MAT 6470/6473. TP1: erreurs d'arrondi, représentation en virgule flottante [1].

(*Avec mes remerciements à Anne Bourlioux qui est l'auteure de la version originale de ce TP.*)

À remettre au plus tard à 21h00 le 18 janvier 2024 - un rapport par mini-groupe, électroniquement par StudiUM. TOUS vos scripts MATLAB devraient être remis.

Commandes MATLAB à maîtriser: `for...end`, `semilogy`, `single`

Introduction

On va estimer $\exp(x)$ pour $x = -5$ et $x = 5$ en se servant de la série de Taylor de $\exp(x)$ autour de $x = 0$ limitée à $(N+1)$ termes, qu'on appelle $S(x,N)$.

Questions

1. Prédire théoriquement la borne supérieure (comme une fonction de N) pour l'erreur relative
$$|\exp(x) - S(x,N)|/\exp(x),$$
pour $x = -5$ et $x = 5$ si les calculs sont faits en arithmétiques exactes. (Il peut être utile de consulter la Section 1.4 des notes de cours de MAT 2412).

2. Évaluer numériquement $S(x,N)$ pour $x = -5$ et $x = 5$, et faire le graphe `semilogy` de l'erreur relative $|\exp(x) - S(x,N)|/\exp(x)$ pour N entre 0 et 50. Superposer le graphique de la borne théorique prévue à la question 1. Expliquer aussi précisément que possible l'allure des graphiques combinés. Commenter et expliquer en particulier toute différence notable entre les résultats pour $x = -5$ et pour $x = 5$. (Il y a donc 4 courbes en tout, les mettre toutes sur la même figure.)

3. Refaire les calculs, cette fois-ci en précision simple. On va recalculer la série de Taylor de $\exp(x)$ autour de $x = 0$ limitée à $(N+1)$ termes en changeant l'ordre des termes : (a) une première fois, en ordonnant les termes par valeur croissante de leur valeur absolue (qu'on note $S^c(x,N)$) et (b) une deuxième fois, dans l'ordre décroissant de leur valeur absolue (qu'on note $S^d(x,N)$).

   (i) Lorsque $x = -5$, afficher sur la même figure `semilogy`
   $$|S^c(x,N) - S(x,N)|/|S(x,N)|,$$
   et
   $$|S^d(x,N) - S(x,N)|/|S(x,N)|,$$
   pour $N = 0, 1, \ldots, 50$ et où les sommes partielles $S(x,N)$ sont calculées en précision double dans l'ordre par défaut.

   (ii) Faire la même chose (sur une nouvelle figure `semilogy`) lorsque $x = 5$.

   Expliquer l'allure des courbes. Expliquer la différence de comportement quand $x = -5$ et quand $x = 5$.

---

[1] En répondant à la question 3 de ce TP, vous trouverez utile de consulter la section 2 de l'article "The accuracy of floating point summation" par Nicholas J. Higham [1]. Cet article est joint dans StudiUM

Référence

[1] N. J. Higham, The accuracy of floating point summation, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), 783–799.