Tema X: Vectores y valores propios

Definición: sea A una matriz nxn, decimos que un número real λ es un valor propio de A si existe una columna x de $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. El vector x se llama vector propio de A asociado a λ.

Definición: sea λ un valor propio de A, el conjunto $V_\lambda = \{x / Ax = \lambda x\}$ se llama subespacio propio o espacio característico de A asociado a λ y la dimensión de V_λ se denomina multiplicidad geométrica de λ.

Observación importante:

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{x / Ax = \lambda x\} \\ &= \{x / Ax - \lambda x = 0\} \\ &= \{x / (A - \lambda I)x = 0\} \end{aligned}$$

Es decir, el subespacio propio de A asociado al valor propio λ corresponde al núcleo de la matriz $A - \lambda I$.

Teorema: Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son k valores propios de A, diferentes entre sí y asociados respectivamente a los vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Teorema: las siguientes proposiciones son equivalentes

a) λ es un valor propio de A.
b) $\det(A - \lambda I) = 0$ (ecuación característica)

Ejemplo: considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -6 \\ -3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\left[(5-\lambda)(-4-\lambda)+18\right] = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$-(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

$(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \wedge \lambda = -1$ son valores propios de A

Definición: si $A \in M(n,\mathbb{R})$ se llama polinomio característico de A y se denota P_A, al polinomio de grado n, $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$. Si $P_A(\lambda)$ se factoriza en factores lineales y, eventualmente, algunos factores irreducibles de grado mayor igual que 2 cuyo producto denotamos $Q(\lambda)$: $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}Q(\lambda)$ se dice que n_i es la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i.

Ejemplo: el polinomio característico de la matriz A, del ejemplo anterior es $P_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$. Los valores propios son $\lambda=2$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda=-1$ con multiplicidad algebraica 1.

Procedimiento para el cálculo de valores y vectores propios

1) Resolver la ecuación característica $\det(A-\lambda I)=0$.
2) Para cada valor propio λ, hallar una base V_λ, resolviendo el sistema $(A-\lambda I)x=0$

Ejemplo: considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -6 \\ -3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=2, \lambda=-1$$

$V_{\lambda=2}:(A-2I)x=0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}f_2]{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1+2x_2-2x_3=0 \Rightarrow x_1=-2x_2+2x_3$$

$$(x_1,x_2,x_3)=(-2t+2s,t,s)=t(-2,1,0)+s(2,0,1) \qquad \Rightarrow V_{\lambda=2}=c\ell\left\{(-2,1,0)^t,(2,0,1)^t\right\}$$

$V_{\lambda=-1}:(A-I)x=0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}f_1,\ \frac{1}{3}f_2,\ \frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2,\ x_3=0 \ \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(-t,t,0)=t(-1,1,0) \ \Rightarrow V_{\lambda=-1}=c\ell\left\{(-1,1,0)^t\right\}$$

Diagonalización de matrices

Caracterización de matrices diagonalizables

Definición: una matriz A es diagonalizable si existe una matriz C invertible y una matriz D diagonal tales que $C^{-1}AC = D$.

Observación importante:

$$C^{-1}AC = D \text{ A se factoriza}$$

para determinar C y D en la factorización, observe:

$$C^{-1}AC = D \Leftrightarrow AC = CD$$

en donde se reconoce en esta factorización los vectores y valores propios $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ donde C_i son las columnas de C y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$a) AC = (AC_1, AC_2, \ldots, AC_n)$

$b) CD = (\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \ldots, \lambda_n C_n)$

Es decir,

$$AC = DC \Leftrightarrow (AC_1, AC_2, \ldots, AC_n) = (\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \ldots, \lambda_n C_n)$$

$$\Leftrightarrow AC_i = \lambda_i C_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Es decir:

a) Los elementos de la diagonal de la matriz D son los valores propios de A.
b) Las columnas de C son los respectivos vectores propios.

Además, A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ A tiene n vectores li.

Teorema: sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ tal que el polinomio característico se puede factorizar como $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$ donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son todos los valores propios distintos de A, y $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_r}$ los espacios propios correspondientes. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) La matriz A es diagonalizable.
b) Existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, para $\mathbb{R}^n$, de vectores propios de A.
c) Para cada $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, r$ su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica. Es decir, $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i \ \forall i = 1, \ldots, r$.
d) $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_r}) = n$
e) Todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de manera única en la forma $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ con $x_i \in V_{\lambda_i}$.

Ejemplo: considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

$$(2-\lambda)\left[1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1\right] = 0$$

$$-(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

$$-\lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \text{Los valores propios son: } \lambda = 2,\ \lambda = 0$$

$V_{\lambda=2} : (A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_1]{\substack{-f_3 + f_1 \\ f_2 \leftrightarrow f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = t \\ (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, t) = t(0, 0, 1) \end{array}$$

$$V_{\lambda=2} = c\ell\{(0,0,1)\} \ \Rightarrow \dim(V_{\lambda=2}) = 1 \neq 2$$

$\Rightarrow$ multiplicidad geométrica $\neq$ multiplicidad algebraica $\Rightarrow A$ no es diagonalizable

Ejemplo: considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$V_{\lambda=2}=c\ell\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{\text{mult geo=mult alg}} \qquad V_{\lambda=-1}=c\ell\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_{\text{mult geo=mult alg}}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow C=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corolario: si una matriz A, nxn, tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Matrices ortogonalmente diagonalizables

Una matriz A, nxn es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz C ortogonal y un matriz D diagonal, tales que $C^tAC=D$.

Observaciones importantes: A es ortogonalmente diagonalizable

$\Leftrightarrow \exists\, C$ ortogonal y D diagonal tal que $C^tAC=D$

$$\Leftrightarrow A=CDC^t$$

$$\Leftrightarrow A^t=\left(CDC^t\right)^t=CDC^t=A$$

Teorema: Si $A\in M(n,\mathbb{R})$ es simétrica, su polinomio característico solo tiene raíces reales.

Teorema: Sea $A\in M(n,\mathbb{R})$ simétrica y $\lambda_1,\ \lambda_2$ valores propios distintos de A, con vectores propios asociados a v y u respectivamente, entonces v y u son ortogonales.

Teorema: Sea A una matriz simétrica, es decir $A = A^t$. Entonces existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, ortonormal, formada por vectores propios de A.

Teorema: Si A es simétrica $\Leftrightarrow$ A es ortogonalmente diagonalizable.

Ejemplo: sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda)-4\right] - 2\left[2(1-\lambda)+8\right] - 4\left[4+4(4-\lambda)\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\left(4-5\lambda+\lambda^2-4\right) - 2\left(2-2\lambda+8\right) - 4\left(4+16-4\lambda\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda\right) - 2\left(10-2\lambda\right) - 4\left(20-4\lambda\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\lambda(\lambda-5) + 4(\lambda-5) + 16(\lambda-5) = 0$$

$$(\lambda-5)\left(\lambda-\lambda^2+20\right) = 0$$

$$-(\lambda-5)\left(\lambda^2-\lambda-20\right) = 0$$

$$-(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda+4) = 0$$

$$-(\lambda-5)^2(\lambda+4) = 0 \;\Rightarrow \lambda = -4 \wedge \lambda = -5$$

$V_{\lambda=5}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_1+f_3]{\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1+f_2]{\frac{-1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_3 + \tfrac{1}{2}x_2,\;\; x_3 = t, x_2 = s \Rightarrow \left(-t+\tfrac{s}{2}, s, t\right) = t(-1,0,1) + \tfrac{s}{2}(1,2,0)$$

$$V_{\lambda=5} = c\ell\left\{(-1,0,1)^t, (1,2,0)^t\right\}$$

$V_{\lambda=-4}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_2+f_3]{-2f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & -14 & -8 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 36 & 18 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9}f_3]{-2f_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2f_3+f_1]{f_3 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_3,\ x_2 = -\tfrac{1}{2}x_3,\ x_3 = t$$
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(t, -\tfrac{t}{2}, t\right) = \tfrac{t}{2}(2,-1,2)$$
$$V_{\lambda=-4} = c\ell\left\{(2,-1,2)^t\right\}$$

Ortonormalización de las bases $V_{\lambda=-5}$ y $V_{\lambda=-4}$

$V_{\lambda=-5} = c\ell\left\{(-1,0,1)^t, (1,2,0)^t\right\}$ se aplica G-S a esta base

$$v_1 = \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_2 = \frac{u_2 - \operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2}}{\left\| u_2 - \operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2} \right\|}$$

$$\operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2} = \left[(1,2,0)\left(\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{-1}{2}\right)$$

$$u_2 - \operatorname{Pr}oy_{S_1}^{u_2} = (1,2,0) - \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{-1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$v_2 = \frac{\left(\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}\right)\right\|} = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2}{3\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{4}{3\sqrt{2}}, \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$B_1 = \left\{\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, \left(\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{4}{3\sqrt{2}}, \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)^t\right\}$$

$$V_{\lambda=-4} = c\ell\left\{(2,-1,2)^t\right\} \Rightarrow B_2 = \left\{\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)^t\right\}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = CDC^t$$

Valores y vectores propios de operadores

Si T es un operador en $\mathbb{R}^n$, es decir, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y consideramos la matriz A de T, en la base canónica, entonces:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow T(v) = \lambda v$$

Definición: sea T un operador en $\mathbb{R}^n$, λ es un valor propio de T si existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_n$ tal que $T(v) = \lambda v$, y v es el vector propio de T asociado a λ.

Teorema: λ es un valor propio de operador T asociado a v $\Leftrightarrow$ λ es un valor propio de $A = [T]_B$ asociado a $x = [v]_B$.

Ejemplo: sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1 \ \text{valor propio de multiplicidad algebraica 3}$$

$$V_{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_1]{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = t,\ y = s,\ z = 0,\ s,t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (t,s,0) = t(1,0,0) + s(0,1,0) \ \Rightarrow V_{\lambda=1} = c\ell\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Se tiene que:

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ o } \ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición: se dice que un operador $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si existe una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que, $[T]_B$ es diagonal.

Teorema: T es diagonalizable $\Leftrightarrow$ existen D diagonal y P invertible cuyas columnas son una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que, $P^{-1}[T]_C\, P = D$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición: un operador $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonalmente diagonalizable si existe una base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$ tal que, $[T]_B$ es diagonal.

Ejemplo: Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x-z,y+z,-x+y+z)$. Es ortogonalmente diagonalizable.

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ es simétrica}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right]-(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2-1\right)-(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+1\right)-(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+1-1\right)=0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right)=0$$

$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Rightarrow$ valores propios λ=0,1,3

$$V_{\lambda=0}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x=z,\ y=-z,\ z=t\in\mathbb{R} \\ x=t, y=-t, z=t \end{array}$$

$$(x,y,z)=(t,-t,t)=t(1,-1,1)$$

$$V_{\lambda=0}=c\ell\left\{(1,-1,1)^t\right\} \Rightarrow B_{\lambda=0}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$V_{\lambda=1}:\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[2f_1+f_2]{\substack{-f_1\\ f_1+f_2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-f_3]{f_1\leftrightarrow f_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1\leftrightarrow f_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x=y=t,\;\; z=0\;\Rightarrow(x,y,z)=(t,t,0)=t(1,1,0)$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=1}=c\ell\left\{(1,1,0)^t\right\}\;\Rightarrow B_{\lambda=1}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^t\right\}$$

$$V_{\lambda=3}:\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&-2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2f_3+f_1}\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&-2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-f_3]{-f_2+f_1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}f_2]{f_3\leftrightarrow f_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&\frac{-1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2+f_1}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{-1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x=\tfrac{-z}{2},\; y=\tfrac{z}{2},\; z=t\qquad\Rightarrow(x,y,z)=\left(\tfrac{-t}{2},\tfrac{t}{2},t\right)=\tfrac{t}{2}(-1,1,2)^t$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=3}=c\ell\left\{(-1,1,2)^t\right\}\quad\Rightarrow B_{\lambda=3}=\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\; D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow C^tAC=D$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2004) *Introducción al Álgebra Lineal*. (5ta edición). Limusa: México.

Arce, C., Castillo, W., González, J. (2004). *Álgebra Lineal.* (3ra edición). Editorial UCR: Costa Rica.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. EUNED: Costa Rica.

Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7ma edición). Mc-GrawHill: México.

Sánchez, Jesús. (2020). *Álgebra lineal fundamental: teoría y ejercicios*. Editorial UCR: Costa Rica.

Sánchez, Jesús. (2020). *MA1004 álgebra lineal: Exámenes resueltos*. En revisión.