# 1 Dualidade e relaxação

*- Q: Qual é o contrário do "espaço dual"?*
*- R: O espaço "donothing".*

---

Eduardo Tengan, em uma aula qualquer

A noção de dualidade não é uma noção perene só na álgebra linear e suas áreas adjacentes (conhecidas em conjunto como "matemática"), também ocupa um lugar especial na teoria de otimização. Em otimização, dualidade vem em diversas formas: dualidade de programação linear, de programação linear inteira (lagrangeana), entre outras. Frequentemente, os métodos de otimização mais confiavelmente eficicientes são métodos primal-dual.

A dualidade é um tema unificador porque podemos expressar todos os duais como dual de inferência ou de relaxação (frequentemente, como ambos). Um dual de inferência pode ser visto como o problema de inferir das restrições nas variáveis um maior limitante inferior na imagem da função objetivo (assumimos daqui para frente, sem perda de generalidade, que queremos minimizar a função). Assim, a busca ocorre sobre provas, no lugar de sobre valores das variáveis. Mais precisamente, se tivermos um problema de otimização da forma

$$
\begin{aligned}
&min\ f(x),\\
&R(x),\\
&x \in X,
\end{aligned}
$$

em que $R(x)$ denota as restrições sobre $x$, sendo $X$ o seu domínio, seu respectivo **dual de inferência** nos coloca o problema de maximizar o limitante inferior em $f(x)$ que é inferível das restrições. Isso ocorre na forma de uma busca por uma prova do limitante ótimo (ou "bom o suficiente", se não pudermos pedir por um "ótimo"): **dual de inferência**

$$
\begin{aligned}
&max\ v,\\
&C(x) \vdash^P (f(x) \geq v),\\
&v \in \mathbb{R}, P \in \mathcal{P},
\end{aligned}
$$

em que $C(x) \vdash^P (f(x) \geq v)$ indica que $P$ é uma prova de $(f(x) \geq v)$, usando o que é assumido em $C(x)$ (no caso, $C(x)$ indica as restrições). O domínio de $P$ é uma família de provas $\mathcal{P}$, sendo $(v, P)$ um par de solução dual. Quando o problema inicial (dito "**primal**") não tem soluções, o conjunto de soluções para **primal** o dual é ilimitado.

Quando o primal for um problema de programação linear, por exemplo, a família de provas pode consistir de combinações lineares não-negativas de restrições de desigualdade, sendo a solução dual identificada com os multiplicadores na combinação linear que deriva o maior limitante.

**princípio de dualidade fraca**

Direto da definição, podemos inferir o **princípio de dualidade fraca**: um valor factível $v$ do dual de inferência nunca pode ser maior do que qualquer valor factível do primal, o que nos possibilita limitar o valor para o ótimo do primal. Ademais, a diferença (a "lacuna") entre os valores ótimos do primal e do dual é chamada **lacuna de dualidade**. A lacuna de dualidade pode ser igual a zero, mas não é garantido que esse possa ser o caso (isto é, não é garantido que as soluções ótimas primal e dual possam ter o mesmo custo). Em particular, pode ser que exista um maior limitante inferior a $f(x)$, mas esse limitante inferior não ser inferível em $\mathcal{P}$. Quando esse é o caso, $\mathcal{P}$ é dita incompleta. Mais em geral, se $C(x)$ implica $C$ mas não existe $P \in \mathcal{P}$ que infira $C$, $\mathcal{P}$ é dita incompleta. Caso contrário, ela é dita completa. Quando $\mathcal{P}$ for completa, a lacuna de dualidade pode, ao menos em princípio, ser reduzida a zero pelo dual, o que constitui o princípio de **dualidade forte***.

**lacuna de dualidade**

**dualidade forte**

A ideia de dualidade por inferência provê um plano unificador para várias ideias centrais em otimização no geral e em programação por restrições em particular. Entre outras coisas, dualidade por inferência nos provê métodos para *aprendizado de cláusulas*, frequentemente muito úteis. Buscas com *aprendizado de cláusulas* cresceram de pesquisa em *aprendizado baseado em explicações*, um ramo de inteligência artificial que busca melhorar a eficiência de métodos de busca por *backtracking* por meio de "explicações de falha", na forma de novas restrições ao problema original. Para CSPs em geral, tais "explicações" são chamadas *nogood* (ou, às vezes, "conflitos"). Foi mostrado que uma grande quantidade de problemas que não podem (até o presente momento) ser resolvidos por outras técnicas podem ser resolvidos de maneira eficiente por *aprendizado de cláusulas*. Em particular, problemas (anteriormente) abertos em teoria de grupos foram resolvidos com essa técnica (entre outras). Para mais informações, veja [**?**]

## 1.1 Duais

Existem na literatura de programação por restrições, assim como na de programação matemática, diversas noções específicas de dual, para diversos tipos de problemas diferentes. Entre elas, destacam-se como especialmente úteis os duais *substituto* e *lagrangeano*, aos quais devotaremos alguma atenção nesta seção e na próxima, colocando ênfase especial na relação entre eles. Então,

*Os "princípios" de dualidade fraca e forte são às vezes referidos como teoremas (porque precisam ser provados). Suas provas, no entanto, são tão simples, que foram omitidas a fim de não aborrecer a leitora.

nossa atenção se voltará ao *dual por ramificação*, que será útil em nosso posterior estudo de técnicas de ramificação.

### 1.1.1 Dual Substituto

Seja um problema do tipo

$$\begin{aligned} & min f(x), \\ & g(x) \geq 0, \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $g(x)$ não necessariamente é linear e $x \in X$ indica as demais restrições em $x$. Note que problemas de programação inteira mista são um caso particular em que $g(x)$ é uma função linear e $X = \mathbb{R}^n + \mathbb{Z}^m$. Obtemos o dual de inferência desse problema tomando combinações lineares não negativas e implicação como método de inferência, fazendo

$$\begin{aligned} & max\ v, \\ & (g(x) \geq 0) \vdash^P (f(x) \geq v), \\ & P \in \mathcal{P}, v \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

em que cada prova em $\mathcal{P}$ corresponde a um vetor $u$ de multiplicadores e a prova $P$ deduz $f(x) \geq v$ de $g(x) \geq 0$ quando a $ug(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq v$. Isto é o mesmo que dizer que o mínimo de $f(x)$ com $ug(x) \geq 0$ e $x \in X$ é no mínimo $v$. Daí segue que essa formulação é equivalente a

$$\begin{aligned} & max\ \sigma(u), \\ & \sigma(u) = min_{x \in X}\{f(x) | ug(x) \geq 0\}, \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

Pergunta: o *dual substituto* é completo?

### 1.1.2 Dual Lagrangeano

O dual lagrangeano do problema (**??**) é semelhante ao dual substituto, exceto que, no dual lagrangeano, as provas fazem uso de combinações lineares e *dominação*†. O dual é o problema (**??**), em que $\mathcal{P}$ consiste de provas que

†Dizemos que uma desigualdade $g(x) \geq 0$ domina uma $h(x) \geq 0$ se $g(x) \leq h(x)\ \forall x$, ou se não existe $x$ tal que $g(x) \geq 0$.

mesclam combinação linear com dominação: $f(x) \geq v$ é inferido de $g(x) \geq 0$ se $\exists\, l \geq 0 : lg(x)$ domina $f(x) \geq v$.

Como dominação é um requisito mais fraco do que implicação, o dual lagrangeano resulta em um dual de inferência mais fraco do que o *substituto* e, assim, possibilita limitantes mais fracos em relação ao *substituto*. Apesar disso, para outros fatores o lagrangeano goza de propriedades mais interessantes do que o *substituto*, o que o torna atraente para uma grande variedade de problemas. Por exemplo, o conjunto de soluções factíveis para o *dual lagrangeano* é côncavo (o que não vale, no geral, para o *dual substituto*). Isso pode ser visto facilmente se, supondo que $lg(x) \geq 0$ é factível para $l \geq 0$, observarmos que o lagrangeano maximiza $v$ com $l \geq 0$ e $lg(x) \geq f(x) - v\ \forall x \in X$. Reescrevendo $lg(x) \leq f(x) - v$ como $v \leq f(x) - lg(x)$ e fazendo $\lambda(l, x) = f(x) - lg(x)$, nosso lagrangeano é equivalente a

$$max\ \lambda(l), \tag{3}$$
$$\lambda(l) := inf_{x \in X}\{f(x) - lg(x)\}, \tag{4}$$
$$l \geq 0, \tag{5}$$

e o conjunto de ínfimos de funções afim (como em (**??**)) é um conjunto côncavo ($\lambda$ é afim para $x$ fixo). O vetor $l$ é popularmente conhecido como vetor de multiplicadores de lagrange.

### 1.1.3 Dualidade por Ramificação

Intuitivamente, se temos uma árvore de busca para um problema de otimização, essa árvore vista "de baixo para cima", isto é, das folhas para a raíz, nos provê um certificado de otimalidade a uma solução ótima. Além disso, dada tal árvore de busca, cada subárvore dela constitui uma relaxação ao problema original e provê um limitante ao custo ótimo do problema original. Assim, parece natural definirmos um dual por ramificação ao problema de otimizar um $f(x)$ nas folhas de uma árvore de busca $\mathcal{T}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} max\ B(\mathcal{T}'), \\ \mathcal{T}' \in \mathscr{T}, \end{aligned} \tag{6}$$

em que $B$ é o limitante de $f$ em $\mathcal{T}'$ e $\mathscr{T}$ é uma coleção de subárvores de $\mathcal{T}$.

As estratégias de ramificação que veremos logo mais podem ser vistas como instâncias do dual de ramificação. Para mais detalhes sobre o dual de inferência veja [**?**].

## 1.2 Complexidade

Um certificado de factibilidade (infactilibidade/otimalidade) é um pedaço de informação que permite a verificação da factibilidade (infactibilidade/otimalidade) da instância de um problema. Dizemos que um problema de otimização pertence ao NP (de *nondeterministic polynomial*) se existe um certificado de factibilidade polinomial para qualquer instância factível do problema: a computação requerida para testar factibilidade, pelo certificado, é limitada por uma função polinomial do tamanho da instância do problema. Um problema de otimização é co-NP se existe um certificado polinomial de otimalidade para qualquer instância.

Se um problema de otimização primal for co-NP, seu dual de inferência é NP para alguma família de provas $\mathcal{P}$: se o problema for co-NP, seja $\mathcal{P}$ a família de provas $P_i$ (que assumimos polinomiais) de otimalidade da instância $i$, de valor ótimo $v_i$, provê um certificado polinomial de factibilidade do dual (que é, portanto, NP).

Programação linear pertence a ambos NP e co-NP. Problemas desse tipo são tidos ter "boa caracterização", no sentido de que soluções factíveis e provas de otimalidade são facilmente escritas.

# Leituras adicionais


[1] Beame Paul and Kautz Henry and Sabharwal Ashish, Towards Understanding and Harnessing the Potential of Clause Learning, Journal of Artificial Intelligence Research 22 (2004) 319-351.

[2] Hooker N. John, Integrated Methods for Optimization, Second Edition, Springer Verlag, 2012.