實數的完備性

楊維哲

實數的完備性在教學上是有些麻煩， 這是相當「概念」的東西； 今天講這個題目是因為這裡面有些要注意的小地方， 提出來供大家參考。在小時候我們學數系都從數手指頭開始， 這就是自然數系，在自然數系 **N** 之後，有正有理數系（分數）， 然後推廣到負數，因此有了整數全體，從整數再推廣就是所有的有理數， 這要如何介紹呢？一開始先有自然數，然後有分數，分數就是因為除不盡而產生的， 也可說是為了要解如 $5x=3$ 的方程式而產生， 負數的出現是因為要解如 $x+7=$ 的方程式，亦即是要作 2-7=-5 的運算，因為要使運算成為可能就必須慢慢地把數系擴展， 不擴展就沒有辦法，這是發展整個數系的一個動機。 在運算上，從加減乘除一直做到有理數就完備了， 因為加減乘除在有理數中都可以自由運算下去。

再下去的說法，大家都曉得。 「為什麼會出現 **R** 是因為 $x^2=2$ 這個方程式在有理數系中沒有解，可見有理數系是不夠用的，所以出現了無理數」； 當然也因為 x^2+1 在實數系中不夠解，所以出現了 i ，因此我們可以擴展到複數系。 在從 **N** 擴展到有理數系 **Q** 是為了要使四則運算不受限制，解方程式是一個很重要的主題。 但由 **Q** 再擴展下去是否還是為了解方程式的理由？

我先強調這一點：

無理數的出現，不只是為了代數上的動機，其實在數學上還有其他種種理由配合起來的。

在初中，你可能用純粹代數的理由來擴展數系， 到了高中就不是了！到了高中，擴大數學的題材，研究種種的函數， 如三角函數，指數、對數函數……等， 這是一個主題：但在高中，還有一個重要的主題，即解析幾何， 我的意思不是項武義、黃武雄的向量 (Vector) 幾何，這不太合乎原來解析幾何的意思。 真正的解析幾何是笛卡爾與費馬所發明的座標幾何： 用座標的方法來做幾何問題，所有幾何問題都用座標來解。 他們這個辦法與今天所談的題目有密切的關係，它是數與圖形的配合， 就是代數與幾何結合在一起。在平面解析幾何中用兩個數 (x,y) 來表一點， 立體解析幾何用三個數 (x,y,z) 來代表一點， 將來可以推廣到 n 維空間，但最基本的還是在一維空間的圖形， 即一直線上的座標化，因為兩維、三維……均可類推， 這一維空間的情形牽涉很廣，如測量問題，即幾何與代數的聯繫， 這非常重要，它與實數的完備性有密切的關係， 在數學史上量長度與座標化是在直線上取 0 為原點， 1 為單位長，我們就可以在直線上點出 2、3……還有「幾分之幾」。 直線開始座標化，點與數一一對應起來， 這個理論一直到費馬與笛卡爾時才真正用上去，開始發揮起來， 才大規模地建立解析幾何，古時候是沒有解析幾何的。 可是在古時候，座標化的概念是有一些，但不明確。 主要是在測量幾何的度量問題，我們用尺，有刻度，量多少就是多少， 但尺的刻度是怎麼來的？這就是度量的理論， 原則上這是用比較的方法，剛開始，古時候的人，祇會用尺做單位， 一尺一尺去量，這就是說整數都可以量，但是如果「比 7 尺多，比 8 尺少」 他們就不會量了，但慢慢的他們就知道刻度，用幾尺幾寸慢慢的刻， 這是比例的關係，用作平行線的方法來刻，這與平面幾

何有密切的關係， 希臘人都很清楚，所以有相似形的概念來作比較。當單位取定後， 所有有理數都可以表達出來，尺寸都是十進位， 但也可以用 12 進位，如 1 英尺 =12 英寸或其他進位， 用這個辦法，大致來說數與點的對應可做到一個程度。

這裡順便提到希臘幾何作圖的三大難題： 倍立方體（作一立方體使體積為原來的兩倍）， 方圓問題（作一正方形使其面積等於一圓之面積）， 一般角三等分。希臘人用沒有刻度的直尺和圓規， 以有限次的步驟去刻出有理數所對應的點（有理點），因此使用規矩， 藉著比例、相似的概念，就可以作加減乘除的四則問題。 在直線上所刻劃的有理點與有理點之間還有密密麻麻的有理點， 這就是有理數的稠密性；但現在還有一個問題， 就是在直線上除了能刻劃的有理點之外是否還有其他的點存在？ （這問題很抽象，也不很實在，因為物理上的點都有寬度！）， 不過，有理點並未填滿數線,也就是說：所有有理點並不能構成直線， 像剛剛提到的 $\sqrt{2}$ ， 我們可看成：有一個數 x 是正的，且滿足 $x^2=2$， 這 $\sqrt{2}$ 希臘人都知道它不是正有理數， 理論上這是一個無理點，但它是否存在，當時是有疑問的。 這一直到畢達哥拉斯發現了畢氏定理時， 才確定了定了無理數的存在。實際上用圓規直尺就可以用來開方， 因此從自然數出發，用直尺圓規，可以作出很多的數來， 這些數都叫做規矩數 (constructible number)。

古希臘的三個難題：「倍立方體」本質上是開立方，在代數的眼光看來是解 $x^3=2$;方圓問題在代數上是解 $\pi r^2 = a^2$ ， 本質上是討論 $\sqrt{\pi}$ ，π 在一世紀之前已被證明是一個超越數； 「一般角之三等分」本質上是解一元三次方程式，將所予角看成 3θ， 解 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin\theta^3$ ， 在代數上等於解 $3x-4x^3=a$ 我們可以用卡丹 (Cardano) 公式解出來，本質上是要開立方，我們可以發現這個問題所解出來的數， 是用規矩所作不出來的！這就是說規矩數在數線上並不完備。

前面說過：「從小學到初中；都是用代數的眼光，為了解方程式才擴展數系」， 但是由 **Q** 擴展到 **R**；如果說是為了解 $x^2=2$ 這個理由是相當牽強的。且讓我們說明如下：

設 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0$ 為一有理係數方程式，我們可以用通分的辦法使它變為整係數方程式， 整係數方程式的根叫做代數數 (Algebraic number)， 用 **A** 表代數數全體，如果以代數數作係數的方程式的根， 有不在 **A** 中的，則 **A** 必須擴展至 $\mathbf{A_1}$， 以 $\mathbf{A_1}$ 之數為係數作方程式，如仍有根不在 $\mathbf{A_1}$ 中， 則必須再擴展至 $\mathbf{A_2}$，如此下去將得： **A** 真包含於 $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_1}$ 真包含於 $\mathbf{A_2}$,⋯，可是事實上代數數系 **A** 就已完備了， 即： $\mathbf{A} = \mathbf{A_1}$，換句話說，代數係數方程式的根都是代數數， 這就是代數數的完備性。所以，如果說是為了代數的理由而發展數系， 應該是由 **Q** 擴展到 **A**；但事實上

$i \in \mathbf{A}$ 而 $i \notin \mathbf{R}$ ； $\pi \in \mathbf{R}$ 而 $\pi \notin \mathbf{A}$ ；所以 $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{R}$ ， 且 $\mathbf{R} \not\subset \mathbf{A}$ ，因此，認為 **Q** 到 **R** 的擴張是為了代數的理由的說法並不恰當。

由有理數系擴至實數系這是為分析的理由！ 在高深的數學中，說明完備性有很多的辦法，最主要的一種說法，最合乎直覺的，就是用解析幾何的數與點的對應，將所有的有理點點在數線上，此外還有很多的點叫無理點，還要將它們加入，這樣才會得到 **R**，也就是說， 有理點在數線上雖然密密麻麻，但不構成全部的數線， 必須把「漏洞」補起來，才會得到 **R** 進一步的數學。 還有別的種種說法，如狄悌鏗分割 (Dedekind Cut)， 它把有理數，分成兩個集 *A*,*B*， $A \cup B = \mathbf{Q}$ ， $A \neq \emptyset$ ， $B \neq \emptyset$ ，且 $A \cap B = \emptyset$ ，使 $x \in A$ ， $y \in B \Longrightarrow x < y$ 我們可以想像有以下四種可能：

(1) *A* 中有最大（元素），*B* 中有最小（元素）
(2) *A* 中有最大（元素），*B* 中沒有最小（元素）
(3) *A* 中沒有最大（元素），*B* 中有最小（元素）
(4) *A* 中沒有最大（元素），*B* 中沒有最小（元素）

在有理數中，情形(1)是不會發生的，其他三種均有存在之可能。 如果 cut（分割）出(4)的情形，即 *A* 中沒有最大， *B* 中沒有最小，在 Dedekind 看來這就是一個缺陷 (gap)， 不完備性就是指這一點，Dedekind 理論就是由此出發， 分割到有缺陷，就補上一點，如此下去將所有缺陷都補起來， 這就得到了 **R**，這麼一來，可從 **Q** 擴展至 **R**，**R** 本身就完備了， 這是實數系的完備性，也就是說我們對實數系作分割， 一定沒有剛剛的缺陷，也就是「*A* 中沒有最大，*B* 中沒有最小」 這種情形是不存在的。「*A* 中有最大，*B* 中沒有最小」， 「*A* 中沒有最大，*B* 中有最小」，兩者必居其一。

當然實數系的完備性還有種種說法； 假設 $<x_n>$ 是一個遞增的有理數列， $x_n \leq x_{n+1}$ 。 而且有上界，那麼 $<x_n>$ 一定有極限， 這個說法與 Dedekind Cut 有密切的關連， 也就是這個極限如果不是有理數，就要補上去這一點。 我可以介紹一本我寫的《何謂實數》（商務出版）， 這裏面對實數的完備性有各種各樣說法，我們學實數的完備性是學微積分的基礎。 譬如說在討論函數性質時，最重要的就是函數是否連續， 連續性的意思是：若 $x_n \longrightarrow \alpha$ 則 $f(x_n) \longrightarrow f(\alpha)$ 。 實數的完備性使函數的連續性更有意義！ 有一個性質「若 *f* 在 [*a*,*b*] 上連續， 則上一定有最大值與最小值」，要證明這個性質， 一定要用到實數的完備性。如果函數 $f(x) = (x - \sqrt[3]{2})^2$ 的自變數僅限於有理數中， 照理 *f* 的最小值為 0，也就是必須有一個無理數 $c = \sqrt[3]{3}$ 的存在， 但在有理數系是沒有完備性的，所以 *f* 是沒有最小值的。