



Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320



SEGUNDO EXAMEN II CICLO 2020

Viernes 30 de Octubre

Tiempo Máximo: 5 horas

Puntaje: 56 Puntos

Instrucciones Generales

1. El profesor adjuntó a este documento una lista con los ejercicios que le corresponde realizar a cada estudiante, si usted omite alguno de ellos o realiza alguno que no le fue asignado estos no serán calificados.
2. Los ejercicios que le fueron asignados deben ser resueltos en hojas blancas, rayadas o de reciclaje, con lapicero de tinta azul o negra, con el mayor orden y aseo posible. Si algún desarrollo está desordenado, incompleto o aparecen ejercicios con respuestas pero sin procedimientos, estos no se calificarán.
3. Todo ejercicio que deba ser resuelto en [Mathematica](#) se indicará, caso contrario debe aparecer el desarrollo respectivo realizado en papel.
4. En la primera página favor anotar su nombre completo y carnet.
5. En mediación virtual con su nombre completo y carnet, debe hacer entrega de un archivo .rar o .zip que incluya, un documento pdf, en donde, de forma legible se indique el enunciado y la respuesta de los ejercicios asignados, para ello, usted deberá adjuntar fotos de los apuntes que realizó en hojas. Los ejercicios que deben ser resueltos en Mathematica, usted deberá adjuntar una imagen dentro del documento pdf, además en mediación deberá subir un **único** archivo en Mathematica en el cual estén las soluciones de los ejercicios asignados. El profesor tomará para revisión el documento pdf, y validará los ejercicios que deben ser resueltos en Mathematica con el archivo .nb
6. Ejercicios similares, que se llegue a probar que incidieron en fraude, serán causante de anulación de la prueba para las partes involucradas y la ejecución del respectivo proceso disciplinario.
7. El estudiante, deberá guardar sus apuntes con los cuales resolvió el parcial, ya que puede darse la situación de que el profesor necesite validar respuestas.

8. El estudiante que no entregue el examen dentro del tiempo asignado perderá el derecho a entregar la prueba. Considere que el profesor ha incluido dentro del tiempo total habilitado en mediación, 30 minutos adicionales a los dados para realizar el examen para que usted se dedique a terminar de editar el documento y lo pueda subir a mediación. En resumen usted cuenta con 5 horas para realizar el examen + 30 minutos para terminar de editar los documentos y subirlos a mediación virtual.
 9. Usted necesitará conexión a internet únicamente en dos momentos, al inicio de la prueba para descargar el enunciado y al final de la misma para subir su solución, si un estudiante aduce tener problemas de internet debe presentar las evidencias que lo respalden.
 10. Cualquier otro supuesto problema que tenga para subir el examen debe presentar las pruebas que den validez a sus argumentos.
-

1. Dadas las siguientes relaciones de recurrencia

- a) $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$.
- b) $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$.
- c) $a_n = -5a_{n-1} - 3a_{n-2} + 9a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.
- d) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.

Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

- a) **[5 Puntos]** Escriba un pseudocódigo recursivo que calcule el n -ésimo término de la relación de recurrencia dada.
 - b) **[4 Puntos]** Demuestre que el programa converge por medio del principio de demostración por recursividad.
 - c) **[3 Puntos]** Implemente el pseudocódigo del punto (a) en [Mathematica](#).
 - d) **[1 Puntos]** Usando el algoritmo implementado en [Mathematica](#), determine el valor de a_{20}
 - e) **[3 Puntos]** Determine el elemento a_5 usando la relación de recurrencia dada en el enunciado.
 - f) **[6 Puntos]** Construir la ecuación característica asociada a la relación de recurrencia, determinar sus ceros y encontrar la fórmula explícita.
 - g) **[2 Puntos]** Determine el valor de a_5 usando la fórmula encontrada en el punto anterior.
2. Sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se definen los siguientes gráficos sobre una relación \mathcal{R}
- a) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

b) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

c) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

d) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a), (b, b), (c, d), (d, c), (a, a), (c, c)\}$

Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

a) [2 Puntos] Construir la matriz asociada a la relación \mathcal{R} .

b) [2 Puntos] Construir el grafo de la relación \mathcal{R} .

c) [5 Puntos] Haciendo uso del gráfico de la relación determine que propiedades cumple, entiéndase: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o total.

d) [5 Puntos] Haciendo uso de la matriz de la relación determine que propiedades cumple, entiéndase: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o total.

3. Considere los siguientes enunciados

a) Sobre \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} , por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 4 divide a $(a - b)$.

1) [4 Puntos] Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

2) [3 Puntos] Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

b) Sobre \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} , por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 2 divide a $(a + b)$.

1) [4 Puntos] Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

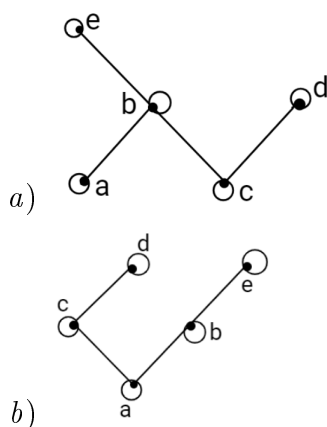
2) [3 Puntos] Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

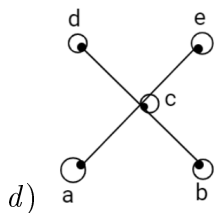
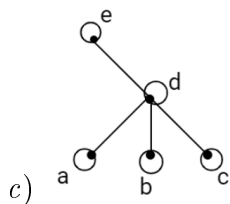
c) Sobre \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} , por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 2 divide a $(a - b)$.

1) [4 Puntos] Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

2) [3 Puntos] Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

4. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y \mathcal{R} una relación definida sobre A , cuyo organigrama es





Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

- [1 Puntos] Determinar el gráfico de \mathcal{R} .
- [3 Puntos] Determinar el gráfico de $\overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}}$.
- [2 Puntos] Determinar los elementos minimales, maximales, primer y último elemento de dicha relación.

5. La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en **Mathematica**.

- [5 Puntos] Construya una rutina en Mathematica que reciba dos conjuntos de números enteros A y B , $A \neq B$ considerando $a \in A$, $b \in B$

$$a\mathcal{R}b \iff a \text{ es primo, } b \text{ es primo, } 6 \text{ divide la expresión } (a + b)$$

Su rutina debe devolver

- El gráfico de la relación.
- La cardinalidad del gráfico de la relación.
- La matriz asociada a la relación

Utilice para el ejercicio anterior el conjunto $A = \{-35, -34, -33, \dots, 0, \dots, 23, 24, 25\}$, $B = \{-25, -24, -23, \dots, 0, \dots, 43, 44, 45\}$

Nota: usted debe comentar los principales elementos de su rutina.

- [5 Puntos] Construya una rutina en Mathematica que reciba dos conjuntos de números enteros A y B , $A \neq B$ considerando $a \in A$, $b \in B$

$$a\mathcal{R}b \iff a \text{ es primo, } b \text{ es primo y } (2^a - b) \text{ es primo}$$

Su rutina debe devolver

- El gráfico de la relación.

2) La cardinalidad del gráfico de la relación.

3) La matriz asociada a la relación

Utilice para el ejercicio anterior el conjunto $A = \{-25, -24, -23, \dots, 0, \dots, 43, 44, 45\}$, $B = \{-55, -54, -53, \dots, 0, \dots, 23, 24, 25\}$

Nota: usted debe comentar los principales elementos de su rutina.