

# IFT 6521 / Projet Final: Programmation Dynamique

Kawo-Olouwa Eric-Omer SEGLA

HIVER 2023

## Introduction :

Un fonds de pension et de système de sécurité social, suite aux problèmes récurrents inter-générationnels liés au financement de la retraite des adhérents, décide d'acheter des produits financiers pour mieux gérer les risques financiers qui y sont liés. L'idée est de disposer des actifs qui donne le droit à son détenteur de les vendre à un prix favorable et bénéfique fixé avant la date d'échéance.

## 1 Description du problème

Le fonds de pension nommé PBSS a acheté sur le marché financier des options américaines (des options d'achat et des options de vente), pour couvrir les risques de son portefeuille. Les risques de son portefeuille sont entre autres, la retraite (régulière ou anticipée) et le décès avant la retraite.

Une option américaine est une option qui donne à son détenteur le privilège d'être exercée à tout instant durant sa durée de vie. L'option d'achat donne droit mais pas l'obligation d'acheter un actif à un prix fixé à l'avance (le prix d'exercice) et l'option de vente donne droit mais pas l'obligation de vendre un actif à un prix d'exercice fixé à l'avance.

L'option d'achat est utile pour se prévenir de la hausse des prix c'est-à-dire que si le prix du sous-jacent augmente on pourra exercer l'option ce qui permet d'acheter au prix fixé avant la hausse et de faire des bénéfices. Dans le cas inverse ou opposé on parle de l'option de vente.

L'option d'achat est sur des actions d'une entreprise spécialisée dans les voitures électriques avec un prix d'exercice  $K_C = \$90$  et le prix en début de période est de  $S_0 = \$80$ . La société a payé une prime d'acquisition de  $p_1 = \$10$  pour acquérir ce produit financier.

L'option de vente est sur des actions d'une entreprise spécialisée dans les hydrocarbures (le pétrole et ses dérivées) avec un prix fixe  $K_P = \$100$  et le prix en début de période est de  $X_0 = \$55$ . La société a payé une prime d'acquisition de  $p_2 = \$11$  pour acquérir ce produit financier.

Les prix sont sujet à des variations journalières. Nous cherchons donc le meilleur moment pour exercer les options et de ce fait maximiser le profit de la structure. A quel moment la structure doit exercer l'actif pour maximiser son profit ? Nous essaierons de répondre à cette question dans la suite de notre développement.

## 2 Modélisations

**Étape :**  $k = 1, 2, 3, \dots, N$  : date possible pour exercer l'une des options ou les deux en même temps.  $N$  désigne la maturité ou la date d'échéance.

Nous supposons que les options ont les mêmes maturités pour simplifier les calculs et analyses.

### État :

$S_k$  : le prix de l'option d'achat durant le jour  $k$  tel que  $S_0 = \$80$

$X_k$  : le prix de l'option de vente durant le mois  $k$  tel que  $X_0 = \$55$

$K_C = \$90$  : le prix d'exercice de l'option d'achat;  
 $K_P = \$100$  : le prix d'exercice de l'option de vente

### Décision :

$u_k$  : la décision de l'entreprise

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{si l'entreprise exerce l'une des options au moins à l'étape } k \\ 0, & \text{si la structure n'exerce aucune des options} \end{cases}$$

**Fonction de transition :** la fonction de transition  $f(y_k, u_k, w_k) = y_{k+1}$ , avec  $y_k = (S_k, X_k)$  : le couple des options à l'étape  $k$ .

$$y_{k+1} = \begin{cases} S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)h_1 + \sigma_1 \sqrt{h_1} W_{k+1}\right] + X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)h_2 + \sigma_2 \sqrt{h_2} W_{k+1}\right]; & \text{si } u_k = 0 \\ \Delta; & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $W_k$  qui suit la loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$ ,  $r$  le taux d'intérêt non risqué sur l'option d'achat,  $\mu$  le taux d'intérêt non risqué sur l'option de vente,  $\sigma_1$  la volatilité liée à l'option d'achat,  $\sigma_2$  la volatilité liée à l'option de vente,  $h_1$  le pas de temps de temps pour l'option d'achat et  $h_2$  le pas de temps de temps pour l'option de vente.

**Fonction de Coût :** La structure cherche à maximiser son profit. Donc son profit si l'on exerce l'option à l'étape  $k$  est  $g(y_k)$  défini par :

$$g(y_k) = \begin{cases} \max(0; S_k - K_C - p_1) + \max(0; K_P - X_k - p_2); & \text{si } u_k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Fonction de Recurrence :** Lorsqu'on a pas encore exercé les options, le profit optimal espéré à l'étape  $k$  si le prix de l'option d'achat est  $S_k$  et le prix de l'option de vente est  $X_k$ ,  $J_k(y_k)$  et est défini par :

$$J_k(y_k) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{si } S_k = \Delta \text{ et } X_k = \Delta \\ \max(0; S_k - K_C - p_1) + \max(0; K_P - X_k - p_2); & \text{si } k = N \text{ et } S_k \neq \Delta, X_k \neq \Delta \\ \max[(S_k - K_C - p_1); \exp(-rh_1) E[J_{k+1}(S_{k+1})]]; & \text{si } k < N \text{ et } S_k \neq \Delta, X_k = \Delta \\ \max[(K_P - X_k - p_2); \exp(-\mu h_2) E[J_{k+1}(X_{k+1})]]; & \text{si } k < N \text{ et } S_k = \Delta, X_k \neq \Delta \\ \max[(K_P - X_k - p_2); \exp(-\mu h_2) E[J_{k+1}(X_{k+1})]] + \\ \max[(S_k - K_C - p_1); \exp(-rh_1) E[J_{k+1}(S_{k+1})]]; & \text{si } k < N \text{ et } S_k \neq \Delta, X_k \neq \Delta \end{cases}$$

## 3 Algorithmes : Décrivons les algorithmes que nous avons choisi d'implémenter et motivons nos choix

L'évaluation d'une option avant la date de maturité ou date d'échéance n'est pas chose aisée puisqu'il faudra approximer ou estimer la valeur du sous-jacent dans le futur. Dans le cadre de notre travail nous sommes appelés

à évaluer la politique optimale se basant sur deux méthodes différentes : une méthode exacte et une méthode approximative.

### Méthode exact : Chainage arrière

Cette méthode consiste à évaluer le coût espéré à chaque étape  $k$  et trouver la valeur de  $\mu^*$  et de  $r^*$  qui maximisent la fonction de coût  $g(y_k)$ . Nous pouvons décrire le pseudo code comme suit :

Soit  $y = (S, X)$ , pour tout  $y \in y_N$ ,  $J_N(y) \leftarrow g_N(y)$

Pour  $k = N - 1, \dots, 2, 1, 0$  faire

pour tout  $y \in y_k$  faire

$$J_k(y) = \text{Max}[(K_P - X_k - p_2); \exp(-\mu^* h_2) E[J_{k+1}(X_{k+1})]] + \text{Max}[(S_k - K_C - p_1); \exp(-r^* h_1) E[J_{k+1}(S_{k+1})]]$$

$$\mu^* \leftarrow \text{argmax} \left[ (K_P - X_k - p_2); \exp(-\mu^* h_2) E[J_{k+1}(X_{k+1})] \right]$$

$$r^* \leftarrow \text{argmax} \left[ (S_k - K_C - p_1); \exp(-r^* h_1) E[J_{k+1}(S_{k+1})] \right]$$

### Méthode approximative :

La méthode approximative choisie pour faire cette évaluation est la méthode de Longstaff et Schwartz (2001). Cette méthode permet d'estimer le temps d'arrêt optimal sur la base d'une simulation des variables aléatoires. De façon précise, elle évalue la valeur de l'option américaine par simulation et évalue l'espérance conditionnelle de la valeur future de l'option par une régression linéaire. A chaque instant, la décision d'exercer ou non est évaluée et prise se basant sur la valeur prédictive par une régression de l'ensemble des trajectoires plausibles. Ainsi, on peut donc séparer la décision d'exercer, de la connaissance des événements futurs. Longstaff et Schwartz ont réussi à prouver que cette technique offre plusieurs avantages dont la flexibilité de la simulation Monte-Carlo. Sa simplicité résulte du fait qu'elle utilise les moindres carrés dans le processus de régression : une technique qui est bien connue et comprise.

Le fonctionnement de cet algorithme est récursif car il s'agira d'évaluer pour  $k = N, N - 1, \dots, 1$ .

#### Au temps $k = N$ ,

On exerce l'actif lié à l'option de vente si le prix d'exercice (strike) est supérieur au prix de l'actif augmenté de la prime de souscription. On exerce l'actif lié à l'option d'achat si le prix de l'actif est supérieur au prix d'exercice (strike) augmenté de la prime de souscription. Autrement, on laisse expirer et il n'y a donc pas de décision à prendre.

La situation se complique pour les autres pas de temps et les auteurs proposent donc de négliger ces trajectoires dans ce qui suit. Si l'option est en jeu, alors le détenteur doit décider s'il doit exercer l'actif ou le conserver : d'où l'introduction de la méthode des moindres carrés pour approximer l'espérance conditionnelle de la valeur de continuation de l'option.

Pour ce faire, nous posons  $Z$  comme étant la valeur actualisée du flux monétaire à  $t = N$  et  $X$  le prix de l'actif de l'option vente,  $S$  le prix de l'actif de l'option d'achat au temps  $k = N - 1$ . L'espérance de la valeur de continuation est estimée par une régression de  $Z$  sur les constantes telles :

$$E[Z|S] = \alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$$

avec  $\alpha_i, i = 0, 1, 2$ .

$$E[Z|X] = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

avec  $\beta_i, i = 0, 1, 2$ .

Ainsi, nous trouvons l'espérance conditionnelle pour comparer la valeur de l'exercice immédiat et la valeur de continuation pour la décision optimale.

## 4 Résultats et analyses

Les données pour les options d'achat sont :  $S_0 = 80$ ;  $K_C = 90$ ;  $p_1 = 10$ ;  $r = 0.2$ ;  $h_1 = 1.5$ ;  $\sigma_1 = 0.1$ .

Les données pour les options de vente sont :  $X_0 = 55$ ;  $K_P = 100$ ;  $p_2 = 11$ ;  $\mu = 0.3$ ;  $h_2 = 0.75$ ;  $\sigma_2 = 0.5$ .

Nous avons fait une simulation d'un échantillon de taille 50 et notre analyse se base fondamentalement sur les coûts optimaux de l'actif qui correspondent ici aux profits optimaux. Nous avons analysé aussi les situation du temps d'arrêt optimal et les erreurs relative de la moyenne pour chaque trajectoire.

Les résultats obtenus se présentent comme suit :

### Pétite Instance N=18 :

Nous avons supposé que la durée de la petite instance est de 18 mois, soit 1an 6 mois pour être éligible à recevoir une prestation de retraite qui resulterait des gains issus de la gestion faite des options (option d'achat, option de vente) de couvertures des risques.

### REPRESENTATION DES COUTS OPTIMAUX

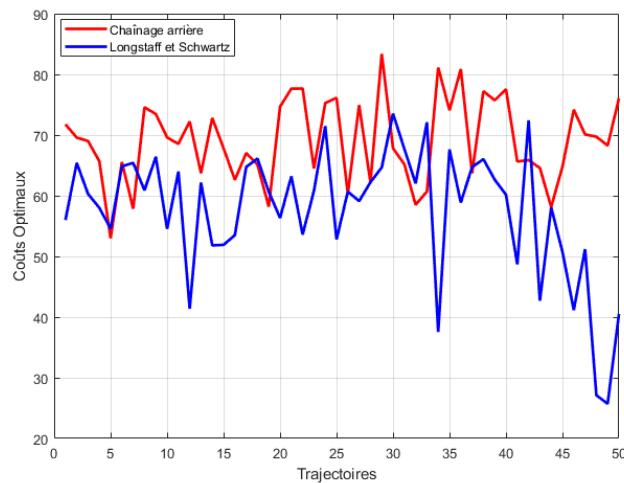


FIGURE 1 –

Nous pouvons constater que les trajectoires sont opposées pour les deux méthodes au début du contrat, puis évolue dans le même pour quelques trajectoires avant de diverger totalement vers la fin des observations. Il est à remarquer que les coût optimaux de la méthode exacte sont plus élevés généralement que ceux de la méthode de Longstaff et Schwartz.

### REPRESENTATION DU TEMPS D'ARRET OPTIMAL :

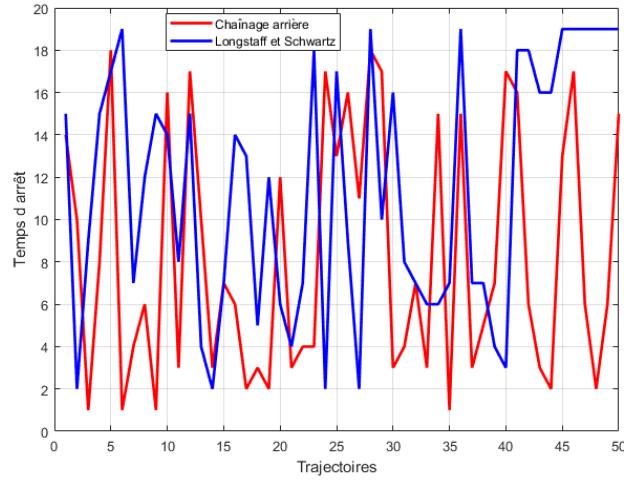


FIGURE 2 –

Cette figure retrace les temps d’arrets selon chaque méthode et le temps d’arrêt optimal converge plus ou moins vers des valeurs communes mais vers la fin elle est bien plus grand.

#### **REPRESENTATION DE L’ERREUR RELATIVE :**

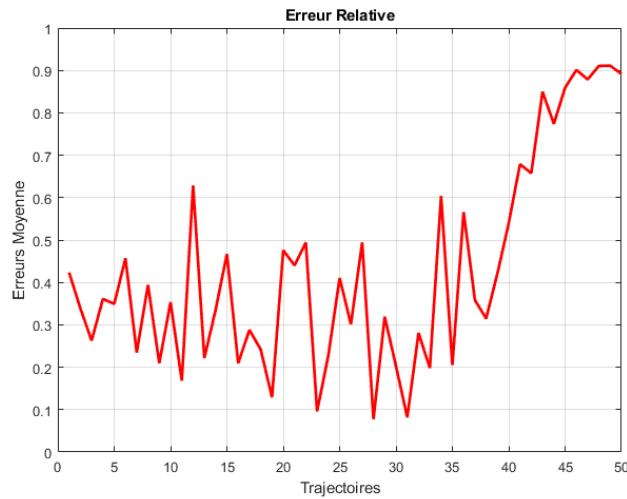
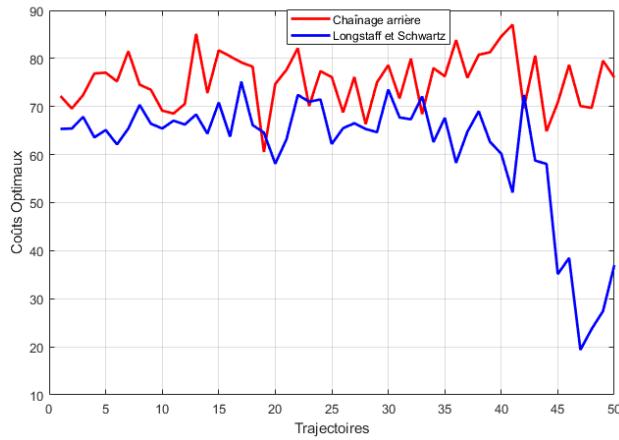


FIGURE 3 –

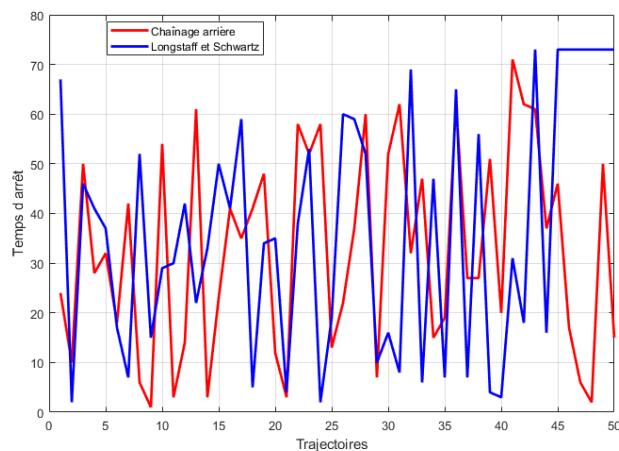
on remarque que l’erreur relative est comprise dans l’intervalle  $[0.1 ; 0.7]$  pour la grande majorité. C’est vers la fin que les grandes erreurs dépassant l’intervalle sont observées.

#### **INSTANCE MOYENNE N=72 :**

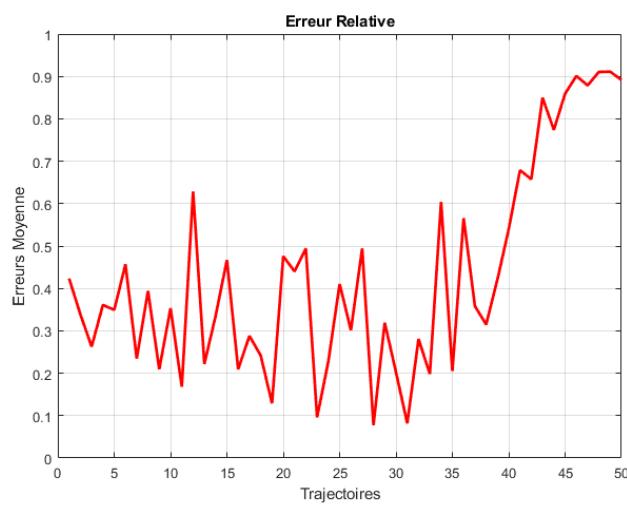
#### **REPRESENTATION DES COUTS OPTIMAUX**



**FIGURE 4 –  
REPRESENTATION DU TEMPS D’ARRET OPTIMAL :**



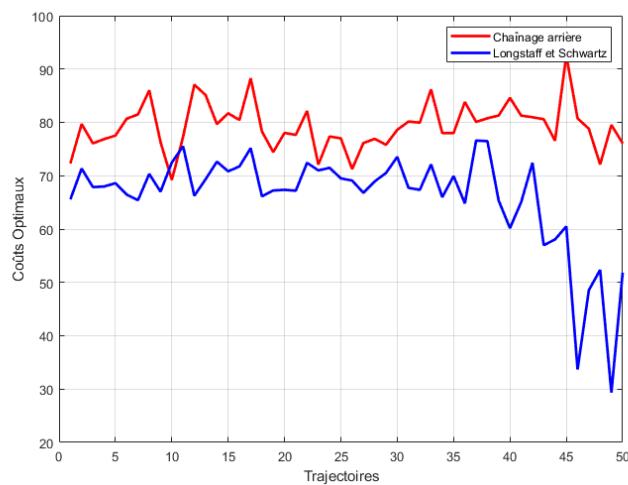
**FIGURE 5 –  
REPRESENTATION DE L’ERREUR RELATIVE :**



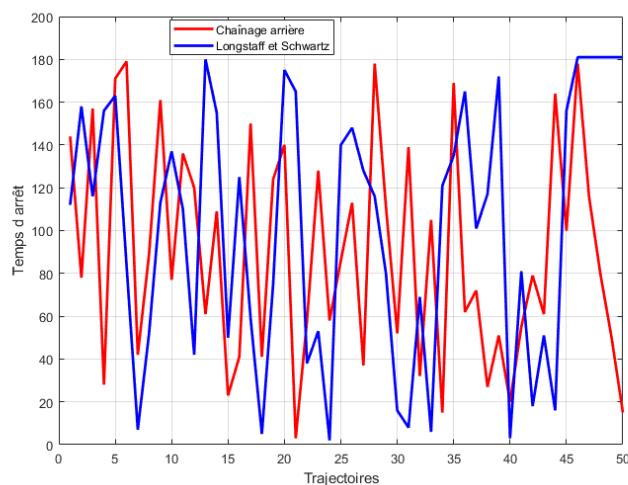
**FIGURE 6 –**

**TRES GRANDE INSTANCE N=180 :**

**REPRESENTATION DES COUTS OPTIMAUX**



**FIGURE 7 –**  
**REPRESENTATION DU TEMPS D'ARRET OPTIMAL :**



**FIGURE 8 –**  
**REPRESENTATION DE L'ERREUR RELATIVE :**

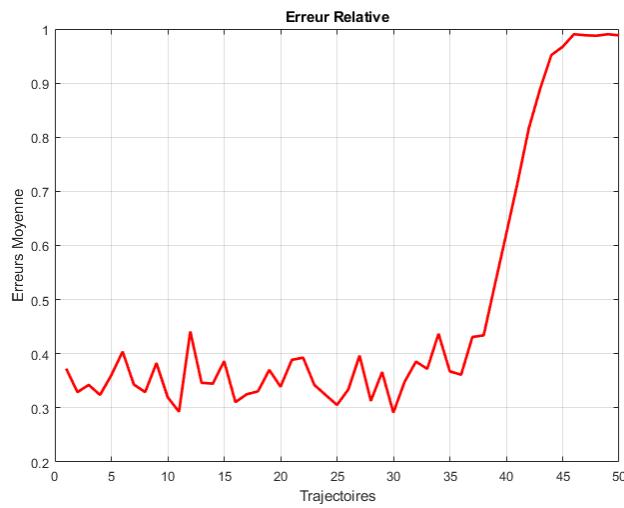


FIGURE 9 –

De ces figures, on peut aisement constater que le temps optimal est bien plus grand pour la méthode approximative que pour la méthode exacte. De plus, plus la date d'échéance est grande plus les deux courbes se chevauchent entre elles et donc la fonction de coût est convergente par endroit. L'erreur relative qui mesure l'écart entre les deux méthodes, est très volatile pour les petites et moyennes instances mais semble être contenue dans une petite intervalle  $[0.3; 0.5]$  pour la grande instance mais croît en fonction des trajectoires à partir d'un instant donné. Dans une certaine mesure et dans un certain niveau d'acceptation de la marge d'erreur on peut conclure que les deux méthodes sont semblables. Reste à définir un niveau de marge d'erreur acceptable qui ne va pas nuire à l'entreprise.

## 5 Conclusion

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont presque équivalents, de plus, vu que le chaînage arrière est une méthode exacte, la politique que l'on trouvera sera toujours optimale alors que la méthode de Longstaff et Schwartz (2001) est une méthode approximative et donne ce que l'on pourrait avoir si l'une des trajectoires de la simulation se réalise et donc on ne pourra jamais trouver exactement les mêmes valeurs que le chaînage arrière mais plutôt une approximation de celle-ci. De plus, plus la maturité de l'actif augmente ( $N$ ) plus l'écart entre les deux méthodes se réduit mais croît de certaines trajectoires.

La gestion des risques est tout de même plus complexe et on ne saurait juste utiliser un portefeuille des options pour les stratégies de couvertures. Il faudrait considérer plus de paramètres dans les évaluations pour mieux circonscrire les éventualités et se rapprocher de la réalité, ce qui n'est pas chose aisée. Plus on considère de paramètres, plus les analyses deviennent de plus en plus complexes aussi. Par exemple on pourrait reconstruire le profil du risque, l'allocation des ressources à investir, analyser la conjoncture économique et développer des secteurs d'investissement identifiés tout en considérant un horizon infini en se basant fondamentalement sur la pérennisation du système entier et sur le fait qu'un Etat fait pas faillite. Sous cet angle et sous certaines hypothèses, notre problème pourrait être modélisé comme un processus semi-Markovien où le temps écoulé entre deux offres successives est aléatoire. Le profit espéré total est calculé en intégrant un facteur d'actualisation.

## 6 Instruction :

Nous avons fait le choix de travailler avec Matlab pour nos algorithmes :

1- Mettre les fichiers (Les\_Instances.m); (trajectoire.m); (Mon\_Projet\_Final.m) dans le même dossier. Les deux premiers sont des fonctions qui permettent de connaître respectivement l'instance choisie et de simuler des variables aléatoires gaussiennes.

2- Executer le code dans le fichier fichier malab nommé (Mon\_Projet\_Final.m) et vous aurez un message "Entrer le nombre pour la periode".

3- Saisir les instances, qui representent en effet la maturité des options. Dans notre cas, nous avions consideré :  
\*\*\* 18 pour la petite instance,  
\*\*\* 72 pour l'instance moyenne et  
\*\*\* 180 pour la grande instance.

4- Vous aller obtenir les résultats pour chaque instance comme les graphiques présentés ci haut.

## 7 Références

- Emma FREJINGER Cours IFT6521, Hiver 2021, Approximation paramétrique dans l'espace des valeurs à horizon fini
- Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach, article disponible sur Studium, . The Review of Financial Studies, vol 14 :113–147
- Emma FREJINGER Cours IFT6521, Hiver 2022, Modèles stochastiques sur horizon fini

## 8 Auto-évaluation

**- Description du problème : A+,** Le problème très bien décrit et succinct

**- Modélisation : A+, Claire, accessible et facile comprendre**

**- Algorithmes : A-,** Bonne description de chaque méthode mais prend assez du temps d'exécution pour la grande maturité, je suis ouvert pour des propositions d'optimisation et d'améliorations

**- Résultats et Analyses : A-,** Bonne illustration et très bonne analyse mais pas assez d'explication pour le cas où les courbes de temps d'arrets chevauchent entre elles par exemple.

**- Conclusion :A-,** Précise et succincte mais absence d'une bonne liaison avec d'autres cas de modélisations vus au cours qui pourraient être utilisées pour étudier notre problème

**- Autres partie du rapport :A+,** très bien rédigée.

**- Codes et Instructions : A+,** très clair et facile à comprendre.

**- Présentation : A+,** succincte et recapitulative