

MARCHÉS DE L'ÉNERGIE

Etude de la prime de risque

À partir des articles suivants :

- Diko, P., Lawford, S., Limpens, V. (2006). Risk premia in electricity forward prices. *Studies in Nonlinear Dynamics Econometrics*, 10.
 - Benth, F. E., Cartea, Á., Kiesel, R. (2008). Pricing forward contracts in power markets by the certainty equivalence principle : explaining the sign of the market risk premium. *Journal of Banking Finance*, 32, 2006-2021.
-

Chiheb BEN SAID

Sungjin KIM

Introduction

Ce sujet se concentre essentiellement sur la notion de prime de risque. La prime de risque, ou « equity risk premium » en anglais, est le retour sur investissement supplémentaire offert par un produit financier par rapport à un investissement sans risque.

Ce rendement supplémentaire rémunère l'investisseur pour sa plus grande prise de risque. La valeur de la prime de risque dépend des variations du niveau de risque du produit financier. En principe, les produits plus risqués ont une prime de risque plus élevée.

A travers ce rapport, nous nous intéresserons à l'origine de la prime de risque comme définie dans les articles suivants :

- Diko, P., Lawford, S., Limpens, V. (2006) : Risk premia in electricity forward prices. *Studies in Nonlinear Dynamics Econometrics*, 10.
- Benth, F. E., Carlea, Á., Kiesel, R. (2008) : Pricing forward contracts in power markets by the certainty equivalence principle. *Journal of Banking Finance*, 32.

Nous effectuerons donc un résumé de ces 2 articles, en présentant notamment les modèles qui s'y trouvent et les utilisations qui en sont faites, puis on fera une simulation numérique pour estimer la prime de risque avec le Single-Factor Market Model.

1 Risk premia in electricity forward prices.

Depuis la déréglementation des marchés de l'électricité à la fin des années 90, l'électricité peut être échangée sur les marchés au comptant et à terme sur des bourses telles que Nordpool ou l'European Energy Exchange (EEX). Les bourses de l'électricité ont établi très tôt le commerce des contrats Forward et des contrats Futures, désormais, de gros volumes sont négociés en raison de la gestion des risques et de la spéculation.

L'électricité au spot n'est pas un actif échangeable, car elle n'est pas stockable. Ainsi, les échanges au spot et les prix sur les marchés de l'électricité ne sont pas définis au sens classique. De même, les contrats forward sur l'électricité présentent

des spécifications de contrat différentes de celles de nombreux autres marchés des forwards, ce qui influence directement le prix du contrat.

Dans ce 1er article, les données sur les prix spot proviennent des trois grands marchés d'électricité européens (EEX, PWN et APX), tandis que les données forwards proviennent de Platts, une société indépendante de publication de données sur le marché de l'énergie.

Le but est d'étudier la prime de risque dans le cadre d'un modèle standard de facteur spot / forward d'électricité, et de dériver le comportement implicite des prix forward, dans le cadre d'un modèle standard à facteur unique et dans le cadre du modèle à facteurs multiples. Nous évaluons ensuite la structure des termes et l'évolution temporelle des primes de risque pour chacun des marchés.

Si, par exemple, on adopte la stratégie suivante : Chaque jour i appartenant à $[1, D]$ (D nombre total d'observations ou l'horizon de temps), on investit le capital actuel $K(i-1)$ pour acheter le Forward de l'électricité au prix $F(i)$ au marché OTC, et on vend le spot de l'électricité au prix $S(i)$ afin de réduire la volatilité sur la stratégie. (Trading du couple Spot-Forward).

On suppose que $K(0) = 1$ et $K(d)$ est le capital de l'investisseur accumulé à la fin de la journée d , alors on a $\ln K(d) = \sum_{i=1}^d \ln S(i) - \ln F(i)$, le terme dans la somme est la prime de risque au jour i .

1.1 Modèle standard à facteur unique

1.1.1 Formulation générale du problème

Soit un espace de probabilité filtré (Ω, F, F_t, P) , où F_t est une filtration générée par un processus de Wiener unidimensionnel W_t , et P la mesure physique.

- Notons $S_t = \exp(X_t)$ prix spot de l'électricité, au temps t . L'évolution temporelle du prix log-spot suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont l'EDP est :

$$dX_t = \alpha(\beta_t - X_t) + \sigma dW_t \quad (1)$$

avec :

- α : la vitesse de réversion constante
- σ : la volatilité instantannée

— β_t : le niveau moyen variable dans le temps

Le prix du contrat forward à t , de maturité $T \geq t$ est noté $F(t, T)$. Lorsqu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage, la dynamique du prix forward $F(t, T)$, sous l'unique mesure risque-neutre Q équivalente à P , satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} d\tilde{W}_t \quad (2)$$

avec \tilde{W} un processus de Wiener sous Q .

La richesse de la stratégie de trading dans le modèle de marché à facteur unique satisfait l'équation suivante, sous la probabilité Q (On vérifie qu'il s'agit bien d'une Q -martingale) :

$$\frac{dK_t}{K_t} = \sigma d\tilde{W}_t \quad (3)$$

et sous la probabilité P (avec ν négatif et s'appelle le drift) :

$$\frac{dK_t}{K_t} = \nu dt + \sigma dW_t \quad (4)$$

D'après le théorème de Girsanov, les 2 mouvements browniens sont liés par : $d\tilde{W}_t + dW_t + \frac{\nu}{\sigma} dt$ et en remplaçant dans (2), on obtient :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \nu e^{-\alpha(T-t)} dt + \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW_t \quad (5)$$

montrant que le drift observé sur la stratégie de trading implique un drift fonction décroissante du temps à la maturité dans les contrats forward.

1.1.2 Estimation des paramètres :

Afin de calibrer le modèle à facteur unique sur les données du marché, on doit estimer les paramètres (ν, σ, α) . En pratique, les marchés de l'électricité établissent des contrats forwards pour une livraison sur une période de 1 semaine, 1 mois, 1 trimestre ou 1 année.

Si $\hat{F}(t, T_1, T_2)$ représente le prix forward à l'instant t , pour une livraison entre T_1 et T_2 , alors par absence d'arbitrage, on doit avoir :

$$\hat{F}(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} F(t, s) ds \quad (6)$$

Par application d'Itô, et on supposant que les prix forward sont approximativement égaux pour une livraison unique entre T_1 et T_2 , on approxime les prix forward par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dK_t}{K_t} &= \nu dt + \sigma dW_t \\ \frac{dF(t, T_1, T_2)/F(t, T_1, T_2)}{dK_t/K_t} &= c(t, T_1, T_2, \alpha) \\ c(t, T_1, T_2, \alpha) &= \frac{e^{-\alpha(T_2-t)}(1 - e^{(T_2-T_1+1)\alpha})}{(T_2 - T_1)(1 - e^\alpha)} \end{aligned} \quad (7)$$

Le paramètre α est estimé en minimisant l'erreur quadratique moyenne de la différence des termes de la 2ème équation dans le problème (7) et l'estimation de ν et σ se fait par maximum de vraisemblance (méthode des moindres carrés). les résultats sont présentés dans la figure 1 :

	EEX		APX		PWN	
	peak	off-peak	peak	off-peak	peak	off-peak
$\hat{\nu}$	-0.04211	0.01325	-0.04656	0.00732	-0.02232	0.00545
(p-value)	1.22×10^{-8}	0.01851	1.96×10^{-8}	0.38620	3.43×10^{-5}	0.19290
$\hat{\sigma}$	0.19849	0.16361	0.21905	0.24384	0.14428	0.12141
$\hat{\alpha}$	2	0.202	2	0.278	1.59	0.164
half-life	0.35	3.43	0.35	2.49	0.44	4.23

FIGURE 1 – Estimation des paramètres du modèle à facteur unique

Le modèle à un facteur unique illustre l'accent mis sur la prime de risque à court terme, et la principale conclusion est que les demi-vies des produits dans les heures de pointes (peak) EEX, APX et PWN sont toutes inférieures à une demi-journée. Le modèle à un facteur se focalise donc sur la prime de risque à court terme, et ne donne que la flexibilité nécessaire pour modéliser cette forte prime de risque. Cette analyse est étendue à travers le modèle à trois facteurs ci-dessous, où nous

n'avons pas été confrontés aux mêmes problèmes numériques, et où l'estimation n'est plus limitée.

1.1.3 Analyse en composantes principales

Comme les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée normale sont orthogonaux, nous pouvons réduire la dimension de $d\ln F/F$ en triant les valeurs propres par ordre décroissant de grandeur, puis en ne sélectionnant que les vecteurs propres ayant une forte contribution à expliquer la variation observée dans $d\ln F/F$, ce qui permet de déterminer le nombre approprié de facteurs de risque nécessaires. On peut donc faire une ACP sur la matrice de covariance empirique de $d\ln F/F$, pour les marchés étudiés et pour les heures de creuses et les heures de pointe.

Pour les heures de pointe de EEX, APX et PWN, nous constatons par exemple que les trois composantes principales expliquent respectivement 95,9 %, 97,3 % et 96,3 % de la variation. Pour les heures creuses, les valeurs sont ramenées à 89,2 %, 91,6 % et 87,5 %.

Les vecteurs propres associés aux trois composantes principales les plus importantes ont une interprétation utile. Par exemple, nous voyons que la première composante principale correspond aux effets à court terme, à travers le jour à venir. Les deuxième et troisième composantes principales correspondent respectivement aux effets à moyen terme (à une semaine, à un mois et à deux mois) et aux effets à long terme (à une semaine et jusqu'à trois ans).

On en déduit qu'un modèle à trois facteurs (correspondants aux forces motrices à court, moyen et long terme) constitue une amélioration par rapport au modèle simple à un facteur unique décrit ci-dessus. D'où cette 2ème analyse d'un modèle de marché plus réaliste, le modèle à facteurs multiples.

1.2 Modèle de marché à facteurs multiples

1.2.1 Formulation générale du problème

Le développement de cette partie sera faite par analogie avec le modèle à facteur unique décrit dans la première partie, en supposant F_t une filtration générée par

le processus de Wiener tridimensionnel $W_t = (W_t^1, W_t^2, W_t^3)$, et en notant $S_t = \exp(\beta_t + X_t^1 + X_t^2 + X_t^3)$ prix spot de l'électricité, au temps t .

Les équations (1), (2), (3), (4) et (5) deviennent donc :

$$dX_t^i = \alpha_i X_t^i + \sigma_i dW_t^i, i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma_1 e^{-\alpha_1(T-t)} d\tilde{W}_t^1 + \sigma_2 e^{-\alpha_2(T-t)} d\tilde{W}_t^2 + \sigma_3 e^{-\alpha_3(T-t)} d\tilde{W}_t^3 \quad (9)$$

$$\frac{dK_t}{K_t} = \sigma_1 d\tilde{W}_t^1 + \sigma_2 d\tilde{W}_t^2 + \sigma_3 d\tilde{W}_t^3 \quad (10)$$

$$\frac{dK_t}{K_t} = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)dt + \sigma_1 dW_t^1 + \sigma_2 dW_t^2 + \sigma_3 dW_t^3 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(t, T)}{F(t, T)} &= (\nu_1 e^{-\alpha_1(T-t)} + \nu_2 e^{-\alpha_2(T-t)} + \nu_3 e^{-\alpha_3(T-t)})dt \\ &+ \sigma_1 e^{-\alpha_1(T-t)} dW_t^1 + \sigma_2 e^{-\alpha_2(T-t)} dW_t^2 + \sigma_3 e^{-\alpha_3(T-t)} dW_t^3 \end{aligned} \quad (12)$$

La dernière formule nous permet d'utiliser tous les prix forwards historiques afin d'estimer la prime de risque potentielle sur le marché à terme à différents horizons de temps. L'absence de β_t montre aussi que notre estimation est robuste concernant les variations des prix de l'énergie, qui peut s'avérer complexe et difficile à modéliser.

1.2.2 Estimation des paramètres :

Par analogie avec le modèle à facteur unique et en appliquant la formule d'Itô on obtient :

$$\frac{dF(t, T_1, T_2)}{F(t, T_1, T_2)} = \sum_{i=1}^3 c(t, T_1, T_2, \alpha_i)(\nu_i dt + \sigma_i dW_t^i) \quad (13)$$

L'estimation des différents paramètres du modèle à 3 facteurs se fait comme au modèle à facteur unique et on obtient les résultats ci dessous :

Il convient de noter en particulier que les demi-vies associées au facteur à court terme (produits de pointe) sont toutes environ une demi-journée, et donc le modèle à un facteur surestime le taux de réversion à court terme.

	EEX		APX		PWN	
Long	peak	off-peak	peak	off-peak	peak	off-peak
$\hat{\nu}$	0.00115	0.00093	-0.00068	4.96×10^{-5}	0.00071	0.00133
(p-value)	0.05702	0.08980	0.60414	0.98622	0.34245	0.32479
$\hat{\sigma}$	0.01702	0.01285	0.03379	0.07489	0.01967	0.03519
$\hat{\alpha}$	0.005	0.00001	0.01	0.005	0.002	0.005
half-life	138.63	69314.72	69.31	138.63	346.57	138.63
Medium	peak	off-peak	peak	off-peak	peak	off-peak
$\hat{\nu}$	0.00079	-0.00309	0.06126	0.02036	0.00229	-0.00115
(p-value)	0.90052	0.73460	0.11878	0.86526	0.60256	0.92568
$\hat{\sigma}$	0.17721	0.21353	1.01947	3.13130	0.11403	0.32171
$\hat{\alpha}$	0.1	0.15	0.5	0.25	0.1	0.15
half-life	6.93	4.62	1.39	2.77	6.93	4.62
Short	peak	off-peak	peak	off-peak	peak	off-peak
$\hat{\nu}$	-0.02257	0.02948	-0.08119	-0.13910	-0.01429	0.01392
(p-value)	0.01785	0.00240	0.04543	0.35910	0.03374	0.28698
$\hat{\sigma}$	0.26831	0.22699	1.05358	3.95803	0.17472	0.3412
$\hat{\alpha}$	1.5	1.3	1.2	1.7	1.4	1.7
half-life	0.46	0.53	0.58	0.41	0.50	0.41

FIGURE 2 – Estimation des paramètres du modèle à 3 facteurs (correspondants aux forces motrices à court, moyen et long terme)

En utilisant les résultats de ce graphique, on peut visualiser la structure à terme des primes de risque : la dépendance du drift instantané des prix forwards sur la maturité.

On peut trouver des primes de risque négatives dues à la présence d'une asymétrie dans la distribution du prix spot, et des primes de risque positives dues au niveau de volatilité du prix spot. Cela reflète le changement d'équilibre de deux forces qui déterminent la prime de risque, à savoir la sensibilité à l'asymétrie et la variabilité du prix spot. Cette prime n'est pas présente dans les prix aux heures creuses, car elle n'est pas sujet à des pics. Ces primes sont plus faibles à mesure que les marchés gagnent en maturité et attirent davantage de spéculateurs.

Nous observons également que la prime de risque présente un comportement similaire sur les différents marchés.

Un axe d'amélioration serait d'étendre l'analyse de structure à terme à une prime de risque non constante.

2 Pricing forward contracts in power markets by the certainty equivalence principle

Dans ce 2 ème article, écrit par Fred Espen Benth, Alvaro Cartea et Rudiger Kiesel, on s'intéresse au marché des matières premières en général et on définit la prime de risque, notée $\pi(t, T)$, calculée au moment t et à livraison T comme la différence entre le forward $F(t, T)$ et l'espérance du prix au spot :

$$\pi(t, T) = F(t, T) - E[S(T)|F] \quad (14)$$

Sur les marchés des matières premières, cette prime est un indicateur important du comportement des acheteurs et des vendeurs et de leurs opinions sur le marché, qui s'étalent entre les horizons à court terme et les horizons à long terme.

Avant de commencer notre étude, nous supposons qu'une fonction d'utilité exponentielle de paramètre $\gamma > 0$: constante d'aversion au risque, gère les préférences des agents en matière de risque. Cette fonction s'écrit comme suit : $U(x) = 1 - \exp^{-\gamma x}$ avec $\gamma = \gamma_p$ pour le producteur et $\gamma = \gamma_c$ pour le consommateur.

Le but de cette étude sera de trouver des limites pour les prix forward grâce au principe d'équivalence de certitude entre deux marchés. Plus précisément, on cherche à obtenir deux limites :

- une limite supérieure, donnée par le prix maximum que le consommateur est prêt à payer avant le passage au marché spot.
- une limite inférieure donnée par le prix forward le plus bas que le producteur est prêt à négocier avant de passer au marché spot.

Il est alors important de remarquer que ces deux bornes permettront de maîtriser les prix forward en les assignant à un ensemble de prix forward d'équilibre réalisables.

2.1 Définition des limites de prix

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, On suppose que le prix spot de l'électricité, par exemple, suit le modèle multifacteur moyenne inversée suivant :

$$\begin{aligned} S_t &= \Lambda(t) + \sum_{m=1} X_m(t) + \sum_{m=1} Y_m(t) \\ dX_i(t) &= -\alpha_i X_i(t)dt + \sigma_i B_i(t)dt \\ dY_j(t) &= -\beta_j Y_j(t)dt + dL_j(t)dt \end{aligned} \tag{15}$$

avec :

- $\Lambda(t)$ est le niveau de prix spot saisonnier déterministe
- $X_i(t)$ et $Y_j(t)$ sont les solutions aux équations différentielles stochastiques
- $B_i(t)$ sont des mouvements browniens indépendants
- $L_j(t)$ sont les processus indépendants de Lévy

2.1.1 Limite inférieure du prix : Le producteur

lorsqu'un producteur livre le spot pendant l'intervalle de temps $[T_1 ; T_2]$. Il aura le choix d'acheter la quantité souhaitée sur le marché spot. Il devra faire face à une certitude sur les prix pendant cette période. Forcément, le producteur aura une décision à prendre. Celle-ci sera prise à l'instant $t < T_1$. Le second choix qui s'offre à lui consiste en la vente d'un contrat forward avec livraison sur la même période.

Par conséquent. Il est nécessaire de trouver le prix forward $F_{pr}(t, T_1, T_2)$ pour lequel la vente au forward ou au spot ne présente pas de différence. On montre que ce prix vaut :

$$F_{pr}(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\gamma_p} \frac{1}{T_2 - T_1} \ln E^p \left[\exp \left(-\gamma_p \int_{T_1}^{T_2} S(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{16}$$

Dans l'hypothèse où le prix spot suit la dynamique (15) nous pouvons obtenir une expression explicite de cette quantité.

$$\begin{aligned}
F_{pr}(t, T_1, T_2) = & \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \Lambda(u) du + \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\alpha}_i(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} X_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\beta}_i(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} Y_i(t) - \frac{\gamma_p}{2(T_2 - T_1)} \\
& \times \int_t^{T_2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(s) \bar{\alpha}_i^2(s, T_1, T_2) ds - \frac{1}{\gamma_p} \frac{1}{T_2 - T_1} \\
& \times \int_t^{T_2} \sum_{j=1}^n \phi_j(\gamma_p \bar{\beta}_j(s, T_1, T_2)) ds
\end{aligned} \tag{17}$$

où les fonctions $\bar{\alpha}_i$ et $\bar{\beta}_i$ sont définies comme suit :

$$\alpha_i(s, \bar{T}_1, T_2) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} (e^{-\alpha_i(T_1-s)} - e^{-\alpha_i(T_2-s)}), & s \leq T_1, \\ \frac{1}{\alpha_i} (1 - e^{-\alpha_i(T_2-s)}), & s \geq T_1 \end{cases} \tag{18}$$

et

$$\beta_i(s, \bar{T}_1, T_2) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_i} (e^{-\beta_i(T_1-s)} - e^{-\beta_i(T_2-s)}), & s \leq T_1, \\ \frac{1}{\beta_i} (1 - e^{-\beta_i(T_2-s)}), & s \geq T_1 \end{cases} \tag{19}$$

les sauts dans le marché réel (et dans le model) peuvent affecter ce prix d'indifférence. En effet, en partant du principe que les processus de saut L_j peuvent sauter uniquement vers le haut ou vers le bas, on constate que lorsque L_j est un processus qui ne possède que des sauts positifs il induit une augmentation de F_{pr} . En revanche, dans l'éventualité où L_j ne présente que des sauts négatifs, on voit que F_{pr} est diminué fortement.

Cela est parfaitement logique. En effet, le producteur sera forcé d'accepter des prix forward plus bas lorsqu'il y a un risque de baisse de prix sur le marché spot. Ainsi, Les pics avantagent le producteur, car ce dernier sera découragé pour signer des contrats forward peu chers puisque il aurait plus à gagner à vendre dans le marché spot.

2.1.2 Limite supérieure du prix : Le consommateur

La même analyse peut être réalisée concernant le consommateur. On pourra ainsi obtenir une expression similaire en gardant évidemment l'hypothèse que le prix spot suit la même dynamique. Le prix d'indifférence pour le consommateur vaut alors :

$$F_c(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\gamma_c} \frac{1}{T_2 - T_1} \ln E^p[\exp(-\gamma_c \int_{T_1}^{T_2} S(u) du) | \mathcal{F}_t] \quad (20)$$

et on peut calculer le prix explicite (par analogie avec la limite inf).

Finalement, on aboutit à la conclusion suivante quant à l'encadrement du prix forward :

$$F_{pr}(t, T_1, T_2) \leq F(t, T_1, T_2) \leq F_c(t, T_1, T_2) \quad (21)$$

Ainsi, tant que le prix est supérieur à son prix d'indifférence, le producteur préfère vendre au marché forward. De son côté, le consommateur ne veut pas trop payer au marché forward donc il ne veut pas payer plus cher que son prix d'indifférence. En laissant l'aversion pour le risque du producteur à zéro, nous nous retrouvons avec les bénéfices attendus de la vente sur le marché spot, également connu sous le nom de prix forecast du forward. On observe la même chose avec le prix d'indifférence du consommateur lorsque son aversion au risque tend vers zéro.

2.2 Prix du contrat Forward

Partant de la dernière inégalité, nous allons à présent essayer de déterminer le prix que devrait avoir le contrat forward. Pour ce faire, nous devons introduire la fonction déterministe $p(t, T_1, T_2)$ à valeurs dans $[0 ; 1]$.

Cette fonction décrit le pouvoir de marché du producteur. En effet, si le pouvoir de marché vaut 1, le producteur peut exercer le prix maximum possible c'est à dire F_c , s'il est égal à 0 il exerce au prix F_{pr} .

Par conséquent, le prix forward est défini comme le prix que le producteur et consommateur sont prêt à exercer connaissant le pouvoir de marché du producteur.

$$F_p(t, T_1, T_2) = p(t, T_1, T_2)F_c(t, T_1, T_2) + (1 - p(t, T_1, T_2))F_{pr}(t, T_1, T_2) \quad (22)$$

En choisissant une fonction "pouvoir du marché" déterministe, on aboutit à la fonction explicite du prix forward. En pratique, cette fonction peut dépendre d'un mouvement brownien stochastique.

Ainsi, ayant cette fonction p , et en supposant une symétrie d'information dans le marché, les deux contreparties vont accepter le prix F^p qui sera le juste milieu entre les 2 limites inf et sup de ce prix.

2.3 Calcul de la prime de risque

Pour fixer le prix d'un contrat forward, on commence par déterminer l'espérance conditionnelle sous risque neutre de la valeur de livraison future du contrat. L'une des particularités des marchés des matières premières est que le prix du risque peut être positif ou négatif suivant l'horizon temporel considéré, comme on vient de l'expliquer dans l'article précédent. Cherchons la relation qui relie le pouvoir de marché $p(t, T_1, T_2)$ et le prix du risque sur le marché.

En utilisant une paramétrisation du prix du risque sur le marché via une classe de probabilités neutres pour le risque, introduite par une transformation d'Esscher, nous concluons que des liens existent entre le pouvoir de marché et à la fois le prix du risque sur le marché et la prime de risque du marché.

De plus, pour garantir un marché à terme sans arbitrage, il faut fixer certaines conditions concernant le nombre de facteurs et les contrats négociés sur le marché.

Pour donner la formule explicite de la prime de risque, commençons par traduire le problème sous la probabilité risque neutre.

Soit une probabilité $Q^\theta := Q_B * Q_L$ avec :

- Q_B est la transformation de Girsanov des mouvements browniens $B_i(t)$
- Q_L est la transformation d'Esscher des processus de sauts $L_j(t)$
- θ est une fonction décrivant le prix du risque du marché

En appliquant le théorème de Girsanov, on aboutit à une expression explicite du prix forward.

$$\begin{aligned}
F^\theta(t, T_1, T_2) = & \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \Lambda(u) du + \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\alpha}_i(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} X_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\beta}_j(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} Y_j(t) + \int_t^{T_2} \sum_{i=1}^m \theta_{B,i}(s) \frac{\bar{\alpha}_i(s, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} ds \\
& + \int_t^{T_2} \sum_{j=1}^n \phi'_j(\theta_{L,j}(s)) \frac{\bar{\beta}_j(s, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} ds
\end{aligned} \tag{23}$$

Finalement, il en résulte la formule de la prime de risque :

$$\begin{aligned}
\pi(t, T_1, T_2) = & \int_t^{T_2} \sum_{i=1}^m \theta_{B,i}(s) \frac{\bar{\alpha}_i(s, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} ds \\
& + \int_t^{T_2} \sum_{j=1}^n (\phi'_j(\theta_{L,j}(s)) - \phi'_j(0)) \frac{\bar{\beta}_j(s, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} ds
\end{aligned} \tag{24}$$

Dans le cas où le prix du marché du risque de saut $\theta_{L,j}=0$ pour j dans $[[1, n]]$, nous constatons que lorsque les acteurs du marché ne sont pas compensés pour le risque de saut, la prime de risque de marché est positive tant que $\pi(t, T_1, T_2) > 0$

si nous supposons $\theta_{L,j}$ constant et positif ; $j > 0$, le signe de $\pi(t, T_1, T_2)$ dépendra de la monotonie de ϕ'_j

En général, le signe de la prime de risque du marché résultera à partir d'une combinaison de $\theta_{L,j}(t)$ et des propriétés de monotonie de ϕ'_j

2.4 Association prime de risque - pouvoir de marché

Pour pouvoir associer la prime de risque avec le pouvoir de marché, il nous faut comparer les deux expressions (22) et (23). Cela nous mène à une équation ayant $n+m$ inconnues. D'autre part, en supposant que nous avons $k \leq m+n$ contrats possédant des périodes de livraison qui ne se chevauchent pas, alors une solution de cette équation existe.

Dès lors qu'on trouve ces grandeurs manquantes, nous pouvons faire le lien entre le pouvoir de marché et la prime de risque.

A présent, analysons les implications des sauts et des variations normales du modèle.

Pour cela, considérons le cas où $m = n = 1$ et le pouvoir de marché $p(t, T_1, T_2) = p$ pour $p \in [0; 1]$. Aussi, nous considérons $L = N$ un processus de Poisson d'intensité de saut constante $k > 0$. Ce modèle ne comporte que deux facteurs, et ne donnera pas une courbe forward sans arbitrage pour un marché qui négocie des contrats avec de nombreux délais de livraison. En résolvant l'équation (4.3) nous obtenons :

$$\theta_B(t, T_1, T_2) = \frac{1}{2}(p(\gamma_{pr} + \gamma_c) - \gamma_{pr})\sigma^2\bar{\alpha}(t, T_1, T_2) \quad (25)$$

σ^2 et $\bar{\alpha}$ étant positifs, nous avons $\theta_B(t, T_1, T_2) < 0$ pour $p < \frac{\gamma_{pr}}{\gamma_{pr} + \gamma_c}$.

Ceci s'explique par le fait que si le producteur est plus fort, $p > 0.5$, il a le pouvoir supérieur dans la formation des prix et le prix du risque du marché devient positif. Faisons l'hypothèse que le prix dépôt suit la dynamique suivante :

$$dS(t) = (\mu\alpha S(t))dt + \sigma dB(t) \quad (26)$$

Dans ce cas, on connaît une expression explicite de $S(t)$, nous pouvons donc calculer le prix forward d'indifférence producteur et consommateur comme nous l'avons fait précédemment et ainsi nous trouverons une expression du prix forward connaissant le pouvoir de marché du producteur. Nous pouvons voir que le signe de π dépend de celui de $(\gamma_c p(t, T))(\gamma_c + \gamma_p)$. On a donc $\pi(t, T) > 0$ si $p < \frac{\gamma_{pr}}{\gamma_{pr} + \gamma_c}$ et inversement.

3 Simulation numérique et résultats

3.1 Les données

Nous avons utilisé les données sur les prix spot et de forwards (1WAH, 1MAH, 2MAH, 3MAH, 1QAH, 2QAH, 3QAH, 1YAH, 2YAH) du marché d'électricité française, du 01/01/2018 au 03/06/2019.

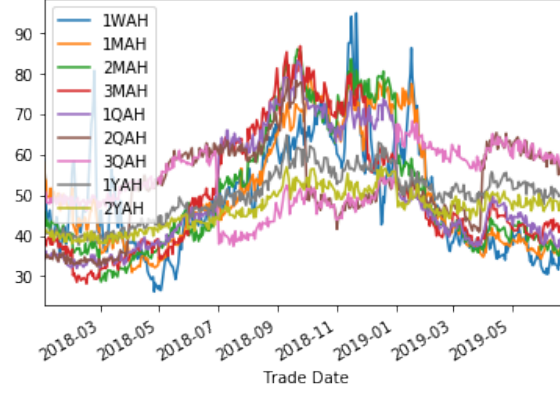


FIGURE 3 – les prix spot et forwards du 01/01/2018 au 03/06/2018

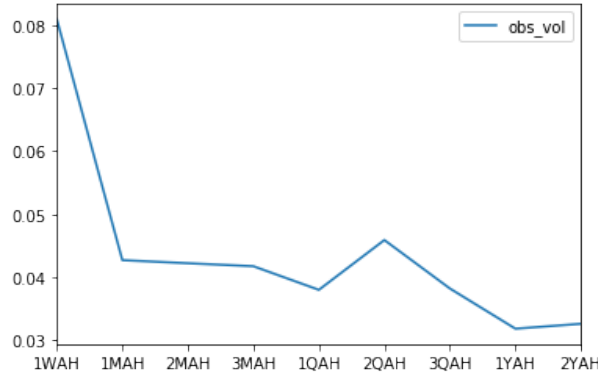


FIGURE 4 – les volatilités observés du 01/01/2018 au 03/06/2018

Nous avons utilisé le prix forward pour une semaine comme prix de "over the counter price", $F(i)$. Comme nous avons supposé au début, $K(0) = 1$ et $K(d)$ est le capital de l'investisseur accumulé à la fin de la journée d , alors on a $\ln K(d) = \sum_{i=1}^d \ln S(i) - \ln F(i)$, le terme dans la somme est la prime de risque au jour i . Nous avons défini que off-peak data est le prix de 01 :00 - 07 :00. De plus, nous avons utilisé un nouveau paramètre, one day risk premium.

$$R(i) := \ln S(i) - \ln F(i)$$

	peak	off_peak
D	377	377
E[R]	0.309657	-0.167928
s.d.[R]	0.210704	0.282324
t-static	28.5351	-11.5491

FIGURE 5 – les statistique de one day risk premium

3.2 Single-Factor Market Model

Nous avons la dynamique :

$$\frac{dK_t}{K_t} = \nu dt + \sigma dW_t \quad (27)$$

$$\frac{dF(t, T_1, T_2)/F(t, T_1, T_2)}{dK_t/K_t} = c(t, T_1, T_2, \alpha) = \frac{e^{-\alpha(T_2-t)}(1 - e^{(T_2-T_1+1)\alpha})}{(T_2 - T_1)(1 - e^\alpha)} \quad (28)$$

Les paramètres ν et σ sont estimés par least squares de (27), et α est estimé par minimization du "mean saured error" entre la gauche et droite de (28).

Discretizing nous donne $\Delta \ln K_t = (\nu - \sigma^2/2) + \sigma \epsilon_t$, ou ϵ_t est $N(0,1)$. On connaît que $\Delta \ln K_t = R_t$. De plus, nous avons supposé que $\alpha \in [0, 2]$.

	peak	off-peak
ν	0.33179	0.44447
p-value	1.0	1.83351e-118
σ	0.210424	0.471413
α	2.0	1.0101

TABLE 1 – Les résultat de simulation

Les résultats de notre simulation ne sont pas très corrélés avec les résultats de l'article. Nous avons utilisé le forward d'une semaine pour le prix OTC. A cause de ce choix, nous ne pouvons pas obtenir le bon résultat.

4 Conclusion

A travers ces 2 articles, nous avons pu comprendre les différentes méthodes de modélisation de la prime de risque dans les marchés de l'énergie. Cette prime a été définie comme le logarithme du quotient Spot/Forward price à l'instant t , ou la différence entre le Forward et l'espérance du prix au spot à t . Ces définitions se ressemblent au logarithme près.

Dans un premier temps, nous avons comparé 2 modèles (à facteur unique et à facteurs multiples) pour calculer la dynamique du prix du forward de l'électricité sur 3 marchés différents. En faisant une ACP, il s'est avéré que le modèle à 3 facteurs constituant les forces motrices à court, moyen, et long terme, constitue une amélioration par rapport au modèle simple et donne des résultats plus réalistes. On a ensuite estimé les paramètres des différents modèles pendant les heures creuses et les heures de pointes sur chacun des marchés, qui ont montré un comportement similaire. Une visualisation de la structure à terme de la prime de risque nous a permis de conclure que ces primes sont d'autant plus faibles à mesure que les marchés gagnent en maturité et attirent davantage de spéculateurs, elles peuvent être négatives ou positives.

Dans un second temps, on a envisagé une structure de marché avec des sauts (plus réaliste). On a encadré le prix du Forward entre 2 limites de prix d'indifférence du producteur et du consommateurs, explicitées grâce à la résolution des équations décrivant la dynamique du prix du spot, en supposant une fonction d'utilité exponentielle pour les agents du marché. Puis, en introduisant la fonction pouvoir du marché du producteur, on montre qu'on peut expliciter la vraie valeur du forward comme le juste équilibre entre ces 2 limites. Le calcul de la prime de risque se fait en transformant le problème sous la mesure risque neutre, et on montre que le signe de cette quantité dépend de la fonction pouvoir du marché et des aversions au risque du producteur et du consommateur.