Lycée Guy Mollet
Mathématiques
Révisions

Table des Matières

1 Calculs. **3**
- 1.1 Quantificateurs . . . 3
- 1.2 Avec des racines . . . 3
- 1.3 Puissances. . . . 4

2 Généralités sur les fonctions. **5**
- 2.1 Quelques rappels. . . . 5
- 2.2 Exercices . . . 7

3 Fonctions usuelles **8**
- 3.1 Premières fonctions de référence. . . . 8
- 3.2 Fonctions circulaires. . . . 11
- 3.3 Exercices . . . 13

4 Dérivation **14**
- 4.1 Dérivation en un point . . . 14
- 4.2 Dérivabilité sur un intervalle . . . 15
- 4.3 Tableau récapitulatif : Formules usuelles. . . . 15
- 4.4 Méthodes . . . 16
- 4.5 Exercices. . . . 17

5 Limites **18**
- 5.1 Définitions . . . 18
- 5.2 Opérations . . . 20
- 5.3 Méthodes . . . 21
- 5.4 Complément : Asymptote oblique. . . . 22
- 5.5 Exercices. . . . 23

6 Fonction exponentielle **25**
- 6.1 Définition-Propriétés . . . 25
- 6.2 Exercices . . . 26

7 Fonction logarithme **28**
- 7.1 Définition-Propriétés . . . 28
- 7.2 Exercices . . . 29

8 Primitives et intégrales **31**
- 8.1 Primitives usuelles . . . 31
- 8.2 Exercices . . . 32

9 Les inégalités dans les exercices. **33**
- 9.1 Cas d'utilisations. . . . 33
- 9.2 Méthode utilisant les propriétés de calcul sur les inégalités. . . . 33
- 9.3 Etudier un signe . . . 34

9.4 Par récurrence. 34
9.5 Exercices 35

10 Suites **37**
10.1 Suites de référence. 37
10.2 Méthodes 37
10.3 Exercices 38

11 Somme **40**
11.1 Formules et propriétés. 40
11.2 Exercices 41

12 Solutions des exercices. **43**

1 Calculs.

1.1 Quantificateurs

Les quantificateurs sont évoqués dans le programme de Terminale sans que les notations ne soient exigibles.

Nous pouvons préciser 2 quantifiacateurs très commodes :

Le quantificateur universel noté $\forall$; il signifie « pour tout » ou « quel que soit ».

Par exemple , $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ signifie "pour tout x réel , x^2 est positif ou nul".

Le quantificateur existentiel noté $\exists$; il signifie « il existe ».

Par exemple , $\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a$ signifie "pour tout a réel positif , il existe (au moins) un réel x tel que $x^2 = a$ (en effet le réel $\sqrt{a}$ convient, mais ce n'est pas le seul puisque $-\sqrt{a}$ convient aussi) .

1.2 Avec des racines

Propriété 1.1 :

pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

pour tout réel a positif et tout réel b strictement positif, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

pour tout réel a positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Méthode :

la « technique de l'expression conjuguée » :

consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par une expression conjuguée du dénominateur, afin de faire apparaitre une identité remarquable au dénominateur; une expression conjuguée de $a - b\sqrt{c}$ étant $a + b\sqrt{c}$ (on a juste changé le signe entre les 2 termes de la somme)

Exemple 1.1 :

$$\frac{2+3\sqrt{5}}{3-2\sqrt{5}} = \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)\times\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\left(3-2\sqrt{5}\right)\times\left(3+2\sqrt{5}\right)} = \frac{6+4\sqrt{5}+9\sqrt{5}+6\sqrt{5}\sqrt{5}}{3^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2} = \frac{36+13\sqrt{5}}{9-20} = -\frac{36+13\sqrt{5}}{11}$$

Exercice 1.1 :(solution ►)

1. Simplifier $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$
2. Soit a un réel et b un réel positif. Simplifier $\left(a+\sqrt{b}\right)^2 - \left(a-\sqrt{b}\right)^2$
3. Ecrire sans racine au dénominateur $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
4. Ecrire sans racine au dénominateur $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Exercice 1.2 :(solution ►)

1. Mettre au carré puis donner une espression simplifiée : $A = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$
2. Déterminer 2 entiers relatifs a et b tels que $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$

Exercice 1.3 :(solution ►)

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Simplifier $a_n, b_n, a_n b_n$

1.3 Puissances.

Propriété 1.2 :

Soient a et b des réels non nuls. Pour tous entiers relatifs n et p

- $a^n b^n = (ab)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $a^n a^p = a^{n+p}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $(-a)^n = (-1)^n a^n = \begin{cases} a^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -a^n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

on sera attentif aux parenthèses $(-2)^2 \neq -2^2$: $(-2)^2 = 4$ et $-2^2 = -4$

Exercice 1.4 :(solution ►)

Soient a et b des réels non nuls.

Simplifier $A = \dfrac{a^6 b^4}{(3ab)^3}$ $\quad B = \dfrac{(a^4+a^2)b^2}{a^2+1}$ $\quad C = \dfrac{a^3 b^{-2}}{a^2 b^3} \times a^{-4}$

Exercice 1.5 :(solution ►)

Mettre sous la forme $a \times b^p$ avec a et b des réels et p un entier naturel non nul.

1. $A = 3^4 + 9^2$
2. $B = 3^n \times 6^n$ où $n \in \mathbb{N}$
3. $C = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$
4. $D = (-1)^n - 2(-1)^{n+2}$ où $n \in \mathbb{N}$
5. $E = 2^{2n+2} + 4^n - 3 \times 2^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$
6. $F = (-1)^n - (-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+2}$ où $n \in \mathbb{N}$

2 Généralités sur les fonctions.

2.1 Quelques rappels.

Définition 2.1 :

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ revient à associer à chacun des réels x de $\mathscr{D}$ un unique réel y.
L'ensemble $\mathscr{D}$ est appelé ensemble de définition de la fonction f.
Le réel y est image du nombre x par la fonction f et on note alors $y = f(x)$.

Exemple 2.1 :

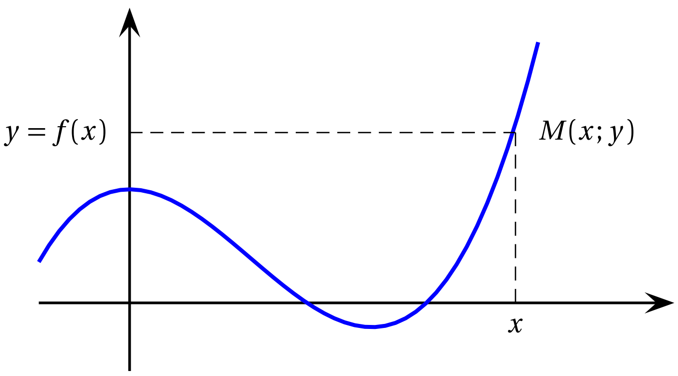
L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-1}$ est $D = [1;+\infty[$.
En effet, la fonction racine étant définie sur $[0;+\infty[$, on cherche pour quelles valeurs du réel x on a $x-1 \geqslant 0$ et pour tout réel $x \in [1;+\infty[$ on a $x-1 \geqslant 0$ (et pour tout réel $x \in]-\infty;1[$ on a $x-1 < 0$)

Exemple 2.2 :

L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est $D =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
En effet, la fonction inverse étant définie sur $\mathbb{R}^*$, on résout $x-1=0 \iff x=1$.

Courbe représentative d'une fonction :

La courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère est l'ensemble des points $M(x;f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \text{ si et seulement si } y = f(x)$$

Définition 2.2 :

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et a un réel appartenant à $\mathscr{D}$.
On appelle b l'image de a par la fonction f. On a donc $f(a) = b$.
On dit alors que a est un antécédent de b par la fonction f.

Exemple 2.3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 + x + 1$.
L'image de 2 est $f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$

L'image de -1 est $f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1-1+1=1$
Le réel 1 est un antécédent du nombre 0 par la fonction f car $f(0)=1$.

Définition 2.3 :

Deux fonctions f et g sont dites égales si :
- Elles sont le même ensemble de définition $\mathscr{D}$;
- $\forall x \in \mathscr{D}, \quad f(x)=g(x)$.

Exemple 2.4 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2-\dfrac{x}{x-7}$ et la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x-14}{x-7}$
L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}/\{7\}$ et l'ensemble de définition de la fonction g est $\mathscr{D}_g=\mathbb{R}/\{7\}$.
Ainsi $\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g$.
De plus, pour tout réel $x\in\mathbb{R}/\{7\}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2-\frac{x}{x-7} \\ &= \frac{2(x-7)-x}{x-7} \\ &= \frac{2x-14-x}{x-7} \\ &= \frac{x-14}{x-7} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont donc égales.

Définition 2.4 :

La fonction f est dite croissante sur l'intervalle I lorsque pour tous les réels x_1 et x_2 appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1)\leqslant f(x_2)$
La fonction f est dite décroissante sur l'intervalle I lorsque pour tous les réels x_1 et x_2 appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1)\geqslant f(x_2)$
La fonction f est dite monotone sur l'intervalle I si elle est croissante sur (tout) l'intervalle I ou si elle est décroissante sur (tout) l'intervalle I.

Exemple 2.5 :

x	1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

f est définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$
f est croissante sur l'intervalle $[1;3]$, décroissante sur $[3;+\infty[$ et admet un maximum égal à 4.

Propriété 2.1 :

1. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
2. Si f est croissante (resp. décroissante) sur I
   et g est croissante (resp. décroissante) sur $f(I)$
   alors $g\circ f$ est croissante sur I.

3. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
   De même, si f est décroissante sur I et g est croissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I

Propriété 2.2 : *Monotonie et antécédents*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) < f(x_2)$.

- Si f est croissante sur I alors $x_1 < x_2$.
- Si f est décroissante sur I alors $x_1 > x_2$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- Si f est strictement croissante sur I alors $x_1 \leq x_2$.
- Si f est strictement décroissante sur I alors $x_1 \geq x_2$.

Définition 2.5 :

Dire que f est paire signifie que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Dire que f est impaire signifie que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Exemple 2.6 :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire car d'une part $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et d'autre part, on a
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$
2. Par contre la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ donc $-2 \in \mathcal{D}_f$ mais $2 \notin \mathcal{D}_f$.

2.2 Exercices

Exercice 2.1 :(solution ►)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 2$

f et g sont-elles égales ?

Exercice 2.2 :(solution ►)

u est une fonction dont le tableau de variation est donné ci dessous :

x	0		5		9
$u'(x)$		−	−	−	
$u(x)$	9	↘	0	↘	−1

f et g sont les fonction définie par : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ et $g(x) = [u(x)]^2$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. f est définie sur $[0\ ;\ 9]$
2. f est décroissante sur $[0\ ;\ 5]$
3. $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \sqrt{5}]$
4. g est définie sur $[0\ ;\ 9]$
5. g est décroissante sur $[0\ ;\ 9]$

3 Fonctions usuelles

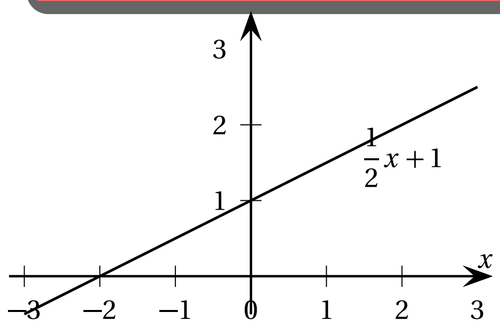
3.1 Premières fonctions de référence.

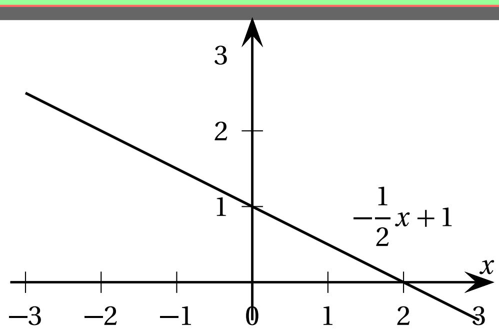
1. **Fonction affine.**

Définition 3.1 :

Soient a et b 2 réels.
On considère la fonction affine f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Propriété 3.1 :
Soit f une fonction affine de coefficient directeur a.
Si $a \geqslant 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Si $a = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$
Si $a \leqslant 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
Sa courbe représentative est la droite d'équation $y = ax + b$.



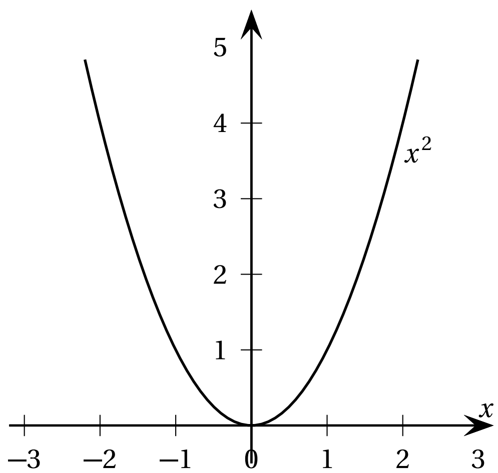


2. **Fonction carré.**

Définition 3.2 :

La fonction carrée est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$

Propriété 3.2 :
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
La fonction carré est paire.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Fonction cube.**

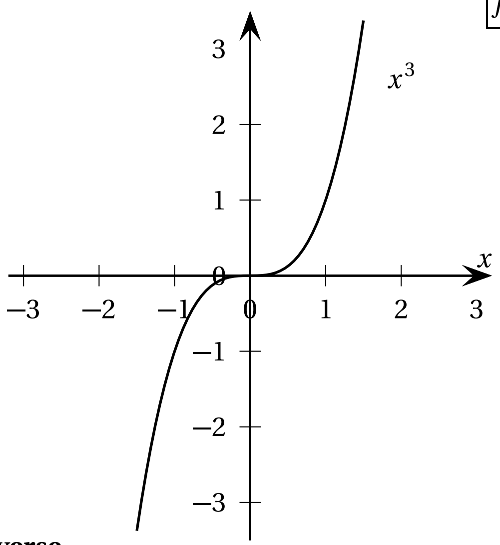
Définition 3.3 :

La fonction cube est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$

Propriété 3.3 :

- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube est impaire.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



4. **inverse**

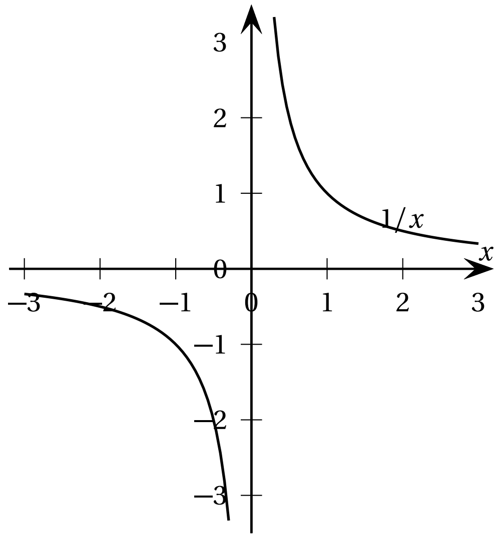
Définition 3.4 :

La fonction inverse est définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriété 3.4 :

- La fonction inverse f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- La fonction inverse est impaire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0



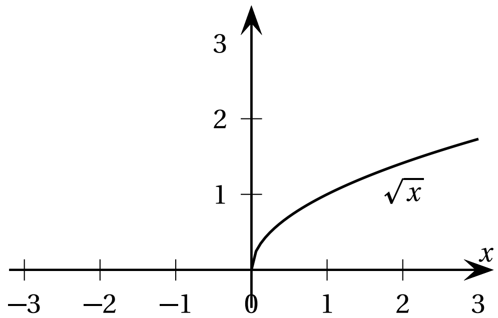
5. **Fonction racine carré**

Définition 3.5 :

La fonction racine carrée est définie par $\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \sqrt{x}$

Propriété 3.5 :
La fonction racine carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$



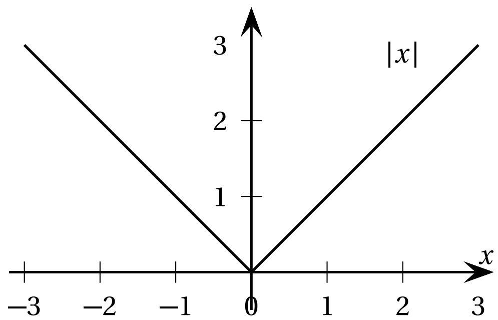
6. **Fonction valeur absolue :**

Définition 3.6 :

Pour tout réel x la valeur absolue notée $|x|$ est définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Propriété 3.6 :
La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
La fonction valeur absolue est paire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

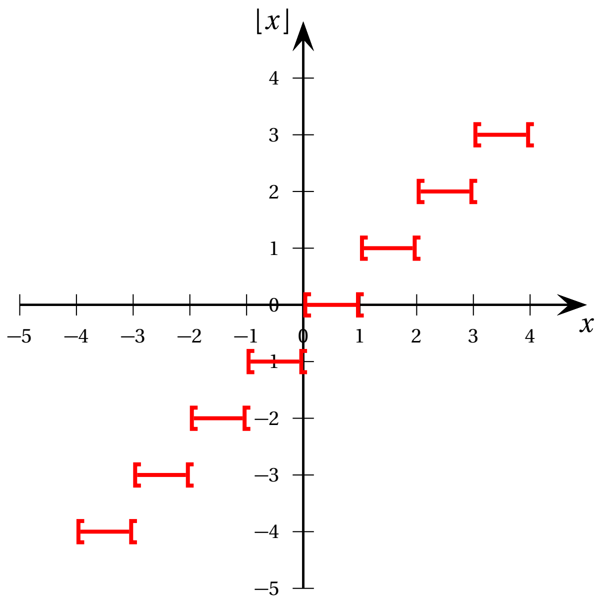


7. **Fonction partie entière :**

   Une nouvelle fonction :

   Pour tout réel x la partie entière notée $\lfloor x \rfloor$ est définie par : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

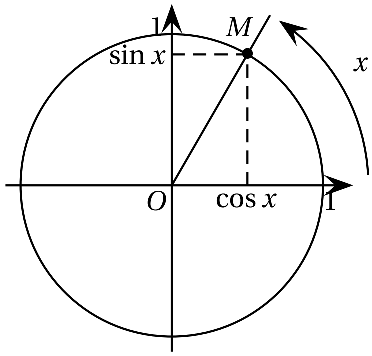
   Ainsi $\lfloor 5.151 \rfloor = 5$ par exemple



3.2 Fonctions circulaires.

1. **Cosinus et sinus d'un angle.**

> **Définition 3.7 :**
>
> Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
> Le cosinus, noté $\cos x$, de x est l'abscisse de M ; son sinus, noté $\sin x$, est son ordonnée.



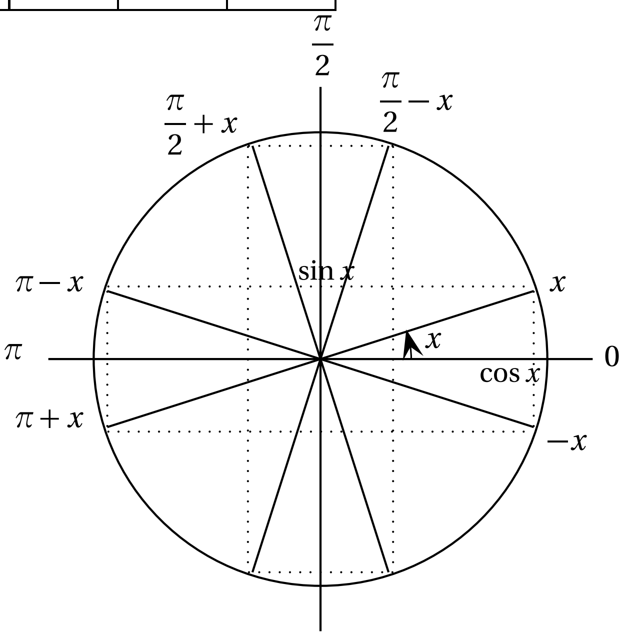
Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Propriété 3.7 :

Pour tout réel x :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



2. **Réduction de l'intervalle d'étude.**

   Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire. On peut donc réduire l'étude à $[0;\pi]$.

   De plus $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$: la courbe de la fonction cos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2};0)$ et celle de la fonction sin à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

   On peut donc finalement réduire l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$.

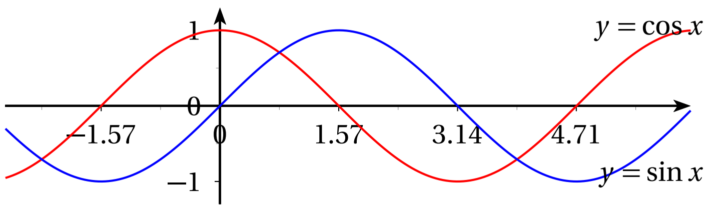
3. **Sens de variation**

   La fonction sin est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

   La fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

4. **Courbes représentatives.**

   Les études sur $[0,\pi/2]$ sont faites. Le sinus est impair ; on trace sur $[-\pi/2,\pi/2]$. La droite $x = \pi/2$ est axe de symétrie ; on trace sur $[\pi/2, 3\pi/2]$. On termine par 2π-périodicité. La relation $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(\pi/2 + t) = \cos(t)$ montre que la courbe de sinus est image de celle de cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.



5. **Equations trigonométriques**

Propriété 3.8 :

L'égalité $\cos x = \cos \alpha$ équivaut à $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

L'égalité $\sin x = \sin \alpha$ équivaut à $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3.1 :

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3} &\iff x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ &\iff x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k2\pi=\frac{\pi}{12}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k2\pi=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.3 Exercices

Exercice 3.1 :(solution ►)
Etudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sans utiliser les dérivées.

Exercice 3.2 :(solution ►)
Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+1|$

Exercice 3.3 :(solution ►)

1. Soit $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos x = -\dfrac{1}{3}$. Déterminer $\sin x$.
2. Soit $y \in [\pi;2\pi]$ tel que $\cos y = -\dfrac{1}{3}$. Déterminer $\sin y$.

Exercice 3.4 :(solution ►)
Calculer sans utiliser la calculatrice $a = \sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{4\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5} + \sin\dfrac{8\pi}{5}$

Exercice 3.5 :(solution ►)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 3x + 1 = 0$
2. $2\cos^2(x) - 3\cos x + 1 = 0$

4 Dérivation

4.1 Dérivation en un point

Définition 4.1 :

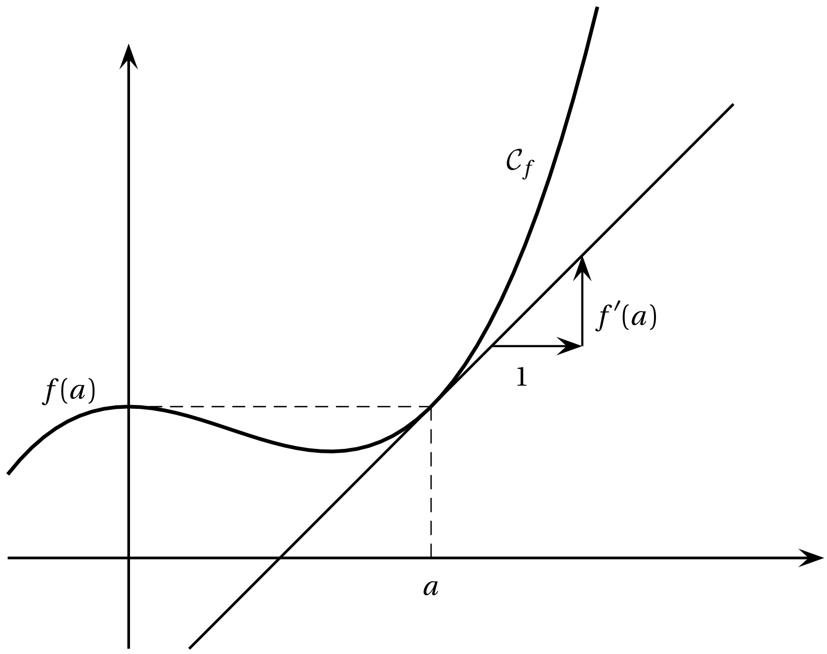
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de l'intervalle I.
f est dérivable en a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. C'est le *nombre dérivé* de f en a ; il est noté $f'(a)$.
Autre version :
On considère un réel a de I et un réel h non nul tel que $a+h$ appartienne également à I.
On appelle taux d'accroissement, ou taux de variation, en a de la fonction f le nombre

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0 on dit alors que la fonction f est dérivable en $\boldsymbol{a}$. Dans ce cas, la limite du taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 est appelé le nombre dérivé de f en a.

Propriété 4.1 :
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$



Complément :

La fonction f est dérivable à *droite* en a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers $a$par valeurs supérieures; cette limite est alors dite dérivée à droite de f en a et se note $f'_d(a)$.

La fonction f est dérivable à *gauche* en a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs inférieures; cette limite est alors dite dérivée à gauche de f en a et se note $f'_g(a)$.

Théoreme 4.1 :

Soit f définie sur I. Soit $a \in I$ tel que a ne soit pas borne de I.
Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$

4.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 4.2 :

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

Théoreme 4.2 :

Soit f une fonction à valeurs réelles dérivable sur I ; alors
f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur I
f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée est négative sur I
f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur de I

Définition 4.3 :

Une fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

Si f est convexe sur I, alors sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes et en-dessous de ses sécantes sur I, et réciproquement.

Complément : on dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée est continue sur I.

Propriété 4.2 :

- Si f est de classe C^1 sur I, f est convexe si et seulement si f' est croissante.
- Si f est de classe C^1 sur I, f est convexe si et seulement si la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
- Une fonction f de classe C^2 sur I est convexe si et seulement si $f'' > 0$ sur I.

4.3 Tableau récapitulatif : Formules usuelles.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, $k\in\mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
u^n $(n\in\mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x)\times u'(v(x))$

Exemple 4.1 :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(4\sqrt{x}+1)^3-2\sin x$
La fonction racine étant dérivable sur $]0;+\infty[$ et la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ alors par composée et somme , f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

Étape du calcul de la dérivé	Formule utilisée .
$f'(x)=\left((4\sqrt{x}+1)^3\right)'-2\cos x$	$(u+v)'=u'+v'$ et $(\sin x)'=\cos x$
$f'(x)=3\times(4\sqrt{x}+1)^2\times\dfrac{4}{2\sqrt{x}}-2\cos x$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$ et $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x}}\times(4\sqrt{x}+1)^2-2\cos x$	

4.4 Méthodes

1. *Pour déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée :*
   - ↪ Il s'agit de trouver la décomposition de votre fonction permettant l'utilisation d'une des formules ci-dessous.
   - ↪ Pensez enfin que si la forme obtenue après dérivation est factorisée, ne surtout pas la développer avant d'être sûr que ce soit nécessaire. En effet l'un des buts étant d'étudier le signe de la dérivée, la forme factorisée est la plus utile.

2. *Etudier le sens de variation d'une fonction*
   - ↪ Calculer la dérivée, étudier son signe en réduisant au même dénominateur et factorisant au maximum en repérant ensuite les termes de signe constant et on écrit par exemple :« $x^2>0$ sur l'intervalle I donc $f'(x)$ est du signe de ... »
   - ↪ On peut aussi faire apparaitre dans la dérivée une fonction qu'on a déjà étudié dans une question précédente et pour laquelle on connait le signe.

3. *Déterminer le signe d'une fonction*
   - ↪ Par calcul : on factorise et on étudie le signe de chacun des facteurs qu'on consigne dans un tableau de signes.
   - ↪ Par utilisation du tableau de variation de cette fonction dans laquelle peut figurer un maximum ou un minimum qui permet de conclure par lecture des variations.
   - ↪ Par utilisation du tableau de variation il peut aussi ne pas y avoir d'extremum mais une valeur d'un réel x telle que $f(x)=0$ et qui partage donc l'intervalle d'étude en deux parties ; l'une sur laquelle $f(x)$ sera négatif et l'autre sur laquelle $f(x)$ sera positif.

4. *Tangente*

$\hookrightarrow$ On applique l'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\hookrightarrow$ Il se peut qu'on ne demande que le coefficient directeur de la tangente auquel cas on n'écrira que : $f'(a)$.

$\hookrightarrow$ On demande aussi souvent de déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente : on étudie le signe de $f(x) - y$ comme dans la méthode vue pour les asymptotes obliques.

5. *Etudier la dérivabilité d'une fonction*

2 cas de figure :

$\hookrightarrow$ Pour montrer que f est dérivable en a il faut montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ (l'une des deux limites suffisant parfois selon la définition de f) et ℓ est alors le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a.
Si la limite n'existe pas f n'est pas dérivable en a.
Si la limite est infinie f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

$\hookrightarrow$ Pour montrer que f est dérivable sur un intervalle I on utilise la décomposition de f à l'aide de fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions dérivables.

6. *Montrer qu'une fonction est convexe*

$\hookrightarrow$ Si f est de classe C^2 sur I et $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur I

$\hookrightarrow$ Si f est de classe C^2 sur I et $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur I

4.5 Exercices.

Exercice 4.1 :(solution ►)

Dans chacun des cas, calculer $f'(x)$ en précisant l'ensemble de définition de f et son ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = 2x^3$
2. $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$
3. $f(x) = 4x^3 - \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$
4. $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$
6. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$
7. $f(x) = -x + 2 + \dfrac{2}{3x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x+x^2}$
9. $f(x) = (2x+1)^2$
10. $f(x) = \sqrt{x}(5x-3)$
11. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.
12. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$.
13. $f(x) = \dfrac{x^3}{x+3}$.
14. $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
15. $f(x) = \sqrt{x^2+7x-3}$.
16. $f(x) = (5x-1)^3$.
17. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
18. $f(x) = 3\cos(x)$
19. $f(x) = \cos^3(x)$
20. $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$
21. $f(x) = \sin(2x+1)$
22. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)$

Exercice 4.2 :(solution ►)

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 4.3 :(solution ►)

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

5 Limites

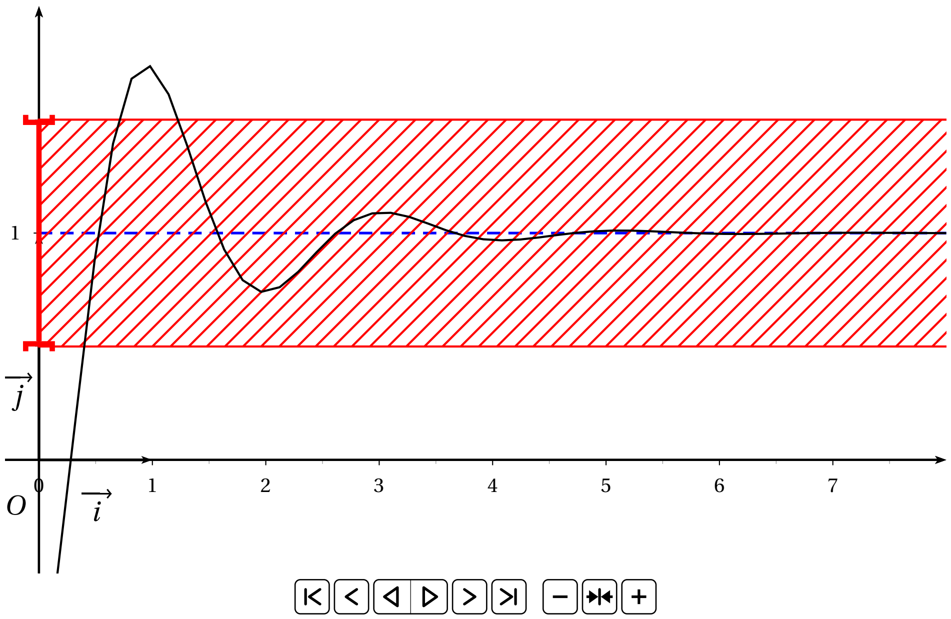
5.1 Définitions

1. **Limite finie**

Définition 5.1 :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que , pour tout réel A positif,tout intervalle $]\ell - A; \ell + A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.



Définition 5.2 :

limites particulières à connaître
Soit a un réel quelconque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-a} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$$

2. **Limite infinie**

Définition 5.3 :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que , pour tout réel A positif,tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Définition 5.4 :

limites particulières à connaître

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Définition 5.5 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ signifie que , pour tout réel A positif,tout intervalle $]-\infty;-A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Remarque : il faut savoir adapter les définitions précédentes si x tend vers $-\infty$ et connaître :

Propriété 5.1 :
limites particulières à connaître

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ si n pair et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ si n impair

Exemple 5.1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{x-2}$

• <u>Limite en $+\infty$</u> :

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(x-2)=+\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

• <u>Limite en 2^+ et en 2^-</u> :

$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x>2}}(x-2)=0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x>2}}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x<2}}(x-2)=0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation $x=2$.

Théoreme 5.1 :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ et pour x suffisamment grand $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

Exemple 5.2 :

Soit $f(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x^2}+1$ pour $x\in\mathbb{R}^*$. déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On a vu que $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$ donc en traitant les 2 inégalités séparément : **ASTUCE PRATIQUE**

$\lfloor x\rfloor\leq x$ qu'on laisse telle quelle
et $x<\lfloor x\rfloor+1$ qui donne $x-1\leq\lfloor x\rfloor$
on regroupe ces 2 inégalités en une seule : $x-1\leq\lfloor x\rfloor\leq x$

ainsi pour tout $x>0$, $\dfrac{x-1}{x^2}+1 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{x^2}+1$ d'où $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}+1$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+1=1$

alors d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

3. **Limite en un réel**

Soit a un réel borne du domaine de définition d'une fonction f

Propriété 5.2 :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ signifie que , pour tout réel A positif,tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Propriété 5.3 :

limites particulières à connaître

$\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$

5.2 Opérations

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI

$\lim\limits_a f$	ℓ	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_a (f\times g)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	FI

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell\neq 0$
$\lim\limits_a g$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'\neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	FI	FI	$+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_a f$	$\ell>0$	$+\infty$
$\lim\limits_a \sqrt{f}$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

Composition et limites :

Propriété 5.4 :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to a} \left(g\circ f\right)(x)=\ell'$

Exemple 5.3 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout x réel strictement positif, on définit les fonctions f et g par $g(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}$ et $f(x)=\sin x$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x)=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f o g(x)=1$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}\right)=1$

5.3 Méthodes

Méthode :

Connaître les FI « $\dfrac{0}{0}$ »,« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »,« $+\infty-\infty$ »,« $0\times\infty$ » (on en verra d'autres)

et les lever grace à une factorisation en vue de faire apparaitre des formules usuelles(croissances comparées et autres), ou une réduction au même dénominateur par exemple.

Premières méthodes pour lever les indéterminations

1. *Factoriser par les quantités prédominantes*

Exemple 5.4 :

déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1}$

On obtient a priori la forme indéterminée : $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

MAIS si on factorise au numérateur et au dénominateur par x et que l'on simplifie, on obtient :

$\dfrac{3x-2}{5x+1}=\dfrac{x\times\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\times\left(5+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{3-\frac{2}{x}}{5+\frac{1}{x}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{2}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{1}{x}5$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1}=\dfrac{3}{5}$

Exemple 5.5 :

déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+7$

On obtient a priori la forme indéterminée : "$+\infty$"-"$+\infty$"

MAIS si on factorise par x^2, on obtient $x^2-5x+7=x^2\times\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}=1$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+7=+\infty$

Exemple 5.6 :

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$

Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

On a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » alors on factorise pour éliminer le problème dû au terme prépondérant x

$f(x)=\dfrac{x\left(x+2+\frac{3}{x}\right)}{x(1+\frac{2}{x})}=\dfrac{x+2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} x+2+\frac{3}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}=1$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. *Utiliser les quantités conjuguées*

Exemple 5.7 :

déterminer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

On obtient a priori la forme indéterminée : « $+\infty-\infty$ »

MAIS si on utilise la forme conjuguée de $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ qui est $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$, on peut écrire :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

et comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$ on peut alors conclure que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$

3. *Utiliser des factorisations*

Lorsque la limite à étudier est en un point a et que la forme indéterminée est $\frac{"0"}{"0"}$, on peut tenter de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ puis de simplifier l'expression obtenue.

Exemple 5.8 :

déterminer $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+1}$

On obtient a priori la forme indéterminée : $\frac{"0"}{"0"}$

MAIS si on factorise grâce à l'identité remarquable, on obtient : $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$

On peut alors conclure que $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$

5.4 Complément : Asymptote oblique.

Définition 5.6 :

Asymptote oblique :
Si on peut mettre $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+h(x)$ avec
$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ ou(et) $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$
alors la droite $\mathscr{D}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou(et) en $-\infty$

Exemple 5.9 :

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+2}$

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
2. Déterminer 3 réels a, b, c tels que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$
3. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation et déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{x\left(x+2+\frac{3}{x}\right)}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{x+2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2+\dfrac{3}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. Pour tout $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{x(x+2)+3}{x+2} = \dfrac{x(x+2)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2} = x + \dfrac{3}{x+2}$

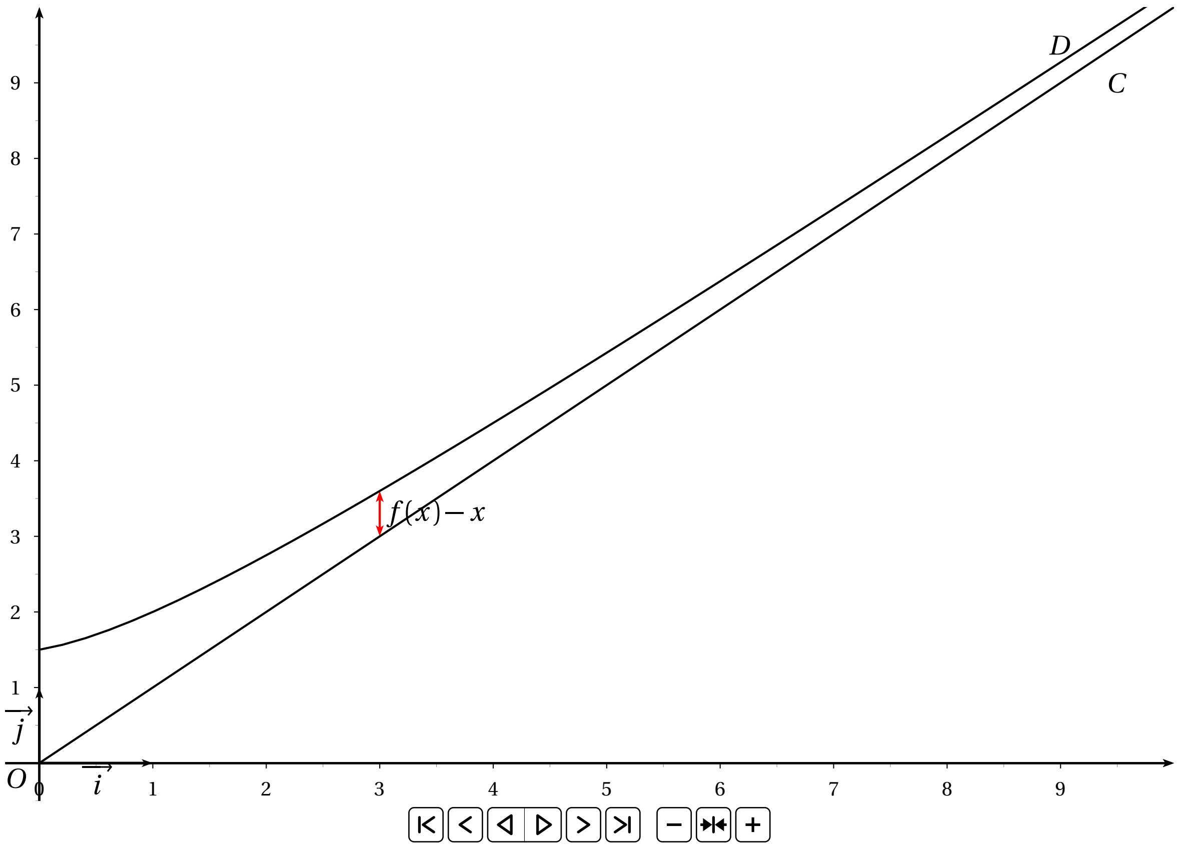
   ainsi $a = 1$ et $b = 0$

3. On peut mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = x + h(x)$ avec $h(x) = \dfrac{3}{x+2}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

   alors la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$

   De plus , pour tout réel $x \in]-2;+\infty[$, $x+2 > 0$ alors $h(x) > 0$ donc la courbe est au-dessus de son asymptote.

   La figure ci-dessous illustre ceci avec le tracé de la courbe, son asymptote et l'écart entre les deux qui s'amenuise au fur et à mesure que x s'accroit.



5.5 Exercices.

Exercice 5.1 :(solution ►)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement .
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et la courbe représentative de f .

Exercice 5.2 :(solution ►)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x^2+5}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x(-x-1)}{(x^2+2)(x+3)}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+2)(x-5)}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+5x-1}{4x^2+x+1}$
5. $\lim_{x\to1} \dfrac{-2x^2-x+3}{x-1}$
6. $\lim_{x\to-4} \dfrac{x^2+4x}{-x^2-2x+8}$
7. $\lim_{x\to2^+} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$
8. $\lim_{x\to9^-} \dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-81}$

Exercice 5.3 :(solution ►)
Soit $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$. Déterminer la limite en $+\infty$

6 Fonction exponentielle

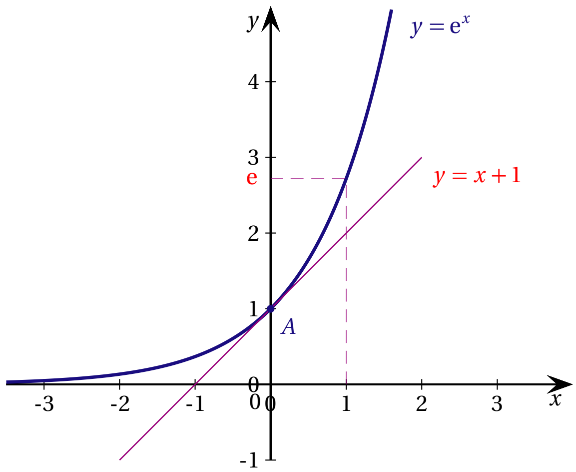
6.1 Définition-Propriétés

Définition 6.1 :

Il existe une unique fonction dérivable $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. On la note exp .

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $\mathrm{e}\approx 2,71828$.
La fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x\longmapsto \mathrm{e}^x$$



Propriété 6.1 :

— La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x,

$$\exp'(x)=\mathrm{e}^x$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

— $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{a+b}=e^a e^b$

— $\forall b\in\mathbb{R},\quad e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$ d'où $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$

— $\forall a\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z},\quad (e^a)^n=e^{na}$

— Pour tout réel $x\leqslant 0,\quad 0<\mathrm{e}^x\leqslant 1$ et pour tout réel $x\geqslant 0,\quad \mathrm{e}^x\geqslant 1$

— Pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^y \iff x=y$ et $\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^y \iff x<y$

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x\geq 1+x$

— La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ où $n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ où $n\in\mathbb{N}$

Exemple 6.1 :

Utiliser les croissances comparées :
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)e^{-x}$
On obtient a priori la forme indéterminée :"$+\infty$" $\times$ "0"

MAIS si on développe, on obtient $(2x+3)e^{-x} = 2xe^{-x} + 3e^{-x} = \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{3}{e^x}$

or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)e^{-x} = 0$

Exemple 6.2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{1-3x} < \mathrm{e}^{2x-3}$

   $\mathrm{e}^{1-3x} < \mathrm{e}^{2x+3} \iff 1-3x < 2x+3$ car la fonction exponentielle est une bijection croissante sur $\mathbb{R} \iff -5x <$

   D'où l'ensemble solution $S = \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 1$

   $\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant \mathrm{e}^0$ car la fonction exponentielle est une bijection croissante sur $\mathbb{R} \iff x^2-1 \geqslant 0$

   D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

Exemple 6.3 :

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Limites :

• en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ alors on a une forme indéterminée ; on écrit $f(x) = e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)$ et par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{x}{e^x} = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Variations :

La fonction f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

On a donc : $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$.

On a également $f'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$.

Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Théoreme 6.1 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = \mathrm{e}^u \times u'$$

6.2 Exercices

Exercice 6.1 :(solution ►)

Factoriser et dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

1. $f(x)=\mathrm{e}^x-3x\mathrm{e}^x$
2. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-\mathrm{e}^x$
3. $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+3}$
4. $f(x)=-2x\mathrm{e}^x+\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\mathrm{e}^x$

Exercice 6.2 :(solution ►)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x^2+2x+1}=1$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^2-1}$
3. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\geqslant\mathrm{e}$
4. $\mathrm{e}^{2x}\leqslant\mathrm{e}^x$
5. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2}<1$

Exercice 6.3 :(solution ►)

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{x}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^x$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2+3}$

Exercice 6.4 :(solution ►)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Etudier le sens de variations de f.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x)=f(x)$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f.

Exercice 6.5 :(solution ►)

En utilisant la définition de la limite, montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x>x_0$, $e^x\leqslant\dfrac{1}{x^3}$

Exercice 6.6 :(solution ►)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)=(2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$.
4. Établir le tableau de variations de f.

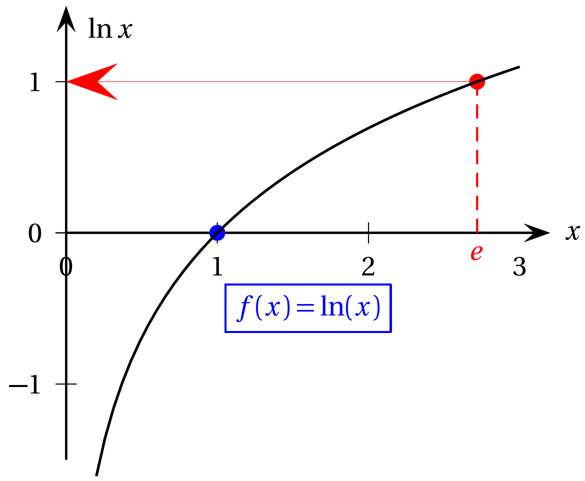
7 Fonction logarithme

7.1 Définition-Propriétés

Définition 7.1 :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = \mathrm{e}^y$$



Propriété 7.1 :

— On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
— $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
— $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
— Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
— Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
— Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.
— Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $\quad y = \ln x \iff \mathrm{e}^y = x$.
— $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
— $\forall b \in]0,+\infty[, \quad \ln(1/b) = -\ln(b)$ d'où $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, \quad \ln\dfrac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$
— $\forall a \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$ ⚠ $(\ln a)^n$: pas de propriété.
— La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
— La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
— Pour tout réel x strictement positif :
  — $\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$
  — $\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$
  — $\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$
— $\forall a \in]0,+\infty[, \forall b \in]0,+\infty[, \ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$
— $\forall a \in]0,+\infty[, \forall b \in]0,+\infty[, \ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$
— $\forall x > 0, \quad \ln(x) \le x - 1$
— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Exemple 7.1 :

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-2x$.

<u>Limites</u> :

• en 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -2x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x = -\infty$ alors on a une forme indéterminée ; on écrit $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right)$ et par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} - 2 = -2$ et comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ alors par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

<u>Variations</u> :

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$.

On a donc : $f'(x) = 0 \iff 1-2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

On a également $f'(x) > 0 \iff 1-2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$.

Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 2 - 1$	$\searrow$	$-\infty$

7.2 Exercices

Exercice 7.1 :(solution ▸)

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x > 1$, $\ln\left(x^2 + x - 2\right) = \ln(x+2) + \ln(x-1)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 7.2 :(solution ▸)

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f sans se préoccuper de l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = x\ln x - x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$
4. $f(x) = \ln(\cos x)$
5. $f(x) = \sqrt{\ln x}$
6. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 7.3 :(solution ▸)

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Expliciter le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
4. Donner le sens de variations de f sur son domaine de définition.

5. Montrer que f est une bijection de $]e,+\infty[$ sur $]e,+\infty[$.

Exercice 7.4 :(solution ►)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\ln(x)-e^x$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+x+1}{x^2+x+1}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
5. Un exemple difficile faisait intervenir des astuces :
   Calculer la limite quand x tend vers 0 de $f(x)=\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin x}$

Exercice 7.5 :(solution ►)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

8 Primitives et intégrales

8.1 Primitives usuelles

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle I**
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ si $n < 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$ (et $a \neq 0$)
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

— si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on a alors :

Fonction f	**Primitive** F	**Remarques**
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0$, alors pour tout x tel que $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$x \longmapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	U primitive de u sur I

8.2 Exercices

Exercice 8.1 :(solution ►)

Calculer les intégrales à l'aide des primitives usuelles :

1. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2}{1+t}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x+4}{x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$
6. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x e^{x^2}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{4t^2-1}\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$

9 Les inégalités dans les exercices.

9.1 Cas d'utilisations.

On est dans ce type de situation lorsque la question se présente sous la forme :

- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I on a $a \leq f(x) \leq b$
  ou seulement l'une des 2 inégalités.
- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq g(x)$ ou de façon plus générale "expression avec x "$\leq$ "autre expression avec x"
- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq a$ où a est une constante donnée
- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$
- Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
- Etudier le sens de variation de la fonction f (recherche alors du signe de la dérivée nécessitant parfois la résolution de l'inéquation $f'(x) \geq 0$)
- Montrer que pour tout entier naturel n , $\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx \leq$ "expression dépendant de n"
  etc....

Dans tous les cas, il est important de bien comprendre qu'on est doit **prouver** un résultat et non faire un calcul.

Cependant on peut aussi partir de l'un des côtés de l'inégalités et prouver ainsi $A \leq .....etc... \leq B$ ou $B \geq ..... \geq A$

Enfin si on veut vraiment faire un calcul , on peut calculer $A - B$ dans un premier temps, le simplifier , puis chercher son signe.

9.2 Méthode utilisant les propriétés de calcul sur les inégalités.

Méthodologie générale :

On part de l'encadrement de x, et on essaie d'obtenir l'encadrement désiré avec les règles usuelles. Attention on ne peut pas diviser des inégalités, il faut inverser puis multiplier, et il faut que tous les termes soient positifs.

Cette méthode est efficace quand la variable n'apparait qu'une seule fois, sinon, il faut être prudent.

Les propriétés utiles.

- $a \leq b \iff a + x \leq b + x$
- $a \leq b \iff a - x \leq b - x$
- si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
- si $a \leq b$ et $c \leq d$ et ces 4 réels sont strictements positifs alors $ac \leq bd$
- si $a \leq b$ **et** $x > 0$ alors $ax \leq bx$
- si $a \leq b$ **et** $x < 0$ alors $ax \geq bx$
- si $a \leq b$ et a et b sont strictement positifs alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ car la fonction inverse est une bijection décroissante sur $]0;+\infty[$
  si $a \leq b$ et a et b sont strictement négatifs alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ car la fonction inverse est une bijection décroissante sur $]\infty;0[$
  mais s'ils sont de signes contraires on ne peut pas conclure directement
- si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$ (cas particulier très utile)
- si $a \leq b$ et a et b sont positifs alors $a^2 \leq b^2$ (et de façon générale $a^n \leq b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$) car la fonction carré (la fonction puissance en général) est une bijection croissante sur $[0;+\infty[$
  si $a \leq b$ et a et b sont négatifs alors $a^2 \geq b^2$ car la fonction carré est une bijection décroissante sur $]-\infty;0[$
  mais s'ils sont de signes contraires on ne peut pas conclure directement.

- si $a \leq b$ et a et b sont positifs alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ car la fonction racine est une bijection croissante sur $[0;+\infty[$
- si $a \leq b$ et a et b sont positifs alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ car la fonction racine est une bijection croissante sur $[0;+\infty[$
- si $a \leq b$ et a et b sont strictement positifs alors $\ln(a) \leq \ln(b)$ car la fonction logarithme est une bijection croissante sur $]0;+\infty[$
- si $a \leq b$ alors $e^a \leq e^b$ car la fonction exponentielle est une bijection croissante sur $\mathbb{R}$
- Et en général si on compose par une fonction f dont on connait le sens de variation :
  - si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ car la fonction f est une bijection croissante sur un intervalle I contenant $[a,b]$

  ou

  - si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$ car la fonction f est une bijection décroissante sur un intervalle I contenant $[a,b]$

— **Transitivité** : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

Exemple 9.1 :

Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$ où f est la fontion définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$

$\forall x \in [0;1], 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$ car la fonction carré est une bijection croissante sur $[0;+\infty[$
$\Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2$
$\Rightarrow \ln 1 \leq \ln(x^2+1) \leq \ln 2$ car la fonction logarithme est une bijection croissante sur $]0;+\infty[$
$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \ln 2 \leq 1$ par transitivité car $\ln 2 \leq 1$

Conclusion : $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$

9.3 Etudier un signe

Méthodologie générale :

Pour montrer une inégalité, on fait la différence entre les termes et on montre que cette différence est positive (ou négative). Pour cela :

- On utilise des "évidences" par exemple :
  - pour tout x réel , $x^2 \geq 0$
  - pour tout x réel , $e^x > 0$
  - pour tout $x \geq 1, \ln x \geq 0$ et pour tout $x \in]0;1], \ln x \leq 0$
  - pour tout $x \geq 0, \sqrt{x} \geq 0$
  - pour tout $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ (et donc $-\frac{1}{x} < 0$)
- on factorise et on étudie le signe de chacun des facteurs qu'on consigne dans un tableau de signes.
- Pour prouver un encadrement ou une inégalité dépendant d'un réel x appartenant à un intervalle I **on pose** une fonction h, on étudie les variations de h sur l' intervalle I en question , et on en déduit la valeur du minimum et du maximum.

  Remarque importante : parfois deux inégalités successives sont demandées et dans la 2eme il suffit de remplacer x par une expression dans l'inégalité précédente.

9.4 Par récurrence.

Ce n'est pas parce qu'on demande de prouver une inégalité sur des entiers qu'on fait forcément une récurrence ! Mais si on dispose d'une relation exploitable c'est une méthode à utiliser.

Exemple 9.2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Etudier le sens de variation de f.
2. Montrer que $1\leq u_n\leq\sqrt{e}$

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$
   $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
   $\forall x\in]0;+\infty[, x^3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$
   $1-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow 1\geq 2\ln x\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\geq\ln x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}\geq x$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}+1$	$\searrow$	1

2. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n)$:
   pour n entier naturel supérieur ou égal à 0 :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_0=\sqrt{e}$ donc $1\leq u_0\leq\sqrt{e}$
   - on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire que $1\leq u_{n+1}\leq\sqrt{e}$
     or $1\leq u_n\leq\sqrt{e}$ par hypothèse de récurrence ; et f est croissante sur $]0;\sqrt{e}[$ d'après l'étude précédente
     alors $f(1)\leq f(u_n)\leq f(\sqrt{e})$ d'où $1\leq u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2e}+1$
     et $\dfrac{1}{2e}+1\leq\sqrt{e}\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{4e^2}\leq e$ qui est vrai car
     $e>2\Rightarrow\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4e^2}<\dfrac{1}{16}$ donne $1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{4e^2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{25}{16}<2<e$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq\sqrt{e}$

9.5 Exercices

Exercice 9.1 :(solution ►)

1. Montrer que pour tout réel $x>0, \ln(x)\leq x-1$.
2. Montrer que pour tout réel x , $e^x\geq x+1$ et $e^x>x$ et $-xe^{-x}>-1$
3. Montrer que pour tout réel $t>-1, \ln(1+t)\leq t$ et pour tout réel x , $\ln(1+xe^{-x})\leq -xe^{-x}$

Exercice 9.2 :(solution ►)
Établir, pour tout $t\in[0,+\infty[$: $2e^t-t-t^2>0$

Exercice 9.3 :(solution ►)
Établir, pour tout $t\in[0,+\infty[$ $1+t\geq\sqrt{1+t^2}$

Exercice 9.4 :(solution ►)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$
3. Etudier le sens de variation la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10 Suites

10.1 Suites de référence.

1. Suites arithmétiques :

   On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'il existe un réel r (la raison) tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + r$
   Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r \qquad \text{et } \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

2. Suites géométriques :

   On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** lorsqu'il existe un réel q (la raison) tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = q.u_n$
   Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\, u_n = u_0.q^n = u_p.q^{n-p} \qquad \text{et } \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 \text{ si } q = 1 \\ u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$$

10.2 Méthodes

- Etudier le sens de variation d'une suite
  - ↪ étudier le signe de la différence : s'il est positif, la suite est croissante, s'il est négatif, elle est décroissante.
  - ↪ si la suite est à termes strictement positifs, on peut comparer le rapport à 1 : s'il est supérieur, la suite est croissante, s'il est inférieur, elle est décroissante.
  - ↪ Si la suite est du type $u_n = f(n)$, alors on étudie le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la suite a le même sens de variation que f.
- Calculer la limite d'une suite
  - ↪ Utiliser les règles opératoires sur les limites et les limites usuelles ainsi que les résultats spécifiques :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si -1<q<1} \\ +\infty \text{ si q>1} \\ 1 \text{ si q=1} \\ \text{pas de limite si } q \leq -1 \end{cases} \qquad \text{et } \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

  - ↪ Utiliser un théorème d'encadrement
  - ↪ Si $u_n = f(n)$ utiliser le calcul de la limite de f en $+\infty$
  - ↪ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

Exemple 10.1 :

On va montrer par l'absurde que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$. Pour cela on suppose qu'elle admet une limite ℓ.
On va appliquer la dernière propriété vue ci-dessus, à savoir : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ avec ici la fonction $f = \cos$:
• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2n\pi$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = \ell$ or $\cos(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$ donc $\ell = 1$
• Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$:

$\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\cos x=\ell$ alors $\lim_{n\to+\infty}\cos(v_n)=\ell$ or $\cos(u_n)=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0$ donc $\ell=0$ ainsi $\ell=0=1$: contradiction, la supposition de départ était donc fausse : la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

10.3 Exercices

Suites de référence.

Exercice 10.1 :(solution ►)

Calculer le terme général des suites définies par :

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+3$ et $u_0=1$
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n$ et $u_0=1$
3. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$ et $u_0=3$ après avoir montré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-6$ est géométrique.

Exercice 10.2 :(solution ►)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n+3}$.

On pose $v_n=\dfrac{u_n}{u_n+1}$

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire celle de u_n en fonction de n.

Exercice 10.3 :(solution ►)

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$u_0=11$, $v_0=12$,et $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$, $v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Soit $w_n=v_n-u_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique. Donner sa limite.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont de sens de variations contraires et que la limite de la différence quand n tend vers $+\infty$ est nulle..
3. Soit $t_n=8v_n+3u_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante.
4. Complément : déterminer les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 10.4 :(solution ►)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+1$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>n^2$.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 10.5 :(solution ►)

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$

1. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leq\dfrac{n+1}{n^2+1}$.
2. Quelle est le limite de la suite (u_n) ?

Exercice 10.6 :(solution ►)

⋆⋆⋆ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$

Exercice 10.7 :(solution ►)

⋆⋆⋆ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2 + 4u_n v_n + 5v_n^2) = 0$
Montrer que ces 2 suites ont une même limite qu'on déterminera.

11 Somme

11.1 Formules et propriétés.

Ce paragraphe sera entièrement repris et détaillé en classe.

1. **Définitions**
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble $\{0;1;2;\ldots;n\}$
   - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et il y a $(n+1)$ termes dans la somme.
   - $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ et il y a $(n+1-p)$ termes dans la somme.

   Exemple 11.1 :

   $$3^2+4^2+5^2+....+10^2 = \sum_{k=3}^{10} k^2$$

2. **Propriétés.**

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$
   On sort d'une somme (c'est-à-dire, on met en facteur) ce qui ne dépend pas de l'indice de sommation.

   (c) Puisqu'il s'agit d'une somme on peut isoler certains termes ou "regrouper par paquets" (Relation de Chasles), par exemple
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$ ou aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + u_{n+1}$
   ou encore
   $$\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$

3. **Sommes particulières à connaître**
   - $\displaystyle\underbrace{a+a+....a}_{n\text{ fois}} = \sum_{k=1}^{n} a = na$
   - $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$
   - $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ si $q \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$
   - *Sommes télescopiques* :
     exemple-méthode : on applique les propriétés et le changement d'indice
     $$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{j=0}^{n} u_j = u_{n+1} - u_0$$

4. **Produits**

   (a) **Définitions**
   - $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$

- $\prod_{k=p}^{n} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_n$ et il y a $(n+1-p)$ termes

(b) **Propriétés et techniques.**

- $\prod_{k=0}^{n}(u_k \times v_k) = \prod_{k=0}^{n} u_k \times \prod_{k=0}^{n} v_k$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\prod_{k=0}^{n}(\lambda u_k) = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k$
- $\frac{1}{\prod_{k=0}^{n} u_k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$

(c) **Produits à connaître**

$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a = a^n}$ $\boxed{\prod_{k=1}^{n} 1 = 1}$ $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$

11.2 Exercices

Exercice 11.1 :(solution ▶)

Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} n$
2. $\sum_{k=n+1}^{2n} n$
3. $\sum_{k=0}^{2n} k$
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} k$
5. $\sum_{k=2}^{2n} (k+2^k)$
6. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2$

Exercice 11.2 :(solution ▶)

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Calculer $\sum_{k=1}^{n}(u_k - M_n)$

Exercice 11.3 :(solution ▶)

Sommes telescopiques. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
2. $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$
3. $\sum_{k=0}^{n} k k!$

Exercice 11.4 :(solution ▶)

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Calculer $u_{n+1}-u_n$ et en déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 11.5 :(solution ►)

Soit (u_n) telle que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = k2^k$

Calculer $u_{k+1}-u_k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k$

Exercice 11.6 :(solution ►)

Un problème d'ouverture vers des méthodes et notions qui seront vues dans l'année :

On pose pour tout entier naturel n non nul ,

$u_n = \dfrac{1}{n}, \quad v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

On admet le résultat suivant :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

1. (a) Montrer que $\forall k \geq 1, \forall t \in [k,k+1], \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$
   (b) En déduire que $\forall k \geq 1, \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$ puis que $S_{n+1}-1 \leq \ln(n+1) \leq S_n$
   (c) En déduire que $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1+\ln n$
   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$
   (remarque : on notera alors ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.)
2. (a) Montrer que pour tout réel $t \neq -1$ on a $1-t+t^2+....+(-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1}{1+t} + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{1+t}$
   (b) Montrer que $\forall t \in]0;1[, \dfrac{t^n}{t+1} \leq t^n$ et en déduire que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+1}$
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$

12 Solutions des exercices.

Solution de l'exercice 1.1 : (énoncé ►)

1. $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{1-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{5}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5}$

2. Plutôt que développer on remarque d'abord l'identité $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ avec ici $A=a+\sqrt{b}$ et $B=a-\sqrt{b}$
$\left(a+\sqrt{b}\right)^2-\left(a-\sqrt{b}\right)^2=\left(a+\sqrt{b}-(a-\sqrt{b})\right)\left(a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}\right)=\left(2\sqrt{b}\right)(2a)=4a\sqrt{b}$

3. $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{21}-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{21}-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}$

4. on va utiliser successivemnt 2 fois la technique de l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}&=\frac{1\times\left((1+\sqrt{3})-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\times\left((1+\sqrt{3})-\sqrt{5}\right)}\\&=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\&=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{3}+3-5}\\&=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}\\&=\frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\times\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\sqrt{3}-1\right)\times\left(2\sqrt{3}+1\right)}\\&=\frac{2\sqrt{3}+1+6+\sqrt{3}-2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2-1^2}\\&=\frac{7+3\sqrt{3}-2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{11}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1.2 : (énoncé ►)

1. on va développer $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ avec $a=\sqrt{3-\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{3+\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2&=3-2\sqrt{2}-2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}+3+2\sqrt{2}\\&=6-2\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}\text{ on a utilisé }\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\\&=6-2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}\text{ on a utilisé }(a-b)(a+b)=a^2-b^2\\&=6-2\sqrt{1}\\&=4\end{aligned}$$

par ailleur $3-\sqrt{2}<3+\sqrt{2}$ donc par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}<\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ d'où $A<0$

finalement $A^2=4$ et $A<0$ donne $A=-2$

2. on élève au carré en veillant bien au fait qu'on n'a pas l'équivalence mais SI $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ ALORS :
$7-4\sqrt{3} = (a+b\sqrt{3})^2 = a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2$
on cherche a et b tels que $a^2+3b^2=7$ et $2ab=-4$ d'où $b=\dfrac{-2}{a}$, avec $a\neq 0$, qu'on reporte dans la 1ere égalité :
$a^2+3\left(\dfrac{-2}{a}\right)^2 = 7 \iff a^4+12=7a^2$
on pose $x=a^2$ on obtient une équation du second degré : $x^2-7x+12=0 \iff x=4$ ou $x=3$ cette dernière solution étant impossible car $x\geq 0$ étant un carré.
or $x=a^2$ et on veut a entier donc $a=2$ où $a=-2$, et comme $b=-2/a$
on obtient 2 solutions $2-\sqrt{3}$ ou $-2+\sqrt{3}$
le 2eme solution étant négative elle ne convient pas car on veut $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ et qu'une racine est positive.
on vérifie réciproquement que $2-\sqrt{3}$ convient; en effet $(2-\sqrt{3})^2 = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-4\sqrt{3}$ d'où
$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ car $2-\sqrt{3}>0$

Solution de l'exercice 1.3 : (énoncé ►)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$a_nb_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = n+1-n = 1$$

Solution de l'exercice 1.4 : (énoncé ►)

$$A = \frac{a^6b^4}{(3ab)^3} = \frac{a^6b^4}{27a^3b^3} = \frac{a^{6-3}b^{4-3}}{27} = \frac{a^3b}{27}$$
$$B = \frac{(a^4+a^2)b^2}{a^2+1} = \frac{a^2(a^2+1)b^2}{a^2+1} = a^2b^2$$
$$C = \frac{a^3(-b)^{-2}}{a^2b^3}\times a^{-4} = a^{3-2-4}(-1)^{-2}b^{-2-3} = a^{-3}b^{-5} = \frac{1}{a^3b^5} \text{ car } (-1)^{-2}=1$$

Solution de l'exercice 1.5 : (énoncé ►)

1. $A = 3^4+9^2 = 3^4+(3^2)^2 = 3^4+3^4 = 2\times 3^4$
2. $B = 3^n\times(-3)^{2n} = 3^n\times(-1)^{2n}\times 3^{2n} \underset{(-1)^{2n}=1}{=} 3^n\times 3^{2n} = 3^{2n+1} = (3^2)^n\times 3 = 3\times 9^n$
3.
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n \times\left(\frac{2}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &= \frac{11}{12}\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

4. $D=(-1)^n-2(-1)^{n+2}=(-1)^n-2(-1)^2(-1)^n=(-1)^n-2(-1)^n=(-1)(-1)^n$
   remarque : se simplifie en $(-1)^{n+1}$ mais l'énoncé veut une forme $a\times b^p$
5. $E=2^{2n+2}+4^n-3\times 2^{2n}=2^{2n}\times 2^2+(2^2)^n-3\times 2^{2n}=4\times 2^{2n}+2^{2n}-3\times 2^{2n}=2\times 2^{2n}=2\times 4^n$
6. $F=(-1)^n-(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+2}=(-1)^n-(-1)^n\times(-1)^1+2(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n+(-1)^n+2(-1)^n=4(-1)^n$

Solution de l'exercice 2.1 : (énoncé ►)

L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}/\{-2\}$ et l'ensemble de définition de la fonction g est $\mathscr{D}_g=\mathbb{R}$.
Ainsi $\mathscr{D}_f\neq\mathscr{D}_g$. Les fonctions f et g ne sont pas égales.
Cependant, pour tout réel $x\neq -2$ on a $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=g(x)$

Solution de l'exercice 2.2 : (énoncé ►)

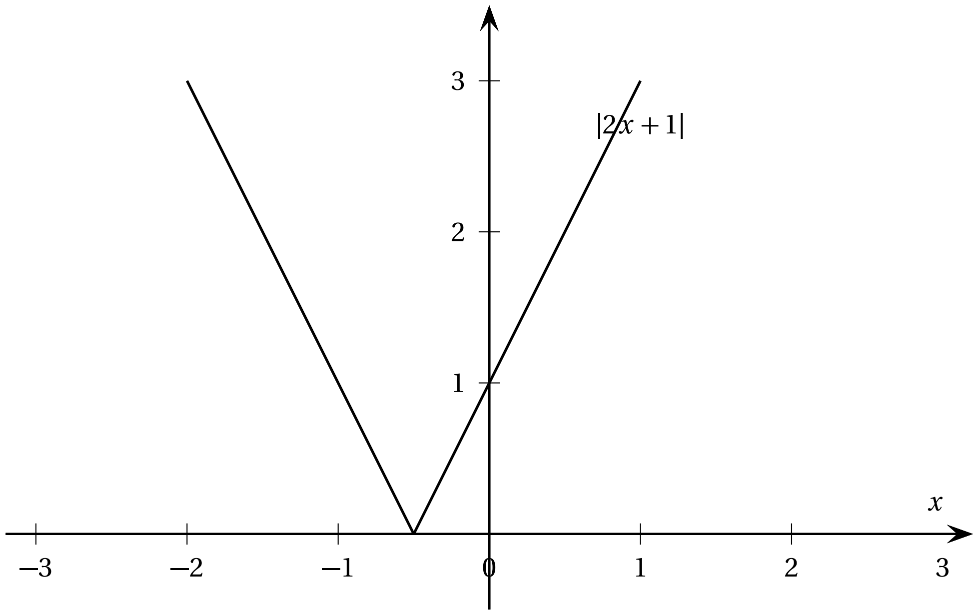
1. FAUX : pour que f soit définie on doit avoir $u(x)\geq 0$, ce qui n'est vrai que si $x\in[0;5]$ d'après le tableau de variation de u donc f est définie sur $[0\ ;\ 5]$
2. VRAI : u est décroissante sur $[0;5]$ et la fonction racine est croissante sur $[0;+\infty[$ donc par composée f est décroissante sur $[0\ ;\ 5]$.
3. FAUX : si x appartient à $[0\,;5]$ alors $u(x)$ appartient à l'intervalle $[0;9]$ d'après le tableau de variation ; et donc $\sqrt{u(x)}$ appartient à l'intervalle $[0;\sqrt{9}]$: $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 3]$
4. VRAI car u est définie sur $[0;9]$ et la fonction carré sur $\mathbb{R}$ donc g est définie sur $[0\ ;\ 9]$
5. FAUX car si x appartient à l'intervalle $[5\,;9]$ alors $u(x)<0$ et comme la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ par composée de fonctions décroissantes, la fonction g est croissante sur $[5\ ;\ 9]$.

Solution de l'exercice 3.1 : (énoncé ►)

• h est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^-$.
En effet, elle est la composée de la fonction f définie par $f(x)=x^2+1$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(\mathbb{R}^-)=[1,+\infty[$ et de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $[1,+\infty[$.
• h est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, elle est la composée de la fonction f définie par $f(x)=x^2+1$ qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(\mathbb{R}^+)=[1,+\infty[$ et de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $[1,+\infty[$.

Solution de l'exercice 3.2 : (énoncé ►)

$$|2x+1|=\begin{cases}2x+1 \text{ si } 2x+1\geq 0\\ -(2x+1) \text{ si } 2x+1\leq 0\end{cases}=\begin{cases}2x+1 \text{ si } x\geq\dfrac{-1}{2}\\ -2x-1 \text{ si } x\leq\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$



Solution de l'exercice 3.3 : (énoncé ▶)

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

   et comme $x \in [0;\pi]$ alors $\sin x \geq 0$ donc $\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. dans cette question $y \in [\pi; 2\pi]$ alors $\sin y \leq 0$ donc $\sin y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Solution de l'exercice 3.4 : (énoncé ▶)

$\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\sin \frac{4\pi}{5}$
et $\sin \frac{8\pi}{5} = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin \frac{2\pi}{5}$
ainsi $a = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} = 0$

Solution de l'exercice 3.5 : (énoncé ▶)

1. $2x^2 - 3x + 1 = 0$:

   $\Delta = b^2 - 4ac = 1$ donc l'équation admet 2 solutions réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}; 1\}}$

2. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$: on pose $X = \cos x \in [-1;1]$

   D'après la question précédente : $X = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   ou $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $-\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

Solution de l'exercice 4.1 : (énoncé ▶)

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^2$
2. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$
3. Pour que f soit définie, il faut que $x \neq 0$ et $x \geqslant 0$. Donc $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$. La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. De plus la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - \frac{-1}{x^2} + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$
4. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\left(x^3 - 2x\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(3x^2 - 2\right) \\ &= 2x^4 - 4x^2 + 3^x 4 - 2x^2 + 3x^2 - 2 \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2 \end{aligned}$$
5. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 7 \geq 0$ pour tout réel x.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x\left(x^2+7\right) - 2x\left(2x^2-3\right)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 28x - 4x^3 + 6x}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{34x}{(x^2+7)^2} \end{aligned}$$
6. La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$
7. La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{2}{3} \times \frac{-1}{x^2} \\ &= -1 - \frac{2}{3x^2} \end{aligned}$$
8. Pour que f soit définie et dérivable il faut que $x + x^2 \neq 0$. Or $x + x^2 = x(x+1)$. Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$.
$$f'(x) = -\frac{1+2x}{(x+x^2)^2}$$
9. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f(x) = (2x+1)(2x+1)$
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2x+1) + (2x+1) \times 2 \\ &= 4(2x+1) \\ &= 8x + 4 \end{aligned}$$

10. La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3)+5\sqrt{x} \\ &= \frac{5x-3+10x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{15x-3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

11. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ de la forme $\dfrac{u}{v}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
avec $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$ et $v(x)=x+1$ donc $v'(x)=1$
donc $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-1(x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$
12. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ de la forme $\dfrac{u}{v}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
avec $u(x)=x^2+1$ donc $u'(x)=2x$ et $v(x)=x^2+2$ donc $v'(x)=2x$
donc $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+2)-2x(x^2+1)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$
13. $f(x)=\dfrac{x^3}{x+3}$ de la forme $\dfrac{u}{v}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
avec $u(x)=x^3$ donc $u'(x)=3x^2$ et $v(x)=x+3$ donc $v'(x)=1$
donc $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+3)-1(x^3)}{(x+3)^2}=\dfrac{2x^3+9x^2}{(x+3)^2}$
14. $f(x)=\sqrt{3x+1}$ de la forme $\sqrt{u}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
avec $u(x)=3x+1$ donc $u'(x)=3$
donc $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$
15. $f(x)=\sqrt{x^2+7x-3}$ de la forme $\sqrt{u}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
avec $u(x)=x^2+7x-3$ donc $u'(x)=2x+7$
donc $f'(x)=\dfrac{2x+7}{2\sqrt{x^2+7x-3}}$
16. $f(x)=(5x-1)^3$ de la forme u^n qui a pour dérivée $nu^{n-1}u'$
avec $u(x)=5x-1$ donc $u'(x)=5$
donc $f'(x)=3\times(5x-1)^2\times 5=15(5x-1)^2$
17. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ de la forme $\dfrac{1}{u}$ qui a pour dérivée $\dfrac{-u'}{u^2}$
avec $u(x)=\sqrt{x}$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
donc $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$
18. $f(x)=3\cos(x)$
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-3\sin(x)$
19. $f(x)=\cos^3(x)$
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-3\cos^2 x\sin x$

20. $f(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2\cos x\sin x+2\sin x\cos x=0$

on pouvait aussi plus rapidement remarquer que $f(x)=1$ donc $f'(x)=0$

21. $f(x)=\sin(2x+1)$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=2\cos(2x+1)$ (dérivée d'une composée $(uov)'(x)=u'(v(x))\times v'(x)$ avec ici $u(x)=\cos x$ et $v(x)=2x+1$)

22. $f(x)=\sin\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}\cos\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\cos\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)$

Solution de l'exercice 4.2 : (énoncé ▶)

On calcule le taux d'accroissement :

$\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0

donc h n'est pas dérivable en 0; la tangente à la courbe est verticale.

Solution de l'exercice 4.3 : (énoncé ▶)

Le taux d'accroissement de la fonction sin en 0 est : $\tau(x)=\dfrac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x}=\dfrac{\sin(x)}{x}$

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc aussi en 0, et en a donc, $\lim\limits_{x\to 0}\tau(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\sin'(0)=\cos(0)=1$

Le taux d'accroissement de la fonction cos en 0 est : $\tau(x)=\dfrac{\cos(0+x)-\cos(0)}{x}=\dfrac{\cos(x)-1}{x}$

La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc aussi en 0, et en a donc, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=\cos'(0)=-\sin(0)=0$

Solution de l'exercice 5.1 : (énoncé ▶)

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2-2x+1=0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$

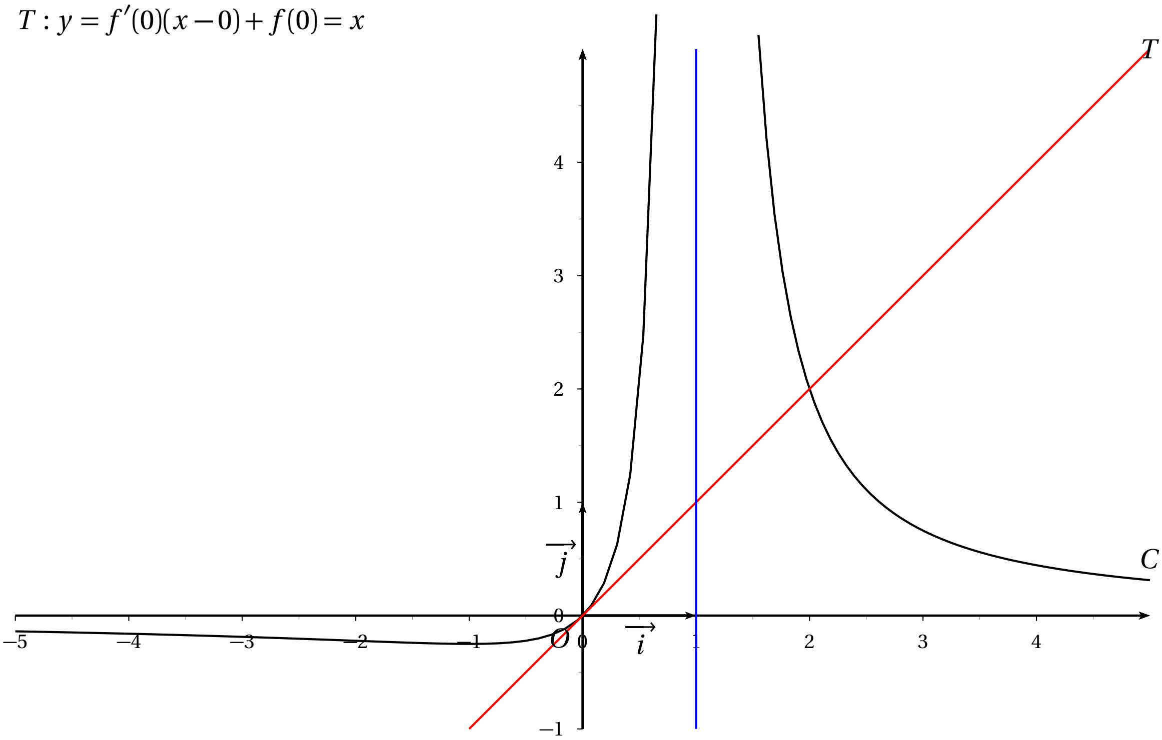
$\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2-2x+1=0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$

2. $f'(x)=\dfrac{1(x^2-2x+1)-x(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}$

et $-x^2+1=0\iff x=1$ ou -1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗ $+\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	0

3. $T : y = f'(0)(x-0)+f(0) = x$



4.

Solution de l'exercice 5.2 : (énoncé ►)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} \times \dfrac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{5}{x^2}}$
   or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{5}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$
   alors par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x^2+5} = 0$
   on peut remarquer ici qu'en ayant mis en facteur les termes prépondérants, on met en jeu des quantités qui ont pour limite 1. Seule entre alors en ligne de compte la limite du quotient des termes prépondérants mis en facteur, ce qui s'écrirait !
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0^+$
   nous utiliserons ce résultat dans le cas de fractions faisant intervenir des polynômes c'est à dire les questions 2,3,4.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x(-x-1)}{(x^2+2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^2-4x}{x^3+3x^2+2x+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^2}{x^3} = \dfrac{-4}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+2)(x-5)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-3x-10} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+5x-1}{4x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}$
5. On constate que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0 : forme indéterminée. Pour cette forme indéterminée , la méthode du terme prépondérant ne donne rien.
   On factorise le numerateur : $-2x^2-x+3$. $\Delta = 1+24 = 25 \geq 0$.
   Il y a donc deux racines réelles. $x_1 = \dfrac{1-5}{-4} = 1$ et $\dfrac{1+5}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.
   Ainsi $\dfrac{-2x^2-x+3}{x-1} = \dfrac{-2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{x-1} = -2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ pour tout $x \neq 1$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x^2-x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} -2\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = -5$

6. On constate que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0. On utilise la méthode vue précédemment.
$\dfrac{x^2+4x}{-x^2-2x+8}=\dfrac{x(x+4)}{-(x-2)(x+4)}=\dfrac{-x}{x-2}$ pour $x\neq -4$
Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{x^2+4x}{-x^2-2x+8}=\lim_{x\to -4}\frac{-x}{x-2}=-\frac{2}{3}$
7. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. La présence de la racine carrée sugère la méthode de l'expression conjuguée.
$\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{-(2-x)(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{2-x}=-\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x+2)$ pour tout $x\neq 2$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 2^+}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x+2)=-8\sqrt{2}$
8. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Ici pas de quantité conjuguée exploitable car la racine carrée est seule.
$\dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-81}=\dfrac{\sqrt{9-x}}{(x-9)(x+9)}=\dfrac{\sqrt{9-x}}{-(9-x)(x+9)}=\dfrac{\sqrt{9-x}}{-\left(\sqrt{9-x}\right)^2(x+9)}=\dfrac{-1}{(x+9)\sqrt{9-x}}$ pour $x<9$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 9^-}\frac{\sqrt{9-x}}{x^2-81}=\lim_{x\to 9^-}\frac{-1}{(x+9)\sqrt{9-x}}=-\infty$

Solution de l'exercice 5.3 : (énoncé ▶)

Pour tout $x>0$, $-1\leq \sin x\leq 1$ donc
pour tout $x>0$, $\dfrac{-1}{x}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x}$
Or $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$
alors d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$

Solution de l'exercice 6.1 : (énoncé ▶)

1. $f(x)=\mathrm{e}^x-3x\mathrm{e}^x=(1-3x)\mathrm{e}^x$
La fonction exponentielle est strictement positive. Le signe de $f(x)$ ne dépend donc que de celui de $1-3x$.
Or $1-3x\geq 0 \iff x\leq \dfrac{1}{3}$
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

2.
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x-x^2\mathrm{e}^x}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)}{x^2}$$
Pour tout x réel non nul , $e^x>0$ et $x^2>0$. Le signe de $g(x)$ ne dépend donc que de celui de $1-x^2$ qui est une expression du second degré dont les racines sont 1 et -1.
Or $1-x\geq 0 \iff x\leq 1$ et et $1+x\geq 0 \iff x\geq -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

3. $h(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+3} = \mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}^3\right)$

   La fonction exponentielle est strictement positive. Donc pour tout réel x on a $\mathrm{e}^x \geq 0$.

   La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{e}^3 \geq \mathrm{e}^0$ soit $\mathrm{e}^3 \geq 1$.

   Par conséquent $1 - \mathrm{e}^3 \leq 0$.

   Ainsi, pour tout réel x on a $f(x) \leq 0$.

4.
$$\begin{aligned} f(x) &= -2x\mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} + 1\right)\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\left(-2x + \frac{1}{x} + 1\right) \\ &= \mathrm{e}^x \times \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \end{aligned}$$

   La fonction exponentielle est strictement positive. Le signe de $f(x)$ ne dépend donc que de celui de $\dfrac{-2x^2+x+1}{x}$.

   On étudie le signe de $-2x^2 + x + 1$: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 \geq 0$

   Ainsi $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{-4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.

   De plus $a = -2 \leq 0$.

   On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		1		$+\infty$
$-2x^2+x+1$		$-$	0	$+$			0	$-$	
x		$-$			0	$+$			
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Solution de l'exercice 6.2 : (énoncé ►)

1. $\mathrm{e}^{x^2+2x+1} = 1 \iff \mathrm{e}^{x^2+2x+1} = e^0 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$

   $\mathcal{S} = \{-1\}$

2. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}} = \mathrm{e}^{2x^2-1} \iff \mathrm{e}^{3x+5-3+2x} = \mathrm{e}^{2x^2-1} \iff 5x + 2 = 2x^2 - 1 \iff 2x^2 - 5x - 3 = 0$

   $\Delta = 49$ donc 2 solutions réelles : $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = \dfrac{-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$

   $\mathcal{S} = \{-\dfrac{1}{2}; 3\}$

3. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}^*$ et

   $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \geqslant \mathrm{e} \iff \dfrac{1}{x} \geq 1$ car la fonction exp est une bijection croissante sur $\mathbb{R}$

   $\dfrac{1}{x} \geq 1 \iff \dfrac{1}{x} - 1 \geq 0 \iff \dfrac{1-x}{x} \geq 0$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$1-x$	$+ \quad 0 \quad -$
x	$- \quad 0 \quad +$
$\dfrac{1-x}{x}$	$- \quad \Vert \quad + \quad 0 \quad -$

$\mathcal{S} =]0;1]$

4. $e^{2x} \leqslant e^x \iff 2x \leq x \iff x \leq 0$

   $\mathcal{S} =]-\infty;0]$

5. $e^{2x}e^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x + x^2 < 0 \iff x(2+x) < 0$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
x	$- \quad 0 \quad +$
$2+x$	$- \quad 0 \quad +$
$x(2+x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$\mathcal{S} =]-2;0[$

Solution de l'exercice 6.3 : (énoncé ►)

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x+1}{x}$ de la forme $\dfrac{u}{v}$ qui a pour dérivée $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
   avec $u(x) = e^x + 1$ donc $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$
   donc $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - 1 \times e^x}{x^2}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^x$ de la forme uv qui a pour dérivée $u'v + v'u$
   avec $u(x) = 2x - 1$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
   donc $f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{1}{e^x}$
   $f'(x) = e^x - \dfrac{-e^x}{(e^x)^2} = e^x + \dfrac{1}{e^x}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+3}$ de la forme e^u avec $u(x) = x^2 + 3$ donc $u'(x) = 2x$
   $f'(x) = 2xe^{x^2+3}$

Solution de l'exercice 6.4 : (énoncé ►)

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - \dfrac{e^x}{(e^x)^2} = e^x - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$ d'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   pour les limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   (b) D'après l'étude précédente, f admet un minimum égal à 2 donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2 \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

2. (a) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x - \dfrac{-e^x}{(e^x)^2} = e^x + \dfrac{1}{e^x} = f(x)$.

   (b) Or $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x > 0$ ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 6.5 : (énoncé ▸)

Soit $f(x) = x^3 e^{-x} = \dfrac{x^3}{e^x}$.

D'une part d'après la formule des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$

D'autre part en appliquant la définition 5.1 de la limite cela signifie que pour tout réel A positif, tout intervalle $]0 - A, 0 + A[$ contient tous les réels $f(x)$ pour x suffisamment grand , c'est à dire pour x supérieur à un certain réel x_0

En posant $A = 1$ on obtient donc que pour $x > x_0, -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ d'où $e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{x^3}$

Solution de l'exercice 6.6 : (énoncé ▸)

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{3x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout x réel,
   $f'(x) = -\mathrm{e}^{3x} + 3(1 - x)\mathrm{e}^{3x} = (3 - 3x - 1)\mathrm{e}^{3x} = (2 - 3x)\mathrm{e}^{3x}$.
3. $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (2 - 3x)\mathrm{e}^{3x} \geqslant 2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant 3x \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \geqslant x$
4.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}e^2$	$\searrow$	$-\infty$

Solution de l'exercice 7.1 : (énoncé ▸)

1. Pour tout réel $x > 1$, $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) = \ln((x + 2)(x - 1)) = \ln(x^2 - x + 2x - 2) = \ln(x^2 + x - 2)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = \ln(x + 1)$

Solution de l'exercice 7.2 : (énoncé ►)

1. $f(x) = x\ln x - x$

   $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

   $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$

   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times e^x - e^x \times \ln x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)}{e^{2x}} = \dfrac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \dfrac{1 - x\ln x}{x e^x}$

4. $f(x) = \ln(\cos x)$: formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec ici $u(x) = \cos x$ donne $u'(x) = -\sin x$

   $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

5. $f(x) = \sqrt{\ln x}$: formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec ici $u(x) = \ln x$ donne $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

6. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$: formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec ici $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ donne $u'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

   $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Solution de l'exercice 7.3 : (énoncé ►)

1. Pour que $\ln x$ existe, il est indispensable d'exiger que $x > 0$ et, pour que le quotient existe, il faut exiger que $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e^0 = 1$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ alors par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
   Complément : On dit que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si} \quad x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$ (cf. question 1) donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{1(\ln x) - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x - 1$ et comme l'on a $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e^1 = e$, on en déduit le tableau de variation de f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites :
en $+\infty$, cela découle de la formule des croissances comparées.
En 1^-, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est négatif et tend vers 0 donc le quotient est négatif et tend vers $-\infty$ ("$\frac{1}{0^-}=-\infty$").
En 1^+, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est positif et tend vers 0 donc le quotient est positif et tend vers $+\infty$ ("$\frac{1}{0^+}=+\infty$")

5. La fonction f est continue sur $]e,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. En outre, la combinaison des questions 3 et 4, montre que la dérivée de f est strictement positive sur $]e,+\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Les deux conditions du théorème de bijection étant valides, on en déduit que f réalise une bijection de $]e,+\infty[$ sur $f(]e,+\infty[)=]e,+\infty[$.

Solution de l'exercice 7.4 : (énoncé ►)

1. on a une forme indéterminée $\infty-\infty$ pour laquelle il convient de factoriser le terme prépondérant qui est e^x
$x^2+\ln(x)-e^x=e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}-1\right)$
les formules de croissances comparées donnent $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}-1=-1$
comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+\ln(x)-e^x=-\infty$
2. on a une forme indéterminée pour laquelle il convient de factoriser le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur
$\frac{\ln(x)+x+1}{x^2+x+1}=\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}+1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{\frac{\ln x}{x}+1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1+\frac{1}{x}=1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$
donc finalement par produit et quotient , $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+x+1}{x^2+x+1}=0$
3. On va utiliser la formule $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ainsi en multipliant par $\frac{1}{2}$ on obtient $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}$
4. On va utiliser la formule $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ et la formule $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$
pour cela on transforme pour les faire apparaitre :
$\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{x}{e^x-1}$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ donne par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$
ainsi par produit $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
5. On a une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$" pour laquelle aucune transformation n'apparait de façon directe.
On se souvient de la formule de cours $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ qui est une limite en 0 donc on va essayer de transformer pour s'y ramener.
Première chose : obtenir le "$1+x$" . La formule de trigo $\sin^2x+\cos^2=1$ donne $\cos^2x=1-\sin^2x$ mais nous n'avons pas de $\cos^2x$

Cependant $\ln(\cos^2 x) = 2\ln(\cos x)$ permet de s'en sortir.

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x)}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\ln((1-\sin x)(1+\sin x))}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sin x)+\ln(1+\sin x)}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin x} + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \end{aligned}$$

deuxième chose : on va utiliser la formule $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

pour le 1er terme de la somme en posant $t = -\sin x$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0 on a par composition $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(-\sin x))}{-\sin x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin x} = -1$

pour le 2eme terme, en posant $t = \sin x$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0 on a par composition $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$

finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Solution de l'exercice 7.5 : (énoncé ►)

1. (a) On a pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x \times x\ln x + 1$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0).$$
   ainsi f est continue en 0.

   (b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2\ln x) = -\infty$, donc par produit des limites :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2. (a) On calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)}{x} = \frac{1}{2}x(3-2\ln x) = \frac{3}{2}x - x\ln x$$
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
   Conclusion f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   (b) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x \times x\ln x + 1$, donc f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{x^2}{2}\times\left(-\frac{2}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x.$$

3. $f'(x) = 2x(1-\ln x)$ qui est du signe de $1-\ln x$.

   On a $f'(x) > 0 \iff 1-\ln x > 0 \iff \ln x < \ln \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e}$;

   $f'(x) < 0 \iff 1-\ln x < 0 \iff \ln x > \ln \mathrm{e} \iff x > \mathrm{e}$

   $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$. D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\dfrac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Solution de l'exercice 8.1 : (énoncé ►)

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[\ln t + \frac{1}{t}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2}{1+t}\mathrm{d}t = [2\ln(1+t)]_0^{\ln 2} = 2\ln(1+\ln(2))$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x+4}{x}\mathrm{d}x = [x+4\ln|x|]_{-3}^{-1} = -4\ln 3 + 2$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}} = 1$
5. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)} = [\ln(1+\ln x)]_1^e = \ln 2$
6. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x e^{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{(\ln 2)^2} - \frac{1}{2}$
7. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t}{4t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[\ln|4t^2-1|\right]_1^2 = \frac{1}{8}\ln\frac{15}{3}$
8. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln|e^x+2|\right]_0^{\ln 2} = \ln 4 - \ln 3$
9. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = \ln 2$
10. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_0^{\ln 2} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

Solution de l'exercice 9.1 : (énoncé ►)

1. *1ere méthode : avec une fonction*

   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - (x-1)$

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont et $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$

   Ainsi d'après l'étude f admet un maximum égal à 0 donc $\forall x > 0, f(x) \leq 0$ d'où pour tout réel $x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

   1ere méthode : avec la convexité

   la fonction logarithme est 2 fois dérivable et $\forall x > 0, (\ln)''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc ln est concave, cela signifie que la courbe est en-dessous de ses tangentes, en particulier la tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$

   d'où pour tout réel $x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

2. • la fonction exponentielle est 2 fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)''(x) = e^x > 0$ donc exp est convexe, cela signifie que la courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier la tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) = x + 1$

   pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$

   • puis comme $x + 1 > x$ alors par transitivité $e^x > x$

   • en divisant alors par $e^x > 0$ il vient $1 > \dfrac{x}{e^x} \iff 1 > xe^{-x} \iff -xe^{-x} > -1$

3. On pose $x = 1 + t$ dans l'inégalité du 1 et on a bien $x > 0 \Rightarrow t > -1$ donc pour tout réel $t > -1, \ln(1+t) \leq t$

   puis en posant $t = -xe^{-x}$ qui est bien supérieur à -1 d'après la question précédente, on a pour tout réel x , $\ln(1 + xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$

Solution de l'exercice 9.2 : (énoncé ►)

on utilise la méthode consistant à étudier les variations de la fonction g définie par :
$g(t) = 2e^t - t - t^2$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 2e^t - 1 - 2t$ mais son signe n'est pas évident donc on dérive à nouveau
g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(t) = 2e^t - 2 = 2\left(e^t - 1\right)$,
or $\forall t \geq 0, e^t \geq 1$ donc $g''(t) \geq 0$ d'où

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$g''(t)$	0 $\quad +$
$g'(t)$	$1 \nearrow$
$g'(t)$	$+$
$g(t)$	$2 \nearrow$

g admet donc un minimum égal à 2 d'où pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\quad 2e^t - t - t^2 > 0$

Solution de l'exercice 9.3 : (énoncé ►)

la méthode précédente n'est pas efficace car en dérivant une racine , il reste une expression avec la racine.

On va donc plutôt elever au carré et utiliser la méthode permettant de faire des étapes successives afin d'aboutir à une "évidence" en prenant soin de justifier les équivalences successives.

pour $t \geq 0$

$1+t \geq \sqrt{1+t^2} \Longleftrightarrow (1+t)^2 \geq \sqrt{1+t^2}^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1+t$ et $\sqrt{1+t^2}$ en sont éléments

$\Longleftrightarrow 1+2t+t^2 \geq 1+t^2 \Longleftrightarrow 2t \geq 0$ ce qui et vrai sur $\mathbb{R}^+$

Donc pour tout $t \in [0,+\infty[\ :\quad 1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

Solution de l'exercice 9.4 : (énoncé ►)

1. $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2}$.
2. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq 2$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 0 :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $0 \leq u_0 \leq 2$ car $u_0 = 0$
   - on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$
     or $0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ car la fonction racine est une bijection croissante sur $[0;+\infty[$
     or $0 \leq \sqrt{2}$ alors par transitivité il vient $0 \leq u_{n+1} \leq 2$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$
3. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} > u_n$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 0 :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_1 > u_0$
   - on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $u_{n+2} > u_{n+1}$
     or par hypothèse de récurrence,
     $u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+1}+2 > u_n+2 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+2} > \sqrt{u_n+2} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Solution de l'exercice 10.1 : (énoncé ►)

1. On reconnait une suite arithmétique de raison 3 donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = 1+3n$
2. On reconnait une suite géométrique de raison 3 donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 3^n$
3. Remarque : on verra qu'on appelle ce type de suite une suite arithmético-géométrique; pour l'étudier on résout l'équation $x = \dfrac{1}{3}x+4$: on trouve $x = 6$
   On pose alors $v_n = u_n - 6$.
   $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \dfrac{1}{3}u_n - 2 = \dfrac{1}{3}(u_n - 6) = \dfrac{1}{3}v_n + 4$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3-6 = -3$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = -3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$

Solution de l'exercice 10.2 : (énoncé ►)

1. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 0 :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_0 = 1$ existe et $u_0 > 0$
   - on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$

     or $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence donc $u_n + 3 \neq 0$ alors $\dfrac{2u_n}{u_n+3}$ est bien défini;

     par ailleurs $2u_n > 0$ et $u_n + 3 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Conclusion : la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1}$ or $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+3}$

   ainsi $v_{n+1} = \dfrac{\frac{2u_n}{u_n+3}}{\frac{2u_n}{u_n+3}+1} = \dfrac{\frac{2u_n}{u_n+3}}{\frac{3u_n+3}{u_n+3}} = \dfrac{2u_n}{u_n+3} \times \dfrac{u_n+3}{3u_n+3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{u_n}{u_n+1} = \dfrac{2}{3} v_n$

   Conclusion : (v_n) est une suite géométrique de raison 2/3.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
3. $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1} \iff (u_n+1)v_n - u_n = 0 \iff (v_n - 1)u_n + v_n = 0 \iff u_n = \dfrac{-v_n}{v_n-1} = \dfrac{v_n}{1-v_n}$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Solution de l'exercice 10.3 : (énoncé ►)

1. Soit $w_n = v_n - u_n$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - \dfrac{u_n+2v_n}{3} = \dfrac{3u_n+9v_n-4u_n-8v_n}{12} = \dfrac{w_n}{12}$

   (w_n) est donc une suite géométrique de raison 1/12 et de 1er terme $w_0 = 1$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$

   or $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
2. • on a déjà $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

   • $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3} - u_n = \dfrac{2v_n-2u_n}{3} = \dfrac{2}{3}w_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

   • $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n-v_n}{4} = -\dfrac{1}{4}w_n < 0$ donc (v_n) est décroissante.

   Conclusion : on dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Soit $t_n = 8v_n + 3u_n$.

   $t_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 2(u_n+3v_n) + u_n + 2v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$ donc (t_n) est une suite constante.
4. On verra que les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers un même réel ℓ.

   La suite (t_n) étant constante, sa limite est égale à son 1er terme $t_0 = 129$.

   Mais comme $t_n = 8v_n + 3u_n$ on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 8\ell + 3\ell = 11\ell$

   d'où $11\ell = 129 \iff \ell = 129/11$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{129}{11}$

Solution de l'exercice 10.4 : (énoncé ►)

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n+1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $u_n > n^2$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 0 :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_0 = 1 > 0^2$
   - on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $u_{n+1} > (n+1)^2$
     or par hypothèse de récurrence $u_n > n^2 \Rightarrow u_n + 2n + 1 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ d'où $u_{n+1} > (n+1)^2$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $u_n > n^2$ alors par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Solution de l'exercice 10.5 : (énoncé ►)

1. Comme $(-1)^n = 1$ ou -1 on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \dfrac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$
   or $-n-1 \leq n-1 \Rightarrow \dfrac{-n-1}{n^2+1} \leq \dfrac{n-1}{n^2+1}$
   d'où par transitivité , $\dfrac{-n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$ c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$.
2. $\dfrac{n+1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$
   et comme $0 \leq |u_n| \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$ alors par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Solution de l'exercice 10.6 : (énoncé ►)

On a une forme indéterminée du type "$\infty \times 0$". L'idée est de faire apparaitre dans la parenthèse une espression de la forme $e^x - 1$ afin de faire intervenir la limite connue $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
u_n &= n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)\\
&= n^2 e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right)\\
&= n^2 e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\\
&= n^2 e^{\frac{1}{n+1}} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \times \frac{1}{n(n+1)}\\
&= \frac{n^2}{n(n+1)} e^{\frac{1}{n+1}} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}}\\
&= \frac{n}{n+1} e^{\frac{1}{n+1}} \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

en posant $x = \dfrac{1}{n(n+1)}$ on a bien $\lim n \to +\infty \dfrac{1}{n(n+1)} = 0$ qui permet d'utiliser la formule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ pour obtenir $\lim n \to +\infty \dfrac{e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$

ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1$

enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

d'où finalement par produit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Solution de l'exercice 10.7 : (énoncé ▶)

Le début nous fait penser à une identité remarquable ; on va utiliser la forme canonique :
$a^2+4ab+5b^2=(a+2b)^2-4b^2+5b^2=(a+2b)^2+b^2$
qui donne donc $u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2=(_n+2v_n)^2+v_n^2$
qui permet d'isoler $v_n^2=u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2-(_n+2v_n)^2$
comme un carré est positif, $\forall n\in\mathbb{N}, 2-(_n+2v_n)^2\leqslant 0$ donc $v_n^2\leqslant u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2$
d'où l'encadrement $0\leqslant v_n^2\leqslant u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2$
comme par hypothèse $\lim_{n\to+\infty}(u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2)=0$ alors par théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty} v_n^2=0$ puis finalement $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$
On procède de la même manière pour u_n

$$\begin{aligned}u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2&=5\left(v_n^2+\frac{4}{5}u_nv_n\right)+u_n^2\\&=5\left(\left(v_n+\frac{2}{5}u_n\right)^2-\frac{4}{25}u_n^2\right)+u_n^2\\&=5\left(v_n+\frac{2}{5}u_n\right)^2-\frac{4}{5}u_n^2+u_n^2\\&=5\left(v_n+\frac{2}{5}u_n\right)^2+\frac{1}{5}u_n^2\end{aligned}$$

d'où avec la même démarche que ci-dessus $0\leq\frac{1}{5}u_n^2\leq u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2$ puis comme par hypothèse $\lim_{n\to+\infty}(u_n^2+4u_nv_n+5v_n^2)=0$ alors par théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}u_n^2=0$ puis finalement $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

Solution de l'exercice 11.1 : (énoncé ▶)

1. $\sum_{k=1}^{n} n = n\sum_{k=1}^{n} 1$ car n n'est pas ici l'indice de la somme donc on peut le sortir
   et $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ donc $\sum_{k=1}^{n} n = n^2$
2. $\sum_{k=n+1}^{2n} n = n\sum_{k=n+1}^{2n} 1$ car n n'est pas ici l'indice de la somme donc on peut le sortir
   $=n(2n-(n+1)+1)$ car il y a $2n-(n+1)+1$ termes dans la somme.
   donc $\sum_{k=n+1}^{2n} n = n^2$
   on trouve la même réponse que précédemment puisqu'on a ajouté aussi n fois la même quantité n.
3. On a la formule $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ alors en y remplaçan n par $2n$ on a
   $\sum_{k=0}^{2n} k=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} k-\sum_{k=0}^{n} k$ par relation de Chasles
   $=\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}(2(2n+1)-(n+1))=\frac{n}{2}(3n+1)$

5. Ici on va considérer la somme en partant de 0 et y enlever les termes pour $k=0$ et $k=1$ qui n'y figurent pas

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2n}\left(k+2^k\right) &= \sum_{k=0}^{2n}\left(k+2^k\right)-0-1-2^0-2^1 \\
&= \sum_{k=0}^{2n}k+\sum_{k=0}^{2n}2^k-4 \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2}+2^{2n+1}-5 \\
&= n(2n+1)+2^{2n+1}-5
\end{aligned}$$

6. on n'a pas de puissance k et la borne inférieure n'est pas nulle alors on fait comme ci-dessus en commançat la somme à 0 et retranchant le terme pour $k=0$; on utilise aussi les propriétés sur les puissances pour faire apparaitre une puissance k en vue d'utiliser la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^0} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k-1 \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}-1 \\
&= \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-1 \\
&= \frac{1}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11.2 : (énoncé ▸)

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k-M_n)=\sum_{k=1}^{n}u_k-\sum_{k=1}^{n}M_n=\sum_{k=1}^{n}u_k-M_n\sum_{k=1}^{n}1=\sum_{k=1}^{n}u_k-nM_n=0 \text{ car } nM_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

Solution de l'exercice 11.3 : (énoncé ▸)

1.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \\
&= (\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+(\cancel{\ln 4}-\cancel{\ln 3})+\ldots\ldots+\left(\ln(n+1)-\cancel{\ln(n)}\right) \text{ telescopage} \\
&= \ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n}k^3\\ &= \left(\cancel{1^3}-0^3\right)+\left(\cancel{2^3}-\cancel{1^3}\right)+\left(\cancel{3^3}-\cancel{2^3}\right)+\cancel{.....}+\left((n+1)^3-\cancel{n^3}\right) \text{ telescopage}\\ &= (n+1)^3\end{aligned}$$

3. Ici on va utiliser l'astuce $k=k+1-1$ puis le fait que $(k+1)k!=(k+1)!$

$$\sum_{k=0}^{n}k\,k!=\sum_{k=0}^{n}(k+1-1)k!=\sum_{k=0}^{n}(k+1)!-\sum_{k=0}^{n}k! \underset{\text{telescopage}}{=} (n+1)!-0!=(n+1)!-1$$

Solution de l'exercice 11.4 : (énoncé ▸)

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\\ &= \cancel{\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\left(\frac{1}{n}+\cancel{\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}}\right)\\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}\\ &= \frac{n(2n+2)+n(2n+1)-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+2)(2n+1)}\\ &= \frac{2n^2+2n+2n^2+n-4n^2-6n-2}{n(2n+2)(2n+1)}\\ &= \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}<0\end{aligned}$$

donc la suite est décroissante.

Solution de l'exercice 11.5 : (énoncé ▸)

$$\begin{aligned}u_{k+1}-u_k &= (k+1)2^{k+1}-k2^k\\ &= k2^{k+1}+2^{k+1}-k2^k\\ &= k\left(2^{k+1}-2^k\right)+2^{k+1}\\ &= k\left(2^k\times 2-2^k\right)+2^{k+1}\\ &= k2^k(2-1)+2^k\times 2=2^k(k+2)\end{aligned}$$

ainsi $\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0$ par telescopage

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k=(n+1)2^{n+1}$$

Solution de l'exercice 11.6 : (énoncé ▸)

1. (a) $\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{k+1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

donc en réécrivant :

$\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

(b) les fonctions intégrées étant continues sur $]0;+\infty[$ et les bornes rangées dans l'ordre croissant :

$$\begin{aligned}\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} &\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} 1 dt \leq [\ln t]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1 dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$$

puis en sommant cette double inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow S_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) - \ln 1 \leq S_n \text{ telescopage au milieu}\end{aligned}$$

(c) On utilise ici une méthode bien pratique consistant à remettre "au milieu" d'une double inégalité une quantité qui apparaissait plutôt sur les 2 côtés.

Pour cela, de cet encadrement on extrait les 2 inégalités :

d'une part ,

$S_{n+1} - 1 + \leq \ln(n+1) \Rightarrow S_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1) \Rightarrow S_n \leq 1 + \ln n$ en remplaçant $n+1$ par n

d'autre part,

$\ln(n+1) - \ln 1 \leq S_n \Rightarrow \ln(n+1) \leq S_n$

enfin on regroupe ces 2 inégalités en une seule en mettant S_n au milieu :

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n}$$

(d) On divise cette double inégalité par $\ln n$ pour $n \geq 2$:

$\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \dfrac{S_n}{\ln n} \leq 1$

or $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \ln(1+u) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ alors par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$ puis donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$

Ainsi par théorème d'encadrement , $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

2. (a) Pour tout réel $t \neq -1$ on a

$$\begin{aligned}1-t+t^2+....+(-1)^{n-1}t^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k \\ &= \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \text{ somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \frac{1}{1+t}-\frac{(-1)^n t^n}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+t}+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{1+t}\end{aligned}$$

(b) $t \geq 0 \Rightarrow t+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{t+1} \leq 1$ car la fonction inverse est une bijection décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{t^n}{t+1} \leq t^n$ car $t^n \geq 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t+1}dt \leq \int_0^1 t^n dt$ en appliquant le réusltat admis

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t+1}dt \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Conclusion :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+1}}$$

(c) On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$

On intègre l'égalité obtenue dans le 4a :

$1-t+t^2+....+(-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1}{1+t}+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{1+t}$

$\Rightarrow \left[t-\dfrac{t^2}{2}+.....+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt+(-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}+.....+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = [\ln(t+1)]_0^1+(-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

$\Rightarrow T_n = \ln 2+(-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

or d'après le 4b et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = 0$

puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = 0$ car si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln 2$