



Universidad de Costa Rica  
Facultad de Ciencias Exactas  
Escuela de Matemáticas  
MA-0320



## SEGUNDO EXAMEN II CICLO 2019

Viernes 22 de Noviembre

**Tiempo Máximo: 180 minutos**

**Puntaje: 40 Puntos**

### Instrucciones Generales

- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra. Si escribe usando lápiz, pierde el derecho a cualquier reclamo.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si algún desarrollo está desordenado este no se calificará.
- Se prohíbe el uso de teléfono celular durante la prueba.

1. Considere la sucesión  $L_n = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots\}$  conocida como sucesión de números de Lucas, a partir de ella determine:

- a) **[3 Puntos]** Una fórmula por recurrencia para la sucesión y utilicela para calcular  $L_3, L_4$  y  $L_5$ .
- b) **[3 Puntos]** Escriba un algoritmo recursivo que calcule el  $n$ -ésimo número de Lucas.
- c) **[4 Puntos]** Pruebe que el algoritmo converge utilizando el método de demostración por recursividad.

2. Dada la siguiente relación recursiva

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

con  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 12$

- a) **[2 puntos]** Haciendo uso de la fórmula recursiva determine  $a_4$ .
- b) **[7 puntos]** Encuentre una fórmula explícita para la fórmula recursiva dada.
- c) **[1 puntos]** Haciendo uso de la fórmula encontrada en el punto anterior determine  $a_4$ .

3. Sobre el conjunto  $A = \{2, 3, 5, 6\}$  se define una relación  $\mathcal{R}$ , de manera que el par ordenado  $(a, b)$  pertenece al gráfico de  $\mathcal{R}$  si y solo si  $ab$  es un número par.
- a) [4 Puntos] Determine el gráfico de  $\mathcal{R}$ .
  - b) [2 Puntos] Determine  $\overline{\mathcal{R}}$  y  $\mathcal{R}^{-1}$ .
  - c) [2 Puntos] Construya la matriz asociada a la relación.
  - d) [2 Puntos] Construya el grafo dirigido de la relación.
4. Sea  $A = \{0, 2, 4, 6\}$ , sea  $\mathcal{R}$  una relación sobre  $A$ , cuya matriz asociada está definida por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = 4) \vee (j = 3) \vee (i = j) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{S}$  otra relación sobre  $A$ , definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow (a + b) \in A$$

- a) [6 Puntos] Determine el gráfico y la matriz asociada a  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$  y  $\overline{\mathcal{S}} \circ \mathcal{R}^{-1}$ .
- b) [4 Puntos] Determine la matriz asociada de  $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) - (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$