Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas
Escuela de Matemáticas
MA-0320

Tarea 5

II Ciclo 2020

Fecha de entrega: 27 de noviembre del 2020

Solución

---

1. **[20 Puntos]** Diseñe una rutina, que reciba el criterio de una función y regrese: puntos de intersección con los ejes, intervalos donde es positiva, intervalos donde es negativa, determine si la función es par o impar, muestre la gráfica de la función.

   Ejercicio1[F_]:=Module[{},

   Print[“Los puntos de intersección con el eje x, corresponden a: ”, Solve[$F[x] == 0, x$]];

   Print[“El punto de intersección con el eje y, corresponden a: ”, $F[0]$];

   Print[“Los intervalos donde la función es positiva corresponden a: ”Reduce[$F[x] > 0, x$]];

   Print[“Los intervalos donde la función es negativa corresponden a: ”Reduce[$F[x] < 0, x$]];

   (*Nota : seintentohacerusodelavaribale$x$, sin darleunvalorespecífico,

   peroelsoftwarepresentoproblemasdeevaluación*)

   If[$F[-25]$==$F[25]$, Print[“La función, ”, $F[x]$, “ es par.”]; ,

   If[$F[-25] == -F[25]$, Print[“La función, ”, $F[x]$, “ es impar.”]; ,

   Print[“La función, ”, $F[x]$, “ no es par, ni impar.”];];

   ];

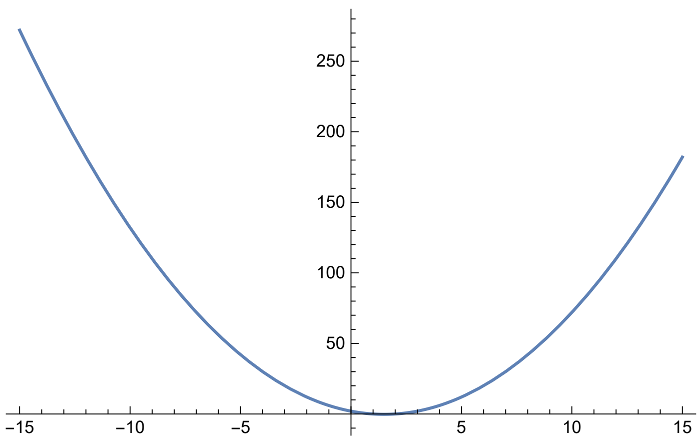
   Print[“La gráfica de ”, $F[x]$, “ corresponde a:”];

Plot[F[x], {x, -15, 15}]

];

F[x_]:=$x^2 - 3x + 2$;

Los puntos de intersección con el eje x, corresponden a: $\{\{x \to 1\}, \{x \to 2\}\}$
El punto de intersección con el eje y, corresponden a: 2
Los intervalos donde la función es positiva corresponden a: $(x < 1 \| x > 2)$
Los intervalos donde la función es negativa corresponden a: $(1 < x < 2)$
La función, $2 - 3x + x^2$ no es par, ni impar.
La gráfica de $2 - 3x + x^2$ corresponde a:



2. **[15 Puntos]** Para: $E_p(m)$ denota el exponente del primo p en la factorización prima de m, entonces

$$E_p\left(n!\right) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \cdots \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor + \cdots$$

donde la suma es finita, pues es claro que, a partir de algún s, la potencia p^s será mayor que n y los términos sucesivos serán cero. Diseñe una rutina en Mathematica que apartir de la propiedad anterior determine $E_p\left(n!\right)$

Ejercicio2[n_, p_]:=Module[{Ep = 0, i = 1},

(*Considerarqueapegoalalgoritmoelvalorden$n$, norepresentaelvalorden$n$!,

esdecirrecibimoselvalor sin calculardelfactorial, perolasalidasirepresentaelfactor$\boldsymbol{p}$,

de$\boldsymbol{n}$!*)

While $\left[\text{Floor}\left[\frac{n}{p^i}\right] \neq 0,\right.$

Ep $= \sum_{i=1}^{n}$ Floor $\left[\frac{n}{p^i}\right]$;

$\boldsymbol{i}$++

];

Return[Ep];

];

3. **[5 Puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva, si $(2, 3) \in G_f$ y además $f^{-1}\left(\dfrac{k+3}{k-2}\right) = 2$, calcule el valor de k.
   Tenemos
   Si $(2, 3) \in G_f$ y como f es biyectiva, es decir la inversa existe, entonces $(3, 2) \in G_{f^{-1}}$, es decir, se da que $f^{-1}(3) = 2$
   Si tenemos $f^{-1}\left(\dfrac{k+3}{k-2}\right) = 2$
   $\Rightarrow \left(\dfrac{k+3}{k-2}, 2\right) \in G_{f^{-1}}$
   $\Rightarrow \dfrac{k+3}{k-2} = 3$
   donde al resolver la ecuación obtenemos que $k = \dfrac{9}{2}$.

4. **[30 Puntos]** Del libro de Susana S., leer de las páginas 389 a 391

   a) Realizar una investigación respecto a Richard W. Hamming, hacer énfasis en los principales aportes a las ciencias de la computación.

   b) Diseñar en Mathematica una rutina que reciba dos cadenas binarias y aplique la función de distancia de Hamming.

   (*Hamming 4.b*)

   Hamming[A_, B_]:=Module[{ $\boldsymbol{l}$ = {}},

   $\boldsymbol{i}$ = 0;

```
j = 1;
For[i = 1, i ≤ Length[A],
While[j ≤ Length[B],
If[A[[i]] ≠ B[[j]],
l = Append[l, 1];
];
j++;
Break[];
];
i++;
];
Print["La respuesta es: ", Length[l]];
];
A = {0, 1, 0, 1};
B = {1, 0, 1, 1};
Hamming[A, B]
```

La respuesta es: 3

c) De la página 394 en adelante resolver los ejercicios: 8,9,27 y 29.

8) Sea $J_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y defina una función F: $J_5 \to j_5$ de la siguiente manera: Para cada $x \in J_5$, F(x) $= (x^3 + 2x + 4)$ mod 5. Encuentre lo siguiente:
a. F(0) $= (0^3 + 2(0) + 4) = 4$, 4 mod 5 $= 4$

b. F(1) $= (1^3 + 2(1) + 4) = 7$, 7 mod 5 $= 2$

c. F(2) $= (2^3 + 2(2) + 4) = 16$, 16 mod 5 $= 1$

d. F(3) $= (3^3 + 2(3) + 4) = 37$, 37 mod 5 $= 2$

e. $F(4) = (4^3 + 2(4) + 4) = 76$, $76 \bmod 5 = 1$

9) Defina una función $S : Z^+ \to Z^+$ como sigue: Para cada entero positivo n, S(n) = la suma de los divisores positivos de n.

a. S(1) = 1

b. S(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24

c. S(17) = 1 + 17 = 18

d. S(5) = 1 + 5 = 6

e. S(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39

f. S(21) = 1 + 3 + 7 + 21 = 32

27) Sea S el conjunto de todas las cadenas de a y de b.

a. Defina $f : S \to Z$ como sigue: Para cada cadena s en S

$$f(s) = \begin{cases} el\ numero\ de\ b's\ a\ la\ izquierda\ de\ la\ a\ que\ esta\ mas\ hacia\ la\ izquierda\ en\ s \\ 0\ si\ s\ no\ tiene\ a's \end{cases}$$

Encuentre f (aba) y f (bbab) y f (b). ¿Cuál es el rango de f ?

f(aba)= 0
f(bbab) = 2
f(b) = 0

El rango de f es: $\mathbb{Z}^+ \bigcup \{0\}$

b. Defina $g : S \to S$ de la siguiente manera: para cada cadena s en S,

$g(s)$= la cadena obtenida al escribir los caracteres de s en orden inverso.

Determine $g(aba)$, $g(bbab)$ y $g(b)$. ¿Cuál es el rango de g?

g(aba) = aba
g(bbab) = babb
g(b) = b

El rango de g es: S^{-1}

29) Considere la función de distancia de Hamming definida en el ejemplo 7.1.10.

a. Determine $H(10101, 00011)$

$H(10101, 00011)$: 3

b. Determine $H(00110, 10111)$.

$H(00110, 10111)$: 2

5. **[10 Puntos]** Se dice que p es un **punto fijo** de la función f si satisface que $f(p) = p$. Determine los puntos fijos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$
   Tenemos
   $\Rightarrow p = p^2 - 2p - 4$
   $\Rightarrow p^2 - 3p - 4 = 0$, al resolver la ecuación obtenemos los valores $p = 4$ y $p = -1$, los cuales son los puntos fijos de dicha función. No es necesario para efectos de la tarea, pero se puede comprobar que los valores encontrados cumplen que $p = f(p)$.

   - Con $p = 4$, tenemos $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 4 = 4$, es decir al evaluar el número 4 en la función se encuentra como imagen 4.

   b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 4}{x + 1}$
   Tenemos
   $\Rightarrow p = \dfrac{p^3 - 3p + 4}{p + 1}$
   $\Rightarrow p^2 + p = p^3 - 3p + 4$
   $\Rightarrow p^3 - p^2 - 4p + 4 = 0$
   Esta última ecuación tiene como solución los valores $p = 2$, $p = -2$ y $p = 1$. Se deja como curiosidad al estudiante corroborar que al evaluar dichos valores en la función original se obtiene el mismo valor evaluado.

6. **[20 Puntos]** Del libro de Enrique Vílchez que se encuentra en mediación virtual desde iniciado el semestre, del capítulo 7, página 302 realizar los ejercicios: 7.2, 7.3, 7.5.1

7.2) **(*7,2*)**

Sietedos[Ma_, α_, ST_]:=Module[{LM = {}, dimensiones = Dimensions[Ma]},

```
For[i = 1, i ≤ Length[α], i++,
DE = α[[i]];

For[j = 1, j ≤ dimensiones[[1]], j++,
fila = Ma[[j]];

If[(ST == fila[[1]])&&(DE==fila[[2]]), LM = Append[LM, fila[[4]]];
ST = fila[[3]];
Break[]
];
];
];
Print[LM];
];
```

$$\mathrm{Ma1} = \{\{\sigma_0, a, \sigma_1, 1\}, \{\sigma_0, b, \sigma_2, 0\}, \{\sigma_1, a, \sigma_2, 2\}, \{\sigma_1, b, \sigma_1, 1\}, \{\sigma_2, a, \sigma_0, 2\}, \{\sigma_2, b, \sigma_1, 0\}\};$$

$$\mathrm{Ma2} = \{\{\sigma_0, a, \sigma_1, 1\}, \{\sigma_0, b, \sigma_2, 0\}, \{\sigma_0, c, \sigma_0, 1\}, \{\sigma_1, a, \sigma_0, 0\}, \{\sigma_1, b, \sigma_1, 1\}, \{\sigma_1, c, \sigma_2, 1\}, \{\sigma_2, a, \sigma_1, 0$$

$$\mathrm{Ma3} = \{\{\sigma_0, a, \sigma_3, 2\}, \{\sigma_0, b, \sigma_1, 2\}, \{\sigma_0, c, \sigma_0, 1\}, \{\sigma_1, a, \sigma_3, 2\}, \{\sigma_1, b, \sigma_1, 0\}, \{\sigma_1, c, \sigma_3, 0\}, \{\sigma_2, a, \sigma_0, 2$$

$$\{\sigma_2, c, \sigma_2, 0\}, \{\sigma_3, a, \sigma_3, 2\}, \{\sigma_3, b, \sigma_3, 0\}, \{\sigma_3, c, \sigma_0, 1\}\};$$

$$\alpha 1 = \{a, a, b, b, a, a, a, b, b, b, a, a, a, b, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, a, a, a, b, b, b, b, b, a, b, b, b, a$$

$$\alpha 2 = \{c, a, b, c, a, b, b, a, c, c, a, a, b, b, b, c, b, c, b, c, b, c, b, c, b, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, c, c, b, b, a, c, c, c, c, b, b$$

$$a, a, b, b, a, c, c, a, c, b, c, c, b, c, a, b\};$$

$\alpha 3 = \{c, c, c, a, b, a, b, a, b, a, b, c, b, c, b, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, a, b, c, c, b, c, c, c, c, c, c, a, a, b, b, c, c, b, a, c, c$
$b, c, a, a, c, c, b, b, b, c, a, a, a, b, b, b, c, c, b, c, b, c, b, c, b, c, a, c, a, c, a, c, a, b, c, a, b, c\};$

Sietedos $[\mathrm{Ma1}, \alpha 1, \sigma_0]$;

$\{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1,$

Sietedos $[\mathrm{Ma2}, \alpha 2, \sigma_2]$;

$\{1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,$

Sietedos $[\mathrm{Ma3}, \alpha 3, \sigma_3]$;

$\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1,$

7.3)

```
(*7,3*)
Sietetres[a_, b_]:=Module[{EA = NSLL, DS = {}, vb, va, M, i, j, α, Fila, nb, vnb, DE},
M = {{NSLL, "00", NSLL, 0}, {NSLL, "10", NSLL, 1}, {NSLL, "01", NSLL, 1}, {NSLL, "11", SLL, 0}, {S
{SLL, "01", SLL, 1}, {SLL, "11", SLL, 0}};
va = Characters[ToString[a]];
vb = Characters[ToString[b]];
While[Length[va] ≠ Length[vb],
If[Length[va] > Length[vb],
vb = Prepend[vb, "0"],
va = Prepend[va, "0"];
];
```

```
];
α = {};
For[i = Length[va], i ≥ 1,
α = Append[α, StringJoin[va[[i]], vb[[i]]]];
i–;
];
For[i = 1, i ≤ Length[α],
DE = α[[i]];
For[j = 1, j ≤ 8,
Fila = M[[j]];
If[EA == Fila[[1]]&&DE == Fila[[2]],
DS = Append[DS, Fila[[4]]];
EA = Fila[[3]];
Break[];
];
j++;
];
i++;
];
vnb = Reverse[DS];
nb = “”;
For[i = 1, i ≤ Length[vnb],
nb = StringJoin[nb, ToString[vnb[[i]]]];
i++;
];
```

Print[nb];

];

$\boldsymbol{a = 1110111;}$

$\boldsymbol{b = 0100101;}$

Sietetres[$\boldsymbol{a, b}$]

1010010

7.5.1) **(*7.5.1*)**

<< FiniteAutomata`

$\mathbf{A1 = MakeAutomaton\,[DFA, \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}\,, \{\{\sigma_0, a, \sigma_0\}\,, \{\sigma_0, b, \sigma_0\}\,, \{\sigma_0, c, \sigma_0\}\,, \{\sigma_1, a, \sigma_0\}\,, \{\sigma_1, b, \sigma_1}$

$\mathbf{\{\sigma_2, b, \sigma_3\}\,, \{\sigma_2, c, \sigma_1\}\,, \{\sigma_3, a, \sigma_1\}\,, \{\sigma_3, b, \sigma_2\}\,, \{\sigma_3, c, \sigma_0\}\}\,, \sigma_2, \{\sigma_0\}\,, \{a, b, c\}]\,;}$

ShowAutomaton[A1, Embedding → Circular]

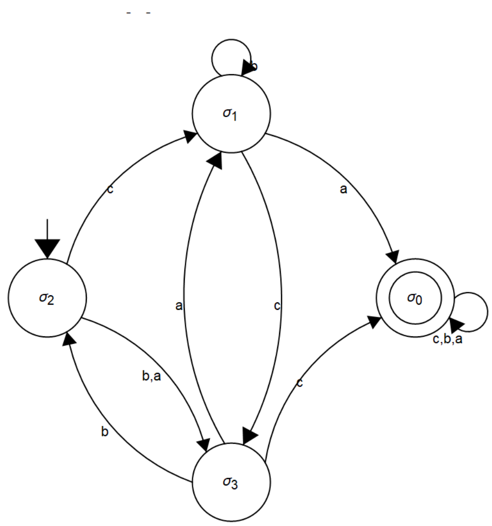


Figura 1: Hecho en mathematica

Si aprovecharamos cada oportunidad de aprendizaje al máximo empezaríamos a ver el mundo desde otra óptica...

MaLu