MAT 6470/6473. TP2 : problème à valeurs initiales, méthodes explicites.

À remettre électroniquement par StudiUM au plus tard à 21h00 le 1 février 2024 - un rapport par mini-groupe. TOUS vos scripts MATLAB devraient être remis.

Le tourbillon ponctuel est un modèle très simple qui permet d'étudier la dynamique de cyclones, typhons, tornades etc. Par exemple, la figure ci-dessous montre une photographie de deux typhons, Tembin et Bolaven, près de la côte est de Taiwan en août 2012. Le modèle décrit l'évolution tem-

porelle des centres des tourbillons. On considère un système de J tourbillons ponctuels situés aux points $(x_j(t), y_j(t))$, $j = 1, \ldots, J$. L'évolution de $(x_i(t), y_i(t))$ au cours du temps t est décrite par le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, J. \tag{1}$$

Les paramètres Γ_j sont les intensités (circulations) de ces tourbillons et les positions initiales à $t = 0$ sont $(x_j(0), y_j(0))$.

1. On considère un système de $J = 3$ tourbillons co-rotatifs, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4\pi^2$. Leurs positions initiales sont $(x_1(0), y_1(0)) = (0, 1/2)$, $(x_2(0), y_2(0)) = (-\sqrt{3}/4, -1/4)$ et $(x_3(0), y_3(0)) = (\sqrt{3}/4, -1/4)$. On sait qu'avec ces conditions initiales la solution exacte est périodique au temps avec une période $P = 0.25$.

   (a) En utilisant la méthode d'Euler et un pas de temps $h = 0.01$, calculer l'évolution temporelle des (x_j, y_j) $(j = 1, 2, 3)$ avec $t \in [0, 1]$ et faire un graphique qui montre les trajectoires des trois tourbillons. Sur un autre graphique `loglog`, montrer la convergence des résultats des calculs à $t = 1$ par rapport au pas de discrétisation h.

   (b) Refaire les mêmes calculs en utilisant la méthode de Heun (RK2). Mettre en évidence la convergence d'ordre 2.

   (c) Faire des tests qui confirment l'ordre 4 et 5 des schémas de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 donnés sur les pages 390 et 391, respectivement, de Fortin [1] (voir le pdf ci-joint).

2. On considère maintenant un autre système de $J = 3$ tourbillons. Leurs intensités sont $\Gamma_1 = 2$, $\Gamma_2 = 2$ et $\Gamma_3 = -1$. Les positions initiales sont $(x_1(0), y_1(0)) = ((3+\sqrt{3}\cos\theta)/6, (\sqrt{3}/6)\sin\theta)$, $(x_2(0), y_2(0)) = ((-3+\sqrt{3}\cos\theta)/6, (\sqrt{3}/6)\sin\theta)$ et $(x_3(0), y_3(0)) = ((2\sqrt{3}/3)\cos\theta, (2\sqrt{3}/3)\sin\theta)$ avec $\theta = 4\pi/9$.

   (a) Dans l'intervalle temporel $[0, 11.7]$, faire un calcul des trajectoires des tourbillons avec la méthode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF, voir les pages de Fortin [1] ci-jointes) et un pas de temps $h(t)$ adaptatif. Utiliser

   - Un pas de temps maximal $h_{max} = 0.2$ et un pas de temps initial $h(0) = h_{max}$.
   - Une estimation de l'erreur égale à `norm([Ex Ey],'inf')` où E_x et E_y sont les vecteurs colonne dont les (3) composantes sont les erreurs obtenues de (7.13) de Fortin [1] pour $(x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t))$ et de $(y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t))$, respectivement.
   - Une tolérance `tol = Atol+ norm([x y],'inf')*Rtol` où `Atol = 1e-13`, `Rtol = 5e-10` et où

$$[x\, y] = \begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) \end{pmatrix}.$$

   (i) Faire un graphique qui montre les trajectoires des trois tourbillons

   (ii) Montrer un graphique de $h(t)$ et commenter.

   (iii) A tout instant t, les vecteurs positions des trois tourbillons forment les sommets d'un triangle $T(t)$. Tracer les trois angles intérieurs de $T(t)$ en fonction du temps et commenter.

   (b) On sait (voir Kimura [2]) que l'équation (1) avec les conditions initiales décrites ci-dessus a une singularité à un temps τ fini. Déterminer τ numériquement avec une bonne précision et faire un graphique de la distance de séparation minimale entre deux tourbillons sur l'intervalle $[0, \tau]$.

Références

[1] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, 2e édition, École Polytechnique de Montréal, 2001.

[2] Y. Kimura, *Vortex collapse from the viewpoint of complex-time singularity*, Physica D (1991), 512–519.