MAT 6470/6473. TP3: Méthodes prédicteur-correcteur et l'équation de Duffing

À remettre électroniquement par StudiUM au plus tard à 21h00 le 15 février 2024 - un rapport par mini-groupe. TOUS vos scripts MATLAB devraient être remis par StudiUM.

1. Écrire une fonction MATLAB pour résoudre numériquement le problème de Cauchy

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}), \quad t_0 < t \le T, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{1}$$

pour une fonction vectorielle $\boldsymbol{y} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^N$, en utilisant la méthode prédicteur-correcteur d'Adams-Bashforth (AB3) et Adams-Moulton (AM4):

$$\boldsymbol{y}^*_{k+1} = \boldsymbol{y}_k + \frac{h}{12}\left[23\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{y}_k) - 16\boldsymbol{f}(t_{k-1},\boldsymbol{y}_{k-1}) + 5\boldsymbol{f}(t_{k-2},\boldsymbol{y}_{k-2})\right], \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{y}_k + \frac{h}{24}\left[9\boldsymbol{f}(t_{k+1},\boldsymbol{y}^*_{k+1}) + 19\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{y}_k) - 5\boldsymbol{f}(t_{k-1},\boldsymbol{y}_{k-1}) + \boldsymbol{f}(t_{k-2},\boldsymbol{y}_{k-2})\right]. \tag{3}$$

N.B. Pour obtenir les valeurs approchées $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ utilisez RK4 (voir, par exemple, les cours 2 et 2b). Votre fonction MATLAB devrait être entièrement générale, au sens où on devrait pouvoir l'utiliser pour n'importe quelle fonction $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})$.

2. L'équation aux valeurs initiales d'ordre 2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = A\cos(\omega t),\ t > 0,\ \theta(0) = \alpha_0,\ \dot{\theta}(0) = \alpha_1, \tag{4}$$

modélise un pendule avec un amortisseur et une force périodique externe. Dans (4), on note par θ l'angle entre le pendule et la verticale, ℓ désigne la longueur du pendule, g est une accélération et γ est un coefficient de frottement.

   (a) Écrire (4) comme un système d'équations différentielles du premier ordre.

   (b) Pour $\theta \ll 1$ on peut approcher $\sin(\theta)$ par θ. Dans ce-cas ci, utilisez le schéma prédicteur-correcteur (2)-(3) avec $\alpha_0 = \pi/16$, $\alpha_1 = 0$, $g = 9.81ms^{-2}$, $\ell = 1m$, $\gamma = 0.5s^{-1}$ et $A = 0$ pour calculer la solution en $t = 10s$ avec des nombres de pas de temps `n=2.^(5:14)`. Comparer les solutions approchées avec la solution exacte de (4) (lorsque $\sin(\theta) \approx \theta$) et en déduire l'ordre de convergence de (2)-(3).

   (c) Lorsqu'on approche $\sin(\theta)$ par $\theta - \theta^3/6$, on obtient *l'équation de Duffing*. Résoudre cette équation pour les cas suivants sur un intervalle de temps $(0, 100s]$ avec $n = 2^{10}$ pas de temps uniformes:

      (i) $\gamma = 0.3$, $\ell = 1$, $A = 0$, $\omega = 1$, $g = 1$, $\alpha_0 = 0.001$, $\alpha_1 = 0$,

      (ii) $\gamma = 0.3$, $\ell = 1$, $A = 0$, $\omega = 1$, $g = -1$, $\alpha_0 = 0.001$, $\alpha_1 = 0$,

      (iii) $\gamma = 0.5$, $\ell = 1$, $A = 0.5$, $\omega = 1$, $g = -1$, $\alpha_0 = \pi/2$, $\alpha_1 = 0$,

      (iv) $\gamma = 0.5$, $\ell = 1$, $A = 1.5$, $\omega = 1$, $g = -1$, $\alpha_0 = \pi/2$, $\alpha_1 = 0$.

      Soient θ_1 et θ_2 les deux composantes du système obtenu dans la partie 2 (a) ci-dessus. Pour chacun des cas (i) à (iv) ci-dessus, produire deux graphiques: le premier montrera θ_1 contre t et l'autre θ_2 (en ordonnée) contre θ_1 (en abscisse) (c'est-à-dire, le portrait de phase) pendant toute la durée de la simulation. Commenter (et essayer d'expliquer) ce que vous voyez.

3. (a) Produire une figure montrant les régions de stabilité absolue pour (i) AB3 et (ii) AM4. Commenter.

   (b) Expliquer pourquoi déterminer la région de stabilité absolue de la paire (2)-(3) n'est pas aussi facile que pour AB3 et AM4 séparément. (*Facultatif:* Essayer de la déterminer!)

   (N.B. Pour pouvoir répondre à la partie (a) de cette question vous trouverez que les codes `plotBL.m` et `makeplotBL.m` disponibles aux pages web

   https://staff.washington.edu/rjl/fdmbook/chapter7.html

   sont très, très utiles!)