

# Trabalho Final - Teoria da Informação

Eric Serka do Carmo Rodrigues  
Engenharia de Redes de comunicação  
Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Email: 180016024@aluno.unb.br

**Abstract**—Este documento tem como objetivo o estudo do artigo *Channel Capacity Analysis of 2D Barcodes: QR Code and CQR Code-5* e explicar os detalhes matemáticos e conceitos como entropia, informação mútua e capacidade de canal do QR Code.

## I. INTRODUÇÃO

Primeiramente, é importante definir o que são os QR Code (Quick Response Code) e CQR Code-5 (5-color Colored Quick Response Code): eles são, resumidamente, códigos de barra bidimensionais que são capazes de armazenar e recuperar dados.

No mundo moderno, é sabido que os smartphones estão muito presentes nas vidas das pessoas. Tão presentes que, no ano de 2018, foi constatado que o número de smartphones no mundo superou o número da população mundial.

Os smartphones, desde os mais antigos, em sua grande maioria, possuem um módulo de câmera capaz de processar códigos de barra bidimensionais. Com a evolução dos smartphones, esses módulos de câmera também evoluíram e se tornaram (e vem se tornando) cada vez mais robustos, assim como os códigos de barra também. A primeira versão do QR Code monocromático foi proposta em 1994 pela Denso Wave Corporation e, atualmente, a última versão é a 40. Quanto maior for a versão do QR Code, mais módulos de dados ele suportará e, conseqüentemente, precisará de um hardware (módulo de câmera de um smartphone, por exemplo) melhor para a codificação/decodificação ser realizada de maneira satisfatória.

Já o CQR Code-5 foi proposto em 2012 por pesquisadores do departamento de engenharia elétrica e de ciência da computação da Universidade de Brasília. Em vez de usar apenas módulos preto e branco como acontece no QR Code, o CQR Code-5 foi projetado para empregar 5 cores RGB diferentes (vermelho, verde, azul, preto e branco), o que permite o dobro da capacidade de armazenamento em comparação com o QR Code tradicional. Ele usa 4 cores como módulos de informações (vermelho, verde, azul e branco) e 2 cores como módulos de alinhamento (preto e branco).

As figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, um exemplo de um QR Code tradicional e um exemplo de um CQR Code-5.

Graças a tecnologia do QR Code (e suas variações), várias aplicações para automação de vendas, marketing, segurança de rede, controle de estoque, segurança da informação e atalhos para links de URL puderam ser desenvolvidas. Essa última inclusive foi bastante utilizada em bares e restaurantes para



Fig. 1. Exemplo de QR Code tradicional



Fig. 2. Exemplo de CQR Code-5

disponibilização do cardápio durante período de pandemia a fim de evitar contato com cardápio físico e, assim, diminuir a probabilidade de contaminação do COVID-19.

## II. DETALHES MATEMÁTICOS E CONCEITOS ENVOLVIDOS

CQR Code-5 usa o algoritmo de Reed–Solomon com símbolos de 16 bits para correção de erros. Como são 1024 bits de informação e 3392 de redundância, temos os seguintes parâmetros:

- $m = 16$  bits/símbolo
- $n = 1024 + 3392 = 4416$  bits
- $k = 1024$  bits
- $t = (n-k)/2 = (4416-1024)/2 = 3392/2 = 1696$  bits
- porcentagem de correção =  $t/n = 1696/4416 = 38,41\%$

O polinômio primitivo usado na geração de bits de redundância é o seguinte:

$$p(D) = D^{16} + D^{12} + D^3 + 1$$

A capacidade do canal de informação de um canal discreto sem memória é dada pela expressão:

$$C = \max_{p(b)} [I(A; B)]$$

Em que  $I(A; B)$  é a informação mútua do conjunto de símbolos A e B transmitido e recebido, respectivamente e está mostrada na expressão a seguir:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(A) - \sum_{A,B} p(a,b) \log \frac{1}{p(a|b)}$$

Em que  $H(A)$  é a entropia de A e  $H(A|B)$  é a entropia de A|B.

Um software de decodificação que tenta decodificar um QR Code ou CQR Code-5 precisa encontrar o ponto central dos três Finder Patterns para, assim, estimar o valor de cada módulo. Como a quantidade de módulos é conhecida (a depender da versão do QR Code e 49x49 para o CQR Code-5) e seus possíveis valores de coordenada de pixel central foram estimados, uma tentativa de decodificação é feita. O resultado dela é uma string de bits. Se o Reed-Solomon conseguir decodificar essa string, diz-se que a decodificação foi bem sucedida. Caso contrário, a decodificação é considerada falha e uma nova tentativa é feita.

Neste cenário, a estimativa do processo de decodificação é feita módulo por módulo, onde cada módulo tem uma probabilidade de erro. O canal do módulo QR Code e sua matriz de transição estão mostrados na figura 3. Em que K é o evento de um módulo ser preto, W é o evento de um módulo ser branco,  $e_{kw}$  é a probabilidade de erro de um módulo preto ser decodificado como branco e  $e_{wk}$  é a probabilidade de erro de um módulo branco ser decodificado como preto.

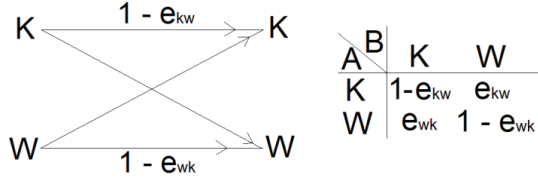


Fig. 3. Canal do módulo QR Code a esquerda e sua matriz de transição a direita

Como  $e_{kw}$  é diferente de  $e_{wk}$ , diz-se que o canal é assimétrico. Além disso, o canal também é binário sem eliminação pois o QR Code faz uma estimativa do módulo alvo como branco ou preto usando um algoritmo de limiar.

A expressão de  $I(A; B)$  obtida até agora pode ser expandida no seguinte:

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(A) - \sum_A p(A) \sum_{A,B} p(A|B) \log \frac{1}{p(A|B)} \\ &= H(A) - \sum_A p(A) H(A|B) \\ &= H(A) - [p(A = k)H(A|B = k) + p(A = w)H(A|B = w)] \\ &= H(A) - p(A = k) \left[ (1 - e_{kw}) \log \frac{1}{1 - e_{kw}} + e_{wk} \log \frac{1}{e_{wk}} \right] \\ &\quad - p(A = w) \left[ e_{wk} \log \frac{1}{e_{wk}} + (1 - e_{wk}) \log \frac{1}{1 - e_{wk}} \right] \end{aligned}$$

Como a capacidade do canal é o valor máximo da informação mútua, fica claro que a expressão acima terá seu valor máximo quando a probabilidade dos símbolos de entrada A (branco ou preto) forem equiprováveis (50% cada). Dessa forma, a entropia  $H(A)$  é 1 e a parte negativa da expressão é zero quando o erro de probabilidade dos módulos branco e preto é zero ou um. Dessa forma, a capacidade do canal QR Code por módulo é de 1 bit. Isso é para o caso do QR Code, que tem apenas duas cores (preto e branco). Para os casos de mais cores, a quantidade de bits por módulo (BpM - Bits per Module) se dá pela seguinte expressão:

$$BpM = \log_2(N_c)$$

Em que  $N_c$  é o número de cores usadas na região de codificação. Para o caso do CQR Code-5,  $N_c = 4$  e, portanto,  $BpM = \log_2(4) = 2$ .

A figura 4 mostra o canal do módulo CQR Code-5 e sua matriz de transição.

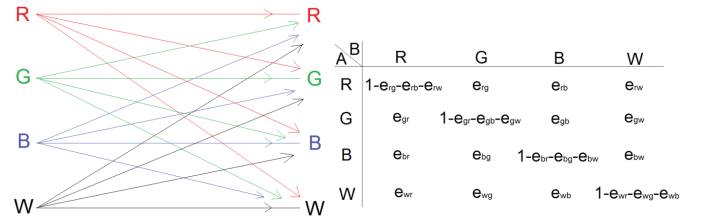


Fig. 4. Canal do módulo CQR Code-5 a esquerda e sua matriz de transição a direita

De maneira semelhante ao caso QR Code, pode-se calcular a informação mútua e, da mesma forma, a informação mútua será máxima quando os símbolos de entrada forem equiprováveis. Como se tem quatro símbolos (vermelho, verde, azul ou branco), a probabilidade resultante é de  $\frac{100}{4} = 25\%$ . Para esse caso:

$$H(A) = 4 \times 0,25 \log_2 \left( \frac{1}{0,25} \right) = 2$$

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(A) - p(A = r)H(A|B = r) \\ &\quad - p(A = g)H(A|B = g) - p(A = b)H(A|B = b) \\ &\quad - p(A = w)H(A|B = w) \end{aligned}$$

Essa análise de capacidade de canal pode ser aplicada em qualquer tipo de código de barras bidimensional considerando seu número de símbolos (número de cores usadas na região de codificação). Foi possível concluir que o valor máximo da informação mútua corresponde à capacidade do canal, que corresponde ao BpM.

## REFERENCES

- [1] Max E.Vizcarra Melgar, Luz M. Santander, Channel Capacity Analysis of 2D Barcodes: QR Code and CQR Code-5 Brasil, 2016. IEEE Xplore. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7516376>, acessado em 03/11/2021
- [2] Alguém tinha dúvida que aconteceria? Existem mais smartphones do que pessoas no mundo. Tudo Celular. Disponível em: <https://www.tudocelular.com/curiosidade/noticias/n127534/existem-smartphones-pessoas-mundo.html>, acessado em 03/11/2021

- [3] Max E. Vizcarra Melgar, Alexandre Zaghetto, Bruno Macchiavello, Anderson C. A. Nascimento, CQR CODES: COLORED QUICK-RESPONSE CODES Brasil, 2012. IEEE Xplore. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6336526>, acessado em 03/11/2021