Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Segundo Examen II Ciclo 2020

Viernes 30 de Octubre

Tiempo Máximo: 5 horas **Puntaje: 56 Puntos**

Solución

1. Dadas las siguientes relaciones de recurrencia

   a) $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$.

   b) $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$.

   c) $a_n = -5a_{n-1} - 3a_{n-2} + 9a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.

   d) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$, con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.

   Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

   a) **[5 Puntos]** Escriba un pseudocódigo recursivo que calcule el n-ésimo término de la relación de recurrencia dada.

Algorithm 1 Ejercicio*1-a*

```
Require: n
Ensure: Valor a_n
if n = 0 then
    Return [0]
if n = 1 then
    Return [1]
if n = 2 then
    Return [3]
Return Ejercicio [n-1] + Ejercicio [n-2] + Ejercicio [n-3]
```

Algorithm 2 Ejercicio*1-b*

Require: n
Ensure: Valor a_n

if n = 0 **then**
    Return [0]
if n = 1 **then**
    Return [-1]
if n = 2 **then**
    Return [-2]
Return 4 Ejercicio [n-1] - Ejercicio [n-2] - 6Ejercicio [n-3]

Algorithm 3 Ejercicio*1-c*

Require: n
Ensure: Valor a_n

if n = 0 **then**
    Return [0]
if n = 1 **then**
    Return [1]
if n = 2 **then**
    Return [2]
Return - 5 Ejercicio [n-1] - 3 Ejercicio [n-2] + 9 Ejercicio [n-3]

Algorithm 4 Ejercicio*1-d*

Require: n
Ensure: Valor a_n

if n = 0 **then**
    Return [0]
if n = 1 **then**
    Return [1]
if n = 2 **then**
    Return [2]
Return 4 Ejercicio [n-1] - 5 Ejercicio [n-2] + 2 Ejercicio [n-3]

b) **[4 Puntos]** Demuestre que el programa converge por medio del principio de demostración por recursividad.

1-a

a) Dominio: Tomar $\mathbb{N} \cup 0$
b) Existe el caso raíz:
n=0 devuelve 0
n=1 devuelve 1
n=2 devuelve 3
c) Se cumple que es decreciente, ya que se llama Ejercicio [n-1], Ejercicio [n-2] y Ejercicio [n-3], donde $n - 1 < n, n - 2 < n, n - 3 < 3$
De los puntos anteriores se cumple el principio por recursividad.

1-b

a) Dominio: Tomar $\mathbb{N} \cup 0$
b) Existe el caso raíz:
n=0 devuelve 0
n=1 devuelve -1
n=2 devuelve -2
c) Se cumple que es decreciente, ya que se llama Ejercicio [n-1], Ejercicio [n-2] y Ejercicio [n-3], donde $n - 1 < n, n - 2 < n, n - 3 < 3$
De los puntos anteriores se cumple el principio por recursividad.

1-c

a) Dominio: Tomar $\mathbb{N} \cup 0$
b) Existe el caso raíz:
n=0 devuelve 0
n=1 devuelve 1
n=2 devuelve 2
c) Se cumple que es decreciente, ya que se llama Ejercicio [n-1], Ejercicio [n-2] y Ejercicio [n-3], donde $n - 1 < n, n - 2 < n, n - 3 < 3$
De los puntos anteriores se cumple el principio por recursividad.

1-d

a) Dominio: Tomar $\mathbb{N} \cup 0$
b) Existe el caso raíz:

n=0 devuelve 0
n=1 devuelve 1
n=2 devuelve 2
c) Se cumple que es decreciente, ya que se llama Ejercicio [n-1], Ejercicio [n-2] y Ejercicio [n-3], donde $n-1<n, n-2<n, n-3<3$
De los puntos anteriores se cumple el principio por recursividad.

c) **[3 Puntos]** Implemente el pseudocódigo del punto (a) en Mathematica.

1-a

```
Ejerc1[n_]:=If[n == 0,
Return[0],
If[n == 1,
Return[1],
If[n == 2,
Return[3],
Return[−Ejerc1[n − 1] + Ejerc1[n − 2] + Ejerc1[n − 3]]]]];
```

1-b

```
Ejerc2[n_]:=If[n == 0,
Return[0],
If[n == 1,
Return[−1],
If[n == 2,
Return[−2],
Return[4Ejerc2[n − 1] − Ejerc2[n − 2] − 6Ejerc2[n − 3]]]]];
```

1-c

```
Ejerc3[n_]:=If[n == 0,
Return[0],
If[n == 1,
Return[1],
If[n == 2,
Return[2],
Return[-5Ejerc3[n - 1] - 3Ejerc3[n - 2] + 9Ejerc3[n - 3]]]]];
```

1-d

```
Ejerc4[n_]:=If[n == 0,
Return[0],
If[n == 1,
Return[1],
If[n == 2,
Return[2],
Return[4Ejerc4[n - 1] - 5Ejerc4[n - 2] + 2Ejerc4[n - 3]]]]];
```

d) **[1 Puntos]** Usando el algoritmo implementado en Mathematica, determine el valor de a_{20}

1-a) $a_{20} = 30$
1-b) $a_{20} = -871696100$
1-c) $a_{20} = 21501837140$
1-b) $a_{20} = 20$

e) **[3 Puntos]** Determine el elemento a_5 usando la relación de recurrencia dada en el enunciado.

1-a

$a_3 = -a_2a_1 + a_0 \Rightarrow$ =-3+1+0= $\boxed{-2 = a_3}$

$a_4 = -a_3 + a_2 + a_1 \Rightarrow$ =-(-2)+3+1= $\boxed{6 = a_4}$

$a_5 = -a_4 + a_3 + a_2 \Rightarrow$ =-6 + -2 + 3 = $\boxed{-5 = a_5}$

1-b

$a_3 = 4a_1 - a_1 - 6a_0 \Rightarrow a_3 = 4(-2) - (-1) - 6 \cdot 0 = \boxed{-1}$

$a_4 = 4a_3 - a_2 - 6a_1 \Rightarrow a_4 = 4(-7) - (-2) - 6(-1) = \boxed{-20}$

$a_5 = 4a_4 - a_3 - 6a_5 \Rightarrow a_5 = 4(-20) - (-7) - 6(-2) = \boxed{-61}$

1-c

$a_3 = -5a_2 - 3a_1 + 9a_0 \Rightarrow a_3 = -5(2) - 3(1) + 9(0) = \boxed{-13}$

$a_4 = -5a_3 - 3a_2 - 9a_1 \Rightarrow a_4 = -5(-13) - 3(2) + 9(1) = \boxed{68}$

$a_5 = -5a_4 - 3a_3 - 9a_5 \Rightarrow a_5 = -5(68) - 3(-13) + 9(2) = \boxed{-283}$

1-d

$a_3 = 4a_2 - 5a_1 + 2a_0 \Rightarrow a_3 = 4(2) - 5(1) + 2(0) = \boxed{3}$

$a_3 = 4a_2 - 5a_1 + 2a_0 \Rightarrow a_3 = 4(3) - 5(2) + 2(1) = \boxed{4}$

$a_3 = 4a_2 - 5a_1 + 2a_0 \Rightarrow a_3 = 4(4) - 5(3) + 2(2) = \boxed{5}$

f) **[6 Puntos]** Construir la ecuación característica asociada a la relación de recurrencia, determinar sus ceros y encontrar la fórmula explícita.

1-a

Tenemos $x^3 = -x^2 + x + 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ con soluciones x=-1, x=1, entonces tenemos $a_n = \alpha(1)^n + \beta(-1)^n + \theta \cdot n(-1)^n$ usando las condiciones iniciales

$a_0 = 0 \; |\alpha + \beta = 0$
$a_1 = 1 \; |\alpha - \beta = 1$
$a_2 = 3 \; |\alpha + \beta + 2\theta = 3$

$$\boxed{a_n : \frac{5}{4}(1)^n - \frac{5}{4}(-1)^n + \frac{3n}{2}(-1)^n}$$

1-b

Tenemos $x^3 = -4x^2 - x - 6 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ con soluciones x=3, x=2, x=-1 entonces tenemos $a_n = \alpha(3)^n + \beta(2)^n + \theta \cdot n(-1)^n$ usando las condiciones iniciales

$a_0 = 0 \; |\alpha + \beta + 0 = 0$
$a_1 = -1 \; |3\alpha - 2\beta - 0 = -1$
$a_2 = -2 \; |9\alpha + 4\beta + 0\theta = -2$

$$\boxed{a_n : \frac{1}{2}(1)^n - \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{n}{3}(-3)^n}$$

1-c

Tenemos $x^3 = -5x^2 - 3x + 9 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 3x - 9 = 0$ con soluciones x=-3, x=3, x=1 entonces tenemos $a_n = \alpha(1)^n + \beta(-3)^n + \theta \cdot n(-3)^n$ usando las condiciones iniciales

$a_0 = 0 \; |\alpha + \beta + 0 = 0$
$a_1 = 1 \; |\alpha - 3\beta - 3\theta = 1$
$a_2 = -2 \; |\alpha + 9\beta + 18\theta = 2$

$$\boxed{a_n : \frac{-1}{4}(3)^n + \frac{1}{4}(-1)^n}$$

1-d

Tenemos $x^3 = 4x^2 - 5x + 2 \Rightarrow x^3 = 4x^2 - 5x + 2 = 0$ con soluciones x=1, x=1, x=2 entonces tenemos $a_n = \alpha(2)^n + \beta(1)^n + \theta \cdot n(1)^n$ usando las condiciones iniciales

$a_0 = 0 \; |\alpha + \beta + 0 = 0$
$a_1 = 1 \; |2\alpha + \beta + 0\theta = 1$

$a_2 = 2 \ |4\alpha + \beta + 2\theta = 1$

$\boxed{a_n : n(1)^n}$

g) **[2 Puntos]** Determine el valor de a_5 usando la fórmula encontrada en el punto anterior.

1-a) $a_5 = \frac{5}{4}(1)^5 - \frac{5}{4}(-1)^5 + \frac{3 \cdot 5}{2}(-1)^5$

$\frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{15}{2} = \boxed{\text{-5}}$

1-b) $a_5 = \frac{-1}{4}(3)^5 + \frac{1}{4}(-1)^5$

$\frac{-243}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\text{-61}}$

1-c) $a_5 = \frac{1}{2}(1)^5 - \frac{1}{2}(-3)^5 + \frac{5}{3}(-3)^5$

$\frac{1}{2} + \frac{243}{2} - \frac{1215}{3} = \boxed{\text{-283}}$

1-d) $a_5 = 5(1)^5 = \boxed{5}$

2. Sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se definen los siguientes gráficos sobre una relación $\mathcal{R}$

a) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

b) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

c) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

d) $G_{\mathcal{R}} = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a), (b, b), (c, d), (d, c), (a, a), (c, c)\}$

Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

a) **[2 Puntos]** Construir la matriz asociada a la relación $\mathcal{R}$.

b) **[2 Puntos]** Construir el grafo de la relación $\mathcal{R}$.

2-a

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

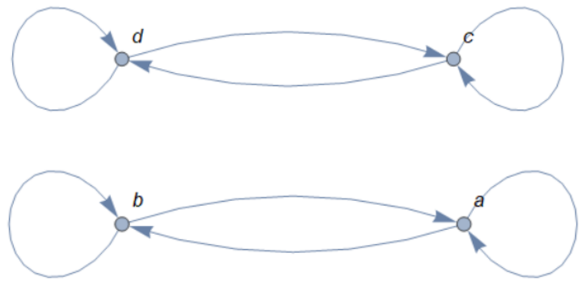


Figura 1: Hecho en mathematica

2-b

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

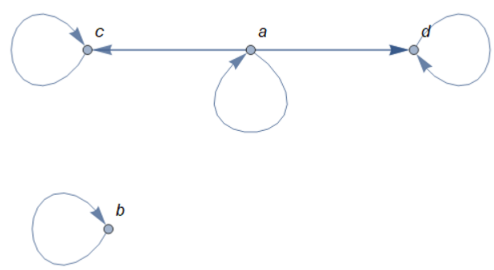


Figura 2: Hecho en mathematica

2-c

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

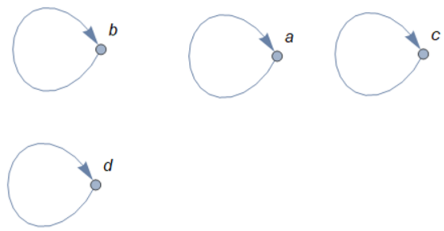


Figura 3: Hecho en mathematica

2-d

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4: Hecho en mathematica

c) **[5 Puntos]** Haciendo uso del gráfico de la relación determine que propiedades cumple, entiéndase: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o total.

2-a

1) **reflexiva:** Sí, a R a, b R b, c R c, d R d
2) **simétrica:** No, c R d $\not\Rightarrow$ d R c
3) **antisimétrica:** No, (a R b $\wedge$ b R a) $\Rightarrow a \neq b$
4) **transitiva:** Sí, (a R b $\wedge$ b R a) $\Rightarrow$ a R b
5) **total:** No, por ejemplo a $\not R$ c $\wedge$ c $\not R$ a

2-b

1) **reflexiva:** Sí, a R a, b R b, c R c, d R d
2) **simétrica:** No, a R c $\not\Rightarrow$ c R a
3) **antisimétrica:** Sí, No hay contra-ejemplo
4) **transitiva:** Sí, (a R c $\wedge$ c R d) $\Rightarrow$ a R d

5) **total:** No, por ejemplo a $\not R$ b $\wedge$ b $\not R$ a

2-c

1) **reflexiva:** Sí, a R a, b R b, c R c, d R d
2) **simétrica:** Sí, No hay contra-ejemplo
3) **antisimétrica:** Sí, No hay contra-ejemplo
4) **transitiva:** Sí, No hay contra-ejemplo
5) **total:** No, por ejemplo a $\not R$ b $\wedge$ b $\not R$ a

2-d

1) **reflexiva:** No, d $\not R$ d
2) **simétrica:** Sí, b R a $\Rightarrow$ a R b, a R c $\Rightarrow$ a R a, c R d $\Rightarrow$ d R c
3) **antisimétrica:** No, (a R b $\wedge$ b R a) $\Rightarrow a \neq b$
4) **transitiva:** No, (b R a $\wedge$ a R c) $\Rightarrow b \neq c$
5) **total:** No, por ejemplo b $\not R$ d $\wedge$ d $\not R$ b

d) **[5 Puntos]** Haciendo uso de la matriz de la relación determine que propiedades cumple, entiéndase: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o total.

2-a

a) **reflexiva:** $I_4 \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

b) **simétrica:** $M_R = {M_R}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

c) **antisimétrica:** $(M_R \wedge {M_R}^t) \leq I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

d) **transitiva:** $M_{R \odot R} \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$e)$ **total:** $M_R \vee {M_R}^t = 1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

2-b

$a)$ **reflexiva:** $I_4 \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$b)$ **simétrica:** $M_R = {M_R}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ X

$c)$ **antisimétrica:** $(M_R \wedge {M_R}^t) \leq I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$d)$ **transitiva:** $M_{R \odot R} \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e)$ **total:** $M_R \vee {M_R}^t = 1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

2-c

$a)$ **reflexiva:** $I_4 \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$b)$ **simétrica:** $M_R = {M_R}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

c) **antisimétrica:** $(M_R \wedge {M_R}^t) \leq I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

d) **transitiva:** $M_{R \odot R} \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) **total:** $M_R \vee {M_R}^t = 1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

2-d

a) **reflexiva:** $I_4 \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ X

b) **simétrica:** $M_R = {M_R}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

c) **antisimétrica:** $(M_R \wedge {M_R}^t) \leq I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ X

d) **transitiva:** $M_{R \odot R} \leq M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ X

e) **total:** $M_R \vee {M_R}^t = 1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X

3. Considere los siguientes enunciados

   a) Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$, por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 4 divide a $(a-b)$.

1) **[4 Puntos]** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

i) **Reflexiva:** a $\mathcal{R}$ a, a - a = 4k, k = 0 $\Rightarrow$ 0 = 0

ii) **Simétrica:** a $\mathcal{R}$ b $\Rightarrow$ b $\mathcal{R}$ a :
b $\mathcal{R}$ a = b - a

a - b = $4k_i$
b - a = 4(-k), $-k_i$ = k
b - a = $4k_2$
$\Rightarrow$ b $\mathcal{R}$ a

iii) **Transitiva:** (a $\mathcal{R}$ b $\wedge$ b $\mathcal{R}$ c) $\Rightarrow$ a $\mathcal{R}$ c

a - b = 4k, $\wedge$ b - c = $4k_2$
a - $\cancel{b}$ = $4k_2$
$\cancel{b}$ - c = $4k_2$
a - c = $4(k_1 + k_2)$, $\boxed{\text{a - c} = 4k_3}$

De i, ii, iii $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

2) **[3 Puntos]** Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente $^{\mathbb{Z}}/_{\mathcal{R}}$.

0 = 0 - b = 4k, 0 = $\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \cdots\}$
1 = 1 - b = 4k, 1 = $\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$
2 = 2 - b = 4k, 2 = $\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}$
3 = 3 - b = 4k, 3 = $\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}$

$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$, por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 2 divide a $(a + b)$.

1) **[4 Puntos]** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

i) **Reflexiva:** a $\mathcal{R}$ a, a + a = 2k, 2a = 1k $\Rightarrow$ tomando a = k se cumple

ii) **Simétrica:**
a + b = 2k
b + a = 2k
$\Rightarrow$ b $\mathcal{R}$ a

iii) **Transitiva:** (a $\mathcal{R}$ b $\wedge$ b $\mathcal{R}$ c) $\Rightarrow$ a $\mathcal{R}$ c

a $\mathcal{R}$ b : a + b = 2_i
b $\mathcal{R}$ a : a + b = 2_2
a + c + 0k, $2k_i + 2k_2$
a + c = $2k_i + 2k_2 - 2b$
a + c = $2(k_i + k_2 - b)$
$k_i + k_2 - b - k_3$, a + c = $2k_3$

De i, ii, iii $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

2) **[3 Puntos]** Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente $^{\mathbb{Z}}/_{\mathcal{R}}$.

Con a = 0, tenemos 0 + b = 2k, con lo cual se tiene
$0 = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 4, 6, 8, \cdots\}$

Con a = 1, tenemos 1 + b = 2k, con lo cual se tiene
$1 = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 9, \cdots\}$, de esta forma:

$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{0, 1\}$

c) Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$, por: $a\mathcal{R}b$ si y solo sí, 2 divide a $(a - b)$.

1) **[4 Puntos]** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

i) **Reflexiva:** a $\mathcal{R}$ a, a - a = 2k, 0 = 2a , con k = 0 $\Rightarrow$ 0 = 0

ii) **Simétrica:** a $\mathcal{R}$ b $\Rightarrow$ b $\mathcal{R}$ a :

a - b = $2k_i$
b + a = $2(-k_i)$
Tomando $k_2 = -k_i$
b - a = $2k_2$

$\Rightarrow$ b $\mathcal{R}$ a

iii) **Transitiva:** (a $\mathcal{R}$ b $\wedge$ b $\mathcal{R}$ c) $\Rightarrow$ a $\mathcal{R}$ c

a $\mathcal{R}$ b : a + b = 2_i
b $\mathcal{R}$ a : a + b = 2_2
a - c + $2k_i$
b - c = $2k_2$

a - c $= 2(k_i + k_2)$, tomando
a - c $= 2k_3$

De i, ii, iii $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

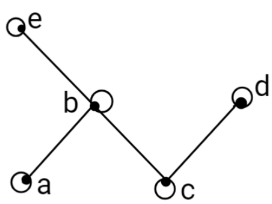
2) **[3 Puntos]** Calcule las clases de equivalencia de la relación y el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Con a = 0, tenemos 0 - b = 2k, 0 - b
$\{\cdots, -6, -4, -2, 0, 4, 6, 8, \cdots\}$

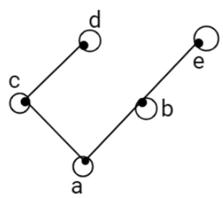
Con a = 1, tenemos 1 + b = 2k, 1 - b 2k
$\{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 9, \cdots\}$, de esta forma:

$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{0, 1\}$

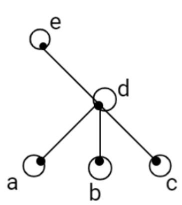
4. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A, cuyo organigrama es



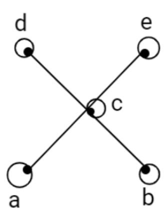
a)



b)



c)



d)

Tomando el ejercicio que le fue asignado, trabaje y desarrolle todos los siguientes puntos.

a) **[1 Puntos]** Determinar el gráfico de $\mathcal{R}$.

4-a

$G_R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,d),(c,b)(b,e),(a,e),(c,e)\}$

4-b

$G_R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(a,b),(a,e)(a,d),(c,d),(b,e)\}$

4-c

$G_R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,d),(a,e),(b,d)(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$

4-d

$G_R = \{(a,c),(a,e),(a,d),(b,c),(b,e),(b,d),(c,e),(c,d)(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$

b) **[3 Puntos]** Determinar el gráfico de $\overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}}$.

4-a

$G_R^-1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)(a,a),(b,b),(c,c)(d,d),(e,e),(b,a)(d,c),(b,c)(e,b),(e,a),(e,c)\}$

R $\cup R^{-1} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(c,d),(b,e),(e,b),(d,c),$
$(c,b),(b,c),(a,e),(e,a),(e,c),(c,e)\}$

$\overline{R \cup R^{-1}} = \{(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(b,d),(d,b),(e,d),(d,e)\}$

4-b

$G_R^-1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)(a,a),(d,d),(e,e),(c,a),(b,a)(e,a),(d,a)(d,c),(e,b)\}$

R $\cup R^{-1} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(a,b),(a,e),(a,d),(b,e),(b,a),(c,d),$
$(c,a),(d,a),(d,c),(e,b),(e,a)\}$

$\overline{R \cup R^{-1}} = \{(b,c),(b,d),(c,b),(c,e),(d,b),(d,e),(e,c),(e,d)\}$

4-c

$G_R^-1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)(a,a),(b,b),(c,c)(d,d),(e,e),(d,a),(d,a)(d,b),(e,b)(d,c),(e,c),(e,d)\}$

R $\cup$ $R^{-1} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),$
$(d,a),(d,b),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(d,e),(e,d)\}$

$\overline{R \cup R^{-1}} = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

4-d

$G_R^-1 = \{(c,a),(e,a),(d,a)(c,b),(e,b),(d,b)(d,d)(e,c),(d,c),(d,a)(d,b),(e,b)(d,c),(a,a),(b,b),$
$(c,c),(d,d),(e,e)\}$

R $\cup$ $R^{-1} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(a,e),(a,d),(b,c),(b,e),(b,d),$
$(c,e),(c,d),(c,a),(c,b),(d,b),(d,c),(d,a),(e,b),(e,c),(e,a)\}$

$\overline{R \cup R^{-1}} = \{(a,b),(a,b),(d,e),(e,d)\}$

c) **[2 Puntos]** Determinar los elementos minimales, maximales, primer y último elemento de dicha relación.

4-a

1) Minimal:a y c, primer elemento: no
2) Maximal: e y d, ultimo elemento: no

4-b

1) Minimal: a, primer elemento: a
2) Maximal: d y e, ultimo elemento: no

4-c

1) Minimal:a,b y c, primer elemento: no
2) Maximal: e, ultimo elemento: e

4-d

1) Minimal: a y b, primer elemento: no
2) Maximal: d y e, ultimo elemento: no

5. **La solución del siguiente ejercicio debe ser implementada en Mathematica.**

a) **[5 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba dos conjuntos de números enteros A y B, $A \neq B$ considerando $a \in A$, $b \in B$

$$a\mathcal{R}b \iff a\ es\ primo,\ b\ es\ primo,\ 6\ divide\ la\ expresion\ (a+b)$$

Su rutina debe devolver

1) El gráfico de la relación.
2) La cardinalidad del gráfico de la relación.
3) La matriz asociada a la relación

Utilice para el ejerercio anterior el conjunto $A = \{-35, -34, -33, ..., 0, ..., 23, 24, 25\}$, $B = \{-25, -24, -23, ..., 0, ..., 43, 44, 45\}$

Nota: usted debe comentar los principales elementos de su rutina.

```
(*Primero necesitamos construir el conjunto A*)

ConjuntoA[n_]:=Module[{A = {}, i = 0},

(*n es el número de elementos que queremos en el conjunto*)

For[i = −35, i ≤ n, i++,

A = Append[A, i];

];

Return[A];

];


ConjuntoB[m_]:=Module[{B = {}, i = 0},

(*n es el número de elementos que queremos en el conjunto*)

For[i = −25, i ≤ m, i++,

B = Append[B, i];

];

Return[B];
```

];

ConjuntoA[25]

$\{-35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17,$
$-16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

ConjuntoB[45]

$\{-25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6,$
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,$
$25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45\}$

(*Ahora construimos la rutina solicitada*)

Relac[A_, B_]:=Module[{$R = \{\}$, ProdCart = {}, $j = 0, k = 0$, j1 = 0, $L = 0$, Pos = 0, MR = {}},

ProdCart = CartesianProduct[A, B];

(*Todas los posibles pares ordenados se asignan a ProdCart*)

L = Length[ProdCart];

For[$j = 1, j \leq L, j$++,

Pos = ProdCart[[j]];

If[(PrimeQ[Pos[[1]]] == True)&&(PrimeQ[Pos[[2]]] == True)&&Mod[(Pos[[1]] + Pos[[2]]), 6]

```
== 0, R = Append[R, Pos]];
];


    (*Hasta acá se ha construido el gráfico de la relación*)
    (*Vamos con la matriz de la relación*)
    MR = ConstantArray[0, {Length[A], Length[B]}];
    For[k = 1, k<=Length[A], k++,
    For[j1 = 1, j1<=Length[B], j1++,
    If[MemberQ[R, {A[[k]], B[[j1]]}] == True, MR = ReplacePart[MR, 1, {k, j1}]];
    ];
    ];
    Print["La cardinalidad de la relación es: ", Length[R], ", el gráfico de la relación corresponde a:
    ", y la matriz de relación es M_R= "MatrixForm[MR]] ;
    ];


A = ConjuntoA[25];
B = ConjuntoB[45];

Relac[A, B]
```

```
La cardinalidad de la relación es: 158, el gráfico de la relación corresponde a:
 {{-31, -23}, {-31, -17}, {-31, -11}, {-31, -5}, {-31, 7}, {-31, 13}, {-31, 19}, {-31, 31}, {-31, 37},
  {-31, 43}, {-29, -19}, {-29, -13}, {-29, -7}, {-29, 5}, {-29, 11}, {-29, 17}, {-29, 23},
  {-29, 29}, {-29, 41}, {-23, -19}, {-23, -13}, {-23, -7}, {-23, 5}, {-23, 11}, {-23, 17},
  {-23, 23}, {-23, 29}, {-23, 41}, {-19, -23}, {-19, -17}, {-19, -11}, {-19, -5}, {-19, 7},
  {-19, 13}, {-19, 19}, {-19, 31}, {-19, 37}, {-19, 43}, {-17, -19}, {-17, -13}, {-17, -7},
  {-17, 5}, {-17, 11}, {-17, 17}, {-17, 23}, {-17, 29}, {-17, 41}, {-13, -23}, {-13, -17},
  {-13, -11}, {-13, -5}, {-13, 7}, {-13, 13}, {-13, 19}, {-13, 31}, {-13, 37}, {-13, 43},
  {-11, -19}, {-11, -13}, {-11, -7}, {-11, 5}, {-11, 11}, {-11, 17}, {-11, 23}, {-11, 29},
  {-11, 41}, {-7, -23}, {-7, -17}, {-7, -11}, {-7, -5}, {-7, 7}, {-7, 13}, {-7, 19}, {-7, 31},
  {-7, 37}, {-7, 43}, {-5, -19}, {-5, -13}, {-5, -7}, {-5, 5}, {-5, 11}, {-5, 17}, {-5, 23},
  {-5, 29}, {-5, 41}, {-3, -3}, {-3, 3}, {-2, 2}, {2, -2}, {3, -3}, {3, 3}, {5, -23}, {5, -17},
  {5, -11}, {5, -5}, {5, 7}, {5, 13}, {5, 19}, {5, 31}, {5, 37}, {5, 43}, {7, -19}, {7, -13}, {7, -7},
  {7, 5}, {7, 11}, {7, 17}, {7, 23}, {7, 29}, {7, 41}, {11, -23}, {11, -17}, {11, -11}, {11, -5},
  {11, 7}, {11, 13}, {11, 19}, {11, 31}, {11, 37}, {11, 43}, {13, -19}, {13, -13}, {13, -7}, {13, 5},
  {13, 11}, {13, 17}, {13, 23}, {13, 29}, {13, 41}, {17, -23}, {17, -17}, {17, -11}, {17, -5},
  {17, 7}, {17, 13}, {17, 19}, {17, 31}, {17, 37}, {17, 43}, {19, -19}, {19, -13}, {19, -7}, {19, 5},
  {19, 11}, {19, 17}, {19, 23}, {19, 29}, {19, 41}, {23, -23}, {23, -17}, {23, -11}, {23, -5},
```

Figura 5: Cardinalidad

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Figura 6: Matriz Relación

b) **[5 Puntos]** Construya una rutina en Mathematica que reciba dos conjuntos de números enteros A y B, $A \neq B$ considerando $a \in A$, $b \in B$

$$a\mathcal{R}b \iff a \; es \; primo, \; b \; es \; primo \; y \; (2^a - b) \; es \; primo$$

Su rutina debe devolver

1) El gráfico de la relación.
2) La cardinalidad del gráfico de la relación.
3) La matriz asociada a la relación

Utilice para el ejerercio anterior el conjunto $A = \{-25, -24, -23, ..., 0, ..., 43, 44, 45\}$, $B = \{-55, -54, -53, ..., 0, ..., 23, 24, 25\}$

Nota: usted debe comentar los principales elementos de su rutina.

```
(*Primero necesitamos construir el conjunto A*)

ConjuntoA[n_]:=Module[{A = {}, i = 0},

(*n es el número de elementos que queremos en el conjunto*)

For[i = −25, i ≤ n, i++,

A = Append[A, i];

];

Return[A];

];


ConjuntoB[m_]:=Module[{B = {}, i = 0},

(*n es el número de elementos que queremos en el conjunto*)

For[i = −55, i ≤ m, i++,

B = Append[B, i];

];

Return[B];

];
```

ConjuntoA[45]

$\{-25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6$
$, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,$
$27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45\}$

ConjuntoB[25]

$\{-55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38,$
$-\ 37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20,$
$-19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$
$6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

$A =$ **ConjuntoA[45];**

$B =$ **ConjuntoB[25];**

Relac$[A, B]$

```
(*Hasta acá se ha construido el gráfico de la relación*)
(*Vamos con la matriz de la relación*)
MR = ConstantArray[0, {Length[A], Length[B]}];
For[k = 1, k<=Length[A], k++,
For[j1 = 1, j1<=Length[B], j1++,
If[MemberQ[R, {A[[k]], B[[j1]]}] == True, MR = ReplacePart[MR, 1, {k, j1}]];
];
];
Print["La cardinalidad de la relación es: ", Length[R], ", el gráfico de la relación corresponde a:
", y la matriz de relación es M_R= "MatrixForm[MR]] ;
];
```

```
La cardinalidad de la relación es: 58, el gráfico de la relación corresponde a:
 {{2, -43}, {2, -37}, {2, -19}, {2, -13}, {2, -7}, {2, -3}, {2, 2}, {2, 7}, {2, 11}, {2, 17}, {2, 23},
  {3, -53}, {3, -29}, {3, -23}, {3, -11}, {3, -5}, {3, -3}, {3, 3}, {3, 5}, {3, 11}, {3, 13}, {3, 19},
  {5, -47}, {5, -41}, {5, -29}, {5, -11}, {5, -5}, {5, 3}, {5, 13}, {5, 19}, {7, -53}, {7, -29}, {7, -23},
  {7, -11}, {7, -3}, {7, 19}, {11, -41}, {11, -5}, {11, 19}, {13, -41}, {13, -29}, {13, -17}, {13, 13},
  {17, -41}, {17, -29}, {17, 13}, {19, -53}, {19, 19}, {23, -29}, {23, -11}, {29, -11}, {29, 3},
```

Figura 7: Cardinalidad

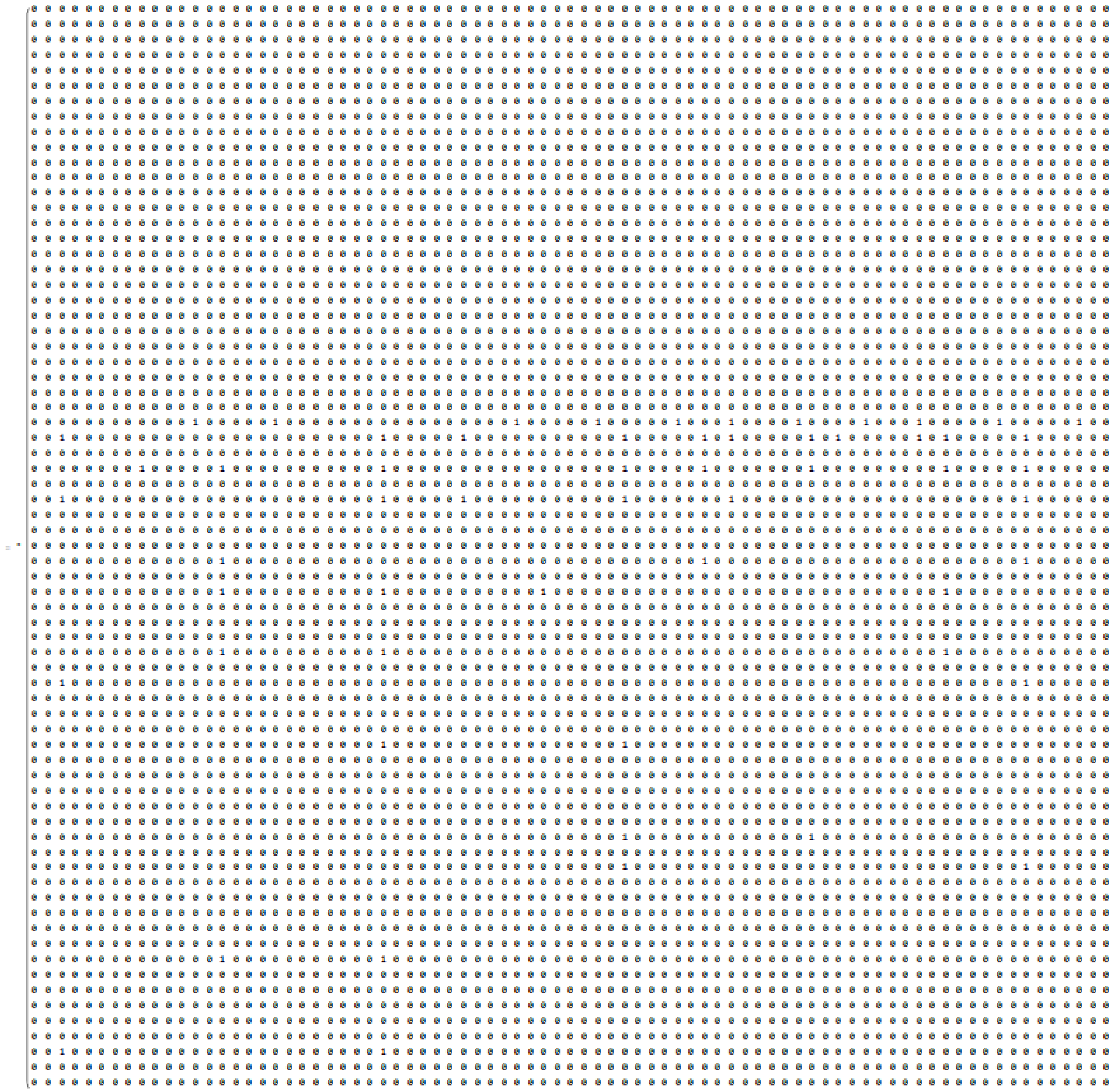


Figura 8: Matriz Relación