

# 1 Planejamento de Aeronaves por Programação Geométrica

## 1.1 Introdução

Neste capítulo vamos ver como podemos usar um pouco do que vimos até agora para resolvermos um problema um pouco mais concreto do que os apresentados como exemplos. O problema a ser analisado é o de projeto (*design*) de aeronaves.

Pelas últimas décadas, métodos de otimização têm tomado cada vez maior importância no desenvolvimento de máquinas complicadas, mas ainda com muitas limitações. O problema é que, quando um projeto é tão grande e complicado quanto o do desenvolvimento de aeronaves, que contam com relações altamente não lineares entre muitas variáveis, a aplicação de um método homogêneo, ou mesmo de vários métodos heterogêneos, fica difícil. Não é pouco usual a aplicação de um método de otimização a uma parte específica do projeto (o da asa, por exemplo) e deixá-lo rodando por dias para obter, no final, apenas uma resposta aproximada, que pode ou não ser viável quando se leva em consideração o resto do projeto.

Para estudar como melhor lidar com esse tipo de situação, surgiu o campo de estudos de *Otimização Multidisciplinar de Projetos* (ou *Multidisciplinary Design Optimization*, **MDO** na sigla em inglês, que será usada daqui para frente). O objetivo dos métodos MDO são coordenar de maneira eficiente diferentes métodos de otimização para um projeto único, na esperança de assim obter projetos melhores (“melhores” nos termos definidos pelo ou pela projetista) do que os obtidos otimizando o projeto por partes isoladas. No entanto, mesmo depois de numerosos avanços em métodos MDO, aplicá-los a um projeto inteiro de uma aeronave ainda é impraticável na maior parte dos casos.

**MDO**

Em última instância, a utilização de métodos de otimização para esse tipo de problema (o de projetos como o de uma aeronave, como no exemplo) é feita a fim de se entender e analisar melhor o problema em mãos. Isso porque, no início, o problema a ser resolvido pelo projeto não é, no geral, bem posto (muitas vezes, os objetivos do projeto não são sequer definidos[1]), e é de interesse entender o formato de sua fronteira de Pareto<sup>1</sup>, a fim de se entender a relevância de cada característica (ou, poderíamos dizer, “de cada variável”). Isso, aliado ao fato de que geralmente um projetista gostaria de otimizar vários parâmetros, e não só um, aumenta a necessidade de se obter não só uma “resposta” otimizada, mas também um maneira de entender a vizinhança dessa resposta (isto é, realizar uma análise de sensibilidade).

Vale também notar que há um impasse entre a realização de uma análise

---

<sup>1</sup>Uma alocação de recursos (codificada aqui como a atribuição de valores a variáveis) é dita Pareto eficiente se não é possível alterar tal alocação tal que um critério de otimalidade seja melhorado sem que outro seja piorado. Fronteira de Pareto é o conjunto de alocações Pareto eficientes.

de alta ou de baixa fidelidade. Para análises de alta fidelidade, existem duas opções:

- Fazer uma análise de uma parte específica (como o da asa, ou do motor) do projeto, o que possibilitaria a quem cuidar dele fazer decisões mais informadas sobre essa parte específica;
- Fazer uma análise mais geral, envolvendo um subconjunto maior de “partes específicas”, incorrendo em instâncias mais arbitrárias de problemas mais gerais, e leva, em geral, dias ou semanas para a obtenção de uma solução.

Esses tipos de problemas, assim como a possibilidade de *overfitting*<sup>2</sup> levam, em vários casos, a uma escolha por uma análise de baixa fidelidade.

Antes de seguirmos um pouco mais a fundo, convém obtermos uma ideia geral do desenvolvimento típico de uma aeronave. Esse desenvolvimento é composto por três etapas[1] (ou, pelo menos, assim os engenheiros o têm tratado por algumas décadas):

- **Projetação conceitual:** etapa em que os objetivos do projeto são definidos, assim como requisitos de performance. Dependendo do projeto, esta etapa pode levar vários anos e pode envolver uma análise matemática razoavelmente detalhada;
- **Projetação preliminar:** Envolve uma análise mais aprofundada da configuração do projeto, identificação e resolução de problemas de interferência aerodinâmica e de instabilidade é realizada e, em um certo ponto, a configuração básica da aeronave é “congelada”, de modo a permitir que times que trabalham com subsistemas possam trabalhar independentemente, sem afetar demais os outros times;
- **Projetação detalhada:** Envolve uma projeção detalhada do projeto, desenhos em CAD, determinação de passagens hidráulicas, elétricas e de combustível, assim como fabricação de peças de produção<sup>3</sup>.

Cada uma dessas etapas pode ser envolve grandes problemas de otimização com restrições, envolvendo as dificuldades notadas acima.

## 1.2 Programação Geométrica

Nos últimos anos, técnicas de programação convexa têm se tornado cada vez mais eficientes (aproximando mesmo técnicas de programação linear). Apesar disso, por incrível que possa parecer, tais técnicas ainda são notavelmente

---

<sup>2</sup>Uma solução “está em” *overfitting* quando levar a excelentes resultados para uma comparativamente pequena quantidade de casos de teste, mas a soluções ruins quando em situações mais gerais.

<sup>3</sup>Peças que são pensadas para uso em um projeto específico.

ausentes em propostas MDO[1] e a abordagem mais comum a esses problemas é por meio de métodos gerais de programação não-linear. Assim, problemas muito gerais podem ser abordados, mas dificilmente os critérios de confiança e eficiência são preenchidos.

No lugar disso, então, voltamos nossa atenção a métodos de otimização convexa e, em particular, a um método que se mostrou particularmente adequado para lidar com problemas de projeto de aeronave, o de programação geométrica<sup>4</sup>. Quando esse método é aplicável, entre as vantagens que ele oferece estão a obtenção de soluções globalmente ótimas (ou um certificado de infactibilidade, quando não existem tais soluções), com tempos de solução comparativamente curtos, que escalam para problemas maiores (isto é, quando o problema aumenta “um pouco”, o tempo de solução aumenta só “um pouco”). Ele tem a desvantagem de não ser um método geral, mas como, só estamos interessados (no momento) em resolver problemas de projetagem de aeronaves, essa desvantagem não nos entristece muito.

Um problema de programação geométrica em forma padrão pode ser posto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n f_i(x) \\ & \text{tal que} \quad f_i(x) \leq 1, i = 1, \dots, n \\ & \quad \quad g_i(x) = 1, i = 1, \dots, k, \\ & \quad \quad x \in R_+^n, \end{aligned}$$

em que  $f_i$  são posinômios ou monômios, os  $g_i$  são monômios e  $x \in R^n$ . Aqui, no entanto, a definição de monômios (e de posinômios) é um pouco diferente do usual em álgebra:

- Um **monômio**  $g(x)$  é algo da forma  $g(x) = kx^\alpha$ ,  $\alpha \in R^n$ ,  $k \in R_+^n$ <sup>5</sup>; **monômio**
- Um **posinômio** é algo da forma  $f(x) = \sum g_i(x)$ , em que cada  $g_i$  é um monômio (em particular, monômios são posinômios). **posinômio**

Note que esse problema não só é altamente não-linear, mas também é não-convexo. Nós podemos, no entanto, torná-lo convexo, com uma mudança de coordenadas apropriada. Note que, se  $f$  é um posinômio em  $x$ ,  $\log(f(e^x))$  é convexo e, se  $g$  é um monômio em  $x$ ,  $\log(g(e^x))$  é, não só convexo, mas também afim. Realizando essa mudança de variáveis, nosso problema de otimização pode ser expresso como

---

<sup>4</sup>Diferente do que se pode supor, o nome “programação geométrica” não é devido às suas propriedades geométricas no geral, mas sim à desigualdade geométrico-aritmética, que foi muito usada em sua análise.

<sup>5</sup>Aqui, usamos a convenção de que, se  $x \in R^n$  e  $\alpha \in R^n$ ,  $x^\alpha := \prod x_i^{\alpha_i}$ .

$$\begin{aligned}
& \text{minimize } \log \sum e^{\alpha'_{0k}x + b_{0k}} \\
& \text{tal que } \log \sum e^{\alpha'_{ik} + b_{ik}} \leq 0 \\
& x \in R_+^n.
\end{aligned}$$

Nessa nova formulação, estamos tomando  $\alpha$  como a matriz de vetores que geram as potências dos monômios e posinômios. Note que, fazendo essa mudança de variáveis ( $v = \log(x)$ ), monômios se tornam funções afim e, posinômios, funções convexas.

É importante notar que monômios e posinômios são um conjunto fechado sob as operações de divisão por monômios, então desigualdades do tipo  $f_1(x) = f_2(x)$ , em que  $f_2$  é um monômio e  $f_1$  é um posinômio poderiam ser lidadas fazendo  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ . Ademais, igualdades como  $g(x) = 1$ , se  $g$  é um monômio, podem ser lidadas fazendo  $g(x) \leq 1$  e  $\frac{1}{g(x)} \leq 1$ <sup>6</sup>. A restrição de que  $k$  precisa ser positivo acaba sendo frequentemente satisfeita sem esforços mas, quando esse não é o caso, é preciso se usar outro maquinário que não o da programação geométrica. Em particular, programação signomial, que faz uso de uma estrutura parecida com a da geométrica, resolve esse caso (e mais eficiente do que um método de programação linear genérico).

---

<sup>6</sup>Em particular, isso mostra que um programa geométrico qualquer pode ser expresso com desigualdades do tipo  $f_i(x) \leq 1$ , o que é a entrada que alguns *solvers* requerem por padrão.

## Leituras adicionais

- [1] Hoburg, W. Warren, “Aircraft Design Optimization as a Geometric Program” 2013.