编/lzb

2019-2021 年第二学期人工智能学院期中考试试卷

高等代数

1. 求实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$的规范形，并求所作的可逆非退化线性退还。

2. 设$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}3\\9\\7\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}2\\7\\6\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\5\\5\end{bmatrix}$，令$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\},\mathcal{P}=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\}$。

1) 求$\boldsymbol{b}_1$在基$\mathcal{P}$下的坐标$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{P}}$。
2) 证明$\mathcal{B},\mathcal{P}$都是$\mathbb{R}^3$上同一子空间H的基，并求由基$\mathcal{B}$到基$\mathcal{P}$的过渡矩阵M。

3. 若$\{\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}\}$线性无关，证明$\{\mathrm{u}+2\mathrm{v},\mathrm{v}-3\mathrm{w},\mathrm{u}-\mathrm{v}+\mathrm{w}\}$线性无关。

4. 设$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-bx_3)^2+(x_3-cx_1)^2$，其中$abc\neq 1$。证明：$f(x_1,x_2,x_3)$是正定二次型。

5. 若$\begin{bmatrix}\alpha & 2\\0 & 6-\alpha\end{bmatrix}$属于以下空间，求 α 的值。

$$\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}-1 & \alpha\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha & -1\\0 & \alpha^2-\alpha-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha+1 & -3\\0 & \alpha^2-4\end{bmatrix}\}$$

6. 记$\boldsymbol{C}[x]_n$为次数小于n的复系数多项式全体再添上0所成的线性空间。

1) 证明：$P_i(x)=(x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)(i=1,2,\dots,n)$是$\boldsymbol{C}[x]_n$的一组基，其中$a_1,a_2,\dots,a_n$是互不相同的数；
2) 若$a_1,a_2,\dots,a_n$全是n次单位根（即满足$x^n=1$）求基$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$到$P_1(x),P_2(x),\dots,P_n(x)$的过渡矩阵。