Foundations of Optimization
Game Theory

章 宇

y.zhang@swufe.edu.cn

引例——田忌赛马

- 战国时期
- 齐王与大将田忌赛马
- 各三匹马
  - 上 > 中 > 下
  - 田上 < 齐上
  - 田上 > 齐中
- 田忌的谋士出一对策
  - 齐王先牵出马
  - 田忌后牵出

齐王：	上	中	下
田忌：	下	上	中
田胜负：	负	胜	胜

博弈论

- 竞争中，各方为达自己的目标和利益，须考虑对手的各种可能行动方案，并力图选取对自己最有利的方案。
- 对策就是决策者在竞争环境下做出的决策
- 博弈论是研究对策的理论与方法，既是现代数学的新分支，也是运筹学的一个重要学科，博弈论亦称对策论。

目录

- 博弈论的基本概念
- 矩阵博弈的最优纯策略
- 矩阵博弈的混合策略
- 其它类型的博弈论简介

博弈论的基本概念

- 博弈模型的三个基本要素：
- 1. 局中人：参与对抗的各方；
- 2. 策略集：局中人选择对付其他局中人的行动方案称为策略；某局中人的所有可能策略全体称为策略集；
- 3. （某一局势下的）益损值：局中人各自使用一个策略就形成了一个局势，一个局势决定了各个局中人的博弈结果，称为该局势的益损值。

博弈论的基本概念

- 田忌赛马

齐王的益损值表

	$\beta_1=$ (上中下)	(上下中)	(中上下)	(中下上)	(下上中)	(下中上)
$\alpha_1=$ (上中下)	3	1	1	1	-1	1
(上下中)	1	3	1	1	1	-1
(中上下)	1	-1	3	1	1	1
(中下上)	-1	1	1	3	1	1
(下上中)	1	1	1	-1	3	1
(下中上)	1	1	-1	1	1	3

田忌

齐王

博弈论的基本概念

- 局中人：齐王&田忌
- 齐王策略集：$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$
- 田忌策略集：$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6\}$
- 齐王的**赢得矩阵**：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

博弈论的基本概念

- 二人有限零和博弈（又称矩阵博弈）
  - 1. 局中人数量为2
  - 2. 每个局中人的策略集中策略数是有限的
  - 3. 每一局势均有确定的损益值，并且对同一局势的两个局中人的损益值之和为零
- “田忌赛马”是一个矩阵博弈
- 通常将矩阵博弈记为：$G=(S_1,S_2,A)$
  - S_1：甲的策略集
  - S_2：乙的策略集
  - A：甲的赢得矩阵

目录

- 博弈论的基本概念
- 矩阵博弈的最优纯策略
- 矩阵博弈的混合策略
- 其它类型的博弈论简介

矩阵博弈的最优纯策略

- 甲的赢得矩阵：

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

  - i 行代表甲方策略，$i=1,2,\ldots,m$
  - j 列代表乙方策略，$j=1,2,\ldots,n$
  - a_{ij} 代表甲方取策略 i，乙方取策略 j，这一局势下甲方的损益值；此时乙方损益值为$-a_{ij}$
- 注意前提假设：双方都是理性的，都从各自可能出现的最不利情形中选择最有利情形作为决策依据

矩阵博弈的最优纯策略

- 例1：
  - 甲乙队乒乓球团体赛
  - 每队3名球员，比赛共3局
  - 每局胜者+1分，负者-1分
  - 甲队策略（阵容）集为 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
  - 乙队策略（阵容）集为 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$
  - 甲队赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

  - 问：各队采用何阵容？

矩阵博弈的最优纯策略

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 3 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

- 分析：
  - 每行最小值分别为 $1,-3,-1$
  - 无论乙采取何策略，如甲采取 α_1 策略，都将至少得1分
  - 每列最大值分别为 $3,1,3$
  - 无论甲采取何策略，如乙采取 β_2 策略，都将最多输1分

矩阵博弈的最优纯策略

- α_1, β_2 分别称为局中人甲、乙的**最优策略**
- 由于（理性的）双方必然选择此策略，故称**最优纯策略**
- 最优纯策略不总存在！取决于A

存在的条件：赢得矩阵中如下等式成立

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

- 称(α_1, β_2) 为博弈 G 在纯策略下的**解**，或**鞍点**
- 把其值（1分）称为博弈 G 的**值**

矩阵博弈的最优纯策略

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{array} \qquad \min \\
\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{array} & A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-3\\3&-1&3\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{c}1\\ -3\\ -1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\max=1\\ \text{策略 } \alpha_1\end{array}\\
 & \max\ \underbrace{3\qquad 1\qquad 3}_{\substack{\min=1\\ \text{策略 }\beta_2}}
\end{array}
$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 1$$

矩阵博弈的最优纯策略

- 练习
  - 某行业市场上唯独的两家公司竞争市场份额
  - 每家公司三种备选策略
    - 增加广告投放
    - 打折
    - 延长保修期
  - 甲公司的赢得矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

例：甲增投广告，乙打折，则甲市场份额增加3%

矩阵博弈的最优纯策略

- 练习

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

  - 1、判断是否存在纯策略解
  - 2、如存在，该博弈的纯策略解为？

目录

- 博弈论的基本概念
- 矩阵博弈的最优纯策略
- 矩阵博弈的混合策略
- 其它类型的博弈论简介

矩阵博弈的混合策略

- 考虑矩阵博弈 $G=\{S_1,S_2,A\}$，当

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$$

时，可否按照从最不利情况下的最有利结果原则选择最优纯策略？

- 例：设赢得矩阵如下

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

矩阵博弈的混合策略

- 例：赢得矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

  - $6 = \max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij} = 8$
  - 甲 α_2，乙 β_1 最优吗?

- 分析：甲$\alpha_2 \Rightarrow$ 乙$\beta_2 \Rightarrow$甲$\alpha_1 \Rightarrow$乙$\beta_1 \Rightarrow$甲α_2
- 因此，甲取α_1, α_2，乙取β_1, β_2，均可能
- 此时，没有双方均可接受的平衡局势！

矩阵博弈的混合策略

- 怎么办？
- 对甲（乙）给出选取各策略的概率，使其在各种情况下平均赢得（损失）最多（最少）——即混合策略。

- 如何求解？
- 图解法、迭代法、线性方程法、线性规划法等，在此介绍线性规划法。

矩阵博弈的混合策略

- 例：赢得矩阵如下

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

- 决策变量：
  - x_1：甲使用策略 α_1 的概率
  - x_2：甲使用策略 α_2 的概率
  - v：最坏情况下，甲赢得的平均值

矩阵博弈的混合策略

- 例：赢得矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

- 目标：
  - $\max v$
- 约束条件：
  - 如乙采取 β_1： $5x_1 + 8x_2 \geq v$
  - 如乙采取 β_2： $9x_1 + 6x_2 \geq v$
  - 对于概率： $x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0$

矩阵博弈的混合策略

- 例：赢得矩阵如下

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9\\8 & 6\end{bmatrix}$$

- 总结：通过线性规划方法即可求得最优混合策略
- 练习：
  - 写出对偶问题
  - 说明对偶变量的现实含义

矩阵博弈的混合策略

- 练习：

  田忌赛马问题中，求齐王的最优策略

  – 齐王的赢得矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵博弈的混合策略

- 练习：

  田忌赛马问题中，求齐王的最优策略

  - 1. 存在最优纯策略吗？
  - 2. 如存在，其策略为？
  - 3. 如不存在，如何求得混合策略？

目录

- 博弈论的基本概念
- 矩阵博弈的最优纯策略
- 矩阵博弈的混合策略
- 其它类型的博弈论简介

其它类型的博弈论简介

- 分类依据
  - 局中人：单人博弈、二人博弈、多人博弈
  - 策略：定性/定量、简单/复杂、有限/无限
  - 得益：零和博弈、常和、变和
  - 过程：决策次序，静态/动态，单次/重复
  - 信息结构：完全信息，非完全信息
  - 是否合作：合作，非合作

囚徒困境

- 俩囚徒犯罪，隔离审问
- 局中人：囚徒1，囚徒2
- 策略：坦白，抵赖
- 损益值：
  - 都坦白：各入狱5年
  - 都抵赖：各入狱1年
  - 一方坦白另一方抵赖：坦白者释放，抵赖者入狱8年
- 你会坦白吗？为何？

囚徒困境

- 分析
  - 都抵赖对集体“有利”，但……

		囚徒2 坦白	囚徒2 抵赖
囚徒1	坦白	(-5, -5)	(0, -8)
囚徒1	抵赖	(-8, 0)	(-1, -1)

  - 无论囚徒2如何，坦白都是囚徒1的更好选择
  - 启示？
  - 个人最优 ≠ 集体最优！

囚徒困境的启示

- 期末作业

		同学乙	
		认真	敷衍
同学甲	认真	(90, 90)	(98, 70)
	敷衍	(70, 98)	(80, 80)

  – （认真，认真）是纳什均衡解
  – 当前解下，单方面的变动不会提升其益损值

- 为何内卷？

智猪博弈

- 猪圈里有理性大猪一只，小猪一只
- 猪圈一端是食槽装置，另一端是控制饲料的踏板，隔有一段距离
- 任何一只猪按踏板：食槽掉出10份饲料
- 按踏板再到食槽体力消耗值相当于2份饲料
- 能吃到的饲料份数：

		小猪：踩	小猪：等待
大猪	踩	(7, 3)	(6, 4)
	等待	(9, 1)	(0, 0)

智猪博弈

- 减去体力消耗值后：

大猪 \ 小猪	踩	等待
踩	(5, 1)	(4, 4)
等待	(9, -1)	(0, 0)

- 分析：
  - 小猪一定选择等待
  - 大猪不得不踩
- 启示？
  - 竞争中弱者生存之道

目录

- 博弈论的基本概念
- 矩阵博弈的最优纯策略
- 矩阵博弈的混合策略
- 其它类型的博弈论简介

练习题

- 问题：
  - 两个局中人进行博弈
  - 两人互相独立从1,2,3中任选一个数字
  - 和为偶数：乙支付给甲此和数的报酬
  - 和为奇数：甲支付给乙此和数的报酬
  - 1. 试求乙的最优策略
  - 2. 此游戏中甲乙公平吗？