

$$\begin{array}{c}
\text{HA} \vdash \text{congruence} \\
\hline
\text{HA} \vdash \text{transitivity} \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \text{additionS} \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \forall y. \text{zero} + \text{suc zero} \equiv y \rightarrow \text{suc (zero + suc zero)} \equiv \text{suc y} \quad (\forall E) \\
\hline
\text{HA} \vdash \forall y. \forall z. \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv z \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \forall y. \text{suc zero} + y \equiv \text{suc (zero + y)} \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \text{zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc zero} \rightarrow \text{suc (zero + suc zero)} \equiv \text{suc (suc zero)} \quad (\forall E) \\
\hline
\text{HA} \vdash \forall z. \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc (zero + suc zero)} \wedge \text{suc (zero + suc zero)} \equiv z \rightarrow \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv z \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc (zero + suc zero)} \quad (\forall E) \quad \text{HA} \vdash \text{suc (zero + suc zero)} \equiv \text{suc (suc zero)} \quad (\rightarrow E) \\
\hline
\text{HA} \vdash \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc (zero + suc zero)} \wedge \text{suc (zero + suc zero)} \equiv \text{suc (suc zero)} \rightarrow \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc (suc zero)} \quad (\wedge I) \\
\hline
\text{HA} \vdash \text{suc zero} + \text{suc zero} \equiv \text{suc (suc zero)} \quad (\rightarrow E)
\end{array}$$