

Versuch 70: Linsen und Linsensysteme

(durchgeführt am 28.09.2018 bei Daniel Bartle)
Ye Joon Kim, Marouan Zouari
10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Aufbau	3
3	Durchführung	3
4	Auswertung und Fehleranalyse	4
4.1	1. Versuchsteil: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen	4
4.1.1	Berechnung	6
4.2	2. Versuchsteil: Das Bessel-Verfahren	6
4.2.1	Berechnung	7
4.3	3. Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren	7
4.3.1	Berechnung	9
4.4	4. Versuchsteil: Autokollimationsverfahren und Dispersion . .	10
4.5	Bestimmung der theoretischen Brennweiten	11
5	Diskussion der Ergebnisse	11
5.1	Erster Versuchsteil	11
5.2	Zweiter Versuchsteil: Das Bessel Verfahren	12
5.3	Dritter Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren	12
5.4	Vierter Versuchsteil: Das Autokollimationsverfahren	13
5.5	Systematische und Statistischen Fehler	14
6	Anhang	14
7	Literatur	17

1 Einleitung

Mit einer Linse kann man durch die Brechung Licht ablenken. Jede (richtig hergestellte) Linse besitzt zwei Brennpunkte, wo alle parallelen und zur Linse senkrecht einfallenden Lichtstrahlen sich sammeln. Der Abstand von dem Mittelpunkt der Linse zu einem Brennpunkt heißt die Brennweite. Für dicke Linsen und Linsensysteme muss einen weiteren Begriff eingeführt werden. Die doppelten Brechungen lassen sich durch den Begriff der Hauptebenen beschreiben, wobei zwischen den Hauptebenen die Lichtstrahlen als parallel verlaufend gedacht werden können. Diese Begriffe vereinfachen Berechnungen mit Lichtstrahlen.

Es existieren mehrere Verfahren, um die Brennweite von Linsen und Linsensystemen zu bestimmen. Bei einer Einzellinse kann die Brennweite f so ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

Wobei g und b die Gegenstandsweite bzw. Bildweite, die Abstände jeweils von dem Gegenstand und Bild zur Linsenmitte, sind. Für ein Linsensystem, das aus zwei Linsen besteht, gilt eine andere Formel, nämlich:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (2)$$

Wobei f_1 und f_2 die Brennweiten der einzelnen Linsen und d der Abstand dazwischen sind.

Aber wenn die Hauptebenen nicht bekannt sind, können g und b nicht direkt bestimmt werden. In diesem Fall hilft das Bessel-Verfahren, wobei die Brennweite mit:

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} \quad (3)$$

bestimmt werden kann, wobei s der Abstand zwischen dem Gegenstand und Bild, und e die Differenz der Positionen, wo scharfe Abbildungen möglich sind.

Mit einem anderen Verfahren, lassen sich die Brennweite und Hauptebenen gleichzeitig bestimmen, was das Abbe-Verfahren heißt. Hier wird zusätzlich der Abbildungsmaßstab verwendet:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Wobei B und G jeweils die Größen des Bildes und Gegenstands sind. Mit direkten Messungen von B , G , g' (die scheinbare Gegenstandsweite) und b' (die scheinbare Bildweite) und den Gleichungen:

$$\begin{aligned} g' &= (1 + \frac{1}{\beta}) \cdot f_1 + h_1 \\ b' &= (1 + \beta) \cdot f_2 + h_2 \end{aligned} \quad (4)$$

können die f und h Werte bestimmt werden, da f die Steigungen, und h den Achsenabschnitte entsprechen.

Die Ziele dieses Versuchs ist deshalb es, die Brennweite von mehreren Linsen und Linsensysteme sowie deren Lage der Hauptebenen mit den obigen Verfahren zu bestimmen. Es wird auch untersucht, ob die Linsen für verschiedene Lichtfarben unterschiedliche Brennweiten haben.

2 Aufbau

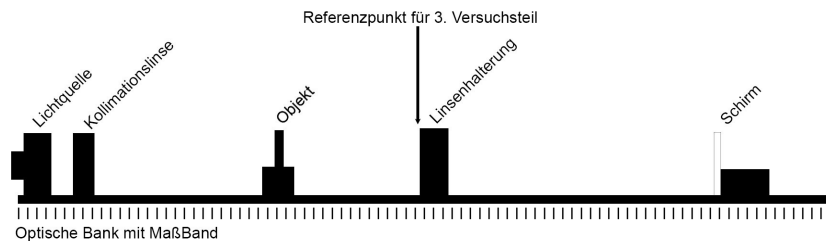


Abbildung 1: Genereller Versuchsaufbau

Zu diesem Versuch wurden ein Schirm, ein Dia, mehrere Linsen, eine Linsenhalterung, ein Spiegel, eine Lichtquelle und eine optische Bank benutzt.

3 Durchführung

Damit das Licht parallel zur optischen Bank verläuft, wurde zuerst eine Kollimationslinse direkt vor der Lichtquelle eingesetzt. Der Schirm wurde auf der anderen Seite der Bank fixiert, sodass eine relativ scharfe Abbildung zu sehen war. Die Abbildung wurde dann mit den Drehknöpfen der Lichtquelle zentriert.

Für den ersten Versuchsteil wurde das Dia hinter der Kollimationslinse eingesetzt und durch Verschieben der Linsenhalterung wurde das Dia seitenverkehrt und scharf auf den Schirm abgebildet. Die Positionen der Linsenhalterung, Dia und Schirm wurden mithilfe der Skala auf der optischen Bank gemessen. Dies wurde für fünf unterschiedliche Positionen des Schirms wiederholt, und der gesamte Prozess wurde für drei verschiedene Linse und Linsensysteme wiederholt.

Für den zweiten Versuchsteil wurden die in dem ersten Teil gemessenen Daten verwendet, deswegen wurde keine neuen Messungen durchgeführt.

Bei dem dritten Teil wurde das Abbe-Verfahren benutzt, um die Brennweite und Lage der Hauptebenen zu bestimmen. Für diesen Teil wurde ein

Linsensystem mit einer $f = 80\text{mm}$ Sammellinse und einer $f = -200\text{mm}$ Zerstreuungslinse benutzt. Ähnlich wie in dem ersten Teil wurde die Linsenhalterung so verschoben, sodass eine scharfe Abbildung der Dia auf dem Schirm entstanden war. Die Positionen des Schirms und der Linsenhalterung wurden dann gemessen. Mit einem Lineal wurde der Durchmesser von einer der auf den Schirm abgebildeten Kreise gemessen. Diese Schritte wurden dann für 10 unterschiedliche Positionen des Schirms wiederholt und der gesamte Prozess für umgekehrte Reihenfolge der Linsen.

In dem letzten Versuchsteil wurde die Brennweite mithilfe des Autokollimationsverfahrens bestimmt. Dafür wurde der Spiegel nah hinter der Linse gesetzt und justiert, sodass das reflektierte Bild ein bisschen oben versetzt entsteht. Die Linse und Spiegel wurden zusammen verschoben, sodass das Dia auf den Diarahmen scharf abgebildet wird. Die Lage der Linse wurde dann gemessen. Dieser Prozess wurde für verschiedene Linse, Linsensysteme und Lichtfarben wiederholt.

4 Auswertung und Fehleranalyse

4.1 1. Versuchsteil: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen

Die Werte für $\frac{1}{b}$ wurden gegen $\frac{1}{g}$ aufgetragen. Für jede Messreihe wurde auch Fit-Kurve eingezeichnet, aber nur, um die Linearität der Zusammenhang zu veranschaulichen (Siehe Abbildung 2). Die theoretische Verläufe wurden auch mit Formel (2) und (1) berechnet (Siehe Abbildung 3).

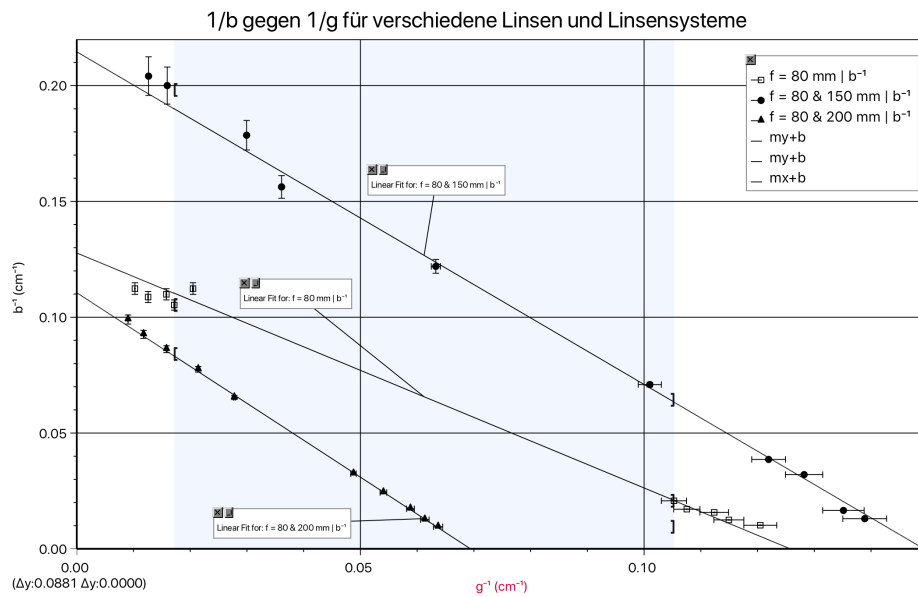


Abbildung 2: $\frac{1}{b}$ gegen $\frac{1}{g}$.

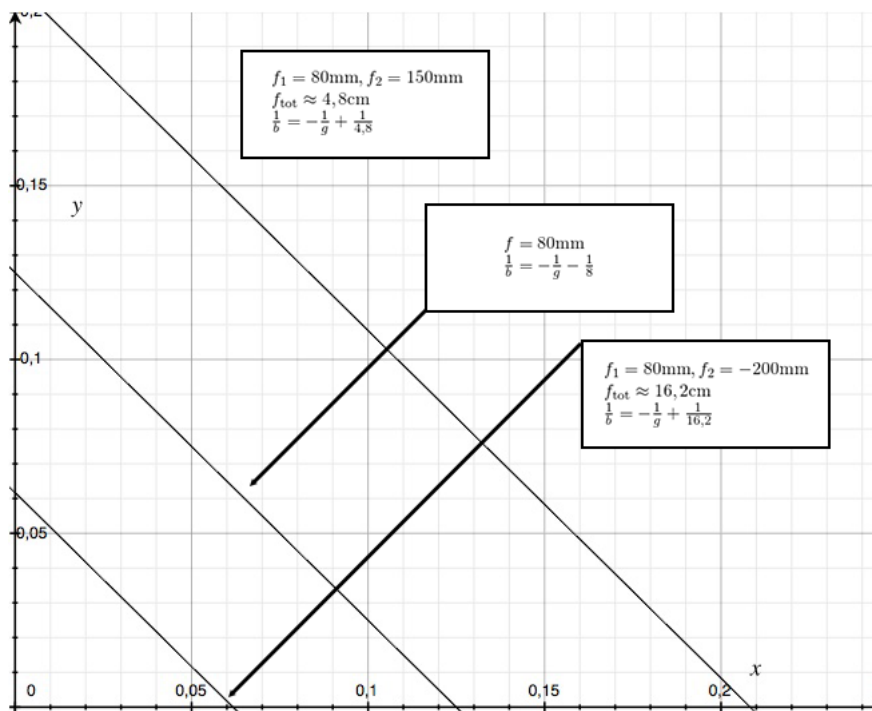


Abbildung 3: Die aus der Abbildungsgleichung Erwarteten Linearen Verläufe

4.1.1 Berechnung

Zuerst wurde die Unsicherheiten von g und b mit der vereinfachten gauß'schen Fehlerfortpflanzung für Summe berechnet. Zum Beispiel:

$$\Delta g = \sqrt{(\Delta x_{\text{Dia}})^2 + (\Delta x_{\text{Groß}})^2}$$

, da $g = x_{\text{Groß}} - x_{\text{Dia}}$, wobei x_{Dia} die Position des Dias und $x_{\text{Groß}}$ die Position der Linse, wo eine vergrößernde Abbildung möglich war, sind.

Die Unsicherheiten der einzelnen Punkten auf der Graph wurde mit der vereinfachten gaußschen Fehlerfortpflanzung für Produkte und Quotienten bestimmt.

$$\Delta \left(\frac{1}{g} \right) = \frac{\Delta g}{g} \cdot \frac{1}{g}$$

ebenfalls für die $\frac{1}{b}$ Werte.

Für die theoretischen Verläufe wurde Gleichung (1) nach $\frac{1}{b}$ umgeformt und die gesamten Brennweiten mit Gleichung (2) Berechnet (Siehe 4.5).

4.2 2. Versuchsteil: Das Bessel-Verfahren

Gemäß Gleichung (3) wurden die Werte für s und e und deren Unsicherheiten berechnet (Siehe Anhang 1). Die Unsicherheiten wurde wie in dem ersten Versuchsteil mit der gauß'schen Fehlerfortpflanzung für Summen berechnet. Danach wurden die einzelnen f Werte für jede Messreihe bestimmt (Siehe Anhang 2).

Die Unsicherheiten der f Werte wurden mit der gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Mit

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s}$$

sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{s^2 + e^2}{4s^2} \\ \frac{\partial f}{\partial e} &= -\frac{e}{2s} \end{aligned}$$

Die Unsicherheit von f ist deshalb:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s} \Delta s \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e} \Delta e \right)^2}$$

Brennweite mm	f cm	u_f cm
80	7,93	0,06
80 & 150	5,63	0,03
80 & -200	11,59	0,02

Tabelle 1: Die Berechneten f für die Linsen und Linsensysteme

Die Mittelwerte der f für jede Linse/Linsensystem und deren Standardunsicherheiten sind dann:

4.2.1 Berechnung

Zur Bestimmung der Standardunsicherheiten wurden zuerst die Standardabweichung berechnet mit der folgenden Formel:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Da die f Werte Mittelwerte sind, wurde die Standardabweichung mit einem Faktor \sqrt{m} geteilt. Die Unsicherheit ist deshalb:

$$u_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

4.3 3. Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren

Zuerst wurden die Werte für β ausgerechnet (Siehe Tabelle 1).

g'	b'	β	$\Delta\beta$
cm	cm		
18,5	47,9	3,33	0,05
20,8	28,6	1,71	0,05
19,7	25,0	2,19	0,05
17,8	47,2	3,71	0,05
15,3	74,7	4,71	0,14
16,1	90,3	6,71	0,14
16,0	101,8	7,86	0,14
17,3	54,6	3,79	0,07
18,3	41,7	2,71	0,07
18,4	39,0	2,57	0,14

Tabelle 2: Die gemessenen Werte für g' , b' und β für ein Linsensystem mit $f_1 = 80mm$ und $f_2 = -200mm$

g'	b'	β	$\Delta\beta$
cm	cm		
13,5	58,6	2,86	0,14
13,9	51,5	3,21	0,07
14,6	44,3	2,64	0,07
21,4	25,3	1,00	0,07
12,4	93,6	6,86	0,14
12,4	84,5	6,14	0,14
12,0	108,6	8,14	0,14
12,9	76,0	8,00	0,14
12,8	68,6	4,64	0,07
14,3	48,6	3,00	0,07

Tabelle 3: Die gemessenen Werte für g' , b' und β für ein Linsensystem mit $f_1 = -200mm$ und $f_2 = 80mm$

Danach wurden g' und b' jeweils gegen $(1 + \frac{1}{\beta})$ und $(1 + \beta)$ aufgetragen (Siehe Anhang 3, 4). Dadurch lassen sich die Werte für f_1 , f_2 , h_1 und h_2 für beide Linsensysteme bestimmen. Das System mit zuerst einer Linse mit $f = 80mm$ und danach einer mit $f = -200mm$ hat die folgenden Werte:

$$f_1 = 11cm \quad f_2 = 12cm$$

$$h_1 = 3cm \quad h_2 = -8cm$$

Und für das System mit umgekehrter Reihenfolge der Linsen:

$$f_1 = 3cm \quad f_2 = 10cm$$

$$h_1 = 10cm \quad h_2 = 18cm$$

4.3.1 Berechnung

Für die Bestimmung der Unsicherheiten der Abbildungsmaßstäbe wurde wiederum die gaußsche Fehlerfortpflanzung für Produkte benutzt. Die Unsicherheit von β ist deshalb:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta g'}{g'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b'}{b'}\right)^2}$$

Um die f_1 , f_2 , h_1 und h_2 Werte zu berechnen, wurden lineare Regressionen für beide Messreihen ausgeführt, da die Zusammenhang zwischen z.B g' und $(1 + \frac{1}{\beta})$ in so einer Form sich schreiben lässt:

$$g' = a + b\left(a + \frac{1}{\beta}\right)$$

wobei a und b jeweils dem Achsenabschnitt und der Steigung entsprechen. Die a und b Werte wurde automatisch mit einem Excel-Dokument mit den folgenden Formeln berechnet:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Mit $x = (1 + \frac{1}{\beta})$ und $y = g'$.

Dasselbe Berechnungsverfahren gilt für die lineare Regression von b' gegen $(1 + \beta)$.

4.4 4. Versuchsteil: Autokollimationsverfahren und Dispersion

Der Abstand zwischen der Linse und dem Objekt, wobei eine Scharfe Abbildung möglich war, wurde für verschiedene Linsen und Linsensysteme und danach mit einer Linse mit verschiedenen Lichtfarben berechnet. Dieser Abstand entspricht dann der Brennweite.

Brennweite der einzelnen Linsen	f	Δf
mm	cm	cm
80	7,6	0,3
150	24,6	0,3
80 & 150	4,6	0,3
80 & -200	12,2	0,3
-200 & 80	8,0	0,3

Tabelle 4: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten f für verschiedene Linsen und Linsensysteme.

Lichtfarbe	f	Δf
	cm	cm
Weiß	33,6	0,3
Rot	33,5	0,3
Blau	32,8	0,3

Tabelle 5: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten f für verschiedene Lichtfarben

Zur Bestimmung der Unsicherheiten wurde die vereinfachte Fehlerfortpflanzung für Summe verwendet. Deswegen ist Δf :

$$\sqrt{2 \cdot (0,2\text{cm})^2} \approx 0,28$$

Um mit einem theoretischen Wert vergleichen zu können wurde das Verhältnis von f_{Rot} zu f_{Blau} berechnet:

$$\frac{f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Blau}}} = 1,02 \pm 0,01$$

Zur Bestimmung der Unsicherheit wurde erneut die gaußsche Fehlerfortpflanzung für Produkte benutzt:

$$\Delta \frac{f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Blau}}} / \frac{f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Blau}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Rot}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f_{\text{Blau}}}{f_{\text{Blau}}}\right)^2}$$

Die theoretische Wert dafür kann mit der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$\frac{1}{f} \propto n - 1$$

Mit Umformen liefert:

$$\frac{f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Blau}}} = \frac{n_{\text{Blau}}}{n_{\text{Rot}}} \approx 1,031$$

Mit $n_{\text{Rot}} = 1,514$ und $n_{\text{Blau}} = 1,530$ („Versuchsanleitungen“).

4.5 Bestimmung der theoretischen Brennweiten

Zur Bestimmung der theoretische Brennweiten der Verschiedene Linsensysteme wurde die folgende Formel benutzt (Formel 2):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Wobei d der Abstand zwischen den Linsen ist.

Dadurch lassen sich die Gesamt-Brennweiten der Linsensysteme bestimmen.

Brennweite der einzelnen Linsen	f_{tot}
mm	mm
80 & 150	48
80 & -200	162
-200 & 80	162

Tabelle 6: Die theoretische Gesamt-Brennweiten der in dem Versuch verwendeten Linsensysteme

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 Erster Versuchsteil

(Siehe Abbildung 2) Es kann leicht von den Gleichungen gesehen werden, dass die linearen Regressionen theoretisch dieselbe Steigung haben müssen. Die lineare Regression für $f = 80\text{mm}$ hat aber eine bemerkbare schwächere Steigung als die anderen zwei Kurven.

Der Achsenschnitt von zwei linearen Regressionen stimmen mit den theoretischen Verläufe überein. Für das Linsensystem mit der Zerstreuungslinse gab es eine Abweichung von $0,05\text{ cm}$ zwischen den extrapolierten und theoretischen Achsenabschnitte, was fast 50% des Wertes selbst beträgt. Möglicher Fehlerquellen werden später diskutiert.

5.2 Zweiter Versuchsteil: Das Bessel Verfahren

Die mit dem Bessel-Verfahren bestimmte Brennweiten der Linsen und Linsensysteme sind:

Brennweite mm	f cm	u_f cm
80	7,93	0,06
80 & 150	5,63	0,03
80 & -200	11,59	0,02

Tabelle 7: Die mit dem Bessel-Verfahren berechneten f für verschiedene Linsen und Linsensysteme

Um zu sehen, ob die gemessenen Werte und die theoretischen Werte miteinander verträglich sind wurde ihre Differenzen in Einheiten der Standardunsicherheit berechnet. Mit der folgenden Formel:

$$t = \frac{f - f_{\text{theo}}}{u_f}$$

sind:

$$t_{80 \text{ mm}} = 1,17$$

$$t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}} = 11,86$$

$$t_{80 \text{ \& } 200 \text{ mm}} = 92,20$$

Da die Werte für $t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}}$ und $t_{80 \text{ \& } 200 \text{ mm}}$ viel größer als 2 sind, sind diese Ergebnisse mit den theoretischen Werten nicht verträglich. Aber das impliziert nicht, dass diese Werte nicht plausibel sind. Die theoretischen Werte wurden gemäß den gegebenen Abmessungen der Linsenhaltung berechnet. Es gab aber auch eine andere Berechnung von einer anderen Person, die besagt, dass die theoretischen Brennweiten $f_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}}$ und $f_{80 \text{ \& } -200 \text{ mm}}$ jeweils ungefähr 5,2 cm und 11 cm sind. Diese theoretischen Werte sind viel näher an den gemessenen Werten (aber sie sind jedoch miteinander nicht verträglich).

5.3 Dritter Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren

Der für diesen Versuchsteil ausgewählte Referenzpunkt war die linke Seite der Linsenhaltung (Siehe Abbildung 1). f_1 , f_2 , h_1 und h_2 sind die Lagen der Brennpunkte und Hauptebenen relativ zu diesem Punkt. Die Brennweite und Abstand zwischen den Hauptebenen muss deshalb zweimal von jeweils $f_1 - f_2$ und $h_1 - h_2$ sein. Diese Werte müssen für beide Messreihen

übereinstimmen. Die gemessenen Brennweite und Abstände zwischen den Hauptebenen sind:

$$f = 0,5 \text{ cm und } 3,5 \text{ cm}$$

$$h = 5,5 \text{ cm und } 4 \text{ cm}$$

Die Werte stimmen miteinander und mit der theoretischen Brennweite nicht überein. Es kann auch graphisch gesehen werden (Anhang 3,4) dass die Streuung der Punkte auch sehr groß ist. Diese Ergebnisse sind deshalb von keiner großen Bedeutung.

5.4 Vierter Versuchsteil: Das Autokollimationsverfahren

Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten Brennweiten sind in Tabelle 8 zu sehen.

Brennweite der einzelnen Linsen	f	Δf
mm	cm	cm
80	7,6	0,3
150	24,6	0,3
80 & 150	4,6	0,3
80 & -200	12,2	0,3
-200 & 80	8,0	0,3

Tabelle 8: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten f für verschiedene Linsen und Linsensysteme.

Die Differenzen zwischen den gemessenen Werten und den theoretischen Werten wurden erneut berechnet:

$$t_{80 \text{ mm}} = 1,33$$

$$t_{150 \text{ mm}} = 32$$

$$t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}} = 3,33$$

$$t_{80 \text{ \& } -200 \text{ mm}} = 13,33$$

$$t_{-200 \text{ \& } 80 \text{ mm}} = 27,33$$

Nur für $f = 80 \text{ mm}$ waren die gemessenen und theoretischen Werte miteinander verträglich. Die anderen Ergebnisse sind absurd.

Das gemessene Verhältnis

$$\frac{f_{\text{Rot}}}{f_{\text{Blau}}} = 1,02 \pm 0,01$$

wurde mit dem theoretischen Verhältnis verglichen. Ihre t Wert ist:

$$t = 1,1$$

Deswegen sind beide Werte miteinander verträglich, und da der relative Fehler klein ist ($\approx 0,01$), ist dieses Ergebnis auch signifikant und kann als Beweis für die Gleichung $\frac{1}{f} \propto n - 1$ dienen.

5.5 Systematische und Statistische Fehler

Die Durchmesser der Kreise auf dem Dia selbst haben auch Unsicherheiten und Abweichung von der angegebenen Werte. Deshalb entsteht ein Systematischer Fehler, wenn diese Werte bei der Berechnung verwendet werden.

Eine statistische Fehler war es, dass es wegen der Dicke der Linsenhalterung schwierig war, die genaue Lage der Linsen zu bestimmen. Dieses Problem wurde dadurch gelöst, indem man ein Diagramm der Linsenhalterung benutzt, um die genaue Lage der Linsen zu bestimmen.

6 Anhang

(Siehe Auch Scans)

Brennweite mm	Messreihe	s cm	e cm
80	1	57,7	39,3
	2	72,4	54,4
	3	88,7	70,8
	4	106,4	89,2
	5	67,7	48,9
80 & 150	1	67,7	55,3
	2	83,9	71,8
	3	34,1	19,5
	4	24,0	5,9
	5	39,0	25,6
80 & -200	1	95,7	68,6
	2	74,8	46,2
	3	120,7	94,9
	4	59,6	28,2
	5	51,3	15,5

Tabelle 9: Die Werte für s und e für alle Messreihen

Brennweite mm	Messreihe	s cm	e cm
80	1	7,73	0,14
	2	7,88	0,15
	3	8,05	0,16
	4	7,90	0,17
	5	8,09	0,15
80 & 150	1	5,63	0,17
	2	5,61	0,17
	3	5,73	0,12
	4	5,64	0,08
	5	5,55	0,14
80 & -200	1	11,63	0,15
	2	11,56	0,13
	3	11,52	0,16
	4	11,56	0,11
	5	51,3	0,09

Tabelle 10: Berechnete Werte für f und deren Unsicherheiten

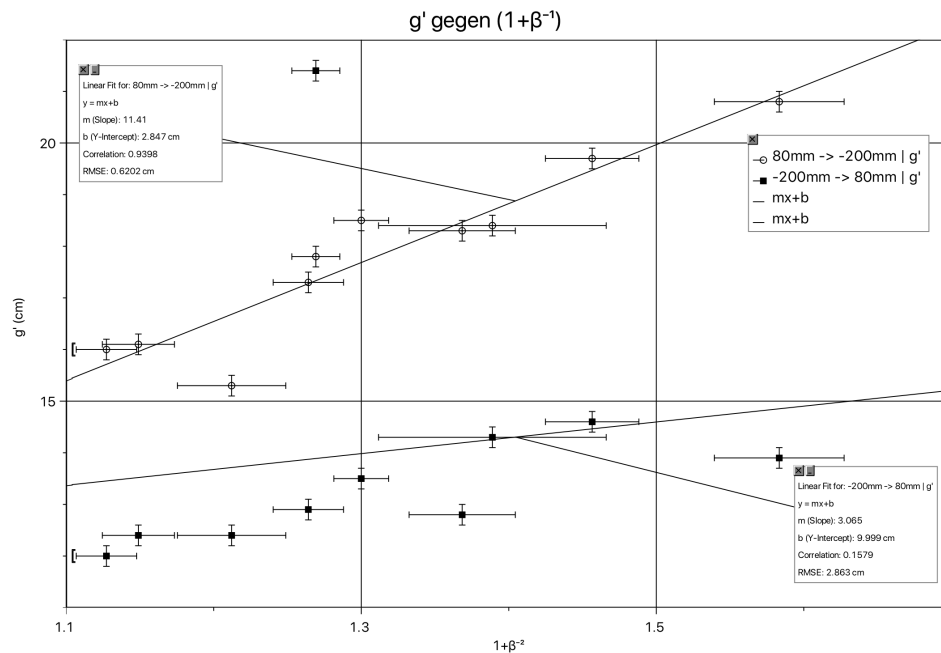


Abbildung 4: Graph von g' gegen $1 + \frac{1}{\beta}$ für beide Linsensysteme

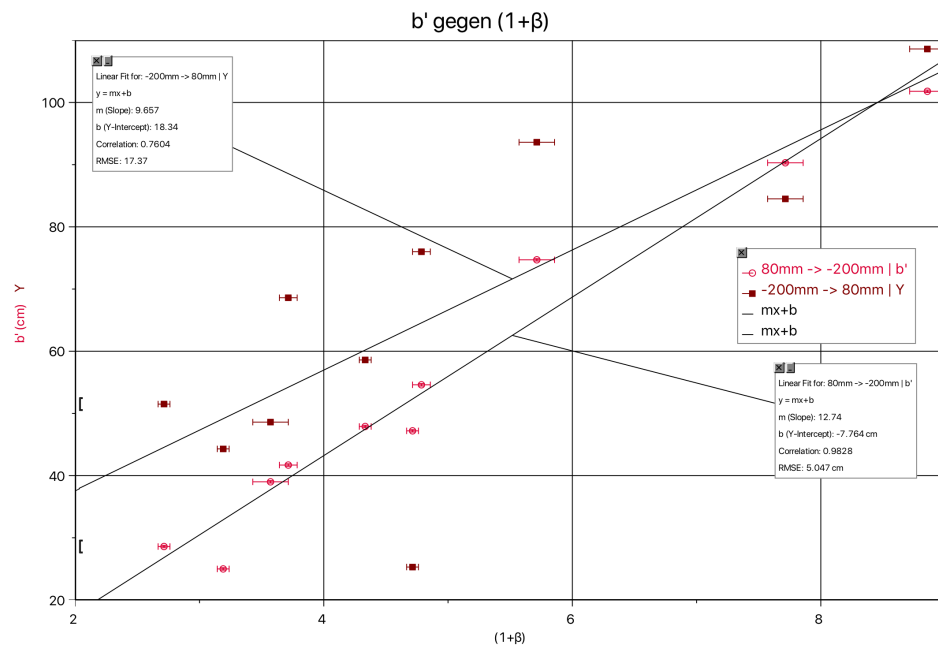


Abbildung 5: Graph von b' gegen $1 + \beta$ für beide Linsensysteme

7 Literatur

„Versuchsanleitung zum Physiklabor für Anfänger*innen.“ Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.