
| Planta 3 | | | | | 3500 |
| Demanda | 1000 | 2000 | 2500 | 1000 | |

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

# Seleccionar la celda de la esquina noroeste y cubrir la demanda

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | 500 | | | | 0 |
| Planta 2 | 1000 | 2000 | | | 2000 |
| Planta 3 | | | | | 3500 |
| Demanda | 0 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Seleccionar la celda de la esquina noroeste y cubrir la demanda

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | 500 | | | ----- | 0 |
| Planta 2 | 1000 | 2000 | | ----- | 0 |
| Planta 3 | | | 2500 | ----- | 3500 1000 |
| Demanda | 0 | 0 | 2500 | 1000 | |

# Seleccionar la celda de la esquina noroeste y cubrir la demanda

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | 500 $4 | | | | 0 |
| Planta 2 | 1000 $6 | 2000 $8 | | | 0 |
| Planta 3 | | | 2500 $4 | 1000 ← | 1000 0 |
| Demanda | 0 | 0 | 0 | 1000 0 | |

Al cubrirse la totalidad de demandas y oferta se llega a una solución básica inicial, sin embargo no es óptima

Costo inicial = 500(4)+1000(6)+2000(8)+2500(4)=$34000

# Método de costo mínimo

Es un método intuitivo que busca subsanar la deficiencia del método de la esquina noroeste en donde se toman en consideración los costos y consiste en detectar las casillas de menor coste y una forma simple de lograrlo es hacerlo de forma ordena.

# Método de costo mínimo

El procedimiento para su aplicación es el siguiente:

Paso 1. Localizar la celda menos costosa de la matriz, se deben ignorar las celdas ficticias

Paso 2. Se cubre la demanda de la celda seleccionada al máximo permitido por la oferta. Se eliminan las demás celdas en el reglón o columna que se agota

Paso 3. Se repiten los pasos 1 y 2 para las celdas restantes hasta que llegue a una solución completa.

Nota: Para la aplicación del método de costo mínimo se debe obtener la tabla inicial balanceada

# Método de costo mínimo

## Ejemplo de aplicación

Continuando con el ejemplo de La Able Company, una vez obtenida la tabla inicial balanceada

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Método de costo mínimo

Paso 1. Localizar la celda menos costosa de la matriz, se deben ignorar las celdas ficticias

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | |

En este caso se tienen tres posibles opciones, siendo indistinta la celda que se seleccione, por lo que seleccionaremos la primera opción (1,1)

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4 500 | \$7 | \$5 | ----- | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1500 1000 | 2000 | 2500 | 1000 | |

Paso 2. Se cubre la demanda de la celda seleccionada al máximo permitido por la oferta. Se eliminan las demás celdas en el reglón o columna que se agota

# Método de costo mínimo

Paso 3. Se repiten los pasos 1 y 2 para las celdas restantes hasta que llegue a una solución completa.

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 500 | $7 | $5 | ----- | |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1000 | 2000 | 2500 | 1000 | |

En este caso se tienen dos opciones, se selecciona la celda (3,2)

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4<br>500 | | | ----- | |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4<br>2000 | 4 | ----- | 3500 1500 |
| Demanda | 1000 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4<br>500 | | | ----- | |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4<br>2000 | 4<br>1500 | ----- | 1500 |
| Demanda | 1000 | | 2500 1000 | 1000 | |

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4 500 | | | ----- | |
| Planta 2 | 6 1000 | 8 | 7 | ----- | 2000 3000 |
| Planta 3 | | 4 2000 | 4 1500 | ----- | |
| Demanda | 1000 | | 1000 | 1000 | |

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4<br>500 | | | ----- | |
| Planta 2 | 6<br>1000 | 8 | 7<br>1000 | ----- | 2000 |
| Planta 3 | | 4<br>2000 | 4<br>1500 | ----- | |
| Demanda | | | 1000 | 1000 | |

# Método de costo mínimo

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4<br>500 | | | ----- | |
| Planta 2 | 6<br>1000 | 8 | 7<br>1000 | -----<br>1000 | 1000 |
| Planta 3 | | 4<br>2000 | 4<br>1500 | | |
| Demanda | | | | 1000 | |

Costo inicial= 4(500)+6(1000)+4(2000)+7(1000)+4(1500)=\$29000

# Método de Vogel

Este es un método heurístico que proporciona un a mejor solución inicial en comparación con los dos métodos anteriores, ya que genera una solución inicial óptima o cercana al mismo.

# Método de Vogel

Procedimiento para su solución:
Para cada reglón y columna que queda bajo consideración, se calcula su ***diferencia***, que se define como la diferencia aritmética entre el costo unitario más pequeño cij y el que le sigue de los que quedan en ese reglón o columna. (Si han empaque, entonces la diferencia es 0)
En el reglón o columna que tiene la mayor ***diferencia*** se elige la variable que tiene el ***menor costo unitario que queda***. (Si han empaque, entonces se decide albitrariamente)

# Método de Vogel

## Ejemplo de aplicación

Continuando con el ejemplo de La Able Company, una vez obtenida la tabla inicial balanceada, se obtienen las penalidades para cada fila y columna.

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 | 4-4=0 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 | 4-4=0 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 5-4=1 | 7-4=3 | 5-4=1 | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 | 4 | ----- | 3500 | 4-4=0 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 5-4=1 | 7-4=3 | 5-4=1 | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | $7 | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | 8 | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 2000 | 4 | ----- | 3500 1500 | 4-4=0 |
| Demanda | 1500 | 2000 | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 5-4=1 | ~~7-4=3~~ | 5-4=1 | | | |

Al agotarse la demanda de la columna 3, se eliminan los costos y se recalculan las penalizaciones.

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4<br>2000 | 4 | ----- | 1500 | 5-4=1 |
| Demanda | 1500 | | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | | | | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | | $5 | ---- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4<br>2000 | 4 | ---- | 1500 | 5-4=1 |
| Demanda | 1500 | | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 5-4=1 | | 5-4=1 | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 2000 | 4 | ----- | 1500 | 5-4=1 |
| Demanda | 1500 | | 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 5-4=1 | | 5-4=1 | | | |

Al ser todas las penalizaciones iguales, se selecciona el costo menor fila o columna

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4 | | $5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | 5 | 4 2000 | 4 1500 | ----- | 1500 | 4-4=0 |
| Demanda | 1500 | | 1000 2500 | 1000 | | |
| Penalización | 6-4=2 5-4=1 | | 7-5=2 5-4=1 | | | |

Se vuelven a recalcular las penalizaciones en las celdas restantes

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4 | | \$5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | | 4<br>2000 | 4<br>1500 | ----- | | |
| Demanda | 1500 | | 1000 | 1000 | | |
| Penalización | 6-4=2 | | 7-5=2 | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | $4<br>500 | | 5 | ----- | 500 | 5-4=1 |
| Planta 2 | 6 | | 7 | ----- | 3000 | 7-6=1 |
| Planta 3 | | 4<br>2000 | 4<br>1500 | ----- | | |
| Demanda | 1000 | | 1000 | 1000 | | |
| Penalización | 6-4=2 | | 7-5=2 | | | |

Como únicamente quedan dos opciones se cubre la demanda

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalización |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4<br>500 | | | ----- | | |
| Planta 2 | 6<br>1000 | | 7 | ----- | 3000 | |
| Planta 3 | | 4<br>2000 | 4<br>1500 | ----- | | |
| Demanda | 1000 | | 1000 | 1000 | | |
| Penalización | | | | | | |

# Método de Vogel

| | Estándar | Lujo | Super Lujo | Ficticia | Oferta | Penalizaci ón |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Planta 1 | \$4 500 | | | ----- | | |
| Planta 2 | 6 1000 | | 7 1000 | ----- | 1000 2000 | |
| Planta 3 | | 4 2000 | 4 1500 | ----- | | |
| Demanda | | | 1000 | 1000 | | |
| Penalizaci ón | | | | | | |

Costo inicial=4(500)+6(1000)+4(2000)+7(1000)+4(1000)=\$27000

# Método Modificado de distribución (MODI)

- El método de distribución modificada (MODI) brinda la oportunidad de calcular costos marginales basados en los valores de las variables de decisión del modelo, adicional a esto indica la celda no básica en la cual se deben realizar los ajustes para obtener una mejor solución.
- También es conocido como el método de los costos ficticios, consiste en añadir a la matriz de costos una fila y una columna que recogen unos costos ficticios determinados arbitrariamente (los números MODI), tal que permite calcular los índices de mejora para las celdas no utilizadas

# Algoritmo de transporte

El método general de resolución del problema  de transporte consta de tres fases que conforman el denominado algoritmo de transporte.

- Fase  A.-  Paso 1. Escribir el problema de transporte en la forma matricial. Ir al paso 2.
- Fase  B.-  Paso 2.  Determinar una solución básica factible inicial. Ir al paso 3.
- Fase  C.-  Paso 3.  Si la solución obtenida en el paso 2 es óptima, detener el proceso. En otro caso, ir al paso 4.

  \- Paso 4. Obtener una nueva solución que sea mejor que la anterior. Ir al paso3.

# Determinación de una solución inicial

- Dentro de la fase B, se pueden utilizar cualquiera de los métodos que ya vimos
  - Método de la Esquina Noroeste
  - Método de Aproximación de Vogel
  - Método del Costo Mínimo.

# Optimalidad y mejora de una solución

- Se trata de desarrollar la Fase C del algoritmo de transporte una vez finalizada la Fase B, que ha proporcionado una solución básica factible no degenerada.
- Esta fase trata de determinar si dicha solución es óptima y, en caso de no serlo, obtener una nueva solución con menor coste que la solución actual.
- Una solución óptima puede ser degenerada, pero no puede serlo la solución a partir de la cual se vaya a obtener otra mejor.

- Si la solución básica obtenida no es óptima, la mejora es posible y ésta se puede llevar a cabo mediante diferentes métodos, entre los que cabe citar el método MODI (Modified-Distribution-Method llamado método u-v)

Soluciones degeneradas:

- La degeneración surge cuando el número de cuadros ocupados es menor que la suma de renglones + columnas - 1.
- Para corregir el problema colocamos un cero en un cuadro sin usar.
- El cuadro elegido debe estar en una posición tal que permita que se cierren todas las trayectorias de la iteración aunque suele haber bastante flexibilidad para seleccionar el cuadro sin usar para colocar el cero.

# Ejemplo

- Una compañía tiene 3 fábricas ubicadas en A,B,C, las cuales proveen a los almacenes que están ubicados en D,E,F y G.
- La capacidad de la producción de las fábricas son 70, 90, y 115 unidades mensuales respectivamente, mientras que la capacidades de los almacenes es de 50, 60, 70 y 95 unidades respectivamente.
- El costo de envío de una unidad desde cada una de las fábricas a cada una de los almacenes se presenta en el siguiente cuadro (en $)

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 17 | 20 | 13 | 12 |
| $O_2$ | 15 | 21 | 26 | 25 |
| $O_3$ | 15 | 14 | 15 | 17 |

# Ejemplo: Paso 1 generar solución inicial por Método NE

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 17 | 20 | 13 | 12 | 70 |
| $O_2$ | 15 | 21 | 26 | 25 | 90 |
| $O_3$ | 15 | 14 | 15 | 17 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 17 50 | 20 20 | 13 | 12 | 70 |
| $O_2$ | 15 | 21 40 | 26 50 | 25 | 90 |
| $O_3$ | 15 | 14 | 15 20 | 17 95 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

$$Z = 17*50 + 20*20 + 21*40 + 26*50 + 15*20 + 17*95 = 5305$$

Paso 2: Se dibuja la matriz $Z_{ij}$ que contiene los costos de la solución

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | | |
| | 21 | 26 | |
| | | 15 | 17 |

Paso 3: Se construye un conjunto de números $v_j$ y $u_i$ tal que la suma iguale los valores de la matriz $Z_{ij}$ del paso 2 y se completa las celdas vacías con la suma de los $u_i$ y $v_j$ la matriz $Z_{ij}$ que contiene los costos de la variable solución.

| $u_i$ \ $v_j$ | 0 | 3 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 20 | | |
| 18 | | 21 | 26 | |
| 7 | | | 15 | 17 |

Se tiene las siguientes ecuaciones de las celdas básicas

$u_1 + v_1 = 17$

$u_1 + v_2 = 20$

$u_2 + v_2 = 21$

$u_2 + v_3 = 26$

$u_3 + v_3 = 15$

$u_3 + v_4 = 17$

Haciendo $v_1$=0 se encuentran las demás variables

# Paso 4: Se calcula Cij - Zij

$C_{ij}$ (Matriz de costos originales)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 13 | 12 |
| 15 | 21 | 26 | 25 |
| 15 | 14 | 15 | 17 |

| $u_i$ \ $v_j$ | 0 | 3 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 20 | 25 | 27 |
| 18 | 18 | 21 | 26 | 28 |
| 7 | 7 | 10 | 15 | 17 |

$C_{ij}$ - $Z_{ij}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -12 | -15 |
| -3 | 0 | 0 | -3 |
| 8 | 4 | 0 | 0 |

Paso 5: Se selecciona la casilla (1,4) que tiene el costo de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable $X_{14}$

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 50 | 20 − | | + | 70 |
| $O_2$ | | 40 + | 50 − | | 90 |
| $O_3$ | | | 20 + | 95 − | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

- Nueva Solución

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 50 | | | 20 | 70 |
| $O_2$ | | 60 | 30 | | 90 |
| $O_3$ | | | 40 | 75 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

El costo de la nueva solución es:

$$Z = 5305 + (20*-15) = 5005$$

Se repite la prueba de optimalidad

$C_{ij}$ (Matriz de costos originales)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 13 | 12 |
| 15 | 21 | 26 | 25 |
| 15 | 14 | 15 | 17 |

| $u_i$ \ $v_j$ | 0 | -12 | -7 | -5 |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 5 | 10 | 12 |
| 33 | 33 | 21 | 26 | 28 |
| 22 | 22 | 10 | 15 | 17 |

$C_{ij} - Z_{ij}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 15 | 3 | 0 |
| -18 | 0 | 0 | -3 |
| -7 | 4 | 0 | 0 |

Paso 5: Se selecciona la casilla (2,1) que tiene el costo de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable $X_{21}$

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 50 - | | | 20 + | 70 |
| $O_2$ | + | 60 | 30 - | | 90 |
| $O_3$ | | | 40 + | 75 - | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

- Nueva Solución

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 20 | | | 50 | 70 |
| $O_2$ | 30 | 60 | | | 90 |
| $O_3$ | | | 70 | 45 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

El costo de la nueva solución es:

Z = 5005 + (30*-18) = 4465

Se repite la prueba de optimalidad

$C_{ij}$ (Matriz de costos originales)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 13 | 12 |
| 15 | 21 | 26 | 25 |
| 15 | 14 | 15 | 17 |

| $u_i$ \ $v_j$ | 0 | -6 | -7 | -5 |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 23 | 10 | 12 |
| 15 | 15 | 21 | 8 | 10 |
| 22 | 22 | 28 | 15 | 17 |

$C_{ij}$ - $Z_{ij}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | -3 | 3 | 0 |
| 0 | 0 | 18 | 15 |
| -7 | -14 | 0 | 0 |

Paso 5: Se selecciona la casilla (3,2) que tiene el costo de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable $X_{32}$

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 20 - | | | + 50 | 70 |
| $O_2$ | 30 + | 60 - | | | 90 |
| $O_3$ | | + | 70 | - 45 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

- Nueva Solución

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | | 70 | 70 |
| $O_2$ | 50 | 40 | | | 90 |
| $O_3$ | | 20 | 70 | 25 | 115 |
| $b_j$ | 50 | 60 | 70 | 95 | |

El costo de la nueva solución es:

$$Z = 4465 + (20^{*}-14) = 4185$$

Se repite la prueba de optimalidad

$C_{ij}$ (Matriz de costos originales)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 13 | 12 |
| 15 | 21 | 26 | 25 |
| 15 | 14 | 15 | 17 |

| $u_i$ \ $v_j$ | 0 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 9 | 10 | 12 |
| 15 | 15 | 21 | 22 | 24 |
| 8 | 8 | 14 | 15 | 17 |

$C_{ij} - Z_{ij}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 11 | 3 | 0 |
| 0 | 0 | 4 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |

Solución óptima

## Más de una solución óptima

- Es posible que un problema de transporte tenga soluciones óptimas múltiples.
- Las soluciones múltiples son posibles cuando uno o más índices de mejora en la etapa de solución óptima son iguales a cero.
- Lo cual significa que es posible diseñar otras rutas de embarque con el mismo costo total de envío.

## Maximización en problemas de transporte

- La solución óptima para un problema de maximización se encuentra cuando todos los índices de mejora son negativos o cero.
- Si algún índice es positivo, se selecciona la celda con la mejora positiva más grande para usarse con el método del salto de piedra en piedra. La nueva solución se evalúa y el proceso continúa hasta que no haya índices de mejora positivos.

## Rutas prohibidas o inaceptables

- Existen problemas de transporte donde una de las fuentes no puede enviar a uno o más destinos.
- Cuando esto ocurre, se dice que el problema tiene rutas prohibidas o inaceptables.
- Se asigna una ruta prohibida a un costo muy alto para evitar que se utilice. (Método de la gran M)

## Análisis de localización de instalaciones

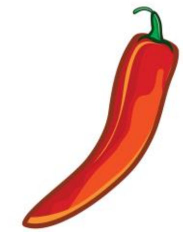
- El método de transporte puede ser útil para ayudar a una empresa a decidir dónde ubicar una nueva fábrica o un nuevo almacén.
- Cada instalación posible debería analizarse dentro del marco de referencia de un sistema de distribución general. El nuevo lugar que dará el costo mínimo para el sistema completo será el recomendado.

# El problema de Asignación

- El problema de asignación consiste en encontrar la forma de asignar ciertos recursos disponibles (máquinas o personas) para la realización de determinadas tareas al menor costo, suponiendo que cada recurso se destina a una sola tarea, y que cada tarea es ejecutada por uno solo de los recursos.
- El modelo se puede aplicar a la asignación de empleados a tareas, de fábricas a productos, de vendedores a territorios, de postores a contratos, etc.

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & \multicolumn{4}{c}{\text{Puestos}} & \\
 & & 1 & 2 & \cdots & n & \\
\hline
 & 1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 1 \\
 & 2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 1 \\
\text{Trabajador} & & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & n & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & \cdots & 1 &
\end{array}
$$

# El Método Húngaro



- También algoritmo de Kuhn en honor al matemático húngaro que lo plantea en 1955.
- Solo se puede utilizar en problemas de minimización, El número de recursos m debe ser igual al número de tareas m a ser asignadas
- Todas las asignaciones son posibles
- Una asignación por persona y una persona por asignación

# Resumen del algoritmo

1. Restar el número más pequeño de cada reglón a cada número del reglón
2. Restar el número más pequeño de cada columna a cada número de la columna
3. Determine el número mínimo de líneas necesario para cubrir todos los ceros en la tabla.
4. Si el número de líneas es igual al número de filas o columnas, se pasa a la asignación de recursos a tareas. Si el número de líneas es menor, entonces, se resta el número no cubierto más pequeño a todos los números no cubiertos de la tabla. Luego se suma el mismo número a las cantidades en las posiciones en las intersecciones de las líneas
5. Se repite 3 y 4 hasta que el número de líneas sea igual al número de filas o columnas
6. Se hace la asignación de una a una en las posiciones que tienen elementos en cero

# Ejemplo

- El profesor Martínez ha terminado 4 capítulos de su libro y está pensando en pedir ayuda para terminarlo. El ha elegido a 4 estudiantes que podrían ayudarle a digitalizar cada uno de los capítulos. El tiempo que tarda cada estudiante en cada capítulo se observa en la tabla siguiente. El tiempo varia según la cantidad de páginas de cada capitulo y su complejidad así como la velocidad y destreza de cada estudiante. Se desea hacer la asignación para minimizar el tiempo total de digitación.

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 96 | 99 | 105 | 108 |
| María | 116 | 109 | 107 | 96 |
| Edith | 120 | 102 | 113 | 111 |
| Carlos | 114 | 105 | 118 | 115 |

# Paso 1: Reducción de reglones

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 3 | 9 | 12 |
| María | 20 | 13 | 11 | 0 |
| Edith | 18 | 0 | 11 | 9 |
| Carlos | 9 | 0 | 13 | 10 |

# Paso 2: Reducción de columnas

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 3 | 0 | 12 |
| María | 20 | 13 | 2 | 0 |
| Edith | 18 | 0 | 2 | 9 |
| Carlos | 9 | 0 | 4 | 10 |

# Paso 3: Prueba de optimalidad

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 3 | 0 | 12 |
| María | 20 | 13 | 2 | 0 |
| Edith | 18 | 0 | 2 | 9 |
| Carlos | 9 | 0 | 4 | 10 |

Solo hay 3 líneas, no es la tabla óptima, el menos de los números no cubiertos es 2

# Paso 4: Iteración

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 3 | 0 | 12 |
| María | 20 | 13 | 2 | 0 |
| Edith | 18 | 0 | 2 | 9 |
| Carlos | 9 | 0 | 4 | 10 |

# Paso 5: Nueva prueba de optimalidad

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 5 | 0 | 14 |
| María | 18 | 13 | 0 | 0 |
| Edith | 16 | 0 | 0 | 9 |
| Carlos | 7 | 0 | 2 | 10 |

# Paso 6:Asignación

| Estudiante | Capítulo 13 | Capítulo 14 | Capítulo 15 | Capítulo 16 |
|---|---|---|---|---|
| Juan | 0 | 5 | 0 | 14 |
| María | 18 | 13 | 0 | 0 |
| Edith | 16 | 0 | 0 | 9 |
| Carlos | 7 | 0 | 2 | 10 |

## Asignación disponible

| Estudiante | Capítulos |
|---|---|
| Juan | 13 y 15 |
| María | 15 y 16 |
| Edith | 14 y 15 |
| Carlos | 14 |

## Asignación final

| Estudiante | Capítulos |
|---|---|
| Juan | 13 |
| María | 16 |
| Edith | 15 |
| Carlos | 14 |