

Introduction à l'Analyse Statistique Énergétique

Éric SAVIN

Avertissement

Ce polycopié est la troisième version du support de cours de master (MS)²SC de l'Université Paris-Saclay introduisant les méthodes énergétiques pour la vibro-acoustique aux hautes fréquences. Il s'appuie en partie sur l'expertise développée à l'ONÉRA depuis près d'une trentaine d'année principalement autour des travaux de F. Chabas, J.-M. David, A. Desanti, C. Soize et l'auteur. Son contenu est amené à évoluer de façon plus ou moins continue au cours du temps, suivant en partie les commentaires, questions et critiques formulés par les élèves et autres lecteurs potentiels. Merci d'adresser vos remarques à `eric.savin@centralesupelec.fr`.

Châtillon, 20 septembre 2021

Table des matières

Avertissement	3
1 Introduction	9
2 Aspects énergétiques de l'oscillateur simple	19
2.1 Oscillateur simple	19
2.1.1 Grandeurs énergétiques	20
2.1.2 Résolvante et caractéristiques du filtre associé	21
2.2 Problème d'évolution déterministe	22
2.2.1 Réponse libre	22
2.2.2 Réponse forcée	24
2.2.3 Réponse d'évolution	25
2.3 Problème d'évolution aléatoire	25
2.3.1 Réponse libre	25
2.3.2 Réponse forcée stationnaire	26
2.3.3 Réponse d'évolution	27
2.4 Oscillateur simple aléatoire soumis à une excitation harmonique	27
2.5 Synthèse des résultats obtenus	28
3 Systèmes couplés élémentaires	31
3.1 Système couplé à deux degrés de liberté	31
3.1.1 Données et hypothèses	31
3.1.2 Grandeurs énergétiques	33
3.1.3 Réponse forcée stationnaire	33
3.1.4 Puissance moyenne échangée entre les oscillateurs	34
3.1.5 Équation fondamentale et paramètres SEA	36
3.2 Oscillateur simple immergé dans un fluide acoustique	41
3.2.1 Données et hypothèses	41
3.2.2 Problème de Helmholtz extérieur	42
3.2.3 Grandeurs énergétiques	44
3.2.4 Impédance de l'oscillateur immergé et fréquence propre "mouillée"	45
3.2.5 Réponse forcée stationnaire et bilan énergétique	46
3.3 Synthèse des résultats obtenus	50

4 Vibrations aléatoires stationnaires des systèmes linéaires continus	51
4.1 Notations et hypothèses	51
4.2 Grandeurs énergétiques	55
4.3 Caractéristiques du filtre associé au système réduit (4.9)	56
4.4 Problème d'évolution déterministe	57
4.4.1 Réponse libre	57
4.4.2 Réponse forcée	58
4.4.3 Réponse d'évolution	59
4.5 Problème d'évolution aléatoire	59
4.5.1 Réponse forcée stationnaire	59
4.5.2 Réponse d'évolution	61
4.6 Structure à spectre aléatoire soumise à une excitation harmonique	61
4.7 Synthèse des résultats obtenus	63
5 Systèmes linéaires continus couplés	65
5.1 Équations énergétiques du couplage de deux sous-structures élastiques	65
5.1.1 Données et hypothèses	65
5.1.2 Modes propres de vibration des sous-structures découplées	67
5.1.3 Grandeurs énergétiques	69
5.1.4 Réponse forcée stationnaire	70
5.1.5 Puissance moyenne échangée entre les sous-structures	71
5.2 Équations énergétiques du couplage vibro-acoustique interne	73
5.2.1 Données et hypothèses	73
5.2.2 Modes propres de vibration	77
5.3 Équations énergétiques du couplage vibro-acoustique externe	78
5.3.1 Données et hypothèses	78
5.3.2 Problème de Helmholtz extérieur	80
5.3.3 Grandeurs énergétiques	81
5.3.4 Fréquences propres "mouillées"	83
5.3.5 Réponse forcée stationnaire et bilan énergétique	85
5.4 Synthèse des résultats obtenus	87
6 Analyse Statistique Énergétique (SEA)	89
6.1 Hypothèses fondamentales	89
6.2 Équations de la SEA pour les systèmes linéaires couplés	91
6.2.1 Formulation pour deux systèmes couplés	91
6.2.2 Formulation pour plusieurs systèmes couplés	93
6.3 Paramètres de la SEA	94
6.4 Quelques remarques importantes et exemples	94
A Rappels sur les processus stochastiques du second ordre	109
A.1 Processus du second ordre	109
A.2 Processus stationnaires en m.o.d.	111
A.3 Dérivation en m.o.d. des processus du second ordre	112
A.4 Filtrage	112
A.4.1 Définitions	113

A.4.2 Réponse d'un filtre linéaire de convolution à une entrée stationnaire en m.o.d.	113
B Densité modale	115
B.1 Milieu unidimensionnel borné	115
B.2 Milieu bidimensionnel borné	115
B.3 Milieu tridimensionnel borné	116
B.4 Milieu élastique non borné	116
C Mobilité d'une structure et d'un milieu infini	119
C.1 Milieu borné	119
C.2 Conductance d'une poutre infinie en flexion	121
C.3 Conductance d'une plaque infinie en flexion	122
C.4 Conductance d'un milieu élastique infini	123
D Power flow analysis	125
Bibliographie générale	127
Index	129

Chapitre 1

Introduction

Le comportement vibratoire aux basses fréquences d'une structure industrielle complexe peut être prédit très efficacement par des modèles numériques réduits de taille limitée. Ils sont construits par une projection de Ritz-Galerkin sur les modes normaux de vibration correspondant aux premières fréquences propres de la structure conservative associée. Leur efficacité est due au faible nombre de degrés de liberté généralisés utilisés dans ce type de représentation. Les modes normaux sont obtenus en résolvant un problème aux valeurs propres bien posé pour lequel seules les premières fréquences propres et déformées propres associées doivent être extraites.

Lorsque la fréquence augmente, et pour des structures tri-dimensionnelles quelconques, ces techniques ne sont plus adaptées, à la fois d'un point de vue strictement numérique, mais également – et surtout – pour des raisons physiques plus fondamentales. En effet la qualité de la base modale de réduction calculée se dégrade fortement, du fait non seulement des algorithmes actuels de résolution des problèmes aux valeurs propres, mais également de l'influence croissante qu'ont les incertitudes de modélisation sur cette base (et donc sur la réponse). L'examen des réponses dynamiques quand la fréquence croît fait aussi clairement apparaître un comportement vibratoire radicalement différent de celui qui est observé aux basses fréquences. Ainsi pour le domaine dit des hautes fréquences¹, il est le plus souvent nécessaire de mettre en œuvre des méthodes numériques alternatives pour la simulation et la prédiction de ce comportement, permettant notamment de tenir compte de l'influence des incertitudes. Ce cours a essentiellement pour objectif de présenter la plus établie de ces méthodes, l'Analyse Statistique Énergétique. Bien que n'étant qu'une approximation fondée sur des hypothèses relativement restrictives, cette approche constitue à ce jour la **seule** méthode **prédictive** ayant un caractère suffisamment général pour traiter les vibrations hautes fréquences de systèmes mécaniques réalistes à l'échelle industrielle. Sur le plan qualitatif, elle reste bien sûr en accord avec les différentes observations expérimentales faites sur la base d'essais de vibration dans ces gammes de fréquence.

Précisons tout de suite à ce stade que dans l'ensemble du texte qui suit, nous nous limitons au cas de systèmes mécaniques **linéaires**, constitués de matériaux ayant un comportement visco-élastique sans ou avec effets de mémoire.

1. Mais aussi pour le domaine dit des moyennes fréquences, qui ne fait néanmoins pas l'objet de ce cours.

Réponses en fréquence d'une structure complexe

Afin d'illustrer ces différents points, considérons les réponses dynamiques enregistrées pour une structure complexe constituée d'un matériau métallique faiblement dissipatif (du dural[®], un alliage d'aluminium, de cuivre et de magnésium très fréquemment utilisé en aéronautique). Des mesures de réciprocité ont montré qu'elle conservait un comportement globalement linéaire sur l'ensemble de la gamme de fréquence examinée. La FIG. 1.1 présente une vue CAO générale de cette structure et la FIG. 1.2 la position des excitations imposées.

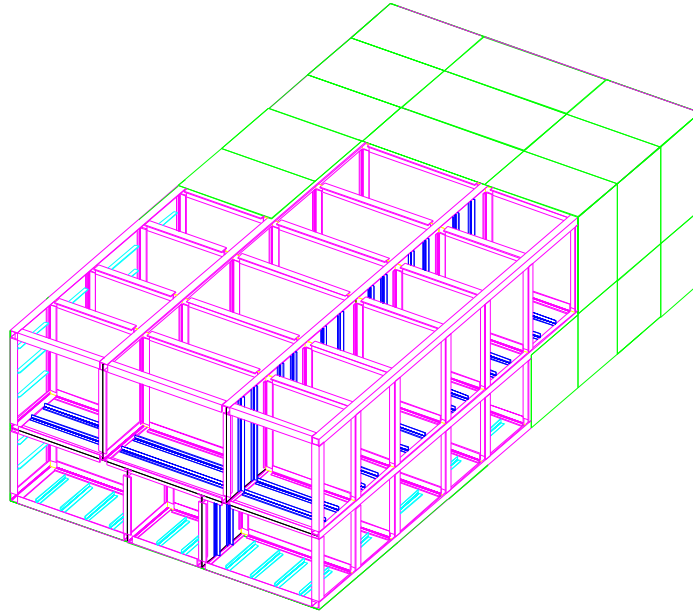


FIGURE 1.1 – Vue CAO de la structure expérimentale. Longueur = 5,3 m, largeur = 2,5 m et hauteur = 1,4 m.

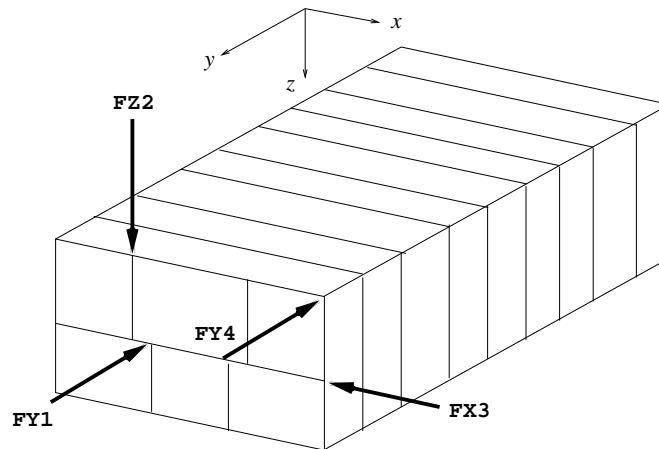


FIGURE 1.2 – Position des excitations sur la structure expérimentale.

La FIG. 1.3 représente les énergies mécaniques (densités par rapport à la fréquence) estimées lors des essais effectués sur la structure expérimentale. Celle-ci est décomposée en

9 mailles suivant son axe longitudinal et les sollicitations sont appliquées au niveau de la première maille. Dans le domaine des *basses fréquences* (BF), ici pour $f \leq 250$ Hz environ, les niveaux d'énergie mécanique totale pour les mailles 1, 5 (intermédiaire) et 9 (autre extrémité) restent comparables. Ainsi l'énergie vibratoire se propage largement dans toute la structure et ne reste pas localisée au voisinage de l'excitation (maille 1). En revanche dans le domaine des *hautes fréquences* (HF), ici pour $f \geq 1200$ Hz environ, les niveaux d'énergie diminuent sensiblement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'excitation. L'énergie vibratoire reste confinée au voisinage de la sollicitation et ne se propage pas, ou seulement de manière diffuse, dans le reste de la structure. Dans le domaine intermédiaire des *moyennes fréquences* (MF), les niveaux d'énergie pour les mailles 5 et 9 sont certes inférieurs à celui de la première maille, mais restent néanmoins comparables. Ainsi une partie de l'énergie vibratoire est localisée au niveau de l'excitation, mais le reste se propage effectivement dans la structure comme pour les basses fréquences.

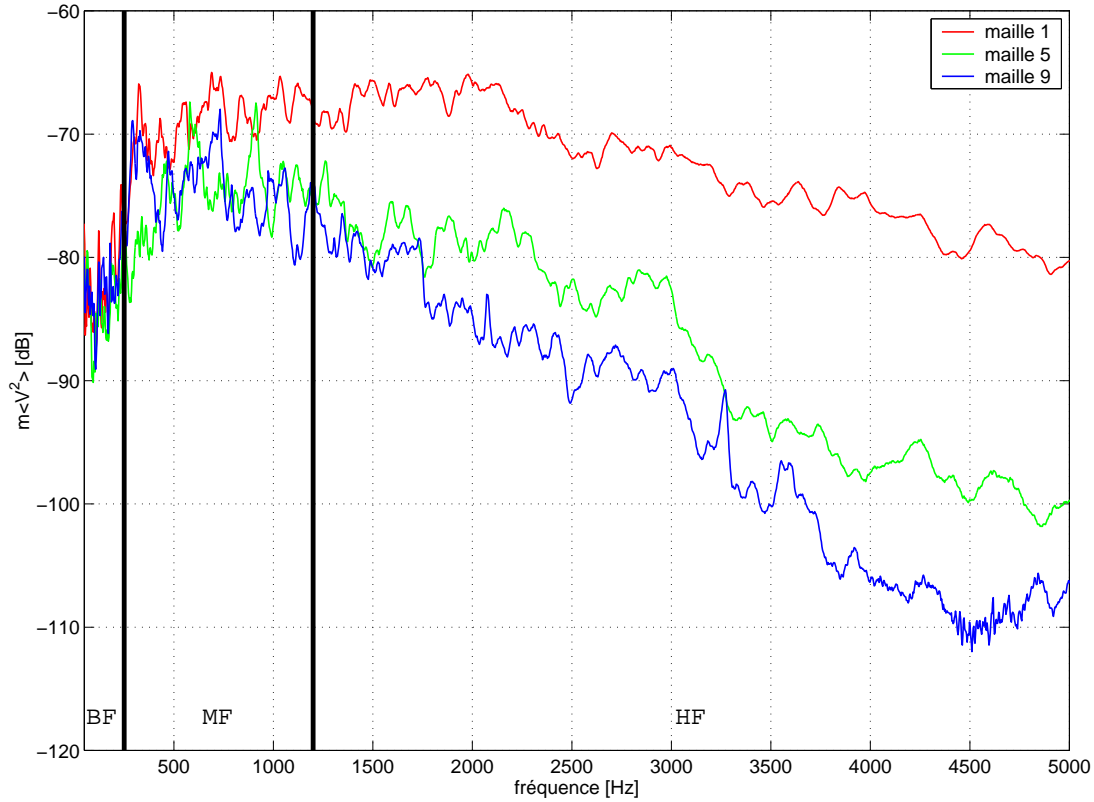


FIGURE 1.3 – Densités d'énergie mécanique mesurées pour la structure expérimentale, $dB_{\text{réf}} = 10 \times \log_{10}(1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2)$.

La FIG. 1.4 présente les accélérations mesurées en différents points le long de la structure pour le même type de sollicitation imposée. Les mêmes remarques concernant la localisation ou non de l'énergie vibratoire peuvent être formulées pour les amplitudes des accélérations, avec ici une information supplémentaire donnée par la phase. Celle-ci décroît uniformément, ou se stabilise, dans le domaine des hautes fréquences et suit la même tendance pour les trois accéléromètres représentés. Ainsi elle n'apporte pas d'information significative sur le comportement vibratoire de la structure d'un point à un autre. Elle varie fortement entre

$-\pi$ et $+\pi$ dans le domaine des basses fréquences – les changements de phase correspondant aux résonances BF – pour lequel elle constitue en revanche une donnée essentielle à la caractérisation du comportement vibratoire de la structure. Enfin dans le domaine des moyennes fréquences, la phase décroît sensiblement mais suit des tendances assez différentes pour les trois accéléromètres. Elle constitue donc une information importante qu'il est essentiel de pouvoir reproduire dans les simulations numériques. D'un point de vue physique,

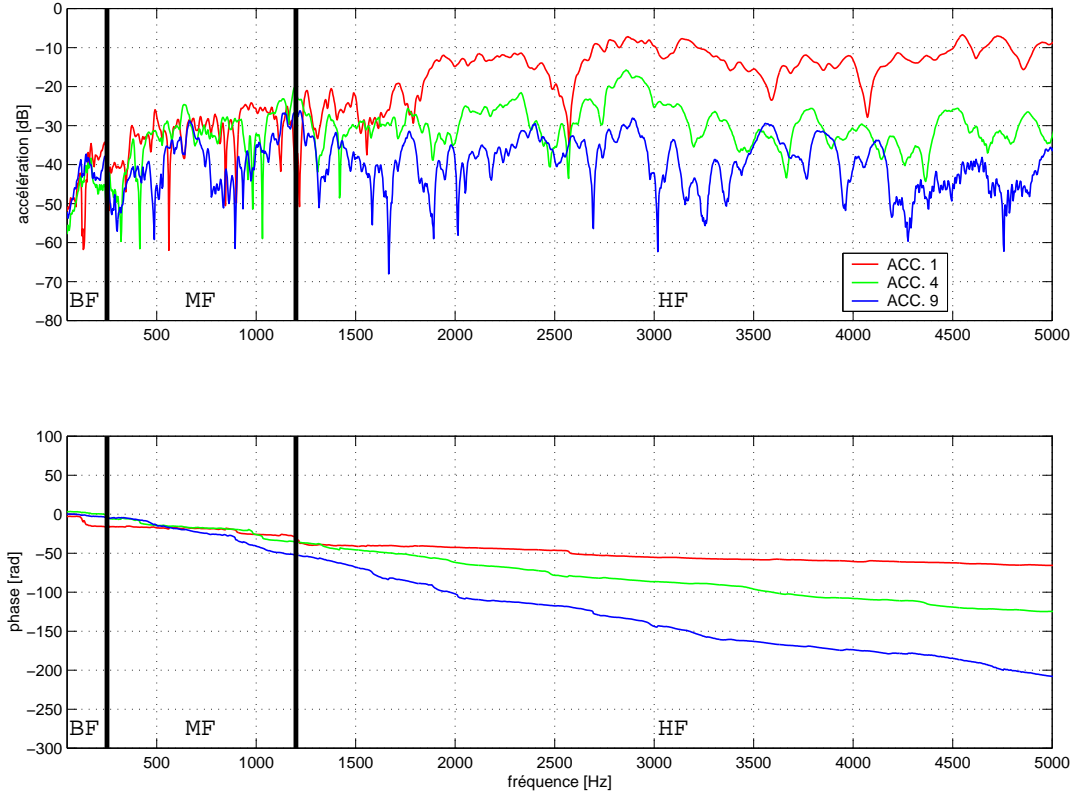


FIGURE 1.4 – Réponses en fréquence (accélérations) mesurées pour la structure expérimentale, $dB_{\text{réf}} = 20 \times \log_{10}(1 \text{ m/s}^2)$.

les différents domaines mis en évidence ci-dessus sont caractérisés de la manière suivante :

- Les basses fréquences correspondent aux premiers modes propres de vibration de la structure, la densité modale (si tant est qu'elle puisse être définie dans ce domaine) restant faible.
- Les hautes fréquences correspondent aux bandes de fréquence pour lesquelles la densité modale devient importante et relativement uniforme ; dans ce cas des grandeurs énergétiques lissant les contributions des différents modes dans une bande HF donnée sont plus à même de caractériser le comportement vibratoire de la structure, d'autant plus que la phase n'apporte quasiment pas d'information.
- Les moyennes fréquences correspondent au domaine intermédiaire pour lequel la densité modale présente des variations importantes dans une bande de fréquence donnée ; les vibrations d'une structure complexe sont caractérisées par la superposition de modes globaux (du type BF) et locaux, ces derniers étant regroupés par paquets ("modal clusters" en Anglais) dans une bande étroite influant à la fois sur le com-

portement local et global de la structure.

Notons que les modes locaux introduits ci-dessus ne sont pas nécessairement associés à des déformées modales d'ordre élevé très oscillantes. Ainsi le domaine des moyennes fréquences telles qu'il est généralement défini dans la littérature spécialisée ne se limite pas à la gamme des fréquences pour laquelle les déformées modales deviennent très oscillantes, comme ce pourrait être le cas pour les modes d'ordre élevé d'une structure simple (une poutre par exemple). Enfin bien sûr la distinction entre les domaines "basse", "moyenne" et "haute" fréquences n'est jamais absolue, elle se fait au cas par cas suivant les systèmes traités.

Influence des incertitudes

Par ailleurs les incertitudes et la complexité structurale jouent un rôle essentiel dans les domaines des moyennes et hautes fréquences comme le montre l'exemple classique très simple ci-dessous², repris également dans l'ouvrage de Morand & Ohayon [12]. Il s'agit de l'étude de l'évolution des valeurs propres et des vecteurs propres d'un problème de vibration dépendant continûment d'un paramètre τ , dont la formulation variationnelle fait intervenir une classe **invariable** de déplacements admissibles. Elle met en évidence le phénomène d'interaction modale ("veering" en Anglais), particulièrement sensible pour des modes groupés par paquets notamment (d'où le lien avec les moyennes fréquences telles que définies plus haut). On considère une structure quelconque dont les N premiers modes propres de vibration sont notés $\{\phi_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq N}$ et les pulsations propres associées $\{\omega_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq N}$; ils vérifient :

$$\mathbf{K}\phi_\alpha = \omega_\alpha^2 \mathbf{M}\phi_\alpha$$

où \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices (symétriques, définies positives) de masse et de raideur de la structure. Les modes propres définissent une transformation orthogonale qui diagonalise simultanément \mathbf{M} et \mathbf{K} et on choisit de les normaliser par rapport à la masse : $\phi_\alpha^T \mathbf{M} \phi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, avec T pour la transposition. Supposons que l'on introduise une perturbation de la raideur de la structure caractérisée par sa matrice de raideur $\mathbf{V}(\tau)$ projetée sur les modes propres de la structure non perturbée, et dépendante du paramètre variable introduit. Alors les valeurs propres $\{\tilde{\omega}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq N}$ de la structure perturbée vérifient :

$$(\omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) q_\beta = \tilde{\omega}_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} q_\beta$$

où les $\{q_\beta\}_{1 \leq \beta \leq N}$ sont les coefficients de la projection des vecteurs propres de la structure perturbée sur ceux de la structure non perturbée. Pour l'approximation à deux modes, consistant à rechercher les modes de la structure perturbée sous la forme d'une combinaison linéaire de deux modes non perturbés de même type de symétrie associés à deux valeurs propres simples consécutives $\omega_1^2 < \omega_2^2$, la résolution de ce système aux valeurs propres conduit au résultat :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\pm^2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 \pm \Delta^{\frac{1}{2}}) \\ \tilde{\phi}_\pm &= \Delta^{-\frac{1}{4}} \left(\pm |\lambda_2 - \tilde{\omega}_\pm^2|^{\frac{1}{2}} \phi_1 + |\lambda_1 - \tilde{\omega}_\pm^2|^{\frac{1}{2}} \phi_2 \right) \end{aligned}$$

avec $\lambda_\alpha = \omega_\alpha^2 + V_{\alpha\alpha}$ et $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4V_{12}^2$. En général il n'y a pas de solution double car le cas $\Delta = 0$ conduit à deux équations pour une inconnue (τ). Deux cas peuvent se présenter :

2. Voir H.J.-P. Morand : 'Analyse dynamique de systèmes conservatifs évolutifs. Discussion des "croisements de modes"', in *Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aéronautique (ATMA), Session 1976*, pp. 329-352 (1976).

1. $2V_{12} \ll |\lambda_1 - \lambda_2|$: c'est le cas dit d'interaction faible. Alors $\tilde{\omega}_-^2 \simeq \lambda_1$ et $\tilde{\omega}_+^2 \simeq \lambda_2$ pour les pulsations propres de la structure perturbée, et $\tilde{\phi}_- \simeq -\phi_1$ et $\tilde{\phi}_+ \simeq \phi_2$ pour ses modes propres. L'effet de la perturbation est d'introduire un décalage des fréquences propres sans pour autant modifier de façon significative les modes propres de la structure.
2. $2V_{12} \gtrsim |\lambda_1 - \lambda_2|$: c'est le cas dit d'interaction forte. Les modes propres sont modifiés de façon significative (c'est l'"hybridation" des modes), et dans le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2$ on a $\tilde{\phi}_- = (-\phi_1 + \phi_2)/\sqrt{2}$ et $\tilde{\phi}_+ = (\phi_1 + \phi_2)/\sqrt{2}$, c'est-à-dire une rotation d'ensemble de 45° des modes propres.

Cette discussion montre que pour une structure ayant des fréquences propres voisines, une faible perturbation, ou incertitude, de la raideur introduit localement des modifications importantes de la réponse de la structure, même si globalement cette réponse est peu perturbée. En effet les vecteurs propres pris individuellement peuvent subir des rotations importantes, mais le sous-espace engendré par tous les vecteurs propres dans une bande de fréquence donnée reste essentiellement le même : c'est l'invariance des sous-espaces bien connue pour les structures faiblement amorties.

Les structures pour lesquelles on observe effectivement des fréquences propres voisines, voire confondues (cas purement académique), sont celles présentant soit des symétries particulières, soit les structures périodiques, soit les assemblages de sous-systèmes identiques ou du moins ayant des fréquences propres voisines. Bien que l'on puisse imaginer le cas par exemple d'une plaque ayant des fréquences propres voisines pour certains modes de torsion ou de flexion, il s'agit donc de structures complexes sollicitées généralement dans une large gamme de fréquences, telles que les fuselages d'avion, les coques de bateau ou encore les caisses de voiture, en incluant éventuellement des cavités acoustiques et leur couplage avec le milieu extérieur. Aux basses fréquences, les modes globaux contribuent pour l'essentiel à l'énergie vibratoire, tandis qu'aux moyennes et hautes fréquences la contribution des modes locaux liés aux différents éléments structuraux constituant la structure complète devient non négligeable, voire dominante pour certaines bandes de fréquence.

Plus généralement, la théorie des matrices aléatoires symétriques définies positives³, telles que les matrices de masse et de raideur, montre que la dispersion des réponses augmente lorsque la fréquence croît, pour un niveau d'incertitude fixé. La FIG. 1.5 ci-dessous⁴ représente les enveloppes de la fonction de réponse en fréquence (en dB) d'une plaque pour un niveau d'incertitude de 10%. Ce résultat purement théorique est largement confirmé par les résultats d'essais réalisés sur des structures réelles, notamment dans l'industrie automobile. Par exemple la FIG. 1.6 présente les enveloppes des fonctions de réponse en fréquence et leurs phases mesurées pour 4 exemplaires d'un même modèle de voiture particulière⁵. La dispersion peut atteindre 15 dB et est très différente suivant la position de l'excitation. La

3. C. Soize : 'A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamic', *Probabilistic Engineering Mechanics* **15**(3), 277-294 (2000), et 'Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamic', *Journal of the Acoustical Society of America* **109**(5), 1979-1996 (2001).

4. D'après H. Chebli & C. Soize : 'Une nouvelle approche de la modélisation des incertitudes de modélisation basée sur le principe du maximum d'entropie, en sous-structuration dynamique des structures, pour le domaine des basses fréquence', in *Actes du 5ème Colloque National en Calcul des Structures* (eds. J.-L. Batoz, H. Ben Dhia & P. Chauchot), Giens, 15-18 mai 2001, pp. 967-974 (2001). Teknea, Toulouse.

5. L.A. Wood & C.A. Joachim : 'Interior noise scatter in four-cylinder sedans and wagon', *International Journal of Vehicle Design* **8**(4/5/6), 428-438 (1987).

FIG. 1.7 présente quant à elle les fonctions de réponse en fréquence mesurées à l'intérieur de 99 exemplaires d'un même modèle de van⁶. Elles varient d'un facteur 3 environ pour la partie basses fréquences jusqu'à un facteur 10 environ pour les plus hautes fréquences. Ces deux exemples sont caractéristiques de la problématique vibro-acoustique pour les véhicules de transport : l'énergie vibratoire est distribuée sur un très grand nombre de modes propres d'ordres élevés, aucun d'entre eux n'étant dominant par rapport aux autres dans la réponse du système, et les taux d'amortissement sont faibles. Ils indiquent que la caractérisation des niveaux vibratoires d'une structure complexe aux hautes fréquences par la seule donnée de réponses "nominales" n'est pas suffisante. La dispersion liée aux incertitudes doit être prise en compte, par exemple par une approche probabiliste, sans laquelle les modèles proposés n'ont plus vraiment de caractère prédictif. En effet celle-ci permet de **quantifier** le niveau de confiance accordé aux résultats des prédictions.

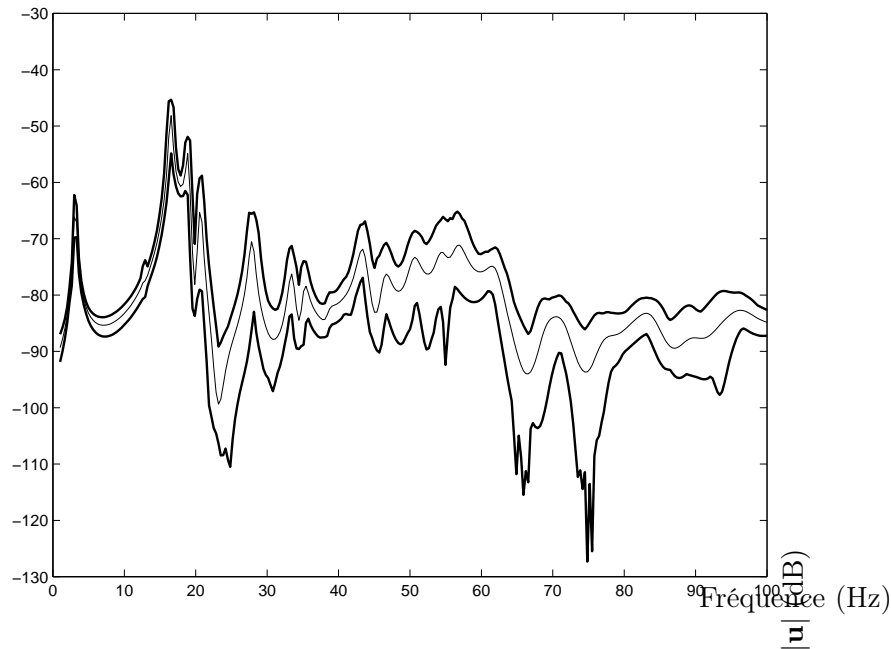


FIGURE 1.5 – Enveloppes (traits gras) et moyenne (trait fin) de la fonction de réponse en fréquence d'une plaque mince rectangulaire en appui simple avec prise en compte d'un niveau d'incertitude de 10% par la théorie des matrices aléatoires symétriques définies positives ; $\text{dB}_{\text{réf}} = 20 \times \log_{10}(1 \text{ m})$. D'après Chebli & Soize (2001).

Analyse statistique énergétique

L'Analyse Statistique Énergétique, ou Statistical Energy Analysis (SEA) en Anglais, a pour objet l'étude du comportement dynamique des systèmes mécaniques linéaires dans le domaine des hautes fréquences en incluant les effets d'incertitude. Le terme "énergie" est utilisé car la variable primale pour la formulation des équations de la SEA est l'énergie vibratoire **moyenne** de chacun des sous-systèmes constituant le système mécanique complet

6. M.S. Kompella & R.J. Bernhard : 'Measurement of the statistical variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicle', in *Proceedings of the SAE Noise & Vibration Conference, Traverse City MI, 10-13 may 1993*, pp. 65-81 (1993). Society of Automotive Engineers, Troy, MI.

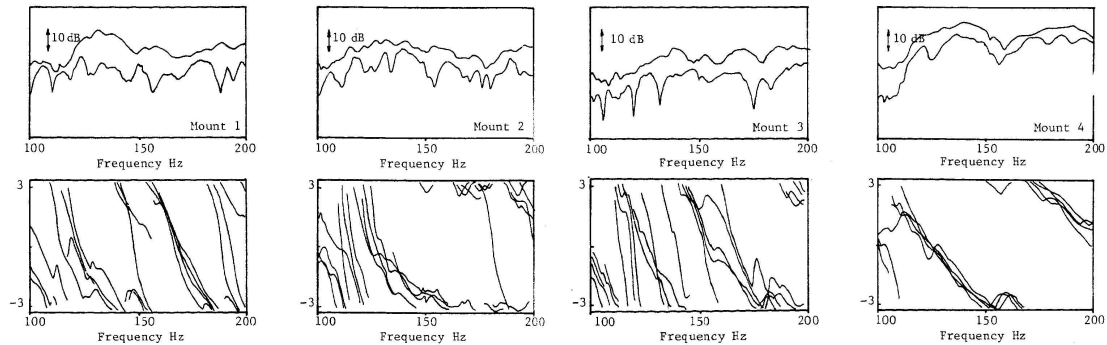


FIGURE 1.6 – Enveloppes des amplitudes (figures du haut) et phases (figures du bas) des réponses en fréquence enregistrées pour 4 exemplaires d'un même modèle de berline General Motors : pression acoustique au niveau de la tête du conducteur pour une excitation mécanique imposée successivement aux 4 points d'attache du bloc moteur ("Mount 1" à "Mount 4"). D'après Wood & Joachim (1987).

étudié. Le terme "statistique" est utilisé car les paramètres mécaniques qui décrivent la dynamique de ces sous-systèmes sont considérés comme incertains, et modélisés par des variables aléatoires. Néanmoins dans ses développements théoriques, la SEA ne considère pas directement ces paramètres comme étant aléatoires, mais utilise plutôt des résultats d'équivalence de moyennes pour l'énergie vibratoire décrits plus en détail dans les chapitres suivants.

Grâce à ces équivalences, l'énergie moyenne est interprétée comme une **moyenne d'ensemble relative à une population de systèmes** (typiquement les différents exemplaires d'un même modèle de voiture à la sortie d'une chaîne d'assemblage). Elle représente un niveau de réponse par sous-système, plutôt qu'une estimation locale, la structure d'ensemble étant subdivisée en plusieurs sous-systèmes génériques. De plus elle est évaluée par bandes de fréquence de largeurs finies. Ces deux opérations contribuent à réduire considérablement les variances observées pour les réponses vibratoires, comme c'était le cas dans les exemples précédents. Il est important de garder à l'esprit que la réponse d'un système particulier n'a aucune raison d'être exactement la réponse moyenne évaluée pour un ensemble de systèmes ; ici intervient la notion d'écart-type de cette réponse par rapport à une moyenne ou une tendance. L'évaluation des écarts-types pour la méthode SEA est un thème actif de recherches qui ne sera pas abordé dans ce cours en raison de sa complexité, même si ce point est essentiel.

Enfin les équations fondamentales de la SEA sont celles régissant les échanges d'énergie entre sous-systèmes. Elles permettent de reproduire le type de comportement observé aux hautes fréquences et décrit plus haut (voir la FIG. 1.3 et la FIG. 1.4). En fait leur validité repose sur une hypothèse forte de couplage faible entre les sous-systèmes. Celle-ci privilégie un comportement dynamique du système complet tel que ses modes propres de vibration sont voisins des modes propres locaux des sous-systèmes pris isolément. Dans ce cas il est clair que la distribution d'énergie dans le système ne peut que décroître au fur et à mesure que l'on s'éloigne des zones excitées, en accord avec ce que l'on observe expérimentalement. Il s'agit donc bien d'une approche dédiée aux hautes fréquences qui ne peut en aucun cas être étendue aux basses fréquences.

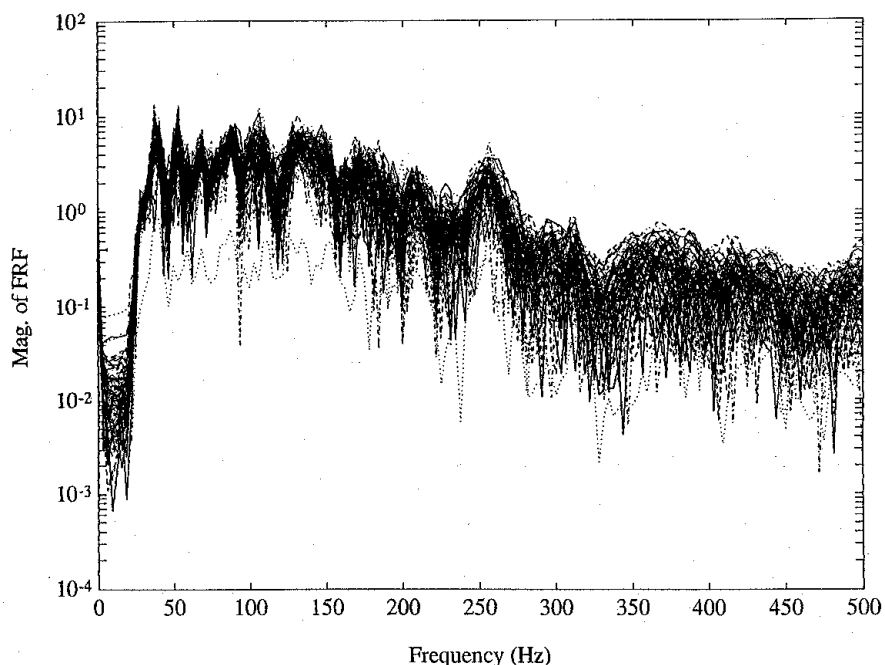


FIGURE 1.7 – Amplitude des réponses en fréquence enregistrées pour 99 exemplaires d'un même modèle de van Isuzu : pression acoustique au niveau de la tête du conducteur pour une excitation mécanique imposée à la jante du pneu avant gauche. D'après Kompella & Bernhard (1993).

Éléments bibliographiques

L'ouvrage de base concernant l'analyse statistique énergétique est le livre de R. H. Lyon [10] publié en 1975. Il a été très largement remanié et complété en 1995 en collaboration avec R. G. DeJong [11]. Dans toute la littérature mondiale, cette approche est connue sous le sigle SEA introduit par Ungar⁷ en 1966. Les ouvrages de Cremer *et al.* [7] (voir le chapitre V, section 8) et Lesueur [9] (voir le chapitre 7) en contiennent tous deux une brève introduction. Une présentation récente est proposée par les *Techniques de l'Ingénieur* [3,4]. Les principales revues scientifiques internationales dans lesquelles sont publiés des articles relatifs à ces méthodes pour la vibro-acoustique sont :

- le *Journal of the Acoustical Society of America* (asa.aip.org/jasa.html),
- le *Journal of Sound and Vibration* (www.elsevier.com/locate/jsvi),
- et le *Journal of Vibration and Acoustics* (*Quarterly Transactions of the ASME*, scitation.aip.org/ASMEJournals/VibrationAcoustics).

On pourra également consulter les revues *Acoustical Physics*, *AIAA Journal*, *Applied Acoustics*, *The Shock and Vibration Digest* ...

Plusieurs logiciels permettant de faire des calculs de type SEA ont été développés et commercialisés ces trente dernières années. Lockheed Aerospace (logiciel VAPEPS), l'Aérospatiale (aujourd'hui EADS, logiciel LASCAR pour le compte du CNES), l'ESA (logiciel GENSTEP) ou encore McDonnell Douglas (pour le compte de la NASA) ont mis en œuvre leurs propres codes de calcul dès la fin des années 70. Le logiciel PÉGASE est développé à l'ONÉRA depuis

7. E.E. Ungar : 'Statistical energy analysis of vibrating system', *Quarterly Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry* **89**(4) Series B, 626-632 (1967).

1987 (www.onera.fr/dads/). Le logiciel VAPEPS a été utilisé pour dimensionner la navette spatiale, tandis que le logiciel LASCAR a permis la qualification vibratoire de la famille de lanceurs Ariane. Les plus diffusés aujourd'hui sont les codes SEAM[®] (www.seam.com), développé par Cambridge Collaborative, Inc., AutoSEA[®] (www.esi-group.com) et AutoSEA-X (aujourd'hui SEA-XP), développé par la société française InterAC (<http://www.interac.fr>), ou encore SEADS, développé par LMS International (www.lms.be).

Enfin le groupe thématique européen SEANET maintient son propre site internet sur lequel on peut trouver les coordonnées des différents partenaires universitaires et industriels, un "Guide d'Utilisation" de la SEA, des exemples de sa mise en œuvre sur des cas industriels complexes (lanceur spatial, train à grande vitesse ...), une liste de codes de calcul commerciaux, quelques références bibliographiques ou encore les descriptifs des projets européens en cours de réalisation (voir www.seanet.be/public/web_e.html).

Plan du cours

Le chapitre 2 est consacré à des rappels de notions élémentaires concernant l'oscillateur simple (système à un degré de liberté). Il aborde plus particulièrement les aspects énergétiques de son mouvement. Dans le chapitre 3 sont examinés en détail deux problèmes fondamentaux à l'origine de la formulation de base de la SEA : d'une part un système constitué de deux oscillateurs simples couplés de manière conservative, d'autre part un oscillateur simple immergé dans un fluide acoustique. Les principaux résultats présentés au chapitre 2 sont étendus à des systèmes linéaires continus ayant une infinité de degrés de liberté au chapitre 4, ce qui permet ensuite d'aborder les aspects énergétiques du couplage de deux systèmes linéaires continus au chapitre 5. Le chapitre 6 présente enfin la formulation SEA complète, obtenue à partir de l'ensemble des développements précédents.

Chapitre 2

Aspects énergétiques de l'oscillateur simple

Les aspects énergétiques du mouvement vibratoire d'un oscillateur simple faiblement amorti sont essentiels pour la compréhension de toute la suite du cours. Il est donc indispensable de maîtriser les concepts (élémentaires) présentés dans ce chapitre. Trois classes de problèmes fondamentaux sont introduites : réponse d'un oscillateur simple à une excitation déterministe large bande, réponse d'un oscillateur simple à une excitation aléatoire large bande, et enfin réponse d'un oscillateur simple aléatoire à une excitation harmonique à sa fréquence de résonance moyenne. Ils font appel à quelques unes des notions de base relatives aux processus stochastiques du second ordre, rappelées en Annexe A. Nous nous concentrons exclusivement sur les aspects énergétiques ; pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter tout ouvrage de base de dynamique des structures (par exemple [2, 6, 8, 16]).

2.1 Oscillateur simple

Le déplacement de l'oscillateur simple à chaque instant t est noté $u(t)$, sa vitesse et son accélération étant notées respectivement $\dot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t)$. Sa constante de raideur est notée $K > 0$, sa constante d'amortissement $D \geq 0$ et sa masse $M > 0$ (voir la FIG. 2.1). Alors

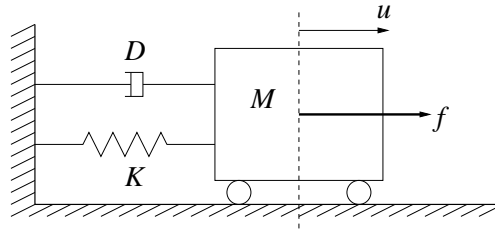


FIGURE 2.1 – Schéma mécanique de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté.

son mouvement est régi par l'équation suivante, déduite du principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{bmatrix} 0 & -M \\ M & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où $\{f(t), t \in \mathbb{R}\}$ désigne la force extérieure appliquée à la masse ; on impose également les conditions initiales à $t = 0$

$$\dot{u}(0) = v_0, \quad u(0) = x_0. \quad (2.2)$$

On introduit les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -M \\ M & D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

le vecteur d'état $\mathbf{u} = (\dot{u}, u)$ et la condition initiale $\mathbf{u}_0 = (v_0, x_0)$, de sorte que l'équation ci-dessus prend la forme usuelle d'un système du premier ordre :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{Q}f, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (2.3)$$

Nous utiliserons par ailleurs les notations classiques suivantes :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad D' = 2\sqrt{KM}, \quad \xi = \frac{D}{D'}, \quad \eta_d = 2\xi$$

pour respectivement la pulsation propre de vibration du système conservatif associé, l'amortissement critique, le taux d'amortissement critique et le facteur de perte par dissipation. L'inverse de ce dernier est aussi appelé facteur de qualité, noté usuellement Q . Dans toute la suite nous considérons des systèmes faiblement amortis tels que $\xi \ll 1$ sous la condition $0 \leq \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.1.1 Grandeurs énergétiques

La *puissance instantanée* de l'oscillateur est le scalaire :

$$\Pi(t) = (\mathbf{B}\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad (2.4)$$

et la *puissance dissipée* par l'oscillateur est le scalaire :

$$\Pi_d(t) = (\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) \geq 0. \quad (2.5)$$

L'amortissement est parfois plutôt caractérisé dans la littérature par la fonction de dissipation de Rayleigh $D(t) = \frac{1}{2}\Pi_d(t)$. La *puissance injectée* est :

$$\Pi_{IN}(t) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{u}})f. \quad (2.6)$$

En multipliant l'équation (2.3) ci-dessus par $\dot{\mathbf{u}}$, on en déduit le bilan des puissances instantanées :

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi_{IN}(t) - \Pi_d(t)} \quad (2.7)$$

avec $\mathcal{E}(t) > 0$ l'énergie mécanique instantanée de l'oscillateur définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{u}(t)^2 + \frac{1}{2}Ku(t)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

et telle que $\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi(t)$. Le premier terme ci-dessus est l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}M\dot{u}^2$, le second est l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2}Ku^2$. L'énergie totale dissipée au cours du mouvement jusqu'à l'instant t est donnée par :

$$\mathcal{E}_d(t) = \int_{-\infty}^t \Pi_d(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

et l'énergie totale introduite au cours du mouvement jusqu'à l'instant t est quant à elle donnée par :

$$\mathcal{E}_{IN}(t) = \int_{-\infty}^t \Pi_{IN}(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

2.1.2 Résolvante et caractéristiques du filtre associé

La résolvante du système (2.3) ci-dessus est la fonction $t \mapsto \mathbf{G}(t)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2, 2)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}(t) = \mathbf{0} & \forall t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{G}(0) = \mathbb{I}_2 \end{cases}$$

où \mathbb{I}_n est la matrice identité $n \times n$. Elle s'écrit $\mathbf{G}(t) = e^{-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t}$, soit :

$$\begin{aligned} G_{22}(t) &= \left[\cos(\omega_D t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) \right] e^{-\xi\omega_p t}, \quad G_{21}(t) = \frac{1}{\omega_D} \sin(\omega_D t) e^{-\xi\omega_p t} \\ G_{11}(t) &= \dot{G}_{21}(t), \quad G_{12}(t) = \dot{G}_{22}(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec la pulsation propre amortie $\omega_D = \omega_p \sqrt{1-\xi^2}$.

La réponse impulsionnelle (voir l'Annexe A.4) de ce système, $t \mapsto \mathbb{h}(t)$ de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{h}(t) &= \mathbf{G}(t)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} \times \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) \\ &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} G_{11}(t) \\ G_{21}(t) \end{pmatrix} \times \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le filtre linéaire de convolution associé est causal, et stable car \mathbb{h} est intégrable sur \mathbb{R} .

La fonction de transfert du filtre, $p \mapsto \mathbb{H}(p)$ de $D_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, est la transformée de Laplace unilatérale de la réponse impulsionnelle puisque $\mathbb{h}(t) = 0$ pour $t < 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(p) &= (p\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{M(p^2 + 2\xi\omega_p p + \omega_p^2)} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Son domaine d'holomorphie $D_{\mathbb{H}}$ contient l'axe imaginaire, les pôles ayant leur partie réelle strictement négative.

La fonction de réponse en fréquence du filtre, $\omega \mapsto \hat{\mathbb{h}}(\omega)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$, est la transformée de Fourier (au sens des fonctions intégrables) de la réponse impulsionnelle. Pour un filtre dynamique, on a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{h}}(\omega) &= \mathbb{H}(0 + i\omega) \\ &= \hat{h}(\omega) \begin{pmatrix} i\omega \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec l'expression suivante de la *réceptance* (ou complaisance, déplacement sur force) de l'oscillateur simple :

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{M(-\omega^2 + 2i\xi\omega_p\omega + \omega_p^2)}.$$

$A(\omega) = \widehat{h}(\omega)^{-1}$ est sa *raideur dynamique*, tandis que $Z(\omega) = [i\omega\widehat{h}(\omega)]^{-1}$ est son *impédance*. La partie réelle de $Z(\omega)$ est la résistance de l'oscillateur, indépendante de la fréquence et égale à $M\eta_d\omega_p$, et sa partie imaginaire la réactance, égale quant à elle à $M\omega(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$. L'*admittance* (ou mobilité, vitesse sur force) est $Y(\omega) = Z^{-1}(\omega) = i\omega\widehat{h}(\omega)$, sa partie réelle étant appelée conductance et sa partie imaginaire susceptance. L'*inertance* (accélération sur force) est $\Gamma(\omega) = -\omega^2\widehat{h}(\omega)$. Enfin la fonction $\omega \mapsto |\widehat{h}(\omega)|$ est le gain du filtre associé, qui atteint un maximum absolu en $\omega = \pm\omega'_p$ avec

$$\omega'_p = \omega_p\sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (\text{fréquence propre de résonance}).$$

On a par ailleurs les quadratures classiques suivantes :

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2DK}, \quad (2.15)$$

$$\int_0^{+\infty} \omega^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2DM}. \quad (2.16)$$

La première permet d'évaluer la *bande passante équivalente* b_e du filtre ("noise-bandwidth" en Anglais), définie par

$$b_e |\widehat{h}(\omega'_p)|^2 = \int_0^{+\infty} |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega.$$

On en déduit

$$b_e = \pi\xi\omega_p(1 - \xi^2), \quad (2.17)$$

ou $b_e \simeq \pi\xi\omega_p = \frac{\pi}{2}\Delta_p$ sachant que $\xi \ll 1$ (on a posé $\Delta_p = \eta_d\omega_p = \frac{D}{M}$ pour la largeur de bande passante à -3 dB du filtre associé, "half-power bandwidth" en Anglais, délimitée par les pulsations ω_m et ω_M telles que $|\widehat{h}(\omega_m)|^2 = |\widehat{h}(\omega_M)|^2 = \frac{1}{2}|\widehat{h}(\omega'_p)|^2$). La bande passante équivalente est représentée par la zone grisée sur la FIG. 2.2 ci-dessous, tandis que la bande passante à -3 dB est délimitée par les traits pointillés. Le facteur de qualité de l'oscillateur est par définition $Q = \frac{\omega_p}{\Delta_p}$, soit comme indiqué plus haut $Q = \eta_d^{-1}$.

2.2 Problème d'évolution déterministe

2.2.1 Réponse libre

La réponse libre du système (2.3) ci-dessus est sa solution pour $f \equiv 0$, $t \geq 0$, et s'écrit :

$$\mathbf{u}^\ell(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{u}_0, \quad t \geq 0. \quad (2.18)$$

Des expressions (2.11) ci-dessus de la résolvante on déduit le résultat important suivant, néanmoins valable uniquement pour $D > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}^\ell(t)\| = 0. \quad (2.19)$$

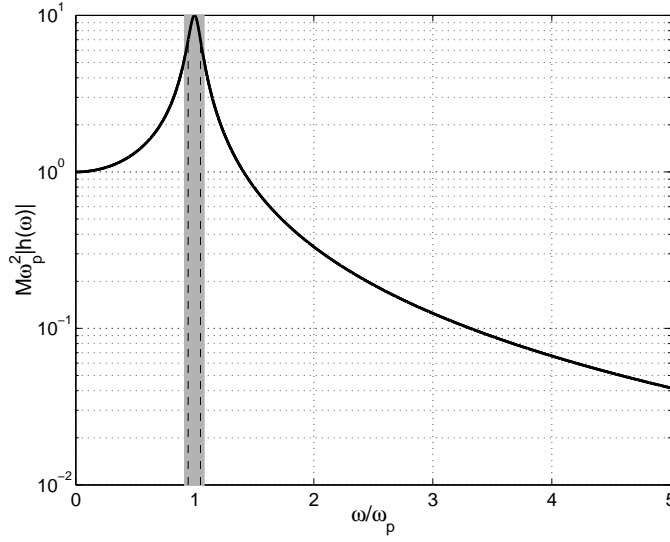


FIGURE 2.2 – Gain normalisé $M\omega_p^2|\hat{h}(\omega)|$ d'un oscillateur simple, $\xi = 0.05$.

L'énergie mécanique associée à la réponse libre est donnée par $\mathcal{E}^\ell(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{u}^\ell, \mathbf{u}^\ell)$ et s'écrit pour $\xi \ll 1$

$$\mathcal{E}^\ell(t) \simeq \mathcal{E}_0 e^{-\eta_d \omega_p t} \quad (2.20)$$

avec $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)$. Le *temps de réverbération* T_R est défini classiquement en acoustique par la condition

$$\mathcal{E}^\ell(T_R) = 10^{-n} \mathcal{E}_0$$

où $n = 6$ [10, 11], soit la formule usuelle :

$$T_R = \frac{13.8}{\eta_d \omega_p}.$$

Plus généralement on parlera de temps d'atténuation $T_{R,n}$ pour un entier positif n quelconque. En intégrant l'équation (2.7) entre $t = 0$ et $t = T \geq T_R$, on obtient le bilan énergétique total pour les vibrations libres

$$\mathcal{E}_d^\ell(T) \simeq \mathcal{E}_0 \quad (2.21)$$

avec bien sûr une égalité stricte pour $T = +\infty$.

Les moyennes temporelles des énergies cinétique et mécanique de vibrations libres au cours d'une pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ sont respectivement :

$$\langle \mathcal{E}_c^\ell \rangle = \frac{1}{T_p} \int_t^{t+T_p} \mathcal{E}_c^\ell(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-\eta_d \omega_p t}$$

et

$$\langle \mathcal{E}_p^\ell \rangle = \frac{1}{T_p} \int_t^{t+T_p} \mathcal{E}_p^\ell(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-\eta_d \omega_p t}$$

pour $\xi \ll 1$: la décroissance des oscillations est négligeable sur une période. Les énergies cinétique et mécanique moyennes (en temps) restent donc essentiellement égales au cours

du mouvement, avec la même relation entre elles que dans le cas non amorti pour lequel l'égalité ci-dessous est stricte :

$$\langle \mathcal{E}_c^\ell \rangle \simeq \langle \mathcal{E}_p^\ell \rangle \simeq \frac{1}{2} \mathcal{E}^\ell(t). \quad (2.22)$$

Enfin la puissance dissipée moyenne peut se mettre sous la forme :

$$\langle \Pi_d \rangle = \eta_d \omega_p \mathcal{E}^\ell(t).$$

2.2.2 Réponse forcée

La réponse forcée du système (2.3) ci-dessus est sa solution pour $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{0}$, $t \in \mathbb{R}$, et s'écrit :

$$\mathbf{u}^f(t) = \int_{-\infty}^t \mathbb{h}(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Sa transformée de Fourier est alors

$$\widehat{\mathbf{u}}^f(\omega) = \widehat{\mathbb{h}}(\omega) \times \widehat{f}(\omega) \quad (2.24)$$

pourvu que \widehat{f} existe.

Une classe privilégiée d'excitation est celle des signaux d'énergie finie (ou de carré intégrable) à bande limitée dont le spectre est borné et à support compact :

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq C \quad \forall \omega \in \mathbb{R}; \quad \widehat{f}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin [-\omega_m, \omega_M].$$

Pour une telle excitation, $t \mapsto f(t)$ est de carré intégrable et converge vers 0 à l'infini, de sorte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}^f(t) = 0$. $\widehat{\mathbf{u}}^f(\omega)$ est la transformée de Fourier de la réponse forcée au sens des fonctions intégrables ou de carré intégrable (puisque \mathbb{h} est intégrable) et $t \mapsto \mathbf{u}^f(t)$ converge vers $\mathbf{0}$ à l'infini. En intégrant l'équation (2.7) sur \mathbb{R} , on obtient le bilan énergétique total pour les vibrations forcées

$$\mathcal{E}_d^f(\infty) = \mathcal{E}_{IN}^f(\infty). \quad (2.25)$$

Les énergies cinétique et élastique totales au cours du mouvement sont d'après les équations (2.14), (2.24) et la formule de Plancherel :

$$E_c^f = \frac{1}{T_p} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_c^f(\tau) d\tau = \frac{M}{4\pi T_p} \int_{-\omega_m}^{\omega_M} \omega^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

et

$$E_p^f = \frac{1}{T_p} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_p^f(\tau) d\tau = \frac{K}{4\pi T_p} \int_{-\omega_m}^{\omega_M} |\widehat{h}(\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Toujours pour $\xi \ll 1$, et en supposant $\omega_m, \omega_M \gg \omega_p$ et $|\widehat{f}(\omega)|$ à variations lentes sur $[-\omega_p - \frac{b_e}{2}, -\omega_p + \frac{b_e}{2}] \cup [\omega_p - \frac{b_e}{2}, \omega_p + \frac{b_e}{2}]$ (excitation dite large bande), on déduit des formules (2.15)–(2.16)

$$E_c^f \simeq E_p^f \simeq \frac{|\widehat{f}(\omega_p)|^2}{16\pi M \xi} = \frac{|\widehat{f}(\omega_p)|^2}{4DT_p} \quad (2.26)$$

de sorte que l'énergie mécanique totale est

$$\frac{1}{T_p} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}^f(\tau) d\tau \simeq \frac{|\widehat{f}(\omega_p)|^2}{2DT_p}. \quad (2.27)$$

Comme par ailleurs $\Pi_d(t) = 4\xi\omega_p\mathcal{E}_c(t)$ on en déduit

$$\mathcal{E}_d^f(\infty) \simeq \eta_d\omega_p \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}^f(\tau) d\tau \simeq \frac{|\hat{f}(\omega_p)|^2}{2M}. \quad (2.28)$$

L'énergie mécanique totale de la réponse forcée dépend de l'amortissement et l'énergie dissipée totale dépend de la masse de l'oscillateur.

2.2.3 Réponse d'évolution

La réponse totale du système (2.3) ci-dessus pour $t \geq 0$ et en utilisant la force extérieure $\{f(t), t \geq 0\}$ est la réponse d'évolution $\{\mathbf{u}(t), t \geq 0\}$; elle s'écrit donc, compte tenu des formules précédentes :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbb{h}(t-\tau)f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.29)$$

On montre alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^f(t)\| = 0 \quad (2.30)$$

dès lors que le système est amorti : $D > 0$.

2.3 Problème d'évolution aléatoire

Les conditions initiales sont modélisées par une variable aléatoire \mathbf{U}_0 définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^2 , du second ordre. L'excitation est modélisée par un processus stochastique $(F_t, t \in \mathbb{R})$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R} , du second ordre, centré, stationnaire et continu en moyenne d'ordre deux (m.o.d., voir les rappels de l'Annexe A pour ces différentes définitions).

2.3.1 Réponse libre

La moyenne des conditions initiales aléatoires étant notée $\boldsymbol{\mu}_0$ et leur auto-corrélation $\mathbf{R}_0 = \mathbb{E}\{\mathbf{U}_0 \otimes \mathbf{U}_0\}$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ désignant l'espérance mathématique, on modélise la réponse libre par un processus stochastique du second ordre $(\mathbf{U}_t^\ell, t \in \mathbb{R})$ dont les moyenne et fonction d'auto-corrélation sont respectivement

$$\boldsymbol{\mu}^\ell(t) = \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\mu}_0, \quad \mathbf{R}^\ell(t, t') = \mathbf{G}(t)\mathbf{R}_0\mathbf{G}(t')^T.$$

L'énergie mécanique moyenne (espérance mathématique) associée est alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{m,t}^\ell\} &= \frac{1}{2}M \left([\mathbf{R}^\ell(t, t)]_{11} + \omega_p^2 [\mathbf{R}^\ell(t, t)]_{22} \right) \\ &= \mathbb{E}\{\mathcal{E}_0\} e^{-\eta_d\omega_p t} \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_0\} = \frac{1}{2}M ([\mathbf{R}_0]_{11} + \omega_p^2 [\mathbf{R}_0]_{22})$. On peut établir la même propriété d'équipartition des moyennes temporelles des espérances des énergies cinétique et élastique que dans le cas déterministe.

2.3.2 Réponse forcée stationnaire

La moyenne du processus stochastique $(F_t, t \in \mathbb{R})$ est $\mu_F = 0$ et sa fonction d'auto-corrélation est notée $t \mapsto R_F(t) = \mathbb{E}\{F_{t+t'}F_{t'}\}$. On suppose qu'il existe une fonction $\omega \mapsto S_F(\omega)$, de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, intégrable et paire (c'est la densité spectrale de puissance de l'excitation), telle que

$$R_F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} S_F(\omega) d\omega.$$

La réponse forcée stationnaire du système (2.3) ci-dessus est le processus stochastique $(\mathbf{U}_t^f, t \in \mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$\mathbf{U}_t^f = \int_0^{+\infty} \mathbb{h}(\tau) F_{t-\tau} d\tau$$

dans le sens de l'intégrale en m.o.d. d'un processus stochastique du second ordre [15]. $(\mathbf{U}_t^f, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 est du second ordre, centré, stationnaire et continu en m.o.d. sur \mathbb{R} ; sa fonction d'auto-corrélation s'écrit :

$$\mathbf{R}^f(t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{h}(\tau) \otimes \mathbb{h}(\tau') R_F(t + \tau' - \tau) d\tau d\tau',$$

tandis que sa matrice de densité spectrale est :

$$\mathbf{S}^f(\omega) = \widehat{\mathbb{h}}(\omega) \otimes \overline{\widehat{\mathbb{h}}(\omega)} S_F(\omega).$$

Notons que les différentes puissances définies à la section §2.1.1 sont aussi des variables aléatoires pour t fixé. Comme $\mathbb{E}\{U_t^{f2}\} = [\mathbf{R}^f(0)]_{22}$ et $\mathbb{E}\{\dot{U}_t^{f2}\} = [\mathbf{R}^f(0)]_{11}$ sont indépendants de t , on en déduit que $\mathbb{E}\{\dot{\mathcal{E}}_{m,t}^f\} = \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{m,t}^f\} = 0$ (voir l'Annexe A.3), et alors l'équation (2.7) s'écrit :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}^f\} = \mathbb{E}\{\Pi_{IN,t}^f\}. \quad (2.32)$$

Les espérances des énergies cinétique et élastique sont respectivement

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{c,t}^f\} = \frac{1}{2} M [\mathbf{R}^f(0)]_{11} = \frac{1}{2} M \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 S_F(\omega) d\omega$$

et

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{p,t}^f\} = \frac{1}{2} K [\mathbf{R}^f(0)]_{22} = \frac{1}{2} K \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(\omega)|^2 S_F(\omega) d\omega.$$

Pour $\xi \ll 1$ et en supposant que $S_F(\omega)$ est à variations lentes sur $[\omega_p - \frac{b_a}{2}, \omega_p + \frac{b_a}{2}]$ (excitation dite large bande), on déduit des formules (2.15)–(2.16)

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{c,t}^f\} \simeq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{p,t}^f\} \simeq \frac{\pi S_F(\omega_p)}{4M\xi\omega_p} = \frac{\pi S_F(\omega_p)}{2D} \quad (2.33)$$

(indépendantes du temps) de sorte que

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{m,t}^f\} \simeq \frac{\pi S_F(\omega_p)}{D}. \quad (2.34)$$

Comme par ailleurs

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}^f\} = D [\mathbf{R}^f(0)]_{11} = D \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 S_F(\omega) d\omega$$

on a pour une excitation large bande

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}^f\} \simeq \eta_d \omega_p \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{m,t}^f\} \simeq \frac{\pi S_F(\omega_p)}{M}. \quad (2.35)$$

On en déduit enfin la puissance injectée moyenne par la relation (2.32). L'énergie mécanique moyenne de la réponse forcée stationnaire dépend de l'amortissement et la puissance dissipée moyenne dépend de la masse de l'oscillateur.

2.3.3 Réponse d'évolution

La réponse d'évolution aléatoire du système (2.3) ci-dessus est le processus stochastique $(\mathbf{U}_t, t \geq 0)$ qui s'écrit :

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{G}(t)\mathbf{U}_0 + \int_0^t \mathbb{h}(t-\tau)F_\tau d\tau, \quad t \geq 0$$

le second terme ayant le sens de l'intégrale en m.o.d. d'un processus stochastique du second ordre [15]. $(\mathbf{U}_t, t \geq 0)$ est du second ordre, non centré (sauf si $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$), continu en m.o.d, non stationnaire. En revanche, on peut établir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}_t - \mathbf{U}_t^f\| = 0 \quad (2.36)$$

dès lors que le système est amorti : $D > 0$.

2.4 Oscillateur simple aléatoire soumis à une excitation harmonique

Le troisième type de problème fondamental concernant l'oscillateur simple est le suivant :

- on suppose que sa masse M et son taux d'amortissement critique ξ sont constants, tandis que sa fréquence propre non amortie ω_p est une variable aléatoire Ω à valeurs réelles positives et suivant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle

$$I_p = \left[\underline{\omega}_p - \frac{\Delta\omega}{2}, \underline{\omega}_p + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$$

avec les conditions $\underline{\omega}_p - \frac{\Delta\omega}{2} > 0$, $\underline{\omega}_p > 0$ et $\pi\xi\omega_p \ll \Delta\omega$;

- il est sollicité par une excitation déterministe harmonique $f(t) = F_0 \cos(\underline{\omega}_p t)$ (la pulsation $\underline{\omega}_p$ de l'excitation est la pulsation centrale de la bande I_p).

Pour t fixé dans $[0, +\infty[$, la réponse impulsionnelle $\mathbb{h}(t)$ donnée par (2.12) est une variable aléatoire que l'on note $\mathbb{h}_\Omega(t)$. De même, pour ω fixée dans \mathbb{R} , la fonction de réponse en fréquence $\hat{\mathbb{h}}(\omega)$ donnée par (2.14) est une variable aléatoire que l'on note $\hat{\mathbb{h}}_\Omega(\omega)$; la réceptance $\hat{h}(\omega)$ et l'admittance $Y(\omega)$ sont des variables aléatoires que l'on note respectivement $\hat{h}_\Omega(\omega)$ et $Y_\Omega(\omega)$.

Pour t fixé dans \mathbb{R} , la réponse forcée de cet oscillateur est une variable aléatoire $\mathbf{U}_\Omega(t)$ qui s'écrit

$$\mathbf{U}_\Omega(t) = \int_{-\infty}^t \mathbb{h}_\Omega(t-\tau)f(\tau) d\tau = F_0 \Re\{e^{i\underline{\omega}_p t} \hat{\mathbb{h}}_\Omega(\omega)\}. \quad (2.37)$$

Les puissances injectée et dissipée sont alors les variables aléatoires données par

$$\Pi_{\text{IN},\Omega}(t) = \frac{1}{2}F_0^2 \left(\Re\{Y_\Omega(\omega)\} + \Re\{e^{2i\omega_p t} Y_\Omega(\omega)\} \right)$$

et

$$\Pi_{\text{d},\Omega}(t) = F_0^2 M \xi \Omega \left(|Y_\Omega(\omega)|^2 + \Re\{e^{2i\omega_p t} Y_\Omega(\omega)^2\} \right).$$

Leurs moyennes temporelles sur une période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ sont les variables aléatoires

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{\text{IN}} \rangle_\Omega &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \Pi_{\text{IN},\Omega}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} F_0^2 \Re\{Y_\Omega(\omega)\}, \\ \langle \Pi_{\text{d}} \rangle_\Omega &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \Pi_{\text{d},\Omega}(\tau) d\tau = F_0^2 M \xi \Omega |Y_\Omega(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Les espérances mathématiques $\mathbb{E}\{\Re\{Y_\Omega(\omega)\}\}$ et $\mathbb{E}\{\Omega |Y_\Omega(\omega)|^2\}$ sont calculées grâce à la quadrature

$$\int_0^{+\infty} \frac{u du}{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2} \simeq \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \alpha \ll 1. \quad (2.38)$$

On en déduit avec la condition $\pi \xi \omega_p \ll \Delta\omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Re\{Y_\Omega(\omega)\}\} &= \frac{2M\xi}{\Delta\omega} \int_{I_p} \omega_p \omega^2 |\hat{h}_{\omega_p}(\omega)|^2 d\omega_p \simeq \frac{\pi}{2M\Delta\omega}, \\ \mathbb{E}\{\Omega |Y_\Omega(\omega)|^2\} &= \frac{1}{\Delta\omega} \int_{I_p} \omega_p \omega^2 |\hat{h}_{\omega_p}(\omega)|^2 d\omega_p \simeq \frac{\pi}{4M^2 \xi \Delta\omega}, \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{IN}} \rangle_\Omega\} \simeq \mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{d}} \rangle_\Omega\} \simeq \frac{\pi F_0^2}{4M\Delta\omega}. \quad (2.39)$$

Pour ce qui est de l'énergie mécanique totale, comme on a

$$\langle \mathcal{E} \rangle_\Omega = \frac{1}{4} M F_0^2 \left(|Y_\Omega(\omega)|^2 + \Omega^2 |\hat{h}_\Omega(\omega)|^2 \right),$$

on obtient avec (2.15) et (2.16)

$$\mathbb{E}\{\langle \mathcal{E} \rangle_\Omega\} \simeq \frac{\pi F_0^2}{4D\Delta\omega} \quad (2.40)$$

ou bien

$$\mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{d}} \rangle_\Omega\} \simeq \eta_{\text{d}} \omega_p \mathbb{E}\{\langle \mathcal{E} \rangle_\Omega\}. \quad (2.41)$$

2.5 Synthèse des résultats obtenus

Les trois problèmes fondamentaux pour l'oscillateur simple traités ci-dessus font apparaître les équivalences suivantes entre, d'une part

- (i) les énergies totales – introduite, dissipée et mécanique – pour la réponse forcée à une excitation déterministe large bande $t \mapsto f(t)$ dont le spectre s'écrit $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi S_0} \times \mathbb{1}_{I_p \cup \underline{I}_p}(\omega)$ avec $I_p = [\omega_p - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_p + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\underline{I}_p = [-\omega_p - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_p + \frac{\Delta\omega}{2}]$ tel que $\pi \xi \omega_p \ll \Delta\omega$,

et d'autre part

- (ii) les moyennes probabilistes des énergies pour la réponse forcée stationnaire à une excitation aléatoire centrée, stationnaire et large bande, de densité spectrale $S_F(\omega) = S_0 \times \mathbb{1}_{I_p \cup I_p}(\omega)$;
- (iii) les moyennes temporelles et probabilistes des énergies pour la réponse forcée à une excitation harmonique $f(t) = 2\sqrt{S_0\Delta\omega} \cos(\omega_p t)$ d'un oscillateur de pulsation propre aléatoire de loi uniforme de support $\Delta\omega$ et centrée en ω_p .

On notera bien que dans les trois cas l'énergie de l'entrée est la même (soit $2S_0\Delta\omega$). Il conviendra également de garder à l'esprit les différences faites entre énergie totale, moyenne probabiliste (espérance mathématique) de l'énergie et moyenne temporelle de l'énergie. Dans la littérature, ces trois notions¹ sont souvent confondues, de manière totalement abusive et en vertu d'un principe d'"ergodicité" non justifié, alors qu'elles ne doivent pas l'être.

1. Pour les systèmes continus ayant une infinité de degrés de liberté apparaît aussi la notion de moyenne spatiale.

Chapitre 3

Systèmes couplés élémentaires

Ce chapitre présente les deux problèmes fondamentaux à la base de la formulation de l'Analyse Statistique Energétique (Statistical Energy Analysis, SEA, en anglais). Ils ont fait l'objet de deux publications importantes en 1962, l'une de Lyon & Maidanik¹, l'autre de Smith², référencées dans toute la littérature mondiale comme les premières contributions à la méthode SEA (même si cette terminologie n'apparaît pas encore dans ces articles). Elles font suite aux premiers travaux concernant la prévision de la réponse vibratoire et acoustique de systèmes mécaniques complexes³ aux hautes fréquences initiés dès 1959 par M. Heckl, R. H. Lyon, G. Maidanik, D. U. Noiseux, P. W. Smith, Jr. et E. E. Ungar.

Le premier problème examiné dans ce chapitre concerne l'échange d'énergie entre deux oscillateurs simples couplés de manière conservative (Lyon & Maidanik 1962) ; le second problème concerne les vibrations d'un oscillateur simple faiblement amorti immergé dans un fluide acoustique (Smith 1962).

3.1 Système couplé à deux degrés de liberté

3.1.1 Données et hypothèses

On considère un système dynamique linéaire discret à deux degrés de liberté régi par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M \\ M & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & \Omega \\ -\Omega & D_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K \\ K & K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où, pour $\alpha \in \{1, 2\}$, u_α désigne le déplacement de l'oscillateur α autour de sa position d'équilibre, \dot{u}_α et \ddot{u}_α sa vitesse et son accélération, $M_\alpha > 0$ sa masse, $D_\alpha > 0$ sa constante d'amortissement et $K_\alpha > 0$ sa constante de raideur (voir la FIG. 3.1 pour un exemple d'un tel système). On introduit également les notations :

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{M_\alpha}}, \quad D'_\alpha = 2\sqrt{K_\alpha M_\alpha}, \quad \xi_\alpha = \frac{D_\alpha}{D'_\alpha}, \quad \eta_{d\alpha} = 2\xi_\alpha$$

1. R.H. Lyon & G. Maidanik : 'Power flow between linearly coupled oscillators', *Journal of the Acoustical Society of America* **34**(5), 623-639 (1962).

2. P.W. Smith, Jr. : 'Response and radiation of structural modes excited by sound', *Journal of the Acoustical Society of America* **34**(5), 640-647 (1962).

3. Lanceurs spatiaux, au début des années 60 aux États-Unis et dans le cadre du programme Apollo.

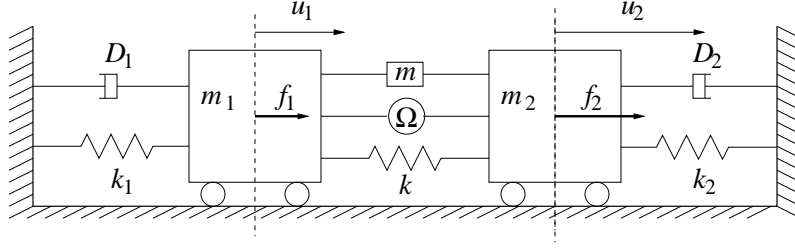


FIGURE 3.1 – Schéma mécanique d'un système couplé à 2 degrés de liberté. Pour cette configuration, on a $M_\alpha = m_\alpha + \frac{m}{4}$, $K_\alpha = k_\alpha + k$, $\alpha \in \{1, 2\}$, et $M = \frac{m}{4}$, $K = -k$.

pour respectivement la pulsation propre de vibration, l'amortissement critique, le taux d'amortissement critique et le facteur de perte par dissipation de l'oscillateur α lorsque l'oscillateur $\beta \neq \alpha$ est maintenu "bloqué" ($u_\beta = 0$). Dans la suite de cette section on considère des systèmes faiblement amortis tels que $\xi_\alpha \ll 1$ sous la condition $0 \leq \xi_\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $\alpha \in \{1, 2\}$.

Les trois constantes M , Ω et K sont réelles et définissent le couplage entre les deux oscillateurs. Elles peuvent être nulles, mais nous supposons que M et K sont telles que les matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K}

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M \\ M & M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K \\ K & K_2 \end{bmatrix}$$

restent définies positives (ce qui impose $M < \sqrt{M_1 M_2}$ et $K < \sqrt{K_1 K_2}$). Ω est la constante de couplage gyroscopique (donc **conservatif**) entre les deux oscillateurs.

Le système matriciel (3.1) ci-dessus est réécrit sous la forme usuelle d'un système du premier ordre avec les notations suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{K}_c \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix},$$

le vecteur d'état $\mathbf{u} = (u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2)$ et $\mathbf{Q}_1 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{Q}_2 = (0, 0, 0, 1)$. On a donc :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{Q}_1 f_1 + \mathbf{Q}_2 f_2. \quad (3.2)$$

On s'intéresse à la réponse forcée stationnaire de ce système pour des excitations $\{f_\alpha(t), t \in \mathbb{R}\}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, modélisées par des processus aléatoires du second ordre ($F_{\alpha,t}, t \in \mathbb{R}$) à valeurs réelles ayant les caractéristiques suivantes : ils sont centrés, stationnaires en m.o.d. et leurs mesures spectrales de puissance admettent les densités

$$S_\alpha(\omega) = S_\alpha \times \mathbb{1}_{I_\alpha \cup \bar{I}_\alpha}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

avec $S_\alpha > 0$, $I_\alpha = [\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$, $\bar{I}_\alpha = [-\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$ (excitations dites "bruits de bande") et $\Delta\omega \gg \pi\xi_\alpha\omega_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$. On suppose également qu'ils sont non corrélés, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\{F_{1,t+t'}F_{2,t'}\} = 0, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin on note $R_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} S_\alpha(\omega) d\omega$, $\alpha = 1, 2$, leurs fonctions d'auto-corrélation.

3.1.2 Grandeurs énergétiques

La puissance instantanée des deux oscillateurs couplés est donnée par

$$\Pi(t) = (\mathbf{B}\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad (3.3)$$

la puissance dissipée par les deux oscillateurs est

$$\begin{aligned} \Pi_d(t) &= (\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) \\ &= \Pi_{d1}(t) + \Pi_{d2}(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

et les puissances injectées dans les deux oscillateurs couplés sont quant à elles

$$\begin{aligned} \Pi_{IN}(t) &= (\mathbf{Q}_1, \dot{\mathbf{u}})f_1 + (\mathbf{Q}_2, \dot{\mathbf{u}})f_2 \\ &= \Pi_{IN1}(t) + \Pi_{IN2}(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le bilan des puissances échangées entre les deux oscillateurs est défini par

$$\Pi_{12}(t) + \Pi_{21}(t) = -(\mathbf{B}_c \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \quad (3.6)$$

soit

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(t) &= -(M\ddot{u}_1(t) - \Omega\dot{u}_1(t) + Ku_1(t))\dot{u}_2(t), \\ \Pi_{21}(t) &= -(M\ddot{u}_2(t) + \Omega\dot{u}_2(t) + Ku_2(t))\dot{u}_1(t). \end{aligned}$$

Ainsi la puissance instantanée du système couplé peut s'écrire

$$\Pi(t) = \dot{\mathcal{E}}_1(t) - \Pi_{12}(t) + \dot{\mathcal{E}}_2(t) - \Pi_{21}(t) \quad (3.7)$$

avec $\mathcal{E}_\alpha(t)$ l'énergie mécanique de l'oscillateur α donnée par

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \frac{1}{2}M_\alpha\dot{u}_\alpha(t)^2 + \frac{1}{2}K_\alpha u_\alpha(t)^2, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

En multipliant l'équation (3.2) par $\dot{\mathbf{u}}$, on en déduit le bilan des puissances instantanées

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}_1(t) + \dot{\mathcal{E}}_2(t) = \Pi_{IN}(t) - \Pi_d(t) + \Pi_{12}(t) + \Pi_{21}(t)} \quad (3.8)$$

pour les deux oscillateurs couplés, que l'on peut récrire pour chacun des oscillateurs

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \Pi_{IN\alpha}(t) - \Pi_{d\alpha}(t) + \Pi_{\beta\alpha}(t), \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\}. \quad (3.9)$$

3.1.3 Réponse forcée stationnaire

La réponse forcée stationnaire du système (3.2) aux excitations aléatoires stationnaires introduites à la section §3.1.1 est modélisée par le processus stochastique $(\mathbf{U}_t, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R}^4 qui s'écrit (au sens de l'intégration en m.o.d.)

$$\mathbf{U}_t = \int_0^{+\infty} \mathbb{h}_1(\tau) F_{1,t-\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \mathbb{h}_2(\tau) F_{2,t-\tau} d\tau$$

où $\mathbb{h}_\alpha(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ pour $\alpha \in \{1, 2\}$ et $t \mapsto \mathbf{G}(t)$ est la résolvante du système (3.2). $(\mathbf{U}_t, t \in \mathbb{R})$ est du second ordre, centré, stationnaire en m.o.d. et comme les processus $(F_{1,t}, t \in \mathbb{R})$ et $(F_{2,t}, t \in \mathbb{R})$ sont décorrélés, sa fonction d'auto-corrélation s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\mathbf{U}(t) = & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{h}_1(\tau) \otimes \mathbb{h}_1(\tau') R_1(t + \tau' - \tau) d\tau d\tau' \\ & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{h}_2(\tau) \otimes \mathbb{h}_2(\tau') R_2(t + \tau' - \tau) d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (3.10)$$

tandis que sa matrice de densité spectrale est :

$$\mathbf{S}_\mathbf{U}(\omega) = \widehat{\mathbb{h}}_1(\omega) \otimes \overline{\widehat{\mathbb{h}}_1(\omega)} S_1(\omega) + \widehat{\mathbb{h}}_2(\omega) \otimes \overline{\widehat{\mathbb{h}}_2(\omega)} S_2(\omega). \quad (3.11)$$

3.1.4 Puissance moyenne échangée entre les oscillateurs

Toutes les grandeurs énergétiques associées à la réponse forcée stationnaire des deux oscillateurs couplés sont des variables aléatoires du second ordre. On vérifie avec les résultats de l'Annexe A.3 que $\mathbb{E}\{\dot{\mathcal{E}}_{\alpha,t}\} = 0$ pour $\alpha \in \{1, 2\}$ et que l'on a la relation de réciprocité⁴

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = -\mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\}. \quad (3.12)$$

Le bilan des puissances moyennes s'écrit alors

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}\} = \mathbb{E}\{\Pi_{IN,t}\}. \quad (3.13)$$

Les énergies mécaniques moyennes de chaque oscillateur sont données par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} &= \frac{1}{2} M_\alpha \mathbb{E}\{\dot{U}_{\alpha,t}^2\} + \frac{1}{2} K_\alpha \mathbb{E}\{U_{\alpha,t}^2\} \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha \int_{\mathbb{R}} \omega^2 S_{U_\alpha}(\omega) d\omega + \frac{1}{2} K_\alpha \int_{\mathbb{R}} S_{U_\alpha}(\omega) d\omega \\ &= M_\alpha \int_{\mathbb{R}} \omega^2 S_{U_\alpha}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

avec les hypothèses faites pour les excitations stationnaires, et $S_{U_\alpha}(\omega)$ l'élément de la diagonale de $\mathbf{S}_\mathbf{U}(\omega)$ correspondant au déplacement forcé stationnaire $(U_{\alpha,t}, t \in \mathbb{R})$ de l'oscillateur α . On vérifie donc que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{d\alpha,t}\} &= D_\alpha \mathbb{E}\{\dot{U}_{\alpha,t}^2\} \\ &\simeq \eta_{d\alpha} \omega_\alpha \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\}, \quad \alpha \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

sous ces conditions.

On montre par ailleurs (Lyon & Maidanik 1962) que l'on a la relation fondamentale suivante :

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{\alpha\beta,t}\} = \omega_\alpha a_{\alpha\beta} \left(\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}^b\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\beta,t}^b\} \right), \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\}} \quad (3.15)$$

4. En effet, on a notamment $\mathbb{E}\{\dot{U}_{1,t}U_{2,t}\} = -\mathbb{E}\{\dot{U}_{2,t}U_{1,t}\}$ et $\mathbb{E}\{\ddot{U}_{1,t}\dot{U}_{2,t}\} = -\mathbb{E}\{\ddot{U}_{2,t}\dot{U}_{1,t}\}$. L'éq. (3.12) est valable "en moyenne", sans pour autant exclure de grandes fluctuations autour de cette moyenne.

avec $a_{\alpha\beta}$ deux constantes réelles **positives**, indépendantes des excitations et telles que

$$\omega_\alpha a_{\alpha\beta} = \omega_\beta a_{\beta\alpha}.$$

$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}^b\}$ est l'énergie mécanique moyenne de l'oscillateur α lorsque l'oscillateur $\beta \neq \alpha$ est maintenu bloqué; elle est donc donnée par la relation (2.34) :

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}^b\} \simeq \frac{\pi S_\alpha}{D_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \quad (3.16)$$

L'expression des coefficients $a_{\alpha\beta}$ est assez compliquée et donnée dans [10, 11]. On la reproduit ici pour mémoire :

$$\begin{aligned} \omega_1 a_{12} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{(1 - \mu^2)d} \times \{ & \mu^2 [\Delta_1 \omega_2^4 + \Delta_2 \omega_1^4 + \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)] \\ & + (\gamma^2 - 2\mu\kappa)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2) + \kappa^2 (\Delta_1 + \Delta_2) \} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d = & \Delta_1 \Delta_2 [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)] \\ & + \mu^2 (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)^2 \\ & + (\gamma^2 - 2\mu\kappa)(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2) + \kappa^2 (\Delta_1 + \Delta_2)^2, \end{aligned}$$

et où

$$\Delta_\alpha = \eta_{d\alpha} \omega_\alpha = \frac{D_\alpha}{M_\alpha}, \quad \mu = \frac{M}{\sqrt{M_1 M_2}}, \quad \gamma = \frac{\Omega}{\sqrt{M_1 M_2}}, \quad \kappa = \frac{K}{\sqrt{M_1 M_2}}.$$

Ainsi la puissance échangée entre les deux oscillateurs est directement proportionnelle à la différence de leurs niveaux énergétiques respectifs lorsqu'ils sont supposés découplés. D'un point de vue thermodynamique, cela signifie que l'équipartition énergétique correspond à un état d'équilibre. De plus le flux de puissance va du plus énergétique au moins énergétique des deux : d'un point de vue thermodynamique, cela signifie que cet équilibre est stable. Les coefficients $a_{\alpha\beta}$ atteignent leurs valeurs maximales pour des fréquences propres découplées ω_1 et ω_2 voisines, et des paramètres de couplage (μ , γ et κ) grands. Donc les échanges de puissance entre oscillateurs sont les plus marqués pour des oscillateurs dont les caractéristiques sont similaires (c'est l'effet bien connu de battement, *beating phenomenon* en anglais). Les spectres des coefficients $a_{\alpha\beta}$ présentent deux pics, aux pulsations $|\omega_\alpha - \omega_\beta|$ et $\omega_\alpha + \omega_\beta$, ce qui signifie que la puissance échangée peut osciller lentement, mais avec une amplitude importante, à une fréquence proche de 0 si ω_α et ω_β sont voisines.

Pour obtenir l'Éq. (3.15), le problème initial est écrit comme la superposition de deux problèmes correspondants à deux états différents : (i) seule la masse m_1 est excitée, et (ii) seule la masse m_2 est excitée. Dans l'état (i), toute la puissance dissipée par m_2 en régime stationnaire doit lui être fournie par m_1 . De même, dans l'état (ii), toute la puissance dissipée par m_1 en régime stationnaire doit lui être fournie par m_2 . Donc dans l'état (i) l'énergie vibratoire de m_2 est proportionnelle à la puissance transmise par m_1 par l'élément de couplage non dissipatif; elle est aussi proportionnelle à la densité spectrale de puissance de l'excitation imposée à m_1 . Dans l'état (ii) l'énergie vibratoire de m_1 est proportionnelle à la puissance transmise par m_2 par l'élément de couplage non dissipatif; elle est aussi proportionnelle à la densité spectrale de puissance de l'excitation imposée à m_2 . Le bilan

net des puissances échangée entre m_1 et m_2 est donc proportionnel à la différence des densités spectrales de puissance des excitations. Les hypothèses qui permettent de superposer les deux états sont la linéarité (impliquant la réciprocité) et, encore une fois, le caractère conservatif du couplage.

$\mathbb{E}\{\Pi_{\alpha\beta,t}\}$ peut aussi s'exprimer en fonction des énergies mécaniques moyennes réelles (avec couplage) des oscillateurs. En effet on a la relation fondamentale⁵

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{\alpha\beta,t}\} = \omega_\alpha \eta_{\alpha\beta} (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\beta,t}\}) , \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\}} \quad (3.17)$$

où les coefficients $\eta_{\alpha\beta}$ (sans dimension) sont les *facteurs de perte par couplage* entre les oscillateurs α et β ; ils sont **positifs**, indépendants des excitations et vérifient la relation de réciprocité

$$\omega_\alpha \eta_{\alpha\beta} = \omega_\beta \eta_{\beta\alpha} . \quad (3.18)$$

Leur expression pour deux oscillateurs simples couplés est encore une fois assez compliquée, on la reproduit ici pour information (voir encore [10, 11]) :

$$\omega_{12} \eta_{12} = \frac{\mu^2 [\Delta_1 \omega_2^4 + \Delta_2 \omega_1^4 + \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)] + (\gamma^2 - 2\mu\kappa)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2) + \kappa^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{(1 - \mu^2)[(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)]} . \quad (3.19)$$

Ainsi la puissance échangée entre les deux oscillateurs est directement proportionnelle à la différence de leurs niveaux énergétiques respectifs. De plus le flux de puissance va du plus énergétique au moins énergétique des deux, puisque les facteurs de perte par couplage sont positifs. Pour des fréquences propres "bloquées" des deux oscillateurs voisines, la puissance échangée est inversement proportionnelle à la somme des amortissements, alors que pour des fréquences propres "bloquées" relativement bien séparées (telles que $|\omega_1 - \omega_2| > \Delta_1 + \Delta_2$) elle est directement proportionnelle à la somme des amortissements, et donc reste relativement faible. Le premier cas correspond à un *couplage fort* entre les deux oscillateurs, le second à un *couplage faible*.

Pour obtenir l'Éq. (3.17), on montre dans un premier temps que la différence des énergies potentielles moyennes des deux oscillateurs couplés est égale à la différence de leurs énergies cinétiques, et que celle-ci est elle-même proportionnelle à la différence des énergies mécaniques moyennes pour la configuration découplée. Tous ces calculs se font à partir de la formule (3.11) et des résultats généraux de l'Annexe A.4.

3.1.5 Équation fondamentale et paramètres SEA

Si l'on revient au bilan énergétique (3.9) où l'on distingue les contributions relatives à chacun des oscillateurs, on peut écrire avec l'équation (3.14)

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{\text{In}\alpha,t}\} = \omega_\alpha \eta_{\text{d}\alpha} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} + \omega_\alpha \eta_{\alpha\beta} (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\beta,t}\}) , \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\}} \quad (3.20)$$

qui constitue l'équation fondamentale de la SEA pour le couplage énergétique entre les oscillateurs α et $\beta \neq \alpha$. Elle lie les énergies mécaniques *smash* $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\}$ qui sont les inconnues de la formulation SEA (variables primales), et fait apparaître trois des paramètres fondamentaux de cette approche⁶ :

5. T.D. Scharton & R.H. Lyon : 'Power flow and energy sharing in random vibration', *Journal of the Acoustical Society of America* **43**(6), 1332-1343 (1968).

6. Le quatrième, la densité modale, apparaîtra pour les systèmes continus.

- les facteurs de perte par dissipation $\eta_{d\alpha}$;
- les facteurs de perte par couplage $\eta_{\alpha\beta}$;
- les puissances injectées $\mathbb{E}\{\Pi_{IN\alpha,t}\}$ par les excitations imposées.

Ainsi dans le cas présent de deux oscillateurs couplés de manière conservative, le système de la SEA à résoudre est (voir la FIG. 3.2)

$$\begin{bmatrix} \eta_{d1} + \eta_{12} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{d2} + \eta_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} \\ \frac{1}{\omega_2} \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Ce système n'est pas symétrique, mais il est immédiat de le récrire sous une forme symétrique en utilisant l'Éq. (3.18).

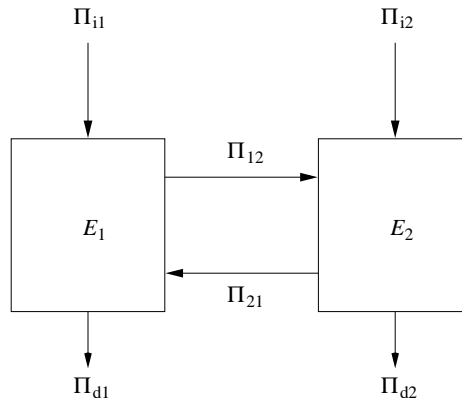


FIGURE 3.2 – Schéma mécanique SEA pour un système couplé à 2 degrés de liberté.

Remarque 1 – $a_{\alpha\beta}$ et $\eta_{\alpha\beta}$ dépendent de $\eta_{d\alpha}$ et $\eta_{d\beta}$.

Remarque 2 – Si les termes de couplage extra-diagonaux du système (3.1) sont d'ordre ϵ , où ϵ est un paramètre arbitraire petit devant 1, et si les termes diagonaux sont eux d'ordre 1, alors les facteurs de perte par couplage sont d'ordre ϵ^2 .

Exemple 1 – Si seul le premier oscillateur est sollicité, $\Pi_{IN2}(t) = 0$ et l'on obtient

$$\frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}}{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}} = \frac{\eta_{21}}{\eta_{d2} + \eta_{21}}. \quad (3.22)$$

Ce résultat montre que $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \leq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}$ dans tous les cas, l'équipartition $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \simeq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}$ étant atteinte lorsque $\eta_{d2} \ll \eta_{21}$ (ϵ est grand devant 1 : couplage fort). Notons que η_{21} reste fini quand $\eta_{d2} = 0$ pourvu que $\eta_{d1} \neq 0$. Considérons par exemple le système de la FIG. 3.3 ci-dessous. Ses fréquences propres (avec couplage) sont $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k_0}{m_0}$ et $\omega_2^2 = \omega_0^2(1 + 2\frac{k}{k_0})$, et l'on a par ailleurs

$$\frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}}{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}} = \frac{(\frac{k}{k+k_0})^2}{2\eta_{d0}^2 + (\frac{k}{k+k_0})^2} \xrightarrow{\frac{k_0}{k} \rightarrow 0} 1$$

où $\eta_{d0} = \frac{D_0}{\sqrt{m_0(k_0+k)}}$. Ainsi pour cet exemple on identifie

$$\eta_{12} = \eta_{21} = \left[2\eta_{d0} \left(1 + \frac{k_0}{k} \right)^2 \right]^{-1}$$

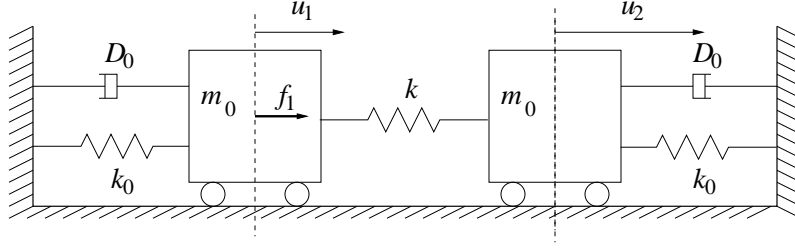


FIGURE 3.3 – Schéma mécanique d'un système couplé à 2 degrés de liberté. Pour cette configuration, on a $M_\alpha = m_0$, $K_\alpha = k_0 + k$, $\alpha \in \{1, 2\}$, et $M = 0$, $K = -k$, $\Omega = 0$.

en accord avec l'expression (3.19). Parfois certains auteurs introduisent le *taux de couplage* défini par $\tau = \frac{\eta_{12}}{\eta_{d0}} = \frac{k^2}{2\eta_{d0}^2(k+k_0)^2}$.

Exemple 2 – Si maintenant $\eta_{d\alpha} \ll \eta_{\alpha\beta}$ pour $\alpha \neq \beta \in \{1, 2\}$ (ϵ est grand devant 1), alors les deux oscillateurs tendent vers un équilibre énergétique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} \simeq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \simeq \frac{\Pi_{\text{IN}}}{\underline{\Delta}}$$

avec $\Pi_{\text{IN}} = \frac{1}{2}(\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}1,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}2,t}\})$ et $\underline{\Delta} = \frac{1}{2}(\eta_{d1}\omega_1 + \eta_{d2}\omega_2)$. Compte tenu des expressions des puissances injectées moyennes, on voit que les énergies moyennes à l'équilibre sont donc directement proportionnelles aux masses respectives des deux oscillateurs. Si par contre $\eta_{\alpha\beta} \ll \eta_{d\alpha}$ pour $\alpha \neq \beta \in \{1, 2\}$ (ϵ est petit devant 1 : couplage faible), les deux oscillateurs sont pratiquement découplés et

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} \simeq \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}\alpha,t}\}}{\eta_{d\alpha}\omega_\alpha} \simeq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}^b\}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Plus généralement, on peut vérifier que⁷

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}^b\} \leq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} \leq \frac{\Pi_{\text{IN}}}{\underline{\Delta}}$$

quel que soit le degré de couplage.

Exemple 3 – Examinons le cas d'un couplage non conservatif (dissipatif) entre deux oscillateurs simples, tel que décrit sur la FIG. 3.4 ci-dessous. On pose $\gamma = \frac{D}{\sqrt{M_1 M_2}}$ et :

$$\omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{M_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{D_\alpha + D}{M_\alpha}, \quad i\omega Z_\alpha(\omega) = \omega_\alpha^2 - \omega^2 + i\Delta_\alpha\omega, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Les excitations sont des bruits de bande non corrélés qui admettent pour densités spectrales de puissance :

$$S_\alpha(\omega) = S_\alpha \times \mathbb{1}_{I_\alpha \cup I_\alpha}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

7. K.L. Chandiramani : 'Some simple models describing the transition from weak to strong coupling in Statistical Energy Analysis', *Journal of the Acoustical Society of America* **63**(4), 1081-1083 (1978) et P.W. Smith, Jr. : 'Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling', *Journal of the Acoustical Society of America* **65**(3), 695-698 (1979).

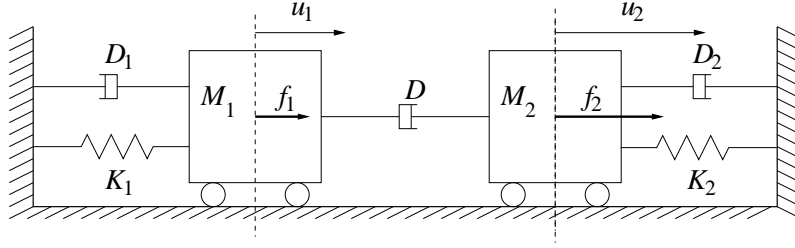


FIGURE 3.4 – Schéma mécanique de deux oscillateurs simples couplés de manière non conservative.

avec $S_\alpha > 0$, $I_\alpha = [\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$, $\underline{I}_\alpha = [-\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\Delta\omega \gg \Delta_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$. La matrice de densité spectrale (3.11) de la réponse stationnaire de ce système s'écrit :

$$\mathbf{S}_U(\omega) = (\omega M_1 M_2 |\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|)^{-2} \times \begin{bmatrix} M_2^2 |Z_2(\omega)|^2 S_1(\omega) + M_1 M_2 \gamma^2 S_2(\omega) & D (M_2 Z_2(\omega) S_1(\omega) + M_1 \bar{Z}_1(\omega) S_2(\omega)) \\ D (M_2 \bar{Z}_2(\omega) S_1(\omega) + M_1 Z_1(\omega) S_2(\omega)) & M_1^2 |Z_1(\omega)|^2 S_2(\omega) + M_1 M_2 \gamma^2 S_1(\omega) \end{bmatrix}.$$

La puissance moyenne extraite de l'oscillateur 1 par l'intermédiaire du couplage est alors donnée par :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = \mathbb{E}\{D(\dot{U}_{1,t} - \dot{U}_{2,t})\dot{U}_{1,t}\} = \mathbb{E}\{D\dot{U}_{1,t}^2\} - \mathbb{E}\{D\dot{U}_{1,t}\dot{U}_{2,t}\}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D\dot{U}_{1,t}\dot{U}_{2,t}\} &= \Re \left(\int_{I_1 \cup \underline{I}_1} \frac{\gamma^2 Z_2(\omega) d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_1}{M_1} + \Re \left(\int_{I_2 \cup \underline{I}_2} \frac{\gamma^2 \bar{Z}_1(\omega) d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_2}{M_2} \\ &\simeq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma^2 \Delta_1 \Delta_2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \left(\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} + \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D\dot{U}_{1,t}^2\} &= \gamma \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \left[\left(\int_{I_1 \cup \underline{I}_1} \frac{|Z_2(\omega)|^2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_1}{M_1} + \left(\int_{I_2 \cup \underline{I}_2} \frac{\gamma^2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_2}{M_2} \right] \\ &\simeq \frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta_1 |Z_2(\omega)|^2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} + \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta_2 \gamma^2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega) Z_2(\omega)|^2} \right) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} \right]. \end{aligned}$$

Les intégrales ci-dessus sont calculées en utilisant la formule :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \frac{(b_6 x^6 + b_4 x^4 + b_2 x^2 + b_0) dx}{(a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)(a_4 x^4 - a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0)} \\ &= i\pi \frac{b_6(a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_4(a_3 b_2 - a_1 b_4) + \frac{a_4 b_0}{a_0}(a_1 a_4 - a_2 a_3)}{a_4(a_4 a_1^2 + a_3^2 a_0 - a_1 a_2 a_3)} \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = \gamma \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} - \beta \left(1 - \frac{\gamma}{\Delta_1} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \right) \left(\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} + \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} \right) \quad (3.23)$$

où

$$\beta = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma^2 \Delta_1 \Delta_2 d\omega}{|\gamma^2 - Z_1(\omega)Z_2(\omega)|^2} = \frac{\gamma^2(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2)}{(1 - \frac{\gamma^2}{\Delta_1\Delta_2})(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}.$$

De même, pour la puissance moyenne extraite de l'oscillateur 2 par l'intermédiaire du couplage

$$\mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\} = \mathbb{E}\{D(\dot{U}_{2,t} - \dot{U}_{1,t})\dot{U}_{2,t}\} = \mathbb{E}\{D\dot{U}_{2,t}^2\} - \mathbb{E}\{D\dot{U}_{1,t}\dot{U}_{2,t}\},$$

on obtient :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\} = \gamma \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} - \beta \left(1 - \frac{\gamma}{\Delta_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\right) (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} + \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\}). \quad (3.24)$$

On vérifie donc que $\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\} \neq 0$, contrairement au cas conservatif. Les équations (3.23) et (3.24) sont de la forme :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = \beta_{11}\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} - \beta_{12}\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\}, \quad \mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\} = \beta_{22}\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} - \beta_{21}\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\}$$

et généralisent l'Éq. (3.15). Ces conclusions s'étendent au cas d'un couplage non conservatif en raideur et en amortissement⁸. Les énergies mécaniques moyennes des deux oscillateurs dans leur configuration couplée sont :

$$2\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} = \left(\int_{I_1 \cup I_1} \frac{|Z_2(\omega)|^2(\omega^2 + \omega_1^2) d\omega}{\omega^2 |\gamma^2 - Z_1(\omega)Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_1}{M_1} + \left(\int_{I_2 \cup I_2} \frac{\gamma^2(\omega^2 + \omega_1^2) d\omega}{\omega^2 |\gamma^2 - Z_1(\omega)Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_2}{M_2}$$

et

$$2\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} = \left(\int_{I_1 \cup I_1} \frac{\gamma^2(\omega^2 + \omega_2^2) d\omega}{\omega^2 |\gamma^2 - Z_1(\omega)Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_1}{M_1} + \left(\int_{I_2 \cup I_2} \frac{|Z_1(\omega)|^2(\omega^2 + \omega_2^2) d\omega}{\omega^2 |\gamma^2 - Z_1(\omega)Z_2(\omega)|^2} \right) \frac{S_2}{M_2}$$

respectivement. Ces relations permettent d'exprimer S_1 et S_2 en fonction de $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}$ et $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}$, de manière à en déduire les expressions des puissances moyennes échangées par les oscillateurs avec le couplage en fonction de ces deux dernières quantités. On obtient finalement :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = \gamma \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} - \omega_1(\eta_{12} + \beta_{12}) (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} + \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\})$$

et

$$\mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\} = \gamma \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} - \omega_2(\eta_{21} - \beta_{21}) (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} + \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}).$$

Le coefficient de proportionalité η_{12} de la puissance échangée avec la somme des énergies mécaniques est exactement le facteur de perte par couplage de la formule (3.19), calculé pour $\mu = \kappa = 0$, soit :

$$\omega_1\eta_{12} = \omega_2\eta_{21} = \frac{\gamma^2(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2)},$$

8. J.C. Sun, N. Lalor & E.J. Richards : 'Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, I. Theory', *Journal of Sound and Vibration* **112**(2), 321-330 (1987) ; F.J. Fahy & Y. De-Yuan : 'Power flow between non-conservatively coupled oscillators', *Journal of Sound and Vibration* **114**(1), 1-11 (1987) ; G. Chen & T.T. Soong : 'Power flow and energy balance between nonconservatively coupled oscillators', *Quarterly Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* **113**(4), 448-454 (1991).

et est donc proportionnel à γ^2 . Les nouveaux coefficients β_{12} et β_{21} sont quant à eux proportionnels à γ^3 :

$$2M_1\omega_1\beta_{12} = 2M_2\omega_2\beta_{21} = \frac{\gamma^3\sqrt{M_1M_2}(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2)}.$$

Si par exemple $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, on a :

$$\eta_{12} = \frac{\gamma^2}{(\eta_{d1} + \eta_{d2})\omega_0^2}, \quad \beta_{12} = 0.$$

Le bilan des puissances échangées par l'oscillateur α peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{IN\alpha,t}\} = \omega_\alpha \eta'_{d\alpha} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} + \omega_\alpha (\eta_{\alpha\beta} \pm \beta_{\alpha\beta}) (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\alpha,t}\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\beta,t}\}), \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\},$$

où $\eta'_{d\alpha}$ est le facteur de perte par dissipation modifié par la présence du couplage, qui s'écrit $\omega_\alpha \eta'_{d\alpha} = \Delta_\alpha - 2\omega_\alpha (\eta_{\alpha\beta} \pm \beta_{\alpha\beta})$ (rappelons que $\Delta_\alpha = \frac{D_\alpha + D}{M_\alpha}$), à comparer avec $\omega_\alpha \eta_{d\alpha} = \frac{D_\alpha}{M_\alpha}$.

3.2 Oscillateur simple immergé dans un fluide acoustique

3.2.1 Données et hypothèses

On considère maintenant un oscillateur simple de masse $M > 0$, de constante de raideur $K > 0$, faiblement amorti $D > 0$, et immergé dans un fluide non visqueux homogène et compressible (fluide acoustique) occupant tout l'espace physique de \mathbb{R}^3 autour de l'oscillateur, supposé non borné et noté Ω_f . On note également ρ_f sa masse volumique et c_f la célérité du son dans le fluide au repos. On se limite, en négligeant les effets de gravité⁹, aux petites vibrations linéarisées autour d'une configuration d'équilibre statique telles que le mouvement du fluide est irrotationnel : sa vorticité $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{v}$, où $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse des particules de fluide, est nulle dans tout Ω_f . Il existe donc un potentiel de vitesse $\psi(\mathbf{x}, t)$ défini en tout point \mathbf{x} de Ω_f et à chaque instant t tel que $\mathbf{v} = \nabla \psi$, la pression du fluide s'écrit $p = -\rho_f \partial_t \psi$, et satisfaisant l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0.$$

On note $u(t)$ le déplacement de l'oscillateur autour de sa position d'équilibre \mathbf{x}_0 , en le supposant assujéti à ne se déplacer que suivant la direction \mathbf{n} . $\dot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t)$ sont respectivement sa vitesse et son accélération suivant cette direction, et on a à chaque instant la condition de couplage entre le fluide ambiant et l'oscillateur

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi(\mathbf{x}_0, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + u(t)\mathbf{n}, t) \cdot \mathbf{n} = \dot{u}(t).$$

En reprenant les notations introduites pour l'oscillateur simple sans couplage (dit "sec") à la section §2.1, on écrit l'équation d'évolution (2.3) sous la forme

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{S}\mathbf{Q}p(\mathbf{x}_0 + u(t)\mathbf{n}, t) \quad (3.25)$$

9. Fluide "non pesant" ; les effets de gravité sont en fait pris en compte dans la définition de la configuration d'équilibre.

avec les conditions initiales

$$\dot{u}(0) = v_0, \quad u(0) = 0, \quad (3.26)$$

et S un paramètre fixé ayant la dimension d'une surface (celle de l'oscillateur "vue" par le fluide). Un champ incident $p_{\text{IN}}(\mathbf{x}, t)$ dans le fluide vient également solliciter l'oscillateur. On décompose alors le champ de pression totale p dans le fluide en champ incident p_{IN} , champ diffracté p_{d0} et champ rayonné p_{rad} , associés respectivement aux potentiels de vitesse ψ_{IN} , ψ_{d0} et ψ_{rad} , tels que :

$$p(\mathbf{x}, t) = p_{\text{IN}}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{d0}}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{f}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

La pression incidente p_{IN} est la pression régnant dans le fluide en l'absence de l'oscillateur, p_{d0} est la pression diffractée par l'oscillateur maintenu dans sa position d'équilibre, et p_{rad} est la pression rayonnée par l'oscillateur lorsqu'il se déplace autour de sa position d'équilibre à la vitesse \dot{u} (voir la FIG. 3.5). Les potentiels de vitesse ψ_{d0} et ψ_{rad} vérifient donc dans tout le domaine occupé par le fluide :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_{\text{f}}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\text{d0}}}{\partial t^2} - \Delta \psi_{\text{d0}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi_{\text{d0}}(\mathbf{x}_0, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi_{\text{IN}}(\mathbf{x}_0, t) \end{cases} \quad (3.28)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} \frac{1}{c_{\text{f}}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\text{rad}}}{\partial t^2} - \Delta \psi_{\text{rad}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0, t) = \dot{u}(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$. Seule la pression rayonnée dépend de u , et le système (3.25) ci-dessus est récrit sous la forme :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - S\mathbf{Q}p_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0 + u(t)\mathbf{n}, t) = S\mathbf{Q}p_{\text{IN}}(\mathbf{x}_0, t) + S\mathbf{Q}p_{\text{d0}}(\mathbf{x}_0, t). \quad (3.30)$$

Afin de caractériser la réponse \mathbf{u} de l'oscillateur solution de l'équation ci-dessus, il est d'abord nécessaire de construire l'opérateur (linéaire) permettant de passer de $u(t)$ à $p_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0 + u(t)\mathbf{n}, t)$ pour de petites perturbations (hypothèse de linéarisation) : c'est l'objet de la section suivante.

3.2.2 Problème de Helmholtz extérieur

On considère le problème aux limites suivant, consistant à trouver, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $v(\mathbf{x}, \omega)$ donné sur la frontière $\partial\Omega_{\text{f}} = \Gamma$ (l'interface entre le fluide et l'oscillateur, d'aire S), le champ $\mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \omega) : \overline{\Omega}_{\text{f}} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta \psi + \frac{\omega^2}{c_{\text{f}}^2} \psi = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{f}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = v & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ce problème (équation de Helmholtz dans un domaine non borné avec condition aux limites de Neumann) n'admet pas de solution unique, sauf si on ajoute la condition de Sommerfeld sortante

$$|\psi| = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial R} + i\frac{\omega}{c_{\text{f}}} \psi \right| = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

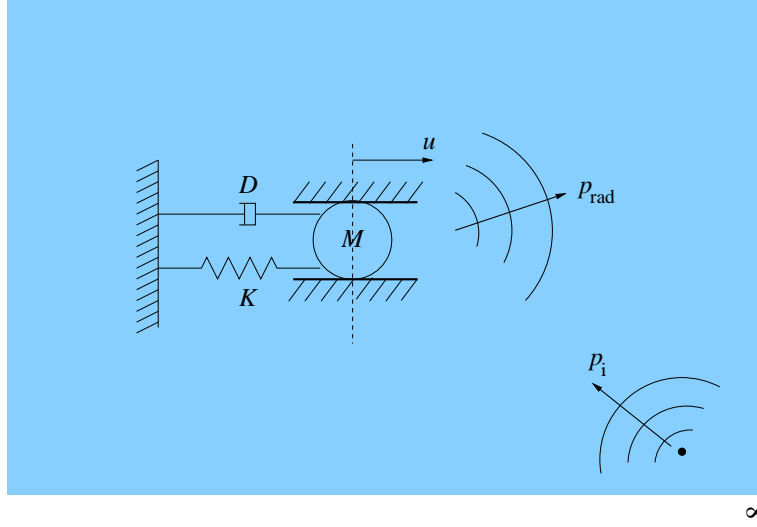


FIGURE 3.5 – Oscillateur simple immergé dans un fluide acoustique non borné.

pour $R = \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$. Elle impose au champ ψ de se comporter à l'infini comme une onde plane $\psi(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\psi}(\omega(t - \frac{R}{c_f}))$ sortant du domaine Ω_f à l'infini sans jamais réentrer. Dans ce cas pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ fixé, (i) il existe un unique opérateur (linéaire) $\mathcal{B}(\frac{\omega}{c_f})$ défini sur \mathcal{C}'_Γ , dual de l'espace \mathcal{C}_Γ des champs cinématiquement admissibles sur Γ , tel que

$$\psi|_\Gamma = \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right)v \quad (\text{trace sur } \Gamma); \quad (3.31)$$

(ii) il existe un unique opérateur linéaire $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) : \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\psi(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega)v, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f. \quad (3.32)$$

L'opérateur $Z_\Gamma(\omega) = -i\omega\rho_f S\mathcal{B}(\frac{\omega}{c_f})$ est appelé *impédance acoustique de bord*, et l'opérateur $\mathcal{Z}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega\rho_f S\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega)$ *impédance de rayonnement acoustique*. L'opérateur $\mathcal{B}(\frac{\omega}{c_f})$ est symétrique et tel qu'il s'écrit :

$$-\omega^2 \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) = -\omega^2 M_\Gamma\left(\frac{\omega}{c_f}\right) + i\omega D_\Gamma\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \quad (3.33)$$

avec $D_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ (partie résistive) positif. La partie réactive $M_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ est généralement sans signature, mais si $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_f}$ est convexe elle est positive.

L'application de ces résultats aux problèmes (3.28) et (3.29) ci-dessus dans le domaine de Fourier pour la variable de temps t conduit à

$$\hat{\psi}_{d0}(\omega)|_\Gamma = -\mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \frac{\partial \hat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \hat{\psi}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \hat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f$$

et

$$\hat{\psi}_{rad}(\omega)|_\Gamma = i\omega \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \hat{u}(\omega), \quad \hat{\psi}_{rad}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \hat{u}(\omega) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f.$$

\hat{u} désigne la transformée de Fourier du déplacement u de l'oscillateur autour de sa position d'équilibre. On en déduit pour les pressions diffractée et rayonnée dans le domaine de Fourier

$$\hat{p}_{d0}(\omega)|_{\Gamma} = -\mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \frac{\partial \hat{p}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \hat{p}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \hat{p}_{IN}}{\partial \mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \quad (3.34)$$

et

$$S\hat{p}_{rad}(\omega)|_{\Gamma} = i\omega Z_{\Gamma}(\omega)\hat{u}(\omega), \quad S\hat{p}_{rad}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathcal{Z}(\mathbf{x}, \omega)\hat{u}(\omega) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f. \quad (3.35)$$

Enfin dans la mesure où le champ incident $\hat{\psi}_{IN}$ vérifie (par définition) l'équation de Helmholtz dans tout \mathbb{R}^3 , il est toujours possible d'exprimer linéairement $\frac{\partial \hat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}$ en fonction de $\hat{\psi}_{IN}|_{\Gamma}$ de sorte que l'on écrira par la suite

$$\hat{p}_{IN}(\mathbf{x}, \omega) + \hat{p}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{T}(\mathbf{x}, \omega)\hat{p}_{IN}(\omega)|_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f. \quad (3.36)$$

L'opérateur linéaire \mathcal{T} lie le champ de pression dit "bloqué" $\hat{p}_{IN} + \hat{p}_{d0}$ au champ de pression incident \hat{p}_{IN} ; il est appelé opérateur de scattering (ou diffraction) dans la littérature spécialisée.

3.2.3 Grandeurs énergétiques

Comme on s'intéresse par la suite à la réponse forcée de l'oscillateur sous l'action d'un champ incident $p_{IN}(\mathbf{x}_0, t)$ seul, $t \in \mathbb{R}$, on suppose ici $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ (pour les conditions initiales). Compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on peut récrire formellement le système (3.30) sous la forme

$$[\mathbf{A} + \mathbf{A}_{\Gamma}^*] \dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\Gamma}^*] \mathbf{u}(t) = \mathbf{Q}S\mathcal{T} * p_{IN}(\mathbf{x}_0, t), \quad (3.37)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\Gamma} = \varrho_f S \begin{bmatrix} 0 & -M_{\Gamma} \\ M_{\Gamma} & D_{\Gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\Gamma} = \varrho_f S \begin{bmatrix} M_{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

et $*$ désignant le produit de convolution en temps. La puissance instantanée de l'oscillateur couplé au fluide externe est

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= (\mathbf{B}\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{B}_{\Gamma} * \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \\ &= \dot{\mathcal{E}}(t); \end{aligned} \quad (3.39)$$

la puissance dissipée et rayonnée par l'oscillateur couplé au fluide est

$$\begin{aligned} \Pi_{d,tot}(t) &= (\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{A}_{\Gamma} * \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) \\ &= \Pi_d(t) + \Pi_{rad}(t); \end{aligned} \quad (3.40)$$

enfin la puissance introduite dans l'oscillateur est donnée par

$$\Pi_{IN}(t) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{u}})S\mathcal{T} * p_{IN}(\mathbf{x}_0, t). \quad (3.41)$$

Le bilan des puissances instantanées pour l'oscillateur couplé au fluide est alors

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi_{IN}(t) - \Pi_d(t) - \Pi_{rad}(t)}. \quad (3.42)$$

3.2.4 Impédance de l'oscillateur immergé et fréquence propre "mouillée"

Afin de caractériser la réponse u de l'oscillateur en fonction du champ de pression incident imposé p_{IN} , il est nécessaire d'identifier la fonction de transfert du filtre correspondant à l'oscillateur couplé avec le fluide acoustique environnant. Celle-ci s'exprime simplement en fonction de la réceptance, introduite au chapitre précédent (voir la section §2.1.2). On définit donc l'impédance de l'oscillateur couplé avec le fluide externe par

$$\begin{aligned} Z_{\text{tot}}(\omega) &= [i\omega \hat{h}_{\text{tot}}(\omega)]^{-1} \\ &= [i\omega \hat{h}(\omega)]^{-1} + [i\omega \hat{h}_{\Gamma}(\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

où la réceptance $\hat{h}(\omega)$ de l'oscillateur sec est définie à la section §2.1.2, et :

$$\hat{h}_{\Gamma}(\omega) = \frac{1}{\varrho_f S(-\omega^2 M_{\Gamma}(\frac{\omega}{c_f}) + i\omega D_{\Gamma}(\frac{\omega}{c_f}))}. \quad (3.44)$$

On note également

$$\hat{\mathbb{h}}_{\text{tot}}(\omega) = \hat{h}_{\text{tot}}(\omega) \begin{pmatrix} i\omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

la fonction de réponse en fréquence correspondante. L'oscillateur voit le fluide qui l'environne comme une masse ajoutée (correspondant à la réactance) qui modifie son inertie, et un amortissement équivalent (correspondant à la résistance) qui évacue une partie de l'énergie par rayonnement acoustique à l'infini. La FIG. 3.6 ci-dessous donne l'allure générique des fonctions $\omega \mapsto M_{\Gamma}(\frac{\omega}{c_f})$ et $\omega \mapsto D_{\Gamma}(\frac{\omega}{c_f})$ quelle que soit la géométrie de la structure (l'oscillateur). La donnée de ces fonctions suffit alors à caractériser complètement la réponse forcée déterministe ou aléatoire stationnaire de l'oscillateur immergé, par analogie avec les résultats des sections §2.2.2 et §2.3.2.

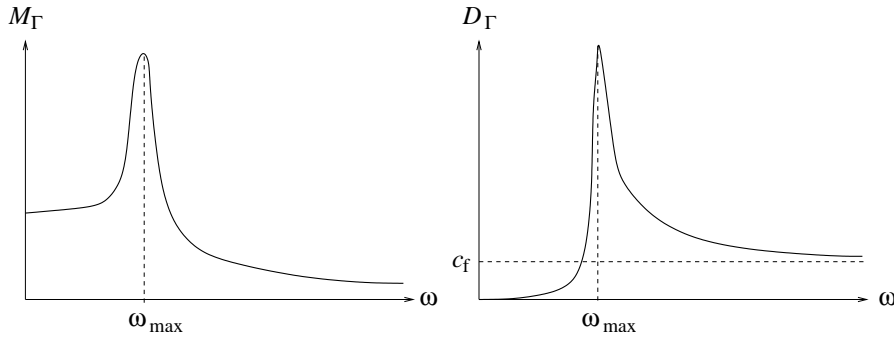


FIGURE 3.6 – Graphes génériques des réactance et résistance de l'opérateur d'impédance acoustique de bord d'une structure quelconque. Le pic de la fonction M_{Γ} est volontairement accentué afin d'illustrer la discussion qui suit, en règle générale M_{Γ} varie beaucoup plus lentement avec la fréquence.

La recherche d'une "pulsation propre" de vibration de l'oscillateur couplé au fluide conduit à la résolution de l'équation

$$\left[1 + \frac{\varrho_f S}{M} M_{\Gamma} \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right] \omega^2 = \omega_p^2 \quad (3.45)$$

où $\omega_p = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Posons $f_1(\omega) = 1 + \frac{\rho_f S}{M} M_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right)$ et $f_2(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. La FIG. 3.7 présente les graphes de ces fonctions. Trois cas peuvent se présenter pour la résolution de l'équation

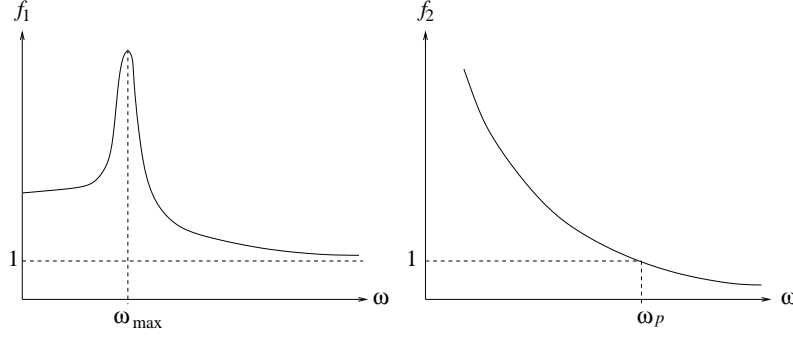


FIGURE 3.7 – Graphes des fonctions $\omega \mapsto f_1(\omega)$ et $\omega \mapsto f_2(\omega)$.

(3.45) ci-dessus, représentés sur la FIG. 3.8. Ainsi à la fréquence propre de l'oscillateur sec

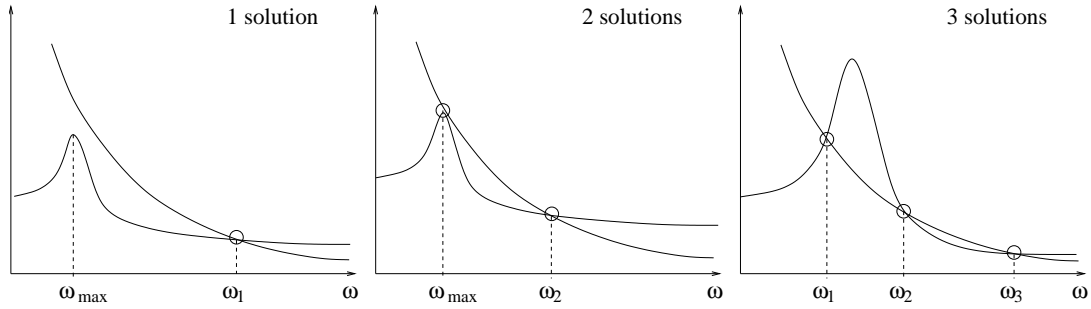


FIGURE 3.8 – Configurations possibles pour les solutions de l'équation (3.45).

ω_p peuvent correspondre plusieurs fréquences de pic pour l'oscillateur immergé. Néanmoins la FIG. 3.6 montre que "l'amortissement équivalent" induit par le fluide environnant ne commence à être significatif, en règle générale, qu'au delà d'une certaine pulsation ω_{\max} ; ainsi, dans la configuration 3 pour laquelle l'équation (3.45) admet des solutions multiples, la fonction $\omega \mapsto |\hat{h}_{\text{tot}}(\omega)|$ a l'allure de la courbe de la FIG. 3.9. La plus petite solution ω_1 correspond donc à une vraie "résonance" et les autres solutions correspondent à des "modes" normaux suramortis non résonants¹⁰. On appelle usuellement ω_1 fréquence propre mouillée, en conservant la même terminologie pour les autres configurations. On voit avec la FIG. 3.6 qu'au delà de cette fréquence, l'effet de masse ajoutée devient rapidement négligeable. Si la masse ajoutée est de toute façon négligeable pour toutes les fréquences, on est dans la première configuration et bien sûr $\omega_1 \simeq \omega_p$.

3.2.5 Réponse forcée stationnaire et bilan énergétique

Le système couplé fluide-oscillateur évolue à partir de sa position au repos sous l'action d'un champ de pression incident aléatoire stationnaire en temps. Soit donc un champ d'excitation stochastique $(F_{\mathbf{x},t}, \mathbf{x} \in \Gamma, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} centré, du second ordre, continu et

10. On ne peut parler, en toute rigueur, de "résonance" et de "mode" que pour des milieux bornés.

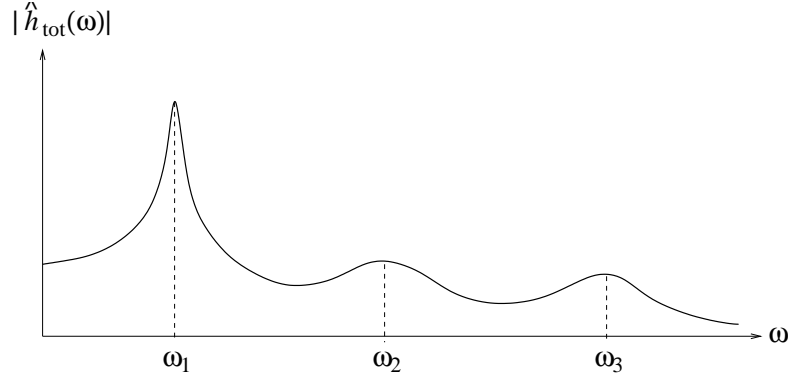


FIGURE 3.9 – Gain d'un oscillateur simple immergé dans un fluide, cas de coïncidences multiples.

stationnaire en m.o.d. en temps. On note $R_F : \Gamma \times \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction d'auto-corrélation transversale définie par

$$R_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \mathbb{E}\{F_{\mathbf{x}, t+\tau} F_{\mathbf{y}, t}\}$$

et telle que $\mathbb{E}\{F_{\mathbf{x}, t}^2\} = R_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty$. On suppose que la mesure spectrale transversale de ce champ admet une densité notée $S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ par rapport à $d\omega$, telle que :

$$R_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\omega$$

avec les propriétés suivantes (la mesure spectrale étant positive et hermitienne) :

$$S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \overline{S_F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)}, \quad S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\omega) = \overline{S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)};$$

on suppose également qu'elle s'écrit

$$S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbb{1}_{I_0 \cup \underline{I}_0}(\omega) \otimes S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$$

où $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\underline{I}_0 = [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ (bruit de bande), avec $\Delta\omega \gg \pi\xi_p\omega_p$ et ω_0 voisin de la pulsation propre mouillée de l'oscillateur. La fonction $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est donc à valeurs positives, telle que $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < +\infty$, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$. La réponse de l'oscillateur immergé, solution de l'Éq. (3.37), est alors modélisée par un processus stochastique $(\mathbf{U}_t, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 centré, du second ordre, stationnaire en m.o.d., et dont la matrice de densité spectrale s'écrit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\omega) = \widehat{\mathbf{h}}_{\text{tot}}(\omega) \otimes \overline{\widehat{\mathbf{h}}_{\text{tot}}(\omega)} |\mathcal{ST}(\mathbf{x}_0, \omega)|^2 S_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \omega). \quad (3.46)$$

Pour un tel chargement, les puissances instantanées dissipée, rayonnée et introduite deviennent des variables aléatoires du second ordre, et le bilan des puissances moyennes (3.42) s'écrit

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}, t}\} = \mathbb{E}\{\Pi_{\text{d}, t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad}, t}\} \quad (3.47)$$

puisque l'on a toujours $\mathbb{E}\{\dot{\mathcal{E}}_t\} = 0$ dans le cas stationnaire. L'énergie mécanique moyenne de l'oscillateur immergé est quant à elle définie par

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} = \frac{1}{2}M \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left(1 + \frac{\varrho_f S}{M} M_{\Gamma} \left(\frac{\omega}{c_f}\right)\right) S_U(\omega) d\omega + \frac{1}{2}K \int_{\mathbb{R}} S_U(\omega) d\omega \quad (3.48)$$

où $S_U(\omega) = [\mathbf{S}_U(\omega)]_{22} = |\hat{h}_{\text{tot}}(\omega)S\mathcal{T}(\mathbf{x}_0, \omega)|^2 S_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \omega)$. A ce stade, on introduit le paramètre M_{rad} , appelé *masse ajoutée équivalente*¹¹, tel que

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} = (M + M_{\text{rad}}) \int_{\mathbb{R}} \omega^2 S_U(\omega) d\omega;$$

M_{rad} est déterminée en identifiant l'équation ci-dessus à l'équation (3.48); dans la mesure où $\omega \mapsto \hat{h}_{\text{tot}}(\omega)$ a l'allure de la FIG. 3.9 et où $\omega \mapsto \mathcal{T}(\mathbf{x}_0, \omega)$ est à variations lentes sur $I_0 \cup \underline{I}_0$ (propriété effectivement vérifiée dans la pratique), on peut généralement écrire $M_{\text{rad}} \simeq \varrho_f S M_{\Gamma}(\frac{\omega_0}{c_f})$. La puissance moyenne dissipée par l'oscillateur est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{d,t}\} &= D\mathbb{E}\{\dot{U}_t^2\} \\ &= M\omega_p\eta_d \int_{\mathbb{R}} \omega^2 S_U(\omega) d\omega \\ &= \frac{M}{M + M_{\text{rad}}} \omega_p\eta_d \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

tandis que la puissance moyenne rayonnée à l'infini est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad},t}\} &= \int_{\mathbb{R}} \varrho_f S D_{\Gamma} \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \omega^2 S_U(\omega) d\omega \\ &= \omega_0 \eta_{\text{rad}}(\omega_0) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

définissant ainsi le *facteur de perte équivalent* par rayonnement à l'infini dans le fluide $\eta_{\text{rad}}(\omega_0)$ (David & Soize 1994). On en déduit

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\} \simeq \omega_0 \eta_{\text{tot}}(\omega_0) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}} \quad (3.51)$$

d'après (3.47), avec :

$$\eta_{\text{tot}}(\omega_0) = \eta_{\text{rad}}(\omega_0) + \eta_d \sqrt{\frac{M}{M + \varrho_f S M_{\Gamma} \left(\frac{\omega_0}{c_f} \right)}}. \quad (3.52)$$

La relation (3.51) permet de déterminer le coefficient de perte η_{rad} à partir de la donnée de $\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\}$,

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\} = \Re \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} i\omega \hat{h}_{\text{tot}}(\omega) |S\mathcal{T}(\mathbf{x}_0, \omega)|^2 S_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) d\omega,$$

et le calcul de $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}$, Éq. (3.48). Dans la littérature, ce coefficient est tabulé pour des structures types (plaques, coques ...) sous la forme d'un *coefficient de radiation* ("radiation efficiency" en anglais) σ_{rad} défini par

$$\sigma_{\text{rad}}(\omega_0) = \frac{(M + M_{\text{rad}})}{\varrho_f c_f S} \times \omega_0 \eta_{\text{rad}}(\omega_0). \quad (3.53)$$

11. J.-M. David & C. Soize : 'Prediction of the high-frequency behavior of coupled fluide-structure systems by the SEA method and applications', in *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction (J.-M. Crolet & R. Ohayon, eds.)*, pp. 55-77. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.

$\varrho_f c_f S$ est l'impédance de rayonnement acoustique d'une plaque plane de surface S qui vibre dans la direction de sa normale : c'est donc le cas de référence pour la caractérisation de la puissance rayonnée par une structure quelconque, qui s'écrit aussi sous la forme usuelle

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad},t}\} = \varrho_f c_f S \sigma_{\text{rad}}(\omega_0) \mathbb{E}\{\dot{U}_t^2\}.$$

On notera bien que cette énergie rayonnée n'est pas convertie en chaleur, comme pour de la dissipation interne, mais correspond à la partie de l'énergie vibratoire convertie en ondes acoustiques qui se propagent dans le fluide en s'éloignant de l'oscillateur. Dans la mesure où $M_\Gamma \rightarrow 0$ et $D_\Gamma \rightarrow c_f$ quand $\omega \rightarrow \infty$, on aura $\sigma_{\text{rad}}(\omega_0) \simeq 1$ quand $\omega_0 \gg \omega_{\text{max}}$.

Enfin Smith¹² a montré que l'énergie mécanique moyenne de l'oscillateur pouvait aussi s'écrire approximativement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} &\simeq \frac{\eta_{\text{rad}}}{\eta_d + \eta_{\text{rad}}} \times \frac{\pi c_f S_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\varrho_f \omega_0^2} \\ &= \frac{\eta_{\text{rad}}}{\eta_d + \eta_{\text{rad}}} \times \frac{S_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{4R_{\text{rad}}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

avec $\eta_{\text{rad}}(\omega_0) = \frac{\varrho_f S}{\omega_0 M} D_\Gamma(\frac{\omega_0}{c_f})$, de sorte que $D_\Gamma(\frac{\omega}{c_f}) = \frac{M}{M + M_{\text{rad}}} c_f \sigma_{\text{rad}}(\omega)$; $R_{\text{rad}}(\omega_0) = \frac{\varrho_f \omega_0^2}{4\pi c_f}$ est la résistance acoustique de rayonnement d'une source ponctuelle. Pour obtenir ce résultat, on considère également un champ incident diffus généré par une répartition uniforme de sources acoustiques d'égales amplitudes sur une sphère entourant l'oscillateur. On notera son analogie avec l'exemple 1 de la section §3.1 précédente. Notamment l'énergie moyenne de l'oscillateur immergé est indépendante de toutes les caractéristiques mécaniques de ce dernier, hormis la fréquence de coïncidence. Dans le cas limite $\eta_d \rightarrow 0$, l'oscillateur est en équilibre thermodynamique avec le bruit acoustique ambiant ; si en revanche on néglige les effets d'interaction, l'énergie de l'oscillateur devient "infinie" dès lors que $\eta_d = 0$.

Remarque 3 – Si la pulsation centrale ω_0 du champ de pression incident aléatoire stationnaire est très différente de la pulsation propre mouillée de l'oscillateur, celui-ci se comporte comme une masse pure non résonante qui ne modifie quasiment pas le champ de pression. Dans ce cas l'opérateur de diffraction \mathcal{T} est voisin de l'identité et $\hat{h}_{\text{tot}}(\omega) \simeq \frac{1}{M\omega^2}$. De l'Éq. (3.46) on déduit :

$$S_U(\omega) \simeq \frac{S^2}{M^2 \omega^4} S_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \omega),$$

soit après intégration sur tout \mathbb{R} :

$$\frac{1}{2} m_S^2 S_a = S_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \quad (3.55)$$

pour le spectre d'accélération $S_a = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\mathbb{R}} \omega^4 S_U(\omega) d\omega$ de l'oscillateur de densité surfacique $m_S = \frac{M}{S}$ vis-à-vis du fluide : c'est la *loi de masse* de l'architecture acoustique.

12. P.W. Smith, Jr. : 'Response and radiation of structural modes excited by sound', loc. cit. Voir également R.H. Lyon & G. Maidanik : *Review of Some Recent Research on Noise and Structural Vibration*, Technical Note TN D-2266, National Aeronautics and Space Administration, Washington DC, avril 1964, pour différentes utilisations pratiques de ce résultat.

3.3 Synthèse des résultats obtenus

Nous avons établi dans ce chapitre un résultat fondamental pour la suite des développements : la puissance échangée par deux oscillateurs couplés de manière conservative est proportionnelle à la différence de leurs énergies mécaniques respectives. Pour cela, les hypothèses suivantes ont été introduites :

- chaque oscillateur est faiblement dissipatif ;
- le couplage des oscillateurs est conservatif (couplage inertiel, gyroscopique et élastique) ;
- Les oscillateurs sont sollicités par des bruits de bande non corrélés ;
- les largeurs de bande des excitations sont grandes devant les bandes passantes équivalentes des filtres associés aux oscillateurs.

Il est possible d'établir le même résultat en suivant l'approche de la section §2.4 du chapitre précédent, c'est-à-dire (i) en considérant des excitations harmoniques déterministes et des pulsations propres ω_α , $\alpha \in \{1, 2\}$, modélisées par des variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur un intervalle de largeur $\Delta\omega$ centré en ω_0 , pulsation des excitations, et (ii) en calculant des grandeurs du type moyennes temporelles sur la période des excitations.

L'autre résultat fondamental établi dans ce chapitre concerne le couplage d'un oscillateur simple avec un fluide acoustique : la puissance évacuée par radiation à l'infini est proportionnelle à son énergie mécanique, et il est toujours possible de définir un facteur de perte par rayonnement afin de modéliser cet effet, de même nature que le facteur de perte par dissipation interne. L'équilibre énergétique de l'oscillateur immergé peut aussi être caractérisé, en vertu de l'Éq. (3.54), par un facteur de perte par couplage avec le fluide ambiant ; par la suite on privilégiera néanmoins la première interprétation.

Chapitre 4

Vibrations aléatoires stationnaires des systèmes linéaires continus

Dans ce chapitre, nous généralisons les résultats du chapitre 2 relatifs à l'oscillateur simple aux cas des systèmes dynamiques linéaires continus et faiblement dissipatifs. Sur la base des modes propres de vibration de tels systèmes, chacune des coordonnées généralisées vérifie une équation de la forme (2.1). Ainsi tous les résultats du chapitre 2 s'appliquent au vecteur d'état constitué des coordonnées généralisées et de leurs dérivées temporelles. Comme pour l'oscillateur simple, on se concentrera essentiellement sur les aspects énergétiques, le lecteur étant une nouvelle fois invité à consulter les ouvrages classiques de dynamique des structures pour une présentation approfondie [2, 5, 6, 8, 14].

On considère dans un premier temps la réponse forcée d'une structure élastique continue à une sollicitation à bande limitée, puis sa réponse aléatoire stationnaire à un bruit de bande, et enfin sa réponse à une excitation harmonique à la pulsation propre moyenne lorsque ses pulsations propres sont supposées aléatoires. On établit des résultats d'équivalence de moyennes¹ du même type que pour l'oscillateur simple.

4.1 Notations et hypothèses

La structure considérée occupe le domaine (ouvert) borné Ω de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ régulière. La normale extérieure au domaine est notée \mathbf{n} et \mathbf{u} désigne le champ des déplacements de cette structure autour d'une configuration d'équilibre statique considérée comme son état de référence. Sur la partie Γ_u de la frontière le système est fixe ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) tandis que sont imposés un champ de forces surfaciques $\boldsymbol{\tau}$ sur la partie Γ_σ et un champ de forces volumiques \mathbf{g} dans Ω (voir la FIG. 4.1). Par la suite les configurations géométriques initiale et actuelle seront confondues (hypothèse des petites perturbations et des petites déformations). Enfin on suppose que les différents matériaux constituant la structure ont un comportement viscoélastique linéaire. La relation fondamentale de la dynamique (équation de Navier) et les conditions aux limites s'écrivent alors pour le champ des déplacements \mathbf{u} (voir le cours

1. Pour plus de détails se reporter par exemple à P.W. Smith, Jr. & R.H. Lyon : *Sound and Structural Vibration*, Technical Report CR160, National Aeronautics and Space Administration, Washington DC, mars 1965, ou C. Soize : *Analyse Statistique Énergétique = S.E.A. Etude Bibliographique*, Rapport Technique 72/3454 RY 166 R, Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiales, Châtillon, juillet 1987.

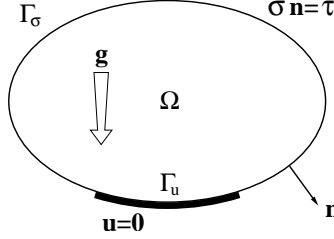


FIGURE 4.1 – Structure occupant un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 avec déplacement et vecteur contrainte imposés sur sa frontière.

de Mécanique des Milieux Continus de tronc commun pour l'élasticité infinitésimale [1]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \varrho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} & \text{sur } \Gamma_\sigma \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

\mathbf{x} est un point générique de \mathbb{R}^3 , ϱ est la densité des matériaux et $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le champ de contraintes lié au champ de déformations linéarisées² $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes_s \mathbf{u}$ par la loi de comportement viscoélastique linéaire (cours de Mécanique des Milieux Continus [1]) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}^v \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t).$$

\mathbf{C}^e est le tenseur d'élasticité des matériaux et \mathbf{C}^v le tenseur de viscosité; s'ils sont indépendants du temps, on retrouve la loi de comportement d'un solide visco-élastique de Kelvin-Voigt.

Principe des travaux virtuels – Le Principe des Travaux Virtuels appliqué au problème aux limites (4.1) ci-dessus permet de construire numériquement ses solutions (dans un sens à préciser³). Pour cela, on introduit l'espace des champs cinématiquement admissibles noté \mathcal{C} tel que :

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \text{ régulier et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u \}. \quad (4.3)$$

2. On rappelle que

$$\nabla \otimes_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)$$

où

$$\nabla \otimes \mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{u})$$

si $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

3. Précisons-le d'ors et déjà. Soit $]0, T[$, $0 < T < +\infty$, l'intervalle de temps sur lequel on cherche une solution de (4.1)–(4.2). On note $L^2(0, T; \mathcal{C})$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables $t \mapsto \mathbf{u}(t) :]0, T[\rightarrow \mathcal{C}$ telles que $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}} \in L^2(0, T)$, où \mathcal{C} est l'espace des champs cinématiquement admissibles défini par (4.3), et $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C})$ l'ensemble des fonctions de \mathcal{C} telles que $t \mapsto \mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{C}$ est continue. On suppose que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v}_0 \in H = [L^2(\Omega)]^3$, $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H)$ et enfin $\boldsymbol{\tau} \in [L^2(]0, T[\times \partial\Omega)]^3$. Alors (4.1)–(4.2) admet une unique solution dans l'espace

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{C}), \quad \dot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H) \}$$

Ici le terme "régulier" signifie que les fonctions de \mathcal{C} sont choisies suffisamment différentiables afin que les intégrations effectuées ci-dessous conservent un sens ; on a notamment $\mathcal{C} \subset H = [L^2(\Omega)]^3$ (les champs cinématiquement admissibles sont aussi de carré intégrable, c'est-à-dire d'énergie finie). Alors pour tout champ de déplacement virtuel $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ on doit vérifier :

$$\int_{\Omega} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (4.4)$$

où $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)$ est le produit contracté des tenseurs \mathbf{a} et \mathbf{b} et $d\sigma$ la mesure de surface naturelle portée par $\partial\Omega$. Les formes bilinéaires de masse m , raideur k et dissipation d données respectivement par

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}^e(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}^v(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

sont symétriques, définies positives et continues sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$; elles définissent les opérateurs de masse \mathbf{M} , raideur \mathbf{K} et dissipation \mathbf{D} de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ (opérateurs linéaires continus) tels que :

$$\langle \mathbf{M}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{D}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

respectivement. \mathcal{C}' est l'espace dual de \mathcal{C} , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires de \mathcal{C} , et $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}$ le produit de dualité entre $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$. La forme linéaire f sur \mathcal{C} des efforts extérieurs imposés, donnée par

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma,$$

est continue sur \mathcal{C} pour \mathbf{g} et $\boldsymbol{\tau}$ d'énergies finies (ou de carrés intégrables) sur Ω et $\partial\Omega$ respectivement. Elle définit donc de manière unique la force $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'$ telle que⁴

$$f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}.$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit avec ces notations

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4.5)$$

qui est l'équation usuelle des vibrations de la structure considérée en terme d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, et que l'on doit compléter par les conditions initiales (4.2). Elle a la forme de l'équation (2.3) pour l'oscillateur simple, si l'on introduit la variable d'état $\mathbf{q} = (\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \in H \times \mathcal{C} = \mathcal{V}$, la condition initiale $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0)$ et les opérateurs

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

avec \mathbf{I} l'identité de $\mathcal{L}(\mathcal{C}')$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. On écrit donc

$$\mathcal{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}\mathbf{q} = \mathcal{Q}\mathbf{f}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (4.6)$$

"au sens des distributions".

avec de plus

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}), \quad \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0, T]; H) \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; \mathcal{C}').$$

Le principe des travaux virtuels (4.4) est écrit au sens des distributions $\mathcal{D}'(0, T)$. Les propriétés vérifiées par ϱ , \mathbf{C}^e et \mathbf{C}^v (positifs, bornés) pour que ceci soit vrai sont usuelles.

4. Si $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{f} \in H \subset \mathcal{C}'$ mais généralement $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$ et donc $\mathbf{f} \notin H$.

Modes propres de vibration – On note

$$\mathcal{A}_{\text{cons}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

la partie conservative de l'opérateur \mathcal{A} . Le problème spectral : Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}$ tels que

$$[\mathrm{i}\lambda\mathcal{A}_{\text{cons}} + \mathcal{B}] \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda\phi \\ \phi \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

admet une suite dénombrable de solutions $(\lambda_1, \phi_1), (\lambda_2, \phi_2) \dots$ avec $0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots$. Les vecteurs propres $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ forment une base hilbertienne de l'espace $H_\mu = [L^2(\Omega, \mu(d\mathbf{x}))]^3$ des classes de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^3 et de carrés intégrables par rapport à la mesure unitaire $\mu(d\mathbf{x}) = \frac{\rho}{M} d\mathbf{x}$, où

$$M = \int_{\Omega} \rho d\mathbf{x}$$

est la masse totale de la structure. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\mu$ désignant le produit scalaire dans H_μ , et $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H$ le produit scalaire dans H , on a :

$$m(\phi_\alpha, \phi_\beta) = M(\phi_\alpha, \phi_\beta)_\mu = M\delta_{\alpha\beta}, \quad k(\phi_\alpha, \phi_\beta) = M\lambda_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.7)$$

On suppose par ailleurs que les modes propres de vibration $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ diagonalisent également l'opérateur de dissipation \mathbf{D} :

$$d(\phi_\alpha, \phi_\beta) = M\eta_{d\alpha} |\lambda_\alpha| \delta_{\alpha\beta}.$$

$\eta_{d\alpha}$ est le facteur de perte par dissipation du mode α . On pose $\omega_\alpha = |\lambda_\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$: ce sont les pulsations propres de vibration du système conservatif associé à l'équation (4.6). Sa solution \mathbf{q} étant projetée sur les vecteurs $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \phi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{q}_\alpha(t), \quad (4.8)$$

les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_\alpha = (\dot{q}_\alpha, q_\alpha)$, $\dot{q}_\alpha = (\dot{\mathbf{u}}, \phi_\alpha)_\mu$ et $q_\alpha = (\mathbf{u}, \phi_\alpha)_\mu$, vérifient les équations découplées

$$\mathbf{A}_\alpha \dot{\mathbf{q}}_\alpha + \mathbf{B}_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{Q} f_\alpha, \quad \mathbf{q}_\alpha(0) = \mathbf{q}_{0\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad (4.9)$$

avec les matrices

$$\mathbf{A}_\alpha = M \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \eta_{d\alpha} \omega_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\alpha = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

les forces généralisées⁵ $f_\alpha(t) = f(\phi_\alpha)$ et les conditions initiales $\mathbf{q}_{0\alpha} = ((\mathbf{v}_0, \phi_\alpha)_\mu, (\mathbf{u}_0, \phi_\alpha)_\mu)$.

5. Pour que $f(\phi_\alpha)$ ait un sens il faut s'assurer que la trace de ϕ_α sur Γ_σ est bien définie ; c'est notamment le cas si $\mathcal{C} \subset [H^1(\Omega)]^3$. Par ailleurs pour un milieu solide on considère généralement que $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ de sorte que $f(\phi_\alpha) = (\boldsymbol{\tau}, \phi_\alpha)_{L^2(\Gamma_\sigma)}$.

4.2 Grandeurs énergétiques

La *puissance instantanée* de la structure est le scalaire :

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= \langle \mathcal{B}\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_\alpha \mathbf{q}_\alpha, \dot{\mathbf{q}}_\alpha),\end{aligned}\tag{4.10}$$

la *puissance dissipée* par la structure est le scalaire :

$$\begin{aligned}\Pi_d(t) &= \langle \mathcal{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{A}_\alpha \dot{\mathbf{q}}_\alpha, \dot{\mathbf{q}}_\alpha) \geq 0,\end{aligned}\tag{4.11}$$

et la *puissance injectée* est :

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{IN}}(t) &= \langle \mathcal{Q}\mathbf{f}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \dot{q}_\alpha(t) f_\alpha(t).\end{aligned}\tag{4.12}$$

En multipliant l'équation (4.6) ci-dessus par $\dot{\mathbf{q}}$, on en déduit le bilan des puissances instantanées :

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi_{\text{IN}}(t) - \Pi_d(t)}\tag{4.13}$$

avec $\mathcal{E}(t) > 0$ l'énergie mécanique instantanée de la structure définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_\alpha \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} M \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\dot{q}_\alpha(t)^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t)^2)\end{aligned}\tag{4.14}$$

et telle que $\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi(t)$. Le premier terme ci-dessus est l'énergie cinétique \mathcal{E}_c , le second est l'énergie élastique \mathcal{E}_p :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} M \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \dot{q}_\alpha^2, \quad \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} M \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \omega_\alpha^2 q_\alpha^2.\tag{4.15}$$

Enfin l'*énergie totale dissipée* jusqu'à l'instant t est donnée par :

$$\mathcal{E}_d(t) = \int_{-\infty}^t \Pi_d(\tau) d\tau\tag{4.16}$$

et l'*énergie totale introduite* jusqu'à l'instant t est quant à elle donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{IN}}(t) = \int_{-\infty}^t \Pi_{\text{IN}}(\tau) d\tau.\tag{4.17}$$

4.3 Caractéristiques du filtre associé au système réduit (4.9)

La résolvante du système (4.9) ci-dessus est, pour chaque mode $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \mathbf{G}_\alpha(t)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2, 2)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\alpha \dot{\mathbf{G}}_\alpha(t) + \mathbf{B}_\alpha \mathbf{G}_\alpha(t) = \mathbf{0} & \forall t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{G}_\alpha(0) = \mathbb{I}_2 \end{cases}$$

Elle s'écrit $\mathbf{G}_\alpha(t) = e^{-\mathbf{A}_\alpha^{-1} \mathbf{B}_\alpha t}$, soit :

$$\begin{aligned} G_{22}^\alpha(t) &= \left[\cos(\omega_{D\alpha} t) + \frac{\xi_\alpha}{\sqrt{1 - \xi_\alpha^2}} \sin(\omega_{D\alpha} t) \right] e^{-\xi_\alpha \omega_\alpha t}, \quad G_{21}^\alpha(t) = \frac{1}{\omega_{D\alpha}} \sin(\omega_{D\alpha} t) e^{-\xi_\alpha \omega_\alpha t} \\ G_{11}^\alpha(t) &= \dot{G}_{21}^\alpha(t), \quad G_{12}^\alpha(t) = \dot{G}_{22}^\alpha(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec les pulsations propres amorties $\omega_{D\alpha} = \omega_\alpha \sqrt{1 - \xi_\alpha^2}$ et $\eta_{d\alpha} = 2\xi_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

La réponse impulsionnelle (voir l'Annexe A.4) de ce système, $t \mapsto \mathbb{h}_\alpha(t)$ de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{h}_\alpha(t) &= \mathbf{G}_\alpha(t) \mathbf{A}_\alpha^{-1} \mathbf{Q} \times \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t) \\ &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} G_{11}^\alpha(t) \\ G_{21}^\alpha(t) \end{pmatrix} \times \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le filtre linéaire de convolution associé est causal et stable car $\mathbb{h}_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction de réponse en fréquence du filtre, $\omega \mapsto \hat{\mathbb{h}}_\alpha(\omega)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$, est la transformée de Fourier (au sens des fonctions intégrables) de la réponse impulsionnelle :

$$\hat{\mathbb{h}}_\alpha(\omega) = \hat{h}_\alpha(\omega) \begin{pmatrix} i\omega \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

avec l'expression suivante de la *réceptance* du mode α de la structure :

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \frac{1}{M(-\omega^2 + 2i\xi_\alpha \omega_\alpha \omega + \omega_\alpha^2)}. \quad (4.21)$$

Comme pour l'oscillateur simple on définit également l'*admittance modale* $Y_\alpha(\omega) = i\omega \hat{h}_\alpha(\omega)$ et l'*impédance* associée $Z_\alpha(\omega) = Y_\alpha^{-1}(\omega)$. La fonction $\omega \mapsto |\hat{h}_\alpha(\omega)|$ atteint un maximum absolu en $\omega = \pm \omega'_\alpha$ avec

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha \sqrt{1 - 2\xi_\alpha^2},$$

fréquence de résonance du mode α . En utilisant l'Éq. (2.15), on montre que la *bande passante équivalente* b_α du mode α , définie par

$$b_\alpha |\hat{h}(\omega'_\alpha)|^2 = \int_0^{+\infty} |\hat{h}_\alpha(\omega)|^2 d\omega,$$

est donnée par

$$b_\alpha = \pi \xi_\alpha \omega_\alpha (1 - \xi_\alpha^2), \quad (4.22)$$

ou $b_\alpha \simeq \pi \xi_\alpha \omega_\alpha = \frac{\pi}{2} \Delta_\alpha$ lorsque $\xi_\alpha \ll 1$ (on a posé $\Delta_\alpha = \eta_{d\alpha} \omega_\alpha$ pour la largeur de bande passante à -3 dB du mode α).

La réponse forcée de la structure donnée par l'Éq. (4.8) et due à l'excitation \mathbf{f} est alors donnée formellement par

$$\mathbf{q}^f(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t \mathbb{h}_{\alpha}(t - \tau) f_{\alpha}(\tau) d\tau. \quad (4.23)$$

La réponse impulsionnelle de la structure est l'opérateur intégral de noyau $\mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ défini sur $\Omega \times \Omega \times [0, +\infty[$ avec

$$\mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \mathbb{h}_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \otimes \phi_{\alpha}(\mathbf{y}) \quad (4.24)$$

et tel que

$$\mathbf{q}^f(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.25)$$

en supposant que $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}; H) \subset L^2(\mathbb{R}; \mathcal{C}')$. La fonction de réponse en fréquence de la structure est quant à elle l'opérateur intégral sur Ω de noyau

$$\hat{\mathbb{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \hat{\mathbb{h}}_{\alpha}(\omega) \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \otimes \phi_{\alpha}(\mathbf{y}), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega. \quad (4.26)$$

4.4 Problème d'évolution déterministe

4.4.1 Réponse libre

Pour chaque mode $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la réponse libre du système (4.9) ci-dessus est sa solution pour $f_{\alpha} \equiv 0$, $t \geq 0$, et s'écrit :

$$\mathbf{q}_{\alpha}^{\ell}(t) = \mathbf{G}_{\alpha}(t) \mathbf{q}_{0\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (4.27)$$

Des expressions (4.18) ci-dessus des résolvantes, on déduit, en supposant $\xi_{\alpha} > 0$ pour tous les modes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}^{\ell}\|_{\mu} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \|\mathbf{G}_{\alpha} \mathbf{q}_{0\alpha}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.28)$$

avec $\|\mathbf{u}\|_{\mu} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mu}}$.

L'énergie mécanique associée à la réponse libre est donnée par $\mathcal{E}^{\ell}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha}^{\ell}, \mathbf{q}_{\alpha}^{\ell})$ et s'écrit

$$\mathcal{E}^{\ell}(t) \simeq \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \mathcal{E}_{0\alpha} e^{-\eta_{d\alpha} \omega_{\alpha} t} \quad (4.29)$$

avec $\mathcal{E}_{0\alpha} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{q}_{0\alpha}, \mathbf{q}_{0\alpha})$. En intégrant l'équation (4.13) entre $t = 0$ et $t = +\infty$, on obtient le bilan énergétique total pour les vibrations libres

$$\mathcal{E}_d^{\ell}(\infty) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \mathcal{E}_{0\alpha}. \quad (4.30)$$

4.4.2 Réponse forcée

Considérons l'excitation d'énergie finie $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}; H)$ à bande limitée donnée par son spectre :

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{2\pi S_0} \mathbb{1}_{I_0 \cup I_0}(\omega) \otimes \varphi(\mathbf{x}), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

où $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $I_0 = [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$, avec $\Delta\omega < 2\omega_0$, $S_0 > 0$ et $\varphi \in H$. On note $\varphi_\alpha = (\varphi, \phi_\alpha)_H$ et on a alors :

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \sqrt{2\pi S_0} \mathbb{1}_{I_0 \cup I_0}(\omega) \times \varphi_\alpha.$$

Les énergies cinétique et élastique totales au cours du mouvement sont d'après les équations (4.20), (4.23) et la formule de Plancherel :

$$E_c^f = \frac{1}{T_0} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_c^f(\tau) d\tau = \frac{MS_0}{2T_0} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \varphi_\alpha^2 \int_{I_0 \cup I_0} \omega^2 |\hat{h}_\alpha(\omega)|^2 d\omega$$

et

$$E_p^f = \frac{1}{T_0} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_p^f(\tau) d\tau = \frac{MS_0}{2T_0} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \varphi_\alpha^2 \int_{I_0 \cup I_0} \omega_\alpha^2 |\hat{h}_\alpha(\omega)|^2 d\omega,$$

avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. À ce stade, il est d'usage dans la littérature spécialisée d'introduire une densité spectrale d'énergie modale définie par :

$$e_\alpha(\omega) = M|Y_\alpha(\omega)|^2 \times \pi S_0 \varphi_\alpha^2,$$

ainsi que la *température vibratoire* du mode α donnée par :

$$\theta_\alpha(\omega) = \frac{\pi S_0 \varphi_\alpha^2}{\Im\{i\omega Z_\alpha(\omega)\}}.$$

On vérifie alors que la densité spectrale d'énergie et la température du mode α sont liées par $e_\alpha(\omega) = \omega M \Re\{Y_\alpha(\omega)\} \theta_\alpha(\omega)$. Ces notions réapparaîtront par la suite au chapitre 5.

On introduit l'ensemble $\mathcal{J} = \{\alpha; \omega_\alpha \in I_0\}$, et on suppose que $\Delta\omega \gg b_\alpha$ et $\xi_\alpha \ll 1$ pour tous les $\alpha \in \mathcal{J}$ (excitation large bande). On peut ainsi supposer que **la réponse forcée de la structure est due à la seule contribution des modes $\alpha \in \mathcal{J}$ de la bande d'analyse I_0** . On déduit alors des formules (2.15)–(2.16)

$$E_c^f \simeq E_p^f \simeq \frac{\pi S_0}{2MT_0} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{\varphi_\alpha^2}{\eta_{d\alpha} \omega_\alpha}, \quad (4.31)$$

de sorte que l'énergie mécanique totale $E^f = E_c^f + E_p^f$ est

$$E^f \simeq \frac{\pi S_0}{MT_0} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{\varphi_\alpha^2}{\eta_{d\alpha} \omega_\alpha} = \frac{1}{T_0} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \omega_\alpha \theta_\alpha(\omega_\alpha). \quad (4.32)$$

Comme par ailleurs $\Pi_d(t) = M \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \eta_{d\alpha} \omega_\alpha \dot{q}_\alpha^2$, on en déduit

$$\mathcal{E}_d^f(\infty) \simeq \frac{\pi S_0}{M} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \varphi_\alpha^2. \quad (4.33)$$

Le bilan énergétique total des vibrations forcées de la structure s'écrit, en intégrant (4.13) :

$$\mathcal{E}_d^f(\infty) = \mathcal{E}_{IN}^f(\infty). \quad (4.34)$$

L'énergie mécanique totale de la réponse forcée dépend de l'amortissement et l'énergie dissipée totale dépend de la masse de la structure.

4.4.3 Réponse d'évolution

La réponse totale du système (4.6) ci-dessus pour $t \geq 0$ et en utilisant la force extérieure $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t \geq 0\}$ est la réponse d'évolution $\{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t \geq 0\}$; elle s'écrit donc, compte tenu des formules précédentes :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{G}_{\alpha}(t) \mathbf{q}_{0\alpha} + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.35)$$

On montre alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}^f\|_{\mu} = 0 \quad (4.36)$$

dès lors que la structure est amortie (d définie positive).

4.5 Problème d'évolution aléatoire

Les développements de la section précédente sont tout à fait similaires au cas de l'oscillateur simple sous chargement déterministe large bande. Il en est de même pour l'étude de la réponse aléatoire stationnaire à une excitation stationnaire en temps. On se limite à ce cas dans cette section, en partant de conditions initiales nulles $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$. Le cas de conditions initiales aléatoires se traite de la même manière que pour l'oscillateur simple (voir la section §2.3.1), en sommant la contribution des différents modes propres structuraux.

4.5.1 Réponse forcée stationnaire

Les sollicitations extérieures \mathbf{f} sont donc modélisées par un processus stochastique $(\mathbf{F}_t, t \in \mathbb{R})$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans H centré, du second ordre, stationnaire en m.o.d. par rapport au temps et continu en m.o.d. Sa moyenne est donc $\mu_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, et sa fonction d'auto-corrélation transversale $\mathbf{x}, \mathbf{y}, t \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ définie par

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{F}_{t+\tau}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{F}_t(\mathbf{y})\}$$

est continue et vérifie $\text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty$. On suppose que la mesure spectrale transversale de ce champ admet une densité matricielle notée $\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ par rapport à la mesure $d\omega$, telle que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\omega$$

avec les propriétés suivantes :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)^*, \quad \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\omega) = \overline{\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}.$$

On suppose également qu'elle s'écrit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes \mathbb{1}_{I_0 \cup \underline{I}_0}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

où $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\underline{I}_0 = [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ avec $\Delta\omega < 2\omega_0$ (bruit de bande). La réponse forcée stationnaire du système (4.6) ci-dessus est modélisée par le processus stochastique $(\mathbf{Q}_t^f, t \in \mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t^f(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{F}_{t-\tau}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau$$

dans le sens de l'intégrale en m.o.d. d'un processus stochastique du second ordre [15]. $(\mathbf{Q}_t^f, t \in \mathbb{R})$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans \mathcal{V} et centré est du second ordre, stationnaire en m.o.d. par rapport au temps et continu en m.o.d. Sa fonction d'auto-corrélation transversale s'écrit

$$\mathbf{R}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{R}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t + \tau' - \tau) \mathbb{h}(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \tau')^T d\mathbf{y} d\mathbf{y}' d\tau d\tau'$$

et sa fonction de densité spectrale transversale s'écrit

$$\mathbf{S}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \widehat{\mathbb{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \omega) \widehat{\mathbb{h}}(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \omega)^* d\mathbf{y} d\mathbf{y}'.$$

On peut poser

$$S_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi_{\beta}(\mathbf{y}), \phi_{\alpha}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

et

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}^f(\omega) = S_{\alpha\beta} \times \widehat{\mathbb{h}}_{\alpha}(\omega) \otimes \overline{\widehat{\mathbb{h}}_{\beta}(\omega)};$$

alors la densité spectrale transversale s'écrit

$$\mathbf{S}^f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^f(\omega) \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \otimes \phi_{\beta}(\mathbf{y}) \times \mathbb{1}_{I_0 \cup I_0}(\omega).$$

Comme à la section §4.4.2, on introduit l'ensemble $\mathcal{J} = \{\alpha; \omega_{\alpha} \in I_0\}$, et on suppose que $\Delta\omega \gg b_{\alpha}$ et $\xi_{\alpha} \ll 1$ pour tous les $\alpha \in \mathcal{J}$. On suppose encore que la réponse forcée stationnaire de la structure est due à la seule contribution des modes $\alpha \in \mathcal{J}$ de la bande d'analyse I_0 . La température vibratoire du mode α est définie par :

$$\theta_{\alpha}(\omega) = \frac{\pi S_{\alpha\alpha}}{\Im\{i\omega Z_{\alpha}(\omega)\}}.$$

On déduit alors des formules (2.15)–(2.16) et (4.15)

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{c,t}^f\} \simeq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{p,t}^f\} \simeq \frac{\pi}{2M} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{S_{\alpha\alpha}}{\eta_{d\alpha} \omega_{\alpha}} \quad (4.37)$$

(indépendantes du temps) de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{m,t}^f\} &\simeq \frac{\pi}{M} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{S_{\alpha\alpha}}{\eta_{d\alpha} \omega_{\alpha}} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \omega_{\alpha} \theta_{\alpha}(\omega_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

La puissance dissipée moyenne est quant à elle

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}^f\} \simeq \frac{\pi}{M} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} S_{\alpha\alpha}, \quad (4.39)$$

et satisfait l'équation du bilan énergétique moyen

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}^f\} = \mathbb{E}\{\Pi_{IN,t}^f\}. \quad (4.40)$$

La somme $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \text{smash} \frac{S_{\alpha\alpha}}{\eta_{d\alpha}\omega_\alpha}$ s'interprète comme une moyenne sur la bande I_0 des réponses quadratiques moyennes des modes de cette bande ; on peut vérifier qu'elle est en règle générale relativement indépendante de la largeur de bande $\Delta\omega$, lentement variable en fonction de la fréquence centrale ω_0 , et relativement insensible aux incertitudes (voir la discussion du chapitre d'introduction). Enfin on retiendra que l'énergie mécanique moyenne de la réponse forcée stationnaire dépend de l'amortissement et la puissance dissipée moyenne dépend de la masse de la structure.

4.5.2 Réponse d'évolution

La réponse d'évolution aléatoire du système (4.6) ci-dessus est le processus stochastique $(\mathbf{Q}_t, t \geq 0)$ qui s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq 0$$

le second terme ayant le sens de l'intégrale en m.o.d. d'un processus stochastique du second ordre [15]. $(\mathbf{Q}_t, t \geq 0)$ est du second ordre, centré (on a pris des conditions initiales nulles), continu en m.o.d, non stationnaire par rapport au temps. En revanche, on peut établir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{Q}_t - \mathbf{Q}_t^f\|_{L^2(\Omega, H_\mu)} = 0 \quad (4.41)$$

dès lors que le système est amorti (d définie positive).

4.6 Structure à spectre aléatoire soumise à une excitation harmonique

La dernière classe de problèmes considérée pour la structure, par analogie avec l'oscillateur simple (voir la section §2.4), est celle d'un système ayant N fréquences propres aléatoires distribuées uniformément dans la bande $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et centrées en ω_0 , tous les autres paramètres restant quant à eux déterministes. Afin de préserver la consistance de ce modèle, et dans la mesure où les facteurs de perte par dissipation interne $\eta_{d\alpha}$ sont liés aux fréquences propres, on suppose que ceux-ci restent constants et égaux pour les N modes de la bande I_0 . La structure est par ailleurs soumise à un chargement harmonique \mathbf{f} à la pulsation centrale ω_0 de la bande.

Soit $\mathcal{J} = \{\alpha; \omega_\alpha \in I_0\}$. On modélise donc les $N = \text{card} \mathcal{J}$ pulsations propres de la structure dans la bande I_0 par N variables aléatoires $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) , indépendantes dans leur ensemble, et suivant chacune une loi de probabilité uniforme sur I_0 centrée en ω_0 . La loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ est donc

$$P_{\mathbf{\Omega}}(d\omega) = \left(\frac{1}{\Delta\omega} \right)^N \mathbb{1}_{I_0}(\omega_1) d\omega_1 \times \mathbb{1}_{I_0}(\omega_2) d\omega_2 \times \dots \times \mathbb{1}_{I_0}(\omega_N) d\omega_N.$$

L'excitation imposée s'écrit $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cos(\omega_0 t)$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in H$, et on pose $\varphi_j = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}_{\alpha_j})_H$ pour $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Pour tous les $\alpha_j \in \mathcal{J}$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, et t fixé dans $[0, +\infty[$, la réponse impulsionnelle $\mathbb{h}_{\alpha_j}(t)$ donnée par l'Éq. (4.19) est une variable aléatoire que l'on note $\mathbb{h}_{\Omega_j}(t)$. De même, pour ω fixée dans \mathbb{R} , la fonction de réponse en fréquence $\widehat{\mathbb{h}}_{\alpha_j}(\omega)$ donnée par (4.20) est une variable aléatoire que l'on note $\widehat{\mathbb{h}}_{\Omega_j}(\omega)$; la réceptance $\widehat{h}_{\alpha_j}(\omega)$ et

l'admittance $Y_{\alpha_j}(\omega) = i\omega\hat{h}_{\alpha_j}(\omega)$ sont des variables aléatoires que l'on note respectivement $\hat{h}_{\Omega_j}(\omega)$ et $Y_{\Omega_j}(\omega)$.

Pour t fixé dans \mathbb{R} et j fixé dans $\{1, 2, \dots, N\}$, la réponse forcée de chaque mode dans la bande I_0 est une variable aléatoire $\mathbf{Q}_{\Omega_j}(t)$ qui s'écrit

$$\mathbf{Q}_{\Omega_j}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbb{h}_{\Omega_j}(t - \tau) \varphi_j \cos(\omega_0 \tau) d\tau = \varphi_j \Re\{e^{i\omega_0 t} \hat{\mathbb{h}}_{\Omega_j}(\omega)\}. \quad (4.42)$$

En supposant que seuls les modes de la bande I_0 participent à la réponse de la structure, les puissances injectée et dissipée sont alors les variables aléatoires données par

$$\Pi_{\text{IN}, \mathbf{\Omega}}(t) \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 (\Re\{Y_{\Omega_j}(\omega)\} + \Re\{e^{2i\omega_0 t} Y_{\Omega_j}(\omega)\})$$

et

$$\Pi_{\text{d}, \mathbf{\Omega}}(t) \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 M \eta_{\text{d}} \Omega_j \left(|Y_{\Omega_j}(\omega)|^2 + \Re\{e^{2i\omega_0 t} Y_{\Omega_j}(\omega)^2\} \right),$$

avec η_{d} le facteur de perte par dissipation constant pour tous les modes de la bande I_0 . Leurs moyennes temporelles sur une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ sont les variables aléatoires

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{\text{IN}} \rangle_{\mathbf{\Omega}} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \Pi_{\text{IN}, \mathbf{\Omega}}(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 \Re\{Y_{\Omega_j}(\omega)\}, \\ \langle \Pi_{\text{d}} \rangle_{\mathbf{\Omega}} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \Pi_{\text{d}, \mathbf{\Omega}}(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 M \eta_{\text{d}} \Omega_j |Y_{\Omega_j}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Les espérances mathématiques $\mathbb{E}\{\Re\{Y_{\Omega_j}(\omega)\}\}$ et $\mathbb{E}\{\Omega_j |Y_{\Omega_j}(\omega)|^2\}$ sont calculées grâce à la quadrature (2.38). On en déduit avec la condition $\frac{\pi}{2} \eta_{\text{d}} \omega_0 \ll \Delta\omega$

$$\mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{IN}} \rangle_{\mathbf{\Omega}}\} \simeq \mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{d}} \rangle_{\mathbf{\Omega}}\} \simeq \frac{\pi}{4M\Delta\omega} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2. \quad (4.43)$$

Pour ce qui est de l'énergie mécanique totale, comme on a

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{4} M \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 \left(|Y_{\Omega_j}(\omega)|^2 + \Omega_j^2 |\hat{h}_{\Omega_j}(\omega)|^2 \right),$$

on obtient avec (2.15) et (2.16)

$$\mathbb{E}\{\langle \mathcal{E} \rangle_{\mathbf{\Omega}}\} \simeq \frac{\pi}{4D_c\Delta\omega} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 \quad (4.44)$$

avec $D_c = M\eta_{\text{d}}\omega_0$, ou bien

$$\mathbb{E}\{\langle \Pi_{\text{d}} \rangle_{\mathbf{\Omega}}\} \simeq \eta_{\text{d}} \omega_0 \mathbb{E}\{\langle \mathcal{E} \rangle_{\mathbf{\Omega}}\}. \quad (4.45)$$

4.7 Synthèse des résultats obtenus

Les trois problèmes fondamentaux pour un système dynamique linéaire, continu et faiblement amorti traités dans ce chapitre font apparaître les mêmes équivalences globales que pour l'oscillateur simple. Hormis des réserves identiques quant aux définitions des différentes moyennes utilisées, la principale hypothèse introduite afin d'obtenir ces résultats est celle consistant à ne retenir, pour les grandeurs énergétiques relatives à la réponse, que la contribution des modes dont la fréquence propre associée se situe dans la bande d'analyse. On notera enfin que des conclusions tout à fait comparables peuvent être obtenues en considérant la classe de problèmes consistant à imposer des chargements aléatoires aussi bien en espace qu'en temps (avec stationnarité en temps), distribués ou concentrés, en effectuant dans ce dernier cas une moyenne spatiale sur le domaine occupé par la structure afin de retrouver les mêmes équivalences.

Chapitre 5

Systèmes linéaires continus couplés

Les résultats obtenus dans les trois chapitres précédents ne sont pas spécifiques au domaine des hautes fréquences tel qu'il a été défini en introduction (et qui est l'objet principal de ce cours!). Néanmoins ils sont indispensables pour la bonne compréhension des hypothèses introduites dans ce chapitre afin de formuler les équations du couplage énergétique entre deux sous-systèmes linéaires continus ayant chacun une infinité de degrés de liberté. Ces hypothèses, qui sont à la base de l'analyse statistique énergétique, permettent de se placer dans des conditions telles que les conclusions du chapitre 3, principalement, peuvent être étendues à ce cas.

En suivant donc les développements du chapitre 3, on considère dans un premier temps le couplage de deux structures linéaires élastiques continues et les échanges d'énergie vibratoire entre ces sous-systèmes (généralisation de la section §3.1). On spécifiera également, dans un deuxième temps, comment ces résultats s'étendent au couplage d'un milieu élastique et d'un milieu acoustique tous deux bornés (cas par exemple d'une cavité acoustique : intérieur d'une cabine d'avion ou d'hélicoptère, voiture, train, sous-marin ... couplée à la structure qui la délimite). Enfin on examinera le couplage, en terme d'échanges d'énergie toujours, entre une structure et un fluide acoustique ambiant (généralisation de la section §3.2).

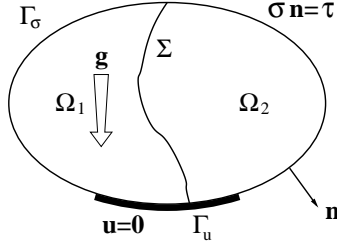
5.1 Équations énergétiques du couplage de deux sous-structures élastiques

5.1.1 Données et hypothèses

La structure étudiée au chapitre 4 est décomposée en deux sous-structures occupant chacune les domaines Ω_1 et Ω_2 , respectivement, et on note Σ leur interface : $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Pour $r \in \{1, 2\}$, on note également $\Gamma_u^r = \Gamma_u \cap \partial\Omega_r$, $\Gamma_\sigma^r = \Gamma_\sigma \cap \partial\Omega_r$ et \mathbf{n}_r la normale extérieure au domaine Ω_r (voir la FIG. 5.1). Formellement, si on introduit les champs de déplacement $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}|_{\Omega_r}$ qui sont les restrictions à Ω_r du champ de déplacement \mathbf{u} solution de l'Éq. (4.5), et les espaces \mathcal{C}_r des champs cinématiquement admissibles pour les deux sous-structures¹,

1. Ils sont définis par :

$$\mathcal{C}_r = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \text{ régulier dans } \Omega_r \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u^r\}.$$

FIGURE 5.1 – Structure principale divisée en deux sous-structures couplées par l'interface Σ .

on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Comme dans les chapitres précédents, on peut récrire ce système sous la forme d'une équation d'état du premier ordre en introduisant les notations

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{K}_c \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix},$$

et pour les opérateurs de couplage

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur d'état étant ici $\mathbf{q} = (\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ et en posant $\mathcal{Q}_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0})$, $\mathcal{Q}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{I})$, on a donc :

$$\mathcal{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}\mathbf{q} = \mathcal{Q}_1\mathbf{f}_1 + \mathcal{Q}_2\mathbf{f}_2 \quad (5.2)$$

"au sens des distributions", en complétant avec les conditions initiales pour $\mathbf{q}(0)$.

Données sur les excitations imposées – Comme dans la section §3.1, on s'intéresse à la réponse forcée stationnaire de ce système à des excitations du type bruits de bande sur $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$, la bande définie par sa fréquence centrale ω_0 et sa largeur $\Delta\omega < 2\omega_0$. On modélise donc \mathbf{f}_r , $r \in \{1, 2\}$, par un processus stochastique $(\mathbf{F}_{r,t}, t \in \mathbb{R})$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $H_r = [L^2(\Omega_r)]^3$ centré, du second ordre, stationnaire en m.o.d. par rapport au temps et continu en m.o.d. Sa moyenne est donc $\mu_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega_r$ et $t \in \mathbb{R}$, et sa fonction d'auto-corrélation transversale $\mathbf{x}, \mathbf{y}, t \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ définie par

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{F}_{r,t+\tau}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{F}_{r,t}(\mathbf{y})\}$$

est continue et vérifie $\text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty$. On suppose que la mesure spectrale transversale de ce champ admet une densité notée $\mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ par rapport à la mesure $d\omega$, telle que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\omega$$

avec les propriétés suivantes :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\omega) = \overline{\mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}.$$

On suppose également qu'elle s'écrit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{F}_r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbf{S}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes \mathbb{1}_{I_0 \cup I_0}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r,$$

où $I_0 = [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$. Enfin on considère des excitations non corrélées telles que :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{F}_{1,t+t'}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{F}_{2,t'}(\mathbf{y})\} = \mathbf{0}, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Propriétés des opérateurs de couplage – Dans la section §3.1 on a supposé que le couplage des oscillateurs était conservatif. On fait encore cette hypothèse pour le cas du couplage de deux sous-structures continues, ce qui se traduit par les propriétés suivantes pour les opérateurs de couplage \mathbf{M}_c , $\mathbf{\Omega}$ et \mathbf{K}_c :

- les opérateurs de couplage par la masse \mathbf{M}_c et la raideur \mathbf{K}_c sont définis par des formes bilinéaires symétriques

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_c \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{C', C} &= \langle \mathbf{M}_{12} \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_{C'_1, C_1} + \langle \mathbf{M}_{21} \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{C'_2, C_2} \\ &= m_c(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) + m_c(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}_c \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{C', C} &= \langle \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_{C'_1, C_1} + \langle \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{C'_2, C_2} \\ &= k_c(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) + k_c(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2); \end{aligned}$$

- l'opérateur de couplage par l'amortissement $\mathbf{\Omega}$ est défini par une forme bilinéaire antisymétrique (couplage gyroscopique)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Omega} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{C', C} &= \langle \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_{C'_1, C_1} + \langle \mathbf{D}_{21} \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{C'_2, C_2} \\ &= d_c(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - d_c(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

5.1.2 Modes propres de vibration des sous-structures découplées

Si l'opérateur de couplage \mathcal{B}_c est nul, la structure initiale est divisée en deux sous-structures indépendantes l'une de l'autre, dont les déplacements respectifs \mathbf{q}_1^b et \mathbf{q}_2^b vérifient les équations d'état

$$\mathcal{A}_r \dot{\mathbf{q}}_r^b + \mathcal{B}_r \mathbf{q}_r^b = \mathcal{Q}_r \mathbf{f}_r, \quad r \in \{1, 2\} \quad (5.3)$$

avec les notations

$$\mathcal{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_r \\ \mathbf{M}_r & \mathbf{D}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\mathcal{L}(C'_r)} \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\mathcal{A}_{r, \text{cons}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_r \\ \mathbf{M}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad r \in \{1, 2\}$$

la partie conservative de l'opérateur \mathcal{A}_r .

Problème spectral – On suppose que, pour $r = 1$ et $r = 2$, le problème spectral : Trouver $\lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\phi_r \in \mathcal{C}_r^b \subset \mathcal{C}_r$ tels que²

$$[i\lambda_r \mathcal{A}_{r,\text{cons}} + \mathcal{B}_r] \begin{pmatrix} i\lambda_r \phi_r \\ \phi_r \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

admet une suite dénombrable de solutions $(\lambda_{r,1}, \phi_{r,1}), (\lambda_{r,2}, \phi_{r,2}) \dots$ avec $0 < \lambda_{r,1}^2 \leq \lambda_{r,2}^2 \leq \dots$. Les vecteurs propres $\{\phi_{r,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ forment une base hilbertienne de l'espace $\tilde{H}_r = [L^2(\Omega_r, \mu_r(d\mathbf{x}))]$ ³ des classes de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^3 et de carrés intégrables par rapport à la mesure unitaire $\mu_r(d\mathbf{x}) = \frac{\varrho}{M_r} d\mathbf{x}$, où

$$M_r = \int_{\Omega_r} \varrho d\mathbf{x}$$

est la masse totale de la sous-structure r . $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mu_r}$ désignant le produit scalaire dans \tilde{H}_r , avec $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_r}$ le produit scalaire dans H_r , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \varrho \phi_{r,\alpha} \cdot \phi_{r,\beta} d\mathbf{x} &= M_r (\phi_{r,\alpha}, \phi_{r,\beta})_{\mu_r} = M_r \delta_{\alpha\beta}, \\ \int_{\Omega_r} \mathbf{C}^e \epsilon(\phi_{r,\alpha}) : \epsilon(\phi_{r,\beta}) d\mathbf{x} &= M_r \lambda_{r,\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

On suppose que les modes propres de vibrations $\{\phi_{r,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ diagonalisent également l'opérateur de dissipation \mathbf{D}_r :

$$\int_{\Omega_r} \mathbf{C}^v \epsilon(\phi_{r,\alpha}) : \epsilon(\phi_{r,\beta}) d\mathbf{x} = M_r \eta_{dr,\alpha} |\lambda_{r,\alpha}| \delta_{\alpha\beta}.$$

Enfin on pose $\omega_{r,\alpha} = |\lambda_{r,\alpha}|$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$: ce sont les pulsations propres de vibration du sous-système conservatif associé à l'équation (5.3). Dans ces conditions, sa solution \mathbf{q}_r^b est projetée sur les vecteurs $\{\phi_{r,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$

$$\mathbf{q}_r^b(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \phi_{r,\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{r,\alpha}^b(t),$$

et les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_{r,\alpha}^b = (\dot{q}_{r,\alpha}^b, q_{r,\alpha}^b)$, $\dot{q}_{r,\alpha}^b = (\dot{\mathbf{u}}_r^b, \phi_{r,\alpha})_{\mu_r}$ et $q_{r,\alpha}^b = (\mathbf{u}_r^b, \phi_{r,\alpha})_{\mu_r}$, vérifient

$$\mathbf{A}_{r,\alpha} \dot{\mathbf{q}}_{r,\alpha}^b + \mathbf{B}_{r,\alpha} \mathbf{q}_{r,\alpha}^b = \mathbf{Q} f_{r,\alpha}, \quad \mathbf{q}_{r,\alpha}^b(0) = \mathbf{q}_{0r,\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad (5.4)$$

avec les matrices

$$\mathbf{A}_{r,\alpha} = M_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \eta_{dr,\alpha} \omega_{r,\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{r,\alpha} = M_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{r,\alpha}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

2. L'espace \mathcal{C}_r^b est *a priori* différent de \mathcal{C}_r dans la mesure où les conditions aux limites imposées sur l'interface Σ dans une configuration "découplée" sont différentes de celles de la configuration réelle avec couplage (pour laquelle on a $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$). Le choix de \mathcal{C}_r^b est un problème délicat car il s'agit de garantir la bonne représentativité de la base de projection modale introduite; il doit être fait au cas par cas suivant les applications envisagées. Cet aspect n'est quasiment jamais abordé dans la littérature spécialisée, et il est difficile de donner quelques indications pertinentes à ce stade de l'exposé. On se contentera donc dans toute la suite de supposer qu'un tel choix a pu être fait suivant des considérations physiques "raisonnables". Si on estime par exemple que tel sous-système est manifestement plus souple que tel autre, on peut lui imposer un déplacement nul sur l'interface avec l'autre sous-système plus raide.

les forces généralisées $f_{r,\alpha}(t) = \langle \mathbf{f}_r, \boldsymbol{\phi}_{r,\alpha} \rangle_{\mathcal{C}'_r, \mathcal{C}_r}$ et les conditions initiales :

$$\mathbf{q}_{0r,\alpha} = ((\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\phi}_{r,\alpha})_{\mu_r}, (\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\phi}_{r,\alpha})_{\mu_r}).$$

Comme dans la section §4.3, on peut exprimer la fonction de réponse en fréquence du système (5.4) en fonction de la réceptance du mode propre de vibration α de la sous-structure r notée $\hat{h}_{r,\alpha}(\omega)$ et donnée par l'Éq. (4.21).

Projection sur les modes propres découplés – La solution \mathbf{q} du système (5.2) (pour les sous-systèmes couplés) est projetée, dans chaque sous-système, sur la base des modes propres découplés du sous-système correspondant

$$\mathbf{q}_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \boldsymbol{\phi}_{r,\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{r,\alpha}(t), \quad r \in \{1, 2\}.$$

On note par la suite :

$$\mu_{\alpha\beta} = m_c(\boldsymbol{\phi}_{2,\beta}, \boldsymbol{\phi}_{1,\alpha}), \quad \gamma_{\alpha\beta} = d_c(\boldsymbol{\phi}_{2,\beta}, \boldsymbol{\phi}_{1,\alpha}), \quad \kappa_{\alpha\beta} = k_c(\boldsymbol{\phi}_{2,\beta}, \boldsymbol{\phi}_{1,\alpha})$$

pour les éléments de la projection de l'opérateur de couplage \mathcal{B}_c sur les modes propres de vibration des sous-structures, que l'on note \mathbf{B}_c .

5.1.3 Grandeurs énergétiques

La *puissance instantanée* des deux sous-structures couplées est le scalaire :

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \langle \mathcal{B}\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_{1,\alpha} \mathbf{q}_{1,\alpha}, \dot{\mathbf{q}}_{1,\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_{2,\beta} \mathbf{q}_{2,\beta}, \dot{\mathbf{q}}_{2,\beta}) + \langle \mathcal{B}_c \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

la *puissance dissipée* par les sous-structures est le scalaire :

$$\begin{aligned} \Pi_d(t) &= \langle \mathcal{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{A}_{1,\alpha} \dot{\mathbf{q}}_{1,\alpha}, \dot{\mathbf{q}}_{1,\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{+\infty} (\mathbf{A}_{2,\beta} \dot{\mathbf{q}}_{2,\beta}, \dot{\mathbf{q}}_{2,\beta}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

et la *puissance introduite* totale est :

$$\begin{aligned} \Pi_{IN}(t) &= \langle \mathcal{Z}\mathbf{f}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}_{1,\alpha}) f_{1,\alpha} + \sum_{\beta=1}^{+\infty} (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}_{2,\beta}) f_{2,\beta}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le bilan des puissances échangées entre les deux sous-structures est défini par

$$\Pi_{12}(t) + \Pi_{21}(t) = - \langle \mathcal{B}_c \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \quad (5.8)$$

soit

$$\begin{aligned}\Pi_{12}(t) &= - \sum_{\beta=1}^{+\infty} \dot{q}_{2,\beta}(t) \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mu_{\alpha\beta} \ddot{q}_{1,\alpha}(t) - \gamma_{\alpha\beta} \dot{q}_{1,\alpha}(t) + \kappa_{\alpha\beta} q_{1,\alpha}(t)), \\ \Pi_{21}(t) &= - \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \dot{q}_{1,\alpha}(t) \sum_{\beta=1}^{+\infty} (\mu_{\alpha\beta} \ddot{q}_{2,\beta}(t) + \gamma_{\alpha\beta} \dot{q}_{2,\beta}(t) + \kappa_{\alpha\beta} q_{2,\beta}(t)).\end{aligned}$$

Ainsi la puissance instantanée du système couplé s'écrit-elle

$$\Pi(t) = \dot{\mathcal{E}}_1(t) - \Pi_{12}(t) + \dot{\mathcal{E}}_2(t) - \Pi_{21}(t) \quad (5.9)$$

avec $\mathcal{E}_r(t)$ l'énergie mécanique de la sous-structure r donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(t) &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{B}_{r,\alpha} \mathbf{q}_{r,\alpha}, \dot{\mathbf{q}}_{r,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} M_r \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\dot{q}_{r,\alpha}^2(t) + \omega_{r,\alpha}^2 q_{r,\alpha}^2(t)), \quad r \in \{1, 2\}.\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (5.2) ci-dessus par $\dot{\mathbf{q}}$, on en déduit le bilan des puissances instantanées :

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}_1(t) + \dot{\mathcal{E}}_2(t) = \Pi_{\text{IN}}(t) - \Pi_{\text{d}}(t) + \Pi_{12}(t) + \Pi_{21}(t)} \quad (5.10)$$

pour les deux sous-structures couplées, que l'on peut récrire pour chacune des sous-structures

$$\dot{\mathcal{E}}_r(t) = \Pi_{\text{IN}r}(t) - \Pi_{\text{d}r}(t) + \Pi_{sr}(t), \quad r \neq s \in \{1, 2\}. \quad (5.11)$$

5.1.4 Réponse forcée stationnaire

La réponse forcée stationnaire du système (5.2) aux excitations aléatoires stationnaires introduites à la section §5.1.1 est modélisée par le processus stochastique $(\mathbf{Q}_t, t \in \mathbb{R})$ qui s'écrit (au sens de l'intégration en m.o.d.)

$$\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_1} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{F}_{1,t-\tau}(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\tau + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_2} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{F}_{2,t-\tau}(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\tau$$

où $\mathbb{h}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ est la réponse impulsionnelle du système donnée par l'Éq. (4.24). $(\mathbf{Q}_t, t \in \mathbb{R})$ est du second ordre, centré, stationnaire en m.o.d. et comme les processus $(\mathbf{F}_{1,t}, t \in \mathbb{R})$ et $(\mathbf{F}_{2,t}, t \in \mathbb{R})$ sont décorrélés, sa fonction d'auto-corrélation transversale s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{R}_{\mathbf{F}_1}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t + \tau' - \tau) \mathbb{h}(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \tau')^T \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\mathbf{y}' \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\tau' \\ &+ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_2} \mathbb{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \mathbf{R}_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t + \tau' - \tau) \mathbb{h}(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \tau')^T \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\mathbf{y}' \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\tau', \quad (5.12)\end{aligned}$$

tandis que sa matrice de densité spectrale transversale est :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) &= \left\{ \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} \widehat{\mathbb{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \mathbf{S}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \widehat{\mathbb{h}}^*(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \omega) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\mathbf{y}' \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_2} \widehat{\mathbb{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \mathbf{S}_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \widehat{\mathbb{h}}^*(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \omega) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\mathbf{y}' \right\} \times \mathbb{1}_{I_0 \cup I_0}(\omega). \quad (5.13)\end{aligned}$$

5.1.5 Puissance moyenne échangée entre les sous-structures

Toutes les grandeurs énergétiques associées à la réponse forcée stationnaire du système sont des variables aléatoires du second ordre définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) . On vérifie avec les résultats de l'Annexe A.3 que $\mathbb{E}\{\dot{\mathcal{E}}_{r,t}\} = 0$ pour $r \in \{1, 2\}$ et que l'on a la relation de réciprocité

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} = -\mathbb{E}\{\Pi_{21,t}\}. \quad (5.14)$$

Le bilan des puissances moyennes s'écrit alors

$$\mathbb{E}\{\Pi_{d,t}\} = \mathbb{E}\{\Pi_{IN,t}\}. \quad (5.15)$$

Les énergies mécaniques moyennes de chaque sous-système sont données par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} &= \frac{1}{2} M_r \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbb{E}\{\dot{q}_{r,\alpha,t}^2\} + \omega_{r,\alpha}^2 \mathbb{E}\{q_{r,\alpha,t}^2\}) \\ &\simeq M_r \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \mathbb{E}\{\dot{q}_{r,\alpha,t}^2\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

et les puissances dissipées moyennes par

$$\mathbb{E}\{\Pi_{dr,t}\} = M_r \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \eta_{dr,\alpha} \omega_{r,\alpha} \mathbb{E}\{\dot{q}_{r,\alpha,t}^2\}. \quad (5.17)$$

Dans l'expression (4.24) de la réponse impulsionnelle du système interviennent les modes propres de vibration de la structure couplée. Néanmoins il est toujours possible de l'exprimer en fonction des modes propres de vibration pour chaque sous-système pris isolément, et de la matrice de couplage \mathbf{B}_c . On peut alors montrer dans un cadre assez général, pour un **couplage conservatif**, que l'on a une relation de la forme³

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \int_{I_0 \cup I_0} a_{r\alpha,s\beta}(\omega) [E_{r,\alpha\alpha}(\omega) - E_{s,\beta\beta}(\omega)] d\omega \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \left[\sum_{\substack{\alpha' = 1 \\ \alpha' \neq \alpha}}^{+\infty} \int_{I_0 \cup I_0} C_{r,\alpha\alpha'}^{s,\beta}(\omega) E_{r,\alpha\alpha'}(\omega) d\omega \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{\beta' = 1 \\ \beta' \neq \beta}}^{+\infty} \int_{I_0 \cup I_0} C_{s,\beta\beta'}^{r,\alpha}(\omega) E_{s,\beta\beta'}(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

3. Voir H.G. Davies : 'Exact solutions for the response of some coupled multimodal systems', *Journal of the Acoustical Society of America* **51**(1), 387-392 (1972), Sec. II ; G. Maidanik : 'Response of coupled dynamic systems', *Journal of Sound and Vibration* **46**(4), 561-583 (1976), Eq. (82a) ; et A.J. Keane & W.G. Price : 'Statistical Energy Analysis of strongly coupled systems', *Journal of Sound and Vibration* **117**(2), 363-386 (1987), Eq. (18). Les auteurs considèrent des couplages localisés (ponctuels) entre les sous-structures.

avec pour $r \in \{1, 2\}$

$$E_{r,\alpha\alpha'}(\omega) = \Re\{\omega^2 M_r S_{r,\alpha\alpha'} \hat{h}_{r,\alpha}(\omega) \hat{h}_{r,\alpha'}^*(\omega)\},$$

$$S_{r,\alpha\alpha'} = \frac{1}{M_r} \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_r} (\mathbf{S}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi_{r,\alpha'}(\mathbf{y}), \phi_{r,\alpha}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Les indices α et α' se réfèrent à la sous-structure r et les indices β et β' à la sous-structure s . Les coefficients $a_{r\alpha,s\beta}(\omega) = a_{s\beta,r\alpha}(\omega)$, $C_{r,\alpha\alpha'}^{s,\beta}(\omega)$ et $C_{s,\beta\beta'}^{r,\alpha}(\omega)$ dépendent des seules réceptances $\hat{h}_{r,\alpha}(\omega)$, $\hat{h}_{s,\beta}(\omega)$ des modes associés (α, β) , (α, α', β) et (β, β', α) , respectivement, des traces des déformées modales associées sur l'interface Γ , ainsi que des coefficients de la matrice de couplage \mathbf{B}_c ; ils sont donc indépendants des excitations. Enfin les coefficients $S_{r,\alpha\alpha'}$ sont appelés fonctions d'acceptance conjointes. La relation (5.18) généralise au cas de deux systèmes continus couplés la relation (3.15) obtenue pour deux oscillateurs simples couplés. Une équivalence totale entre les deux cas ne peut donc **jamais** être obtenue en toute généralité, car il faudrait pour cela que les deux derniers termes à droite de l'égalité ci-dessus s'annulent. Sous certaines hypothèses sur les chargements ou le degré de couplage entre les sous-structures, ces contributions s'annulent effectivement – ou du moins deviennent-elles négligeables – de sorte que la puissance échangée moyenne est proportionnelle à la différence des énergies "bloquées" par sous-structure. Ces dernières quantités ont alors le même sens que celui donné aux énergies introduites dans la relation (3.15).

Simplification de la relation (5.18) : premier cas – La simplification la plus simple que l'on puisse considérer dans un premier temps consiste à supposer que, pour chacun des sous-système $r \in \{1, 2\}$, les acceptances conjointes vérifient

$$S_{r,\alpha\alpha'} = S_r \delta_{\alpha\alpha'}$$

où $S_r > 0$ est une constante; c'est notamment le cas si $\mathbf{S}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est de la forme :

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\varrho S_r}{M_r} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Ce type de chargement est appelé "*rain-on-the-roof*" dans la littérature anglaise spécialisée. Alors la relation (5.18) devient :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \int_{I_0 \cup I_0} \omega^2 a_{r\alpha,s\beta}(\omega) \left(M_r S_r |\hat{h}_{r,\alpha}(\omega)|^2 - M_s S_s |\hat{h}_{s,\beta}(\omega)|^2 \right) d\omega.$$

Simplification de la relation (5.18) : deuxième cas – La relation (5.18) se simplifie également (mais seulement de manière approchée) dans le cas d'un couplage faible entre les sous-systèmes. Cette dernière propriété est satisfaite si, par exemple, les normes des opérateurs de couplage $\|\mathbf{M}_c\|$, $\|\mathbf{\Omega}\|$ et $\|\mathbf{K}_c\|$ sont petites devant les normes des opérateurs de masse $\|\mathbf{M}_1\| + \|\mathbf{M}_2\|$, dissipation $\|\mathbf{D}_1\| + \|\mathbf{D}_2\|$ et raideur $\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|$. On peut aussi simplement supposer que la contribution de l'opérateur de couplage \mathcal{B}_c à la puissance instantanée $\Pi(t)$ du système couplé, donnée par la relation (5.5), est faible. Dans ce cas on montre (Maidanik 1976) que

$$\mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} \simeq \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \int_{I_0 \cup I_0} \omega^2 a_{r\alpha,s\beta}(\omega) \left(M_r S_{r,\alpha\alpha} |\hat{h}_{r,\alpha}(\omega)|^2 - M_s S_{s,\beta\beta} |\hat{h}_{s,\beta}(\omega)|^2 \right) d\omega.$$

Supposons maintenant que l'une ou l'autre des conditions de simplification de la relation (5.18) soit remplie. On introduit les ensembles $\mathcal{J}_r = \{\alpha; \omega_{r,\alpha} \in I_0\}$, $r \in \{1, 2\}$, et on suppose que $\Delta\omega \gg \frac{\pi}{2}\eta_{dr,\alpha}\omega_{r,\alpha}$ pour tous les modes de \mathcal{J}_r (excitation large bande). Alors les deux expressions précédentes de la puissance moyenne échangée entre les sous-systèmes peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} \simeq \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} \sum_{\beta \in \mathcal{J}_s} a_{r\alpha,s\beta}(\omega_0) \left(\frac{\pi S_{r,\alpha\alpha}}{M_r \eta_{dr,\alpha} \omega_{r,\alpha}} - \frac{\pi S_{s,\beta\beta}}{M_s \eta_{ds,\beta} \omega_{s,\beta}} \right), \quad r \neq s \in \{1, 2\}, \quad (5.19)$$

à comparer avec les équations (3.15) et (3.16) pour le cas de deux oscillateurs simples couplés. Ainsi la puissance échangée entre les deux sous-systèmes est approximativement (en vertu des hypothèses précédemment introduites) proportionnelle à la différence de leurs niveaux énergétiques respectifs lorsqu'ils sont supposés découplés, en ne tenant compte que des contributions des modes dont les pulsations propres associées sont dans la bande d'analyse considérée. Dans la mesure où l'on considère un couplage faible pour en déduire l'Éq. (5.19), on peut confondre en dernière approximation les énergies "couplées" et "découplées" afin d'obtenir *in fine* une expression de la forme (3.17) pour le couplage de deux sous-systèmes continus.

Enfin dans la littérature spécialisée, cette dernière équation est souvent écrite en termes de température vibratoire des modes des deux sous-structures :

$$\theta_{r,\alpha}(\omega) = \frac{\pi S_{r,\alpha\alpha}}{\Im\{i\omega Z_{r,\alpha}(\omega)\}}.$$

Avec cette définition, (5.19) prend la forme :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} \sum_{\beta \in \mathcal{J}_s} \omega_0 a_{r\alpha,s\beta}(\omega_0) [\theta_{r,\alpha}(\omega_0) - \theta_{s,\beta}(\omega_0)], \quad r \neq s \in \{1, 2\}.$$

5.2 Équations énergétiques du couplage vibro-acoustique interne

Dans cette section nous nous intéressons au couplage de deux sous-systèmes physiques différents, le premier étant constitué d'un matériau élastique (la structure) et le second d'un fluide non visqueux homogène, compressible et non pesant (une cavité acoustique). Chacun des sous-systèmes occupe un domaine borné de \mathbb{R}^3 . Il pourra s'agir par exemple d'une cabine d'avion ou d'hélicoptère, d'un intérieur de véhicule automobile ou encore d'une voiture de train. On établit les équations de ce système couplé permettant de se ramener à la forme standard étudiée dans la section précédente. Ce cas est traité par Lyon & Maidanik⁴ dans leur publication originale sur l'analyse statistique énergétique. Nous en donnons donc ici une description détaillée.

5.2.1 Données et hypothèses

La structure occupe le domaine Ω_1 de frontière $\partial\Omega_1 = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Sigma$ et le fluide le domaine Ω_2 supposé connexe et de frontière $\partial\Omega_2 = \Sigma$ (voir la FIG. 5.2). Le champ de déplacement de la

4. R.H. Lyon & G. Maidanik : 'Power flow between linearly coupled oscillators', loc. cit.

structure autour d'une configuration d'équilibre statique constituant son état de référence est noté \mathbf{u}_1 , à valeurs dans \mathbb{R}^3 ; le champ de pression dans le fluide autour d'une même configuration d'équilibre est lui noté p_2 , à valeurs dans \mathbb{R} .

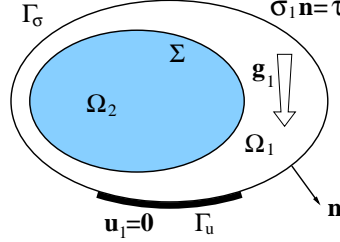


FIGURE 5.2 – Structure élastique couplée à une cavité acoustique par l'interface Σ .

Sous-domaine élastique – Sur la partie Γ_u de la frontière du sous-domaine Ω_1 sont imposés des déplacements nuls, tandis que sur Γ_σ est imposé un champ de forces surfaciques $\boldsymbol{\tau}$. Par ailleurs le champ de force volumique \mathbf{g}_1 est imposé dans Ω_1 . La relation fondamentale de la dynamique et les conditions aux limites s'écrivent donc pour le champ \mathbf{u}_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_1 + \varrho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \varrho_1 \mathbf{g}_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n} = -p_2 \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (5.20)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (5.21)$$

\mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$, ϱ_1 est la densité des matériaux élastiques et $\boldsymbol{\sigma}_1$ désigne le champ de contraintes lié au champ de déformations linéarisées $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes_s \mathbf{u}_1$ par la loi de comportement viscoélastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_1^e \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}_1^v \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t).$$

\mathbf{C}_1^e est le tenseur d'élasticité des matériaux élastiques et \mathbf{C}_1^v leur tenseur de viscosité.

Sous-domaine fluide – On note ϱ_2 la masse volumique et c_2 la célérité du son dans le fluide au repos occupant la cavité Ω_2 . Les petites vibrations linéarisées du fluide autour de sa position d'équilibre étant irrotationnelles, il existe un potentiel de vitesse $\psi_2(\mathbf{x}, t)$ défini en tout point \mathbf{x} de Ω_2 et à chaque instant t tel que la pression du fluide s'écrit :

$$p_2(\mathbf{x}, t) = -\varrho_2 \partial_t \psi_2(\mathbf{x}, t) + \pi$$

où π est un terme de correction statique⁵ prenant en compte la variation de pression induite par une déformation statique de l'interface Σ avec la structure d'amplitude $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}$. Elle s'écrit :

$$\pi = \frac{\varrho_2 c_2^2}{|\Omega_2|} \int_{\Sigma} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

5. H.J.-P. Morand & R. Ohayon : 'Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems. Finite element results', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14**(5), 741-755 (1979).

π est nulle en présence d'une surface libre pour le fluide interne; elle est négligeable pour un fluide léger (gaz), cas que l'on considère dans toute la suite. Le problème aux limites satisfait par le potentiel de vitesse s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\psi_2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = g_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}} = \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \\ \int_{\Omega_2} \psi_2 \, d\mathbf{x} = 0 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure à $\partial\Omega_2$, et des conditions initiales nulles (pour simplifier)

$$\psi_2(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\psi}_2(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

g_2 est le champ des sources acoustiques dans la cavité. La dernière condition dans (5.22) permet d'exclure les constantes de la solution recherchée et assure son unicité.

Principe des travaux virtuels – Le problème aux limites couplé est constitué par les deux problèmes locaux (5.20) et (5.22). Les espaces des champs cinématiquement admissibles pour ces deux problèmes sont respectivement $\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \text{ régulier et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\}$ pour \mathbf{u}_1 et $\mathcal{C}_2 = \{\psi; \psi \text{ régulier et } \int_{\Omega_2} \psi \, d\mathbf{x} = 0\}$ pour ψ_2 , où la régularité imposée permet notamment d'écrire $\mathcal{C}_1 \subset H_1 = [L^2(\Omega_1)]^3$ et $\mathcal{C}_2 \subset H_2 = L^2(\Omega_2)$. Le principe des travaux virtuels s'écrit ici : Trouver $(\mathbf{u}_1, \psi_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \mathcal{C}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_1} \varrho_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Sigma} \varrho_2 \dot{\psi}_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_{\Omega_1} \varrho_1 \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \\ \int_{\Omega_2} \frac{\varrho_2}{c_2^2} \ddot{\psi}_2 \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \varrho_2 \nabla \psi_2 \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} \varrho_2 \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n} \phi \, d\sigma = \int_{\Omega_2} \varrho_2 g_2 \phi \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (5.23)$$

pour tous champs virtuels $(\mathbf{v}, \phi) \in \mathcal{C}$; \mathbf{n} désignant ici la normale extérieure à $\partial\Omega_1$.

Comme au chapitre 4, on introduit les formes bilinéaires de masse m_1 , raideur k_1 et dissipation d_1 pour la structure données respectivement par

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \varrho_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{C}_1^e(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ d_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{C}_1^v(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Elles sont symétriques, définies positives, continues sur $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$ et définissent les opérateurs de masse \mathbf{M}_1 , raideur \mathbf{K}_1 et dissipation \mathbf{D}_1 de $\mathcal{L}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1')$ pour la structure tels que :

$$\langle \mathbf{M}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}_1', \mathcal{C}_1} = m_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \langle \mathbf{K}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}_1', \mathcal{C}_1} = k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{D}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}_1', \mathcal{C}_1} = d_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

respectivement. La forme linéaire f_1 sur \mathcal{C}_1 des efforts extérieurs imposés à la structure, donnée par

$$f_1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_1} \varrho_1 \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma,$$

est continue sur \mathcal{C}_1 pour \mathbf{g}_1 et $\boldsymbol{\tau}$ d'énergies finies. Elle définit donc la force $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{C}'_1$ telle que

$$f_1(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_1} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_1.$$

De même, pour le fluide on introduit les formes bilinéaires de masse m_2 et raideur k_2 données respectivement par

$$\begin{aligned} m_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega_2} \frac{\varrho_2}{c_2^2} \psi \phi \, d\mathbf{x}, \\ k_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega_2} \varrho_2 \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Elles sont symétriques, définies positives et continues sur $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$; elles définissent donc les opérateurs de masse \mathbf{M}_2 et raideur \mathbf{K}_2 de $\mathcal{L}(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_2)$ pour le fluide tels que :

$$\langle \mathbf{M}_2 \psi, \phi \rangle_{\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_2} = m_2(\psi, \phi) \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{K}_2 \psi, \phi \rangle_{\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_2} = k_2(\psi, \phi),$$

respectivement. La forme linéaire f_2 sur \mathcal{C}_2 des sources acoustiques dans le fluide, donnée par

$$f_2(\phi) = \int_{\Omega_2} \varrho_2 g_2 \phi \, d\mathbf{x}$$

est continue sur \mathcal{C}_2 pour g_2 d'énergie finie. Elle définit donc la force $f_2 \in \mathcal{C}'_2$ telle que

$$f_2(\phi) = \langle f_2, \phi \rangle_{\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_2} \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_2.$$

Enfin la forme bilinéaire de couplage c sur \mathcal{C} donnée par :

$$c(\phi, \mathbf{v}) = - \int_{\Sigma} \varrho_2 \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

définit un opérateur de couplage gyroscopique $\boldsymbol{\Omega}$ sur \mathcal{C} tel que :

$$\left\langle \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \phi \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = c(\psi, \mathbf{v}) - c(\phi, \mathbf{u}).$$

Posant $\mathbf{q} = (\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\psi}_2, \mathbf{u}_1, \psi_2)$ et $\mathcal{Q}_1 = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{I}, 0)$, $\mathcal{Q}_2 = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 1)$, le système couplé (5.23) ci-dessus est de la forme (5.2)

$$\mathcal{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B} \mathbf{q} = \mathcal{Q}_1 \mathbf{f}_1 + \mathcal{Q}_2 f_2 \tag{5.24}$$

avec ici :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}.$$

5.2.2 Modes propres de vibration

Deux stratégies sont possibles afin de réduire, par une projection du type Ritz-Galerkin, le problème couplé (5.24) ci-dessus :

- utiliser la base constituée des modes propres élasto-acoustiques du système conservatif couplé structure – fluide interne formulé en termes de champ de déplacement pour la structure, et champ de pression (masse ajoutée) ou potentiel de déplacement (raideur ajoutée) pour le fluide, voir pour cela l'ouvrage de Morand & Ohayon [12] ;
- utiliser une base de modes propres pour chacun des sous-domaines.

Pour la formulation usuelle de l'analyse statistique énergétique, il convient bien sûr, en liaison avec les résultats de la section §5.1, d'opter pour la deuxième solution.

Problème spectral pour la structure – Pour la structure on introduit usuellement ses modes propres de vibration *in vacuo* solutions du problème spectral : Trouver $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_1$ tels que

$$k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda^2 m_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_1.$$

Celui-ci, compte tenu des propriétés algébriques des opérateurs \mathbf{K}_1 et \mathbf{M}_1 , admet une suite dénombrable de solutions $(\lambda_{1,1}, \phi_{1,1}), (\lambda_{1,2}, \phi_{1,2}) \dots$ avec $0 < \lambda_{1,1}^2 \leq \lambda_{1,2}^2 \leq \dots$, et les vecteurs propres $\{\phi_{1,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ constituent une base hilbertienne de H_1 pour le produit scalaire défini par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto m_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$m_1(\phi_{1,\alpha}, \phi_{1,\beta}) = \mu_{1,\alpha} \delta_{\alpha\beta}, \quad k_1(\phi_{1,\alpha}, \phi_{1,\beta}) = \mu_{1,\alpha} \lambda_{1,\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*.$$

Les scalaires $\{\mu_{1,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ sont les masses généralisées des modes (la normalisation (4.7) de la page 54 consiste à fixer $\mu_{1,\alpha} = M_1 = \int_{\Omega_1} \varrho_1 d\mathbf{x}$ pour tous les modes). Les pulsations propres de la structure *in vacuo* sont les réels $\omega_{1,\alpha} = |\lambda_{1,\alpha}|$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On suppose enfin que les modes propres diagonalisent également l'opérateur de dissipation \mathbf{D}_1 :

$$d_1(\phi_{1,\alpha}, \phi_{1,\beta}) = \omega_{1,\alpha} \eta_{d1,\alpha} \mu_{1,\alpha} \delta_{\alpha\beta}$$

en notant $\{\eta_{d1,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ les facteurs de perte par dissipation modaux.

Problème spectral pour la cavité acoustique – Pour le fluide on introduit usuellement les modes propres de vibration à parois fixes ($\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$, soit $c(\psi, \mathbf{u}_1) = 0$) solutions du problème spectral : Trouver $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{C}_2$ tels que

$$k_2(\psi, \phi) = \lambda^2 m_2(\psi, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_2.$$

Celui-ci, compte tenu des propriétés algébriques des opérateurs \mathbf{K}_2 et \mathbf{M}_2 , admet une suite dénombrable de solutions $(\lambda_{2,1}, \psi_{2,1}), (\lambda_{2,2}, \psi_{2,2}) \dots$ avec $0 < \lambda_{2,1}^2 \leq \lambda_{2,2}^2 \leq \dots$, et les vecteurs propres $\{\psi_{2,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ constituent une base hilbertienne de H_2 pour le produit scalaire défini par $\psi, \phi \mapsto (\psi, \phi)_{H_2}$:

$$(\psi_{2,\alpha}, \psi_{2,\beta})_{H_2} = |\Omega_2| \delta_{\alpha\beta}, \quad k_2(\psi_{2,\alpha}, \psi_{2,\beta}) = \frac{\varrho_2 |\Omega_2|}{c_2^2} \lambda_{2,\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*.$$

Les pulsations propres de la cavité à parois fixes sont les réels $\omega_{2,\alpha} = |\lambda_{2,\alpha}|$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Projection sur les modes propres découplés – La solution \mathbf{q} du système (5.24) est projetée, aussi bien pour le sous-domaine élastique que pour le sous-domaine fluide, sur la base des modes propres découplés des sous-systèmes correspondants

$$\mathbf{q}_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \phi_{r,\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{r,\alpha}(t), \quad r \in \{1, 2\}.$$

En posant :

$$\gamma_{\alpha\beta} = c(\psi_{2,\beta}, \phi_{1,\alpha}), \quad \mu_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.25)$$

le problème réduit d'interaction fluide-structure se ramène exactement au problème réduit générique traité à la section §5.1 et l'ensemble des résultats des sections §5.1.3 et §5.1.5 concernant les variables énergétiques s'appliquent ici sans restriction. On peut notamment appliquer la formule (5.19) pour des excitations large bande décorréliées appliquées à la structure et dans la cavité acoustique, moyennant les précautions suivantes :

$$\mathcal{J}_1 = \left\{ \alpha; \omega_{1,\alpha} \in I_0, \int_{\Sigma} |\phi_{1,\alpha} \cdot \mathbf{n}| d\sigma \neq 0 \right\}$$

pour le sous-système structure, et

$$\mathcal{J}_2 = \{ \beta; \omega_{2,\beta} \in I_0, \exists \alpha \in \mathcal{J}_1 : \gamma_{\alpha\beta} \neq 0 \}$$

pour le sous-système fluide, c'est-à-dire que sont exclus de la sommation (i) les modes structures dont la composante normale sur l'interface Σ est nulle, et (ii) les modes fluides qui ne travaillent sur aucun des modes structure de la bande d'analyse I_0 .

5.3 Équations énergétiques du couplage vibro-acoustique externe

Dans cette section nous allons généraliser les résultats de la section §3.2 au cas d'un milieu élastique continu immergé dans un fluide acoustique dense non borné.

5.3.1 Données et hypothèses

On reprend essentiellement les données et hypothèses de la section §5.2.1, modifiées comme suit. La structure occupe le domaine Ω supposé connexe de frontière $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma$ et le fluide acoustique⁶ le domaine $\Omega_f = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ de frontière $\partial\Omega_f = \Gamma$ (voir la FIG. 5.3). Le champ de déplacement de la structure autour d'une configuration d'équilibre statique constituant son état de référence est noté \mathbf{u} , à valeurs dans \mathbb{R}^3 ; le champ de pression dans le fluide autour d'une même configuration d'équilibre est lui noté p , à valeurs dans \mathbb{R} .

Sous-domaine élastique – Sur la partie Γ_u de la frontière du sous-domaine Ω sont imposés des déplacements nuls, tandis que sur Γ_σ est imposé un champ de forces surfaciques $\boldsymbol{\tau}$. Par

6. Le fluide externe ne pouvant pas être considéré comme un sous-système mécanique au sens de la SEA, nous choisissons de ne plus faire apparaître les indices 1 et 2.

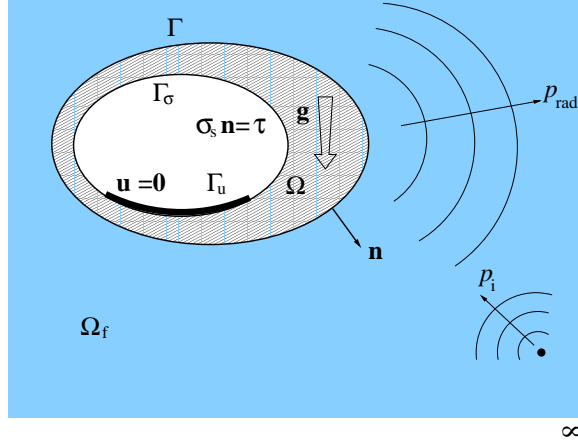


FIGURE 5.3 – Structure élastique couplée par l'interface Γ à un fluide dense externe occupant un milieu non borné.

ailleurs le champ de force volumique \mathbf{g} est imposé dans Ω . La relation fondamentale de la dynamique et les conditions aux limites s'écrivent donc pour le champ \mathbf{u}

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{Div} \boldsymbol{\sigma}_s + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \varrho_s \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} = -p \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (5.26)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (5.27)$$

\mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial\Omega$, ϱ_s est la densité des matériaux élastiques et $\boldsymbol{\sigma}_s$ désigne le champ de contraintes lié au champ de déformations linéarisées $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes_s \mathbf{u}$ par la loi de comportement viscoélastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_s^e \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}_s^v \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t).$$

\mathbf{C}_s^e est le tenseur d'élasticité des matériaux élastiques et \mathbf{C}_s^v leur tenseur de viscosité.

Sous-domaine fluide – On note ϱ_f la masse volumique et c_f la célérité du son dans le fluide au repos occupant le domaine Ω_f . Les petites vibrations linéarisées du fluide autour de sa position d'équilibre étant irrotationnelles, il existe un potentiel de vitesse $\psi(\mathbf{x}, t)$ défini en tout point \mathbf{x} de Ω_f et à chaque instant t tel que la vitesse d'une particule de fluide s'écrit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t)$ et la pression du fluide s'écrit $p(\mathbf{x}, t) = -\varrho_f \partial_t \psi(\mathbf{x}, t)$. Le problème aux limites satisfait par le potentiel de vitesse (équation des ondes et condition aux limites) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (5.28)$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure à $\partial\Omega_f$, et des conditions initiales nulles (pour simplifier)

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\psi}(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

On suppose qu'un champ incident $p_{\text{IN}}(\mathbf{x}, t)$ dans le fluide vient également solliciter la structure. On décompose alors le champ de pression totale p dans le fluide en champ incident p_{IN} , champ diffracté p_{d0} et champ rayonné p_{rad} , associés respectivement aux potentiels de vitesse ψ_{IN} , ψ_{d0} et ψ_{rad} , tels que :

$$p(\mathbf{x}, t) = p_{\text{IN}}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{d0}}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.29)$$

La pression incidente p_{IN} est la pression régnant dans le fluide en l'absence de la structure, p_{d0} est la pression diffractée par la structure maintenue dans sa position d'équilibre, et p_{rad} est la pression rayonnée par la structure lorsqu'elle vibre autour de sa position d'équilibre à la vitesse normale $\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ (voir la FIG. 5.3). Les potentiels de vitesse ψ_{d0} et ψ_{rad} vérifient donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \psi_{\text{d0}}}{\partial t^2} - \Delta \psi_{\text{d0}} = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \psi_{\text{d0}}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \psi_{\text{IN}}}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.30)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \psi_{\text{rad}}}{\partial t^2} - \Delta \psi_{\text{rad}} = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \psi_{\text{rad}}}{\partial \mathbf{n}} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.31)$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$. Le potentiel diffracté dépend du potentiel incident (sources) et de la forme de la structure, mais pas de son champ vibratoire, tandis que le potentiel rayonné dépend lui du champ vibratoire et de la forme de la structure mais pas des sources.

5.3.2 Problème de Helmholtz extérieur

La construction des solutions des deux problèmes ci-dessus passe par la résolution de l'équation de Helmholtz dans le domaine de Fourier (en fréquence) exactement de la même manière que pour le cas de l'oscillateur simple immergé dans un fluide. On rappelle donc ici les résultats de la section §3.2.2. Le problème : Trouver, pour $v(\mathbf{x}, \omega)$ donné sur la frontière $\partial\Omega_f = \Gamma$, le champ $\mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \omega) : \bar{\Omega}_f \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta \psi + \frac{\omega^2}{c_f^2} \psi = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = v & \text{sur } \Gamma \\ |\psi| = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial R} + i \frac{\omega}{c_f} \psi \right| = O\left(\frac{1}{R^2}\right) & \text{pour } R = \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

admet une unique solution pour toute fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ fixée. La condition de Sommerfeld sortante de la troisième ligne ci-dessus impose au champ ψ de se comporter à l'infini comme une onde plane sortant du domaine Ω_f à l'infini sans jamais réentrer. On en déduit les

expressions des potentiels diffracté et rayonné dans Ω_f à partir des opérateurs $\mathcal{B}(\frac{\omega}{c_f}) : \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \mathcal{C}_\Gamma$ et $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) : \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ définis par les équations (3.31) et (3.32) :

$$\widehat{\psi}_{d0}(\omega)|_\Gamma = -\mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \frac{\partial \widehat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \widehat{\psi}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \widehat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f$$

et

$$\widehat{\psi}_{rad}(\omega)|_\Gamma = i\omega \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \widehat{\mathbf{u}}(\omega) \cdot \mathbf{n}, \quad \widehat{\psi}_{rad}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \widehat{\mathbf{u}}(\omega) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f.$$

$\widehat{\mathbf{u}}$ désigne la transformée de Fourier du déplacement \mathbf{u} de la structure autour de sa position d'équilibre. Les pressions diffractée et rayonnée dans le domaine de Fourier sont obtenues à partir des opérateurs d'impédance acoustique de bord $Z_\Gamma(\omega) = -i\omega \varrho_f \mathcal{B}(\frac{\omega}{c_f})$ et de rayonnement acoustique $\mathcal{Z}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega \varrho_f \mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega)$, où

$$\widehat{p}_{d0}(\omega)|_\Gamma = -\mathcal{B}\left(\frac{\omega}{c_f}\right) \frac{\partial \widehat{p}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \widehat{p}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathcal{R}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \widehat{p}_{IN}}{\partial \mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f$$

et

$$\widehat{p}_{rad}(\omega)|_\Gamma = i\omega Z_\Gamma(\omega) \widehat{\mathbf{u}}(\omega) \cdot \mathbf{n}, \quad \widehat{p}_{rad}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathcal{Z}(\mathbf{x}, \omega) \widehat{\mathbf{u}}(\omega) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f.$$

Enfin dans la mesure où le champ incident $\widehat{\psi}_{IN}$ vérifie (par définition) l'équation de Helmholtz dans tout \mathbb{R}^3 , il est toujours possible d'exprimer linéairement $\frac{\partial \widehat{\psi}_{IN}}{\partial \mathbf{n}}$ en fonction de $\widehat{\psi}_{IN}|_\Gamma$ de sorte que l'on écrira par la suite

$$\widehat{p}_{IN}(\mathbf{x}, \omega) + \widehat{p}_{d0}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{T}(\mathbf{x}, \omega) \widehat{p}_{IN}(\omega)|_\Gamma, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f.$$

L'opérateur intégral (opérateur de scattering, linéaire) \mathcal{T} lie le champ de pression "bloqué" $\widehat{p}_{IN} + \widehat{p}_{d0}$ au champ de pression incident \widehat{p}_{IN} .

5.3.3 Grandeurs énergétiques

Compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on peut récrire formellement le système (4.6) sous la forme

$$[\mathcal{A} + \mathcal{A}_\Gamma^*] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{B} + \mathcal{B}_\Gamma^*] \mathbf{q}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{f}(t) + \mathcal{T} * p_{IN}|_\Gamma(t) \mathbf{n}), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (5.32)$$

"au sens des distributions", en notant comme à la section §4.1 $\mathbf{q} = (\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ la variable d'état, $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0)$ la condition initiale et les opérateurs

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $Z_\Gamma(\omega)$ symétrique est associé à la forme bilinéaire de couplage b_Γ définie sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ par

$$b_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Gamma (Z_\Gamma(\omega) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

et peut se mettre sous la forme (3.33) :

$$i\omega Z_\Gamma(\omega) = -\omega^2 M_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) + i\omega D_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right).$$

$D_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ (partie résistive) est positive. $M_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ (partie réactive) est généralement sans signature, mais si $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_f$ est convexe elle est positive. On note alors

$$\mathcal{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -M_\Gamma \\ M_\Gamma & D_\Gamma \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_\Gamma = \begin{bmatrix} M_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Le système (5.32) est ensuite projeté sur les modes propres de vibration de la structure *in vacuo* déjà définis à la section §4.1. On suppose notamment que ceux-ci diagonalisent également l'opérateur de dissipation \mathbf{D} . Sa solution est écrite

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \phi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{q}_\alpha(t)$$

et on pose :

$$M_{\alpha\beta} = \langle M_\Gamma \phi_\beta, \phi_\alpha \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}, \quad D_{\alpha\beta} = \langle D_\Gamma \phi_\beta, \phi_\alpha \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}.$$

Les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_\alpha = (\dot{q}_\alpha, q_\alpha)$ avec $\dot{q}_\alpha = (\dot{\mathbf{u}}, \phi_\alpha)_\mu$ et $q_\alpha = (\mathbf{u}, \phi_\alpha)_\mu$ vérifient alors un système d'équations différentielles ordinaires couplées, c'est-à-dire que l'effet du fluide ambiant est de coupler les modes propres de vibration de la structure "sèche". En notant $\mathbf{q}^{(J)} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_J, q_1, q_2, \dots, q_J)$ le vecteur de \mathbb{R}^{2J} des coordonnées généralisées tronquées au rang J , on a

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^{(J)} + \mathbf{B} \mathbf{q}^{(J)} = \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad \mathbf{q}^{(J)}(0) = (\mathbf{q}_{01}, \mathbf{q}_{02}, \dots, \mathbf{q}_{0J}) \quad (5.33)$$

avec les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -M\mathbb{I}_J - \mathbf{M}_\Gamma^* \\ M\mathbb{I}_J + \mathbf{M}_\Gamma^* & \text{diag}(M\eta_{d\alpha}\omega_\alpha) + \mathbf{D}_\Gamma^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} M\mathbb{I}_J + \mathbf{M}_\Gamma^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(M\omega_\alpha^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_J \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

telles que

$$[\mathbf{M}_\Gamma]_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}, \quad [\mathbf{D}_\Gamma]_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta},$$

\mathbb{I}_J la matrice identité réelle $J \times J$ et M la masse totale de la structure. Ces deux dernières matrices sont généralement pleines, ce qui assure le couplage des coordonnées généralisées. Les forces généralisées $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_J)$ sont données par

$$f_\alpha(t) = \langle \mathbf{f}, \phi_\alpha \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} + \langle \mathcal{T} * p_{\text{IN}} \mathbf{n}, \phi_\alpha \rangle_{\mathcal{C}'_\Gamma, \mathcal{C}_\Gamma}.$$

Comme on s'intéresse par la suite à la réponse forcée de la structure sous l'action d'un champ incident $p_{\text{IN}}(\mathbf{x}, t)$ seul ($\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$), $t \in \mathbb{R}$, on suppose ici $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ pour les conditions initiales. La puissance instantanée de la structure couplée au fluide externe est

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \langle \mathcal{B} \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} + \langle \mathcal{B}_\Gamma * \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \\ &= \mathcal{E}(t) \end{aligned} \quad (5.35)$$

avec $\mathcal{E}(t) > 0$ l'énergie mécanique instantanée de la structure donnée par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} M \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\dot{q}_\alpha(t)^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t)^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} \dot{q}_\alpha(t) M_{\alpha\beta} * \dot{q}_\beta(t).$$

La puissance dissipée et rayonnée par la structure couplée au fluide est

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{d,tot}}(t) &= \langle \mathcal{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} + \langle \mathcal{A}_\Gamma * \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \\ &= \Pi_{\text{d}}(t) + \Pi_{\text{rad}}(t) .\end{aligned}\quad (5.36)$$

Enfin la puissance introduite dans la structure est donnée par

$$\Pi_{\text{IN}}(t) = \langle \mathcal{QT} * p_{\text{IN}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{C}'_\Gamma, \mathcal{C}_\Gamma} . \quad (5.37)$$

Le bilan des puissances instantanées pour la structure couplée au fluide est alors

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}(t) = \Pi_{\text{IN}}(t) - \Pi_{\text{d}}(t) - \Pi_{\text{rad}}(t)} . \quad (5.38)$$

5.3.4 Fréquences propres "mouillées"

Afin de caractériser la réponse \mathbf{q} de la structure en fonction du champ de pression incident imposé p_{IN} , il est nécessaire d'identifier la fonction de réponse en fréquence correspondant à la structure couplée avec le fluide acoustique environnant. On définit la matrice d'impédance $J \times J$ de la structure couplée avec le fluide externe par

$$\begin{aligned}i\omega \mathbf{Z}_{\text{tot}}(\omega) &= -\omega^2 \left[\mathbf{M} + \mathbf{M}_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right] + i\omega \left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right] + \mathbf{K} \\ &= [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} + [\mathbf{H}_\Gamma(\omega)]^{-1} \\ &= [\mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega)]^{-1}\end{aligned}\quad (5.39)$$

où la réceptance $\mathbf{H}(\omega)$ de la structure sèche est définie par

$$\mathbf{H}(\omega) = \text{diag} \left\{ \left[M(-\omega^2 + i\eta_{\text{d}\alpha} \omega_\alpha \omega + \omega_\alpha^2) \right]^{-1} \right\} ,$$

et

$$\mathbf{H}_\Gamma(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) + i\omega \mathbf{D}_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right]^{-1} .$$

On note également

$$\widehat{\mathbb{h}}_{\text{tot}}(\omega) = \begin{bmatrix} i\omega \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

la fonction de réponse en fréquence correspondante. La structure voit le fluide qui l'environne comme une masse ajoutée (correspondant à la réactance) qui modifie son inertie, et un amortissement équivalent (correspondant à la résistance) qui évacue une partie de l'énergie par rayonnement acoustique à l'infini. La FIG. 5.4 ci-dessous donne l'allure générique des fonctions $\omega \mapsto \text{tr} \mathbf{M}_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ et $\omega \mapsto \text{tr} \mathbf{D}_\Gamma(\frac{\omega}{c_f})$ quelle que soit la géométrie de la structure (tr désigne la trace d'une matrice). La donnée de ces fonctions suffit alors à caractériser complètement la réponse forcée déterministe ou aléatoire stationnaire de la structure immergée, par analogie avec les résultats des paragraphes §4.4.2 et §4.5.1. La fréquence critique ω_{max} est voisine de la *fréquence de coïncidence* ω_c de la structure immergée, qui est la fréquence pour laquelle la longueur des ondes dispersives élastiques – réalisant le couplage avec le fluide externe, par exemple les ondes de flexion – dans la structure est égale à la longueur

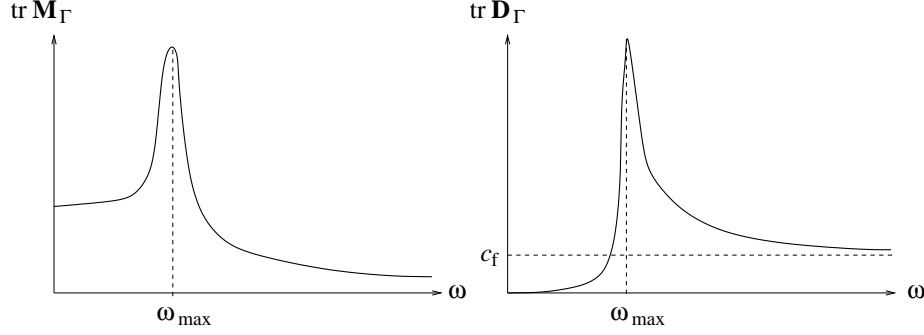


FIGURE 5.4 – Graphes génériques des réactance et résistance de l'opérateur d'impédance acoustique de bord d'une structure quelconque.

d'onde acoustique. Pour une coque mince cylindrique apparaît également un pic intermédiaire nettement plus régulier à la fréquence d'anneau ω_R pour laquelle la longueur d'onde longitudinale est égale à son périmètre.

L'exemple d'une plaque finie couplée à un fluide lourd tel que de l'eau a été étudié dès 1962 par Maidanik⁷. On observe qu'au delà de la fréquence de coïncidence, l'effet du fluide se limite à un terme supplémentaire de dissipation équivalente par rayonnement acoustique. En revanche en deçà de la fréquence de coïncidence, le couplage avec le fluide se traduit d'une part par un effet de masse ajoutée, et d'autre part par un effet de dissipation équivalente par rayonnement acoustique par l'intermédiaire des modes de bord et, dans une moindre mesure, des modes de coin (ou de piston) de la plaque.

La recherche de "pulsations propres" de vibration de la structure couplée avec le fluide conduit à la résolution de l'équation

$$\det \left[-\omega^2 \left(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\Gamma \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right) + \mathbf{K} \right] = 0.$$

D'un point de vue pratique, pour les solutions numériques notamment, on est souvent amené à négliger les termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée \mathbf{M}_Γ afin de résoudre cette équation explicitement. En effet, pour un milieu élastique infini immergé dans un fluide acoustique et de champ de déplacement périodique on sait que les modes propres structuraux sont rigoureusement découplés. Or pour les hautes fréquences le comportement du système mécanique réel est sensiblement équivalent à celui de ce système considéré comme infiniment étendu (par exemple le cas d'une coque cylindrique raidie périodiquement en eau). Plus simplement, on constate que ces termes sont souvent négligeables pour des fluides légers, tels que l'air⁸. Sous cette hypothèse, la recherche des résonances du système couplé structure-fluide externe est ramenée à la résolution des équations :

$$\left[1 + \frac{M_{\alpha\alpha} \left(\frac{\omega}{c_f} \right)}{M} \right] \omega^2 = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \{1, 2 \dots J\}. \quad (5.41)$$

7. G. Maidanik : 'Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields', *Journal of the Acoustical Society of America* **34**(6), 809-826 (1962). Erratum **57**(6), 1552 (1975).

8. La légèreté de l'air n'est que toute relative. Le poids étant un facteur critique pour les structures aéronautiques, on utilise des matériaux composites très légers, tels que des tôles sandwichs en nid d'abeille, pour lesquels la masse ajoutée due à l'air ambiant peut représenter jusqu'à 20% de leur densité. Il est donc difficile de la négliger dans ce cas.

Pour chaque mode structural α on peut faire exactement les mêmes remarques qu'à la section §3.2.4 en liaison avec les figures 3.7 à 3.9, à savoir qu'à chaque pulsation propre ω_α sont associées plusieurs pulsations de pic pour la structure immergée. Néanmoins seule la plus petite d'entre elles correspond à une résonance⁹ au delà de laquelle l'effet de masse ajoutée devient rapidement négligeable. Ces fréquences sont les fréquences propres mouillées de la structure immergée, parfois également appelées abusivement fréquences de coïncidence en liaison avec la définition donnée ci-dessus, ou encore fréquences critiques.

5.3.5 Réponse forcée stationnaire et bilan énergétique

Le système couplé fluide-structure évolue à partir de sa position au repos sous l'action d'un champ de pression incidente aléatoire stationnaire en temps. Soit donc un champ d'excitation stochastique $(F_{\mathbf{x},t}, \mathbf{x} \in \Gamma, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} centré, du second ordre, continu et stationnaire en m.o.d. en temps. On note $R_F : \Gamma \times \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction d'auto-corrélation transversale définie par

$$R_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \mathbb{E}\{F_{\mathbf{x},t+\tau}F_{\mathbf{y},t}\}$$

et telle que $\mathbb{E}\{F_{\mathbf{x},t}^2\} = R_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty$. On suppose que la mesure spectrale transversale de ce champ admet une densité notée $S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ par rapport à $d\omega$, telle que :

$$R_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\omega$$

avec les propriétés suivantes (la mesure spectrale étant positive et hermitienne) :

$$S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \overline{S_F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)}, \quad S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\omega) = \overline{S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)};$$

on suppose également qu'elle s'écrit

$$S_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbb{1}_{I_0 \cup \underline{I}_0}(\omega) \otimes S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$$

où $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\underline{I}_0 = [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ (bruit de bande), avec $\Delta\omega \gg \frac{\pi}{2}\eta_{d\alpha}\omega_\alpha$ pour tous les modes $\alpha \in \mathcal{J} = \{\beta; \omega_\beta \in I_0\}$ (excitation large bande). La fonction $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est donc à valeurs positives, telle que $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < +\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$. La réponse de la structure immergée, solution de l'Éq. (5.33), est alors modélisée par un processus stochastique $(\mathbf{Q}_t, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R}^{2J} centré, du second ordre, stationnaire en m.o.d., et dont la matrice de densité spectrale s'écrit

$$\mathbf{S}_Q(\omega) = \widehat{\mathbf{h}}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \widehat{\mathbf{h}}_{\text{tot}}^*(\omega) \otimes \mathbb{1}_{I_0 \cup \underline{I}_0}(\omega) \quad (5.42)$$

avec \mathbf{S} la matrice réelle symétrique $J \times J$ des acceptances conjointes $S_{\alpha\beta}$ qui s'écrivent

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\mathcal{T}(\mathbf{x}, \omega) S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{T}^*(\mathbf{y}, \omega) \phi_\beta(\mathbf{y}), \phi_\alpha(\mathbf{x})) d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Pour un tel chargement, les puissances instantanées dissipée, rayonnée et introduite deviennent des variables aléatoires du second ordre, et le bilan des puissances moyennes (5.38) s'écrit

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\} = \mathbb{E}\{\Pi_{d,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad},t}\} \quad (5.43)$$

9. Voir la note en bas de page 46.

puisque l'on a toujours $\mathbb{E}\{\dot{\mathcal{E}}_t\} = 0$ dans le cas stationnaire. L'énergie mécanique moyenne de la structure immergée est quant à elle :

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{B}(\omega) : \mathbf{S}_{\mathbf{Q}}(\omega) d\omega$$

qui compte tenu de (5.40), (5.42) et de la définition (5.34) de \mathbf{B} s'écrit également :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} = \frac{1}{2} \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \left\{ \omega^2 \left(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\Gamma} \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \right) \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \right\} d\omega \\ + \frac{1}{2} \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \{ \mathbf{K} \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \} d\omega. \end{aligned} \quad (5.44)$$

On définit alors une densité de masse ajoutée équivalente $\varrho_{\text{rad}}(\omega_0)$ à la fréquence centrale ω_0 de la bande d'analyse par la relation¹⁰

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\} = |\Omega| \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \omega^2 (\varrho_s + \varrho_{\text{rad}}(\omega_0)) \text{tr} \{ \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \} d\omega \quad (5.45)$$

où $|\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$; celle-ci est obtenue par identification des équations (5.44) et (5.45). De même que pour l'oscillateur simple immergé dans un fluide (voir la section §3.2), on définit le facteur de perte équivalent par rayonnement à l'infini dans le fluide $\eta_{\text{rad}}(\omega_0)$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad},t}\} &= \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \left\{ \omega^2 \mathbf{D}_{\Gamma} \left(\frac{\omega}{c_f} \right) \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \right\} d\omega \\ &= \omega_0 \eta_{\text{rad}}(\omega_0) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}. \end{aligned}$$

Le bilan (5.43) s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\} \simeq \omega_0 \eta_{\text{tot}}(\omega_0) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}} \quad (5.46)$$

avec par analogie avec le cas de l'oscillateur simple immergé

$$\eta_{\text{tot}}(\omega_0) = \eta_{\text{rad}}(\omega_0) + \eta_{\text{ds}} \sqrt{\frac{M}{M + \varrho_{\text{rad}}(\omega_0) |\Omega|}}. \quad (5.47)$$

On a supposé pour cela que **tous les modes de \mathcal{S} ont le même facteur de perte par dissipation** η_{ds} , défini par l'identité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{d},t}\} &= \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \{ \omega^2 \mathbf{D} \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \} d\omega \\ &= \omega_0 \eta_{\text{ds}} \left(\frac{M}{M + \varrho_{\text{rad}}(\omega_0) |\Omega|} \right) \mathbb{E}\{\mathcal{E}_t\}. \end{aligned}$$

Le facteur de perte équivalent par rayonnement est déterminé à partir du calcul de la puissance injectée moyenne par :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\} = \Re \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \{ i\omega \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \} d\omega$$

10. J.-M. David & C. Soize : 'Prediction of the high-frequency behavior of coupled fluide-structure systems by the SEA method and applications', loc. cit.

et des équations précédentes. Dans la littérature il est tabulé sous la forme d'un coefficient de radiation σ_{rad} défini par :

$$\sigma_{\text{rad}}(\omega_0) = \frac{\varrho_{\text{eff}}(\omega_0)}{\varrho_{\text{f}} c_{\text{f}}} \times \omega_0 \eta_{\text{rad}}(\omega_0) \quad (5.48)$$

où $\varrho_{\text{eff}} = \frac{|\Omega|}{|\Gamma|}(\varrho_{\text{s}} + \varrho_{\text{rad}})$, avec $|\Gamma| = \int_{\Gamma} d\sigma$, apparaît comme une densité surfacique effective de la structure couplée au fluide externe. La puissance rayonnée par celle-ci s'écrit donc aussi sous la forme usuelle

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{rad},t}\} = \varrho_{\text{f}} c_{\text{f}} |\Gamma| \sigma_{\text{rad}}(\omega_0) \times \int_{I_0 \cup \underline{I}_0} \text{tr} \{ \omega^2 \mathbf{H}_{\text{tot}}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_{\text{tot}}^*(\omega) \} d\omega.$$

5.4 Synthèse des résultats obtenus

Nous avons étendu dans ce chapitre un des résultats fondamentaux du chapitre 3 concernant la puissance échangée entre deux oscillateurs simples couplés conservativement. Pour deux systèmes linéaires continus couplés, la puissance échangée n'est, en toute rigueur, pas proportionnelle à la différence des énergies mécaniques de chacun des sous-systèmes. Elle le devient moyennant certaines hypothèses, soit celle d'un couplage faible entre les deux sous-systèmes, soit celle de chargements pour lesquels les efforts généralisés associés sont décorrélés (excitations du type "rain-on-the-roof"). Les autres hypothèses introduites sont de même nature que pour les deux oscillateurs couplés, à savoir :

- chaque sous-structure est faiblement dissipative ;
- le couplage des sous-systèmes est conservatif ;
- les excitations sont des bruits de bande non corrélés en temps ;
- leurs largeurs de bande sont grandes devant les bandes passantes équivalentes des sous-structures.

Nous avons également montré dans ce chapitre que le couplage d'une structure et d'un fluide acoustique occupant une cavité bornée entraine dans le cadre du formalisme général présenté pour deux sous-systèmes mécaniques linéaires couplés.

Enfin nous avons établi pour le cas d'un système continu un résultat analogue au cas d'un oscillateur simple immergé dans un fluide acoustique non borné. Ainsi la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans le fluide par ce système est proportionnelle à son énergie mécanique moyenne pour une excitation aléatoire stationnaire en temps du type bruit de bande. Il est donc possible de définir un facteur de perte équivalent par rayonnement afin de modéliser cet effet, de même nature que les facteurs de perte par dissipation de la structure.

Chapitre 6

Analyse Statistique Énergétique (SEA)

L'ensemble des résultats des quatre chapitres précédents est utilisé pour la formulation de l'Analyse Statistique Énergétique (SEA). Celle-ci n'est cependant qu'heuristique dans la mesure où elle étend sans preuve leurs conclusions aux cas d'un nombre quelconque de sous-systèmes mécaniques linéaires couplés. Pour cela, il convient de poser dans un premier temps un certain nombre d'hypothèses fondamentales, dites *hypothèses de la SEA*, qui sont d'une part les hypothèses introduites pour l'obtention des résultats précédents, et d'autre part des hypothèses complémentaires permettant de les étendre à des couplages entre plusieurs sous-systèmes tout en préservant la généralité du corps théorique proposé. Par ailleurs on introduit différents paramètres fondamentaux, les *paramètres SEA*, dont la construction est liée à la formulation des équations de base de la méthode.

6.1 Hypothèses fondamentales

On résume dans cette section l'ensemble des hypothèses de la SEA telles qu'elles apparaissent dans les ouvrages fondamentaux sur la méthode [10,11], en reprenant la présentation de Soize (1987)¹ et David & Soize (1994)².

- [H1] L'analyse d'un système mécanique par la méthode SEA est effectuée dans une bande de fréquence I_0 de fréquence centrale ω_0 et de largeur $\Delta\omega$: $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$.
- [H2] L'excitation imposée à chaque sous-système est un bruit de bande $\Delta\omega$ et les excitations imposées aux sous-systèmes sont décorrélées.
- [H3] Chaque sous-système pris isolément doit être faiblement dissipatif et avoir un spectre dénombrable de fréquences propres de vibration, dont les largeurs de bande passante équivalentes sont petites devant $\Delta\omega$.
- [H4] Le couplage entre les sous-systèmes doit être conservatif.
- [H5] Le nombre de modes résonants dans la bande I_0 pour chacun des sous-systèmes doit être grand.

1. C. Soize : *Analyse Statistique Énergétique = S.E.A. Etude Bibliographique*, loc. cit.

2. J.-M. David & C. Soize : 'Prediction of the high-frequency behavior of coupled fluide-structure systems by the SEA method and applications', loc. cit.

- [H6] L'énergie mécanique moyenne de chaque sous-système est donnée par la seule contribution des modes résonants dans la bande d'analyse considérée.
- [H7] Les modes résonants pour chaque sous-système ont en moyenne la même énergie dans la bande d'analyse considérée.
- [H8] Chaque mode résonant de chaque sous-système apporte une contribution identique (en termes énergétiques) au couplage avec chacun des modes résonants des autres sous-systèmes.

Les deux premières hypothèses [H1] et [H2] apparaissent explicitement dans le choix des excitations aléatoires stationnaires imposées aux systèmes, telles que définies dans les quatre chapitres précédents.

L'hypothèse d'amortissement faible [H3] est introduite aux chapitres 2 et 4 afin d'établir les résultats d'équivalence de moyennes. Elle permet également de considérer les excitations comme des bruits large bande, tels que leur largeur de bande $\Delta\omega$ est toujours grande devant les bandes passantes équivalentes des modes résonants des sous-systèmes. Cette propriété justifie par ailleurs l'hypothèse suivante [H6] et celle consistant, dans les développements des chapitres 4 et 5 consacrés aux systèmes continus, à négliger les termes extra-diagonaux des matrices d'amortissement projetées sur les modes propres structuraux. L'hypothèse de spectre dénombrable exclut *a priori* les milieux non bornés du champ d'application de la SEA. On a vu néanmoins aux sections §3.2 et §5.3 comment l'on pouvait se ramener à une formulation du type SEA pour le rayonnement acoustique des structures élastiques dans un milieu non borné.

La quatrième hypothèse est introduite dans les sections §3.1.4 et §5.1.5 pour obtenir les relations de proportionnalité entre la puissance échangée entre sous-structures et la différence de leurs énergies mécaniques moyennes.

La cinquième hypothèse est typiquement une hypothèse hautes fréquences. Elle est fondamentale pour une bonne utilisation de la SEA, dans la mesure où elle garantit la représentativité statistique des moyennes calculées avec les hypothèses suivantes [H6] à [H8]. Les systèmes qui la vérifient sont dits réverbérants.

La sixième hypothèse est introduite aux chapitres 4 (sections §4.4.2 et §4.5.1) et 5 (section §5.1.5), elle est notamment utile pour établir la relation (5.19).

La septième hypothèse est elle aussi fondamentale pour une bonne utilisation de la SEA. Elle ne peut être vérifiée *a priori* que si les modes résonants d'un même sous-système dans la bande d'analyse I_0 ont une dissipation (faible) voisine, et si les puissances injectées dans chaque sous-système sont voisines. Un des enjeux principaux de la modélisation d'un système mécanique par l'approche SEA est de le partitionner de telle sorte que cette hypothèse soit vérifiée pour chaque sous-système, tout en s'assurant que les hypothèses précédentes restent valides et notamment [H5].

Enfin la huitième hypothèse permet de généraliser la relation (3.15) pour le couplage de deux oscillateurs au couplage de deux systèmes continus, de manière à obtenir une relation de la forme (5.19) mais ne faisant plus intervenir explicitement la somme des contributions de chaque mode résonant.

Il est clair que ces deux dernières hypothèses sont les plus délicates à vérifier. Elles résument à elles seules toute la difficulté de la mise en œuvre pratique de la SEA, même si les équations fondamentales sont elles très simples. Elles sont typiquement relatives au domaine des hautes fréquences et leur pertinence se dégrade rapidement lorsque la fréquence diminue.

6.2 Équations de la SEA pour les systèmes linéaires couplés

Les équations fondamentales du formalisme SEA sont construites sur le modèle de l'équation (3.20) pour le couplage de deux oscillateurs simples en utilisant successivement les hypothèses [H1] à [H8]. On obtient ainsi le bilan énergétique moyen du couplage de deux sous-systèmes continus, que l'on généralise sans démonstration, de manière totalement heuristique, au couplage d'un nombre quelconque de sous-systèmes continus. Ces extensions sont légitimes dans le cadre fixé par les hypothèses de base, **et seulement dans ce cadre**. Il est totalement exclu d'utiliser le formalisme SEA pour une application qui ne les satisferait pas, par exemple pour des densités modales faibles.

6.2.1 Formulation pour deux systèmes couplés

On considère deux sous-systèmes continus couplés de manière conservative et la bande d'analyse est $I_0 = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$. Soit $\mathcal{J}_r = \{\alpha; \omega_{r,\alpha} \in I_0\}$ et $N_r = \text{card } \mathcal{J}_r$ le nombre de modes résonants dans la bande d'analyse pour le sous-système r , avec $r \in \{1, 2\}$. En vertu de [H5], on doit avoir $N_r \gg 1$ pour $r = 1$ et $r = 2$. La *densité modale* moyenne de ce sous-système relativement à la bande I_0 est notée

$$n_r(\omega_0) = \frac{N_r}{\Delta\omega}. \quad (6.1)$$

Son inverse représente la distance moyenne entre deux pulsations propres successives. On en connaît une expression analytique pour la plupart des systèmes simples (poutres, plaques, coques cylindriques, cavités acoustiques ...), en revanche elle doit être déterminée expérimentalement pour des éléments plus complexes. Pour que [H7] soit vérifiée, on suppose également que

$$\omega_{r,\alpha} \eta_{dr,\alpha} \simeq \omega_{r,\beta} \eta_{dr,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{J}_r$$

pour chaque sous-système $r \in \{1, 2\}$. Son *facteur de perte par dissipation* moyen η_{dr} est alors défini par

$$\omega_0 \eta_{dr}(\omega_0) = \frac{1}{N_r} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} \omega_{r,\alpha} \eta_{dr,\alpha} \quad (6.2)$$

et [H3] impose pratiquement $\eta_{dr} \ll 2$. On notera que l'introduction de ce paramètre est cohérente avec l'hypothèse faite sur les facteurs de perte modaux à la section §4.6 afin d'établir un résultat utile d'équivalence de moyennes, mais également à la section §5.3.5 afin de définir un facteur de perte total pour le rayonnement acoustique et la dissipation interne.

Dans la littérature spécialisée apparaît parfois la notion de recouvrement modal afin de vérifier la validité de l'hypothèse [H3]. Le *facteur de recouvrement modal* \mathcal{M}_r du sous-système r dans la bande I_0 est défini par :

$$\mathcal{M}_r(\omega_0) = \omega_0 n_r(\omega_0) \eta_{dr}(\omega_0); \quad (6.3)$$

c'est le ratio entre la largeur de bande passante à -3 dB moyenne $\omega_0 \eta_{dr}(\omega_0)$ d'un pic de résonance du sous-système, et la distance moyenne (en fréquence) entre deux pics successifs $[n_r(\omega_0)]^{-1}$. \mathcal{M}_r augmente quand l'amortissement augmente et caractérise le taux de recouvrement des pics de vibration du sous-système r dans la bande d'analyse I_0 . Plus il est élevé, moins l'hypothèse [H3] a de chance d'être satisfaite.

De l'Éq. (5.16) on déduit avec [H6]

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} \simeq M_r \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} \mathbb{E}\{\dot{q}_{r,\alpha,t}^2\}$$

pour l'énergie mécanique moyenne du sous-système r , et avec [H7]

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} \simeq N_r E_r \quad (6.4)$$

où E_r est l'énergie mécanique moyenne de chacun des modes résonants du sous-système r , supposée égale (ou voisine) pour tous les modes dans la bande d'analyse. De l'Éq. (5.17) on déduit avec [H6]

$$\mathbb{E}\{\Pi_{dr,t}\} \simeq M_r \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} \eta_{dr,\alpha} \omega_{r,\alpha} \mathbb{E}\{\dot{q}_{r,\alpha,t}^2\}$$

pour la puissance dissipée moyenne du sous-système r , et avec [H7] et la définition (6.2)

$$\mathbb{E}\{\Pi_{dr,t}\} \simeq \omega_0 \eta_{dr} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\}.$$

Des équations (5.19) et (6.4) on déduit avec [H7]

$$\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} \simeq \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_1} \sum_{\beta \in \mathcal{J}_2} a_{1\alpha,2\beta}(\omega_0) \left(\frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}}{N_1} - \frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}}{N_2} \right).$$

Mais l'hypothèse [H8] permet de poser

$$a_{1\alpha,2\beta} = a_{1\alpha',2\beta'} \quad \forall \alpha, \alpha' \in \mathcal{J}_1, \quad \forall \beta, \beta' \in \mathcal{J}_2,$$

identité dont on déduit

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} \simeq N_1 N_2 a_{1\alpha,2\beta} \left(\frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}}{N_1} - \frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}}{N_2} \right)} \quad (6.5)$$

Posons

$$\omega_0 \eta_{rs} = N_s a_{r\alpha,s\beta}. \quad (6.6)$$

η_{rs} est appelé *facteur de perte par couplage* du sous-système r vers le sous-système s . La relation de réciprocité (5.14) conduit à

$$N_r \eta_{rs} = N_s \eta_{sr}$$

si bien que finalement

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} \simeq \omega_0 (\eta_{rs} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} - \eta_{sr} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{s,t}\}), \quad r \neq s \in \{1, 2\}} \quad (6.7)$$

En séparant les contributions pour chaque sous-système dans le bilan énergétique moyen (5.15), on obtient avec (6.7) et (6.2) les équations fondamentales de la SEA pour leur couplage

$$\boxed{\mathbb{E}\{\Pi_{INr,t}\} = \omega_0 \eta_{dr} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} + \omega_0 (\eta_{rs} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} - \eta_{sr} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{s,t}\}), \quad r \neq s \in \{1, 2\}} \quad (6.8)$$

qui sont de la forme (3.20).

6.2.2 Formulation pour plusieurs systèmes couplés

On considère maintenant le couplage de \mathcal{N} sous-systèmes linéaires continus vérifiant les hypothèses [H1] à [H8]. Le bilan des puissances moyennes pour chacun d'eux s'écrit

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},r,t}\} = \mathbb{E}\{\Pi_{\text{dr},t}\} + \sum_{\substack{s=\mathcal{N} \\ s \neq r}} \mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\}, \quad r \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\},$$

avec par analogie avec le cas de deux sous-systèmes couplés (voir la section précédente)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{dr},t}\} &= \omega_0 \eta_{\text{dr}} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\}, \\ \mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} &= \omega_0 (\eta_{rs} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} - \eta_{sr} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{s,t}\}), \quad r \neq s \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Alors les énergies mécaniques moyennes des sous-systèmes $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\}$, $r \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$, sont solutions du système (attention au facteur ω_0 devant la matrice de gauche !)

$$\omega_0 \begin{bmatrix} \eta_{1,\text{tot}} & -\eta_{21} & -\eta_{31} & \cdots & -\eta_{\mathcal{N}1} \\ -\eta_{12} & \eta_{2,\text{tot}} & -\eta_{32} & \cdots & -\eta_{\mathcal{N}2} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_{3,\text{tot}} & \cdots & -\eta_{\mathcal{N}3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1\mathcal{N}} & -\eta_{2\mathcal{N}} & -\eta_{3\mathcal{N}} & \cdots & \eta_{\mathcal{N},\text{tot}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{3,t}\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{\mathcal{N},t}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}2,t}\} \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}3,t}\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}\mathcal{N},t}\} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

avec

$$\eta_{r,\text{tot}} = \eta_{\text{dr}} + \sum_{\substack{s=\mathcal{N} \\ s \neq r}} \eta_{rs}, \quad r \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\} \quad (6.11)$$

les *facteurs de perte apparents*, ou totaux, de ces sous-systèmes. On impose enfin la relation de réciprocité

$$N_r \eta_{rs} = N_s \eta_{sr}, \quad r \neq s \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}, \quad (6.12)$$

qui permet notamment de récrire le système (6.10) ci-dessus sous une forme symétrique pour les variables primales $E_r = \frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\}}{N_r}$. En effet, l'Éq. (6.9) donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{rs,t}\} &= \omega_0 (N_r \eta_{rs} E_r - N_s \eta_{sr} E_s) \\ &= \omega_0 N_r \eta_{rs} (E_r - E_s), \quad r \neq s \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

En outre, en introduisant les *coefficients de transfert* ou *facteurs de couplage modaux* \mathcal{M}_{rs} dans la bande I_0 définis par³ :

$$\mathcal{M}_{rs}(\omega_0) = \omega_0 n_r(\omega_0) \eta_{rs}(\omega_0) = \omega_0 n_s(\omega_0) \eta_{sr}(\omega_0) = \mathcal{M}_{sr}(\omega_0), \quad (6.13)$$

on a alors :

$$\Delta\omega \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{1,\text{tot}} & -\mathcal{M}_{21} & -\mathcal{M}_{31} & \cdots & -\mathcal{M}_{\mathcal{N}1} \\ -\mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{2,\text{tot}} & -\mathcal{M}_{32} & \cdots & -\mathcal{M}_{\mathcal{N}2} \\ -\mathcal{M}_{13} & -\mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{3,\text{tot}} & \cdots & -\mathcal{M}_{\mathcal{N}3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{M}_{1\mathcal{N}} & -\mathcal{M}_{2\mathcal{N}} & -\mathcal{M}_{3\mathcal{N}} & \cdots & \mathcal{M}_{\mathcal{N},\text{tot}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}2,t}\} \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}3,t}\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}\mathcal{N},t}\} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

3. F.J. Fahy : 'Statistical energy analysis: a critical overview', *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* **346**(1681), 431-447 (1994).

avec

$$\mathcal{M}_{r,\text{tot}} = \mathcal{M}_r + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{\mathcal{N}} \mathcal{M}_{rs}, \quad r \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}.$$

Pour un sous-système particulier r couplé à un fluide externe, la relation (6.11) ci-dessus est modifiée comme suit, en tenant compte de (5.47) et avec des notations évidentes pour les paramètres relatifs à ce sous-système :

$$\eta_{r,\text{tot}}(\omega_0) = \eta_{r,\text{rad}}(\omega_0) + \eta_{\text{dr}} \sqrt{\frac{\varrho_r}{\varrho_r + \varrho_{r,\text{rad}}(\omega_0)}} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{\mathcal{N}} \eta_{rs}(\omega_0).$$

Pratiquement on constate, et c'est une règle assez générale pour un milieu élastique couplé à un fluide léger, que $\eta_{r,\text{rad}}$ est plus faible que les η_{rs} .

6.3 Paramètres de la SEA

Les différents paramètres mécaniques introduits dans la formulation des équations de base de la SEA sont les suivants :

- les puissances injectées $\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN}\alpha,t}\}$ par les excitations imposées, définies par l'Éq. (5.7) ;
- les densités modales des sous-systèmes, définies par (6.1) ;
- les facteurs de perte par dissipation moyens η_{dr} des sous-systèmes, définis par (6.2) ;
- les facteurs de perte par couplage η_{rs} entre sous-systèmes, définis par (6.6).

Grâce à la relation de réciprocité (6.12) et à la connaissance des densités modales, le nombre de facteurs de perte par couplage à déterminer est réduit à $\frac{1}{2}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)$ au maximum. Ils sont **supposés** nuls pour des sous-systèmes non couplés physiquement⁴, ce qui permet de réduire encore ce nombre. Ce sont néanmoins les paramètres les plus difficiles à estimer.

6.4 Quelques remarques importantes et exemples

Remarque 1 — $a_{r\alpha,s\beta}$ et η_{rs} dépendent de η_{dr} et η_{ds} , mais cette dépendance est ignorée par certains logiciels du commerce.

Remarque 2 — Si les termes de couplage extra-diagonaux du système (5.2) pour le couplage de deux sous-structures continues sont d'ordre ϵ , où ϵ est un paramètre arbitrairement petit devant 1, et si les termes diagonaux sont eux d'ordre 1 (couplage faible), alors les facteurs de perte par couplage sont d'ordre ϵ^2 .

4. L'exemple 2 suivant (voir page 97) contredit cette hypothèse, pour le cas pourtant relativement simple d'un système réduit à trois sous-systèmes à un degré de liberté chacun. Néanmoins en analyse statistique énergétique expérimentale, pour l'identification des facteurs de perte par dissipation et par couplage sur un prototype de structure assemblée, on ne fait généralement pas cette hypothèse, ni même celle de la réciprocité : les \mathcal{N} facteurs de perte par dissipation et $\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)$ facteurs de perte par couplage sont estimés directement par la mesure des énergies mécaniques moyennes et puissances injectées par sous-système lorsque qu'on sollicite successivement chacun d'entre eux. C'est le principe de la "power injection method" introduite par Bies & Hamid en 1980 (D.A. Bies & S. Hamid : 'In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method', *Journal of Sound and Vibration* **70**(2), 187-204 (1980)) et revue par Lalor en 1989 (N. Lalor : 'The experimental determination of vibrational energy balance in complex structures', in *Proceedings of the SIRA Conference on Stress and Vibration—Recent Developments in Industrial Measurements and Analysis*, pp. 302-314 (paper #108429). London, 1989).

Remarque 3 – Le système de la SEA est obtenu par généralisations successives, sans preuve. On peut même montrer que, pour un nombre de degrés de liberté strictement supérieur à 2, les relations de proportionalité entre les puissances échangées entre sous-systèmes et la différence des énergies mécaniques sont rigoureusement fausses ; elles ne sont vraies, en première approximation, que pour des couplages faibles. Nous avons brièvement décrits dans ce cours différents moyens de caractériser qualitativement ou quantitativement un tel comportement. Le point central est la généralisation de la relation (5.19) qui est fondée sur cette hypothèse : d'un point de vue énergétique, l'énergie mécanique réelle d'un sous-système en régime stationnaire doit être voisine de son énergie mécanique "découplée", et/ou d'un point de vue mécanique, les fréquences propres de la configuration couplée doivent rester proches des fréquences propres de la configuration découplée et dans la bande d'analyse.

Remarque 4 – Le partitionnement d'une structure complexe en sous-systèmes doit être réalisé dans le but de satisfaire les hypothèses fondamentales de la SEA, dans la mesure du possible. Ainsi de simples considérations géométriques ne sont parfois pas satisfaisantes, on peut être amené à effectuer un partitionnement physique entre différents modes de comportement mécanique : par exemple le sous-système "flexion pure", le sous-système "traction compression" et le sous-système "torsion". Bien évidemment rien n'exclut non plus un partitionnement mixte suivant des considérations à la fois d'ordre géométrique et d'ordre physique. Pratiquement il convient de ne conserver que des sous-systèmes faiblement couplés : si l'on observe des niveaux d'énergie très voisins entre deux d'entre eux, il est sans doute préférable de les regrouper en un seul sous-système. L'exemple 2 de la page 38 permet d'illustrer ce point.

Remarque 5 – La simplicité de l'équation fondamentale (6.10) et de son interprétation physique n'est qu'apparente. En fait toutes les difficultés sont reportées dans la détermination des paramètres fondamentaux de la formulation, et notamment celle des facteurs de perte par couplage entre sous-systèmes. Ceux-ci ne sont pas connus en règle générale et doivent être déterminés au cas par cas pour des systèmes donnés, soit sur la base d'essais en laboratoire soit sur la base de simulations numériques.

Remarque 6 – Les variables primales de la formulation SEA sont les énergies mécaniques moyennes par sous-système et par bande d'analyse. Donc aucune information donnant les distributions spatiale et fréquentielle de l'énergie dans un sous-système donné et pour une bande d'analyse donnée n'est accessible. Afin d'augmenter la résolution spatiale, par exemple, et si tant est que cela ait un intérêt, il est nécessaire d'augmenter le nombre de sous-systèmes ; mais alors les hypothèses de base sont d'autant plus difficiles à vérifier et le nombre de paramètres à déterminer augmente. Néanmoins l'expérience (confirmée par quelques résultats théoriques récents) montre que les réponses estimées par la SEA sont en moyenne peu sensibles aux détails structuraux et aux conditions aux limites pour un système donné. Il n'est donc généralement pas nécessaire d'en construire un modèle détaillé, contrairement à ce qui est fait par exemple pour les basses fréquences avec la méthode des éléments finis.

Exemple 1 – On considère deux sous-systèmes linéaires élastiques continus couplés caractérisés par leurs paramètres $\mathbb{E}\{\Pi_{Nr,t}\}$, n_r , η_{dr} et η_{rs} pour $r \neq s \in \{1, 2\}$. Le schéma

mécanique SEA correspondant est donné par la FIG. 6.1. Les équations de la SEA s'écrivent

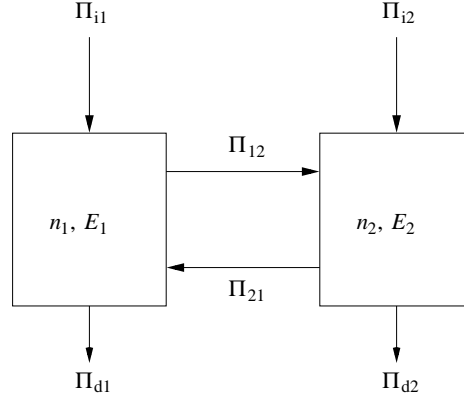


FIGURE 6.1 – Schéma mécanique SEA pour deux sous-systèmes continus couplés.

$$\omega_0 \begin{bmatrix} \eta_{d1} + \eta_{12} & -\eta_{21} \\ -\eta_{12} & \eta_{d2} + \eta_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} \\ \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

et leurs solutions sont

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} &= \frac{\eta_{d2} \mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} + \eta_{21} (\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\})}{\omega_0 (\eta_{d1} \eta_{d2} + \eta_{d1} \eta_{21} + \eta_{d2} \eta_{12})}, \\ \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} &= \frac{\eta_{d1} \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\} + \eta_{12} (\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\})}{\omega_0 (\eta_{d1} \eta_{d2} + \eta_{d1} \eta_{21} + \eta_{d2} \eta_{12})}. \end{aligned}$$

On introduit le taux de couplage $\tau = \frac{\eta_{12}}{\eta_{d1}} + \frac{\eta_{21}}{\eta_{d2}}$. Les solutions obtenues dans la limite d'un couplage fort (τ grand) sont :

$$\mathbb{E}\{\bar{\mathcal{E}}_{1,t}\} = \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\}}{\omega_0 (\eta_{d1} + \frac{\eta_2}{n_1} \eta_{d2})}, \quad \mathbb{E}\{\bar{\mathcal{E}}_{2,t}\} = \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\} + \mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\}}{\omega_0 (\eta_{d2} + \frac{\eta_1}{n_2} \eta_{d1})}.$$

En revanche les solutions obtenues en l'absence de couplage ($\tau \rightarrow 0$) sont simplement :

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}^b\} = \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\}}{\omega_0 \eta_{d1}}, \quad \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}^b\} = \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{IN2,t}\}}{\omega_0 \eta_{d2}}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\} = \frac{1}{1+\tau} \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}^b\} + \frac{\tau}{1+\tau} \mathbb{E}\{\bar{\mathcal{E}}_{r,t}\}, \quad r \in \{1, 2\}. \quad (6.16)$$

Si maintenant seule la première sous-structure est sollicitée ($\Pi_{IN2}(t) = 0$), on obtient :

$$\frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}}{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{\eta_{21}}{\eta_{d2} + \eta_{21}},$$

à comparer avec l'Éq. (3.22) pour le couplage de deux oscillateurs simples. Une **différence fondamentale** apparaît ici : il est tout à fait possible d'obtenir $\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \geq \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\}$. En revanche, si on définit une énergie modale moyenne par sous-système $E_r = \frac{\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{r,t}\}}{N_r}$, on aura bien $\frac{E_2}{E_1} \leq 1$. Par ailleurs, sous les hypothèses suivantes de couplage faible ($\tau \ll 1$) :

$$\eta_{d1} \eta_{d2} + \eta_{d1} \eta_{21} + \eta_{d2} \eta_{12} \simeq \eta_{d1} \eta_{d2}, \quad \eta_{d2} + \eta_{21} \simeq \eta_{d2},$$

les énergies moyennes de chacune des sous-structures sont approchées par :

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} \simeq \frac{\mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\}}{\omega_0 \eta_{d1}}, \quad \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\} \simeq \frac{\eta_{21} \mathbb{E}\{\Pi_{IN1,t}\}}{\omega_0 \eta_{d1} \eta_{d2}}.$$

Les niveaux d'énergie moyens de la première sous-structure sont donc peu affectés par le couplage, comme l'on pouvait s'y attendre, alors que ceux de la deuxième sous-structure sont très sensibles au facteur de perte par couplage η_{21} .

Exemple 2 – On examine l'exemple d'un système constitué de trois oscillateurs simples couplés en série de manière conservative, tel que décrit sur la FIG. 6.2 ci-dessous. On pose :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1 + K}{M_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2 + K + K'}{M_2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K_3 + K'}{M_3}}, \quad \Delta_\alpha = \frac{D_\alpha}{M_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

pour les pulsations propres non amorties des trois oscillateurs dans leur configuration couplée, et les largeurs de bande passante associées. Les excitations sont des bruits de bande non corrélés qui admettent pour densités spectrales de puissance :

$$S_\alpha(\omega) = S_\alpha \times \mathbb{1}_{I_\alpha \cup \underline{I}_\alpha}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

avec $S_\alpha > 0$, $I_\alpha = [\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$, $\underline{I}_\alpha = [-\omega_\alpha - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_\alpha + \frac{\Delta\omega}{2}]$ et $\Delta\omega \gg \Delta_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3$. On peut alors montrer⁵ que la puissance moyenne échangée entre les oscillateurs

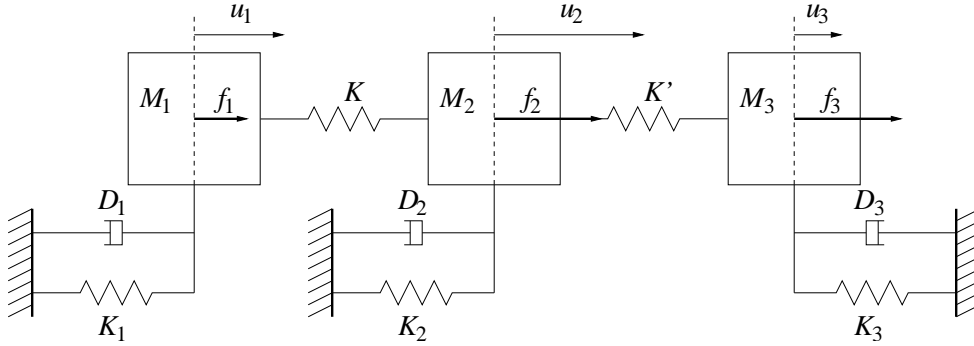


FIGURE 6.2 – Schéma mécanique d'un système constitué de trois oscillateurs simples couplés de manière conservative.

1 et 2 est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\Pi_{12,t}\} &= \omega_1 a_{12}^d \left(\frac{\pi S_1}{D_1} - \frac{\pi S_2}{D_2} \right) + \omega_1 a_{13}^i \left(\frac{\pi S_1}{D_1} - \frac{\pi S_3}{D_3} \right) \\ &= \omega_1 \eta_{12}^d (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{2,t}\}) + \omega_1 \eta_{13}^i (\mathbb{E}\{\mathcal{E}_{1,t}\} - \mathbb{E}\{\mathcal{E}_{3,t}\}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'elle s'écrit comme la somme d'une puissance échangée "directe" entre les deux oscillateurs couplés physiquement, et d'une puissance échangée "indirecte" entre les deux

5. J.C. Sun, C. Wang & Z.H. Sun : 'Power flow between three series coupled oscillators', *Journal of Sound and Vibration* **189**(2), 215-229 (1996) ; M.Q. Wang, M.P. Sheng & J.C. Sun : 'The direct and indirect power flows of three non-conservatively series coupled oscillators', *Journal of Sound and Vibration* **212**(2), 231-251 (1998).

oscillateurs non couplés physiquement. Les facteurs de perte par couplage direct η_{12}^d (ou a_{12}^d) et indirect η_{13}^i (ou a_{13}^i) dépendent des paramètres mécaniques des trois oscillateurs (ils diffèrent donc de ceux obtenus à la section §3.1.4) et vérifient les relations de réciprocité :

$$\omega_\alpha \eta_{\alpha\beta}^d = \omega_\beta \eta_{\beta\alpha}^d, \quad \omega_\alpha \eta_{\alpha\beta}^i = \omega_\beta \eta_{\beta\alpha}^i.$$

Leurs expressions sont relativement compliquées mais les calculs peuvent être menés simplement en suivant la même procédure qu'à la section §3.1.4 ou dans l'exemple 3 de la page 38. Enfin on notera que la puissance échangée "indirecte" augmente d'autant plus que la raideur de couplage K' est grande ; pour un couplage "faible", on pourra négliger sa contribution (ce qui est systématiquement fait, sans le dire, dans les approches SEA classiques).

Exemple 3 – On considère deux sous-systèmes linéaires élastiques continus couplés par l'intermédiaire d'un troisième milieu élastique linéaire (le joint) caractérisé par des coefficients de transmission τ_{rs} des flux d'énergie entre le sous-système r et le sous-système s , et des coefficients de réflexion σ_r des flux d'énergie sur l'interface de la sous-structure r avec le joint (voir la FIG. 6.3). On désigne par \mathcal{E}_r l'énergie mécanique totale du sous-système r

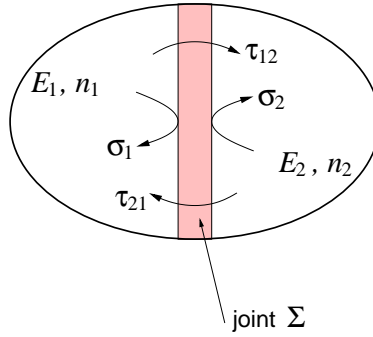


FIGURE 6.3 – Couplage non conservatif de deux sous-structures élastiques continues.

qui occupe un volume V_r . La densité de flux d'énergie impactant l'élément de surface dS du joint, dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$, à la vitesse c_r depuis le sous-système r , est :

$$d\pi_{\text{IN}r} \cdot \mathbf{n} = c_r \frac{\mathcal{E}_r}{4\pi V_r} \cos \theta dS d\Omega$$

avec $\int_{S^2} d\Omega = 4\pi$ pour $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ en coordonnées sphériques, où $\phi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de sorte que $\theta = 0$ correspond à la normale extérieure à dS (notée \mathbf{n}) pointant vers le sous-système $s \neq r$; S^2 désigne enfin la sphère unité de \mathbb{R}^3 . La puissance totale perdue par le sous-système r par le couplage est :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{dr}}^{\text{coup}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\tau_{rs} + (1 - \sigma_r - \tau_{rs})] c_r \frac{\mathcal{E}_r}{V_r} |\cos \theta| \sin \theta d\theta d\phi dS \\ &= (< \tau_{rs} > + < \alpha_{rs} >) c_r \frac{\mathcal{E}_r S}{4V_r} \end{aligned}$$

S étant la surface du joint Σ . On introduit les coefficients moyennés, ou "diffus" :

$$< \tau_{rs} > = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_{rs} |\cos \theta| \sin \theta d\theta d\phi, \quad < \sigma_r > = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r |\cos \theta| \sin \theta d\theta d\phi$$

et

$$\langle \alpha_{rs} \rangle = 1 - \langle \sigma_r \rangle - \langle \tau_{rs} \rangle .$$

$\langle \alpha_{rs} \rangle$ est le coefficient d'amortissement diffus du joint vu par le sous-système r . La puissance totale introduite dans le sous-système r par le couplage est quant à elle :

$$\Pi_{INr}^{\text{coup}} = \langle \tau_{sr} \rangle c_s \frac{\mathcal{E}_s S}{4V_s}, \quad s \neq r ,$$

et la puissance totale dissipée par le sous-système r est enfin :

$$\Pi_{dr} = \omega_0 \eta_{dr} \mathcal{E}_r$$

sous les hypothèses [H1] à [H3] bien sûr. Le bilan $\Pi_{INr} + \Pi_{INr}^{\text{coup}} = \Pi_{dr} + \Pi_{dr}^{\text{coup}}$ des puissances échangées par le sous-système r avec le sous-système s s'écrit finalement :

$$\Pi_{INr} = \omega_0 \eta'_{dr} \mathcal{E}_r + \omega_0 (\eta_{rs} \mathcal{E}_r - \eta_{sr} \mathcal{E}_s), \quad s \neq r \in \{1, 2\} \quad (6.17)$$

où les facteurs de perte par couplage sont donnés par :

$$\eta_{rs} = \frac{c_r S}{4\omega_0 V_r} \langle \tau_{rs} \rangle \quad (6.18)$$

et le facteur de perte modifié du sous-système r est :

$$\eta'_{dr} = \eta_{dr} + \frac{\langle \alpha_{rs} \rangle}{\langle \tau_{rs} \rangle} \eta_{rs} . \quad (6.19)$$

Compte tenu de la relation de réciprocité $c_s^2 \langle \tau_{rs} \rangle = c_r^2 \langle \tau_{sr} \rangle$ et sachant que la densité modale du sous-système r peut s'écrire $n_r(\omega) = \frac{V_r \omega^2}{2\pi^2 c_r^3}$ en première approximation, on vérifie bien la relation de réciprocité :

$$n_r \eta_{rs} = n_s \eta_{sr} .$$

La prise en compte d'un couplage faible **non conservatif** de deux sous-structures élastiques conduit à modifier simplement les facteurs de perte des sous-systèmes, alors qu'en revanche les facteurs de perte par couplage sont inchangés (voir aussi l'exemple 3 page 38).

Exemple 4 – On reprend l'exemple précédent en considérant ici que le joint est une cloison élastique séparant deux cavités acoustiques (deux salles séparées par un mur). La puissance acoustique totale venant impacter la cloison en présence de sources acoustiques dans la première salle est $\Pi_{IN1} = \int d\mathbf{\pi}_{IN1} \cdot \mathbf{n}$, soit :

$$\Pi_{IN1} = \frac{c_1 S \mathcal{E}_1}{4V_1} = \frac{S}{4\varrho_1 c_1} \langle p_1^2 \rangle ,$$

où $\langle p_1^2 \rangle = \frac{\varrho_1 c_1^2}{V_1} \mathcal{E}_1$ est la pression quadratique moyenne, intégrée sur tout le volume. On suppose qu'aucune source n'est présente dans la seconde salle, où règne la pression quadratique moyenne $\langle p_2^2 \rangle = \frac{\varrho_2 c_2^2}{V_2} \mathcal{E}_2$, \mathcal{E}_2 étant l'énergie acoustique totale transmise par la cloison. Elle est reliée à la puissance totale dissipée dans la cavité par la relation $\Pi_{d2} = \eta_{d2} \omega_0 \mathcal{E}_2$. On définit alors l'indice d'affaiblissement TL de la cloison, "transmission loss" en Anglais, par :

$$\text{TL} = 10 \log \frac{\Pi_{IN1}}{\Pi_{d2}} \text{ dB} ,$$

et on déduit des expressions de $\Pi_{\text{IN}1}$ et $\Pi_{\text{d}2}$ ci-dessus :

$$\text{TL} = \text{NR} + 10 \log \left(\frac{\varrho_2 c_2}{\varrho_1 c_1} \times \frac{c_2 S}{\eta_{\text{d}2} \omega_0 V_2} \right), \quad \text{NR} = 10 \log \frac{\langle p_1^2 \rangle}{\langle p_2^2 \rangle} \text{ dB}.$$

Le facteur de perte de la seconde cavité est relié classiquement au coefficient d'absorption de ses parois α (coefficient de Sabine) par $\eta_{\text{d}2} \omega_0 = \frac{\alpha S_2}{4V_2}$, où S_2 est la surface totale des parois en excluant la surface de la cloison⁶. On obtient finalement :

$$\text{TL} = \text{NR} + 10 \log \left(\frac{\varrho_2 c_2}{\varrho_1 c_1} \times \frac{S}{\alpha S_2} \right),$$

qui est la formule usuelle de l'acoustique des salles lorsque les deux cavités sont remplies d'air ($\varrho_1 c_1 = \varrho_2 c_2$; cf. norme NF S 31-051).

Exemple 5 – On s'intéresse ici à un système vibro-acoustique couplé constitué d'une plaque élastique mince en flexion encastrée sur ses bords, et d'une cavité acoustique parallélépipédique dont les cinq parois (hormis celle constituée par la plaque) sont parfaitement rigides (voir FIG. 6.4). La plaque est sollicitée par une force mécanique ponctuelle, par exemple, d'amplitude F au point \mathbf{x}_0 . La cavité est remplie d'air ou d'eau. On peut construire une solution analytique de ce problème de la manière suivante⁷. Le sous-domaine "plaque" est noté $\Omega_1 =]0, a[\times]0, b[$ où a et b sont donc les deux dimensions de la plaque d'aire ab , et le sous-domaine "fluide" est noté $\Omega_2 = \Omega_1 \times]0, L[$, de volume abL , tel que la surface moyenne de la plaque se trouve en $z = 0$. Pour cette géométrie et ces conditions aux limites, on connaît l'expression explicite des modes propres de vibration de flexion de la plaque⁸ et des modes propres acoustiques de la cavité. Pour la plaque, ils sont de la forme :

$$\phi_{1,\alpha}(\mathbf{x}) = \psi_{\alpha_1} \left(\frac{x}{a} \right) \times \psi_{\alpha_2} \left(\frac{y}{b} \right), \quad (6.20)$$

$x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$, avec :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \cos k_n(2x - 1) + \frac{\sin k_n}{\sinh k_n} \cosh k_n(2x - 1) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sin k_n(2x - 1) - \frac{\sin k_n}{\sinh k_n} \sinh k_n(2x - 1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

où les k_n sont les solutions positives de $\tan k_n + (-1)^n \tanh k_n = 0$, $n \geq 2$. Les pulsations propres associées sont données par :

$$\omega_\alpha = (\lambda_\alpha \pi)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\varrho_1}}, \quad \lambda_\alpha^4 = \frac{A_{\alpha_1}^4}{a^4} + \frac{A_{\alpha_2}^4}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} [\nu_1 B_{\alpha_1} B_{\alpha_2} + (1 - \nu_1) C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}],$$

6. La puissance acoustique totale impactant les parois d'une cavité est $\Pi_{\text{IN}} = \frac{cS\mathcal{E}}{4V}$, et celle qu'elles dissipent est par définition du coefficient de Sabine $\Pi_{\text{d}} = \alpha \Pi_{\text{IN}}$. On l'identifie ensuite à une puissance dissipée totale dans la cavité de la forme $\eta_{\text{d}} \omega \mathcal{E}$, en négligeant la contribution liée à la viscosité du fluide. Pratiquement α est de l'ordre de 10^{-1} pour l'air.

7. J.-M. David & M. Menelle : 'Validation of a medium-frequency computational method for the coupling between a plate and a water-filled cavity', *Journal of Sound and Vibration* **265**(4), 841-861 (2003).

8. Voir par exemple G.B. Warburton : 'The vibrations of rectangular plates', *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* **168**(12), 371-381 (1954).

où les A_n , B_n , C_n sont des coefficients dépendant des conditions aux limites (ici encastrement). ν_1 est le coefficient de Poisson de la plaque, ϱ_1 est sa masse surfacique et D_1 sa rigidité de flexion. Pour la cavité, les modes propres sont de la forme :

$$\begin{aligned}\phi_{2,\beta}(\mathbf{x}, z) &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\left(\beta_1 \pi \frac{x}{a}\right) \times \cos\left(\beta_2 \pi \frac{y}{b}\right) \times f_\beta(z) \\ &= \varphi_{2,\beta}(\mathbf{x}) \times f_\beta(z),\end{aligned}\tag{6.21}$$

$\mathbf{x} \in [0, a] \times [0, b]$, $z \in [0, L]$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, avec :

$$f_\beta(z) = \cosh k_z(L - z)$$

et :

$$k_z^2 = \left(\frac{\beta_1 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 \pi}{b}\right)^2 - k_2^2(1 - i\eta_{d2}(\omega)).$$

Ici $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ est le nombre d'onde dans la cavité acoustique, c_2 est la célérité du son dans le fluide au repos, et $\eta_{d2}(\omega) = \frac{4}{3} \frac{\eta_{d0}\omega}{\varrho_2 c_2^2}$ est son facteur de perte par dissipation (voir [13], §X.3) en fonction de sa viscosité dynamique η_{d0} et de sa densité ϱ_2 . Alors la flèche w_1 de la plaque s'écrit :

$$w_1(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{|\alpha|=4}^{\infty} \frac{\int_{\Omega_1} \phi_{1,\alpha}(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y}}{\mu_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2 + i\eta_{d1}\omega_\alpha\omega)} \phi_{1,\alpha}(\mathbf{x})\tag{6.22}$$

où η_{d1} désigne son facteur de perte par dissipation, supposé identique pour tous ses modes, et $\mu_\alpha = \int_{\Omega_1} \varrho_1 \phi_{1,\alpha}^2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ est la masse généralisée du mode α . Le chargement total $P(\mathbf{x}, \omega)$ imposé à la plaque s'exprime en fonction de la pression du fluide $p_2(\mathbf{x}, z, \omega) = p(\mathbf{x}, \omega)$ en $z = 0$ par :

$$P(\mathbf{x}, \omega) = F\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - p(\mathbf{x}, \omega).$$

Celle-ci s'écrit quant à elle :

$$p_2(\mathbf{x}, z, \omega) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} q_\beta(\omega) \varphi_{2,\beta}(\mathbf{x}) f_\beta(z)\tag{6.23}$$

où les coordonnées généralisées $\{q_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^2}$ sont déterminées par la condition aux limites :

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \varrho_2 \omega^2 w_1, \quad z = 0.$$

En introduisant les coefficients de couplage (voir l'Éq. (5.25) de la page 78) :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_1} \varrho_2 \phi_{1,\alpha}(\mathbf{x}) \varphi_{2,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

on déduit de la condition aux limites ci-dessus projetée sur le mode $\phi_{1,\alpha}$:

$$\sum_{|\beta|=0}^{\infty} \gamma_{\alpha\beta} \left[f_\beta(0) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(\frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} - 1 + i\eta_{d1} \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) f'_\beta(0) \right] q_\beta(\omega) = \varrho_2 F \phi_{1,\alpha}(\mathbf{x}_0), \quad \forall |\alpha| \geq 4. \tag{6.24}$$

Pour cet exemple, les coefficients de couplage sont calculés explicitement à partir de (6.20) et (6.21). On obtient $\gamma_{\alpha\beta} = 2\varrho_2\sqrt{ab} \times G_{\alpha_1\beta_1} \times G_{\alpha_2\beta_2}$ avec :

$$G_{mp} = \begin{cases} (1 + (-1)^p) \frac{16k_m^3 \sin k_m}{16k_m^4 - (p\pi)^4} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ (1 - (-1)^p) \frac{16k_m^3 \cos k_m}{16k_m^4 - (p\pi)^4} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

La pression du fluide est reconstituée par l'Éq. (6.23) alors que la flèche de la plaque est reconstituée par l'Éq. (6.22) ou bien, plus simplement, la condition aux limites :

$$w_1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\varrho_2 \omega^2} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} q_\beta(\omega) \varphi_{2,\beta}(\mathbf{x}) f'_\beta(0). \quad (6.25)$$

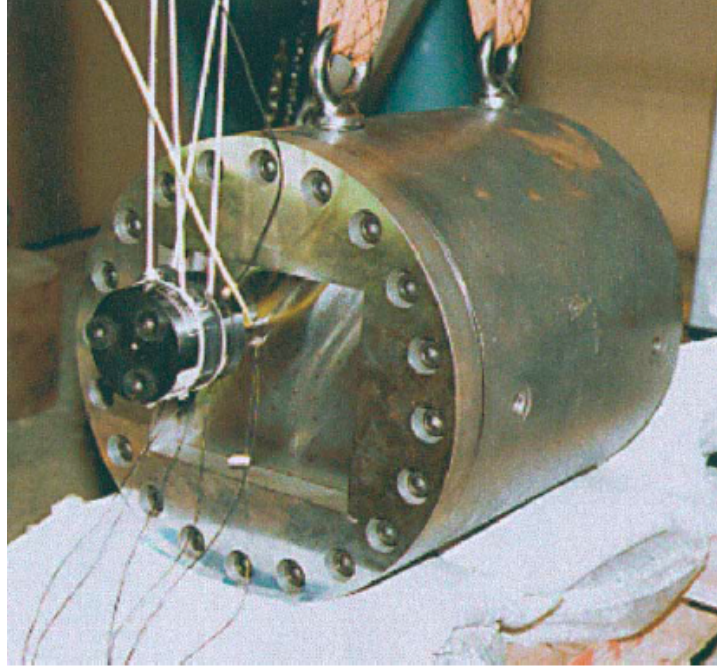


FIGURE 6.4 – Cavité rigide couplée à une plaque mince : dispositif expérimental (d'après David-Menelle 2003).

Ces résultats permettent de calculer les énergies totales des deux sous-systèmes, ainsi que la puissance injectée par la force ponctuelle $F\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. L'énergie mécanique totale de la plaque dans un premier temps est donnée par :

$$\mathcal{E}_1(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \varrho_1 \omega^2 |w_1|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathbb{M} : \mathbb{K} d\mathbf{x}$$

où $\mathbb{K} = -\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} w_1$ est le tenseur d'ordre 2 des variations de courbure et $\mathbb{M} = \nu_1 D_1 (\text{tr } \mathbb{K}) \mathbb{I}_2 + (1 - \nu_1) D_1 \mathbb{K}$ est le tenseur d'ordre 2 des moments de flexion ; \mathbb{I}_2 est la matrice identité 2×2 . On obtient compte tenu de (6.25) :

$$\mathcal{E}_1(\omega) = \frac{\varrho_1}{2\varrho_2^2 \omega^2} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k_\beta^4}{k_1^4} \right) |f'_\beta(0)|^2 |q_\beta(\omega)|^2 \quad (6.26)$$

avec $k_\beta = \sqrt{(\frac{\beta_1\pi}{a})^2 + (\frac{\beta_2\pi}{b})^2}$ et $k_1(\omega) = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\varrho_1}{D_1}}$ le nombre d'onde de flexion de la plaque. L'énergie acoustique totale de la cavité dans un second temps est donnée par :

$$\mathcal{E}_2(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \varrho_2 \omega^2 |\mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x} dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \frac{|p_2|^2}{\kappa_2} d\mathbf{x} dz.$$

\mathbf{u}_2 est le champ de déplacement du fluide lié à la pression acoustique p_2 par $\varrho_2 \omega^2 \mathbf{u}_2 = \nabla p_2$, et $\kappa_2 = \varrho_2 c_2^2$ est sa compressibilité. On obtient ici compte tenu de (6.23) :

$$\mathcal{E}_2(\omega) = \frac{1}{2\varrho_2 \omega^2} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \left(\int_0^L [(k_\beta^2 + k_2^2) |f_\beta(z)|^2 + |f'_\beta(z)|^2] dz \right) |q_\beta(\omega)|^2. \quad (6.27)$$

Enfin la puissance injectée dans la plaque et le système est :

$$\begin{aligned} \Pi_{IN}(\omega) &= -\Re\{i\omega \bar{w}_1(\mathbf{x}_0, \omega) F\} \\ &= -\frac{F}{\varrho_2 \omega} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \Im\{f'_\beta(0) q_\beta(\omega)\} \varphi_{2,\beta}(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ces quantités sont représentées sur les FIG. 6.5 à 6.10 pour une plaque en eau ou en air dans la gamme de fréquence $B = [0, 12000]$ Hz avec les données suivantes : $a = 17$ cm, $b = 15$ cm pour les dimensions de la plaque, et $L = 31$ cm pour la profondeur de la cavité ; $E_1 = 1.62 \cdot 10^{11}$ Pa avec l'eau et $E_1 = 1.7 \cdot 10^{11}$ Pa avec l'air⁹, $\nu_1 = 0.3$, $\varrho_1 = 31.2$ kg/m³ et $\eta_{d1} = 0.8$ % pour les caractéristiques matériau de la plaque ; $c_2 = 1500$ m/s, $\varrho_2 = 1000$ kg/m³ et $\eta_{d0} = 0.001$ kg/m.s pour les caractéristiques de l'eau ; $c_2 = 340$ m/s, $\varrho_2 = 1.3$ kg/m³ et $\eta_{d0} = 1.705 \cdot 10^{-3}$ kg/m.s pour les caractéristiques de l'air ; et enfin $F = 1$ N, $x_0 = 5.1$ cm et $y_0 = 4.5$ cm pour la force appliquée à la plaque. Les coordonnées généralisées $q_\beta(\omega)$ sont calculées en résolvant fréquence par fréquence le système matriciel 100×100 issu de (6.24) pour les 100 premiers modes de plaque et de cavité, à savoir α_1 et α_2 varient de 2 à 11, et β_1 et β_2 varient de 0 à 9. Sur les FIG. 6.5, 6.6, 6.8 et 6.9 sont représentées en traits pleins les énergies totales calculées par les formules exactes (6.26) et (6.27) pour la plaque et la cavité, respectivement, et en traits pointillés les énergies totales *estimées* en prenant deux fois l'énergie cinétique pour chacun des sous-systèmes. On constate que la qualité de ces estimations est d'autant meilleure que la fréquence est élevée. Par ailleurs, compte tenu de l'allure des réponses obtenues, la plaque a un comportement typiquement basse fréquence dans toute la gamme B . La cavité remplie d'eau a également un comportement basse fréquence sur cette bande, en revanche la cavité remplie d'air a clairement un comportement haute fréquence au-delà de la fréquence de coïncidence $2\pi \times f_c = c_2^2 \sqrt{\frac{\varrho_1}{D_1}}$ de la plaque, avec ici $f_c = 3256$ Hz (mais $f_c = 64915$ Hz pour l'eau!).

Les calculs précédents ont été validés expérimentalement dans la bande $[0, 10000]$ Hz (les essais et leurs résultats ne sont pas présentés ici¹⁰). On peut également tenter de les comparer à ce que donnerait un calcul du type SEA. Pour cela, on considère deux sous-systèmes – la plaque en flexion et la cavité – et on estime leurs énergies mécaniques par

9. Ces modules sont des caractéristiques recalées à partir des pulsations propres expérimentales de la plaque *in vacuo* et sont donc sensibles aux conditions aux limites en condition d'essais, notamment du montage.

10. Voir J.-M. David & M. Menelle : 'Validation of a medium-frequency computational method for the coupling between a plate and a water-filled cavity', loc. cit.

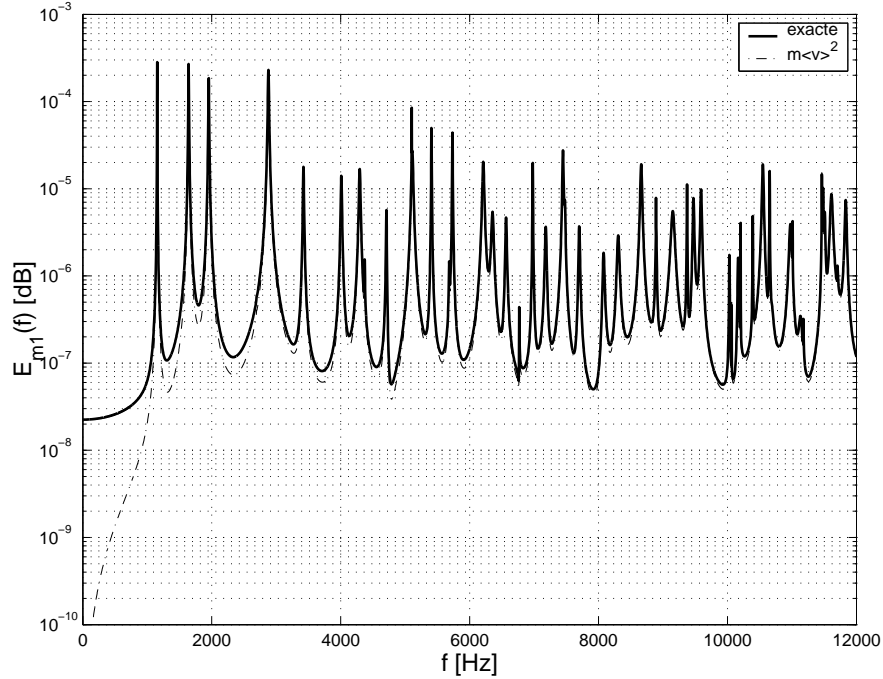


FIGURE 6.5 – Énergie mécanique totale de la plaque encastree couplée à une cavité acoustique parallélépipédique remplie d'eau, $dB_{\text{réf}} = 10 \times \log_{10}(1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2)$.

bandes fines tiers d'octave en inversant le système (6.15) de l'exemple 1. Pour la fréquence centrale $2\pi \times f_0 = \omega_0$, la bande tiers d'octave associée est définie par $I_0 = [2^{-\frac{1}{6}} f_0, 2^{\frac{1}{6}} f_0]$. Les paramètres SEA sont les suivant :

- les facteurs de perte par dissipation sont bien évidemment η_{d1} (constant sur toute la gamme de fréquence) pour le sous-système plaque et $\eta_{d2}(\omega_0)$ (dépendant de la fréquence) pour le sous-système cavité acoustique.
- Les densités modales sont données par les formules analytiques usuelles :

$$n_1 = \frac{ab}{4\pi} \sqrt{\frac{\varrho_1}{D_1}}, \quad n_2(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{V_2 \omega_0^2}{\pi c_2^3} + \frac{S_2 \omega_0}{4c_2^2} + \frac{L_2}{8c_2} \right),$$

où $V_2 = abL$ est le volume de la cavité, $S_2 = 2(ab + aL + bL)$ est la surface totale de ses faces, et $L_2 = 4(a + b + L)$ est la longueur totale de ses arêtes ; voir respectivement l'Éq. (B.2) pour la plaque et l'Éq. (B.3) pour la cavité.

- Le facteur de perte par couplage plaque/cavité est donné en fonction du coefficient de radiation σ_{rad} de la plaque par $\eta_{12}(\omega_0) = \frac{\varrho_2 c_2}{\varrho_1 \omega_0} \sigma_{\text{rad}}(\omega_0)$, où $\sigma_{\text{rad}}(\omega_0)$ est estimé par les formules analytiques approchées proposées par Maidanik¹¹. Le facteur de perte par couplage cavité/plaque est quant à lui estimé par la relation de réciprocité $\eta_{21}(\omega_0) = \frac{n_1}{n_2(\omega_0)} \eta_{12}(\omega_0)$.
- La puissance injectée dans la cavité est nulle, et la puissance injectée dans la plaque est donnée par la formule analytique (6.28), intégrée par bande tiers d'octave :

$$\mathbb{E}\{\Pi_{\text{IN},t}\}(\omega_0) = \int_{I_0 \cup I_0} \Pi_{\text{IN}}(\omega) d\omega.$$

11. G. Maidanik : 'Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields', loc. cit.

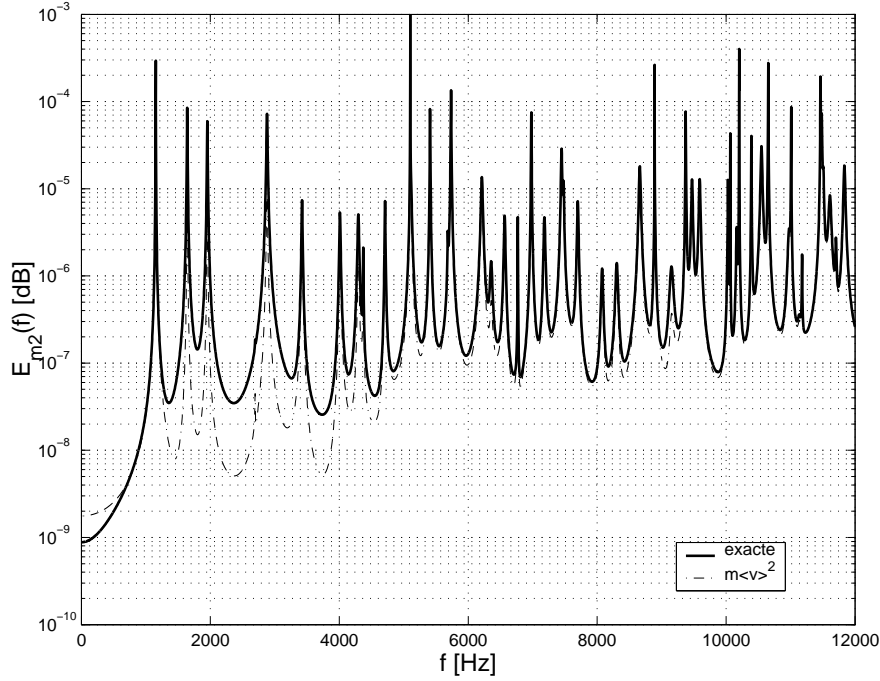


FIGURE 6.6 – Énergie acoustique totale de la cavité parallélépipédique remplie d'eau couplée à une plaque encastrée sur ses bords, $dB_{\text{réf}} = 10 \times \log_{10}(1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2)$.

Les résultats obtenus sont comparés aux énergies calculées analytiquement et intégrées par bandes tiers d'octave de $f_0 = 100 \text{ Hz}$ à $f_0 = 10159 \text{ Hz}$ sur la FIG. 6.11 pour le cas de la cavité remplie d'eau, et sur la FIG. 6.12 pour le cas de la cavité remplie d'air. Les traits pleins correspondent au sous-système "plaque" et les traits pointillés au sous-système "fluide acoustique". On peut observer que le calcul SEA donne des estimations tout à fait satisfaisantes lorsque la fréquence augmente, notamment à partir de la fréquence de coïncidence f_c , et ce même si le système a *a priori* un comportement purement modal (cavité remplie d'eau).

Discussion couplage faible / couplage fort.

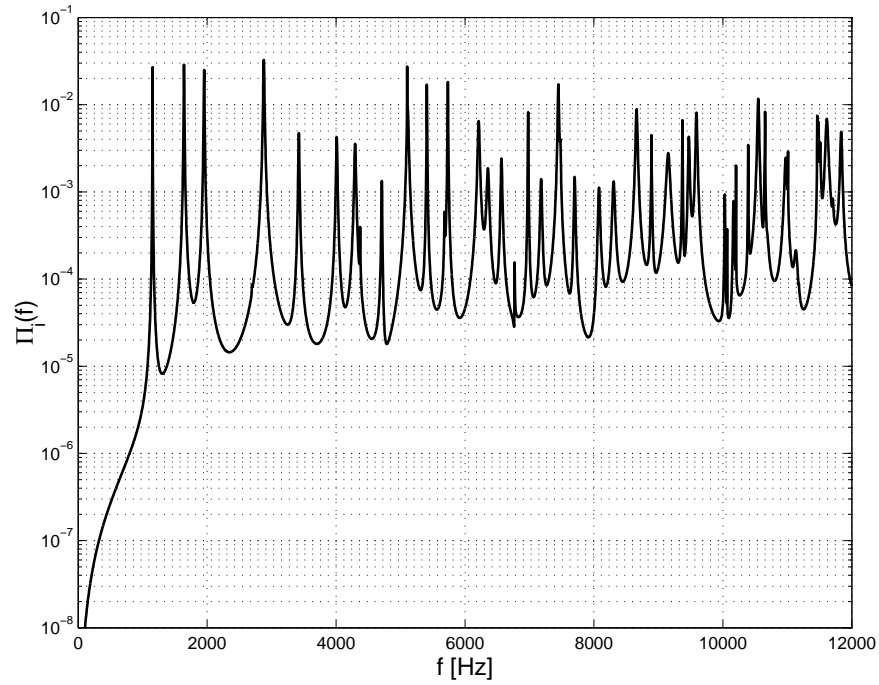


FIGURE 6.7 – Puissance totale injectée dans le système couplé plaque/cavité remplie d'eau.

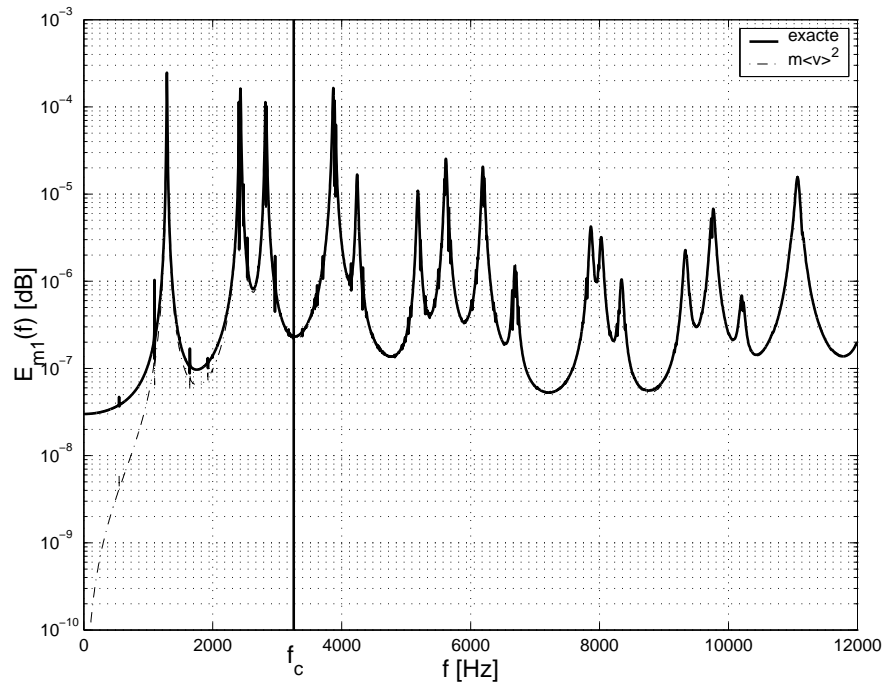


FIGURE 6.8 – Énergie mécanique totale de la plaque encastree couplée à une cavité acoustique parallélépipédique remplie d'air, $dB_{\text{réf}} = 10 \times \log_{10}(1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2)$.

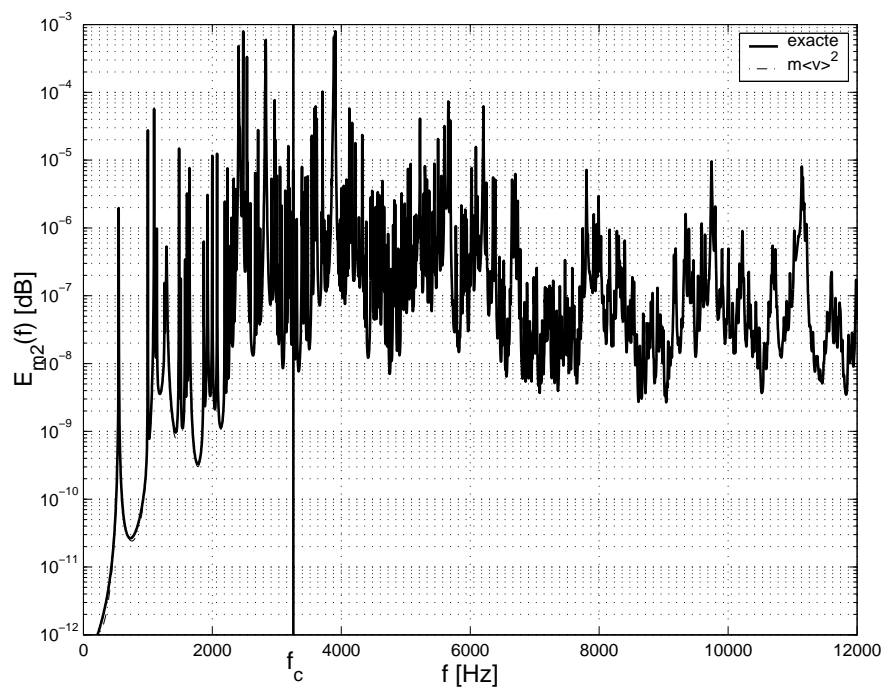


FIGURE 6.9 – Énergie acoustique totale de la cavité parallélépipédique remplie d'air couplée à une plaque encastrée sur ses bords, $dB_{\text{réf}} = 10 \times \log_{10}(1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2)$.

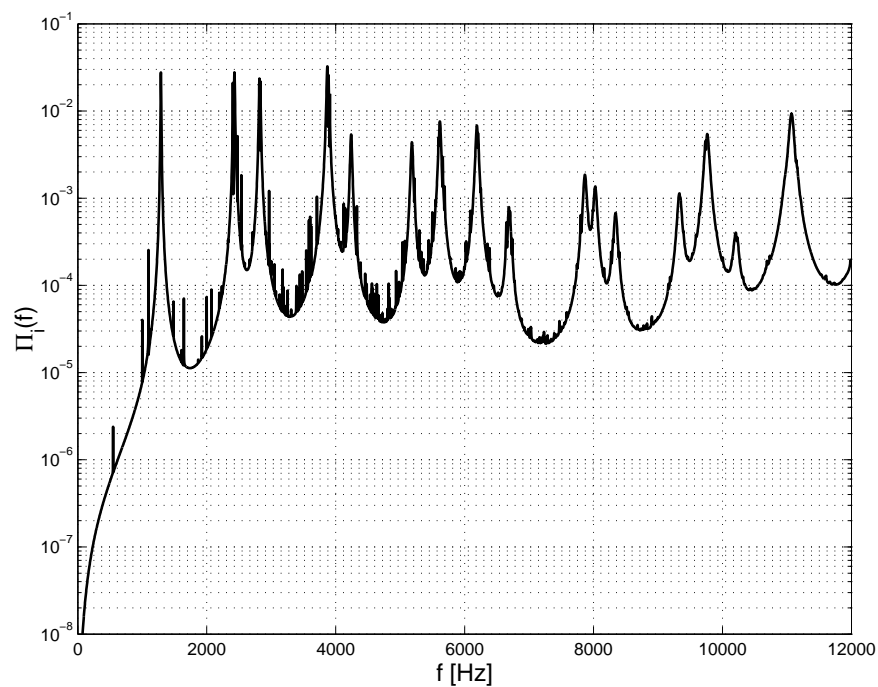


FIGURE 6.10 – Puissance totale injectée dans le système couplé plaque/cavité remplie d'air.

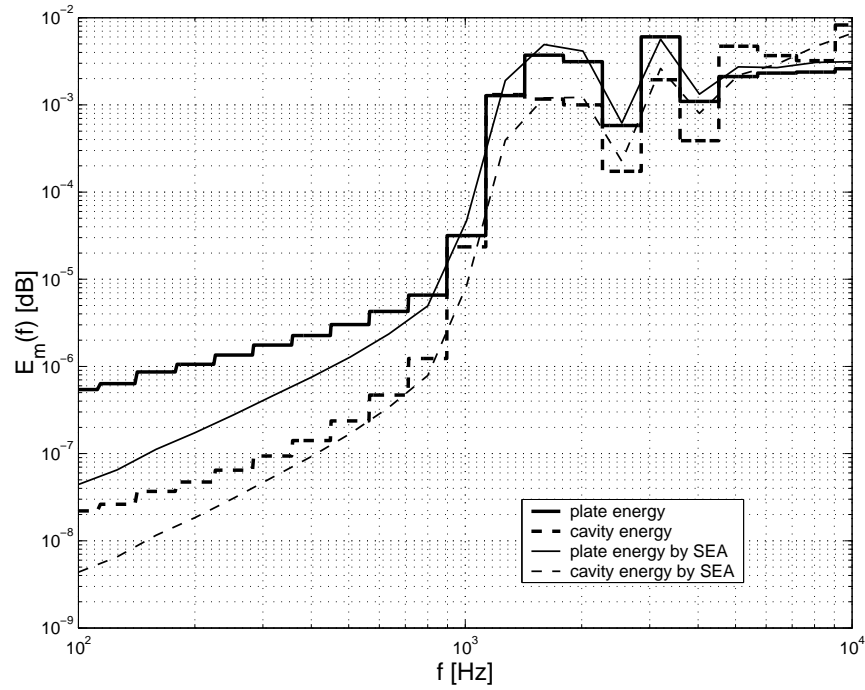


FIGURE 6.11 – Comparaison des énergies totales du système couplé plaque/cavité remplie d'eau calculées analytiquement et par un modèle SEA.

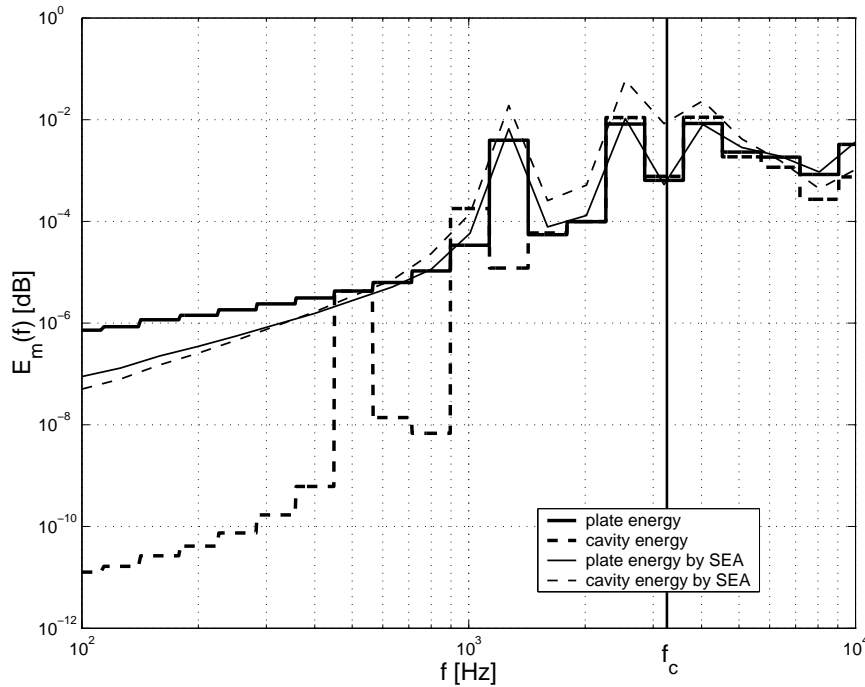


FIGURE 6.12 – Comparaison des énergies totales du système couplé plaque/cavité remplie d'air calculées analytiquement et par un modèle SEA.

Annexe A

Rappels sur les processus stochastiques du second ordre

On rappelle dans cette annexe les principales définitions et concepts liés au traitement des processus stochastiques du second ordre (d'énergie finie). Son seul objectif est de fixer les notations essentielles utilisées dans toute la suite de ce cours. On se référera par exemple au cours de Soize [15] et références citées pour un exposé plus complet.

L'espace probabilisé est noté (Ω, \mathcal{F}, P) où Ω désigne un ensemble quelconque (les événements élémentaires), \mathcal{F} désigne une tribu de parties sur cet ensemble (les combinaisons des événements élémentaires, ou événements) et P une probabilité, c'est-à-dire une mesure positive bornée de masse 1, sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) . L'ensemble Ω symbolise le "hasard" et contient tous les événements possibles (1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pour un dé), tandis qu'une partie de Ω correspond à une certaine combinaison d'événements qui influent sur le résultat (par exemple 1 et 4 avec un dé). Une *variable aléatoire* X est une application $a \mapsto X(a)$ qui associe à une combinaison $a \in \Omega$ des états des causes (les événements de Ω), une combinaison $X(a)$ des conséquences. Par cette définition, nous sommes amené à munir l'espace des combinaisons des conséquences des éléments de Ω de la même structure (tribu, mesure de probabilité) que l'espace des aléas des causes (Ω, \mathcal{F}, P) , que l'on peut alors "oublier" au profit du nouvel espace probabilisé ainsi construit. C'est ce que l'on fera toujours implicitement lorsqu'on s'intéressera aux valeurs d'un paramètre plutôt qu'aux événements à l'origine de ces valeurs (le résultat d'un lancé de dé plutôt que les événements à l'origine de ce résultat).

A.1 Processus du second ordre

Soit m un entier quelconque non nul. L'espace euclidien \mathbb{R}^m ou \mathbb{C}^m est muni du produit scalaire usuel $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^m u_j \bar{v}_j$ (ou bien $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}$) et de la norme associée $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. $\bar{\mathbf{u}}$ désigne le conjugué, $\Re\{z\}$ la partie réelle d'un complexe z et $\Im\{z\}$ sa partie imaginaire.

Soit T un sous-ensemble de \mathbb{R} , éventuellement égal à \mathbb{R} tout entier. On appelle *processus stochastique* $t \mapsto \mathbf{X}_t$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) , indexé sur T à valeurs \mathbb{K}^m ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) la famille de variables aléatoires $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) . Pour chaque $t \in T$, on a

donc une application :

$$\begin{aligned}\Omega &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ a &\mapsto \mathbf{X}_t(a)\end{aligned}$$

et \mathbf{X} est aussi une application de $T \times \Omega$ dans \mathbb{K}^m qui à chaque couple (t, a) fait correspondre $\mathbf{X}_t(a)$. \mathbf{X}_t étant une variable aléatoire, on note $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}, t)$ sa loi de probabilité. Soit I l'ensemble de toutes les parties finies et non ordonnées de T , c'est-à-dire si $i \in I$ elle est de la forme $i = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. On considère la variable aléatoire $\mathbf{X}^{(i)} = \{\mathbf{X}_{t_1}, \mathbf{X}_{t_2}, \dots, \mathbf{X}_{t_k}\}$ à valeurs \mathbb{K}^{km} . Sa loi de probabilité est notée $P_{\mathbf{X}^{(i)}}$. On appelle *système de lois marginales* du processus \mathbf{X} la collection de lois de probabilité $\{P_{\mathbf{X}^{(i)}}(d\mathbf{x}^{(i)}), i \in I\}$. La donnée de la loi de probabilité d'un processus est équivalente à la donnée de tout le système de lois marginales du processus¹. Ainsi un processus \mathbf{X} n'est gaussien que si chacune de ses lois marginales est une probabilité gaussienne. De manière générale, les variables et les processus stochastiques sont notés avec des majuscules. Une *réalisation* (respectivement une *trajectoire*) de la variable aléatoire X (resp. du processus stochastique $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ où T est l'ensemble d'indexation) est notée en minuscule $x(a)$ (resp. $\mathbf{x}(t; a)$) avec $a \in \Omega$. L'ensemble des trajectoires est une collection d'applications de T dans \mathbb{K}^m indexée par $a \in \Omega$.

L'*espérance mathématique*, ou moyenne d'ensemble, est notée dans toute la suite $\mathbb{E}\{\cdot\}$ et est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}_t\} = \int_{\mathbb{K}^m} \mathbf{x} P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}, t).$$

Nous nous limiterons dans cet exposé aux seuls processus du *second ordre* $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ tels que :

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{X}_t\|^2\} < +\infty$$

c'est-à-dire aux champs d'énergie finie. L'espace des processus du second ordre définis sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs \mathbb{K}^m , est noté $L^2(\Omega, \mathbb{K}^m)$. C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$((\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))_m = \iint_{\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) P_{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2}(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2)$$

associé à la norme $\|\mathbf{X}\|^2 = ((\mathbf{X}, \mathbf{X}))_m = \mathbb{E}\{\|\mathbf{X}\|^2\}$. La *moyenne* $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} : T \rightarrow \mathbb{K}^m$ du processus stochastique $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ à valeurs \mathbb{K}^m est la fonction $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_t\}$. Le processus est *centré* ssi $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{0}$ pour tout $t \in T$. La *fonction d'auto-corrélation* $\mathbf{R}_{\mathbf{X}} : T \times T \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, m)$ du processus stochastique $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ est la fonction $t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t')$ telle que :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_t \otimes \overline{\mathbf{X}_{t'}}\}.$$

Pour tout $t \in T$ fixé, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t)$ est une matrice hermitienne, positive. On vérifie aisément que $\text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t) = ((\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t))_m$. Les termes diagonaux définissent les auto-corrélations des composantes du processus stochastique, les termes extra diagonaux les inter-corrélations. La *fonction de covariance* $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} : T \times T \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, m)$ du processus stochastique $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ est la fonction $t, t' \mapsto \mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t')$ telle que :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t') = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}(t) \otimes \overline{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}(t')}.$$

1. Remarque très importante : ainsi une infinité de données est nécessaire pour caractériser complètement un processus.

Pour tout $t \in T$ fixé, $\mathbf{C}_\mathbf{X}(t, t)$ est aussi une matrice hermitienne, positive. Les termes diagonaux définissent les covariances des composantes du processus stochastique, les termes extra diagonaux les inter-covariances. Le *coefficient de corrélation* $t, t' \mapsto r_{jk}(t, t')$ des variables aléatoires $X_{j,t}$ et $X_{k,t'}$ est :

$$r_{jk}(t, t') = \frac{|[\mathbf{C}_\mathbf{X}(t, t')]_{jk}|}{\sigma_j(t)\sigma_k(t')}$$

à valeurs dans $[0, 1]$, avec $\sigma_j(t) = [\mathbf{C}_\mathbf{X}(t, t)]_{jj}^{1/2}$ définissant l'*écart-type* de la variable aléatoire $X_{j,t}$; $[\mathbf{C}_\mathbf{X}(t, t)]_{jj}$ désigne sa *variance* et $[\mathbf{R}_\mathbf{X}(t, t)]_{jj}$ son *moment d'ordre 2*.

A.2 Processus stationnaires en m.o.d.

Une classe de processus stochastiques du second ordre particulièrement intéressante dans la pratique est celle des processus *stationnaires en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)*. $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{K}^m est un tel processus ssi il vérifie :

$$\begin{cases} \mu_\mathbf{X}(t) = \mu_0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{R}_\mathbf{X}(t, t') = \mathbf{R}_\mathbf{X}(t - t') & \forall (t, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le processus $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ est *continu en m.o.d.* sur $T \subset \mathbb{R}$ si l'application $t \mapsto \mathbf{X}_t$ est continue de T dans $L^2(\Omega, \mathbb{K}^m)$. On peut montrer [15] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas est que la fonction d'auto-corrélation $t, t' \mapsto \mathbf{R}_\mathbf{X}(t, t')$ doit être continue en chaque point (t, t) de $T \times T$. En particulier, si le processus est stationnaire en m.o.d., $T = \mathbb{R}$, on doit avoir la continuité de $t \mapsto \mathbf{R}_\mathbf{X}(t) = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_{t+t'} \otimes \bar{\mathbf{X}}_{t'}\}$ en $t = 0$ pour avoir la continuité en m.o.d. du processus.

La fonction d'auto-corrélation $t \mapsto \mathbf{R}_\mathbf{X}(t)$ d'un processus stochastique stationnaire et continu en m.o.d. est continue sur \mathbb{R} et admet la représentation intégrale (théorème de Bochner) :

$$\mathbf{R}_\mathbf{X}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega \cdot t} \mathbf{M}_\mathbf{X}(d\omega). \quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{M}_\mathbf{X}(d\omega) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, m)$ est la *mesure spectrale matricielle* du processus stochastique $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ et est hermitienne, positive, bornée. Si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\omega$ sur \mathbb{R} (c'est le cas si par exemple $\mathbf{R}_\mathbf{X}$ tend vers 0 à l'infini²) :

$$\mathbf{M}_\mathbf{X}(d\omega) = \mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)d\omega$$

alors la fonction $\omega \mapsto \mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)$ de \mathbb{R} dans $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, m)$ est la *fonction de densité spectrale* matricielle du processus $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$. Elle est hermitienne positive, ses termes diagonaux sont positifs et appelés densités spectrales de puissance. Remarquons que la densité spectrale matricielle ne peut exister que pour des processus centrés. Notons également que l'on peut utiliser les théorèmes d'inversion de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable ou de carré intégrable pour en déduire une représentation intégrale de $\mathbf{S}_\mathbf{X}$ en fonction de $\mathbf{R}_\mathbf{X}$ (à condition bien sûr que cette dernière vérifie les hypothèses *ad hoc*!).

Enfin si $[\mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)]_{jj}$ et $[\mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)]_{kk}$ ne sont pas nulles, on définit la *cohérence* $\omega \mapsto \gamma_{jk}(\omega)$ des variables aléatoires $X_{j,t}$ et $X_{k,t}$ par :

$$\gamma_{jk}^2(\omega) = \frac{|[\mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)]_{jk}|^2}{[\mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)]_{jj}[\mathbf{S}_\mathbf{X}(\omega)]_{kk}}$$

2. En effet $\mathbf{R}_\mathbf{X}$ s'interprète alors comme la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

qui est un nombre réel compris entre 0 et 1.

A.3 Dérivation en m.o.d. des processus du second ordre

Soit $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ (T ouvert de \mathbb{R}) un processus stochastique du second ordre à valeurs dans \mathbb{R}^m . Il est dérivable en m.o.d. au point $t \in T$ ssi la suite de variables aléatoires $\mathbf{X}_h = \frac{1}{h}(\mathbf{X}_{t+h} - \mathbf{X}_t)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ quand $h \rightarrow 0$. Si la limite existe, elle est notée $\dot{\mathbf{X}}_t$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{X}_h - \dot{\mathbf{X}}_t\| = 0.$$

Si cette limite existe pour tout $t \in T$ alors $(\mathbf{X}_t, t \in T)$ est dérivable en m.o.d. sur T .

Une condition suffisante pour qu'un processus du second ordre soit dérivable en m.o.d. est que $\partial_t \partial_{t'} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t')$ existe en chaque point (t, t') de $T \times T$. Dans ce cas le processus $(\dot{\mathbf{X}}_t, t \in \mathbb{R})$ est du second ordre et l'on a :

$$\mu_{\dot{\mathbf{X}}}(t) = \frac{d\mu_{\mathbf{X}}(t)}{dt}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\dot{\mathbf{X}}}(t, t') &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t'), \\ \mathbf{R}_{\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}}(t, t') &= \mathbb{E}\{\mathbf{X}_t \otimes \dot{\mathbf{X}}_{t'}\} = \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t'), \\ \mathbf{R}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t, t') &= \mathbb{E}\{\dot{\mathbf{X}}_t \otimes \mathbf{X}_{t'}\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t'). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Si maintenant le processus du second ordre $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ est continu et stationnaire en m.o.d., sa fonction d'auto-corrélation $t \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t)$ admet la représentation intégrale (A.1) ci-dessus. Si de plus on suppose³ que $\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \text{tr} \mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega) < +\infty$, alors $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ est dérivable en m.o.d. sur \mathbb{R} et $(\dot{\mathbf{X}}_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus stochastique du second ordre continu et stationnaire en m.o.d. dont les caractéristiques du second ordre sont

$$\mu_{\dot{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{\dot{\mathbf{X}}}(t) = -\frac{d^2 \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t)}{dt^2}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}}(t) = \frac{d\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t)}{dt} \tag{A.3}$$

et

$$\mathbf{M}_{\dot{\mathbf{X}}}(\omega) = \omega^2 \mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega).$$

Ces résultats montrent que pour les processus dérivables en m.o.d., on peut formellement commuter l'espérance mathématique et la dérivation.

A.4 Filtrage

La notion de filtrage est centrale dans l'étude des problèmes de dynamique stochastique. Un filtre linéaire de convolution est une transformation algébrique de la forme

$$\mathbf{y}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

3. Cette condition est nécessaire et suffisante.

avec $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{K}^m , $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{K}^n et $t \mapsto \mathbf{h}(t)$ une fonction à valeurs dans $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ appelée *réponse impulsionnelle* du filtre \mathbf{h}_* . Par exemple toute solution (sortie du filtre) d'une équation différentielle à coefficients constants et d'ordre quelconque dont le second membre est \mathbf{x} (entrée du filtre) s'exprime par cette transformation. Dans notre cas on s'intéresse aux caractéristiques de la sortie lorsque

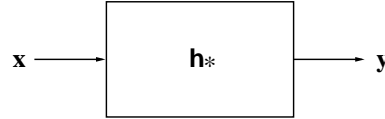


FIGURE A.1 – Filtre linéaire de convolution.

l'entrée est un processus stochastique du second ordre.

A.4.1 Définitions

Notons tout d'abord quelques définitions en liaison avec la notion de filtrage. Le filtre est dit *causal* lorsque le support de \mathbf{h} est inclus dans \mathbb{R}^+ . Il est dit *stable* si pour une entrée bornée, la sortie est aussi bornée. La *fonction de réponse en fréquence* du filtre est la transformée de Fourier – si elle existe – de la réponse impulsionnelle :

$$\widehat{\mathbf{h}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega \cdot t} \mathbf{h}(t) dt.$$

La fonction $\omega \mapsto \widehat{\mathbf{h}}(\omega)$ est généralement à valeurs complexes (dans $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, n)$). La *fonction de transfert* du filtre est la transformée de Laplace bilatérale de la réponse impulsionnelle :

$$\mathbf{H}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} \mathbf{h}(t) dt$$

pour $p \in D_{\mathbf{H}}$ éventuellement vide. Si $D_{\mathbf{H}}$ n'est pas vide, $p \mapsto \mathbf{H}(p)$ est holomorphe sur $D_{\mathbf{H}}$. Si le filtre est causal, la fonction de transfert est la transformée de Laplace unilatérale de la réponse impulsionnelle. Dans ce cas $D_{\mathbf{H}}$ est de la forme $D_{\mathbf{H}} = \{p \in \mathbb{C}, \Re\{p\} \in]s_0, +\infty[\}$ mais éventuellement vide. Si $D_{\mathbf{H}}$ contient l'axe imaginaire on a

$$\widehat{\mathbf{h}}(\omega) = \mathbf{H}(0 + i\omega)$$

et donc $\widehat{\mathbf{h}}$ est analytique. Un *filtre dynamique* est un filtre dont la fonction de transfert est rationnelle, telle que (i) le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur et (ii) les pôles du dénominateur ont des parties réelles négatives. Les filtres dynamiques sont nécessairement causaux et stables, de plus ils vérifient $\mathbf{h}(\omega) = \mathbf{H}(0 + i\omega)$.

A.4.2 Réponse d'un filtre linéaire de convolution à une entrée stationnaire en m.o.d.

Supposons que le filtre \mathbf{h}_* est attaqué par une entrée modélisée par un processus stochastique du second $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ stationnaire et continu en m.o.d. Alors pour chaque $t \in \mathbb{R}$ la sortie

$$\mathbf{Y}_t = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{X}_{\tau} d\tau$$

est une variable aléatoire du second ordre dès que \mathbb{h} est intégrable ou de carré intégrable. Donc la transformation \mathbb{h}^* définit en sortie un processus stochastique du second ordre $(\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{R})$ qui est stationnaire et continu en m.o.d. Ses caractéristiques du second ordre sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}(t) &= \widehat{\mathbb{h}}(0)\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}(t) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbb{h}(\tau)\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t + \tau' - \tau)\mathbb{h}(\tau')^T d\tau d\tau', \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{Y}}(d\omega) &= \widehat{\mathbb{h}}(\omega)\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega)\widehat{\mathbb{h}}^*(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

et où $\widehat{\mathbb{h}}^*(\omega)$ est la matrice adjointe de $\widehat{\mathbb{h}}(\omega)$, pourvu que cette dernière existe ; c'est notamment le cas si \mathbb{h} est intégrable ou de carré intégrable sur \mathbb{R} . Si le processus $(\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{R})$ est centré, on voit que le processus $(\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{R})$ l'est aussi. Si de plus la mesure spectrale matricielle $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega)$ admet la densité $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\omega$, alors $\mathbf{M}_{\mathbf{Y}}(d\omega)$ admet la densité

$$\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}(\omega) = \widehat{\mathbb{h}}(\omega)\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)\widehat{\mathbb{h}}^*(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Annexe B

Densité modale

B.1 Milieu unidimensionnel borné

Les pulsations propres d'une barre de longueur L en flexion, torsion, cisaillement transverse ou traction / compression s'écrivent de manière générale :

$$\omega_\alpha = (\alpha - \delta_{\text{CL}}) \frac{\pi c}{L}$$

où δ_{CL} est un paramètre dépendant des conditions aux limites imposées à cette structure. On a par exemple $\delta_{\text{CL}} = 0$ pour une poutre libre – libre ou bi-encastrée, et $\delta_{\text{CL}} = \frac{1}{2}$ pour une poutre encastrée – libre. Alors :

$$\alpha(k) = \frac{Lk}{\pi} + \delta_{\text{CL}}$$

en fonction du nombre d'onde $k(\omega) = \frac{\omega}{c}$, et la densité modale $n^{1\text{D}}(\omega)$ de cette structure est :

$$n^{1\text{D}}(\omega) = \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{1}{c_g} \times \frac{d\alpha}{dk}$$

en introduisant la vitesse de groupe $c_g = \frac{d\omega}{dk}$. Finalement :

$$\boxed{n^{1\text{D}}(\omega) = \frac{L}{\pi c_g} + \Gamma(\omega)} \quad (\text{B.1})$$

où $\Gamma(\omega)$ est un terme lié aux conditions aux limites qui vérifie $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Gamma(\omega) = 0$. Les expressions de c et c_g pour les différents modes de vibration d'une poutre prismatique mince sont regroupées dans le tableau B.1 ci-dessous, E désignant le module d'Young, κG le module de cisaillement réduit, D la rigidité de flexion, GJ la rigidité de torsion, A l'aire de sa section, I le moment d'inertie par rapport à l'axe de torsion, et ϱ la densité.

B.2 Milieu bidimensionnel borné

Formule du billard et quantisation de Weyl. À compléter. On obtient :

$$\boxed{n^{2\text{D}}(\omega) = \frac{Ak(\omega)}{2\pi c_g} + P\Gamma(\omega)} \quad (\text{B.2})$$

TABLE B.1 – Vitesses de phase c et de groupe c_g pour une poutre mince.

	$c \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$c_g \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$
traction / compression	$\sqrt{\frac{E}{\varrho}}$	c
cisaillement transverse pur	$\sqrt{\frac{\kappa G}{\varrho}}$	c
torsion	$\sqrt{\frac{GJ}{\varrho I}}$	c
flexion	$\sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{D}{\varrho A}}$	$2c$

où $k(\omega) = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde, A est l'aire du milieu borné bidimensionnel, et P est son périmètre. Comme dans le cas 1D, $\Gamma(\omega)$ est un terme lié aux conditions aux limites tel que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Gamma(\omega) = 0$. Pour une géométrie simple ce terme peut généralement être calculé explicitement.

B.3 Milieu tridimensionnel borné

On montre enfin :

$$n^{3D}(\omega) = \frac{Vk(\omega)^2}{2\pi^2 c_g} + \frac{Ak(\omega)}{2\pi c_g} \Gamma_1(\omega) + P\Gamma_2(\omega) \quad (\text{B.3})$$

où V est le volume du milieu borné tridimensionnel, A est l'aire de sa frontière, et P est la longueur totale des arêtes. $\Gamma_1(\omega)$ et $\Gamma_2(\omega)$ sont des termes liés aux conditions aux limites tels que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Gamma_j(\omega) = 0$, $j = 1, 2$. Ils peuvent être exprimés explicitement pour une géométrie simple.

B.4 Milieu élastique non borné

On s'intéresse ici aux solutions élastodynamiques de l'équation de Navier dans un milieu **homogène** non borné de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\mathbf{U}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3), $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^d$, et f une fonction scalaire au moins deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Si \mathbf{C}^e désigne le tenseur d'élasticité du matériau, de l'équation de Navier homogène

$$-\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ on déduit l'équation de Christoffel :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{k})\mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{U}, \quad (\text{B.4})$$

où \mathbf{U} et ω^2 apparaissent comme les vecteurs propres et valeurs propres, respectivement, du *tenseur acoustique* \mathcal{Q} (ou tenseur de Christoffel) défini pour tous vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} de \mathbb{R}^d par :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{U} = \frac{1}{\varrho}(\mathbf{C}^e : \mathbf{U} \otimes \mathbf{p})\mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{U}. \quad (\text{B.5})$$

Le tenseur acoustique est une donnée intrinsèque du milieu de propagation. Pour un matériau élastique homogène isotrope par exemple, il s'écrit :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c_p^2 \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} + c_s^2 [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \mathbb{I}_d - \mathbf{q} \otimes_s \mathbf{p} - 3\mathbf{q} \otimes_a \mathbf{p}] ,$$

où c_p et c_s sont respectivement les vitesses des ondes élastiques longitudinales et transversales. Par ailleurs, la *fonction de Green* $\mathbf{u}_\pm^G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ de ce milieu est solution de l'équation de Navier au sens des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$

$$(\mathcal{Q}(\mathbf{i}\nabla, \mathbf{i}\nabla) + \partial_t^2) \mathbf{u}_\pm^G = -\frac{1}{\varrho} \delta(t) \otimes \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbb{I}_d ,$$

telle que $\mathbf{u}_\pm^G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \rightarrow \infty$, et $\mathbf{u}_\pm^G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') = \mathbf{0}$ si $\pm t < 0$ (causalité); \mathbf{u}_+^G est la fonction de Green retardée et \mathbf{u}_-^G la fonction de Green avancée. Le milieu étant supposé homogène, on remarque que \mathbf{u}_\pm^G ne dépend en fait que de $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ et dans ce cas on la note $\mathbf{u}_\pm^G(\mathbf{r}, t)$. Le calcul de cette fonction suit la méthode proposée par Folland¹. La transformée de Fourier partielle \mathcal{F} en \mathbf{r} ou en t est un isomorphisme de \mathcal{S}' et par ailleurs $e^{\mp \epsilon t} \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}[\mathbf{u}_\pm^G] \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}[\mathbf{u}_\pm^G]$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ au sens de la convergence faible* dans \mathcal{S}' , par application du théorème de convergence dominée. On aura donc $\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[e^{\mp \epsilon t} \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}[\mathbf{u}_\pm^G]] \rightarrow \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[\mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}[\mathbf{u}_\pm^G]] := \hat{\mathbf{u}}_\pm^G(\epsilon \rightarrow 0)$ au sens de \mathcal{S}' , et en prenant la transformée de Fourier en \mathbf{r} et t de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$[\varrho(\omega \pm i\epsilon)^2 - \mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{k})] \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[e^{\mp \epsilon t} \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}[\mathbf{u}_\pm^G]] = \mathbb{I}_d .$$

En introduisant les vecteurs propres généralisés \mathbf{U}_α et valeurs propres généralisées ω_α^2 du tenseur acoustique, de la forme $\omega_\alpha^2(\mathbf{k}) = c_\alpha^2 |\mathbf{k}|^2$ (d'après l'Éq. (B.5)), elle peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{u}}_\pm^G(\mathbf{k}, \omega) = \sum_\alpha G_\alpha^\pm(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{U}_\alpha(\mathbf{k}) \otimes \overline{\mathbf{U}_\alpha(\mathbf{k})} ,$$

où les G_α^\pm vérifient :

$$G_\alpha^\pm(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho(\omega^2 - \omega_\alpha^2(\mathbf{k}) \pm 2i\epsilon\omega)} .$$

En appliquant la formule de Plemelj :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{z \pm i\epsilon - z_0} dz = \mp i\pi f(z_0) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{B.6})$$

où \mathcal{P} désigne la valeur principale de Cauchy², on en déduit :

$$G_\alpha^\pm(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{P} \frac{1}{\varrho(\omega^2 - \omega_\alpha^2)} \mp i\pi \delta[\varrho(\omega^2 - \omega_\alpha^2)] . \quad (\text{B.7})$$

1. G.B. Folland : *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth, Belmont (1992), p. 360. La condition de causalité assure que la transformée de Fourier en temps de la fonction de Green retardée (respectivement avancée) est analytique dans le demi-plan complexe $\{\Im\{\omega\} > 0\}$ (respectivement $\{\Im\{\omega\} < 0\}$). On introduit donc une variable duale complexe $\omega \rightarrow \omega \pm i\epsilon$ où $0 < \epsilon \ll 1$.

2. La relation (B.6) s'obtient de la manière suivante. D'une part :

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

et la limite $\epsilon \rightarrow 0$ de l'intégrale du premier terme au second membre définit précisément la valeur principale de Cauchy de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$; d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = \pi$$

indépendamment de ϵ , de sorte que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ l'intégrande est une mesure de Dirac, au poids π près.

La densité modale de ce système, ou plutôt la densité d'états locale telle que définie dans la littérature spécialisée³, est donnée par :

$$\frac{dn}{d\mathbf{x}} = \sum_{\alpha} \frac{d(\omega^2)}{d\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(c_{\alpha}^2 |\mathbf{k}|^2 - \omega^2) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}. \quad (\text{B.8})$$

Le terme correctif $\frac{d(\omega^2)}{d\omega} = 2\omega$ tient compte du fait que le comptage des modes normaux (états) est effectué en unités de ω^2 , et est nécessaire pour la conversion en nombre d'états par unité de fréquence. En combinant (B.7) et (B.8) on peut récrire la densité d'états locale sous la forme :

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{dn}{d\mathbf{x}} = \mp \varrho \omega \sum_{\alpha} \Im\{g_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{0}, \omega)\} = \pm \varrho \sum_{\alpha} \Re\{i\omega g_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{0}, \omega)\} \quad (\text{B.9})$$

avec $g_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{r}}^{-1}[G_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}, \omega)]$, relation utile pour l'estimer à partir de la donnée de la fonction de Green en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Le calcul de l'intégrale dans la définition (B.8) peut aussi être mené directement et les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau B.2 ci-dessous. On remarquera pour finir que la relation (B.9) impose $\mp \Im\{g_{\alpha}^{\pm}\} > 0$ dès lors que le tenseur acoustique admet au moins un vecteur propre.

TABLE B.2 – Densité d'états locale pour un milieu élastique non borné.

d	$\frac{dn}{d\mathbf{x}}$	unité
1	$\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{-1}$	s.m ⁻¹
2	$\frac{\omega}{2\pi} \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{-2}$	s.m ⁻²
3	$\frac{\omega^2}{2\pi^2} \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{-3}$	s.m ⁻³

3. Rappelons qu'on ne peut parler de "mode propre", en toute rigueur, que pour un milieu borné. Pour la définition (B.8), voir par exemple P. Sheng : *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*, Academic Press, San Diego (1995), pp. 23-48.

Annexe C

Mobilité d'une structure et d'un milieu infini

La mobilité, ou admittance, d'une structure est l'inverse de son impédance. Sa partie réelle, la conductance notée habituellement G , permet de déterminer la puissance injectée, donnée de base de la méthode SEA. Les systèmes étudiés sont généralement constitués d'assemblages de structures élancées telles que des poutres, des plaques ou des coques, pour lesquelles il est possible d'établir des expressions analytiques de leur conductance. Celles-ci sont ensuite utilisées pour calculer de manière approchée les puissances injectées. On établit dans un premier temps une expression générale de la conductance pour le cas d'une structure quelconque occupant un milieu borné. On montre ensuite qu'il peut y avoir, moyennant certaines hypothèses, équivalence avec la conductance d'un milieu infiniment étendu occupé par le même matériau homogène.

C.1 Milieu borné

La fonction de réponse en fréquence $\hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ d'une structure quelconque occupant le domaine borné Ω est donnée par l'expression (4.26). L'*admittance ponctuelle* de cette structure – non amortie – est alors définie par :

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{x}, \omega) &= \text{tr} \left\{ i\omega \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega) \right\} \\ &= i\omega \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{\|\phi_{\alpha}(\mathbf{x})\|^2}{M(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Ses modes propres $\{\phi_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ ont été normalisés par rapport à la masse

$$\int_{\Omega} \varrho \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = M \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.2})$$

où M est la masse totale de la structure, ϱ étant sa densité. On rappelle que $\|\mathbf{u}\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur \mathbf{u} . La transformée de Watson-Sommerfeld¹ consiste à remplacer la somme discrète ci-dessus par une intégrale. La justification (heuristique!) d'une

1. G.N. Watson : 'The diffraction of electric waves by the Earth', *Proceedings of the Royal Society of London A* **95**, 83-99 (1918); 'The transmission of electric waves round the Earth', *Proceedings of the Royal Society of London A* **95**, 546-563 (1918); A. Sommerfeld : *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, London (1964), pp. 281-282.

telle opération est la suivante. Pour que la transformation ait un sens, la contribution de la masse dans l'expression ci-dessus de l'admittance ponctuelle, soit $\frac{1}{M} \sum_{\alpha} \|\phi_{\alpha}(\mathbf{x})\|^2 \delta(\omega - \omega_{\alpha})$, est remplacée par une fonction régulière ayant le sens de l'inverse d'une densité spectrale de masse participante. Soit donc :

$$\bar{m}(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|\phi_{\alpha}(\mathbf{x})\|^2 H(s - \omega_{\alpha})$$

où H désigne la fonction de Heaviside telle que $H(z) = 1$ si $z \geq 0$ et $H(z) = 0$ si $z < 0$; $s \mapsto \bar{m}(\mathbf{x}, s)$ est une fonction croissante de la fréquence qui somme les contributions des modes au fur et à mesure que les pulsations propres de la structure sont atteintes. Dans la suite on utilise plutôt une version régularisée de cette fonction (voir la FIG. C.1), en conservant toutefois la même notation que pour sa version "exacte".

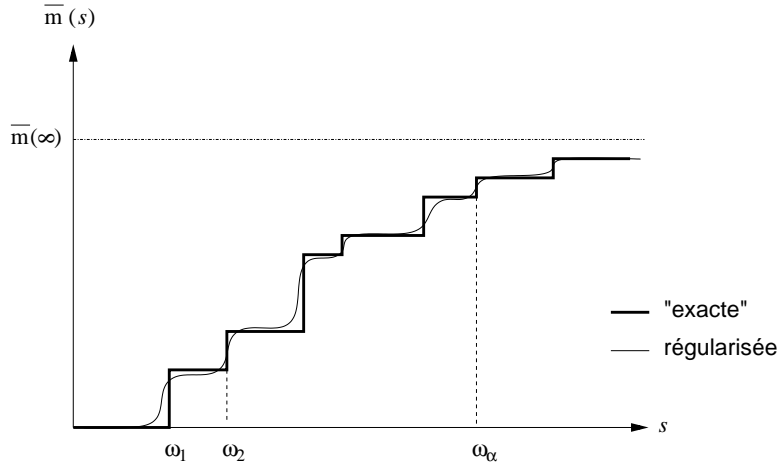


FIGURE C.1 – Fonction de densité spectrale de masse participante.

Alors la transformée de Watson-Sommerfeld de $Y(\mathbf{x}, \omega)$, que l'on note $\tilde{Y}(\mathbf{x}, \omega)$, s'écrit :

$$\tilde{Y}(\mathbf{x}, \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{i\omega}{s^2(1 + i\epsilon) - \omega^2} \times \frac{d\bar{m}}{ds}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (\text{C.3})$$

Par la formule de Plemelj (voir la page 117), on en déduit :

$$\tilde{Y}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\pi}{2} \frac{d\bar{m}}{ds}(\mathbf{x}, \omega) + i\omega \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2 - \omega^2} \times \frac{d\bar{m}}{ds}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (\text{C.4})$$

En supposant ϱ constante et en prenant la moyenne spatiale $\langle Y \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ avec $|\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$ (volume total de la structure), on peut écrire avec la normalisation (C.2) :

$$\left\langle \frac{d\bar{m}}{ds} \right\rangle|_{s=\omega} = \frac{n(\omega)}{M}$$

où $n(\omega)$ est la densité modale de la structure, homogène à l'inverse d'une pulsation (soit en $\text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$). Finalement sa conductance ponctuelle moyenne s'écrit :

$$\boxed{\langle \tilde{G}(\omega) \rangle = \frac{\pi}{2} \frac{n(\omega)}{M}}, \quad (\text{C.5})$$

résultat classique à retenir. On notera que si la densité modale est l'inverse d'une fréquence (en Hz^{-1}), cette expression devient :

$$\langle \tilde{G}(f) \rangle = \frac{n(f)}{4M} .$$

C.2 Conductance d'une poutre infinie en flexion

On considère une poutre infinie en flexion suivant le modèle cinématique de Euler-Bernouilli, sollicitée par une impulsion unitaire à l'instant $t = 0$ et au point $x = 0$. Sa flèche $w(x, t)$ satisfait donc l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varrho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x) \otimes \delta(t) \quad (\text{C.6})$$

où D désigne sa rigidité de flexion, ϱ sa densité et A l'aire de sa section. Cette équation est écrite au sens des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et on suppose que tous ces paramètres sont constants. En prenant la transformée de Fourier en temps $\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}$ de (C.6) on obtient :

$$D \frac{\partial^4 \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[w]}{\partial x^4} - \varrho A \omega^2 \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[w] = \delta(x), \quad (\text{C.7})$$

et en prenant la transformée de Fourier en espace $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$ on obtient :

$$D \xi^4 \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w] + \varrho A \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]}{\partial t^2} = \delta(t). \quad (\text{C.8})$$

On cherche une solution de (C.7) afin de déterminer la conductance de cette poutre. La technique de calcul mise en oeuvre est encore celle proposée par Folland². La solution de l'équation (C.8) ci-dessus s'annulant pour $t < 0$ s'écrit :

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w](\xi, t) = \frac{1}{\varrho A} \text{H}(t) \frac{\sin(c^2 \xi^2 t)}{c^2 \xi^2}$$

avec $c^4 = \frac{D}{\varrho A}$, à une fonction près qui est bien sûr la solution générale de (C.8) sans second membre. La transformée de Fourier partielle en x ou en t est un isomorphisme de \mathcal{S}' et par ailleurs $e^{-\epsilon t} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w] \rightharpoonup \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ au sens de la convergence faible* dans \mathcal{S}' , par application du théorème de convergence dominée. On aura donc $\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} [e^{-\epsilon t} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]] \rightharpoonup \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} [\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]]$ ($\epsilon \rightarrow 0$) au sens de \mathcal{S}' , et le calcul donne :

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} [e^{-\epsilon t} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]] (\xi, \omega) = \frac{1}{\varrho A} \times \frac{1}{c^4 \xi^4 - (\omega - i\epsilon)^2} .$$

De même on aura $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} [e^{-\epsilon t} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]]] \rightharpoonup \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\mathcal{F}_{x, t \rightarrow \xi, \omega}[w]]$ ($\epsilon \rightarrow 0$), cette limite étant égale à $\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[w]$ c'est-à-dire la solution de (C.7) que l'on recherche. Il reste donc à calculer

$$\begin{aligned} \hat{w}_\epsilon(x, \omega) &:= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} [e^{-\epsilon t} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[w]]] (x, \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi \varrho A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} d\xi}{c^4 \xi^4 - (\omega - i\epsilon)^2} \end{aligned}$$

2. G.B. Folland : *Fourier Analysis and its Applications*, loc. cit. ; voir l'Annexe B.

puis à faire tendre ϵ vers 0. Parmi les quatre racines complexes de l'équation $\xi^4 = (\frac{\omega - i\epsilon}{c^2})^2$, deux appartiennent au demi-plan $\{\Im\{z\} > 0\}$ et par application du théorème des résidus sur un contour de ce demi-plan on obtient :

$$\widehat{w}_0(x, \omega) = \frac{i}{4Dk^3} (e^{ikx} + ie^{-kx})$$

avec $k = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$. La conductance ponctuelle d'une poutre infinie s'écrit donc :

$$\begin{aligned} G_\infty(\omega) &= \Re\{-i\omega\widehat{w}_0(0, \omega)\} \\ &= \frac{1}{4\rho c A \sqrt{\omega}}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Sachant que la densité modale d'une poutre de Euler-Bernoulli de longueur L est $n(\omega) = \frac{L}{2\pi c \sqrt{\omega}}$, on en déduit :

$$G_\infty(\omega) = \frac{\pi}{2} \frac{n(\omega)}{M} \quad (\text{C.10})$$

avec $M = \rho AL$. Il y a équivalence entre la moyenne spatiale de la conductance ponctuelle d'une poutre en flexion de longueur finie et la conductance ponctuelle d'une poutre infinie ayant les mêmes propriétés mécaniques.

C.3 Conductance d'une plaque infinie en flexion

On considère maintenant le cas d'une plaque infinie en flexion suivant le modèle cinématique de Kirchhoff-Love, sollicitée par une impulsion unitaire à l'instant $t = 0$ et au point $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sa flèche $w(\mathbf{x}, t)$ satisfait donc l'équation suivante :

$$\Delta(D\Delta w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x}) \otimes \delta(t) \quad (\text{C.11})$$

où $D = \frac{EI}{1-\nu^2}$ désigne sa rigidité de flexion (E est le module d'Young, $I = \frac{h^3}{12}$ et h est l'épaisseur de la plaque), ρ la densité et ν le coefficient de Poisson du matériau élastique isotrope qui la constitue. Cette équation est écrite au sens des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t)$ et on suppose que tous ces paramètres sont constants.

Par une approche en tout point similaire à celle suivie pour le cas d'une poutre, on obtient pour la transformée de Fourier en temps de la flèche l'expression³ :

$$\widehat{w}_0(r, \omega) = \frac{i}{8\omega\sqrt{\rho h D}} (H_0(kr) - H_0(ikr))$$

où $z \mapsto H_0(z)$ est la fonction de Hankel cylindrique de première espèce, et $k = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$ avec ici $c^4 = \frac{D}{\rho h}$. $r = \|\mathbf{x}\|$ est la distance entre le point d'observation et le point d'impulsion. Le premier terme de l'expression ci-dessus – champ lointain – a un comportement oscillant, tandis que le second terme – champ proche – décroît rapidement en fonction de r . La conductance ponctuelle d'une plaque infinie s'écrit donc :

$$\begin{aligned} G_\infty(\omega) &= \Re\{-i\omega\widehat{w}_0(0, \omega)\} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\rho h D}}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

3. Résultat établi pour la première fois semble-t-il par D.A. Thomas : 'Characteristic impedances for flexure waves in thin plates', *Journal of the Acoustical Society of America* **30**(3), 220-221 (1958).

Celle-ci est indépendante de la fréquence ω . On observe également que l'impédance ponctuelle de la plaque $Z_\infty(\omega) = (-i\omega\hat{w}_0(0, \omega))^{-1} = G_\infty^{-1}$ est purement réelle (et indépendante de la fréquence). Sachant que la densité modale d'une plaque de Kirchhoff-Love d'aire A est $n = \frac{A}{4\pi c^2}$ (en s.rad⁻¹), on en déduit :

$$G_\infty = \frac{\pi}{2} \frac{n}{M} \quad (\text{C.13})$$

avec $M = \rho Ah$. Il y a équivalence entre la moyenne spatiale de la conductance ponctuelle d'une plaque en flexion d'aire finie et la conductance ponctuelle d'une plaque infinie ayant les mêmes propriétés mécaniques.

C.4 Conductance d'un milieu élastique infini

Le cas d'un milieu élastique homogène infini a été traité dans l'Annexe B.4, où sont obtenus des résultats en tout point comparables aux exemples exposés précédemment ; voir notamment la formule (B.9).

Annexe D

Power flow analysis

Transport, diffusion, applications en génie parasismique, sismique pétrolière et géophysique (cas des milieux élastiques ou acoustiques non bornés). À compléter.

Bibliographie générale

- [1] D. AUBRY. *Mécanique des Milieux Continus*. École Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 2001.
- [2] É. BALMÈS. *Dynamique des Structures*. École Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 1999.
- [3] G. BORELLO. Analyse statistique énergétique SEA. *Techniques de l'Ingénieur*, R-6-215 (2006).
- [4] G. BORELLO. Applications industrielles de la SEA. *Techniques de l'Ingénieur*, R-6-216 (2007).
- [5] G. CHEN & J. ZHOU. *Vibration and Damping in Distributed Systems*, vol. I : Analysis, Estimation, Attenuation and Design. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [6] R. W. CLOUGH & J. PENZIEN. *Dynamics of Structures*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, NY, 1993.
- [7] L. CREMER, M. HECKL & E. E. UNGAR. *Structure-Borne Sound. Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, NY, 1988.
- [8] M. GÉRADIN & D. RIXEN. *Théorie des Vibrations. Application à la Dynamique des Structures*, 2nd ed. Masson, Paris, 1996. ISBN 2-225-85173-5.
- [9] C. LESUEUR. *Rayonnement Acoustique des Structures*, vol. 66 de *Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France*. Editions Eyrolles, Paris, 1988.
- [10] R. H. LYON. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Applications*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [11] R. H. LYON & R. G. DEJONG. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, 2nd ed. Butterworth-Heinemann, Boston, MA, 1995.
- [12] H. J.-P. MORAND & R. OHAYON. *Interactions Fluides-Structures*. Masson, Paris, 1992.
- [13] R. OHAYON & C. SOIZE. *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, London, 1998.
- [14] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA. *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods*. Springer-Verlag, New York, NY, 1989.
- [15] C. SOIZE. *Signaux Aléatoires*. École Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 1995.
- [16] C. SOIZE. *Dynamique des Structures. Éléments de Base et Concepts Fondamentaux*. Ellipses, Paris, 2001. ISBN 2-7298-0681-4.

Index

- acceptance conjointe, 72, 85
- admittance, 22, 56, 119
- amortissement, 19, 31, 53, 75
 - critique, 20, 32
 - taux, 20, 32
 - équivalent, 45, 83
- bande passante
 - à -3 dB, 22, 56
 - équivalente, 22, 56
- battement
 - effet de, 35
- bruit
 - de bande, 32, 47, 59, 66, 85
- causalité, 117
- célérité du son, 41, 79
- Christoffel
 - équation, 116
 - tenseur, *voir* tenseur acoustique
- coefficient
 - de radiation, 48, 87
 - d'absorption, 100
 - de transfert, *voir* facteur de couplage modal
- complaisance, 22
- compressibilité, 103
- conductance, 22, 119
- coordonnée généralisée, 54, 68, 82
- couplage, 32, 67
 - conservatif, 32, 67
 - faible, 16, 36, 38, 72, 95
 - fort, 36, 37
 - gyroscopique, 32, 67, 76
 - non conservatif, 38, 99
 - taux, 38, 96
- densité
 - d'états locale, 118
 - modale, 36, 91
 - d'une plaque, 123
 - d'une poutre, 122
- spectrale
 - d'énergie, 58
 - de puissance, 26, 32, 34, 47, 59, 85, 111
 - transversale, 60, 70
 - surfactive effective, 87
- dissipation, *voir* amortissement
- énergie
 - cinétique, 21, 55
 - dissipée, 21, 55
 - élastique, 21, 55
 - injectée, 21, 55
 - mécanique, 20, 33, 55, 70
- équation
 - d'état, 20, 32, 53, 66, 67
 - des ondes, 41, 79
- équivalence de moyennes, 16, 28, 51, 63
- espérance mathématique, 25, 26, 28, 62, 110
- Euler-Bernoulli
 - cinématique, 121
- excitation
 - large bande, 24, 58, 73, 85
 - rain-on-the-roof, 72
- facteur
 - de couplage modal, 93
 - de perte
 - apparent, 93
 - par couplage, 36, 92
 - par dissipation, 20, 32, 54, 77, 91
 - par rayonnement, 48, 86
 - de qualité, 20, 22
 - de recouvrement modal, 91
- fluide acoustique, 41, 73, 78
- fonction
 - d'acceptance conjointe, *voir* acceptance conjointe

- d'auto-corrélation, 26, 32, 110
 - transversale, 47, 59, 66, 70, 85
- de réponse en fréquence, 21, 56, 69, 83
- de transfert, 21
- force généralisée, 54, 69, 82
- Fourier
 - transformée, 21, 24, 44, 56, 81, 111, 113, 117, 121
- fréquence
 - d'anneau, 84
 - de coïncidence, 83, 103
 - propre, *voir* pulsation propre
- gain, 22, 47
- Green
 - fonction, 117
- Helmholtz
 - équation, 42
- impédance, 22, 56
 - acoustique de frontière, 43, 81
 - de rayonnement acoustique, 43, 81
 - d'une plaque, 49
- indice d'affaiblissement, 99
- inertance, 22
- Kirchhoff-Love
 - cinématique, 122
- Laplace
 - transformée, 21, 113
- loi
 - de comportement, 52
 - de masse, 49
- masse, 19, 31, 53, 75
 - ajoutée, 45, 83
 - équivalente, 48, 86
 - généralisée, 77
 - loi, *voir* loi de masse
- mesure spectrale, 111
 - de puissance, 32
 - transversale, 47, 59, 66, 85
- mobilité, 22, 119
- mode propre, 54, 67, 77
- Navier
 - équation, 51, 116
- nombre d'onde, 115
- opérateur de scattering, 44, 81
- Plancherel
 - formule, 24
- Plemelj
 - formule, 117, 120
- potentiel de vitesse, 41, 74, 79
- pression, 41, 74, 78
 - bloquée, 44, 81
 - correction statique, 74
 - diffractée, 42, 80
 - incidente, 42, 80
 - rayonnée, 42, 80
- principe des travaux virtuels, 52, 75
- problème spectral, 54, 68, 77
- puissance
 - dissipée, 20, 33, 44, 55, 69, 83
 - échangée, 33, 69
 - injectée, 20, 33, 44, 55, 69, 83
 - instantanée, 20, 33, 44, 55, 69, 82
 - rayonnée, 44, 83
- pulsation propre, 20, 32, 54, 68, 77
 - amortie, 21, 56
 - de résonance, 22, 56
 - mouillée, 46, 85
- raideur, 19, 31, 53, 75, 76
 - dynamique, 22
- Rayleigh
 - fonction de dissipation, 20
- réactance, 22
- réceptance, 22, 56, 69, 72, 83
- réciprocité
 - des facteurs de perte par couplage, 36, 93
 - des puissances échangées, 34, 71
- réponse
 - d'évolution, 25, 27, 59
 - forcée, 24, 57
 - stationnaire, 26, 33, 59, 70
 - impulsionnelle, 21, 56, 57, 70, 113
 - libre, 22, 25, 57
- résistance, 22, 49
- résolvante, 21, 56
- réverbérant
 - système, 90

Sabine

coefficient, *voir* coefficient d'absorption

Sommerfeld

condition de radiation, 42, 80

susceptance, 22

taux de couplage, *voir* couplage

température vibratoire, 58, 60, 73

temps

d'atténuation, 23

de réverbération, 23

tenseur acoustique, 116

variable primale, 36, 95

vecteur d'état, 20, 32, 51, 53, 66, 81

vitesse de groupe, 115

vorticité, 41

Watson-Sommerfeld

transformée, 119