1 Dando nome aos bois

Foi a influência da filosofia grega que fez da matemática uma ciência. De fato, os primeiros matemáticos gregos estão entre os primeiros filósofos, como é o caso de Tales e Pitágoras. A noção de que um fato matemático pode ser demonstrado é fruto da interação entre matemática e filosofia. Afinal, uma demonstração é essencialmente um argumento para esclarecer como um certo fato é consequência de algo que já conhecemos. E se há alguma coisa que os filósofos gregos gostavam de fazer era argumentar.

S. C. Coutinho - Números Inteiros e Criptografia RSA

Estamos para começar uma jornada cujo destino é a resolução e desenvolvimento de problemas de otimização por restrições lógicas. Antes de sairmos, precisamos reunir algumas ferramentas que serão de grande utilidade. A mais importante dessas ferramentas, que será a base de muitas outras, é a programação lógica. Na verdade, programação lógica é um paradigma de programação, como o de programação funcional, procedural e etc., mas, em princípio, lidaremos com ela como uma linguagem: Prolog (que vem de *"Programmation Logique"*). Isso nos dá a vantagem de lidar com algo concreto enquanto perdemos muito pouco, se algo, do poder de abstração. Um detalhe que vale nota é que existem vários diferentes "sabores" de Prolog, cada um com suas peculiaridades, na maior parte de natureza técnica. Ignoraremos essas peculiaridades sempre que possível (este não tem a intenção de ser um texto técnico sobre Prolog) nos focando no "padrão de facto" Edinburgh Prolog.

Como dizia Sussman [3] , quando se quer aprender uma nova linguagem, as perguntas básicas que precisamos perguntas são

1. Quais são as "coisas" primitivas da linguagem?
2. Quais são seus meios de combinação, com os quais podemos usar as primitivas de maneira estruturada?
3. Quais são seus meios de abstração, com os quais podemos criar programas cada vez maiores?

A resposta à primeira pergunta é a seguinte. O Prolog tem uma primitiva: o **funtor**. Para uma melhor compreensão sobre o que é um funtor é útil saber- **funtor**

mos a origem do termo: O termo *funtor* foi introduzido por Rudolf Carnap, filósofo alemão que participou do círculo de Viena, em seu *Logische Syntax der Sprache*[1] e indica uma *palavra função* (não confundir com "uma função"), que contribui primariamente com a sintaxe de uma sentença (em contraste com *palavras conteúdo*, que contribuem primariamente com o significado): resumidamente, em sua concepção original, funtores expressam a estrutura relacional que palavras tem umas com as outras. O termo atualmente também é usado em outras áreas (além de em linguística e programação lógica), como em *Teoria de Categoria*, com significado semelhante (levando em conta o contexto).

Para nossos propósitos, é uma simplificação razoável dizer que funtores expressam relações. Na linguagem natural, somos restritos a usar os funtores presentes na língua usada (mesmo uma "licença poética" não vai muito longe disso). Na programação lógica, os funtores só precisam ser sintaticamente corretos. Em Prolog, um funtor f de aridade n (aridade é a quantidade de parâmetros, ou "símbolos relacionados pelo funtor"), dito `f/n`, é escrito com uma sintaxe semelhante à de uma função:

`f(`a_1`, ..., `a_n`)`

Onde os argumentos a_i são outros funtores. Em particular, símbolos e números são ditos funtores de aridade zero, também chamados **átomos**[1]. Quando um funtor `f/n` não é um átomo, ele, na presença de seus argumentos, é dito um **termo composto** de **funtor principal** f. Mais em geral, um **termo** é um funtor ou variável (o que é uma variável e como se comporta veremos mais para frente) e, quando corresponder a um átomo ou uma variável, dizemos que ele é atômico.

átomos

termo composto

funtor principal

termo

Dados funtores `f/3` e `p/1`, exemplos de seus usos são:

- f(a,b,c)
- f(1,a,8)
- f(p(9),c,e)

Os exemplos acima são úteis como primeiro exemplo de "como escrever um funtor" mas, como colocados, não têm significado. Isto porque funtores expressam relações, mas relações arbitrárias entre símbolos e números arbitrários não têm necessidade de existir. A maneira de dizermos que uma dada relação existe em Prolog é por meio de um **fato**. Um fato em Prolog é expresso como um funtor, junto de seus argumentos, seguido de um ponto. Por exemplo

fato

```
mais(1,2,3).
```

diz que "é verdade que mais(1,2,3)" ou, mais naturalmente, "é verdade que existe a relação 'mais' entre 1, 2 e 3, nessa ordem" (vale notar que a ordem

[1] Em Prolog, nem todo símbolo pode ser tratado como átomo (embora os usuais sejam). Quando na dúvida, recomendamos testar antes de confiar.

é importante: `mais(1,2,3)` não é o igual a `mais(3,2,1)`, onde por "igual a" entende-se "idêntico a"). Ocasionalmente, é muito mais conveniente que um funtor receba argumentos pela direita e pela esquerda, quase como um operador, como `1 f 2`. É possível definir funtores dessa forma, mas nos restringiremos ao modo usual, pelo qual a última relação fica `f(1,2)`.

Eventualmente pode ser que, na ocasião de a relação `p(a,b)` ser verdadeira outras relações também sejam. Em particular pode ser que, em linguagem matemática, $f(1, l) \Rightarrow p(a, b)$. Esse tipo de relação é escrita em Prolog como:

```
p(a,b) :- f(1,l).
```

ou, se $(f(1, l)$ e $q(f)) \Rightarrow p(a, b)$, escrevemos

```
p(a,b) :- f(1,l), q(f).
```

onde as vírgulas entre os termos fazem o papel do "e" lógico. Esse tipo de estrutura é chamada **regra** e é o mais importante meio de combinação em programação lógica. O que está para a esquerda de ":-" em uma regra é dito "cabeça da regra", ou só "cabeça", se a regra for clara do contexto e o que está à direita de ":-" é dito o "corpo da regra". Quando não for necessário distinguir entre fatos e regras, usaremos o termo **cláusula** para nos referir a qualquer um dos dois.

regra

cláusula

Um **programa lógico** consiste em um conjunto de cláusulas. Um exemplo é o seguinte:

programa lógico

```
pao(de).
pao(de, queijo).
com(cafe) :- tem(cafe).
tem(cafe) :- cafe.
cafe.
```

Note que os nomes usados para os funtores são arbitrários. O seguinte programa tem essencialmente o mesmo significado do ponto de vista computacional:

```
queijo(lua).
queijo(lua, pao).
coma(terra) :- gem(terra).
gem(terra) :- terra.
terra.
```

Pelo código 1, por exemplo, podemos dizer que "é verdade que pao(de, queijo) e que com(cafe)". De fato, a pergunta mais geral que podemos fazer a um programa lógico é se existe alguma relação r entre os termos a_1, ..., a_n.

E essa constitui a maneira primária de se utilizar um programa lógico, que pode ocorrer, por exemplo, em um *prompt* no computador. Por meio de

questões, ou buscas [2], às vezes também chamadas objetivos ou "**goals**" (daqui para frente preferiremos usar "goal", sem itálico, exceto quando for conveniente utilizar "busca" ou "objetivo"). Um goal é escrito como um fato e é o que se busca "provar" a partir do programa. Intuitivamente, pode-se pensar no programa lógico como um conjunto de axiomas e no goal como uma hipótese que se quer provar a partir desses axiomas. **goals**

Assim como dizemos que uma busca foi um sucesso se foi encontrado o que se gostaria de encontrar e uma falha caso contrário, diremos que um goal relativo a algum programa pode ter o status de sucesso se ele pode ser provado a partir do programa, e de falha se não. Note que, em Prolog, "falhar" não é o mesmo que "quebrar". A diferença é essencialmente a mesma entre receber uma resposta de "não" a uma pergunta e receber uma resposta de "não entendo sua pergunta". Se foi um goal mal escrito (se o compilador "não entende a pergunta"), pode ocorrer um erro (isto é, o goal gera um erro quando não é "compreensível" a partir da gramática utilizada pelo compilador usado)[3] e o programa pode não ser executado.

Mais especificamente, um goal é uma conjunção[4], escrita como $p\_1, p\_2, ..., p\_n$, onde p_i é entendida como uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa [5] (ou, interpretando como busca, que pode ter sucesso ou falha).

Um ponto interessante sobre goals e também sobre regras é que são como cláusulas de Horn[6] (isto é, cláusulas do tipo C se A_1 e ... e A_n). Como pode imaginar, a teoria existente sobre cláusulas de Horn é de alguma importância para programas lógicos.

Para melhor diferenciarmos goals de fatos, goals serão, aqui, escritos como: `p?`

apesar de, na natureza[7], não haver essa distinção (neles, goals são, como fatos, escritos com um ponto final no lugar de com um ponto de interrogação).

Considere o seguinte código:

```
arvore_b(vazio).
arvore_b(arvore(A, D, E)) :-
  arvore_b(D),
  arvore_b(E).
```

[2] Por que busca é um termo apropriado deve ficar cada vez mais claro no decorrer do texto.

[3] Se um goal que gera erro é de fato um goal, é discutível, mas não entraremos nesse mérito.

[4] Isto é, uma sequência de proposições unidas por um *e* lógico. Algo como `p_1` e ... e `p_n`, onde os `p_i` são proposições.

[5] Na verdade, como veremos, uma interpretação mais próxima da realidade do programa lógico é uma baseada na lógica construtivista, mas, por enquanto, é suficiente pensar em um goal como uma conjunção no sentido clássico.

[6] Também, apesar de mais raramente, chamadas *cláusulas de McKinsey*. Elas foram usadas primeiramente por Mckinsey, como notado por Horn [2].

[7] Isto é, no Prolog padrão

O goal *arvore_b*(`vazio`)? tem sucesso, já que é um dos fatos. O goal *arvore_b*(`arvore(raiz, vazio, vazio)`)? também tem, já que *arvore_b*(`a, B, C`)? tem sucesso se *arvore_b*(A) e *arvore_b*(B) tiverem, o que ocorre. Perceba que, neste caso, o goal não tem sucesso segundo a primeira cláusula apenas e nem segundo a segunda. Ambas contribuem para a definição de *arvore_b*.

Utilizamos sempre a convenção de que termos capitalizados (isto é, com inicial maiúscula) denotam variáveis, enquanto os demais denotam constantes (a leitora descobrirá que, por notável coincidência, o Prolog faz uso da mesma convenção). Termos que não contém variáveis são ditos **termos base**. Variáveis serão explicadas mais a fundo no futuro.

termos base

No geral, o que um programa lógico deveria fazer (isto é, o que a programadora tem em mente ao escrevê-lo) pode não ser a princípio claro. Numa tentativa de aliviar isso, usaremos aqui a convenção de usar nomes significativos, assumindo o significado usual (a não ser quando dito o contrário), para os elementos relevantes. Assim, por exemplo, o seguinte trecho:

```
filho(c,b).
pai(Pai, Filho) :- filho(Filho, Pai).
```

Indica que Pai tem a relação *pai* com Filho se Filho tem a relação *filho* com Pai (em outras palavras, um Pai é pai de um Filho se Filho é filho de Pai). Mas não é assumido que o interpretador do programa tenha conhecimento sobre o que é *pai* ou *filho*, ou seja, essa interpretação é relevante para o leitor do programa apenas (o que também significa que o leitor do programa pode ler *pai* e *filho* de várias formas e um programa pode, assim, ser interpretado de diversas maneiras).

Com essa discussão em mente, será ocasionalmente útil ter o *significado* de um programa lógico definido de forma algo mais precisa:

Definição 1.1. ***Significado de um programa lógico*** *é o conjunto de goals deduzíveis a partir dele (isto é, os goals que obtêm sucesso se aplicados ao programa).*

Significado de um programa lógico

Na verdade, essa é a definição procedural do significado de um programa lógico (apesar de que, como veremos posteriormente, essa distinção é imaterial) e, vale notar, ela é sempre bem definida (isto é, todo programa lógico tem um significado bem definido). Nesse contexto, o significado intencionado pela programadora (isto é, "o que ela quer dizer com o programa") é um conjunto de goals que pode ou não estar contido no significado do programa. Assim, podemos nos perguntar "Será que o programa diz tudo que se quer que ele diga?" (isto é, se o significado intencionado está contido no significado do programa), ou "Será que tudo o que ele diz é correto?" (isto é, se o significado do programa está contido no intencionado). No primeiro caso, se o significado intencionado estiver contido no do programa, dizemos que o programa é **completo** e, no segundo, que ele é **correto**.

completo
correto

Por exemplo, digamos que o programa 1 seja um trecho de um programa no qual a programadora deseja modelar as relações entre programas e especificações de software atuais e antigos, de forma que A é pai de B se A veio antes de B e B herda características de A, como partes do código ou especificações (como é possível ver, ela apenas começou a escrever o programa). Assim, estão no significado intencionado goals como `pai(gnu, linux)?` e `pai(dos, windows)?`, enquanto que o significado do programa é `pai(d,c)?`.

Fica a pergunta: esse programa é correto? E ele é completo?.

Leituras adicionais

[1] Carnap, Rudolf, Logische Syntax der Sprache, Wien (Viena): Julius Springer (1968)

[2] Horn, Alfred, On Sentences Which are True of Direct Unions of Algebras, J. Symbolic Logic 16 (1951), no. 1, pp 14

[3] Abelsson, Harold and Sussmann, Gerald J. and Sussman Julie Structure and Interpretation of Computer Programs, second edition MIT Press

2 Modelo Computacional de Programas Lógicos

Considere o seguinte código:

```
resistor(energia,n1).
resistor(energia,n2).
transistor(n2,ground,n1).
transistor(n3,n4,n2).
transistor(n5,ground,n4).

inversor(Entrada, Saida) :-
  transistor(Entrada, ground, Saida),
  resistor(energia, Saida).

porta_nand(Entrada1, Entrada2, Saida) :-
  transistor(Entrada1, X, Saida),
  transistor(Entrada2, ground, X),
  resistor(energia, Saida).

porta_and(Entrada1, Entrada2, Saida) :-
  porta_nand(Entrada1, Entrada2, X),
  inversor(X, Saida).
```

A leitora pode se perguntar qual o resultado do seguinte goal:

```
porta_and(Entrada1, Entrada2, Saida)?
```

Mais do que isso, ela pode se perguntar "Será que, dado um programa qualquer e um goal qualquer dá para "calcular" o resultado do goal?". Será instrutivo refletir por alguns momentos sobre essa questão.

A leitora pode imaginar que, se houvesse muitos programas com goals de resultados incalculáveis, programação lógica não seria tão útil e dificilmente teria sido feito um material como este (mais difícil ainda é o material ter sido feito e a leitora estar lendo), então esse não deve ser o caso.

Se o goal estiver expresso no programa apenas como um fato base, prová-lo é fácil: só precisamos checar se algum dos fatos é igual ao goal. Mas, se o goal contiver alguma variável ou só puder ser provado através de alguma regra, que é o caso geral, a situação fica mais complicada.

Se o goal contiver variáveis, para prová-lo o que precisamos é encontrar uma substituição para cada uma delas de forma que cada um dos termos do goal seja logicamente consistente com o programa. Aqui o que queremos dizer com "substituição" é que em todo lugar em que a variável aparecer, ela é substituída por um outro termo (substituição essa que pode ser desfeita no processo de *backtracking*, a ser descrito posteriormente). Uma forma de pensar sobre isso é que, antes da substituição, a variável "tem uma vida só sua", sendo irrestrita,

e que, depois, sua vida é, na verdade, "a vida de outro", ou seja, é, em algum sentido, restrita. Mais precisamente, temos:

Definição 2.1. *Dado um termo p(a_1, ..., a_n), onde os a_j, para $j \in J$, J algum conjunto indexador, são variáveis, uma* ***substituição*** *é um conjunto ι de* ***unificações****, escritas como $a_i = k_j$, onde k_j é uma variável ou um termo atômico e "=" indica que a_i é idêntica a k_j e dizemos que a_i é unificado com k_j. Uma substituição ι sobre um programa P é escrita $P\iota$.*

substituição
unificações

Observações.

1. Ao realizar uma substituição ι sobre um programa P, o resultado é ou programa Pι, sobre o qual podemos, em particular, fazer outras substituições;
2. A relação "$A = B$" deve ser entendida como usado em álgebra (isto é, como denotando uma relação simétrica de igualdade entre A e B) e não como geralmente usado em programação, como um operador de atribuição assimétrico (em que $A = b$ não é o mesmo que $b = A$);
3. O símbolo "=" expressa a relação de dois termos serem idênticos;
4. Essa relação é transitiva: se A, B e C são variáveis e se `A = B` e `B = C`, então `A = C` (se A é idêntico a B e B é idêntico a C, então A é idêntico a C);
5. Pelo item (2), não podemos fazer[8] `A = 1` e, logo em seguida, `A = 2`: isso resulta em falha, por inconsistência.

Se temos que existe alguma substituição ι (possivelmente vazia) para que $p(a_1, ..., a_n) = q(b_1, ..., b_n)$, dizemos que $p(a_1, ..., a_n)$ é unificável com $q(b_1, ..., b_n)$. "=" é o **símbolo de unificação**[9].

símbolo de unificação

Convém notar aqui que, em Prolog, funtores são *cidadãos de primeira classe*, o que significa que compartilham o direito e privilégio de ser nomeado por uma variável (isto é, uma variável pode receber qualquer funtor n-ário, não só átomos).

Normalmente, quando lidando com outros tipos de linguagens, também seria dito que:

1. Cidadãos de primeira classe podem ser retornados por funções e passados como argumentos a elas e

[8] Na verdade, podemos. Mas é como se não pudéssemos. Isso vai ficar mais claro quando lidarmos com *backtracking*.

[9] Veremos depois mais predicados do tipo "a op b", onde op é o operador (no caso, op é =/2). Predicados desse tipo são chamados de infixos. Todo predicado infixo também pode ser usado no formato prefixo (como =(a, b)) e predicados infixos também podem ser definidos pelo programador, como já mencionado anteriormente.

2. Que podem ser incorporados em estruturas de dados.

Como em programação lógica, a princípio, não fazemos uso de funções, não podemos fazer a afirmação 1, mas, na prática, o que dizemos é equivalente. Isso porque, apesar de um funtor `f/n` não retornar um valor propriamente dito, se queremos um "valor de retorno", sempre podemos fazer um `f/n+1`, cujo último argumento (ou qualquer outro, mas costumamos optar pelo último pela conveniência de fazer apenas uma escolha) seria o valor de retorno (como já foi visto no funtor `length/2`, por exemplo) e o termo nessa última posição, se for uma variável, pode ser unificado com um funtor. Quanto à afirmação 2, podemos dizer somente que os funtores são o tijolo e cimento das estruturas de dados em programação lógica.

Voltando ao tema das substituições, todas elas são iguais, mas algumas são mais iguais que outras. Em particular, dado um programa P e substituições ι e ν, se existe alguma substituição η tal que $(P\iota)\eta = P\nu$, dizemos que ι é uma substituição mais geral do que ν. A substituição mais geral será de especial importância, porque podemos expressar outras substituições em função dela.

Agora podemos expressar nosso objetivo de provar o goal a partir do programa como o de achar uma substituição tal que cada termo do goal seja unificável com alguma cláusula do programa. Mais precisamente, um goal é provado a partir do programa se é possível unificar cada termo do goal com alguma cláusula do programa de forma a preservar a consistência das cláusulas. O processo pelo qual esse objetivo é realizado é chamado **processo de resolução**.

processo de resolução

Unificação exerce um papel fundamental na programação lógica. Na prática, ele resume processos de atribuição de valores, gerenciamento de memória, invocação de funções e passagem de valores, entre outros. O primeiro estudo formal sobre unificação é devido a John A. Robinson [1], que depois de montar um algoritmo de unificação, gerou o primeiro de que temos conhecimento.

O algoritmo dele é um tanto ineficiente e não será estudado aqui. Usaremos um mais prático no lugar. Antes, vale lembrar que um programa lógico é um conjunto de regras que recebe um goal (ou uma busca) e retorna *sucesso* (ou, sim, ou verdadeiro, dependendo da preferência pessoal) se a busca tem sucesso ou *falha* (ou, não, ou falso...) se não.

Como discutido acima, para provar um goal a partir de um programa é suficiente que tenhamos um algoritmo de unificação. Esse algoritmo recebe uma equação do tipo $T_1 = T_2$, e devolve uma substituição mais geral[10] para as variáveis presentes caso tal substituição exista, ou falha, caso contrário. O algoritmo que utilizaremos faz uso de uma pilha para armazenar as sub-equações a serem resolvidas e de um espaço Γ para armazenar a substituições:

(a) Faça o *push*[11] da equação na pilha;

[10] É importante que seja a mais geral, para não perdermos possíveis soluções

[11] Os *push* e *pop* devem ser entendidos como realizadas em uma pilha: *push* põe um elemento na pilha, *pop* retira.

(b) Se a pilha estiver vazia, devolva sucesso. Se não, faça o *pop* de um elemento (uma equação) $T_1 = T_2$ da pilha. Realize uma das ações a seguir, segundo a equação retirada:

   1. Se T_1 e T_2 forem termos unários idênticos, nada precisa ser feito;
   2. Se T_1 é uma variável e T_2 um termo não contendo T_1, realize uma busca na pilha pelas ocorrências de T_1 e troque T_1 por T_2 (o mesmo é feito em Γ);
   3. Se T_2 for uma variável e T_1 for um termo não contendo T_2, a ação tomada é análoga ao do passo anterior;
   4. Se T_1 e T_2 forem termos compostos de mesmo funtor principal e aridade, $f(a_1, ..., a_n)$ e $p(b_1, ..., b_n)$, adicione as equações $a_i = b_i$ na pilha;
   5. Em outro caso, devolva falha.

(c) Retorne ao passo (b).

Intuitivamente, esse algoritmo tenta provar a equação de forma construtiva: isto é, tenta construir uma solução por meio de substituições e, se não chegar a uma contradição, termina com sucesso, "devolvendo" (não no sentido de uma função que devolve um valor, mas no de "mostrar" ao usuário do programa) a substituição realizada.

Para provar um goal G, escolhemos não-deterministicamente[12] a cabeça de uma cláusula T do programa, construímos uma equação do tipo `G = T` e aplicamos o algoritmo acima. Caso ele devolva sucesso, fazemos o mesmo com cada termo do corpo da cláusula. Caso devolva falha, seleciona-se outra cláusula e é realizado o mesmo processo, até que não haja mais cláusulas a serem selecionadas, quando o goal retorna falha.

O passo 2.b do algoritmo merece uma explicação um pouco mais detalhada. Ele diz implicitamente que x não é unificável com algum `y(a_1, ...,x, ...a_n)`, isto é, com algum funtor que tome x como argumento. Pode parecer estranho a princípio, mas a estranheza some se se lembrar que funtor não é função: um funtor representa uma estrutura primariamente simbólica. Sem essa condição, se `X = y(a_1, ..., X, ..., a_n)`, então `X = y(a_1, ...,y(a_1, ..., x, ..., a_n), ..., a_n) = y(a_1, ..., y(a_1, ...,y(a_1, ...,y(a_1, ...,x, ..., a_n), ..., a_n) , ..., a_n) , ..., a_n)` em um ciclo sem

[12] No geral, podem existir várias escolhas possíveis e pode ser que, por algumas sequências de escolhas de cláusulas, nunca cheguemos a uma prova do goal, apesar de ele ser deduzível a partir de outras escolhas de cláusulas. Quando dizemos que a escolha é não-determinística, queremos dizer que, se existem mais de um conjuntos de escolhas que provam o goal, um desses conjuntos é escolhido (a escolha é feita entre as cláusulas que podem provar o goal, o que significa que, se ele é provável, ele é provado). Na prática, isso pode ser implementado apenas aproximadamente. Ainda assim, é uma abstração importante e leva a aplicações interessantes, na assim chamada, *programação não-determinística*. Em outros contextos, também podemos usar esse mesmo termo para nos referir a situações nas quais o programa tem, a princípio, mais de uma "escolha" (se não há "escolhas", dizemos que o contexto é determinístico).

fim. Com um processo desses, não dá para provar um goal e, portanto, é devolvida falha.

Para entender melhor, tome o exemplo do código 2, no início deste Capítulo, e suponha que àquele código é submetido o goal `resistor(energia, n1)?` O algoritmo é aplicado como se segue:

1. Tentaremos a unificação do goal com a cláusula na primeira linha do programa: a equação `resistor(energia, n1) = resistor(energia, n1)` é posta na pilha;
2. Uma equação é retirada da pilha: a equação `resistor(energia, n1) = resistor(energia, n1)`;
3. A equação é formada por dois funtores termos compostos de mesmo funtor principal e mesma aridade: as equações `energia = energia` e `n1 = n1` são postas na pilha;
4. É retirada uma equação da pilha: a equação `energia = energia`. Como os dois lados da equação são idênticos, não há mais o que fazer;
5. É retirada outra equação da pilha: a equação `n1 = n1`. Como os dois lados da equação são idênticos, não há mais o que fazer;
6. A pilha está vazia: o programa devolve sucesso, com a substituição $\Gamma = \{\}$ (substituição vazia).

2.1 Programas "gera-e-testa"

Programação não determinística não serve apenas para o desenvolvimento da teoria de computação de programas lógicos, também serve como uma abstração útil para a criação de programas interessantes.

Imagine que você se encontra em uma situação problemática e gostaria de resolver o problema. Um procedimento possível é gerar uma provável solução e, então, testar se ela de fato resolve o problema. Se formos traduzir isso para programação lógica, teríamos algo como:

```
encontra(X) :-
  gera(X),
  testa(x).
```

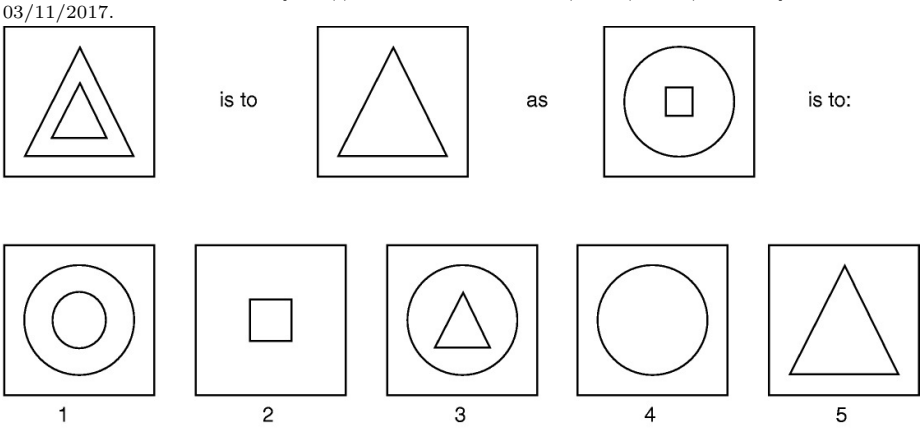
Para algum *gera* e algum *testa*. A hipótese de não-determinísmo está na esperança de que será gerada uma solução que passa no teste, o que não é, a princípio, claro ser possível. Na prática, isso seria aproximadamente resolvido com o artifício do *backtracking*, que veremos posteriormente.

Gera-e-testa é um modelo comum para a resolução de vários problemas. Frequentemente, no entanto, o *testa* está mesclado com o *gera*, de modo a tornar

o procedimento mais eficiente[13]. Muitas vezes a programadora não precisa se preocupar com isso, tornando essa uma abstração útil. Talvez isso fique mais claro com o seguinte exemplo.

O exemplo de programa gera-e-testa que usaremos é o "ANALOGY". Considere o problema de encontrar analogias geométricas, como o mostrado na figura 1 [14]:

Árvore 1: Retirado de [http://cs-alb-pc3.massey.ac.nz/notes/59302/l01.html], acesso em 03/11/2017.



Um possível algoritmo para resolver esse problema é o seguinte:

1. Ache uma operação que relaciona os objetos[15] para os quais conhecemos a relação "is_to";
2. Aplique essa operação no objeto dado para gerar um outro objeto;
3. Cheque se o objeto gerado está entre as opções listadas:
   - Se não estiver, volte ao passo (1);
   - Caso contrário, termine.

No problema específico mostrado, podemos ver que, na primeira linha, a relação entre o primeiro diagrama e o segundo é que o segundo é o primeiro quando se retira a figura no centro. Assim, uma resposta ao problema seria encontrar um diagrama na segunda linha que corresponda ao terceiro da primeira menos a figura do centro (isto é, um círculo dentro de um quadrado, o diagrama 4 na segunda linha).

[13] Na verdade, em geral, tenta-se pôr o teste tão dentro do gerador quanto possível, levando a um gasto menor de tempo de processamento com soluções inúteis.

[14] Esse problema foi retirado da edição de 1942 do "Teste psicológico para calouros de faculdade", do conselho americano de educação [2].

[15] Usaremos "objeto" como um termo geral para nos referir a algo a que não queremos nos dar ao trabalho de definir rigorosamente.

O programa a seguir implementa esses passos em um programa lógico[16]:

```
analogy(is_to(A, B), is_to(C, X), Answers) :-
  match(A, B, Operation),
  match(C, X, Operation),
  member(X, Answers).

match(inside(Figure1, Figure2),
      inside(Figure3, Figure2),
      exclude_center) :-
  Figure1 = inside(Figure5, Figure6),
  Figure3 = Figure6.

match(inside(Figure1,Figure2),
      inside(Figure2,Figurel),
      invert).
```

Esse programa é muito específico: ele toma a analogia entre apenas dois objetos e, a partir disso, cria uma analogia com um terceiro. Uma generalização é possível, mas, para nossos propósitos, isso é o suficiente.

Para que ele funcione, a maneira como os diagramas são representados é fundamental. Estando representados apropriadamente, `match/3` nos dá a operação que relaciona um objeto A com um B. Com isso em mãos, só precisamos aplicar a mesma operação ao termo C, por meio de `match/2`, achando X, o objeto que queríamos. Vale ressaltar que `match/2` está sendo usado de duas maneiras diferentes[17]: para encontrar a relação entre dois termos e para "fabricar" um termo com uma relação desejada. O predicado `member/2` ainda não foi explicado, e só o será melhor entendido posteriormente: por enquanto, é suficiente assumir que `member(A, B)` se B for uma lista (essa coisa entre colchetes, que será explicada adiante) da qual A faz parte (no caso, de C fazer parte de *Answers*)[18].

Caso esteja se perguntando qual a relação com o modelo do gera-e-testa discutido anteriormente: o primeiro *match* ajuda o segundo a gerar o *member* testa se o resultado é válido.

O seguinte programa realiza um teste ao programa anterior:

```
test_analogy(Name, X) :-
  figures(Name, A, B, C),
```

[16] O "=" usado nesse programa é o mesmo da "substituição" mencionada acima e é a relação de identidade: A = B ⇔ A é idêntico a B.

[17] Esse tipo de comentário provém de uma leitura procedural: do ponto de vista estritamente lógico, `match/2` apenas expressa uma relação, que pode ser verdadeira ou falsa (isto é, pode existir ou não existir). Pensar do ponto de vista lógico é conveniente para fazermos programas mais elegantes e gerais, mas, sem uma leitura procedural adequada, não conseguiríamos trabalhar com alguns dos programas que veremos mais para frete.

[18] Caso o mistério te incomode, considere fazer uma visita ao Capítulo 3.

```
  answers(Name, Answers),
  analogy(is_to(A,B), is_to(C,X), Answers).

figures(test1,
        [ inside(inside(triangle, triangle),square),
          inside(triangle, square),
          inside(inside(square, circle),square) ]).

answers(test1,
        [ inside(inside(circle, circle), square),
          inside(square, square),
          inside(inside(triangle, circle), square),
          inside(circle, square),
          inside(triangle, square) ]).
```

O goal `test_analogy(test1, X)?` tem o resultado esperado.

Talvez tenha estranhado que os últimos programas estejam todos em inglês. O programa Analogy (um parecido, em espírito, com o usado aqui) foi apresentado como a tese de doutorado de Thomas Evans [2], no MIT. Preferimos manter o nome original (analogy) e com o nome veio o resto.

Alguém poderia dizer que a maior parte da "inteligência" do programa está na representação utilizada. Vale notar, entretanto, que, diferente do programa discutido aqui, o original não tomava figuras geométricas como primitivas e tinha que criar um tipo de representação por conta própria. Como isso foi feito está além do escopo deste texto.

Leituras adicionais

[1] J.A. Robinson (Jan 1965), "A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle", Journal of the ACM, 12 (1): 23–41.

[2] T.G. Evans, "A Program for the Solution of Geometric-Analogy Intelligence Test Questions", Semantic Information Processing , M. Minsky, ed., MIT Press, 1968, pp. 271–351.

3 Teoria de Programação Lógica

Um dos motivos para a programação lógica parecer atrativa são as suas raízes em teorias matemáticas, já bem desenvolvidas e compreendidas. O presente Capítulo visa fazer uma rápida introdução a essas raízes. Esta introdução não é de modo nenhum completa e tem por objetivo apresentar apenas uma visão geral. Olhando por alto, existem três aspectos mais importantes nessa teoria, dos quais faremos um breve resumo: o da semântica, o da corretude e o da complexidade de um programa lógico.

3.1 Semântica

Semântica tem a ver como significado. Em nosso contexto, nos importamos com o significado do programa. No Capítulo 0 começamos uma discussão informal nesse sentido. Como foi lá notado, a definição que demos de "significado" é, na realidade, a de significado procedural. Aqui, vamos trabalhar de uma maneira um pouco diferente.

O significado declarativo é baseado na assim chamada teoria de modelos. Para trabalharmos com ela, precisamos antes de alguma terminologia:

Definição 3.1. *O **universo Herbrand** de um programa lógico P, denotado U(P), é o conjunto de termos base formados pelas constantes e símbolos de funtores que aparecem em P.* **universo Herbrand**

Por exemplo, se temos um programa como o seguinte:

```
natural(0).
natural(s(P)) :-  natural(P).
```

U(P) é o conjunto formado por 0, `natural/1` e suas combinações:

$$U(P) = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...\}$$

Definição 3.2. *A **base Herbrand** de um programa lógico P, denotada B(P), é o conjunto de goals base formados por predicados em P e o termos de U(P).* **base Herbrand**

Chamaremos um subconjunto de B(P) de *interpretação* e um subconjunto consistente com o programa, de *modelo*:

Definição 3.3. *Dada uma interpretação I de um programa lógico, I é um modelo se, para cada cláusula de P,* `a :-` b_0`, ...,` b_n, $a \in I$ *se* b_0, ..., $b_n \in I$. *Modelo*

Podem existir vários modelos diferentes para um programa lógico, então faz sentido falar de um modelo mínimo.

Definição 3.4. *Dado um programa P, um modelo mínimo para P, m(P), é um modelo tal que $\forall M_i$, M_i modelo de P, m(P) $\subseteq M_i$. Tal modelo é chamado de* ***significado declarativo*** *de P.*

significado declarativo

Mostrar que essa semântica e a anteriormente apresentada são equivalentes foge de nosso escopo atual.

3.2 Correção do Programa

Pelo que vimos na seção anterior, todo programa tem um significado bem definido. Apesar disso, esse significado pode ou não corresponder ao intencionado pela programadora. Querer tratar matematicamente o "significado intencionado pela programadora" é querer tirar conclusões rigorosas de algo não rigorosamente definido: vencemos essa dificuldade no Capítulo inicial dizendo que o significado intencionado é um conjunto de goals. Não nos questionamos se isso é mesmo possível, essa questão é deixada de exercício para a leitora diligente.

Supondo que o "significado intencionado pela programadora" é conjunto de goals, definimos, também no Capítulo inicial, o que chamamos de *programa correto* e *programa completo*. Caso não se lembre, um programa é correto em relação a um significado intencionado se o significado do programa está contido no intencionado e, completo, se ele contém o intencionado: um programa é correto e completo se o significado intencionado for igual ao do programa. Geralmente gostaríamos que os programas fossem corretos e completos, mas isso nem sempre é possível de se obter.

À parte do significado, outra questão importante é se ele termina com relação a algum goal: não adianta muito ter um goal no significado intencionado e no do programa se o processo de computação desse goal não termina. Talvez não seja intuitivo que isto é possível com as definições dadas, mas, ao nos lembrarmos que uma busca pode gerar mais de um resultado (e, de fato, pode gerar infinitos resultados), podemos ter uma ideia de que isso depende da forma como o goal é computado. Mas antes de lidarmos com a questão de terminação, precisamos de uma representação melhor do processo de computação de um resultado:

Podemos representar a computação de um goal G = G_0 em relação a um programa P como uma sequência (possivelmente infinita) de triplas (G_i, Q_i, C_i), em que G_i é um goal, Q_i um goal simples ocorrendo em G_i (um goal, no geral, é uma conjunção: um goal simples não) e C_i uma cláusula tal como `A :-` B_1`,` `...,` B_n`.` de P[19] (possivelmente com uma renomeação de variáveis, para que variáveis diferentes tenham nomes diferentes). G_{i+1} é o goal obtido quando se faz Q_i como o corpo de C_i (lembre-se que Q_i é um goal em G_i) e se aplica o

Se não estiver claro, pare e pense sobre isso por alguns minutos.. se continuar escuro, considere ir tomar um suco de laranja e voltar depois

[19] No futuro revisitaremos esse *framework* teórico, deixando essa notação uma pouco mais leve. Mas vê-la dessa forma antes será importante para compreender melhor a utilidade do que virá depois.

unificador mais geral de Q_i com A, a cabeça de C_i; ou *sucesso* se Q_i for o único goal em G_i e C_i é vazio; ou *falha* se G_i e a cabeça de C_i não são unificáveis.

Dizemos que uma computação termina se $\exists n > 0 : G_n = sucesso$ ou $G_n = falha$. Relacionado a isso é o *traço* de uma computação: dizemos que o traço de uma computação (G_i, Q_i, C_i) é a sequência (Q_i, Γ), em que Γ é a parte do unificador mais geral computado no passo i, restrito às variáveis em Q_i. *traço*

Dizemos que um programa é *terminante* se todo goal em seu significado pode ser provado em uma quantidade finita de passos. Isto é, se $G \in M(P) \Rightarrow \exists n \in N.G_n \in \{sucesso, falha\}$, em que M(P) é o significado de P.

Para obtermos um exemplo concreto, é útil termos o passo a passo do processo de resolução de um goal. Por exemplo, por exemplo, considere o goal `porta_and(En1, En2, Sai)?` submetida ao Código 1, do Capítulo 1.

O processo de resolução, baseado no algoritmo visto no Capítulo 1, é como se segue:

Construímos a equação `porta_and(En1, En2, Sai) = porta_and(En1, En2, Saida)`, que é posta na pilha; $\Gamma = \{\}$;

- 1. É realizado o *pop* da equação `porta_and(En1, En2, Sai) = porta_and(En1, En2, Saida)`;
  2. (Passos b.2 e b.3, três vezes sucessivamente) Γ = {Entrada1 = En1, Entrada2 = En2, Saida = Sai};
  3. Construímos as seguintes equações e as colocamos na pilha:
     - `porta_nand(En1, En2, X) = porta_nand(Entrada10, Entrada20, Saida0)`[20] e:
     - `inversor(X, Sai) = inversor(Entrada00, Saida00)`;
  4. (a) Realizamos um *pop*, retirando a equação `porta_nand(En1, En2, X) = porta_nand(Entrada10, Entrada20, Saida0)` da pilha;
     (b) Γ += {X = Saida0, Entrada10 = En1, Entrada20 = En2}[21] [22];
     (c) Construímos as seguintes equações e as colocamos na pilha:
        - `transistor(En1, X0, X) = transistor(n3,n4,n2)`;
        - `transistor(En2, ground, X0) = transistor(n5,ground,n4)`;
        - `resistor(energia, X) = resistor(energia,n1)`
     (d) i. Realizamos um *pop* da equação `transistor(En1, X0, X) = transistor(n2, ground, n1)`;
     ii. Γ += {En1 = n3, X0 = n4, X = n2};

[20] Os dois lados da equação, pertencendo a cláusulas diferentes, fazem uso de variáveis, a priori, diferentes. Assim, para evitar problemas, renomeamo-las.

[21] Por conveniência, usaremos C += B, onde C e B são dois conjuntos, para denotar que C' = C ∪ B e posterior renomeação de C' para C.

[22] Não se esqueça que quando adicionamos uma substituição, também a fazemos na pilha e em Γ.

iii. Realizamos um *pop* da equação `transistor(En20, ground, X0) = transistor(n5, ground, n4)`;
iv. Γ += {En20 = n5, X0 = n4};

5. (a) Realizamos um *pop* da equação `inversor(n2, Sai) = inversor(Entrada00, Saida00)`;
   (b) Γ += {Entrada00 = n2, Saida00 = Sai};
   (c) Construímos as seguintes equações e as colocamos na pilha:
      - `transistor(n2, ground, Sai) = transistor(n2,ground,n1)`;
      - `resistor(energia, Sai) = resistor(energia,n1)`;
   (d) Realizamos um *pop* da equação `transistor(n2, ground, Sai) = transistor(n2,ground,n1)`;
   (e) Γ += {Sai = n1};
   (f) Realizamos um *pop* da equação `resistor(energia, n1) = resistor(energia,n1)`;

- Por fim, se tivermos feito todos os passos corretamente, temos que En1 = n3, En2 = n5 e Sai = n1.

Com base nisso, qual seria o traço dessa computação? O programa é terminante?

Vimos anteriormente (no Capítulo 1, o passo b.5 do algoritmo de unificação) uma checagem para evitar a não-terminação de um programa em um caso específico[23]. Mesmo essa checagem não seria o suficiente para evitar a não-terminação de um programa. Em particular, em programas recursivos (muito comuns em programação lógica) é fácil criar um programa para o qual existam goals cuja busca não termina no sentido usual (isto é, no sentido de o programa não terminar a computação de um goal posto pela programadora). Mas o sentido definido acima é ainda mais fraco: por exemplo, na prática, o goal `natural(X)?` pode terminar com a substituição $\iota = \{X = 0\}$, por exemplo, e a computação terminaria. Mas outra computação poderia levar a outro ι, por exemplo $\iota = \{ X = s(0)\}$. Mais no geral, como é possível construir um traço não terminável para uma computação nesse goal, esse programa não é terminante.

Na prática, o tipo de caso de não-terminação mencionado acima seria provavelmente evitado, mas, ainda assim, é importante: primeiro porque mostra que, se um programa for não terminante, existirão resultados (unificações) corretas, mas, na prática, inatingíveis (quais seriam atingíveis ou não, nesse contexto, depende de como se faz a busca pela solução) e, segundo, porque ele nos mostra que a forma de computar o goal pode ser fundamental. Ademais, o caso acima poderia ser evitado porque é simples, mas em programas mais complicados esse tipo de situação pode se tornar um problema real.

É um fato clássico[24] que não pode existir um algoritmo que diga se um

[23] Apesar de em implementações práticas essa checagem ser omitida por questões de eficiência, podendo ser ativada manualmente.

[24] Por clássico, entenda "comumente visto em classe", para uma classe comum de um curso apropriado.

programa qualquer termina ou não. Felizmente, não só nossa definição de terminação é especial, mas nossos programas também serão especiais e, eventualmente, poderemos dizer se ele termina ou não e em quais circunstâncias.

Dizemos que um termo A é uma *instância* de um termo B se existe uma substituição ι tal que Aι = B. Com isso, temos as seguintes definições:

Definição 3.5. *Um **domínio** D é um conjunto de goals fechados pela relação de instância: se $A \subseteq D$ e $B = A\iota$ para alguma substituição ι, então $B \subseteq D$.* **domínio**

Definição 3.6. *Um **domínio de terminação** D de um programa P é um domínio tal que qualquer computação de qualquer goal em D termina em P.* **domínio de terminação**

Por exemplo, a Base Herbrand para o programa 3.1 é um domínio de terminação. No geral, gostaríamos que um programa tivesse um domínio de terminação contido no seu significado intencionado. Para um programa lógico interessante no geral isso não poderá ser obtido. Felizmente, as linguagens de programação com que lidaremos são restritivas o suficiente para que possamos obter esse tipo de resultado no futuro.

Pode ser útil buscarmos achar, para programas lógicos, domínios de terminação. Para isso, usaremos o conceito de *tipo*: um tipo é um conjunto de termos.

Entenda isso como uma definição mais informal. Poderíamos, pela definição, tratar o `match/2`, introduzido no programa Analogy, do Capítulo anterior, como um tipo, mas não temos, atualmente, motivos para fazer isso. Analogamente, podemos chamar arvore_b, no programa Árvore Binária do Capítulo 0 de um tipo, e temos motivos para fazer isso.

Definição 3.7. *Um tipo é **completo** se é fechado pela relação de instância.* **completo**

Assim, um (número) natural completo (vide programa 3.1 deste Capítulo) é ou 0 ou um $s^n(0)$, para $n \in N$.

3.3 Complexidade

Programas lógicos no geral podem ser usados de várias formas diferentes, o que pode mudar a natureza de sua complexidade. Para analisar a complexidade de um programa de modo mais geral, tomaremos goals em seu significado e veremos como eles são derivados.

Para isso, precisaremos do conceito de *comprimento de uma prova*. Quando submetemos um goal a um programa P, o processo de tentativa de goal define implicitamente uma árvore. Se, para cada termo do goal, há apenas uma cláusula no programa que o prova, dizemos que tal computação é *determinística*. A árvore determinada por uma computação determinística é essencialmente uma lista.

Interpretadores abstratos diferentes podem construir diferentes árvores de busca, o que depende de quais cláusulas são escolhidas primeiro para a prova do goal. Por exemplo, um interpretador pode fazer uma busca por largura: logo depois de realizada a criação do ponto de escolha, o interpretador volta e tenta outra unificação com a consequente criação de outro ponto de escolha, continuando assim até que não haja mais possibilidades nesse "nível", na ocasião de que ele volta ou primeiro ponto criado e continua nesse "segundo nível".

O comprimento de uma prova de um goal é definido como a altura dessa árvore.

Definição 3.8. *O **tamanho de um termo** é o número de símbolos em sua representação textual. Constantes e variáveis de um símbolo tem tamanho 1. O tamanho de termos compostos é um mais a soma dos tamanhos de seus argumentos.*

tamanho de um termo

Definição 3.9. *Um programa P tem **complexidade por comprimento** C(n) se qualquer goal de tamanho n no significado de P tem alguma prova de comprimento menor ou igual a C(n).*

complexidade por comprimento

3.4 Negação

Existem duas interpretações fundamentais para um programa lógico:

1. Que a falha de uma busca indica que o goal correspondente não é provável pelo programa;
2. Ou, que a falha de uma busca indica que o goal correspondente é falso.

À segunda interpretação corresponde a assim chamada *hipótese de mundo fechado*: tudo o que é conhecível é conhecido. Nesse contexto, dizer que uma computação falha implica dizer que "se não está no programa, não é verdade". Nessa linha, se quiséssemos implementar algo como uma negação lógica, a qual denotaremos `not` (no lugar de "não", porque em programas de verdade é usado "not", não "não"), o caminho mais natural é dizer que, dado um goal G, `not G?` tem sucesso se G falha.

Not

Vale notar que essa forma de negação tem várias diferenças com a negação da lógica clássica. Por exemplo, a negação da lógica clássica é uma relação monótona[25]: na lógica clássica, com mais a adição de proposições permite a derivação de, pelo menos, a mesma quantidade de conclusões (se $b \Rightarrow a$, então, para toda proposição c, $b \wedge c \Rightarrow a$), o que segue não é verdade com o nosso `not`.

Assim, por exemplo, podemos escrever algo como `a :- not a.` que indica que `a` tem sucesso se `a` tem falha. Na prática, se existem outras cláusulas

[25]Relações monótonas são as que preservam ordem (isto é, se R é uma relação entre A e B, $\preceq$ a ordem em A e $\preceq$' a ordem em B, temos: $a \preceq b \Rightarrow Ra \preceq' Rb$) e, quando não dito o contrário, é assumido que a ordem é a induzida pela inclusão: $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

contribuindo para a definição de `a`, o resultado dessa computação vai depender muito da ordem de avaliação do interpretador, que no geral não é não-determinística.

Vale notar que essa não é a única forma de negação. Uma outra possibilidade seria a de possibilitar a `fail/1`, um átomo que representa falha, compor a cabeça de uma cláusula, no que poderíamos fazer algo como `fail :-` a_1`, ...,` a_n`.`. Esse tipo de negação tem sua utilidade, por exemplo, em sistemas de diagnóstico de falhas (em particular, porque, por esse sistema, é possível saber o que causou a falha, o que seria mais difícil de outra forma). Mas não faremos uso dele e, quando falarmos sobre negação, nos referimos à negação por falha..

4 Listas

Antes de prosseguirmos em outros aspectos da programação lógica, ocasionalmente será útil sabermos trabalhar com **listas**: **listas**

Definição 4.1. *Usaremos a seguinte definição formal de lista:*

- `.()` *(o "funtor .") é uma lista*[26] *(o que chamamos "lista vazia", é o mesmo que "[]" das seguintes convenções);*
- `.(A, B)` *é uma lista se B é uma lista*

Como é chato ficar escrevendo coisas como `.(A, .(B, []))` *usaremos as seguinte convenções:*

- `[A,B]` *é o mesmo que* `.(A, .(B, .()))`*;*
- `[A]` *é o mesmo que* `.(A, .())` *(o funtor . é de aridade 2, a não ser quando não recebe argumentos);*
- `[A, B, C, ...]` *é o mesmo que* `.(A, .(B, .(C, ...)))`*;*
- `[A|B]` *indica que A é o primeiro elemento da lista (também chamado de* ***cabeça da lista****) e B é o resto da lista, também chamado de* ***corpo da lista*** *.* **cabeça da lista** **corpo da lista**

Dado isso, podemos escrever um programa para adicionar um elemento na lista como o seguinte:

```
append([], A, A).
append([X|Y], A, [X|C]) :- append(Y, A, C).
```

Esse é um programa clássico e, por isso, escolhemos manter seu nome clássico, que, daqui para frente será usado sem itálico. Os dois elementos iniciais de append são listas e o final é o resultado de se "juntar as duas listas": cada elemento da primeira lista está, ordenadamente, antes da cada elemento da segunda. Para exercitar, pense em qual seria o resultado do goal `append([cafe, queijo], [goiabada], L)?`.

Para uma melhor compreensão, será instrutivo analisarmos o seguinte programa:

[26] Na verdade, isso não é estritamente padrão e implementações diferentes podem usar funtores diferentes. Essa é outra razão para não usarmos essa definição na prática, mas sim a convenção seguinte. Apesar disso, é importante se lembrar que a lista não é, estritamente falando, diferente de um funtor.

```
% length(Xs, N) :-
%   N eh a quantidade de elementos na lista Xs
%

lenght([X|Xs], N) :-
  length(Xs, K),
  N is 1 + K.
length([], 0).
```

4.0.1 Operadores aritméticos

Mas antes, precisamos entender o que significa `N is M + 1.`. Esse **is** é o operador de atribuição aritmético e ele não funciona como os demais predicados: para algo como `A is B`, se B for uma constante numérica e A é uma variável, o comportamento é o esperado (A assume o valor de B); se *A* for uma constante numérica e *B* for outra constantes, ocorre falha. Em outras ocasiões, ocorre erro. Disso segue que `is/2` não é simétrico: por exemplo, `A is 5` resulta em A = 5, mas `5 is A.`, onde A é uma variável não instanciada, resulta em erro. Ademais, quando algum operador aritmético[27] *op* é usado com `is/2`, o operador realiza a operação esperada: `A is 2 + 3` e `A is 10 - 8` resultam em A = 5, por exemplo. Vale notar que esse comportamento é diferente do `=/2`, por exemplo: o seguinte programa pode não ter o resultado intuitivamente esperado:

is

```
length([X|Xs], N) :-
  length(Xs, K),
  N = 1 + K.
length([], 0).
```

Intuitivamente, esperaríamos que o *N* fosse unificado, por um processo recursivo, com o número correspondente ao tamanho da lista. Isso não ocorre, porque `=/2` tem um efeito puramente simbólico e não realiza operações aritméticas: o que teríamos em *N* seria algo como uma *string* de símbolos *1+(1+(1+0))*, ao invés da avaliação dessa *string*, ou seja, 3.

Outro exemplo é o do operador ou exclusivo (o *xor*), que também não age da maneira como estamos acostumados: gostaríamos que `1 is A xor 0` seja equivalente a `A is 1`. Veremos mais tarde outras formas de contornarmos isso. Por ora, podemos lidar com isso por meio de predicados de meta-programação (os quais serão melhor explicados no Capítulo 6):

```
% ou_exclusivo(X, Y, Z) :-
%   se ao menos dois dos argumentos nao sao variaveis,
```

[27] Operadores aritméticos que temos à disposição são: `+/2`, `-/2`, `*/2`, `//2`, `^/2`, `-/1`, `abs/1`, `sin/1`, `cos/1`, `max/2`, `sqrt/1`, `<</1`, `>>/1`. O funcionamento de muitos deles é claro pelo símbolo, o dos demais será explicado na medida que forem usados.

```
%   o resultado eh o esperado
%

ou_exclusivo(X, Y, Z) :- nonvar(X), nonvar(Y), Z is X xor Y.
ou_exclusivo(X, Y, Z) :- nonvar(Z), nonvar(Y), X is Z xor Y.
ou_exclusivo(X, Y, Z) :- nonvar(X), nonvar(Z), Y is Z xor X.
```

Temos à nossa disposição também *operadores de comparação* (também chamados de operadores relacionais), que funcionam de maneira semelhante e também possibilitam o uso de operadores aritméticos à direita do símbolo, na maneira usual. Eles serão de alguma importância:

- `=:=/2`, de igualdade;
- `=/=/2`, de desigualdade;
- `>/2` , de "maior que";
- `>=/2`, de "maior ou igual que";
- `</2` , de "menor que";
- `=</2`, de "menor ou igual que";

Voltando ao código 4. O goal `length(Xs, N)?`, onde *Xs* é uma lista e *N* uma variável, resulta em *N* tomando o valor da quantidade de elementos de *Xs* (o seu "tamanho"). Mas, o goal `length(Xs, N)?`, onde N é um número natural positivo e Xs uma variável resulta em erro ao chegar no trecho `N is K + 1`, uma vez que, como dito anteriormente, `N is K`, onde *N* é um número e *K* não, resulta em erro.

Para o seguinte programa, esse já não é o caso.

```
length([X|Xs], N) :-
  N > 0,
  K is N -1,
  length(Xs, K).
length([], 0).
```

O goal `length(Xs, N)?`, para esse programa, resulta em erro se N não for um número. Entretanto, se for um natural positivo, `length(Xs, N)?` resulta em sucesso e Xs se torna uma lista de N elementos. Se Xs for uma lista e N um natural positivo, `length(Xs, N)?` resulta em falha se Xs tem uma quantidade de elementos diferente de N e sucesso se Xs tem uma quantidade de elementos igual a N.

Nota-se que, apesar dessa diferença procedural, a leitura declarativa do programa é essencialmente a mesma. A diferença decorre da maneira como os

operadores aritméticos funcionam em Prolog e leva a outras situações parecidas, o que eventualmente se tornará um incoveniente grande demais. Veremos como lidar com esse tipo de incoveniente de maneiras diferentes no Capítulo de inspeção de estruturas e, depois, no de restrições lógicas.

4.0.2 Flattening

Uma característica importante da lista, que lhe dá a flexibilidade necessária para poder representar muitos tipos de dados diferentes é que ela é "fechada sob a relação de instanciação", isto é, não existe problema em fazer uma lista de listas. Assim, uma lista perfeitamente válida é `[[[a,b],c],[]]`. Algumas vezes, entretanto, será útil assumirmos que uma lista L só contenha "não-listas" como elementos. Para tanto, podemos fazer uso do funtor `flatten/1`, que pode ser implementado como se segue:

```
flatten([X|Xs], Ys) :-
  flatten(X, Ys1),
  flatten(Xs, Ys2),
  append(Ys1, Ys2, Ys).
flatten(X, X) :-
  atomic(X),
  X \= [].
flatten([], []).
```

O `atomic/1` usado é avaliado como sucesso se seu argumento for uma constante (`atomic(A)?` resulta em sucesso se A for um funtor de aridade zero).

4.0.3 Lista Completa

Agora, voltando rapidamente a um assunto discutido no Capítulo passado, temos a definição de **lista completa**:

lista completa

Definição 4.2. *Uma lista L é completa se toda instância $L\iota$ satisfaz a definição de lista dada. Se existem instâncias que não a satisfazem, ela é dita incompleta.*

Por exemplo, a lista `[a,b,c]` (menos popularmente conhecida como `.(a,.(b,.(c,[]))))` é completa: a `[a,b|Xs]` (menos popularmente conhecida como `.(a,.(b,Xs))`), não. Isso porque Xs não tem, a princípio, obrigação de ser uma lista.

4.1 Listas de diferença

Estruturas de dados incompletas, no geral, podem ser bem importantes e úteis. Um exemplo interessante são as **listas de diferença**, uma estrutura de dados que pode simplificar e aumentar a eficiência de programas que lidam com listas.

listas de diferença

Listas de diferença tem esse nome porque são criadas como a diferença de duas listas. Por exemplo, dizemos que a diferença entre as listas `[a,b,c]` e `[c]` é a lista `[a,b]`. A diferença entre duas listas incompletas `[a,b|Xs]` e `Xs` é equivalente à lista `[a,b]` e, mais no geral, a diferença entre duas listas incompletas `[`x_0`, ...,`x_i`|Xs]` e `Xs` é equivalente a `[`x_0`, ...,`x_i`]`. A diferença entra as listas *Ys* e *Xs*, onde `Ys = [Zs|Xs]`, é denotada `Ys\Xs`, onde *Ys* é dita a *cabeça* e *Xs* a cauda. Na prática, poderíamos definir um funtor tal como `lista_diff/2`, o que seria potencialmente mais eficiente, mas a notação anterior será mais conveniente pelo momento. Se eficiência for uma preocupação, termos como `Ys\Xs` poderiam ser substituídos automaticamente por outro funtor apropriado.

É importante notar que qualquer lista *L* pode ser trivialmente representada na forma de lista de diferença como `L\[]`. Fazer a concatenação de uma lista de diferença `Ys\Xs` com uma `Zs\Ws` só é possível quando *Xs* seja unificável com *Zs*, sendo, nessa ocasião, ditas **listas compatíveis** e, nesse caso, resulta na lista de diferença `Zs\Xs`. Esse fato é capturado no seguinte código:

listas compatíveis

```
append_dl(Xs\Zs, Ys\Xs, Ys\Zs).
```

```
flatten([X|Xs], Ys) :-
  flatten(X, Ys1),
  flatten(Xs, Ys2),
  append(Ys1, Ys2, Ys).
flatten(X, X) :-
  atomic(X),
  X \= [].
flatten([], []).
```

Perceba que, enquanto no código **??** a concatenação realiza uma quantidade de operações linear no tamanho da lista, no código 4.1 a concatenação é realizada em uma quantidade constante de operações.

Outro exemplo de programa que poderia ser melhorado com o uso de listas de diferença é o `flatten/2`. Se queremos realizar o *flatten* de uma lista Xs e temos um `flatten_dl/2` que realiza o flatten em uma lista diferença, sabemos que `flatten(Xs,Ys)` é o mesmo que `flatten_dl(Xs\[], Ys\[])`. Um `flatten_dl/2` pode ser como o seguinte:

```
flatten_dl([X|Xs], Ys\Zs) :-
  flatten_dl(X, As\Bs), flatten_dl(Xs, Cs\Ds),
  append_dl(As\Bs, Cs\Ds, Ys\Zs).
flatten_dl(X,[X|Xs]\Xs) :-
  atomic(X),
  X \= [].
flatten_dl([],Xs\Xs).
```

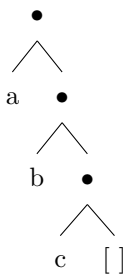
Perceba agora que o passo em que usamos `append_dl/2`, no código 4.1, pode ser feito de maneira implícita, resultando no seguinte

```
flatten_dl([X|Xs], Ys\Zs) :-
  flatten_dl(X, Ys\Bs), flatten_dl(Xs, Bs\Zs).
flatten_dl(X,[X|Xs]\Xs) :-
  atomic(X),
  X \= [].
flatten_dl([],Xs\Xs).
```

que parece melhor do que nosso `flatten/2` original. Essa mudança poderia ser obtida automaticamente com uma aplicação de um *unfolding*. *Unfolding* é um tipo de "transformação programática" que consiste, em termos gerais, na substituição de um goal por sua definição e é o contrário de *folding*, que consiste na substituição do corpo de uma cláusula por sua cabeça. Essas transformações são úteis na otimização de código e para outras coisas, que fogem do nosso escopo atual.

Vistos os exemplos de listas de diferença dados, é justo dizer que a ideia de estruturas de diferença parecem boas e nos perguntar se ela não é generalizável para tipos de dados diferentes de listas. Para tanto, precisamos desenvolver uma representação um pouco melhor de o que a lista é e como ela funciona. Uma lista, como a definimos acima, é uma forma de representar uma árvore. Por exemplo, a lista `[a,b,c]` se parece com:

Árvore 2: Lista simples

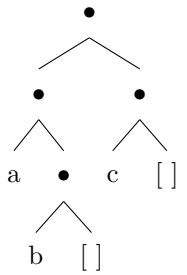


onde • representa o funtor `./2` da lista. Na verdade, funtores em geral são árvores, não só os de lista, mas funtores de lista tem essa "cara especial". Uma lista como `[[a,b],c]` seria como:

O que `flatten/2` faz é uma transformação em árvores como essa, transformando uma lista aninhada como a 3 em uma simples, como a 2. No caso, o resultado de flatten na lista 3 (que é uma árvore) seria a lista 2.

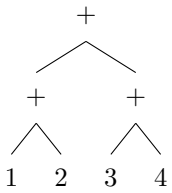
Agora, para vermos como uma estrutura de diferença pode ser útil em outras ocasiões, considere o seguinte exemplo. Em Prolog, a operação de soma é

Árvore 3: Lista aninhada



associativo a esquerda, o que significa que a operação `1 + 1 + 1 + 1` é tomada como `(((1 + 1) + 1) + 1)`. Por razões técnicas, podemos querer que ela seja normalizada como associativa à direita. Ou seja, se temos algo como `(1 + 2) + (3 + 4)`, dado pela árvore

Árvore 4: Soma



queremos que isso se torne `(1 + (2 + (3 + 4)))`, dado pela árvore 5.

O que precisamos é de uma forma de normalizar essa operação. Para tanto, precisamos de um novo funtor (já que o "+" já está em uso). Definiremos o funtor `++/2` como um operador infixo, da seguinte forma:

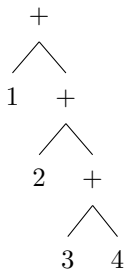
```
:- op(500, xfy, ++).
```

Resumidamente, essa linha nos diz que o funtor `++/2` é um operador binário (podemos usá-lo na forma `A ++ B`), de prioridade 500 (quando maior o número, menor a prioridade de avaliação, sendo a menor prioridade possível dada por 1200) e associativo à direita (yfx seria associativo à esquerda e xfx seria não-associativo).

Com esse funtor em mãos, definimos a "soma de diferença" de maneira análoga à lista de diferença, isto é, como `S1++S2`, onde *S1* e *S2* são somas normalizadas incompletas. Nesse contexto, o número 0 faz o papel da lista vazia e `S1++0` é equivalente a *S1*. Assim, podemos definir o seguinte código:

```
normalize(Exp, Norm) :- normalize_ds(Exp, Norm++0).
```

Árvore 5: Soma normalizada




```
normalize_ds(A+B, Norm++Space) :-
  normalize_ds(A, Norm++NormB),
  normalize_ds(B, NormB++Space).

normalize_ds(A, (A+Space)++Space) :-
  atomic(A).
```

O goal `Normalize(Exp, Norm)` tem sucesso se *Norm* é a versão normalizada da expressão *Exp*. Perceba a semelhança entre esse normalizador e o `flatten/2`: a transformação feita na árvore é essencialmente a mesma. De uma expressão `A+B`, é como se tivéssemos normalizado A, normalizado B e, então, concatenado o resultado (como seria uma operação de concatenação de "somas de diferença"?).

Fica como exercício a seguinte questão: qual seria o comportamento esperado nas operações usuais de listas de diferença `Xs\Zs` quando $Xs \subset Zs$ (isto é, quando os elementos de Xs pertencem a Zs mas alguns de Zs podem não pertencer a Xs)?

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Tamaki, H. and Sato, T., "Unfold/Fold Transformations of Logic Programs", Proc. Second International Conference on Logic Programming, pp. 127-138, Uppsala, Sweden, 1984.

[2] Roychoudhury, A. and Kumar Narayan K. and Ramakrishnan C.R. and Ramakrishnan I.V., "Beyond Tamaki-Sato Style Unfold/Fold Transformations for Normal Logic Programs", International Journal of Foundations of Computer Science, World Scientific Publishing Company

5 Alguns predicados não lógicos

Mesmo depois de termos visto tudo o que vimos, ainda temos alguns pontos a esclarecer. A começar pela avaliação do programa: computadores comuns não vem equipados com uma placa de clarevidência, e, assim, podem não conseguir adivinhar bem o caminho para a prova de um goal. Isto é, a hipótese de não-determinismo não segue na prática[28]. O ideal seria que, se um goal pode ser provado por um programa, o processo de prova seguisse um caminho direto, sem tentativas de unificações infrutíferas. Na prática, isso só é realizável para situações muito específicas e, no geral, serão tentadas diversas unificações infrutíferas antes de se chegar ao objetivo.

Para esse tipo de situação existe o **choice point** logo antes de se tentar uma unificação. Se a tentativa resulta em falha, o processo volta ao estado anterior à tentativa, o que chamamos de **backtracking**, a possibilidade daquela unificação é eliminada e o processo continua (isto é, a mesma unificação não é tentada de novo). O goal falha quando todas as possibilidades foram eliminadas e tem sucesso quando não existirem mais unificações a serem feitas.

choice point

backtracking

Os *choice points* são um ponto chave na execução de um programa lógico. A quantidade deles está diretamente relacionada com a eficiência do programa: quanto mais *choice points*, em geral, mais ineficiente o programa é. Assim, se o mesmo goal puder ser provado de mais de uma forma diferente, é necessária a criação de *choice points* a mais, o que deve ser evitado (em outras palavras, programas determinísticos costumam ser mais eficientes). Da mesma forma, se existe mais de um resultado para uma computação (isto é, se o mesmo goal admite diversas substituições que resultam em sucesso), a eliminação das opções a mais implicariam na eliminação de *choice points*, o que seria vantajoso.

A quantidade de *choice points* tem muito a ver com a de "axiomas". Mais especificamente, tem a ver com a quantidade de cláusulas e com tamanho do corpo das cláusulas. Geralmente, um programa com menos axiomas resulta em melhor legibilidade e maior eficiência, no entanto, alguns desses axiomas podem representar restrições que podem levar uma falha mais cedo na computação, o que, na prática, diminuiria a quantidade de *choice points* (os que seriam criados, não houvesse essa falha, não serão mais) e de unificações desnecessárias, aumentando a eficiência do programa.

Veremos, então, métodos para lidar com essas situações. O mais importante, e mais polêmico, é o **corte**, `!/0` (um funtor de nome "!" e aridade 0). Intuitivamente, o que ele faz é se comprometer com a escolha atual, descartando as demais. Poderemos compreender melhor como ele funciona depois que desenvolvermos a interpretação de uma computação lógica como a busca em uma árvore, mas, enquanto isso, nossa interpretação intuitiva será o suficiente.

corte

Como um exemplo de seu uso, considere o seguinte programa:

[28] No sentido de que o programa pode não saber qual é "é a melhor escolha". Vale lembrar que, em outros contextos, não-determinismo indica apenas a presença de escolhas.

```
member(X,[X|Xs]).
member(X, [_|Xs]) :- member(X, Xs).
```

O símbolo "_" representa uma **variável anônima**. A utilizamos quando o nome daquela variável não é importante, o que acontece quando não a utilizarmos novamente (isso serve para não nos distrairmos com variáveis que não serão utilizadas: a variável anônima cumpre um papel meramente formal, de *placeholder*). Toda variável anônima é diferente, apesar de serem escritas iguais. **variável anônima**

O goal `member(X, Xs)?` resulta em sucesso se X é um elemento de Xs[29]. Esse programa é usado primariamente de duas formas: para checar se um elemento é membro de uma lista; ou para gerar em X os elementos da lista. Por exemplo, para o goal `member(X, [a, b, c])?`, X pode assumir os valores de a, b ou c.

Se a programadora quiser saber apenas se um certo X faz parte de uma certa lista Xs, ela pode usar o corte, "cortando" as demais soluções:

```
member(X,[X|Xs]).
member(X, [_|Xs]) :- member(X, Xs), !.
```

O que o corte "diz" essencialmente é: "Tudo bem. Agora que chegamos a este ponto, não olhe para trás". A utilização desse novo programa para *member* é o mesmo do anterior, exceto que, agora, ao gerar membros da lista, só é gerado um elemento. Ao checar se outro elemento pertence a lista, assim que é obtido sucesso, o processo para.

Mencionamos anteriormente que o corte é usado para fins de eficiência. Quando ele é usado somente para esse fim, ou seja, se ele só serve para fazer o programa rodar melhor, não interferindo no seu significado, dizemos que é um **corte verde**. Quando o corte não é verde, dizemos que ele é vermelho. O que acabamos de ver foi um **corte vermelho**: goals como `member(b,[a,b,c])?` e `member(c,[a,b,c])?` não estão mais no significado. Perceba que o corte não é um predicado lógico, mas sim operacional: ele nos diz algo sobre "como" rodar um programa mas, a princípio, não sobre "o que" ele é. **corte verde** **corte vermelho**

O corte é, provavelmente, o predicado não lógico mais importante e polêmico no Prolog. O que o torna polêmico é justamente o fato de ser não lógico. Dissemos anteriormente que a ideia da programação lógica era lidar com a parte da lógica (o "o que fazer"), abstraindo a parte procedural (o "como fazer"). O corte é um exemplo em que isso não foi obtido.

Apesar disso, se deixarmos de lado nosso preconceito, o corte pode contribuir de maneiras interessantes para a lógica do programa.

[29] Estamos assumindo tacitamente, neste programa e nos demais, que a ordem de execução é "de cima para baixo, da direita para a esquerda" (o interpretador "enxerga" primeiro a cláusula que aparece "antes"), que é como as implementações usuais de Prolog funcionam. É importante, entretanto, notar que não é assim por necessidade e existem outras "ordens" de avaliar programas Prolog

Por exemplo, o `not/1` pode ser implementado de maneira similar à seguinte:

```
not(Goal) :- Goal, !, fail.
not(Goal).
```

Onde o predicado `fail/0` é um *built-in* do Prolog que falha sempre.

Similarmente, podemos, a partir do corte, gerar outras formas de controle, familiares a programadores de linguagens procedurais:

```
se_entao_senao(A, B, R) :-
  A, !, B.
se_entao_senao(A, B, R) :-
  R.

or(A, B) :- A, !.
or(A,B)  :- B.
```

Perceba que, diferentemente do que ocorre em programas puramente lógicos[30], a ordem das cláusulas e dos termos em cada cláusula podem ser fundamentais. Pode ser que, por exemplo, na cláusula `p(a) :- b, c.`, b resulte em falha e c em um processo interminável. Neste caso, a mudança de ordem seria fatal.

Os programas acima demonstram uma possível forma de se definir, respectivamente, o "se, então, senão" e o "Ou"[31], mas essas construções já existem no Prolog por padrão, como:

- se, então, senão: `A -> B ; R.` (lê-se: se A, então B, senão R);
- ou: `A ; B.` (lê-se: A ou B).

[30] Você pode se perguntar se algum do programa nesse texto é puramente lógico. Alguns dos mais simples, como o *Natural*, do Capítulo 2, podem ser, mas a situação geral é que os programas que veremos são só "meio que" lógicos.

[31] Na verdade, poderíamos pensar como o processo de *backtracking* como o nosso "ou" natural, mas às vezes pode ser conveniente usar um "ou" em uma cláusula, seja por efeito de legibilidade ou para evitar o *backtracking*.

6 Programas como árvores

Será conveniente termos uma interpretação mais visual de programas lógicos. Isso nos dará uma ideia melhor de em qual ordem ocorrem as tentativas de unificações e como lidar com elas. Considere o seguinte programa, representando um pedaço da árvore genealógica da dinastia Julio-Claudiana, junto com a relação ancestral[32]:

```
filhx(julia_caesaris, augustus).
filhx(julia_caesaris, scribonia).

filhx(agrippina, marcus_vipsanius).
filhx(agrippina, julia_caesaris).

filhx(caius_caesar, agrippina).          % Calígula
filhx(caius_caesar, germanicus).

filhx(julia_drusilla, caius_caesar).
filhx(julia_drusilla, caesonia).

filhx(nero, agrippina).                  % Nero
filhx(nero, gnaeus_ahenobarbus).

ancestral(A, B) := filhx(B, A), !.
ancestral(A, B) := filhx(B, C), ancestral(A,C).
```

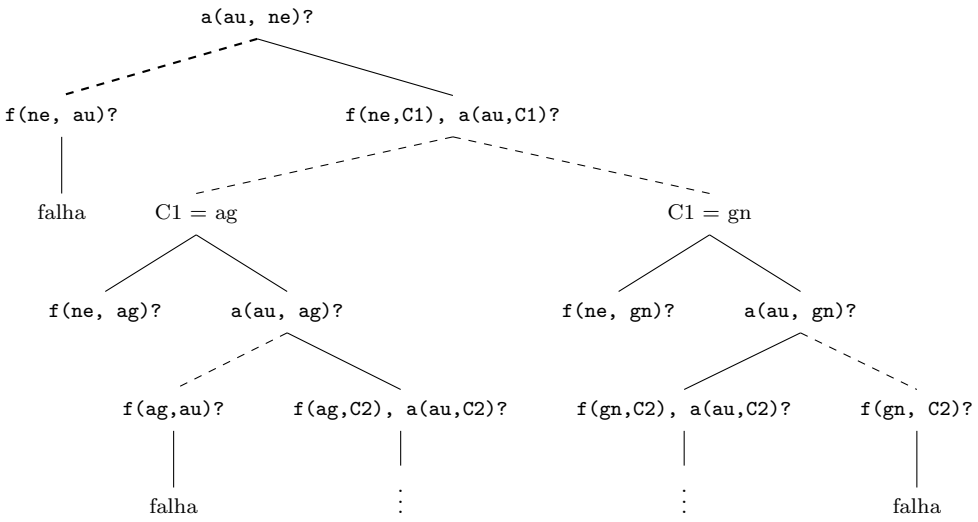
Por conveniência, no lugar das relações filhx/2 e ancestral/2 e dos nomes mostrados acima, usaremos os mostrados abaixo:

```
f(ju, au).
f(ju, sc).

f(ag, ma).
f(ag, ju).

f(ca, ag).
f(ca, ge).

f(ju_d, ca).
f(ju_d, cae).
```

[32] *"It is, of course, obvious at once that 'ancestor' must be capable of definition in terms of 'parent', but until Frege developed his generalised theory of induction, no one could have defined 'ancestor' precisely in terms of 'parent.' "* — Bertrand Russel,*Introduction to Mathematical Philosophy*. Para sermos honestos: na verdade, ele se referia a uma versão mais geral dessa relação do que a apresentada aqui. Voltaremos a esse tema depois.

```
f(ne, ag).
f(ne, gn).

a(A, B) := f(B, A), !.
a(A, B) := f(B, C), a(A,C).
```

O goal `a(au, ne)?` define implicitamente uma árvore, que começa da seguinte forma:



A árvore inteira não será colocada por questões de espaço, mas continua de maneira semelhante. Os ramos tracejados indicam um "ou" lógico, enquanto que os sólidos indicam um "e" lógico. O que isso significa é que falha em um dos ramos dos arcos sólidos indica que todo o arco é falho, mas uma falha em um ramo tracejado só afeta o ramo tracejado.

A execução de um programa lógico consiste em uma busca, em uma árvore como essa, por uma folha de "sucesso". Se, ao invés de "sucesso" é encontrada "falha", é feito o *backtracking*. Quando alguém fala sobre um "modelo computacional de programa lógico", fala essencialmente sobre como travessar essa árvore e como fazer esse *backtracking*. Como pode ver, ela pode crescer muito em largura a cada nível (não cresceu tanto no exemplo acima porque colocamos uma quantidade reduzida de substituições). Por isso, é compreensível que prefiramos uma busca em profundidade do que em largura. Isso pode, é claro, levar a problemas técnicos e filosóficos, já que impõe uma escolha arbitrária sobre a ordem de avaliação das cláusulas e dos termos de cada cláusula, o que pode levar a comportamentos inesperados ao programador desatento a esse modelo[33]. É

[33]Convém lembrar que não estamos lidando com programação paralela. No modelo de

claro, dizer apenas que a busca é em profundidade não é o suficiente: precisamos dizer que ela é em profundidade e à esquerda.

O seguinte exemplo, um homem reclamando de sua vida, mostra que questões de parentesco podem ser bem mais complicadas do que isso (o exemplo é baseado na história retirada de [1], frequentemente atribuída a Mark Twain):

Me casei com uma viúva com uma filha crescida. Meu pai, que nos visitava frequentemente, se apaixonou com a filha e a tomou como sua esposa. Isso fez do meu pai o meu filho adotado, e, de minha filha adotada, minha madrasta.
Depois de um ano, minha esposa deu à luz um filho, que se tornou o irmão adotado do meu pai e, ao mesmo tempo, meu tio, já que ele era o irmão de minha madrasta.
Mas a esposa de meu pai, isto é, minha filha adotada, também deu à luz um filho. Então, ele era meu irmão e também meu neto, já que ele era o filho de minha filha.
Isso quer dizer que eu me casei com minha avó, já que ela era a mãe de minha mãe. Como o marido de minha esposa, eu também era o neto adotado dela.
Nossos amigos dizem que eu sou meu próprio avô. Isso é verdade?

O personagem dessa história, não sabendo Prolog, teve uma certa dificuldade em responder a essa questão. Mas nós, como que por reflexo, fazemos o seguinte programa:

```
%%
% pai(?Pai, ?Filhx).
% mae(?Mae, ?Filhx).
% avoh(?Avó, ?Netx).
% avo(?Avô, ?Netx).
% irmao(?Pai, ?Irmao1, ?Irmao2).
% tio(?Pai, ?Tio, ?Sobrinhx).


avo(Avo, Neto):-
         pai(Avo, Avo_filho),
         pai(Avo_filho, Neto).

avoh(Avoh,Neto):-
         mae(Avoh, Filha_da_avoh),
         mae(Filha_da_avoh, Neto).

irmao(Pai, Irmao1, Irmao2):-
       pai(Pai, Irmao1),
       pai(Pai, Irmao2).

tio(Pai, Tio, Sobrinho):-
```

programação paralela a avaliação pode ocorrer de maneira diferente

```
        irmao(_,Pai,Tio),
        pai(Tio, Sobrinho).


% Eu sou o filho do meu pai
pai(meu_pai, eu).

% Meu pai é meu filho adotado
pai(eu, meu_pai).

% Eu sou o pai do filho da minha esposa
pai(eu, filho_meu_e_de_minha_esposa).

% Meu pai é o pai do filho_de_minha_filha_adotiva
pai(meu_pai, filho_de_minha_filha_adotiva).

% Minha filha adotiva é minha madastra
mae(minha_filha_adotiva, eu).

% Minha esposa é a mãe de minha filha adotiva
mae(minha_esposa, minha_filha_adotiva).



% O filho meu e de minha esposa é o irmão adotado de meu pai
% O filho meu e de minha esposa é meu tio
% Filho de minha filha adotiva é meu irmão
% Filho de minha irmã adotiva é meu neto
% Minha esposa é minha avó
% Eu sou meu avô
              irmao(_, meu_pai, filho_meu_e_de_minha_esposa).
              tio(filho_meu_e_de_minha_esposa, meu_pai, eu),
              irmao(_, filho_de_minha_filha_adotiva, eu),
              avo(eu, filho_de_minha_filha_adotiva),
              avoh(minha_esposa, eu),
              avo(eu, eu).
```

O último bloco de código na verdade não faz parte do programa, mas foi deixado por conveniência. Ele indica o goal (na verdade, só queremos saber se o pobre coitado é avô de si mesmo, mas os outros termos foram deixados por completeza). Você tem ideia de como é a árvore de busca para esse goal?

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Niederliński, Antoni, "A gentle guide to constraint logical programming via Eclipse", 3rd edition, Jacek Skalmierski Computer Studio, Gliwice, 2014

[2] Russell, Bertrand (1919), Introduction to Mathematical Philosophy, George Allen and Unwin, London, UK. Reprinted, John G. Slater (intro.), Routledge, London, UK, 1993
Esse livro está datado em alguns pontos, mas permanece interessante. Está gratuitamente disponível (em inglês) em [http://people.umass.edu/klement/russell-imp.html].

7 Predicados de Inspeção de Estrutura

Predicados de inspeção de estrutura nos passam informações sobre um termo específico. Por exemplo, será um dado termo atômico, numérico, constante, variável? Ou será um funtor composto? Se for, qual será seu funtor principal, qual sua aridade e quais seus argumentos? Os predicados de inspeção de estrutura respondem esse tipo de questão.

7.1 Predicados de tipos

Alguns dos, assim chamados, predicados de tipo são:

- `integer/1`;
- `real/1`;
- `atom/1`;
- `compound/1`;

Cada um deles pode ser interpretado como uma lista infinita de átomos. Por exemplo, `integer/1` pode ser interpretado como:

```
integer(0).  integer(1).  integer(2).  integer(3), ....
```

A partir desses predicados podemos criar outros. Por exemplo, podemos fazer

```
numero(X) :- integer(X);real(X).
```

ou

```
constante(X) :- numero(X); atom(X).
```

7.2 Acesso de termos compostos

Queremos ser capaz, além de lidar com tipos, lidar com funtores. Para acessar o funtor principal, temos o predicado `functor/3`. O goal `functor(Termo, F, Aridade)?` tem sucesso se o funtor principal de *Termo* tem aridade *Aridade* e nome *F*. Assim, por exemplo, `functor(f(`X_1`, ..., `X_n`), f, n)`, onde os X_i são variáveis, tem sucesso, já que o funtor principal é `f/n`.

Pode-se usar esse predicado para, entre outras coisas, realizar a decomposição e criação de termos:

1. `functor(tio(a,b), X, Y)?` tem a solução $\{X = \text{tio},\ Y = 2\}$;
2. `functor(F, tio, 2)` tem a solução $\{F = \text{tio}\}$.

Note que, no item 2 acima, se o goal fosse `functor(F, tio, N)?`, teríamos erro, já que o interpretador não consegue adivinhar a aridade de um funtor a partir do nome. Analogamente, `functor(F, tio(a, b), N)?` resultaria em erro, já que `functor` espera um átomo como segundo argumento, não um funtor composto. Mas, `functor(tio, X, N)?` teria sucesso, com {X = tio, N = 0}.

Similar a `functor/3` é o `arg/3`: `arg(N, F(`X_1`, ..., `X_n`), Q)?` tem sucesso se o Enésimo argumento de F é o Q. Assim como functor, `arg/3` é comumente usado para decomposição e criação de termos:

- Para decompor um termo, `arg/3` acha um argumento particular de um termo composto;
- Para criar um termo, ele instancia um argumento variável de um termo.

Por exemplo, `arg(1, tio(a,b), X)?` tem sucesso com $\{X = \text{a}\}$, enquanto que `arg(1, tio(X,b), a)?` tem sucesso com $\{X = \text{a}\}$.

Exemplos um pouco mais interessantes são os seguintes:

```
% subtermo(Sub, termo) :-
%   Sub eh um termo que aparece em termo
%

subtermo(Termo, Termo).
subtermo(Sub, Termo) :-
  compound(Termo),
  functor(Termo, _, N),
  subtermo(N, Sub, Termo).

subtermo(N, Sub, Termo) :-
  arg(N, Termo, Arg),
  subtermo(Sub, Arg).
subtermo(N, Sub, Termo) :-
  N > 1,
  N1 is N - 1,
  subtermo(N1, Sub, Termo).

% substituto(Velho, Novo, Velt, Novt) :-
%   Novt eh o resultado de trocar
%   todas as ocorrencias de Velho no termo Velt por Novo
%

substituto(Ve, No, Ve, No).
substituto(Ve, _, Vet, Vet) :-
  constante(Vet),
  Vet \= Ve.
```

```
substituto(Ve, No, Vet, Not) :-
  compound(Vet),
  functor(Vet, T, N),
  functor(Not, T, N),
  substituto(N, Ve, No, Vet, Not).

substituto(N, Ve, No, Vet, Not) :-
  N > 0,
  arg(N, Vet, Arg),
  substituto(Ve, No, Arg, Arg1),
  arg(N, Not, Arg1),
  N1 is N - 1,
  substituto(N1, Ve, No, Vet, Not).
substituto(0, _, _, _, _) :- !.
```

Outro predicado de inspeção de estrutura é o, assim chamado (por razões históricas obscuras), *univ*, escrito como `=../2`[34]. Um exemplo de seu uso é `Termo =.. [f,a,b]?`, que faz `Termo = f(a, b)`. O *univ* pode ser usado de essencialmente duas formas diferentes:

1. Com um funtor ao lado esquerdo e uma variável no direito: a variável é unificada com `[f|v]`, onde f é o funtor principal e V a lista de seus argumentos;
2. Com uma variável ao lado esquerdo e uma lista no direito: se a lista é `[a,` b_1`, ..., `b_n`]`, a variável é unificada com `a(`b_1`, ..., `b_n`)`.

O seguinte programa mostra um exemplo da utilidade de *univ*:

```
% map(P, Xs, Ys) :-
%   Ys eh o resultado de se aplicar P a cada elemento de Xs
%   se P for P/n para n > 1, Xs precisa ser uma lista de listas
%
% map/3 usa apply/2 como auxiliar
%
% apply(P, [X1, ..., Xn]) :-
%   P(X1, ..., Xn)? tem sucesso
%

apply(P, Xs) :-
  Goal =.. [P|Xs],
```

[34] Predicados para acesso e construção de termos têm origem na família Prolog de Edimburgo (que tem se tornado o padrão de fato) e alguns dos nomes usados vêm de lá. Em particular, a forma "=.." para *univ* vem do Prolog-10, onde era usado ",.." no lugar de "|" em listas (`[a, b,.. Xs]` no lugar de `[a, b|Xs]`).

```
  Goal.

map(_, [], []).
map(P, [X|Xs], [Y|Ys]) :-
  list(X),
  flatten([X|Y], Z),
  apply(P, Z),
  map(P, Xs, Ys).

map(P, [X|Xs], [Y|Ys]) :-
  apply(P, [X, Y]),
  map(P, Xs, Ys).
```

7.3 Predicados de Meta-programação

Digamos que você queira fazer um interpretador de Prolog em Prolog (algumas possíveis aplicações disso são *debuggers*). O mais simples possível é dado a seguir:

```
solve(Goal) :- Goal.
```

Esse interpretador, sozinho, é de pouca utilidade. Nos dá a possibilidade de acessar quase nada do programa. Se quisermos fazer melhor, precisaremos de predicados que nos digam mais sobre predicados (ou seja, meta-predicados, predicados de meta-programação).

Um predicado de meta-programação básico é o `clause/2`. O goal `clause(Head, Body)?` é verdadeiro se *Head* for unificável com a cabeça de uma cláusula e *Body* com seu respectivo corpo (se *Head* for um fato, *Body* é unificável com *true*).

Com isso, podemos fazer um meta-interpretador, algo mais elaborado:

```
solve(true).

solve((A,B)) :-
  solve(A), solve(B).
solve(A) :-
  clause(A,B), solve(B).
```

Precisamos dos parênteses a mais em `solve((A,B))` por razões técnicas (não queremos confundir o compilador). Esse interpretador teria que ser estendido se quisermos que faça tudo o que é esperado de um interpretador Prolog (ele não lida apropriadamente com cortes, por exemplo, ou com entradas pelo teclado). Isso poderia ser corrigido sem grandes dificuldades.

O Prolog nos possibilita não só facilmente escrever interpretadores para a própria linguagem (o que pode ser útil, por exemplo, na construção de *debuggers*, de sistemas especializados, de programas autocorretores, de programas que "se

explicam" em termos de porquês e comos entre outros), mas também nos possibilita facilmente escrever interpretadores para outras linguagens e para dialeto dessas. Por exemplo, alguém poderia argumentar que o Prolog, sendo uma linguagem de programação lógica, não lida bem com situações em que a incerteza é uma parte importante. Mas, com ele, podemos facilmente criar nossa própria linguagem para fazer isso. Para tanto, suponhamos, por exemplo, que cláusulas com uma certeza (a probabilidade de estar correta) C sejam representadas pelo funtor `clause_c/3`, em que `clause_c(Head,Body,C)?` é verdade quando *Head* unifica com uma cabeça de cláusula cujo corpo unifica com *Body* e cujo "fator de certeza" unifica com C, e considere o seguinte:

```
solve(true, 1, Limit) :- !.

solve((G1, G2), C, Limit) :-
  !, solve(G1, C1, Limit), solve(G2, C2, Limit),
  C is min(C1, C2).

solve(G, C, Limit) :-
  clause_cf(G, B, C1), C1 > Limit,
  Limit1 is Limit/C1, solve(B, C2, Limit1),
  C is C1 * C2.
```

Um goal `solve(Goal,C,Limit)` submetido a esse interpretador resulta em sucesso se a "confiança" C de *Goal* for maior do que o limite inferior *Limit*. Alguns pontos válidos de se notar nesse programa são que, numa conjunção `A,B`, a nossa confiança na conjunção é tomada como o mínimo entre a de A e a de B e que se, para provar um goal *Goal*, é preciso passar por uma cláusula com fator de certeza *C1*, a prova do corpo da cláusula terá um fator de certeza menor, dado por `Limit/C1`. Isto porque queremos que nossa "confiança" (pensando de forma probabilística) *C1* na cláusula vezes a confiança *C2* (pense na probabilidade de eventos independentes) na resolução do corpo da cláusula seja maior que *Limit*.

7.3.1 Meta-predicados de variáveis

Outro predicado de meta-programação básico é o `var/1`: `var(T)?` tem sucesso se T é uma variável não instanciada e falha caso contrário. Sua irmã, `nonvar/1`, funciona de maneira análoga. Por exemplo, `var(a)?` e `var([X|Xs])?` falham, enquanto que `var(X)?` tem sucesso, se X é uma variável não instanciada. Esse predicado nos permite fazer, por exemplo, programas como o seguinte:

```
length(Xs, N) :- nonvar(Xs), length1(Xs, N).
length(Xs, N) :- var(Xs), nonvar(N), length2(Xs, N).
```

em que `length1/2` e `length2/2` são dados pelos length no (Capítulo 4).

8 Restrições

Como vimos anteriormente, uma das ideias iniciais da programação lógica era de permitir à programadora expressar *o que* o programa faz, sem ter que se preocupar muito em *como* ele o faz, o que fazemos expressando a lógica do programa em termos de relações. Na maior parte dos paradigmas de programação usuais, há uma dificuldade em expressar essas relações, ou restrições[35], entre os objetos definidos no programa.

Com a programação lógica, isso é um pouco aliviado. Por exemplo, se soubermos a gramática do Prolog, não é difícil ler o programa Member (copiado a seguir, para referência) como expressando uma relação que existe entre um termo X e um Xs se Xs puder ser escrito como `[X|Xs]` ou, se for possível escrever Xs como `[Y|Ys]` e X tiver a relação member com Ys.

```
member(X,[X|Xs]).
member(X, [_|Xs]) :- member(X, Xs).
```

Mas vimos também que operações aritméticas, no Prolog, não funcionam de maneira relacional (ao fazermos uma soma, por exemplo, o "+" funciona como uma função, retornando um valor, no lugar de como uma restrição ou relação). Isso é grave, porque expressões aritméticas aparecem de várias formas em problemas reais e não ser capaz de expressá-las relacionalmente poderia levar a um código muito maior, redundante e difícil de manter.

Para se convencer disso, considere, como um exemplo, a equação da lei de Ohm: I = V/R (onde I é a corrente, V a tensão e R a resistência). Claramente, essa equação expressa a relação entre I, V e R, assim como as restrições provenientes dessa relação, indicando que, fixando quaisquer duas das variáveis, a terceira também é fixada e, fixando uma, as duas outras obedecem a uma restrição (por exemplo, se V = 10 volts, temos que $I \times R = 10$). Atualmente, não conseguimos expressar esse tipo de relação em código sem algum esforço.

Vimos uma forma limitada de lidarmos com isso no Capítulo anterior, mas precisaremos de algo mais poderoso se quisermos lidar com problemas mais complexos. Antes disso, será útil nos abstrairmos um pouco disso para vermos a programação por restrições de uma forma mais ampla.

8.1 Domínios

Restrições não se limitam a restrições aritméticas. Existem vários tipos de restrições, cada uma possivelmente agindo em diferentes domínios. O domínio é o que determina as formas legítimas de restrição e o que elas significam. Restrições são escritas usando constantes (como 0, ou 1) e símbolos que agem como

[35] Estarmos tratando relação como sinônimo a restrição é um abuso de linguagem usado aqui por sua conveniência, mas é importante lembrar que são coisas diferentes.

funções (como "+" ou "-"). O domínio determina a sintaxe das restrições: quais símbolos de restrições podem ser usados, quais e quantos são os argumentos de cada símbolo e a ordem em que são escritos.

Dois exemplos de domínios que conhecemos são o dos Reais e o dos Inteiros, com os símbolos de restrições usuais (isto é: "+", "<", etc.). Outros exemplos de domínios são o das Árvores e o dos Booleanos. São domínios de grande importância e, por isso, discorreremos momentaneamente um pouco sobre eles logo mais. Em se tratando de domínios aritméticos, a não ser quando dito o contrário, assumiremos que lidamos com o domínio dos Reais.

Definido o domínio, dada uma restrição, precisamos saber o que queremos dela. Algumas das opções mais comuns são:

1. Checar se a restrição é satisfazível (isto é, se existe alguma substituição para a qual a restrição é verdadeira);
2. Encontrar uma substituição que respeite as restrições;
3. Otimizar a substituição encontrada por meio de uma função (comumente chamada *função custo* (apesar de muitas vezes não podermos interpretar essa função como algum "custo" de forma natural)).

Claramente, se conseguimos (2), conseguimos (1) e, se conseguimos (2), conseguimos (1) e (2). Frequentemente, conseguir (1) será equivalente a conseguir (2), porque seguimos um método construtivo. Nem sempre, no entanto, conseguiremos (1). Sabemos, por exemplo, que no domínio dos Inteiros existem restrições que não se sabe se podem ser satisfeitas.

Ou talvez possamos, a princípio, dizer se a restrição em um domínio seja satisfazível, mas na prática isso se torne computacionalmente inviável se a restrição for muito complicada ou complexa. O problema de descobrir se uma restrição booleana pode ou não ser satisfeita (mais conhecido como SAT, de *Propositional Satisfiability Testing*), é um famoso problema NP-difícil e ainda hoje um tema de ativa pesquisa (veja, por exemplo, [2]).

Esse tipo de constatação rápida já nos dá uma ideia do tipo de pergunta que precisaríamos fazer dado um domínio, assim como da variedade de tipos de restrição que existem, mesmo em um domínio.

Daqui para frente denotaremos problemas de otimização como COP (de *Constraint Optimization Problem*), de satisfação de restrições como CSP (de *Constraint Satisfaction Problem*) e, quando não for necessário fazer distinção, apenas CP. Até agora, temos lidado com CPs como contendo uma restrição, mas será conveniente lidar com eles como contendo uma conjunção de restrições:

Se x_0 é um símbolo de restrição no domínio, junto de seus argumentos, diremos que é uma **restrição primitiva**. Uma **restrição composta** C é a conjunção de restrições primitivas: x_0, ..., x_n (em que as vírgulas, como usual, são lidas como um *e* lógico), em que x_i é uma restrição primitiva. Assim, um

restrição primitiva

restrição composta

COP é descrito por uma tupla (C, f), enquanto que um CSP é descrito por algum C, em que C é uma restrição composta. Daqui para frente nos referiremos a uma substituição nas variáveis de um CP que respeite às restrições como uma solução desse CP.

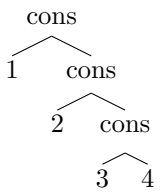
8.2 Árvores

Como você logo perceberá (ou talvez já o tenha percebido), já vimos restrições por árvores antes, elas só estavam um pouco disfarçadas.

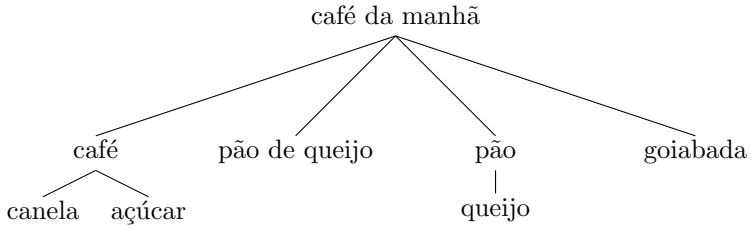
construtor de árvore

Um **construtor de árvore** é uma sequência de caracteres começando com um caractere minúsculo. Definimos uma árvore recursivamente como: uma constante é uma árvore (de altura 1); um construtor de árvore com um conjunto de n $\geq$ 1 árvores é uma árvore.

Árvores são comumente representadas na forma de diagramas como os seguintes:



ou



Que podem ser reescritos, de forma mais compacta como `cons(1, cons(2, cons(3, 4)))`[36] e `café da manhã(café(canela, açúcar), pão de queijo, pão(queijo), goiabada)`[37]. Como pode ver, é essencialmente a mesma representação que temos para um funtor (junto com seus argumentos): funtores são árvores, árvores são funtores (neste contexto).

Um algoritmo muito próximo ao algoritmo de unificação, que vimos no Capítulo 1 , serve para resolver restrições em árvore do tipo $T_1 = T_2$, onde T_1 e T_2 são árvores. É interessante notar que um algoritmo para resolução de restrições em árvores foi dado por Herbrand[1] de forma independente ao do algoritmo de unificação de Robinson.

[36] A leitora de olhos afiados vai notar que é mais ou menos assim que representamos listas, trocando o "cons" pelo ".".

[37] Estamos usando caracteres especiais aqui para fins de expressividade, mas seu uso em códigos de computador deve ser evitado.

Vale notar também outro detalhe importante naquele algoritmo: ele realiza um procedimento que frequentemente fazemos ao buscar resolver um problema, isto é, transformando uma pergunta, potencialmente complicada e difícil, em uma trivial, para a qual sabe-se a resposta. Essa é uma instância de um processo de **normalização**, isto é, um processo de transformar uma restrição em outra equivalente, mas mais tratável. Processos de normalização frequentemente exercem um papel importante. Voltaremos a esse tema depois.

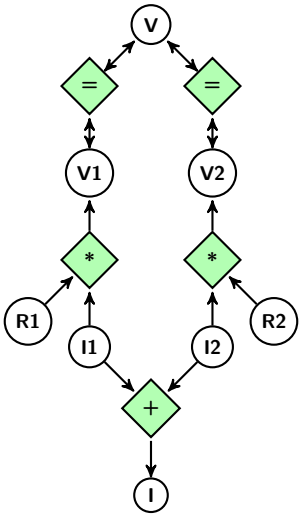
normalização

8.3 Ideias de resolução

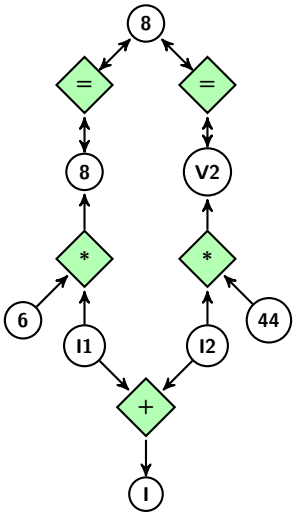
Nossa discussão sobre problemas envolvendo restrições até agora foi uma discussão geral e apesar de muitas vezes, para resolver esses problemas, ser preferível usar métodos específicos ao domínio e ao tipo de problema, muitas vezes esses problemas são heterogêneos o suficiente para não permitir isso ou não fazem uso de uma sintaxe que permita o uso de métodos específicos. É útil então termos alguma ou algumas formas gerais de resolver esses problemas. Eles são baseados em busca.

8.3.1 Propagação local

Propagação local é melhor explicada por um desenho. O grafo a seguir representa a modelagem de um circuito elétrico. As "caixinhas" representam as relações de restrições e as "bolinhas", os dados ou variáveis. Por exemplo, uma "caixinha" com sinal de adição indica que os dados (no caso, as variáveis) que entram por ela (o que é indicado pela seta) somadas devem ser iguais às variáveis, ou dados, de saída (indicado por outra seta).



Esse grafo é uma outra forma de representar a restrição `V=V1, V=V2, V1=I1*R1, V2=I2*R2, I=I1+I2`[38]. Considere as restrições adicionais de que `V=8, R1=6, R2=44`. Na propagação local, podemos considerar as arestas como veículos das restrições, deixando-as passar de nó em nó de forma apropriada, passo a passo. Por exemplo, dadas as restrições acima, a restrição de `V=8` pode ser propagada para `V1=8`, e teríamos:



Disso, podemos continuar a propagação, obtendo `I1 = 8/6`. E assim vai.

Propagação local funciona muito bem para resolver alguns problemas, mas simplesmente não consegue resolver outros. Por exemplo, considere a restrição `A=B+2*Z, A=3*K-B, K=5, Z=7`. Propagação local detectaria que `K=5` e `Z=7`, mas não encontraria o valor de A ou B. Isso ocorre porque para tanto seria preciso fazer uso de mais de uma restrição por vez, o que a propagação local não faz.

propagador

Mais geralmente, dizemos que um **propagador** é uma função monotônica não-crescente de domínio para domínio, i.e. se D e D' são domínios tais que $D \subseteq D'$ e f é um propagador, obrigatoriamente $f(D') \subseteq f(D)$ e $f(D) \subseteq D$. Um propagador é dito correto em relação a uma restrição `r/n` com variáveis de domínios D_i se as soluções para a restrição nos domínios originais são as mesmas que as soluções para a restrição em $f(D_i)$. Perceba que essa é uma noção fraca, já que a função identidade a satisfaz. Propagação local é um tipo de propagador correto (veremos outros mais para frente). No frigir dos ovos, o que um propagador faz impedir que o resolvedor teste todas as possibilidades descartando algumas possibilidades que não dariam certo.

resolvedor por propagação

No geral, em um CSP, provê-se um propagador para cada restrição. Nesse contexto, um **resolvedor por propagação** para um conjunto de propagadores

[38] Exemplo adaptado de [3], pág. 36.

P aplica os propagadores em P a cada restrição até que não haja mudanças a serem obtidas. Em outras palavras, um resolvedor *solv* por propagação recebe como argumentos um conjunto de propagadores P e um de restrições R e retorna um conjunto de domínios que é o maior ponto fixo dos propagadores em P com respeito à relação de inclusão (assumindo que tal conjunto de domínios exista, o que geralmente é o caso).

8.4 Busca Top-Down

Propagação local pode ser uma técnica muito útil para resolver alguns problemas, e pode ficar mais poderosa ainda se combinada com uma estratégia de *ramificação*. A essa combinação chamaremos de busca *top-down*.

Intuitivamente, a propagação de restrições ajuda a transformar o problema em outro mais simples. O passo de ramificação serve, então, para partir o problema em problemas menores, aos quais poderemos aplicar a propagação de restrições novamente, seguido por outra ramificação, e assim vai, gerando uma árvore de busca. A forma padrão de busca top-down é chamada de **busca por backtracking**. Essa forma de busca funciona simplesmente gerando a dita árvore e fazendo a travessia dela (frequentemente, faremos a travessia enquanto geramos a árvore, não depois). Vale notar que, na presença de propagação de restrições, ocasionalmente pode ser útil adicionar à escrita do problema restrições implícitas, que podem auxiliar na propagação.

busca por backtracking

A forma mais comum de *backtracking* começa ordenando as variáveis do problema, usualmente por algum modelo heurístico, com as ramificações tomando a forma de divisões no domínio de cada variável. Uma forma de fazer isso é a chamada marcação (ou, mais comumente, *labelling*), que corresponde à ramificação do domínio de cada variável em seus elementos constituintes (o que só pode ser feito, é claro, quando o domínio for finito), assegurando que todos os valores de cada variável serão explorados. A marcação pode tornar um *método de busca incompleto* em um completo (isto é, um método que pode não encontrar uma solução quando ela existe em um que sempre encontra alguma solução se ela existe).

A ordem de exploração das variáveis é, então, escolhida por meio de uma *heurística de escolha de valor*. Frequentemente não será viável termos um método de busca completo, então é essencial que foquemos a nossa atenção nos valores que parecem mais promissores. Esse "foco de atenção" pode frequentemente ser descrito na forma de uma política de alocação de crédito, fornecendo maior crédito às escolhas aparentemente mais promissoras.

8.5 Branch and Bound

Os métodos de busca discutidos anteriormente são apropriados para CSPs. Para COPs, precisaremos fazer algumas modificações. Uma opção é o **branch and**

bound. Ele funciona da seguinte forma: em cada passo da busca em *backtracking*, se f é a função custo, temos na variável Bound o valor do melhor custo até então (Bound pode ser inicializado com um valor simbolicamente equivalente a "infinito") e, a cada passo da busca, verificamos se o custo é ou não melhor do que Bound. Se for, o valor de Bound é atualizado.

branch and bound

Existem algumas variações a esse algoritmo. Uma delas é a de adicionar a restrição de que f < Bound[39], possibilitando a obtenção de cortes na árvore de busca.

8.6 Projeção

Uma ideia implícita em nossa discussão sobre *branch and bound* pode ser vantajosamente generalizada. Considere uma restrição qualquer em função de X, Y e Z, que denotaremos `uma_restrição_qualquer(X, Y, Z)`.

Digamos que só o valor de X nessa restrição seja de interesse. Se tivermos que

```
uma_restrição_qualquer(X, Y, Z) :- X > Y, Y > Z, Z > 0.
```

é a única cláusula contribuindo para a definição de `uma_restrição_qualquer(X, Y, Z)`, temos então que X > 0 é a única restrição que nos é de interesse, uma vez que é a restrição de em função de X mais simples que é compatível com a restrição original, no sentido de que a partir de qualquer substituição tal que X > 0 podemos aumentar essa substituição com valores de Y e Z de modo a respeitar a restrição original.

Isso motiva a nossa definição de projeção:

Definição 8.1. *Uma substituição ι é dita uma **solução parcial** de um CP, que chamaremos C, se existe alguma substituição ρ tal que $\iota \cup \rho$ é uma solução de C.*

solução parcial

Definição 8.2. *Dizemos que uma restrição R_0 em função das variáveis X_0 a X_n é uma **projeção** da restrição R_1, em função das variáveis X_0 a X_m, com $m > n$, se toda solução de R_0 é uma solução parcial de R_1.*

projeção

Nem todo domínio admite projeções incondicionalmente. O domínio de árvores, por exemplo, não admite: podemos fazer projeções em algumas restrições nesse domínio, mas não em todas.

O *branch and bound* funciona porque, ao fazer uma ramificação, o que se faz na verdade é uma projeção em uma ou mais variáveis.

Não é difícil ver que a projeção é uma forma de simplificação e, dessa forma, podemos ver o *branch and bound* como uma sequência de simplificações de tipos diferentes.

[39] Estamos fazendo uso de um abuso de linguagem ao denotar o valor de f em uma substituição por f a fim de deixar a notação mais limpa.

Simplificações e projeções têm um papel importante na resolução de CPs, então será útil termos uma definição mais rigorosa. Mas antes precisamos da noção de equivalência:

Definição 8.3. *Duas restrições* ***restrições equivalentes*** C_1 *e* C_2 *são equivalentes em relação ao conjunto de variáveis V, o que denotaremos por* $C_1 \leftrightarrow C_2$*, se toda solução de* C_1 *restrita a V é uma solução parcial de* C_2 *e se toda solução de* C_2 *restrita a V é uma solução parcial de* C_1*.*

restrições equivalentes

Definição 8.4. *Var(X) denota o conjunto de variáveis de um CP X qualquer. Sejam uma restrição composta C e o conjunto de variáveis de interesse inter(C)* $\subset$ *var(C). Dizemos que C' é uma* ***simplificação*** *de C em inter(C) se inter(C)* $=$ *var(C) e toda solução de C' é uma solução parcial de C.*

simplificação

Vale notar que, se dispomos de um algoritmo de simplificação nos moldes dessa definição, também dispomos de um algoritmo de solução: basta simplificar o CP em inter(C) $= \emptyset$.

8.7 Equivalência

Para terminar esta seção, consideremos o problema de equivalência de CPs, o qual é fortemente ligado ao problema de implicação e de bi-implicação. Para tanto, voltamos à questão de normalização:

Definição 8.5. *Seja simp uma função que recebe um CP e um conjunto V de variáveis de interesse e retorna um CP. Dizemos que simp realiza um processo de* ***normalização canônica*** *em um dado domínio se para todo CP C no domínio e todo* $V \subset$ *var(C), simp(C,V) é uma simplificação de C e se* $C_1 \leftrightarrow C_2 \Rightarrow simp(C_1, V) = simp(C_2, V)$*.*

normalização canônica

Com um normalizador canônico, conseguimos responder sem grandes dificuldades a questão de equivalência: dois CPs são equivalentes se a normalização canônica de cada um segundo suas variáveis for idêntica. Daí, também conseguimos saber se um CP implica o outro, ou se o outro implica o um.

O algoritmo de unificação dado no Capítulo 1 é um algoritmo de normalização, como já foi notado, mas não descreve um processo de normalização canônica. Isso ocorre porque não tomamos cuidado suficiente com os nomes das variáveis.

Fica a questão: como poderíamos transformá-lo em um processo de normalização canônica?

8.8 Programação por restrições lógicas

Programação por restrições não precisa, a princípio, ser realizada com programação lógica. De fato, existem implementações de programação por restrições nos mais diversos paradigmas de programação. No entanto, programação

lógica parece ser o paradigma mais natural para ser tomado base para programação por restrições. Um primeiro motivo já deve ser claro, nomeadamente que programação lógica é feita com base em um tipo importante de restrição, a em árvores, o que dá à programação lógica e, por extensão, à programação por restrições lógicas, o poder de uma linguagem de programação completa.

Mais no geral, no entanto, programação por restrições lógicas não se refere a uma linguagem ou paradigma, mas a um conjunto de linguagens. Cada uma dessas linguagens trabalha com um esquema diferente, o qual é determinado pelo domínio, pelos simplificadores de restrição e pelos resolvedores com que trabalha. Mais no geral, dado um domínio D, uma linguagem nesse conjunto, dita $CLP(D)$, é uma com simplificadores e resolvedores no domínio D. Exemplos são $CLP(\Re)$, no domínio dos números reais e $CLP(FD)$[40], em domínios finitos.

Assim, uma linguagem de programação lógica *vanilla* seria uma $CLP(Árvore)$, onde as únicas restrições primitivas são igualdade e desigualdade (apesar de que desigualdade só está presente de forma implícita e pode ser implementada com base no símbolo de igualdade). Na realidade, cada $CLP(D)$ é feito com base no $CLP(Árvore)$ permitindo que as folhas sejam elementos em D e, eventualmente, tomando a adição de restrições e simplificadores e resolvedores específicos[41]. Prolog III, por exemplo, faz uso de um tipo de Simplex para a resolução de problemas de otimização com restrições lineares.

[40] FD vem de *Finite Domains*

[41] Um exemplo de $CLP(D)$ em um D algo mais exótico pode ser encontrado em [4] e o de um CLP que foge do esquema $CLP(D)$ em [5]

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] J. Herbrand (1930), "Recherches sur la theorie de la demonstration", PhD thesis, Universite de Paris, France, 1930.

[2] Editores A. Biere, M. Heule, H. Van Maaren, T. Walsh (2009), "Handbook of Satisfiability", IOS Press.

[3] Marriott, Kim; Peter J. Stuckey (1998), "Programming with constraints: An introduction" [S.l.]: MIT Press.

[4] Dundua, Besik; Florido Mário; Kutsia Temur; Marin, Mircea (2015), "CLP(H): Constraint Logic Programming for Hedges", arXiv:1503.00336.

[5] Mamede, Margarida; Monteiro Luís (1992), "A Constraint Logic Programming Scheme for Taxonomic Reasoning".

9 Restrições passivas e implementações no Eclipse

Antes de sairmos por aí resolvendo CSPs e COPs, será útil termos a distinção entre restrições ativas e passivas. Resumidamente, restrições ativas podem alterar o estado das variáveis, enquanto que restrições passivas por si só não podem e, assim, são mais usadas para fins de testes. Por exemplo, `r(a,X) = r(Y,b).` é uma restrição ativa: X precisa tomar o valor de b, e Y de a. Mas `4*X < Y+2` é, uma restrição passiva, já que X e Y precisam estar instanciadas para a restrição ser usada.

Por enquanto, nos preocuparemos mais com restrições passivas e veremos exemplos de sua utilização no sistema ECL^iPS^e. Valeria deixarmos aqui uma breve introdução à história desse sistema e uma explicação mais detalhada de porquê escolhemos usá-lo e não outro, mas nos contentamos em dizer que o ECL^iPS^e é uma expansão suficientemente completa do Prolog para lidar melhor com restrições. Não cabe darmos aqui uma detalhada mostra do que ele adiciona, mas convém falarmos brevemente sobre como alguns de seus iteradores funcionam, já que os usaremos extensivamente daqui em diante.

A nossa exposição é baseada primariamente em [1] e em [2]. Na realidade, apesar de existirem muitos iteradores diferentes no ECL^iPS^e, todos são feitos com base na mesma construção, chamada `do/2`. Ademais, apenas uma das especificações de iteradores é mesmo fundamental. Uma chamada `( fromto(From, In, Out, To) do Body ).` é traduzida como:

```
do__1(Last, Last) :- !.
do__1(In, Last) :- Body, do__1(Out, Last).

do__1(From, To)?
```

É importante notar que, com *fromtos* aninhados, cada um mapeia a um acumulador diferente.

A partir desse iterador, podemos criar outros (que, na verdade, são abreviações). Por exemplo, `( foreach(X,Lista) do Body ).` é uma abreviação de `( fromto(Lista, [X|Xs], Xs, []) do Body ).`, e `(foreacharg(X,S) do Body).` é uma abreviação para `N1 is arity(S) + 1, ( fromto(1,I,I1,N1), param(S) do arg(I,S,X), I1 is I+1, Body ).`

Enquanto em Prolog o único método iterativo é a recursão, no ECL^iPS^e dispomos de algumas opções a mais. Em particular, temos:

- `foreach(El, Lista) do busca(El).`
  Itera Busca(El) ordenadamente sobre cada elemento El de Lista;
- `fromto(Prim, In, Out, Ult) do busca(In, Out).`
  Itera Busca(In, Out) de In = Prim até Out = Ult.

Existem diversos outros iteradores para propósitos diferentes, todos eles seguindo o padrão *(iterador do busca)*. Iteradores podem ser postos em conjunto como *(iterador1, iterador2, ..., iteradorn do busca)*. Ao fazer isso, todos os iteradores dão o passo junto, por assim dizer, e o conjunto de iteradores para quando qualquer um deles chegar ao fim. Também podemos aninhar iteradores (como se colocássemos um *for* dentro de outro em uma linguagem convencional) da seguinte forma: *(iterador1 do (iterador 2 do ... (iteradorn do busca)))*.

9.1 Vetores

Listas são interessantes, mas, eventualmente, podemos querer realizar acesso em tempo constante aos seus membros, o que não é possível. Em outras linguagens, esse tipo de acesso é por costume realizado através de vetores. Vetores existem em Prolog padrão, de certa forma. Como os argumentos de funtores podem ser acessados em tempo constante por meio do funtor `arg/3`, a princípio, um funtor qualquer poderia ser usado como um vetor, o acesso aos membros do qual feitos por meio de `arg/3`. Essa abordagem, no entanto, não só não parece muito elegante, como é pouco prática. Se temos algo que chamamos de vetor, gostaríamos de poder fazer algo como `Vetor =/= 4`, por exemplo, o que com os meios do Prolog padrão não é possível.

Para esse tipo de situação, no ECL^iPS^eexiste uma implementação de vetores como um açucar sintático (semelhante ao que vimos na implementação de listas), permitindo justamente esse tipo de utilizaçãoa. Em particular, um vetor, é escrito como uma variável seguida do funtor de lista (como em `Var[4]`), ou, se anônimo, como `[](A, B, C)` (note que, assim, a representação de um vetor ou de uma lista vazia é a mesma) Para criar "vetores", possivelmente multidimensionais (na realidade, matrizes, o que justifica os ""), foi construído o predicado `dim/2`, que pode ser usado ou para criar vetores ou para extrair sua dimensão.

9.2 Backtracking no Prolog/Eclipse

Já discutimos rapidamente a busca por *backtracking* antes, agora veremos como implementá-la. Para tanto, precisamos decidir qual será o método de ramificação usado, qual a ordenação das variáveis e qual a ordenação dos valores de cada variável.

O método de ramificação usado aqui será o *labelling*. O próximo passo é decidir a ordem das variáveis. Isso pode ter um grande impacto na busca, apesar de a quantidade de folhas na árvore de busca continuar sendo a mesma para qualquer ordem: a diferença está na quantidade de nós internos na árvore. Por exemplo, para um CP nas variáveis X e Y, em que X pode tomar dois valores e Y pode tomar 3 valores diferentes, a quantidade de folhas na árvore de busca é 3×4=12. Fazendo o *labelling* do X antes do Y, temos dois nós internos,

enquanto que, fazendo o *labelling* do Y antes do X, temos três nós internos. A presença de maior quantidade de nós internos na árvore de busca torna a busca mais difícil, sendo razão razoável para que busquemos fazer antes o *labelling* das variáveis com menor domínio. Veremos depois que, na presença de restrições ativas, a ordenação das variáveis pode ter grande influência no desempenho do algoritmo.

Mencionamos que uma forma de descrever a escolha de valores de forma mais geral é por meio de alocação de crédito. Uma parte de um programa que implementa essa ideia é o seguinte, que assume que os valores de cada domínio já estão ordenados segundo uma preferência:

```
% Busca(Lista, Credito) :-
%   Busca por solucoes com um dado credito

busca(Lista, Credito) :-
  ( fromto(Lista, Vars, Resto, []),
    fromto(Credito, CreditoAtual, NovoCredito, _)
  do
    escolhe_vari(Vars, Vari-Dominio, Resto),
    escolhe_val(Dominio, Val, CreditoAtual, NovoCredito),
    Vari = Val
  ).

escolhe_val(Dominio, Val, CreditoAtual, NovoCredito) :-
  compartilha_credito(Dominio, CreditoAtual, DomCredLista),
  member(Val-NovoCredito, DomCredLista).
```

Ele assume que Lista é uma lista de pares variável-domínio e precisa ser completada pelas escolhas de `escolhe_var/3` e `compartilha_credito/3`. O seguinte exemplo de `compartilha_credito/3` corresponde à escolha dos N primeiros valores, se N for menor que o tamanho do domínio; ou do domínio todo, caso contrário:

```
% compartilha_credito(Dominio, N, DomCredLista) :-
%    Admite apenas os primeiros N valores.

compartilha_credito(Dominio, N, DomCredLista) :-
  ( fromto(N, AtuCredito, NovoCredito, 0),
    fromto(Dominio, [Val|Tail], Tail, _),
    foreach(Val-N, DomCredLista),
    param(N)
  do
    ( Tail = [] ->
      NovoCredito is 0
    ;
```

```
      NovoCredito is AtuCredito - 1
    )
  ).
```

Essa escolha ocorre atribuindo aos primeiros N valores do domínio o mesmo crédito, de N. Outra escolha de compartilha_crédito, possivelmente mais natural, é a que envolve a atribuição de N créditos ao primeiro valor, N/2 ao segundo, e assim por diante:

```
compartilha_credito(Dominio, N, DomCredLista) :-
  ( fromto(N, AtuCredito, NovoCredito, 0),
    fromto(Dominio, [Val|Tail], Tail, _),
    foreach(Val-NovoCredito, DomCredLista),
  do
    ( Tail = [] ->
      NovoCredito is 0
    ;
      NovoCredito is AtuCredito fix(ceiling(AtuCredito/2))
    )
  ).
```

Nesse código, o `fix(ceiling(AtuCredito/2))` retorna o maior inteiro menor ou igual que AtuCredito/2.

9.3 Variáveis não-lógicas

Ocasionalmente será útil, como uma medida da eficiência de um programa, quantificar coisas como a quantidade de sucessos em uma computação ou a quantidade de *backtrackings*. Para isso, o ECL^iPS^e permite a utilização de variáveis não-lógicas e oferece quatro meios de lidar com elas:

- `setval/2`;
- `incval/1`;
- `getval/1`;
- `decval/1`;

O que define uma variável como não-lógica é que seu valor não muda com o *backtracking*. Além disso, variáveis não-lógicas não são capitalizadas e a única forma de mudar ou acessar o valor delas é por meio de um dos predicados acima. Segue uma implementação de nosso programa de busca que conta a quantidade de *backtrackings*[42]:

[42] Esse `once/1`, usado no programa, definido como `once(Goal) :- Goal, !.`

```
busca(Lista, Backtrackings) :-
  inicia_backtrackings,
  ( fromto(Lista, Vars, Resto, []),
  do
    escolhe_vars(Vars, Vari-Dominio, Resto),
    escolhe_vals(Dominio, Val),
    Vari = Val,
    conta_backtrackings
  ),
  pega_backtrackings(Backtrackings).

inicia_backtrackings :-
  setval(backtrackings, 0).

pega_backtrackings(B) :-
  getval(backtrackings, B).

conta_backtrackings :-
  on_backtracking(incval(backtrackings)).

on_backtracking(_).
on_backtracking(Q) :-
  once(Q),
  fail.
```

Esse programa explora a forma como é feito o *backtracking* e, por isso, a ordem em que foi posta é crucial. Vale notar que ele conta todos os backtrackings que ocorrem na busca, possibilitando contar a quantidade de nós na árvore.

Frequentemente, no entanto, pode ocorrer um *backtracking* entre mais de um nível. Isso ocorre quando, logo depois de realizar um, é realizado outro *backtracking*. Uma medida melhor de eficiência pode ser uma contagem de *backtrackings* que conta uma sequência ininterrupta como sendo apenas um. Um `conta_backtracking/0` que faz isso é dado a seguir:

```
conta_backtrackings :-
  setval(single_step,true).
conta_backtrackings :-
  getval(single_step,true),
  incval(backtrackings),
  setval(single_step,false).
```

9.4 A biblioteca suspend

Voltando a resoluções de CPs aritméticos e booleanos, introduzimos a biblioteca ECL^iPS^e *suspend*. A biblioteca *suspend* lida com restrições aritméticas sus-

pendendo a avaliação delas até que as variáveis tenham sido instanciadas e possam ser avaliadas. Caso elas não se tornem instanciadas até o fim da busca, o resultado é uma restrição, que é o que queríamos.

No ECL^iPS^e existem duas formas de se usar uma biblioteca: pode-se colocar um `:-library(nome_da_biblioteca).` no início do arquivo utilizado ou, ao usar um predicado da biblioteca nome_da_biblioteca, colocar `nome_da_biblioteca:( ... ).`. Um exemplo de uso de *suspend* é: `suspend:(2 < Y + 4), Y = 3.`, que resultaria em erro em Prolog puro. Caso a biblioteca *suspend* já tenha sido carregada, essa restrição pode ser reescrita como `2 $< Y + 4, Y = 3.`, em que o $ indica que a restrição é usada tal como na biblioteca *suspend*.

Essa biblioteca também lida com restrições booleanas (para as quais os valores de variáveis são 0 ou 1 e os símbolos de restrições são tais como `or/2`, `and/2`, `neg/1` e `=>/2`, de implicação) e permite a declaração de variáveis de formas distintas.

Uma delas é por meio do *range*: `suspend(X :: 2..10).`, ou `suspend(X #:: 2..10).` que gera uma variável X cujo valor é restrito ao intervalo de inteiros entre 2 e 10. Se a biblioteca já estiver carregada, que é o que assumiremos daqui para frente, essa restrição pode ser escrita como `X :: 2..10.`. Se quisermos usar intervalos reais no lugar de intervalos de inteiros (assumidos como o padrão), podemos usar um $ no lugar de #, como em `X $:: 2..10` (vale repetir que o uso de intervalos inteiros é o padrão, o que significa que, na falta de uma símbolo como # ou $, o intervalo é entendi como sendo em inteiros). Alternativamente, pode-se usar a restrição `integers/1` ou `reals/1` para restringir a variável ou lista de variáveis a assumir valores nos inteiros ou reais, respectivamente.

A biblioteca *suspend* também permite a criação de suspensões arbitrárias pelo usuário a partir de `suspend/3`. O primeiro argumento de `suspend/3` indica a restrição a ser suspensa, o segundo indica a prioridade da suspensão (o que nos dá a ordem de execução de restrições que deixam a suspensão juntas) e o terceiro a condição de saída da suspensão, escrito como `Termo -> Condicao` (dizendo que na ocorrência da *Condicao*, em relação a Termo, a restrição deixa a suspensão), em que "varCondicao" geralmente é *inst*, indicando que o Termo é instanciado. Um exemplo é `suspend(X =:= 21, 2, X -> inst)`, indicando que a restrição de que X =:= 21 está em estado de suspensão até que X seja instanciada.

Talvez se lembre do programa Ou Exclusivo do Capítulo 6. Com o uso de `suspend/3`, podemos reimplementá-lo sem recorrer ao *backtracking*:

```
% ou_exclusivo(X, Y) :-
%   sucesso se X xor Y eh 1, falso caso contrario

ou_exclusivo(X, Y) :-
  ( nonvar(X) ->
      sus_y_xor(X,Y),
    ;
      suspend(sus_y_xor, 3, X->inst)
  ).

sus_y_xor(X,Y) :-
  ( nonvar(Y) ->
      xor(X,Y)
    ;
      suspend(xor(X,Y), 3, Y->inst)
  ).

xor(1, 0).
xor(0, 1).
```

Note que, agora, nosso `ou_exclusivo/2` não é mais uma operação aritmética, agindo como um predicado relacional como os demais.

9.5 Outras Bibliotecas

Como lidamos, nesta seção, com a biblioteca *suspend*, vale a pena fazermos um breve comentário sobre as demais bibliotecas. Isso é útil não só pelos motivos práticos (no uso das bibliotecas), mas também como uma resumo das restrições que veremos mais para frente.

- A biblioteca *ic* (de *interval constraint*) provê um resolvedor de restrições misto inteiro/real;
- A biblioteca *branch and bound* provê um *framework* para resolver problemas por *branch and bound* muito customizável;
- A biblioteca *eplex* provê otimização para problemas de LP e MIP (*linear programming* e *mixed integer programming*, respectivamente). Existem outras bibliotecas nomeadas *eplex_x*, para usar o resolvedor x específico (exemplos para valores de x são "cplex" e "gurobi");
- A biblioteca *ic_global* provê restrições globais sobre listas de inteiros;
- A biblioteca *ic_symbolic* provê um resolvedor para restrições sobre domínios simbolicos ordenados;
- A biblioteca *fd* provê um resolvedor para domínios finitos no geral

Citamos algumas das que consideramos importantes. Mais detalhes sobre essas bibliotecas (e sobre as demais, não citadas aqui) podem ser encontrados em `http://eclipseclp.org/doc/bips/lib/fd/index.html`[43]

A biblioteca *ic_global* merece umas palavras a mais. Foi anteriormente mencionada a distinção entre restrições ativas e passivas, mas existe outra distinção, que às vezes pode ser mais significativa:

- **Restrições elementares** são as que ajem sobre uma quantidade predeterminada de variáveis. Elas estão disponíveis, por exemplo, nas bibliotecas *ic* e *branch_and_bound*; **Restrições elementares**
- **Restrições globais** as que ajem sobre uma quantidade indeterminada de variáveis. Elas estão disponíveis, por exemplo, na biblioteca *ic_global* (e também em outras, não citadas aqui). **Restrições globais**

Um exemplo de restrição global é o `alldiferent/n`, que será visto adiante.

[43] Acessado em 22/02/2018.

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Schimpf, Joachim, [https://groups.google.com/forum/?hl=en!msg/comp.lang.prolog/UYfgRxUWbGo/0Ku

[2] Schimpf, Joachim, "Logical Loops", IC-Parc, Imperial College, London

[3] Schimpf, Joachim e Shen, Kish, "ECL^iPS^e- From LP to CLP", Theory and Practice of Logic Programming

10 Propagação de restrições em domínios finitos

Nesta seção trabalharemos primariamente com restrições em domínios finitos. Domínios finitos são importantes porque costumam ser bons para modelar decisões, o que é algo com que gostaríamos que o computador ajudasse.

Um exemplo simples e bem conhecido é o problema de coloração de um mapa: dado um conjunto finito de cores (de tamanho 15, por exemplo), precisamos colorir um mapa (digamos, o do Cazaquistão) de modo que nenhuma de suas regiões receba a mesma cor que outra com que faça fronteira[44]. Outro exemplo bem conhecido é o do "casamento a moda antiga" (menos popularmente conhecido como o "problema da correspondência bipartida"). Nesse problema, temos um conjunto de homens, um de mulheres a relação `gosta/2`, que existe quando um indivíduo i gosta de outro j. O problema é separar esses grupos de homens e mulheres em casais que se gostam.

Esses dois exemplos tem a particularidade de terem restrições primitivas binárias e, por isso, são chamados de CSPs binários. Um ponto interessante em CSPs binários é que sempre podem ser representados como um grafo não direcionado: cada variável (cada indivíduo no segundo exemplo ou cada região do Cazaquistão, no primeiro) é representada como um nó e cada restrição como um arco entre suas variáveis. Mais em geral, restrições n-árias CSPs podem ser representados como um multigrafo (isto é, um grafo em que podem existir mais de uma aresta entre dois vértices).

Em particular, problemas como os de roteamento e criação de cronogramas costumam ser facilmente expressos como CPs em domínio finito, o que indica sua importância comercial.

Sendo de uso tão amplo, essa classe de problemas (a de CPs em domínios finitos) foi estudada por diferentes comunidades científicas. A comunidade de Inteligência Artificial desenvolveu técnicas de consistência por arco e por nó, para CSPs, a comunidade de programação por restrições desenvolveu técnicas de propagação de limites e a comunidade de pesquisas operacionais desenvolveu técnicas de programação inteira. Daremos uma olhada em cada uma dessas abordagens a seguir.

10.1 Consistência por nó e por arco

Resolução de CSPs por consistência por nó e por arco acontece em tempo polinomial (mas, possivelmente, de forma incompleta)[45]. A ideia aqui é diminuir os domínios das variáveis, transformando o problema em outro equivalente (com as mesmas soluções). Se o domínio de alguma variável for vazio, é o fim do CSP.

[44] Incidentalmente, acontece que esse problema é essencialmente o mesmo que as companhias de aviação tem para alocar seu tráfico aéreo.

[45] Mas ela, assim como as demais formas de consistência vistas aqui pode ser usada em conjunto com *backtracking*, gerando um resolvedor completo, mas não mais em tempo polinomial.

Essa forma de resolução é dita baseada em consistência porque ele funciona propagando informações dos domínios de cada variável para os demais, tornando-os "consistentes" entre si.

Definição 10.1. *Uma restrição r/n é dita* ***consistente por nó*** *se $n > 1$ ou, X sendo for uma variável em r, se para cada d no domínio de X,* `X=d,r(X).` *resulta em sucesso. Uma restrição composta é dita consistente por nó se cada uma de suas restrições primitivas o é.* **consistente por nó**

Definição 10.2. *Uma restrição r/n é dita* ***consistente por arco*** *se $n \neq 2$ ou, se r é uma restrição nas variáveis X e Y e se D_x é o domínio de X e D_y o de Y, então $x \in D_x$ implica que existe $y \in D_y$ tal que* `X=x, Y=y, r(X,Y).` *resulta em sucesso. Uma restrição composta é dita consistente por arco se cada uma de suas restrições primitivas o é.* **consistente por arco**

Vale notar que essas noções de consistência são noções fracas no sentido de que um CSP pode não ser satisfazível e ainda manter consistência por arco e por nó.

Não é difícil escrever um código para manter consistência por arco e por nós. A seguir segue um exemplo. Ele é para fins demonstrativos: para algoritmos mais eficientes veja [5]. O funtor `apply/2` é o definido no Capítulo 6.

```
% consistente_por_no([Dominio-Restricao|DsRs],
%                    [NovosDominio-Restricao|DnsRs]) :-
%   NovosDominios sao consistentes por no com suas respectivas restricoes
%

consistente_por_no([], []).
consistente_por_no([D-Res|DsRs],[Dn-Res|DnsRs]) :-
  functor(Res, _, N),
  (
    N \== 1 ->
    Dn = D
  ;
    consistente_por_no_primitivo(D, Res, Dn),
  ),
  consistente_por_no(DsRs, DnsRs).


consistente_por_no_primitivo([], _, []).
consistente_por_no_primitivo([D1|Ds], R, [D1|Dn]) :-
  apply(R, [D1]), !,
  consistente_por_no_primitivo(Ds, R, Dn).


consistente_por_no_primitivo([D|Ds], R, Dn) :-
  consistente_por_no_primitivo(Ds, R, Dn).
```

```
% consistente_por_arco([Dominios-Restricoes|DsRs],
%                       [NovosDominios-Restricoes|DnsRs]) :-
%   NovosDominios sao consistentes por arco com suas respectivas restricoes
%

consistente_por_arco([],[]).
consistente_por_arco([D1-D2-Res|DsRs],[D1n-D2n-Res|DnsRs]) :-
  consistente_por_arco_primitivo([D1-D2], Res, [D1n-D2n]),
  consistente_por_arco(DsRs, _).

consistente_por_arco([_|Cs],[Cns]).
  consistente_por_arco(Cs,Cns).


consistente_por_arco_primitivo([], _, []).
consistente_por_arco_primitivo(_, [], []).
consistente_por_arco_primitivo([D11|D1s]-[D22|D2s], R, [Dx|D1ns]-[Dy|D2ns]) :-
  (
    apply(R, [D11, D22]) ->
    (
      !, consistente_por_arco_primitivo(D1s-D2s, R, D1ns-D2ns),
      Dx = D11, Dy = D22
    )
  ;
    (
      consistente_por_arco_primitivo([D11]-D2s,R, _-_) ->
      (
        !, Dx = D11,
        consistente_por_arco_primitivo(D1s-D2s, R, D1ns-D2ns)
      )
    ;
      (
        consistente_por_arco_primitivo(D1s-[D22],R, _-_) ->
        (
          !,Dy = D22,
          consistente_por_arco_primitivo(D1s-D2s, R, D1ns-D2ns)
        )
      )
    )
  ).

consistente_por_arco_primitivo([D11|D1s]-[D22|D2s], R, D1ns-D2ns) :-
 consistente_por_arco_primitivo(D1s-D2s, R, D1ns-D2ns).
```

`consistente_por_no/2` recebe uma lista de pares "Domínio-Restrição". Se a restrição for unária, ela checa cada valor do domínio. Os valores que resultam

em falha são retirados do domínio. `consistente_por_arco/2` tem alguns casos a mais, mas é essencialmente a mesma coisa.

10.2 Consistência por limites[46]

As noções de consistência desenvolvidas acima funcionam bem para restrições em uma ou duas variáveis, mas se quisermos usar algo do tipo para mais variáveis, precisaremos generalizar um pouco:

Definição 10.3. *Uma restrição* `r/n` *nas variáveis* X_1, ..., X_n *é dita* ***consistente por hiper-arco*** *se para cada* x_i *no domínio de* X_i, *existem* x_j *nos domínios de* X_j *tal que para todo* $j \neq i$ *entre 1 e n,* X_i `=` x_i`,` X_j `=` x_j`.` *resulta em sucesso. Uma restrição composta é dita consistente por hiper-arco se cada uma de suas restrições o é.*

consistente por hiper-arco

Infelizmente, manter consistência por hiper-arco é algo caro demais para se fazer em um problema geral. Para encontrarmos uma nova checagem de consistência realmente útil, precisaremos restringir o domínio com que lidamos.

Dizemos que temos um **CSP é aritmético** se o domínio de cada variável é uma união finita de intervalos finitos de números inteiros e se as restrições são aritméticas. Muitos CSPs podem ser modelados como aritméticos de forma natural e muitos outros podem ser transformados em CSPs aritméticos por uma mudança de variáveis apropriada. Por exemplo, se o problema tem a ver com escolhas, uma mudança de variáveis natural é denotar cada escolha por um número. No problema da coloração do mapa do Cazaquistão, por exemplo, ao invés de denotar as cores como "vermelho", "azul", etc., podemos denotá-las como "1", "2", etc., obtendo resultados equivalentes.

CSP é aritmético

Lidando com CSPs aritméticos, podemos definir a noção de **consistência por limites**. A ideia é limitar o domínio de uma variável por limitantes inferiores e superiores. As seguintes convenções de notação serão convenientes:

consistência por limites

- $min_D(X)$:= algum x tal que para todo $y \in D$, $y \geq x$;
- $max_D(X)$:= algum x tal que para todo $y \in D$, $y \leq x$.

Dadas essas convenções, podemos construir uma definição de consistência por limites. Por incrível que pareça, existem três noções de consistência por limites, uma incompatível com a outra. Não obstante, os pesquisadores frequentemente confundem uma noção com a outra (os motivos de tal confusão serão explicados a seguir).

As três noções de consistência por limites serão denotadas *bounds*($\mathbb{D}$), *bounds*($\mathbb{Z}$) e *bounds*($\mathbb{R}$). Intuitivamente, para *bounds*($\mathbb{D}$), dentro de cada limitante no domínio de uma variável há "suporte inteiro" para os valores dos domínios

[46] Também conhecido como *bounds consistency*

das outras variáveis ocorrendo na mesma restrição. Para *bounds*($\mathbb{Z}$), o "suporte inteiro" precisa ser apenas dentro do intervalo definido pelos limitantes inferiores e superiores das outras variáveis. Para *bounds*($\mathbb{R}$), os "suportes" podem assumir valores reais no intervalo definido pelos limitantes inferiores e superiores das outras variáveis.

Mais formalmente, temos as seguintes definições:

Definição 10.4. *Uma restrição* `r/n` *nas variáveis* $X_1, \ldots, X_n$ *é dita* ***bounds($\mathbb{D}$) consistente*** *se, para cada* X_i*, existem* ***valores inteiros*** x_j *no domínio de* X_j*, onde* $j \neq i$*, tais que* $\{X_k = x_k : 1 \leq k \leq n\}$ *é uma solução de* `r/n`*.*

***bounds*($\mathbb{D}$) consistente**

Uma restrição composta é dita bounds($\mathbb{D}$) consistente se cada uma de suas restrições o é.

Definição 10.5. *Uma restrição* `r/n` *nas variáveis* $X_1, \ldots, X_n$ *é dita* ***bounds($\mathbb{Z}$) consistente*** *se, para cada* X_i*, existem* ***valores inteiros*** x_j*, onde* $j \neq i$*, satisfazendo* $min_D(X_j) \leq x_j \leq max_D(X_j)$*, tais que* $\{X_k = x_k : 1 \leq k \leq n\}$ *é uma solução inteira de* `r/n`*.*

***bounds*($\mathbb{Z}$) consistente**

Uma restrição composta é dita bounds($\mathbb{Z}$) consistente se cada uma de suas restrições o é.

Definição 10.6. *Uma restrição* `r/n` *nas variáveis* $X_1, \ldots, X_n$ *é dita* ***bounds($\mathbb{R}$) consistente*** *se, para cada* X_i*, existem* ***valores reais*** x_j*, onde* $j \neq i$*, satisfazendo* $min_D(X_j) \leq x_j \leq max_D(X_j)$*, tais que* $\{X_k = x_k : 1 \leq k \leq n\}$ *é uma solução real de* `r/n`*.*

***bounds*($\mathbb{R}$) consistente**

Uma restrição composta é dita bounds($\mathbb{R}$) consistente se cada uma de suas restrições o é.

É claro pelas definições que *bounds*($\mathbb{D}$) $\Rightarrow$ *bounds*($\mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ *bounds*($\mathbb{R}$). Existem, no entanto, problemas práticos com *bounds*($\mathbb{D}$) e *bounds*($\mathbb{Z}$), nomeadamente que, para restrições lineares, por exemplo, manter consistêncai por *bounds*($\mathbb{D}$) ou por *bounds*($\mathbb{Z}$) é um problema NP-completo, enquanto que manter consistência por *bounds*($\mathbb{R}$) pode ser feito em tempo linear.

Também vale notar que um conjunto de domínios D é consistente em *bounds*($\mathbb{Z}$) ou *bounds*($\mathbb{R}$) para uma restrição `r/n` se, e só se, range(D) é consistente em *bounds*($\mathbb{Z}$) ou em *bounds*($\mathbb{R}$) para `r/n`, em que range(D) é definido como $range(D) := \{[min_{Dxi}(X) \ldots max_{Dxi}(X_i)]\}$, D_{xi} o domínio da variável de `r/n` X_i. Essa propriedade é muito usada para não reexecutar propagadores de limites sem necessidade, e não vale para *bounds*($\mathbb{D}$).

Um problema com consistência em *bounds*($\mathbb{R}$) é que pode não ser claro como interpretar uma restrição inteira nos reais.

Com tantas diferenças entre essas noções, alguém poderia nos perguntar "Como alguém poderia confundi-las?". O fato é que, para muitas restrições, elas são equivalentes. Essas restrições são ditas monótonas. Para definir uma restrição monótona, será conveniente ter uma definição mais refinada do que é

um domínio. Daqui para frente, um **domínio** D de uma restrição `r/n` será tido como uma função do conjunto de variáveis de `r/n` para os conjuntos de valores que essa variável pode receber. Por exemplo, para `r(X,Y) :- X = Y.`, onde X pode assumir os valores 1 e 2 e, Y, os valores 2 e 3, D(X) = {1, 2} e D(Y) = {2, 3}. Por abuso de notação, diremos que $\Gamma \in D$ se Γ é outra função domínio tal que $\Gamma(X_i) \subseteq D(X_i)$ para $1 \leq i \leq n$. **domínio**

Definição 10.7. *Uma restrição* `r/n` *é dita monótona com respeito às suas variáveis* X_i *se, e só se, existe uma ordem total*[47] $\prec_i$[48] *no domínio de* X_i, $D(X_i)$, *tal que, se, para todo i,* $\Gamma \in D(X_i)$ *é uma solução de* `r/n`, *então também o é qualquer* Γ' *tal que, para* $i \neq j$, $\Gamma'(X_j) = \Gamma(X_j)$ *e* $\Gamma'(X_i) \preceq_i \Gamma(X_i)$.

Restrições na forma de desigualdades lineares[49] e de desigualdades do tipo $x_1 \times x_2 \leq x_3$, onde $min_D(x_i) \geq 0$, são monótonas, por exemplo.

Mais detalhes sobre consistência por limites podem ser vistos em [2]. A seguir é elaborado um exemplo de um método de propagação por limites.

Considere a restrição `X = Z + Y`. Ela pode ser escrita nas formas

$$X = Z + Y,\ Y = X - Y,\ Z = X - Y$$

Podemos ver que:

$$X \geq min_D(Y) + min_D(Z), X \leq max_D(Y) + max_D(Z) \quad (1)$$
$$Y \geq min_D(Y) + min_D(Z), Y \leq max_D(Y) + max_D(Z) \quad (2)$$
$$Z \geq min_D(Y) + min_D(Z), Z \leq max_D(Y) + max_D(Z) \quad (3)$$

Podemos usar essa observação para tentar diminuir os domínios de X, Y e Z. Com essa ideia, obtemos o seguinte programa:

```
bounds_consistent_addition([], []).
bounds_consistent_addition([Dx,Dy,Dz], [Dnx, Dny, Dnz]) :-
  min_member(Dx, Xmin),
  min_member(Dy, Ymin),
  min_member(Dz, Zmin),

  Xm is max(Xmin, Ymin + Zmin),
  XM is min(Xmax, Ymax + Zmax),
  new_domain(Xm, XM, Dx, Dnx),

  Ym is max(Ymin, Xmin - Zmax),
```

[47] Lembrete: uma ordem total em um conjunto S é uma relação $\preceq$ que satisfaz, para todo $a, b, c \in S$: $a \preceq a$, $a \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b$, $a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$ e $a \preceq b \vee b \preceq a$.

[48] A ordem pode mudar segundo a variável.

[49] Exceto desigualdades da forma $x \neq y$, mas essas são muito fáceis de lidar, além de serem equivalentes para $bounds(\mathbb{D})$, $bounds(\mathbb{Z})$ e $bounds(\mathbb{R})$.

```
  YM is min(Ymax, Xmax - Zmin),
  new_domain(Ym, YM, Dy, Dny),

  Zm is max(Zmin, Ymin - Ymax),
  ZM is min(Zmax, Xmax - Ymin),
  new_domain(Zm, ZM, Dz, Dnz).


new_domain(Vm, VM, Ds, Dn) :-
  Vm =< VM,
  (member(Vm, D) -> append([Vm], Dn) ; true),
  Vm is Vm + 1,
  new_domain(Vm, VM, D, Dn).
new_domain(_, _, _, []).
```

Observações semelhantes podem ser feitas para outros tipos de restrições aritméticas. Para restrições do tipo $X \neq Z$ e $X \neq min(Z, Y)$, isso é especialmente simples de ser feito. Para restrições não lineares do tipo $X < Z \times Y$, isso pode ser especialmente complicado, ainda mais se Z e Y puderem assumir valores positivos e negativos, mas ainda pode ser feito.

Como é meio chato escrever uma regra para cada caso de restrição dessas para a manutenção de consistência por limites, o que é mais usual em um sistema que ofereça esse tipo de consistência é que suporte apenas uma quantidade reduzida dessas restrições, sendo as demais transformadas em versões equivalentes às quais essas restrições se apliquem, o que não é difícil de se fazer. Isso, no entanto, está sujeito ao potencial inconveniente de que restrições equivalentes mas escritas de formas diferentes podem oferecer oportunidades diferentes para a diminuição de domínio de cada restrição e a reescrita pode tornar um domínio que poderia originalmente ser grandemente simplificado, em um que sofra apenas uma pequena alteração (e o usuário pode ficar frustrado ao ver que uma diminuição de domínio "óbvia" não foi feita).

Apesar disso, a aplicação de consistência por limites frequentemente é útil. Um programa que realiza essa aplicação é simples de se fazer: ele toma cada restrição primitiva e os domínios de suas respectivas variáveis e aplica um algo como o mostrado no código 10.2. Assim, temos um mecanismo de busca incompleto. Torná-lo um mecanismo completo é simples e pode ser feito com a adição do backtracking.

10.3 Consistência global

Consistência por limites também podem ser aplicadas a restrições em duas ou em uma variável, mas, nesse caso, consistência por arco ou por nó costumam resultar em diminuição maior nos domínios. Um problema geral, no entanto, pode ser composto por uma combinação de restrições de diferente aridade, tornando

vantajosa a aplicação de diferentes noções de consistência.

No entanto, um potencial problema com abordagens baseadas em consistência é que elas consideram apenas uma ou um pequeno número de restrições e variáveis por vez, enquanto que frequentemente muitas restrições e variáveis oferecem informações sobre as demais.

Tome, por exemplo, a restrição `X` $\neq$ `Y, Y` $\neq$ `Z, X` $\neq$ `Z`, equivalente a dizer que as variáveis X, Y e Z são todas diferentes. Dos métodos de consistência que vimos, o mais indicado a essa restrição é o de consistência em arco, já que $\neq$ é de aridade 2. Mas esse método é muito fraco para restrições de desigualdade, o que significa que, na prática, resolveríamos isso por *backtraking*, que tem um crescimento assintótico exponencial.

Restrições desse tipo são tão usadas que receberam o nome especial de `alldiferent/1`[50] em vários sistemas CLP e é, talvez, a restrição mais estudada. Restrições que fazem uso da informação no domínio de muitas variáveis para realizar a atualização de cada domínio são chamadas restrições globais (como notado anteriormente). No caso do `alldifferent/1`, podemos notar que essa restrição é equivalente ao supramencionado problema de correspondência bipartida e que existem algoritmos eficientes para lidar com ele.

Assim como nas restrições vistas anteriormente, os domínios das variáveis em `alldifferent/1` são importantes na decisão de como resolvê-la. Em particular, se as variáveis são inteiras um algoritmo de propagação baseado em consistência por limites atinge um bom desempenho. Se as variáveis não são inteiras, no entanto, uma algoritmos baseados em consistência por hiper-arco podem ser usados. A seguir é apresentada os fundamentos de um tal algoritmo. Esse material é baseado em [1].

10.3.1 Alldifferent

Precisaremos das seguintes definições:

Definição 10.8. *Um **grafo** é uma tupla $G = (V, A)$, de vértices e arestas (V é um conjunto de vértices e A de arestas). Em um grafo não orientado, uma aresta é uma tupla de vértices.* **grafo**

Dado um grafo $G = (V, E)$, um **pareamento**[51] M em G é um conjunto de arestas cujos vértices aparecem em apenas uma aresta de M (em outras palavras, M é um pareamento em G se os vértices em (V,M) tem no máximo grau 1). **pareamento**

Definição 10.9. *Um pareamento M em G é dito máximo se para todos os pareamentos P de G, $|P| \leq |M|$.*

[50] Na verdade, a aridade dessa restrição pode ser arbitrária, mas, por simplicidade, assumimos que as variáveis que devem ser diferentes entre si estão organizadas em uma lista, tornando a aridade igual a um.

[51] Também comumente conhecido como *matching*.

A teoria de pareamento é relevante para nosso problema porque, para qualquer restrição r/n com variáveis X_j, de domínios D_j, a informação de que $X_j \in D_j$ pode ser expressa por um grafo bipartido $(\cup_{j=1}^{n} X_i \cup (\cup_{i=1}^{n} D_i), E)$, onde $(X_i, d) \in E \Leftrightarrow d \in D_i$. Esse grafo é conhecido como **grafo valor** e pode ser construído em tempo polinomial. **grafo valor**

É fácil ver que a restrição `alldifferent/n` tem solução se e somente se existe um pareamento máximo de tamanho n em seu grafo valor. Incidentalmente, existe um algoritmo que, dado um grafo, encontra um pareamento máximo em $O(\sqrt[2]{|X|} \times |E|)$.

Ademais, dado um pareamento máximo, existem algoritmos eficientes que tornam `alldifferent/n` hiper arco consistente (cada aresta em um pareamento máximo corresponde a uma atribuição de valor a uma variável da restrição).

Para desenvolvermos essas afirmações um pouco melhor, as seguintes definições serão uteis.

Definição 10.10. *Dado um pareamento P em G, um vértice e em G é dito pareado se $e \in P$, ou livre caso contrário.*

Definição 10.11. *Um pareamento P em G é dito uma **cobertura** para os vértices do G se todo v vértice de G pertence a P.* **cobertura**

Definição 10.12. *Dado um pareamento P em G, um **caminho (ou ciclo) alternante** de G é um caminho (ou ciclo) cujos vértices são alternadamente pareadas e livres.* **caminho (ou ciclo) alternante**

Teorema 10.1. *Um vértice pertence a algum pareamento máximo P de tamanho n se, e somente se, para qualquer pareamento máximo P', ele ou pertence a P' ou a um caminho alternante em P' de comprimento par que começa em um vértice livre em P', ou a um ciclo alternante em P' de comprimento par.*[52]

Disso segue que quando uma aresta não pertencer a algum circuito ou caminho alternante, podemos extraí-la do grafo original. Para sabermos se tal ocasião acontece, podemos transformar o grafo em um grafo direcionado bipartido G' da seguinte forma: dado G=(V,A), nas arestas em A que são pareadas com P a aresta é orientada das variáveis para os valores e, nas demais, dos valores ara as variáveis.

Assim, podemos fazer uso do seguinte:

Teorema 10.2. *Todo circuito direcionado de G' tem comprimento par e corresponde a um circuito alternante par de G. Além disso, todo caminho em G' que for ímpar pode ser estendido em um caminho par, que corresponde a um caminho alternante par de G começando em um vértice livre.*

[52] Se esse teorema não soa intuitivo, você pode fazer uns desenhos e se convencer de sua veracidade (a prova real não vai ser muito diferente dos desenhos que fizer).

Para achar os caminhos procurados, podemos, então determinar os componentes fortemente conectados de G', assim como os caminhos direcionados em G' começando num vértice livre.

Um resumo do algoritmo é como se segue[53]:

1. É dada a restrição `alldifferent(X)`, onde $X = [X_1, ..., X_n]$;
2. Construímos então o grafo valor $G = (\cup_{j=1}^{n} X_i \cup (\cup_{i=1}^{n} D_i), E)$;
3. Computamos algum pareamento máximo de G, P;
4. Se $|P| < |X|$, falha;
5. Caso contrário, construa G';
6. Marque as arestas de G' que correspondem a arestas de G pertencentes a P como consistentes;
7. Encontre os componentes fortemente conectados de G' e marque as arestas nesses componentes como consistentes;
8. Encontre os caminhos direcionados que começam em um vértice livre e marque suas arestas como consistentes;
9. Para cada aresta de G' não marcada como consistente, remova a aresta correspondente em G.

10.4 Indexicals

Como deve ter dado para notar, uma operação chave em CLP(FD) é a propagação de restrições.

Em sistemas CLP(FD) iniciais, como o CHIP, as restrições eram primeiro transformadas em termos de forma canônica e, então, executados em um interpretador que, entre outras coisas, realiza a propagação de restrições (veja [6]). Devido ao sucesso na compilação de programas Prolog para a *máquina abstrata de Warren* (ou WAM, da sigla em inglês), que é o tipo de máquina abstrata mais usada na compilação de programas em Prolog, foram feitos esforços para a compilação de restrições em CLP(FD) nos mesmos moldes (sendo, na prática, uma extensão da WAM).

Nesse modelo, as restrições são traduzidas para códigos de baixo nível de modo que formas de propagação especializadas sejam usadas para cada tipo de restrição. Isso foi chamado de "modelo caixa-preta", já que o programador não sabe, a princípio, que tipo de propagação seria realizada em suas restrições. Na prática, esse modelo não se provou flexível o suficiente e foi abandonado.

Uma construção chamada **indexicals**, mais flexível do que a anterior, foi **indexicals**

[53] Tem algumas sutilezas nele não comentadas aqui. Para saber mais, veja a bibliografia (em particular, [1] e, em [3], o Capítulo *Algorithms for matching*)

então criada para auxiliar na compilação de restrições em CLP(FD). O modelo com *indexicals* é dito de "caixa de vidro", denotando seu caráter intermediário entre "o programador dita como as restrições são tratadas" e o seu contrário. No nosso contexto, um *indexical* é algo da forma `X in S`, onde X é uma variável de domínio finito e S é uma expressão.

Por exemplo, uma regra de propagação em consistência por limites para a restrição `X = Y + Z.` em *indexical* é:

X in $min(Y) + min(Z)..max(Y) + max(Z)$

A ideia é descrever o domínio de cada variável como uma função do domínio inicial por meio de construções como *in* e *min(Z)..max(Y)*.

Indexicals não são usados no ECL^iPS^e mas são usados em outros sistemas e algumas outras formas de propagação fazem uso de métodos que tomam *indexicals* por base, por isso o discutimos brevemente por nesta ocasião.

Incidentalmente, os *indexicals* usados aqui provém de um conceito mais geral de *indexical* proveniente da filosofia da linguagem. Para entender esse conceito um pouco melhor, considere a seguinte situação (retirada de [4]):

Digamos que existem dois irmãos gêmeos, um que só diz a verdade e outro que só diz a mentira. Além disso, o primeiro irmão, que só diz a, verdade também tem uma crença perfeita do que é ou não verdade (isto é, todas as proposições que são verdadeiras ele crê serem verdade e analogamente o contrário). Em contrapartida, o outro irmão tem uma crença completamente imperfeita do que é verdade (o que é verdade ele crê não o ser e analogamente o contrário). Note que, ao serem feitos a mesma pergunta, os dois irmãos dariam a mesma resposta. Considerando essa situação e tendo em mente que o irmão mentiroso o deve dinheiro, um logicista pergunta a outro logicista "Você acha que é possível, fazendo perguntas de sim ou não, descobrir se um irmão é o mentiroso ou o verdadeiro?", ao que ele responde "Claramente não, já que eles dariam as mesmas respostas às mesmas questões". Você acha que o segundo logicista estava correto?
Na verdade, não estava: Considere a pergunta "Você é o que diz a verdade?". Se ele o for, dirá que é. Se não o for, crerá que o é e dirá que não o é. Apesar disso, o segundo logicista estava correto ao dizer que eles dariam as mesmas respostas às mesmas questões: o "você" em "Você é o que diz a verdade?" se refere a "coisas" diferentes se usados com pessoas diferentes, então a pergunta feita ao mentiroso seria fundamentalmente diferente da feita ao não mentiroso. Aqui, "você" é um *indexical*.

O ponto é que um mesmo *indexical* pode significar coisas diferentes em contextos diferentes (na verdade, do ponto de vista filosófico, é isso que o define como sendo um *indexical*). No exemplo de *indexical* acima, os domínios iniciais de X, Y e Z poderiam mudar significativamente o que aquele *indexical* significa.

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Basileos Anastasatos "Propagation Algorithms for the Alldifferent Constraint"

[2] C.W. Choi, W. Harvey, J.H.M. Lee, and P.J. Stuckey, "Finite Domain Bounds Consistency Revisited"

[3] Christos Papadimitriou (1998), "Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity", Dover Publications

[4] Smullyan, Raymond, "5000 B.C. and Other Philosophical Fantasies"

[5] E. Tsang (1930), "Foundations of Constraint Satisfaction", Academic Press.

[6] Neng-Fa Zhou (2006), "Programming Finite-Domain Constraint Propagator in Action Rules", Theory and Practice of Logic Programming, Vol. 6, No. 5, pp.483-508, 2006

11 Restrições ativas

Regras de propagação como as vistas no Capítulo passado possibilitam o que é chamado "restrição ativa". Sem essas regras de propagação, tínhamos que buscar a solução de nossos problemas "na mão", isto é, por aquele método primitivo de testar cada solução e dascartar as que falham. Isso ainda era verdade com o uso da bilioteca *suspend*. Considere, por exemplo, a restrição `suspend:(X or Y), X = 0.`. Essa restrição tem a solução $X = 0, Y = 1$, mas, na forma como está escrita, a restrição não nos permite encontrar essa solução (`X or Y` estará suspenso até que Y receba um valor, o que não acontece, já que `or/2` só lida com variáveis instanciadas). Existem, no entanto, no sistema ECL^iPS^e, bibliotecas que lidam com a restrição de forma "ativa" (isto é, fazem uso de propagações). Veremos como lidar com duas delas momentaneamente, a *ic_symbolic* e a *ic*.

Considere a seguinte situação (adaptada de [1]):

Depois da queda do comunismo em Absurdolândia, vários clubes de debate "Preto e Branco" cresceram rapidamente pelo país. Eles eram clubes exclusivos: apenas antigos *Colaboradores Secretos* (do antigo Serviço de Segurança Comunista) ou antigos *Oposicionistas Honrados* (que costumavam serem caçados pelos antigos membros Serviço de Segurança Comunista). Esse tipo de associação fez bastante sucesso, já que proveu um solo fértil para discussões contraditórias, amadas pelo público, pela mídia televisiva e por jornalistas. Isso também impulsionou o consumo de todo aquele tipo de bebida que tem uma merecida reputação de facilitar o entendimento de assuntos complicados. A atratividade das discussões foi ainda mais realçada pelo conhecimento comum de que *Oposicionistas Honrados* sempre dizem a verdade, enquanto que *Colaboradores Secertos* diziam alternadamente a verdade e a mentira. O bem conhecido tablóide local "Notícias da Cloaca" delegou a um dos clubes um Jornalista Celebrado para fazer uma reportagem promovendo a ideia de reconciliação entre os inimigos do passado. Infelizmente, o Jornalista Celebrado encontrou um problema: no momento de sua chegada, o clube tinha apenas três membros, dos quais Membro1 e Membro2 argumentavam ferozmente, evidentemento porque pertenciam a diferentes grupos de membros. O jornalista, não querendo importunar os adversários, perguntou ao Membro3, que não tomava parte no argumento, se ele costumava ser um *Oposicionista Honrado* ou um *Colaborador Secreto*. Infelizmente, Membro3 já tinha tomado muito das bebidas supramencionadas e resmungou algo ininteligível. O Jornalista Celebrado perguntou então aos dois membros restantes sobre o que o Membro3 havia dito. Membro1, que talvez devido a alguma habilidade que havia praticado, pôde entender a resposta do Membro3, afirmou que o Membro3 disse que havia sido um *Oposicionista Honrado*. No entanto, Membro2 primeiro disse que Membro3 foi um *Colaborador Secreto* e, então, adicionou que o Membro3 havia mentido. O Celebrado Jornalista tem informação suficiente para inferir quem é quem?

Para resolver esse problema, faremos uso das bibliotecas ic e ic_symbolic, a

qual é uma adição à biblioteca ic, implementando variáveis e restrições sobre sobre domínios simbólicos ordenados (como já mencionado anteriormente). Para modelarmos esse problema, faremos uso das seguintes observações básicas:

- Membro1 e Membro3 disseram alguma coisa;
- Membro2 disse duas coisas;
- Cada coisa que foi dita pode ser verdadeira ou falsa;
- Sabemos o que Membro1 e Membro2 disseram, mas só sabemos o que o Membro3 possivelmente disse.

Assim, temos uma variável para cada membro, que é ou um *Oposicionista Honrado* ou um *Colaborador Secreto*, assim como para cada coisa dita por eles (daqui para frente referida como "resmungo"), que pode ser verdadeira ou falsa. Mais importante são as relações entre essas variáveis.

Para a resolução do problema, notamos que os domínios a serem usados pela ic_symbolic precisam ser declarados, o que faremos por uso da construção `:- local domain(domain_name(`$domain\_value_1$`, ..., `$domain\_value_n$`))` em que "domain_name" representa o nome do domínio e $domain\_value_i$ representa o i-ésimo valor (simbólico) no domínio. O valor de cada variável de resmungo pode ser "verdadeiro" ou "falso", aqui representados pelos valores aritméticos 0 e 1. O valor de cada variável de Membro pode receber os valores "oposicionista_honrado" e "colaborador_secreto". O que cada Membro disse é uma afirmação sobre o grupo ao qual outro membro faz parte ou sobre a veracidade do que outro Membro disse. Essas observações são traduzidas no seguinte código:

```
:- lib(ic).
:- lib(ic_symbolic).
:- local domain(membro_do_clube(oposicionista_honrado, colaborador_secreto)).


% Oposicionistas Honrados sempre dizem a verdade
% Colaboradores Secretos podem dizer a verdade ou mentir
resmungo_unico(Membro, Verdade) :-
    (Membro &= oposicionista_honrado) => Verdade.

% Colaboradores secretos mentem e dizem a verdade alternadamente
resmungos_consecutivos(Membro, Verdade1, Verdade2) :-
    (Membro &= colaborador_secreto) #= (Verdade1 #\= Verdade2).

resmungos_consecutivos(Membro, Verdade1, Verdade2) :-
    (Membro &= colaborador_secreto) #= (Verdade1 #\= Verdade2).
```

```
%% resolve([?Membro_1, ?Membro_2, ?Membro_3])
% Membro_x é unificado com o nome do seu respectivo grupo
%

resolve([Membro_1, Membro_2, Membro_3]):-
    [Membro_1, Membro_2, Membro_3] &:: membro_do_clube,
    [Membro_3_possivelmente_disse, Membro_3_disse, Membro_1_disse,
     Membro_2_disse_primeiro, Membro_2_disse_entao] :: 0..1,
    Membro_1 &\= Membro_2,

    % O que Membro_3 possivelmente disse
    % O que Membro_1 disse
    % O que Membro_2 disse primeiro
    % O que Member_2 disse entao
    Membro_3_possivelmente_disse #= (Membro_3 &=oposicionista_honrado),
    resmungo_unico(Membro_3, Membro_3_possivelmente_disse),

    Membro_1_disse #= (Membro_3_disse #=Membro_3_possivelmente_disse),
    resmungo_unico(Membro_1, Membro_1_disse),

    Membro_2_disse_primeiro #= (Membro_3 &=colaborador_secreto),
    resmungo_unico(Membro_2, Membro_2_disse_primeiro),

    Membro_2_disse_entao #=(Membro_3_disse #= 0),
    resmungo_unico(Membro_2, Membro_2_disse_entao),

    resmungos_consecutivos(Membro_2, Membro_2_disse_primeiro, Membro_2_disse_entao),
    ic_symbolic:indomain(Membro_1),
    ic_symbolic:indomain(Membro_2),
    ic_symbolic:indomain(Membro_3),
    writeln("Membro_1":Membro_1),
    writeln("Membro_2":Membro_2),
    writeln("Membro_3":Membro_3),
    writeln("Membro_2_disse_primeiro":Membro_2_disse_primeiro),
    writeln("Membro_2_disse_entao":Membro_2_disse_entao).
```

É um código simples e que não precisa de muitos comentários, mas cabe alguns:

- As relações entre os Membros (termos simbólicos) são realizadas por restrições de ic_symbolic (vale lembrar, os "#" indicam que a restrição tem o significado usual, mas nos inteiros);
- As entre o que eles disseram (ou possivelmente disseram), por restrições aritméticas (de ic);

- Enquanto `[Membro_1, Membro_2, Membro_3] &:: membro_do_clube` indica o domínio das variáveis, `ic_symbolic:indomain(Membro_1)` faz a atribuição de valores (segundo as restrições);
- Em `resmungo_unico(Membro, Verdade):- (Membro &= oposicionista_honrado) => Verdade`, o símbolo "`=>`" é o de implicação como em lógica clássica;
- Restrições como `(Membro &= colaborador_secreto)` são reificadas, isto é, assumem um valor de "verdadeiro" ou "falso" (na prática, 0 ou 1);
- As linhas tais como `writeln("Membro_1":Membro_1)` escrevem "Membro1 : valor", onde "valor" é o valor de Membro1.

Uma particularidade desse código é que ele resolve o problema sem a necessidade de *backtracking*, no que é chamado de *backtracking-free search* (apesar de ser uma propagação e não uma busca propriamente dita). Essa foi uma situação excepcional, uma vez que geralmente é necessário fazer uma busca para se chegar à solução (na verdade, mesmo quando não é necessário usar busca, sua introdução pode agilizar o processo).

11.1 Backtracking raso

Busca por *backtracing* raso é um processo de busca no qual é permitido *backtracking*, mas de forma limitada: ao atribuir um valor a uma variável, o processo de propagação é desencadeado e, se ocorre uma falha, o próximo valor é tentado. Para realizar essa busca, precisamos de predicados que nos permitam o acesso do domínio atual de uma variável. Um desses predicados é o `get_domain_as_list/2`. Ele toma como primeiro argumento uma variável com um domínio e o segundo argumento é instanciado a uma lista com os valores contidos do domínio da variável. Com essa lista em mãos, podemos testar cada valor a partir de `member/2`: `get_domain_as_list(X, Dominio), member(X, Dominio)`. Essa combinação (de `get_domain_as_list/2 e member/2`) é tão usada que foi criado o predicado `indomain/1`[54] para realizar a mesma função (exceto que de forma mais eficiente). O predicado `indomain/1` age como se definido por:

```
%% indomain(+X)
% Insiste que a variável X faça parte de seu domínio

indomain(X) :-
  get_domain_as_list(X,member(X, Domain).
  member(X, Domain),
```

Em mãos desse predicado, podemos fazer o *backtracking* raso como se segue:

[54] Perceba como ele foi usado no programa anterior

```
%% backtrack_raso(+Lista)
% Para cada variável em Lista, tente atribuir um valor em seu domínio

backtrack_raso(Lista) :-
  ( foreach(Var,Lista) do once(indomain(Var)) ).
```

Note que busca por *backtracking* raso não é um resolvedor completo.

11.2 Busca por backtracking

Fazer uma busca por *backtracking* por meio da enumeração de todos os valores no domínio não é eficiente na presença de propagadores, já que os domínios diminuem (ou, ao menos, assim esperamos). No lugar disso, seria mais interessante fazer uma busca por *backtracking*que faça uso apenas dos valores nos domínios atuais. Essa observação nos leva a uma revisão do programa de busca apresentado no Capítulo 8:

```
%% busca_com_dom(+Lista)
% Faz a busca por backtracking nas variáveis de Lista
%

busca_com_dom(Lista) :-
  ( fromto(Lista, Vars, Resto, [])
  do
    escolhe_var(Vars, Var, Resto),
    indomain(Var).
  ).

escolhe_var(Lista, Var, Resto) :- Lista = [Var | Resto].
```

Sendo um procedimento de busca tão comum, ele está disponível em algumas bibliotecas ECL^iPS^e(na *ic* e na *sd*, por exemplo) sob o nome `labeling/1` (o nome *labeling* é devido a razões históricas)

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Niederliński, Antoni, "A gentle guide to constraint logical programming via Eclipse", 3rd edition, Jacek Skalmierski Computer Studio, Gliwice, 2014

12 Heurísticas

Nos métodos de busca vistos até agora, a ordem de variáveis adotada é a ordem apresentada na lista e a ordem de valores para cada variável é fixa. Para problemas maiores, pode ser mais conveniente considerar ordenações diferentes para cada tipo de problema. Essas ordenações são geralmente escolhidas de forma heurística e, por isso, são chamadas ordenações heurísticas. Existem, naturalmente, duas classes de ordenações heurísticas: ordenação heurística de variáveis e de valores.

Analisaremos o efeito de algumas dessas heurísticas pela resolução do *problema das n-rainhas* quando $n \geq 3$[55]. É um problema por restrições tão bem conhecido que um estudante de programação por restrições poderia (e com razão) se sentir enganado se terminasse um livro sobre o tema sem saber como resolver esse problema em especial. A discussão a seguir é baseada, em grande parte, em [1].

12.1 As n-rainhas

Para quem não conhece, o *problema das n-rainhas* é o problema de alocar n rainhas em um tabuleiro como o de xadrez, mas $n \times n$, com a restrição de que as rainhas não tem permissão para se atacarem segundo as regras usuais de xadrez.

Existe um algoritmo polinomial para a resolução desse problema (que não veremos aqui), mas o que veremos muitas vezes é mais conveniente e até mais rápido. Antes de considerarmos o papel das heurística, vejamos como é uma solução mais simples. Notamos primeiro que, como temos n rainhas, precisa existir uma rainha em cada linha e em cada coluna. Ou seja, para cada coluna (ou cada linha) só precisamos indicar em qual linha (coluna) a rainha está, o que significa que a solução requer um lista[56] de n posições, não uma matriz (como alguém podria supor a princípio). O domínio de cada posição na lista é o intervalo inteiro $[1, n]$ e as restrições são que só pode existir uma rainha por linha (ou por coluna), o que se traduz na restrição `alldifferent(Cols)`, em que *Cols* é o vetor de colunas. Ademais, só pode existir uma rainha por linha, o que se traduz nas restrições X_i `-` X_j `\=\` `I - J` e X_i `-` X_j `\=\` `J - I`, em que X_i e X_j são membros distintos da lista de colunas (ou linhas).

```
%% rainhas(-Rainhas, ++Numero)
% Rainhas contém a posição de cada rainha por coluna
%

:- lib(ic)

rainhas(Rainhas, Numero) :-
```

[55] Quando n = 2 ou n = 3, o problema não tem solução

[56] Ou um vetor.

```
  dim(RainhaStruct,[Numero]),
  restricoes(RainhaStruct, Numero),
  struct_para_lista(RainhaStruct, Rainhas),
  busca(Rainhas).

restricoes(RainhaStruct, Numero) :-
  ( for(I,1,Numero),
    param(RainhaStruct,Numero)
  do
    RainhaStruct[I] :: 1..Numero,
    (for(J,1,I-1),
      param(I,RainhaStruct)
    do
      RainhaStruct[I] #\= RainhaStruct[J],
      RainhaStruct[I]-RainhaStruct[J] #\= I-J,
      RainhaStruct[I]-RainhaStruct[J] #\= J-I
    )
  ).

struct_para_lista(Struct, Lista) :-
  ( foreacharg(Arg,Struct),
    foreach(Var,Lista)
  do
    Var = Arg
  ).
```

Esse programa primeiro declara o vetor *RainhaStruct*, impõe a ele as restrições mencionadas, transforma o vetor em lista e realiza a busca (como explicada no Capítulo 10).O programa, no computador do autor, consegue resolver o problema por esse programa para N até 29, mas, adotando um tempo limite de 50 segundos, N = 30 já está fora de mão.

Alguém poderia dizer que isso ocorre porque esse código não foi feito de maneira inteligente, já que a assimetria do problema, presente no fato de que a alocação de uma rainha em uma coluna central, por exemplo, resulta em maiores restrições nas posições das outras rainhas, não está representada no código. Esse realmente é o caso e, para fazê-lo deixar de ser, criamos uma nova versão do programa.

12.2 Ordenação de variáveis

A alteração consiste na adição de um argumento Heur (de heurística) no predicado `rainhas/2` (que se torna `rainhas/3`). Esse predicado nos diz qual a heurística usada para ordenar as variáveis. Podemos definir o `rainhas/2`, do exemplo passado, como um `rainhas/3` no qual o último argumento é "naive" (indicando que a heurística usada é uma, por assim dizer, boba).

```
busca(Rainhas, naive) :- labeling(Rainhas).
```

Uma heurística mais esperta nesta situação seria começar a testar as variáveis do meio. Chamaremos essa heurítica de *middle_out*: ela faz com que a busca comece do meio e vá alternando entre os vizinhos do lado esquerdo e direito, a partir do meio.

```
:- lib(lists).

busca(Rainhas, middle_out) :-
  middle_out(Rainhas, RainhasDeSaida),
  labeling(RainhasDeSaida).

middle_out(Lista, ListaDeSaida) :-
  halve(Lista, PrimeiraMetade, UltimaMetade),
  reverse(PrimeiraMetade, RevPrimeiraMetade),
  splice(UltimaMetade, RevPrimeiraMetade, ListaDeSaida).
```

Aqui usamos a biblioteca *lists*, que contém, entre outras coisas, `halve/3`, `reverse/2` e `splice/3`. O que o primeiro e o segundo desses predicados faz deve ser claro. O que o terceiro faz é juntar em *ListaDeSaida* as *UltimaMetade* e *RevPrimeiraMetade* colocando um membro de cada alternadamente (como uma função *merge* do *merge_sort*).

À parte dessa heurística, existe a *first_fail*, que seleciona como a próxima variável a que tem menos valores restantes no domínio. Para implementar essa heurística, usaremos o predicado da biblioteca *ic* `delete(-X, +List, -R, ++Arg, ++Select)`, que remove uma variável X da lista de variáveis *List*, deixando o resultado em R. O parâmetro *Arg* indica se a lista é uma lista de fato ou um funtor (no segundo caso, os argumentos do funtor são tratados como se fossem elementos de uma lista), e o *Select* indica o parâmetro de seleção (uma lista dos parâmetros possíveis pode ser encontrada na documentação do ECL^iPS^e). No caso, nosso parâmetro é *first_fail*. Nossa busca com o *first_fail* fica da seguinte forma:

```
busca(Lista, first_fail) :-
  ( fromto(Lista, Vars, Resto, [])
  do
    delete(Var, Vars, Resto, 0, first_fail),
    indomain(Var)
  ).
```

o parâmetro 0 indica que lidamos com uma lista de fato.

A experiência prática indica que, para instâncias pequenas (para N pequenos), a diferença entre usar o *fisrt_fail* ou não é pequena. Para N grandes, entretanto, a diferença é visível.

Não temos motivos *a priori* para não usar o *first_fail* e o *middle_out* juntos. Chamaremos essa heurística de *moff*:

```
busca(Lista, moff) :-
  middle_out(Lista, ListaDeSaida),
  ( fromto(ListaDeSaida, Vars, Resto, [])
  do
    delete(Var, Vars, Resto, 0, first_fail),
    indomain(Var)
  ).
```

12.3 Heurísticas de ordenamento de valor

A mesma observação usada para a heurística *middle_out* vale para a ordem dos valores escolhidos: a escolha de valores próximos ao centro restringem mais os valores de outras variáveis e tem a chance de falhar mais cedo. O ECL^iPS^eoferece um predicado `indomain/2` que nos ajuda nisso: seu segundo argumento nos dá um certo controle sobre a ordem em que os valores são testados. Em particular, `indomain(Var, middle)` começa a enumeração das variáveis pelo meio do domínio de *Var*. Existem também `indomain(Vars, min)` e `indomain(Vars, max)` que começam pelos menores valores e maiores, respectivamente (usando a ordem do domínio, pela qual "menor" é o que vem antes).

Podemos assim combinar nossa heurística anterior (*moff*) com esta (que chamaremos de *moffmo*):

```
busca(Lista, moffmo) :-
  middle_out(Lista, ListaDeSaida),
  ( fromto(ListaDeSaida, Vars, Resto, [])
  do
    delete(Var, Vars, Resto, 0, first_fail),
    indomain(Var)
  ).
```

Na tabela a seguir consta a quantidade de *backtrackings* por heurística para alguns valores de N:

12.4 Outras Considerações

O problema das n-rainhas é simétrico em que se uma solução tem a enésima rainha no emésimo quadrado da coluna i, outra solução teria a enésima rainha na emésimo quadrado da linha i. Perceba que uma solução é equivalente à outra, a menos de rotaçõe s de 90^o. Assim, quando a heurística de ordenação de variáveis *middle_out* sucede sem *backtrackings*, a heurística de ordenação de valores `indomain(Var, middle)` também deveria. Percebendo isso, podemos criar

Árvore 6: Retirado de [1]

	naive	middle_out	first_fail	moff	moffmo
8-queens	10	0	10	0	3
16-queens	542	17	3	0	3
32-queens	—	–	4	1	7
75-queens	—	–	818	719	0
120-queens	—	–	—	—	0

uma heurística de ordenação de valores que faz *backtrackings* como a *middle_out*. Depois de aplicada, uma "rotação" deve nos mostrar as mesmas soluções e na mesma ordem.

Para tanto, fazemos pequenas modificações no nosso programa. No lugar de iterar sobre a lista de variáveis, iteraremos sobre os valores do domínio. Ademais, no lugar de selecionar um valor para a variável atual (pelo `indomain/1`), selecionaremos uma variável para um valor (pelo `member/2`). Por fim, "rodamos" o resultado, para que os resultados produzidos sejam os mesmos produzidos pelo *middle_out*. Um código representando o que foi discutido é como segue:

```
rainhas(rotate, Rainhas, Numero) :-
  dim(RainhaStruct,[Numero]),
  constraints(RainhaStruct, Numero),
  struct_para_lista(RainhaStruct, QList),
  busca(QLista, rotate),
  rotate(RainhaStruct, Rainhas).

busca(QLista, rotate) :-
  middle_out_dom(QLista, MOutDom),
  ( foreach(Val, MOutDom),
    param(QLista)
  do
    member(Val, QLista)
  ).

middle_out_dom([Q | _], MOutDom) :-
  get_domain_as_lista(Q,OrigDom),
  middle_out(OrigDom, MOutDom).

rotate(RainhaStruct, Rainhas) :-
  dim(RainhaStruct,[N]),
```

```
dim(RRainhas,[N]),
( foreachelem(Q,RainhaStruct,[I]),
  param(RRainhas)
do
  subscript(RRainhas,[Q],I)
),
struct_para_lista(RRainhas, Rainhas).
```

Curiosamente, os resultados para o *rotate* são muito melhores do que para *middle_out*, como pode ser visto na seguinte tabela, mostrando a quantidade de *backtrackings* por N e por heurística:

Árvore 7: Retirado de [1]

	middle_out	rotate
8-queens	0	0
16-queens	17	0
24-queens	194	12
27-queens	1161	18
29-queens	25120	136

Isso ocorre porque o comportamento da propagação de restrições não é o mesmo para linhas e colunas. Se os valores para uma coluna são excluídos, exceto um, essa variável é instanciada ao velor restante. Esse é o comportamento exibido por *rotate*.

No entanto, no comportamento exibido por *middle_out*, se todos os valores de uma linha são excluídos exceto um, a propagação de restrições não instancia a variável. Isso ocorre porque as variáveis são representadas por colunas.

Uma forma de conseguir a mesma quantidade de propagação é usar uma redundância na formulação do problema. Neste caso, poderíamos adicionar outro tabuleiro ligado ao primeiro de modo que, se uma rainha i é posta no quadrado j de um tabuleiro, no outro, uma rainha j é posta no quadrado i.

12.5 O Predicado Search

Espero que a leitora não fique triste ao saber que grande parte do trabalho desenvolvido até agora poderia ser substituído pelo uso do predicado `search/6`. Ele tem 6 argumentos: *search(+Lista, ++Arg, ++Select, +Escolha, ++Metodo, +Opcao)*. O primeiro argumento, *Lista*, é uma lista de variáveis de decisão (as variáveis do problema) quando *Arg* é 0, ou uma lista de funtores compostos quando $Arg > 0$. Assumiremos que *Arg* é 0. O argumento *Select* representa

uma heurística (feita pelo usuário ou não) de ordenação de variáveis, enquanto que, o *Escolha*, uma de ordenação de valores. Pelo *Metodo*, podemos selecionar a "forma" pela qual a busca deve ser feita: algumas opções são *complete* (que realiza uma busca por todos os valores), e *sbds* (que faz uso da biblioteca SBDS de quebra de simetria para excluir partes simétricas da árvore de busca)[57]. O argumento *Opcao* é usado para passar parâmetros adicionais[58], algumas das quais são *node(daVinci)*, para criar um desenho da árvore de busca usando a ferramenta de desenho daVinci, e *backtracks(-N)*, que nos dá em N a quantidade de *backtrackings* que ocorreram durante a busca.

[57] Recomendamos a consulta ao manual do ECL^iPS^e para mais detalhes sobre esses e outros métodos de busca

[58] Novamente, é recomendado checar o manual do ECL^iPS^e para mais informações

Leituras Adicionais

A pesquisa e prática em programação lógica frequentemente é muito próxima à de linguagens funcionais e esse é o caso na área de transformações de programas. As transformações de *folding/unfolding* foram primeiro adaptadas para a programação lógica por Tamaki e Sato [1]. Mais informações podem ser encontradas em [2].

[1] Krzysztof R. Apt and Mark Wallace "Constraint Logic Programming using ECLiPSe" Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK