Information about the exam:

- For each question, write only your answer in the box on the exam sheet and turn in the exam sheet. Answers elsewhere may not be graded. Correct answers get full credit. Incorrect answers might get partial credit if the work is shown clearly on attached pages.
- No calculators are allowed.
- When explaining your answers please write complete, logical sentences. Please write in English since it is the language of the textbook and this course offering.
- We provide Swedish translations of questions to help you. If there is any discrepancy between the English and the Swedish, then use the English one.
- The exam is worth 60 points. To pass the exam, you need at least 31 points.

Final Exam questions

1. (6 points) Given the vectors $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, and $\boldsymbol{u_3}$ below that form a basis for R^3, create an orthonormal basis and write down the vectors in the box.
(6 poäng) Skapa en ortonormal bas med hjälp av vektorerna $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, och $\boldsymbol{u_3}$ nedan som utgör en bas för R^3. Skriv ner vektorerna i den ortonormala basen i rutan.

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. (6 points) Use the matrix P below for the next questions.
(6 poäng) Använd matrisen P nedan för dessa frågor.

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

(3 points) What is the largest eigenvalue of P?
(3 poäng) Vad är det största egenvärdet för P?

(3 points) What is the corresponding eigenvector? Hint: the eigenvector is the steady state.
(3 poäng) Vad är tillhörande egenvektor? Ledtråd: Egenvektorn är densamma som vektorn som beskriver det stabila tillståndet.

3. (6 points) Given the three data points (x_1,y_1), (x_2,y_2), and (x_3,y_3), we want to fit the polynomial $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. We can solve this problem by writing the matrix equation Q **z**=**h** where Q is a matrix and **z** and **h** are vectors.
*(6 poäng) Givet tre punkter (x_1,y_1), (x_2,y_2), och (x_3,y_3), vill vi göra en polynomanpassning med polynomet $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Problemet kan lösas med hjälp av matrisekvationen Q **z**=**h** där Q är en matris och **z** och **h** är vektorer.*

(2 points) Write down Q.
(2 poäng) Skriv ner Q.

(2 points) Write down **h**.
*(2 poäng) Skriv ner **h**.*

(2 points) Write down **z**.
*(2 poäng) Skriv ner **z**.*

4. (6 points) Use the Z matrix below for the next questions.
(6 poäng) Använd matrisen Z nedan för dessa frågor.

$$Z = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3 points) What is the inverse of Z?
(3 poäng) Vad är inversen av Z?

(3 points) Give a basis for vectors that are unchanged by multiplication with Z. Explain how you got your answer.
(3 poäng) Ange en bas för de vektorer som är oförändrade vid multiplikation med Z. Förklara hur du kom fram till ditt svar.

5. (6 points) Consider an n by n matrix A.
(6 poäng) Antag en nxn-matris A.

(3 points) What space is the orthogonal complement of the null space of A^T?
(3 poäng) Vilket rum är det ortogonala komplementet till nollrummet av A^T?

(3 points) Name all spaces with the same dimension as the column space of A^T.
(3 poäng) Ange alla rum med samma dimension som kolumnrummet av A^T.

6. (6 points) Let $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_1$, let $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, and let $\boldsymbol{p} = k(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})$. Note: $\times$ is the cross product and k is a scalar. Let $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}\}$
(6 poäng) Låt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_1$, låt $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, och låt $\boldsymbol{p} = k(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})$. Note: $\times$. Notera: $\times$ är en kryssprodukt och k är en skalär. Låt $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}\}$

(2 points) List all pairs of vectors in S (if any) that must be equal/equivalent.
(2 poäng) Lista de par av vektorer i S (om några) för vilka likhet gäller.

(2 points) List all pairs of vectors in S (if any) that must be parallel (or antiparallel)?
(2 poäng) Lista alla par av vektorer i S (om några) som måste vara parallella?

(2 points) List all pairs of vectors in S (if any) must be orthogonal?
(2 poäng) Lista alla par av vektorer i S (om några) som måste vara ortogonala?

7. (6 points) The next two problems require you to produce elementary matrices.
(6 poäng) I följande två deluppgifter måste du skapa elementära matriser.

   (3 points) Give an example of an elementary matrix E such that $E^3=E$ but $E \neq E^2$
   (3 poäng) Ge ett exempel på en elementär matris E sådan att $E^3=E$ men $E \neq E^2$

   (3 points) If A is a square matrix, give an example of an elementary matrix E such that det(EA)=det(A) and E≠I.
   (3 poäng) Om A är en kvadratisk matris, ge ett exempel på en elementär matris E sådan att det(EA)=det(A) och E≠I.

8. (6 points) The next two questions concern a 3 by 3 matrix A with two different eigenvectors $\mathbf{v_1}$ and $\mathbf{v_2}$.
(6 poäng) Följande två deluppgifter handlar om en 3x3-matris A med två olika egenvektorer $\mathbf{v_1}$ and $\mathbf{v_2}$.

   (3 points) What must be true if $k_1 \mathbf{v_1} + k_2 \mathbf{v_2}$ is also an eigenvector? Explain your answer to receive full points.
   (3 poäng) Vad måste gälla för att $k_1 \mathbf{v_1} + k_2 \mathbf{v_2}$ också ska vara en egenvektor? Förklara ditt svar för att få full poäng.

   (3 points) Based on the first part of this question, what is the maximum number of complex eigenvalues possible in this system? Explain your answer to receive full points.
   (3 poäng) Baserat på första delen av frågan, vad är det maximala antalet komplexa egenvärden i detta system? Förklara ditt svar för att få full poäng.

9. (6 points) Use the matrix A below for the next questions.
(6 poäng) Använd matrisen A nedan för dessa frågor.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(3 points) What are the eigenvalues of A?
(3 poäng) Vilka är egenvärdena för A?

(3 points) What are the corresponding eigenvectors for the eigenvalues? Write them in the same order as you did for the eigenvalues.
(3 poäng) Vad är tillhörande egenvektorer till egenvärdena? Skriv dem i samma ordning som egenvärdena.

10. (6 points) The next few questions concern general vector spaces.
(6 poäng) Följande delfrågor handlar om vad som gäller generellt för vektorrum.

(2 points) What two vector operations must be defined on a vector space?
(2 poäng) Vilka två vektoroperationer måste vara definierade för ett vektorrum?

(2 points) Give an example of an axiom that must be satisfied by vectors on a vector space.
(2 poäng) Ge ett exempel på ett axiom som vektorerna i ett vektorrum måste uppfylla.

(2 points) What two conditions must be met to show that W is a subspace of V?
(2 poäng) Vilka två villkor måste vara uppfyllda för att visa att W är ett underrum till V?