MAT6470/6473. TP5: Un problème aux limites non-linéaire.

À remettre au plus tard à 21h00 le 21 mars 2024 - un rapport par mini-groupe, électroniquement par StudiUM. TOUS vos scripts MATLAB devraient être remis par StudiUM.

Considérer le problème aux limites

$$-y'' + g(x, y) = 0, \quad a < x < b, \tag{1}$$
$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta, \tag{2}$$

où g est une fonction (possiblement non-linéaire) de x et de y, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. (a) Démontrer que si l'on utilise la méthode aux différences finies avec une approximation centrée de $-y''$ sur un maillage régulier $\{x_k = a + kh,\ k = 0, \ldots, n\}$ avec un pas $h := (b - a)/n$, ceci aboutira à un système d'équations

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} + h^2 g(x_k, y_k) = 0,\ k = 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$
$$y_0 = \alpha,\ y_n = \beta, \tag{4}$$

   où y_k désigne une valeur approchée de $y(x_k)$.

   (b) Démontrer que le système (3)-(4) peut être écrit comme

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

   où A est la matrice tridiagonale

$$A = \mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

   $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})^T$ et $\boldsymbol{h} = (h^2 g(x_1, y_1) - \alpha, h^2 g(x_2, y_2), \ldots, h^2 g(x_{n-2}, y_{n-2}), h^2 g(x_{n-1}, y_{n-1}) - \beta)^T$.

   (c) Démontrer que la matrice A dans (6) est symétrique définie positive (SD+) et que si $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est une matrice diagonale ayant des éléments non-négatifs, alors $A + D$ est aussi SD+.

   (d) Obtenir la matrice jacobienne $J_{\boldsymbol{f}}$ de $\boldsymbol{f}$ lorsque

$$g(x, y) = e^y + 2 - e^{x^2}. \tag{7}$$

   Est-ce que $J_{\boldsymbol{f}}$ est SD+ dans ce cas-ci? Justifier votre réponse.

2. Adapter et optimiser le code de Cholesky

   `http://www.dms.umontreal.ca/~mat6470/2024/cours/cours5et5b_2024/cholesky.m`

   pour qu'il retourne la solution d'un système linéaire d'équations quand la matrice de coefficients est SD+ et tridiagonale. <u>IMPORTANT</u>: Pour pouvoir résoudre des grands systèmes d'équations, l'algorithme de votre code modifié devrait utiliser des vecteurs uniquement et non pas des matrices.

3. Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction de (5). Soit la fonction g celle donnée par (7) et soient $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

   (a) Obtenir un vecteur initial $\boldsymbol{y}^{(0)}$ à partir du polynôme de degré 3 qui interpole les données $y(0)$, $y(1)$, $y''(0)$ et $y''(1)$.

   (b) Avec `h=10.^(-5:-1)` et $\boldsymbol{y}^{(0)}$ comme obtenu ci-dessus, résoudre (5) avec la méthode de Newton comme suit:

      i. Utiliser la méthode de Cholesky développée en 2. ci-dessus pour résoudre le système linéarisé à chaque pas itératif.

      ii. Pour chaque valeur de h, continuer les itérations jusqu'à ce que $\|\boldsymbol{y}^{(K)} - \boldsymbol{y}^{(K-1)}\|_\infty < 1 \times 10^{-10}$, noter le nombre d'itérations K nécessaire pour atteindre cette tolérance et la norme infinie du résidu final $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^{(K)})\|_\infty$.

      iii. Afficher les résultats convergés obtenus en `x=(0.1:0.1:0.9)` avec chaque choix de h dans un tableau.

      iv. Utiliser la valeur convergée de $\boldsymbol{y}$ quand $h = 10^{-5}$ comme une solution de référence pour estimer l'ordre de convergence de la méthode itérative pour ce choix du pas de temps. Produire un graphique `loglog` qui montre la norme infinie des erreurs à la k-ième itération comme l'abscisse et la norme infinie des erreurs à la $(k+1)$-ième itération comme l'ordonnée (avec $k = 1, 2, \ldots, K-1$).

   (c) Avec `h=10.^(-5:-1)` et $\boldsymbol{y}^{(0)}$ comme obtenu ci-dessus, résoudre (5) avec les itérations point fixe

   $$A\boldsymbol{y}^{(k+1)} = -\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(k)}).$$

   Passer par les mêmes étapes (a) et (b) i. - iv. ci-dessus pour cette méthode.

   (d) Commenter les différences entre les résultats obtenus avec les deux méthodes.

4. Utiliser les résultats affichés dans le tableau de la question 3(b) iii. ci-dessus (et obtenus avec la méthode de Newton) pour estimer l'ordre de convergence de la méthode aux différences finies (3)-(4)