

# M = ?

撰文 賀培銘

發現弦論之間許多不同的對偶性，以及弦論和十一維超重力理論之間的對偶性之後，弦論學界相信：所有的超弦理論被統一在一個想像的 M 理論裡。M 理論有許多神奇之處，並且它之於弦論有其特別意義，但是我們其實並不知道什麼是 M 理論，為什麼我們相信這個 M 理論存在？希望這篇文章可以淺介關於 M 理論的一些有趣的想法。

## 1 M = M ?

量子力學和廣義相對論是近代物理的兩大支柱，但是要結合兩者、構成一個自洽的（self-consistent）量子重力理論卻極其困難。讓我們問一個看似不切實際的問題：既然量子效應和重力作用這麼難以互相包容，量子重力理論是否可能是唯一的？如果真是這樣，這個唯一的量子重力理論就幾乎必然是正確的。<sup>1</sup> 弦論是目前唯一可以用微擾的方法（perturbative approach）處理量子重力作用的理論，也是唯一可以同時包含量子重力及其他規範場作用的理論。那麼，弦論是不是唯一的呢？弦論雖然有很多個，例如：玻色弦、non-critical string 等，但是弦論中，只有具備超對稱（supersymmetry）的弦論（超弦理論 -superstring theory）才有穩定的閔可夫斯基（Minkowski）空間的解。所以我們可以把問題改簡單一點：有沒有可能只有一個理論能包含量子重力作用、又同時包含其他規範對稱、並包含費米子（fermion）、而且有穩定的平空間（flat space）的解？<sup>2</sup> 這樣一來我們可以暫時忽略其他的弦論，先考慮超弦理論。目前已知的超弦理論有五種，分別被稱作 I 型、IIA 型、IIB 型、heterotic  $SO(32)$ 、及 heterotic  $E_8 \times E_8$  超弦；雖然不是只有一種，但如果可以說：“正確的理論必然是這五種超弦理論之一”，也實在是夠酷的了。然而，隨著我們越來越瞭解弦論，就感到它越來越強：我們現在相信這五種超弦理論其實是等價的，也就是說，它們都是同一個理論的不同描述！

雖然每個超弦理論都相當於一個十維時空中的量子場論，稍微仔細檢視一下，就會發現這些理論非

常不同；因為每個理論包含的量子場的種類都不完全相同，甚至規範對稱性也不同。更令人驚奇的是：這五種超弦理論，又和一個十一維時空的量子重力理論等價！雖然我們還不知道它的精確定義，只知道它是十一維超重力（supergravity）的量子化，在建立這些超弦理論間的等價關係時，這個十一維的理論扮演了非常關鍵的角色。

M 理論 [1] 這個名詞有兩個可能的意義。它可能代表這個十一維時空的量子重力理論，也可能指的是那個統一所有超弦理論和十一維量子重力理論的大理論。如果有一天我們可以完整的寫下十一維的量子重力理論，而它又同時可以包含所有超弦理論，M 理論的這兩個定義就沒有實質的差別了，這也是為什麼我們還沒有急著發明新名詞來區分這兩個用法的原因。但是我們現在也不能確定一定會這樣，所以底下當我們談“M 理論”時，要請讀者根據上下文自行判斷其含義。

可以想見，M 理論對弦論研究者來說是一個非常重要的問題，而它同時也是個非常具有挑戰性的問題。這篇文章的目的就是介紹關於 M 理論的一些想法和發展。

## 2 M = Membrane

首先，十一維時空對超對稱的重力作用來說是很特別的。數學上可以證明，如果假設只有一維時間，其餘維度只能是空間維度，則超對稱的重力理論只能存在於十一維或低於十一維的時空中。十一維古典超重力理論也是唯一的。這個理論裡的玻色子除了重力場之外，就只有一個規範場（gauge field），

	弦論	M 理論
基本元素張力	一維的弦 (F1) $T_s = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}$	二維薄膜 (M2) $T_{M2} = \frac{1}{(2\pi)^2\ell_p^3}$
孤獨子張力	Dp 膜, NS5 膜 $T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s \ell_s^{p+1}}, T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_s^2 \ell_s^6}$	M5 膜 $T_{M5} = \frac{1}{(2\pi)^5 \ell_p^6}$
時空中質量為零的玻色場 (massless bosons)	$g_{\mu\nu}$ (度規), $\phi$ (dilaton), $B_{\mu\nu}$ (電荷為基本弦、磁荷為 NS5 膜), 其他規範場 (因不同弦論而異)	$g_{\mu\nu}$ (度規), $C_{\mu\nu\lambda}$ (電荷為 M2 膜、磁荷為 M5 膜)

Table 1: 弦論和 M 理論基本性質對照表

通常用  $C_{\mu\nu\lambda}$  來代表。這個規範場  $C_{\mu\nu\lambda}$  和電磁位能  $A_\mu$  相似，但是  $A_\mu$  只有一個羅倫茲足標  $\mu$ ，而  $C_{\mu\nu\lambda}$  有三個反對稱的羅倫茲足標。<sup>3</sup> 這表示和  $C_{\mu\nu\lambda}$  交互作用的電荷載子應該是一個二維的薄膜 (membrane)。(這裡所謂的“電荷”不是指平常我們所說的電荷，而是把這個觀念推廣到其他規範場以後的廣義電荷。)

雖然我們不清楚十一維時空的超對稱量子重力理論的精確內容，但是我們知道，對能量很低的大尺度狀態而言，古典的超對稱重力理論應該可以當作是一個好的近似描述 [2]。根據古典的超重力理論的研究，M 理論中應該有兩類很重要的物體，分別是帶 C 場電荷的二維薄膜 [3]，和帶 C 場磁荷的五維薄膜 [4]。這兩種薄膜分別叫做 M2 膜和 M5 膜。其中 M2 膜是類比於基本粒子的基本二維薄膜，而 M5 膜的解是所謂的孤獨子 (soliton) 的解。在 Table1 中我們列出弦論和 M 理論的基本性質以供讀者對照。

既然 M2 膜應該是 M 理論裡的基本組成元素，就像弦是弦論裡的基本組成元素，很自然的想法是摹仿過去建構弦論的方式去建立 M 理論。過去建構弦論的微擾理論的方法是先研究一根弦上的量子場論（這是一個二維時空裡的保角場論 (conformal eld theory)），然後我們可以將弦的每一個振動態看成時空裡的一種粒子，並透過弦上的二維場論計算不同粒子之間的散射機率。很久以前，單一的 M2 膜的作用量就是已知的。但是當我們嘗試如法炮製 M 理論時，發現 M2 膜上的三維時空場論的性質和

弦上的二維場論有本質上的差異，不可能以同樣的方法定義 M 理論。（事實上，M 理論裡沒有耦合常數，所以本來就不太可能定義類似弦論的微擾理論。）因為同樣的原因，建構弦論的成功經驗無法被直接推廣到其他的更高維度的物體上。

總之，目前我們對 M 理論的瞭解，絕大部份來自於十一維的古典超重力理論，以及接下來要談的 M 理論和弦論間的等價關係。

### 3 弦論的對偶性

在介紹更多 M 理論的內容之前，最重要的是先瞭解『對偶』的概念。當我們說有兩個或多個理論是『等價』時，究竟是甚麼意思？當我們說 A 和 B 兩個理論是等價的 (equivalent)，我們的意思是：A 和 B 兩個理論對任何物理實驗的結果都會有相同的預測。這並不表示同一個物理狀態在 A 和 B 兩個理論中有相同的描述（請見圖一）。A 和 B 兩個理論像是兩種不同的語言，雖然描述同一個物理事件的方式不同，但是可以用來描述同一個宇宙。原則上我們應該可以編一本字典，列出所有物理狀態在 A 和 B 理論中的名詞對照。

兩個理論的等價關係，也被叫做對偶性 (duality)。所以 A 和 B 理論是等價時，A 是 B 的對偶理論，B 也是 A 的對偶理論。弦論之間有很多不同類型的對偶關係，這些關係形成的網絡也就是 M 理論的基礎，所以我們先介紹兩種比較有代表性的弦論對偶性，其他的幾種對偶性不必在此一一贅述 [5]。

3. 1 T- 對偶性

如果有一個空間方向形成一個圓圈（相當於讓所有的場在這個方向上滿足週期性的邊界條件），<sup>4</sup>那麼 IIA 及 IIB 兩種超弦理論便具有對偶關係，叫做 T- 對偶性（T-duality）[6]。<sup>5</sup>更清楚的說，給定一個 IIA 或 IIB 理論時，需要指明它的”弦耦合常數”  $g_s$ （string coupling constant，也就是弦之間交互作用的強度）、弦的張力  $T_s$ （string tension）、以及上面提到的圓圈的半徑  $R$ 。當然也可能還有其他參數，例如其他空間方向的幾何性質、或各種場的背景強度等。

弦的張力大小對應到弦的特徵長度  $\ell_s$ ：

$$T_s = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}.$$
 (1)

我們可以用  $\ell_s$  代替  $T_s$  這個參數。下面我們用足標  $A$  和  $B$  來區分 IIA 和 IIB 理論中的物理量。如果

$$g_B = g_A \frac{\ell_s}{R_A}, \quad R_B = \frac{\ell_s^2}{R_A},$$
 (2)

則兩個超弦理論是等價的

IIA ( $g_A, \ell_s, R_A$ )  $\equiv$  IIB ( $g_B, \ell_s, R_B$ ). (3)  
根據 (2)，IIA 理論中的半徑  $R_A$  很大時，IIB 理論中的半徑  $R_B$  就很小。所以當我們用不同的理論描述空間的大小時，答案可以不同。這並不違反 IIA 和 IIB 兩種超弦理論間的等價關係，因為空間的幾何性質也需要靠物理實驗來決定， $R_A \neq R_B$  只是告訴我們兩個理論中測量空間半徑大小的實驗不同而已。比如說我們可以測量一根繞在圓圈上  $n$  圈的弦的能量

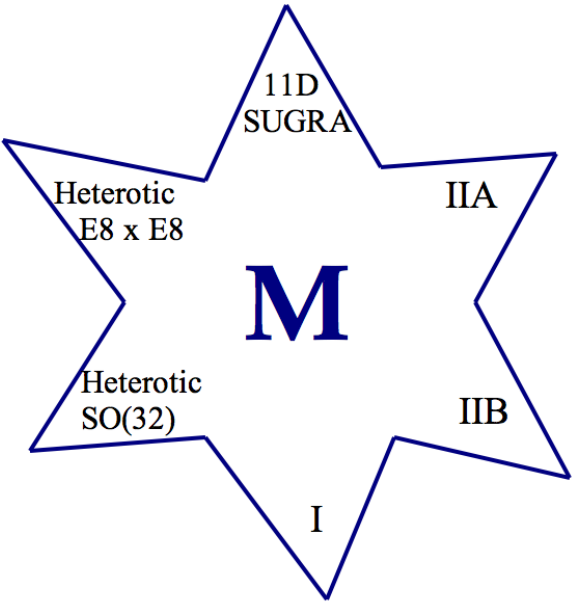


Figure 1: M 理論的參數空間

來判斷半徑大小。在 IIA 超弦理論中，如果弦上沒有任何振動，

能量 = 張力弦的長度 =  $T_s \times 2\pi R_A \times n = \frac{nR_A}{\ell_s^2}.$  (4)

但是 IIA 理論中繞在圓圈上的弦對應到的是 IIB 理論中沿著圓圈方向跑的弦。根據量子力學，圓圈的方向因為有週期性條件，動量只能是半徑倒數的整數倍。所以 IIB 理論中，動量量子數為  $n$  的弦，如果沒有其它多餘的振動，

能量 = 動量 =  $\frac{n}{R_B}.$  (5)

根據兩個理論的參數關係 (2)，這兩個能量的值 (4)

IIA 理論	IIB 理論
在圓圈方向上的動量為 $\frac{n}{R_A}$	在圓圈上繞 $n$ 圈的弦質量為 $2\pi n R_B T_s$
在圓圈上繞 $n$ 圈的弦質量為 $2\pi n R_A T_s$	在圓圈方向上的動量為 $\frac{n}{R_B}$
Dp 膜繞在圓圈上時，在其他方向上的等效張力為 $2\pi R_A T_{Dp}^{(A)} = \frac{2\pi R_A}{(2\pi)^p g_A \ell_s^{p+1}}$	沒有繞在圓圈上的 D(p - 1) 膜的張力為 $T_{D(p-1)}^{(B)} = \frac{1}{(2\pi)^{p-1} g_B \ell_s^p}$
沒有繞在圓圈上的 D(p - 1) 膜的張力為 $T_{D(p-1)}^{(A)} = \frac{1}{(2\pi)^{p-1} g_A \ell_s^p}$	Dp 膜繞在圓圈上時，在其他方向上的等效張力為 $2\pi R_A T_{Dp}^{(B)} = \frac{2\pi R_B}{(2\pi)^p g_B \ell_s^{p+1}}$

Table 2: T- 對偶性的一些簡單的檢驗



和 (5) 剛好相等！所以當兩個物理學家分別根據兩個理論解釋同一個測量能量的實驗時，可以因為他們對同一個物理狀態的描述不同（繞在圓圈上的弦／沿著圓圈的方向跑的弦）而對空間半徑的大小有不同的結論。重點是：當他們用各自的理論解釋任何一個實驗時，雖然對於實驗的內容會有不同的解釋，但是對實驗結果的數值（例如被觀察的物理狀態的能量大小）會有完全一樣的預測。

有些人可能還是會想問：當我們“看到”空間中的這個具有週期性的維度時，到底會看到多大的半徑。事實上，我們的真實宇宙裡，也可能有一個空間方向是一個非常大的圓圈，只是圓圈的半徑太大，以至於還沒有被觀察到。萬一有一天我們發現的確有一個方向具有週期性的邊界條件，我們必須解釋：如果這個描述（有一個非常大的圓圈）對應到 IIA 理論，我們應該也可以選擇用 IIB 理論來描述同一個宇宙，而在 IIB 的描述中，這個圓圈的半徑則是非常非常小的，為什麼我們看到的是一個非常大的圓圈、而不是感受到這個很小很小的圓圈？對完全客觀的數學描述來說，這兩種看法毫無疑問的是完全等價的，<sup>6</sup> 所以這其實是個感官直覺的問題。雖然物理系統的相空間（phase space）本身的幾何性質並沒有偏好“位置”或“動量”，但是相互作用的形式卻通常會將兩者區分開來。直覺上比較容易理解周遭物理世界中自由度的方式是利用相互作用的“局域性”（locality），以局域性高的自由度作為物理世界的基本單元。另一方面，通常是能量較低的狀態比較容易被觀察到，所以最可能的

結果是哪個理論裡圓圈的半徑較大，人的直覺就會和那個理論配合的比較好，因為在半徑大於  $\ell_s$  的理論裡，局域性高（local）的狀態（沿著圓圈跑的弦）比非局域（non-local）的狀態（繞在圓圈上的弦）的能量低。但這只是人的成見。如果  $R_A$  和  $R_B$  大小相近（都和  $\ell_s$  差不多大），人的直覺就不會有明顯的特殊偏好了。

### 3.2 S- 對偶性

熟悉古典電磁學的人知道，如果磁單極存在，電和磁之間有對偶關係：你可以交換電場和磁場、同時交換電荷和磁荷，而讓理論看起來和原來完全一樣。這叫做電磁對偶（electric-magnetic duality），這種情形是同一個理論（含有磁荷的馬克斯威古典電磁學）自己和自己對偶。另一方面，狄拉克（Dirac）發現：如果磁單極存在，量子力學的自恰性要求任何一個粒子的電荷（或磁荷）必須是某個基本電荷（或磁荷）的整數倍；用適當的單位表示時，基本電荷是基本磁荷的倒數。所以，一個基本電荷為  $e$  的電磁理論的對偶理論是一個基本電荷為  $1/e$  的電磁理論。因為基本電荷的大小決定了兩個帶電的基本粒子之間的交互作用強度，所以電磁對偶可以看成是一種“強弱對偶”（strong-weak duality）或簡稱 S- 對偶（S-duality）。意思是：交互作用很強的理論的對偶理論是交互作用很弱的理論。（當然，如果我們看的是磁荷之間的交互作用，誰有強的交互作用誰有弱的交互作用的看法就會反過來。）

有一些具有超對稱的規範理論（gauge theory）更

IIB 理論 1	IIB 理論 2
弦的張力為 $T_s^{(1)} = \frac{1}{2\pi\ell_1^2}$	D1 膜的張力為 $T_{D1}^{(2)} = \frac{1}{2\pi g_2\ell_2^2}$
D1 膜的張力為 $T_{D1}^{(1)} = \frac{1}{2\pi g_1\ell_1^2}$	弦的張力為 $T_s^{(2)} = \frac{1}{2\pi\ell_2^2}$
D3 膜的張力為 $T_{D3}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^3 g_1\ell_1^4}$	D3 膜的張力為 $T_{D3}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^3 g_2\ell_2^4}$
NS5 膜的張力為 $T_{NS5}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_1^2\ell_1^6}$	D5 膜的張力為 $T_{D5}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_2^2\ell_2^6}$
D5 膜的張力為 $T_{D5}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_1\ell_1^6}$	NS5 膜的張力為 $T_{NS5}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_2^2\ell_2^6}$

Table 3: S- 對偶性的一些簡單的檢驗

M 理論	IIA 理論
在圓圈方向上的動量為 $\frac{n}{R}$	$n$ 個 D0 膜的質量為 $nT_{D0}$
沒有繞在圓圈上的 M2 張力為 $T_{M2}$	D2 膜張力為 $T_{D2}$
M2 繞在圓圈上時，在其他方向上的等效張力為 $2\pi RT_{M2}$	基本弦的張力為 $T_s$
沒有繞在圓圈上的 M5 張力為 $T_{M5}$	NS5 膜張力為 $T_{NS5}$
M5 繞在圓圈上時，在其他方向上的等效張力為 $2\pi RT_{M5}$	D4 膜的張力為 $T_{D4}$

Table 4: M 理論 / IIA 理論對偶性

神奇。這些理論裡所有的基本粒子都只有電荷而沒有磁荷，但是理論裡可以找到帶有磁荷的孤獨子（soliton）。（孤獨子指的是場方程的某些特殊解，從遠處看有一點像是一個粒子，但是從近處看其實是一坨（lump）東西。）這些理論裡，S-對偶的作用不但讓基本電荷 $e$ 變成原來的倒數 $e' = 1/e$ ，而且交換了基本粒子和帶磁荷的孤獨子。所以在具有S-對偶性的宇宙中，“哪些粒子是基本粒子”這樣的問題，並沒有唯一的正確答案。

IIB 超弦理論也有S-對偶性（見 Table3）。透過S-對偶性，如果兩個IIB理論的耦合常數分別是 $g_1$ 、 $g_2$ ，特徵長度分別是 $\ell_1$ 、 $\ell_2$ ，而

$$g_1 g_2 = 1, \quad g_1 \ell_1^4 = g_2 \ell_2^4, \quad (6)$$

則這兩個理論是等價的

$$\text{IIB}(g_1, \ell_1) \equiv \text{IIB}(g_2, \ell_2). \quad (7)$$

在S-對偶性的作用下，弦的耦合常數變成原來的倒數，而同時基本的弦和一維的D膜被交換了。

所以在IIB弦論描述的宇宙裡，“哪些狀態對應到基本的弦？”或“哪些東西是組成物質的最基本的單元？”這些問題都沒有唯一的正確答案。最後，弦論是否一定要叫做弦論，也不是那麼重要了。雖然弦論的研究最初由弦開始，最後我們看到的是一個自恰的系統，可以用很多不同的方式理解。

S-對偶性是一個很有用的對偶關係，因為物理系統的方程式常常很難解，最常用的對策是微擾理論（perturbation theory），也就是把一個很小的量一階一階地展開求近似的方法。通常這個很小的量是耦合常數，所以交互作用很弱的理論是比較好處理的。如果有S-對偶性，我們就可以透過它用微擾理論處理交互作用很強的理論。

## 4 M = Mother

接下來介紹M理論和IIA理論及IIB理論之間的對偶關係。M理論和其他的超弦理論也有不同的、較複雜的對偶關係，但是為了節省空間在此省略。希望這裡的說明可以給讀者一個具有代表性的圖像，讓你可以比較具體地想像M理論和弦論間的關係。

### 4.1 M = IIA

如果M理論的十一維時空中有一個空間方向是一個圓圈（所有的物理量滿足週期性邊界條件），這時M理論會和十維的IIA超弦理論等價。因為量子效應，M理論中多出來的一維空間的自由度可以理解為不連續的動量的自由度。這個和整數一一對應的動量在IIA理論中被解釋為D0膜的個數。在Table4中可以看到其他簡單的對應關係。表中同一列左右兩邊是同一個物理狀態在兩個理論中的不同描述，它們各對應一個數字，是這個狀態對能量的貢獻，所以左右兩邊的兩個數字必須相等。讀者可以要求其中兩列的左右數字相等，決定M理論的兩個參數 $\ell_p$ 、 $R$ （ $R$ 是圓圈的半徑）和IIA理論的參數 $\ell_s$ 、 $g_s$ 之間的關係，這個關係是

$$R = g_s \ell_s, \quad \ell_p^3 = g_s \ell_s^3, \quad (8)$$

然後你可以再根據這個參數關係檢查其他每一列的左右數字是否相等。你會發現這些計算完全支持M理論和IIA理論之間的等價關係。當然，除了這些簡單的計算之外，還有很多更精細更難用巧合解釋的對應關係。

### 4.2 M = IIB

如果M理論的十一維時空中有兩維空間都是圓

圈，半徑分別為  $R_1$ 、 $R_2$ ，那麼我們可以先透過第一個圓圈把 M 理論換成 IIA 理論，但是這時 IIA 理論的十維時空中還有一維空間是一個半徑為  $R_2$  的圓圈，所以我們還可以透過 T-對偶性把這個 IIA 理論換成 IIB 理論。有趣的是如果我們把第一個圓圈和第二個圓圈的角色互換，從 M 理論得到的 IIB 理論和之前的結果不同。兩種方法得到的 IIB 理論剛好差了一個 S-對偶性的轉換。反過來說，如果當初我們還不知道 IIB 理論的 S-對偶性時，就已經知道 M 理論和 IIA 理論的等價關係以及 T-對偶性，我們可以由此推出 IIB 理論的 S-對偶性。因此，從 M 理論的角度來說，S-對偶性的意義被化約成僅僅是交換兩個空間方向時物理定律不變！在這個例子中我們看到 M 理論展現其威力，在概念上將 S-對偶性幾何化了。

## 5 M = Moduli Space

為了要進一步澄清 M 理論的想法，我們需要在這裡說明一些專有名詞的慣用法和基本觀念。首先，定義一個理論時，通常需要指定一些參數的數值，例如各種交互作用的耦合常數值，各種粒子的質量大小等等。這些參數的數值不同時，這個理論的各種性質也跟著不同。因此，我們有時會把參數值不同的情形叫做不同的理論。

然而，這些參數值確定之後，我們還可以考慮同一個理論的不同“真空態”（vacuum state）。例如，如果一個場論的位能有不只一個極小值，任何一個讓位能取極值的靜止狀態，就是一個可能的真空態。更一般來說，我們也可以考慮隨時間變化的狀態。例如，在廣義相對論裡，每一個愛因斯坦方程式的解都可以叫做一個真空態。當一個真空態看起來不太像“真空”時，我們可以把它叫做一個“背景”（background）。同一個理論在不同背景之下可能看起來很不一樣，所以同一個理論在不同背景下的情形有時也被叫做不同的理論。如果把一個理論所有可能的背景的集合看成一個空間，我們可以用一些參數當作這個空間上的坐標，不同的參數值

對應到不同的背景，也就對應到不同的理論。

綜合以上關於參數的討論，對一個一般的場論來說，它同時需要兩種參數來指定一個理論。第一種是像耦合常數和質量等這些參數，是寫下這個場論的作用量（action）時所需要的、或是定義各種場的邊界條件時所需要的，這些參數常被叫做“自由參數”（free parameter）。第一類參數的數值確定之後，物理定律就被決定了。第二種參數則用於標記這些物理定律所決定的所有可能的背景。弦論和其它理論非常不同的一點，就是弦論中所有的第一類參數的自由度都被包含在第二類參數中，所以原則上我們可以完全忽略第一類參數（自由參數）。弦論中的所有參數，包含弦耦合常數、時空的幾何結構等，都可以解釋為第二類參數，也就是說，它們都可以表示成某些物理量的背景值。弦論的一個重要議題就是這個參數空間的各種性質。這個參數空間一般被稱作 moduli space。底下提到“參數空間”時，指的就是這一個抽象的空間。

根據 T-對偶性，IIA 和 IIB 兩種弦論的參數空間上的某些區域（空間的某個方向上被緊緻化的背景）有一對一的對應關係。所以我們可以把這兩個參數空間合而為一，變成一個較大的參數空間。同樣的，如果這兩種弦論和其他的弦論在某些特殊的背景下有對偶關係，我們又可以把其他的弦論的參數空間合併進來。因為在這裡我們沒有足夠的空間詳述，希望讀者可以直接接受最後的結論：所有的超弦理論的參數空間都合而為一，也和一個十一維的量子重力理論合一。這個完整的參數空間包含了所有不等價的超弦理論的集合。如果這個參數空間包含  $N$  個參數（modular parameter） $^7 (t_1, t_2, \dots, t_N)$ ，就表示每一組  $N$  個參數值對應到一個特定的理論；而對偶的（等價的）兩個理論則共用同一組參數值。也就是說，參數空間裡的每一個點都對應到一個不同的理論，而這些理論應該被視為同一個 M 理論在不同背景下的表現。

所以超弦理論是一個統一的理論，對“大部份”的背景來說，同時可以有一種以上的超弦理論描述



這個特定理論，但是沒有一個超弦理論是同時可以適用於整個參數空間的。我們把這整個參數空間上的所有的理論的合體叫做 M 理論，M 理論的概念包含兩個意義：一、弦論是一個統一（唯一）的理論；二、弦論不只是弦論，也是膜的理論。

## 6 M = Mystery

十幾年前，Witten 等幾位物理學家提出“M 理論”[1]的想法之後，M 理論的概念促進了我們對弦論的理解，但也讓我們更確定我們對弦論的了解有多麼不足。除了 T-對偶性之外，弦論本身幾乎無法提供任何有用的觀念以幫助我們理解這許多奇妙的對偶性為何存在、或是它背後的機制。M 理論是否應該有一個更基本更完整的描述，它具有一種新奇的對稱性，可以將所有的對偶性包含在內，使得弦論之間的對偶性在這個更偉大的架構內一目了然？

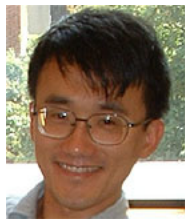
一般來說，我們通常需要使用適當的變數才能讓理論的對稱性清楚的表現出來。如果用了不適當的變數，對稱性的效果會以比較複雜的方式表現出來。粒子物理裡的“自發對稱破缺”（spontaneous symmetry breaking）就是一個很好的例子。如果我們用對稱破缺後的變數，雖然適合微擾理論的計算，卻不適於用來表現對稱性，而使得對稱性看起來好像被破壞了一樣。但是被隱藏起來的對稱性仍然會偷偷地保障各種計算的結果有許多好的性質。對一個不知道有這個對稱性的人來說，這些好的性質看起來像是不能解釋的巧合，但是巧合多到一種程度時，他會開始懷疑這些巧合背後是否有隱藏著的原因，等到他發現隱藏著的對稱性時便會恍然大悟。我們現在對於弦論的瞭解的狀態，就是面對著一大堆不知如何理解的巧合，因而等待著一個偉大的對稱性的發現。

在十年前曾有人提出一個 M 理論的量子模型，叫做 BFSS Matrix Model。（所以 M = Matrix？）據稱這個理論可以描述 M 理論的一個特殊背景。在光錐的一個方向上加上週期性邊界條件之後，如果你

所考慮的物理系統在這個方向上的動量量子數為 N，這個系統可以用規範對稱為  $U(N)$  的一維超對稱楊-密爾斯理論（super Yang-Mills theory）描述。但是這個模型有一些先天上的限制，不容易幫助我們理解 M 理論裡的根本問題。

另外一個比較新的進展是 2008 年前後，有人發現一種新的對稱性可以用來建構一個超對稱的場論，而這個叫做 BLG 的模型具有一切 M2 膜應該有的對稱性等基本性質，似乎可以用來描述一個以上的 M2 膜的系統 [7]。有趣的地方是這個理論裡的規範對稱性需要用到李代數（Lie algebra）的某種推廣：李三代數（Lie 3-algebra）。但是後來發現可以用的李三代數不多，並不能描述任意多個 M2 膜的系統。雖然如此，這個發展激發了 ABJM 模型 [8] 的發現。這個模型可以用傳統的李代數描述它的規範對稱，因而可以描述任意個 M2 膜的系統，它的缺點是有部份的對稱性在這個模型裡是被隱藏起來的。另一個相關的重要發展是：透過南部-泊松代數（Nambu-Poisson algebra）（這是一種無限維的李三代數），BLG 模型變身成單一 M5 膜的模型，可以用來描述 M5 膜在強 C 場的背景下的狀態 [9]。過去一年多來非常熱門的 AGT 猜想 [10]，也與 M5 膜的物理有關。

至今我們還不知道如何描述一個以上的 M5 膜的系統，或是如何描述十一維超對稱量子重力理論，也不知道全像原理（holographic principle）的物理機制，或是 AdS/CFT-對偶性的原理 [11]；而我們也不知道，瞭解了這些之後，又會對瞭解弦論之間的對偶性、M 理論裡被隱藏起來的對稱性，或是對寫下一個 M 理論的作用量有多大助益。（我甚至也不確定 M 理論的作用量是不是一個該追求的目標。）在它的眾多奧秘之中，要從哪裡開始，我們纔會越來越深刻的瞭解 M 理論？M 理論像一個知識系統中的黑洞，我們看到越來越多的理論被吸納在它之內，卻似乎更難看穿它的內在奧義，或許只有不顧一切縱身一躍，冒著葬身其中的危險，才有可能參透這龐然大物的內心世界？



## 作者

賀培銘

加州大學柏克萊分校物理博士 國立臺灣大學物理系教授

E-mail: pmho@phys.ntu.edu.tw

## 註釋

- 1 另一個可能是重力作用和其他交互作用不同，不應該被量子化。
- 2 『是否包含平空間的穩定解』其實並不算是非常合理的篩選條件，因為這裡的“平空間”要求整個時空都是平的，而我們其實只需要被觀察到的三維大尺度的空間大約是平的。這裡的討論只是為了表達一些想法，讓我們可以切入主題討論 M 理論的概念；物理上更有道理的說法會需要考慮太多技術性的問題。另一方面，沒有超對稱的弦論其實也可能和超弦理論同時被包含在 M 理論中。
- 3 規範場的足標的數目和對應的電荷載子 (charge carrier) 的維度有關。例如，A 有一個足標，這表示帶電荷的基本載子是一個點粒子，而電荷與電磁場的交互作用在點粒子的作用量中以

$$e \int A_\mu dx^\mu$$

來表示。(其中 e 代表電荷大小。) 這個積分的路徑定義為點粒子在時空中所劃出的一維軌跡。同樣地，有 n 個反對稱的足標的規範場在其電荷載子的作用量中應該以

$$g \int B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_n}$$

來代表它和基本載子間之交互作用。這個 n 維積分的定義就是 (n-1) 維的電荷載子在時空中劃出的軌跡。

- 4 如果一週期的長度為 L，我們會把  $L/(2\pi)$  稱作半徑，但是最好不要想像這是二維平空間裡的一個彎曲的圓。
- 5 T 代表 target space，也就是時空。弦論中時空的原始定義是弦上面的 1+1 維場論中的場的值域（請參見本期詹教授的文章）。弦論之外、一般的理論中，時空的性質（例如它的維度或是否具有長度的意義）通常是一開始就假設好的。相較之下，弦論中時空的性質是從一個量子場論推出來的，所以對時空的解釋會有一些特別之處。
- 6 弦論學家可以用微擾方法證明 T-對偶性到無限高階項都是正確的。
- 7 現在還不清楚 N 的值究竟是多少，但是一定是一個非常大的值。雖然只有當這 N 個數值都被決定時，理論才被完全確定下來，在一個近似的描述裡我們應該只需要較少的參數。

## 參考文獻

- [1] E. Witten, “String theory dynamics in various dimensions,” Nucl. Phys. B 443, 85 (1995) [arXiv:hep-th/9503124]. C. M. Hull and P. K. Townsend, “Unity of superstring dualities,” Nucl. Phys. B 438, 109 (1995) [arXiv:hep-th/9410167].
- [2] 如果想更進一步了解超重力理論，可以看陳江梅本期雙月刊的作品：“超重力：弦理論的低能量近似”，以及他在物理雙月刊第 25 卷第 6 期的作品：“超引力與膜簡介”。
- [3] M. J. Du and K. S. Stelle, “Multi-membrane solutions of D = 11 supergravity,” Phys. Lett. B 253, 113 (1991).
- [4] R. Gueven, “Black p-brane solutions of D = 11 supergravity theory,” Phys. Lett. B 276, 49 (1992).
- [5] 關於弦論和 M 理論的對偶性比較完整的介紹，請見：J. H. Schwarz, “Lectures on superstring and M theory dualities,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. 55B, 1 (1997) [arXiv:hep-th/9607201].
- [6] 本期詹傳宗的文章“弦論簡引”也特別介紹了 T-對偶性，為了本文的完整性，還是在此再重複介紹一次這個重要的對偶性。
- [7] 關於 BLG 模型的簡介，請見：P. M. Ho, “Nambu Bracket for M Theory,” arXiv:0912.0055 [hep-th].
- [8] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jaeris and J. Maldacena, “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals,” JHEP 0810, 091 (2008) [arXiv:0806.1218 [hep-th]].
- [9] 關於由 BLG 模型所導出的 M5 模型的簡介，請見：P. M. Ho, “A Concise Review on M5-brane in Large C-Field Background,” arXiv:0912.0445 [hep-th].
- [10] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, “Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories,” Lett. Math. Phys. 91, 167 (2010) [arXiv:0906.3219 [hep-th]].
- [11] 請參見本期雙月刊林豐利的“全像原理：場論與重力的世紀婚禮”以及溫文鈺的“重核對撞的弦外之音”。