Beta function:

$$\beta(a,b) = \int_0^1 p^{a-1} \cdot (1-p)^{b-1}\, dp = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

為了 $\int_0^1 p(\theta|a,b)\,d\theta = 1$

Beta distribution:

$$P(\theta|a,b) = \theta^{a-1}\cdot(1-\theta)^{b-1}\cdot \boxed{\frac{1}{\beta(a,b)}}$$

與 θ 無關.

proof:

$$\text{Posterior} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Prior}}{\text{marginal}}$$

m 是該次試驗成功次數.

a, b 是 prior 的成功、失敗 (在這之前成功、失敗次數幾次)

$$= \frac{\cancel{\binom{N}{m}} p^m (1-p)^{N-m}\cdot p^{a-1}\cdot(1-p)^{b-1}\cdot \cancel{\frac{1}{\beta(a,b)}}}{\int_0^1 \cancel{\binom{N}{m}}\, \theta^m\cdot(1-\theta)^{N-m}\cdot\theta^{a-1}\cdot(1-\theta)^{b-1}\cdot\cancel{\frac{1}{\beta(a,b)}}\, d\theta}$$

p 是已發生的機率, θ 是所有可能發生的 p

$$= \frac{p^{m+a-1}\cdot(1-p)^{N-m+b-1}}{\underbrace{\int_0^1 \theta^{m+a-1}\cdot(1-\theta)^{N-m+b-1}\, d\theta}_{=\beta(m+a,\ N-m+b)}}$$

marginal 為所有 $\theta = p'$ 的 posterior 的加總

$$= p^{m+a-1}\cdot(1-p)^{N-m+b-1}\cdot\frac{1}{\beta(m+a,\ N-m+b)}$$

$$= \text{Beta}(p\,|\,m+a,\ N-m+b)$$

∴ Posterior follows Beta distribution.

⇒ Easy to get Posterior from prior. a (+m)

b (+ N−m)

⇒ Online learning (use prev Posterior as curr. prior)