1) Sea $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+b=c \wedge a+d=b\right\}$.

a) Encuentre una base para U.

Despejamos las condiciones: $c=a+b \wedge a+d=b \Rightarrow d=b-a$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b-a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Calcule el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ en la base que encontró en (b).

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Dado el subespacio vectorial $W \in \mathbb{R}^3$, $W = \{X \ / \ AX = 0\}$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Determine una base B de W.

$$W = \text{ espacio nulo de A } = N(A)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-3f_2+f_1 \\ -f_2}]{2f_2+f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la última matriz obtenida tenemos: $x - 3y + 2z = 0 \Rightarrow x = 3y - 2z$

$$(x, y, z) = (3y - 2z, y, z) = y(3,1,0) + z(-2,0,1)$$

$$\Rightarrow B = \{(3,1,0), (-2,0,1)\}$$

b) Encuentre la dimensión de W.

$$Dim(W) = 2$$

c) Verifique que $v = (8,4,2) \in W$

Hay que verificar que: $(8,4,2) = a(3,1,0) + b(-2,0,1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_3+f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema tiene solución única, por lo tanto, $(8,4,2) \in W$

d) Encuentre $[v]_B$.

De la parte c) tenemos: $(8,4,2) = 4(3,1,0) + 2(-2,0,1)$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$