Contrôle de l'erreur de RK4 (voir §7.4.3 de Fortin).

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{RK4}} \\ y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k)\end{array}}$$

$\tau_k(h) = O(h^4)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{RK5}}. \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + h\tilde{\varphi}(t_k, \tilde{y}_k)\end{array}}$$

$\tilde{\tau}_k(h) = O(h^5)$

Soient y^*_{k+1}, $\tilde{y}^*_{k+1}$ définis t.q.

$$\boxed{\begin{array}{l} y^*_{k+1} = y(t_k) + h\varphi(t_k, y(t_k)) \\ \tilde{y}^*_{k+1} = y(t_k) + h\tilde{\varphi}(t_k, y(t_k)) \end{array}}$$

Alors, $y(t_{k+1}) - y^*_{k+1} = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h\varphi(t, y(t_k))$

$$= h\tau_{k+1}(h) = O(h^5)$$

et $y(t_{k+1}) - \tilde{y}^*_{k+1} = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h\tilde{\varphi}(t_k, y(t_k))$

$$= h\tilde{\tau}_{k+1}(h) = O(h^6)$$

Or

$$\underbrace{y(t_{k+1}) - y^*_{k+1}}_{O(h^5)} = \underbrace{\left(y(t_{k+1}) - \tilde{y}^*_{k+1}\right)}_{O(h^6)} + \underbrace{\left(\tilde{y}^*_{k+1} - y^*_{k+1}\right)}_{\therefore\ O(h^5)}$$

$$\Rightarrow y(t_{k+1}) - y^*_{k+1} \approx \underbrace{\left(\tilde{y}^*_{k+1} - y^*_{k+1}\right)}_{h\tilde{\varphi}(t_k, y(t_k)) - h\varphi(t_k, y(t_k))} \sim Ch^5 = E, \text{ disons}$$

$$\approx h\left[\tilde{\varphi}(t_k, \tilde{y}_k) - \varphi(t_k, y_k)\right]$$

Maintenant remplaçons h par βh pour que, pour une tolérance "tol"

$$\boxed{\begin{aligned} C\beta^5 h^5 &= tol \\ \therefore \quad \beta &= \left(\frac{tol}{E}\right)^{1/5} \end{aligned}}$$

Comme écrit par Fortin, pour plus de "sécurité" on peut introduire un facteur 2 supplémentaire de sorte que

$$\boxed{\beta = \left(\frac{tol}{2E}\right)^{1/5}} \qquad \text{(voir son (7.14))}$$