1 Dualidade e relaxação

- Q: Qual é o contrário do "espaço dual"?
- R: O espaço "donothing".

Eduardo Tengan, em uma aula qualquer

A noção de dualidade não é uma noção perene só na álgebra linear e suas áreas adjacentes (conhecidas em conjunto como "matemática"), também ocupa um lugar especial na teoria de otimização. Em otimização, dualidade vem em diversas formas: dualidade de programação linear, de programação linear inteira (lagrangeana), entre outras. Frequentemente, os métodos de otimização mais confiavelmente eficicientes são métodos primal-dual.

A dualidade é um tema unificador porque podemos expressar todos os duais como dual de inferência ou de relaxação (frequentemente vezes, como ambos). Um dual de inferência pode ser visto como o problema de inferir das restrições nas variáveis um maior limitante inferior na imagem da função objetivo (assumimos daqui para frente, sem perda de generalidade, que queremos minimizar a função). Assim, a busca ocorre sobre provas, no lugar de sobre valores das variáveis. Mais precisamente, se tivermos um problema de otimização da forma

$$min f(x) \tag{1}$$
$$R(x) \tag{2}$$
$$x \in D \tag{3}$$

em que $R(x)$ denota as restrições sobre x e D o seu domínio, seu respectivo **dual de inferência** nos coloca o problema de maximizar o limitante inferior em $f(x)$ que é inferível das restrições. Isso ocorre na forma de uma busca por uma prova do limitante ótimo (ou "bom o suficiente", se não pudermos pedir por um "ótimo"):

dual de inferência

$$max\ v \tag{4}$$
$$C(x) \vdash^P (f(x) \geq v) \tag{5}$$
$$v \in \mathbb{R}, P \in \mathcal{P} \tag{6}$$

em que $C(x) \vdash^P (f(x) \geq v)$ indica que P é uma prova de $(f(x) \geq v)$, usando o que é assumido em $C(x)$. O domínio de P é uma família de provas $\mathcal{P}$, sendo (v, P) um par de solução dual. Quando o problema inicial (dito "**primal**") não tem soluções, o conjunto de soluções para o dual é ilimitado.

primal

Quando o primal for um problema de programação linear, por exemplo, a família de provas pode consistir de combinações lineares não-negativas de restrições de desigualdade, sendo a solução dual identificada com os multiplicadores na combinação linear que deriva o maior limitante.

Direto da definição, podemos inferir o **princípio de dualidade fraca**: um valor factível v do dual de inferência nunca pode ser maior do que qualquer valor factível do primal. Ademais, a diferença (a "lacuna") entre os valores ótimos do primal e do dual é chamada **lacuna de dualidade**. A lacuna de dualidade pode ser igual a zero, mas não é garantido que esse vá ser o caso. Em particular, pode ser que exista um maior limitante inferior a $f(x)$, mas esse limitante inferior não ser inferível em $\mathcal{P}$. Quando isso acontece, $\mathcal{P}$ é incompleta. Mais no geral, se C é uma restrição implicada por $C(x)$ mas não existe $P \in \mathcal{P}$ que infira C, $\mathcal{P}$ é dita incompleta. Caso contrário, ela é dita completa. Quando $\mathcal{P}$ for completa, a lacuna de dualidade pode ser reduzida a zero, o que constitui o princípio de **dualidade forte**[1].

princípio de dualidade fraca

lacuna de dualidade

dualidade forte

1.1 Complexidade

Um certificado de factibilidade (infactilibidade/otimalidade) é um pedaço de informação que permite a verificação da factibilidade (infactibilidade/otimalidade) da instância de um problema. Dizemos que um problema de otimização pertence ao NP (de *nondeterministic polynomial*) se existe um certificado de factibilidade polinomial para qualquer instância factível do problema: a computação requerida para testar factibilidade, pelo certificado, é limitada por uma função polinomial do tamanho da instância do problema. Um problema de otimização é co-NP se existe um certificado polinomial de otimalidade para qualquer instância.

Se um problema de otimização primal for co-NP, seu dual de inferência é NP para alguma família de provas $\mathcal{P}$: se o problema for co-NP, seja $\mathcal{P}$ a família de provas P_i (que assumimos polinomiais) de otimalidade da instância i, de valor ótimo v_i, provê um certificado polinomial de factibilidade do dual (que é, portanto, NP).

Programação linear pertence a ambos NP e co-NP. Problemas desse tipo são tidos ter "boa caracterização", no sentido de que soluções factíveis e provas de otimalidade são facilmente escritas.

[1] Os princípios de dualidade fraca e forte são às vezes referidos como teoremas (porque precisam ser provados). Suas provas, no entanto, são tão simples, que foram omitidas a fim de não aborrecer o leitor.

Leituras adicionais

[1]