METODOS ~~ESTADISTICOS~~ II 2015

Apuntes guía complementarios a Estimación de Parámetros por Intervalos de Confianza. (Cap 8)

Prof. Ruggieri: M

8.4 Obtención de estimadores de intervalo: El método del pivote

En la sección 8.1 definimos un estimador de intervalo como una regla que nos dice cómo utilizar las observaciones de muestra para calcular dos números que definen el intervalo en el que, con un alto grado de confianza, estará incluido el parámetro estimado. El intervalo aleatorio resultante (aleatorio porque las observaciones de muestra empleadas para calcular los extremos del intervalo

PROBABILIDAD y ~~ESTADÍSTICA~~ PARA INGENIERIA y CIENCIAS

Autores: W. Mendenhall
T. Sincich

4a Edición

Edit. Prentice Hall

son variables aleatorias) se denomina **intervalo de confianza**, y la probabilidad (antes del muestreo) de que contenga el parámetro estimado es su **coeficiente de confianza**. Si un intervalo de confianza tiene un coeficiente de confianza igual a .95, decimos que es un intervalo de confianza de 95%. Si el coeficiente de confianza es .99, decimos que el intervalo de confianza es de 99%, etc. En un punto posterior de esta sección se presentará una interpretación más práctica del coeficiente de confianza para un intervalo de confianza.

Definición 8.10

El coeficiente de confianza para un intervalo de confianza es igual a la probabilidad, antes del muestreo, de que el intervalo aleatorio contendrá el parámetro estimado.

Una forma de determinar un intervalo de confianza para un parámetro θ es adquirir una **estadística del pivote**, es decir, una estadística que sea función de los valores de la muestra y del parámetro único θ. Dado que muchas estadísticas tienen una distribución aproximadamente normal cuando el tamaño de la muestra n es grande (teorema del límite central), podemos construir intervalos de confianza para sus valores esperados empleando la variable aleatoria normal estándar z como estadística del pivote.

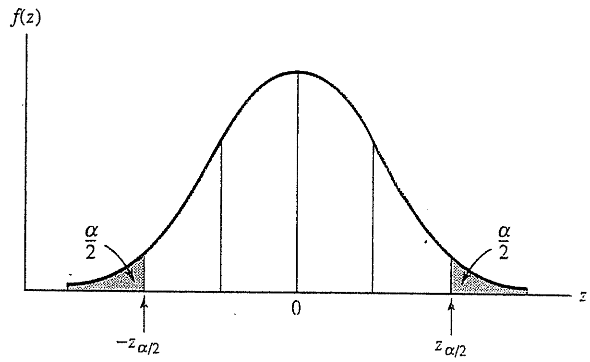
Por ejemplo, sea θ una estadística con una distribución de muestreo aproximadamente normal para muestras grandes con media $E(\hat{\theta}) = \theta$ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Entonces,

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

es una variable aleatoria normal estándar. Puesto que z también es función de únicamente la estadística de la muestra $\hat{\theta}$ y del parámetro θ, la utilizaremos como estadística del pivote. A fin de obtener un intervalo de confianza para θ, primero necesitamos una expresión de probabilidad para la estadística del pivote. Esto lo hacemos localizando los valores $z_{\alpha/2}$ y $-z_{\alpha/2}$ que ubican una probabilidad de $\alpha/2$ en cada cola de la distribución de z (véase la figura 8.5); es decir, $P(z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. Por la figura 8.5 es evidente que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

FIGURA 8.5 ▶ Localización de $z_{\alpha/2}$ para un intervalo de confianza



Si sustituimos la expresión para z en la expresión de probabilidad y aplicamos algunas operaciones algebraicas sencillas a la desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P(-z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq \hat{\theta} - \theta \leq z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) \\ &= P(-\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq -\theta \leq -\hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) \\ &= P(\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de que el intervalo formado por

$$\text{LCI} = \hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \quad \text{a} \quad \text{LCS} = \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$$

incluirá a θ es igual a $(1 - \alpha)$. Las cantidades LCI y LCS se denominan **límite de confianza inferior** y **límite de confianza superior**, respectivamente, para el intervalo de confianza. El coeficiente de confianza del intervalo será $(1 - \alpha)$.

La deducción de un intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ de muestra grande para θ se resume en el teorema 8.2.

Teorema 8.2

Tenga $\hat{\theta}$ una distribución normal para muestras grandes con $E(\hat{\theta}) = \theta$ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Entonces, un intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ para θ es

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \quad \text{a} \quad \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$$

El intervalo de confianza de muestra grande también puede entenderse intuitivamente examinando la figura 8.6. El valor de z que corresponde a un área $A = .475$ —es decir, el valor de z que ubica el área $\alpha/2 = .025$ en la cola superior de la distribución de z— es (véase la tabla 4 del apéndice II) $z_{.025} = 1.96$. Por tanto, la probabilidad de que $\hat{\theta}$ quedará a menos de $1.96\sigma_{\hat{\theta}}$ de θ es .95. Por la figura 8.6 es evidente que siempre que $\hat{\theta}$ cae dentro del intervalo $\theta \pm 1.96\sigma_{\hat{\theta}}$, el intervalo $\hat{\theta} \pm 1.96\sigma_{\hat{\theta}}$ incluirá a θ. Por tanto, $\hat{\theta} \pm 1.96\sigma_{\hat{\theta}}$ es un intervalo de confianza de 95% para θ.

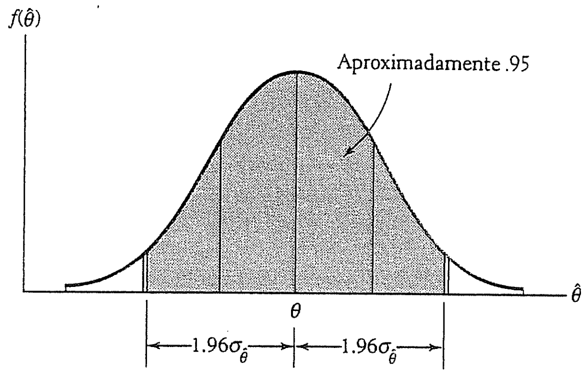


FIGURA 8.6 La distribución de muestreo de θ para muestras grandes

Podemos experimentar cierta dificultad al intentar aplicar este intervalo de confianza en la práctica. Suele suceder que $\sigma_{\hat{\theta}}$ sea función del parámetro θ que estamos tratando de estimar. Sin embargo, cuando el tamaño de la muestra es grande (cosa que hemos supuesto en toda la deducción), podemos sustituir la estimación $\hat{\theta}$ por el parámetro θ y así obtener un valor aproximado de $\sigma_{\hat{\theta}}$.

En el ejemplo 8.6 utilizaremos una estadística del pivote para calcular un intervalo de confianza para μ cuando el tamaño de la muestra es pequeño, digamos, $n < 30$. y σ^2 desconocido.

– Def. de una estadística π

EJEMPLO 8.6

Sean $\bar{y}$ y s^2 la media y la varianza de muestra con base en una muestra aleatoria de n observaciones ($n < 30$) de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Determine un intervalo de confianza de 95% para μ.

Solución

Se puede obtener una estadística del pivote para μ utilizando la estadística t del capítulo 7. Por la definición 7.5,

$$t = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

donde z y χ^2 son variables aleatorias independientes y χ^2 se basa en ν grados de libertad. Sabemos que $\bar{y}$ tiene distribución normal y que

$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es una variable aleatoria normal estándar. Por el teorema 7.4, se sigue que

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi^2$$

es una variable aleatoria ji cuadrada con $\nu = (n-1)$ grados de libertad. Decimos (sin demostrarlo) que $\bar{y}$ y s^2 son independientes cuando se basan en una muestra aleatoria seleccionada de una distribución normal. Por tanto, z y χ^2 son variables aleatorias independientes. Si sustituimos las expresiones para z y χ^2 en la fórmula para t, obtenemos

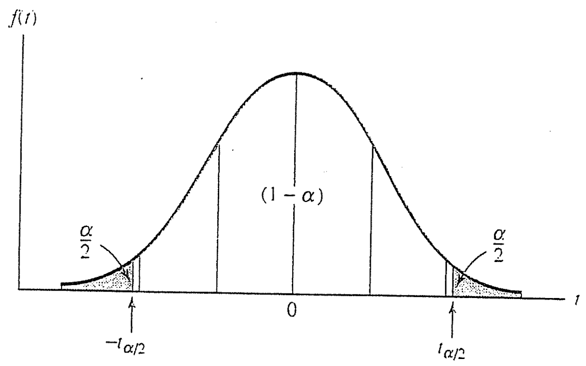
$$t = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/\nu}} = \frac{\dfrac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} = \frac{\bar{y} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Observe que la estadística del pivote es función únicamente de μ y de las estadísticas de muestra $\bar{y}$ y s^2.

El siguiente paso para calcular un intervalo de confianza para μ es elaborar una expresión de probabilidad para la estadística del pivote t. Seleccionaremos dos valores de t, llamándolos $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$, que correspondan a las probabilidades de $\alpha/2$ en las colas superior e inferior, respectivamente, de la distribución t (véase la figura 8.7). Por la figura 8.7, es evidente que

$$P(-t_{\alpha/2} \le t \le t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

FIGURA 8.7 ▶
La ubicación de $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$ para una distribución t de Student



Si sustituimos la expresión para t en la expresión de probabilidad, obtenemos

$$P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{y} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando la desigualdad que está entre los corchetes por $s/\sqrt{n}$ obtenemos

$$P\left[-t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \leq \bar{y} - \mu \leq t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha$$

Restar $\bar{y}$ de cada una de las partes de la desigualdad produce

$$P\left[-\bar{y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \leq -\mu \leq -\bar{y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha$$

Por último, multiplicamos cada término de la desigualdad por (−1), con lo que invertimos los signos de desigualdad. El resultado es

$$P\left[\bar{y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \bar{y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha$$

Por tanto, un intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ para μ cuando n es pequeña resulta

$$\bar{y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{a} \quad \bar{y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

A continuación aplicamos a una situación práctica el intervalo de confianza que dedujimos en el ejemplo 8.6.

EJEMPLO 8.7

Las plantas químicas deben regularse para evitar el envenenamiento de peces en los ríos o arroyos cercanos. Una de las determinaciones que se efectúan en los peces con objeto de evaluar la toxicidad potencial de las sustancias químicas es la longitud de los peces adultos. Si en un río o arroyo habitan abundantes peces adultos cuya longitud es menor que la longitud media de miembros adultos de su especie, esto constituye un indicio importante de que la corriente de agua sufre de contaminación química. Una planta química sometida a investigación por envenenamiento de un arroyo con cloro, contrató a un biólogo para estimar la longitud media de ciprinos de cabeza gruesa (los principales habitantes del arroyo) expuestos a 20 microgramos de cloro por litro de agua. El biólogo capturó 20 ciprinos recién nacidos en el arroyo y los crió en acuarios con esta concentración de cloro. Después de un periodo de maduración de 10 semanas se midió la longitud de cada pez (en milímetros), con los siguientes resultados:

$$\bar{y} = 27.5$$

$$s = 2.6$$

Establezca un intervalo de confianza de 95% para la longitud media verdadera de ciprinos de cabeza gruesa criados en agua contaminada con cloro. Suponga que las longitudes de los ciprinos tienen una distribución aproximadamente normal.

Solución

Recuerde que la distribución de muestreo de la estadística t depende de sus grados de libertad, ν. Los valores tabulados de t_a, tales que $P(t \geq t_a) = a$, se dan en la tabla 7 del apéndice II, para valores de ν desde 1 hasta 29, así como el valor de t_∞ cuando ν se vuelve infinitamente grande. En la tabla 8.1 se muestra una versión abreviada de esta tabla. Por ejemplo, suponga que una estadística t se basa en $\nu = 4$ grados de libertad (gl) y queremos determinar el valor de t_a que ubica la probabilidad $a = .025$ en la cola superior de la distribución t. El valor apropiado, sombreado en la tabla 8.1, es $t_{.025} = 2.776$.

En nuestro ejemplo, $n = 20$ y t poseerá $(n - 1) = 19$ grados de libertad. Puesto que deseamos determinar un intervalo de confianza de $95\% = (1 - \alpha)100\%$ para la longitud media μ de ciprinos de cabeza gruesa, $\alpha = .05$; debemos obtener el valor $t_{.025}$ que corresponde a $a = .025$ y 19 grados de libertad. Este valor se da en la tabla 7 del apéndice II y es $t_{\alpha/2} = t_{.025} = 2.093$. Entonces, el intervalo de confianza es

$$\bar{y} \pm t_{.025}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 27.5 \pm 2.093\left(\frac{2.60}{\sqrt{20}}\right)$$
$$= 27.5 \pm 1.22 \quad \text{o sea} \quad (26.28,\ 28.72)$$

Puesto que el coeficiente de confianza es .95, decimos que tenemos 95% de confianza en que el intervalo entre 26.28 y 28.72 milímetros contiene a la longitud media verdadera, μ, de ciprinos de cabeza gruesa criados en agua contaminada con cloro.

Sigue página: 366 pag.
otro ej.: con minitab -

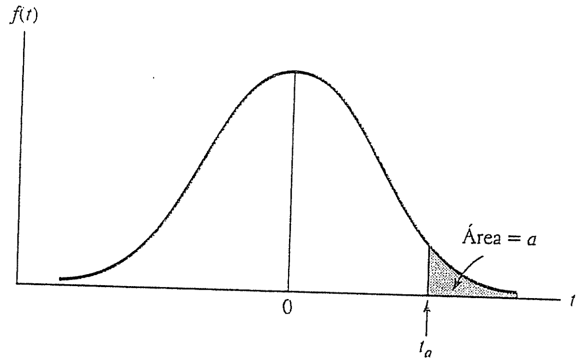


TABLA 8.1 Versión abreviada de la tabla 7 del apéndice II

Grados de libertad	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947

Con objeto de ilustrar la interpretación de un intervalo de confianza, programamos una computadora para extraer 1,000 muestras de tamaño $n = 10$ de una distribución normal con media $\mu = 10$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Se calculó un intervalo de confianza de 95% para μ, para cada una de las 1,000 muestras. Estos intervalos se muestran en la tabla 8.2. Sólo los 50 intervalos que tienen asterisco (*) no contienen a la media $\mu = 10$. La proporción de los intervalos que sí contienen a μ, .95, es exactamente igual al coeficiente de confianza. Esto explica por qué estamos razonablemente seguros de que el intervalo calculado en el ejemplo 8.7 (26.28, 28.72) contiene al verdadero valor de μ. *Si utilizáramos nuestro estimador de intervalo repetidamente, 95% de los intervalos formados contendrían μ.* no se adjuntó

8.23 Utilice la estadística del pivote dada en el ejercicio 8.22 para establecer un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ de muestra pequeña para $(\mu_1 - \mu_2)$.

8.5 Estimación de la media de una población

Por lo que explicamos en la sección 8.3, ya sabemos que un estimador puntual útil de la media de una población μ es $\bar{y}$, la media de la muestra. Por el teorema del límite central (teorema 7.2), sabemos también que si n es lo bastante grande, la distribución de muestreo de la media de la muestra $\bar{y}$ es aproximadamente normal con $E(\bar{y}) = \mu$ y $V(\bar{y}) = \sigma^2/n$. El hecho de que $E(\bar{y}) = \mu$ implica que $\bar{y}$ es un estimador insesgado de μ. Además, se puede demostrar (aunque no se hará aquí) que $\bar{y}$ tiene la varianza más pequeña de todos los estimadores insesgados de μ. Por tanto, $\bar{y}$ es el MVUE de μ, y no debe sorprendernos que $\bar{y}$ se considere el mejor estimador de μ.

Puesto que $\bar{y}$ es aproximadamente normal cuando n es grande, podemos aplicar el teorema 8.2 para establecer un intervalo de confianza de muestra grande de $(1-\alpha)100\%$ para μ. Si sustituimos $\hat{\theta} = \bar{y}$ y $\sigma_{\hat{\theta}} = \sigma/\sqrt{n}$ en la fórmula de intervalo de confianza dada en el teorema 8.2, obtenemos la fórmula que se presenta en el siguiente recuadro.

Intervalo de confianza de muestra grande de $(1-\alpha)100\%$ para la media de la población, μ

$$\bar{y} \pm \underbrace{z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{y}}}_{E} = \bar{y} \pm \underbrace{z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}_{E} \approx \bar{y} \pm \underbrace{z_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}_{E}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de z que ubica un área de $\alpha/2$ a su derecha, σ es la desviación estándar de la población de la cual se extrajo la muestra, n es el tamaño de la muestra y $\bar{y}$ es el valor de la media de la muestra.

[*Nota:* Si se desconoce el valor de σ (como suele suceder), se puede utilizar la desviación estándar de la muestra s para aproximar σ en la fórmula del intervalo de confianza. La aproximación es generalmente satisfactoria cuando $n \geq 30$.]

Supuestos: Ninguno (puesto que el teorema del límite central garantiza que $\bar{y}$ es aproximadamente normal sea cual sea la distribución de la población muestreada).

1 *Nota:* El valor del tamaño de muestra n necesario para que la distribución de muestreo de $\bar{y}$ sea aproximadamente normal varía dependiendo de la forma (distribución) de la población objetivo (véanse los ejemplos 7.6 y 7.7). Como regla empírica general, un tamaño de muestra n de 30 o más se considera *suficientemente grande* para que se aplique el teorema del límite central.

2 Cálculo del n:
Conocido el E, $(1-\alpha)\%$ y σ^2.

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{n = \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{E}\right)^2}$$

EJEMPLO 8.8

Suponga que un centro de cómputo regional desea evaluar el desempeño de su sistema de memoria en disco. Una medida del desempeño es el tiempo medio entre fallas de su unidad de disco. A fin de estimar este valor, el centro registró el tiempo entre fallas para una muestra aleatoria de 45 fallas de la unidad de disco. Se calcularon las siguientes estadísticas:

$$\bar{y} = 1{,}762 \text{ horas} \qquad s = 215 \text{ horas}$$

a. Estime el verdadero tiempo medio entre fallas con un intervalo de confianza de 90%.

b. Si el sistema de memoria en disco está funcionando correctamente, el verdadero tiempo medio entre fallas será mayor que 1,700 horas. Con base en el intervalo del inciso a, ¿qué puede usted inferir acerca del sistema de memoria en disco?

Solución

a. Para un coeficiente de confianza de $1 - \alpha = .90$, tenemos $\alpha = .10$ y $\alpha/2 = .05$; por tanto, el intervalo de confianza de 90% para μ está dado por

$$\bar{y} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{y} \pm z_{.05}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx \bar{y} \pm z_{.05}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1{,}762 \pm z_{.05}\left(\frac{215}{\sqrt{45}}\right)$$

donde $z_{.05}$ es el valor de z que corresponde a un área de cola superior de .05. De la tabla 4 del apéndice II, $z_{.05} = 1.645$. Entonces, el intervalo deseado es

$$1{,}762 \pm z_{.05}\left(\frac{215}{\sqrt{45}}\right) = 1{,}762 \pm 1.645\left(\frac{215}{\sqrt{45}}\right)$$

$$= 1{,}762 \pm 52.7$$

o sea, de 1,709.3 a 1,814.7 horas. Tenemos 90% de confianza en que el intervalo (1,709.3, 1,814.7) contiene a μ, el verdadero tiempo medio entre fallas de disco.

b. Puesto que todos los valores dentro del intervalo de confianza de 90% exceden las 1,700 horas, podemos inferir (con una confianza de 90%) que el sistema de memoria en disco está funcionando correctamente.

Hay ocasiones en que las restricciones de tiempo o costo pueden restringir el número de observaciones de muestra que se pueden obtener para estimar μ. En el caso de muestras pequeñas (digamos, $n < 30$), surgen los dos problemas siguientes:

1. Puesto que el teorema del límite central sólo se aplica a muestras grandes, no podemos suponer que la distribución de muestreo de $\bar{y}$ es aproximadamente normal. Por tanto, no podemos aplicar el teorema 8.2. Si la muestra es pequeña, la distribución de muestreo de $\bar{y}$ depende de la forma específica de la distribución de frecuencia relativa de la población muestreada.
2. La desviación estándar de la muestra s podría no ser una aproximación satisfactoria a la desviación estándar de la población σ si el tamaño de la muestra es pequeño.

Por fortuna, podemos utilizar técnicas de estimación basadas en muestras pequeñas si podemos suponer que la población de la cual se seleccionó la muestra tiene una distribución normal aproximada. Si este supuesto es válido, podemos utilizar el procedimiento del ejemplo 8.6 para establecer un intervalo de confianza para μ. La forma general de un intervalo de confianza de muestra pequeña para μ, con base en la distribución t de Student, se muestra en el siguiente recuadro.

Intervalo de confianza de muestra pequeña de $(1-\alpha)100\%$ para la media de la población, μ

$$\bar{y} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

donde la distribución de t se basa en $(n-1)$ grados de libertad.

Supuesto: La población de la cual se extrajo la muestra tiene una distribución normal aproximada.

EJEMPLO 8.9

La Instalación Experimental de Anillo Geotérmico, situada en Salton Sea en el sur de California, es una operación del Departamento de Energía de Estados Unidos que tiene como objetivo estudiar la factibilidad de generar electricidad a partir de las aguas calientes y de elevada salinidad del Salton Sea. Las experiencias operativas han demostrado que estas salmueras dejan depósitos de incrustaciones silíceas en las tuberías metálicas de las plantas, causando paros excesivos de las operaciones. Jacobsen *et al.* (*Journal of Testing and Evaluation*, marzo de 1981) determinaron que las incrustaciones se pueden reducir en cierto grado agregando soluciones químicas a la salmuera. En un experimento de selección se agregó uno de cinco agentes antiincrustaciones distintos a cada una de cinco alícuotas de salmuera y luego se filtraron las soluciones. Se hizo una determinación de sílice (partes por millón de dióxido de silicio) en cada muestra filtrada después de un tiempo de retención de 24 horas, con los siguientes resultados:

229 255 280 203 229

Estime la cantidad media de dióxido de silicio presente en las cinco soluciones con agentes antiincrustaciones. Utilice un intervalo de confianza de 99 por ciento.

Solución

El primer paso para establecer el intervalo de confianza es calcular la media, $\bar{y}$, y la desviación estándar, s, de la muestra de cinco concentraciones de dióxido de silicio. Estos valores, $\bar{y} = 239.2$ y $s = 29.3$, están sombreadas en el listado de MINITAB de la figura 8.8.

FIGURA 8.8 Estadísticas descriptivas de MINITAB para el ejemplo 8.9

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
PPM	5	239.2	229.0	239.2	29.3	13.1

	MIN	MAX	Q1	Q3
PPM	203.0	280.0	216.0	267.5

Para un coeficiente de confianza $1-\alpha = .99$ tenemos $\alpha = .01$ y $\alpha/2 = .005$. Puesto que el tamaño de la muestra es pequeño ($n = 5$), nuestra técnica de estimación requiere el supuesto de que la cantidad de dióxido de silicio presente en una solución con agente antiincrustaciones tiene una distribución aproximadamente normal (es decir, la muestra de cinco concentraciones de sílice se selecciona de una población normal).

Si sustituimos los valores de $\bar{y}$, s y n en la fórmula del intervalo de confianza de muestra pequeña para μ, obtenemos

$$\bar{y} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \bar{y} \pm t_{.005}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= 239.2 \pm t_{.005}\left(\frac{29.3}{\sqrt{5}}\right)$$

donde $t_{.005}$ es el valor que corresponde a un área de cola superior de .005 en la distribución t de Student basada en $(n - 1) = 4$ grados de libertad. De la tabla 7 del apéndice II obtenemos el valor t requerido, $t_{.005} = 4.604$. Al sustituir este valor obtenemos

$$239.2 \pm t_{.005}\left(\frac{29.3}{\sqrt{5}}\right) = 239.2 \pm (4.604)\left(\frac{29.3}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= 239.2 \pm 60.3$$

o sea, de 178.9 a 299.5 ppm. Así pues, si la distribución de las concentraciones de dióxido de silicio es aproximadamente normal, podemos tener 99% de confianza en que el intervalo (178.9, 299.5) contiene a μ, la verdadera concentración media de dióxido de silicio presente en una solución con agente antiincrustaciones.

El intervalo de confianza de 99% también puede obtenerse con un paquete de *software* de estadística. En la figura 8.9 se muestra un listado del análisis que hace MINITAB. Puede verse que el intervalo generado por computadora (sombreado en la figura 8.9) es idéntico al que calculamos.

FIGURA 8.9 Intervalo de confianza de MINITAB para el ejemplo 8.9

```
TEST OF MU = 300.000 VS MU N.E. 300.000

              N      MEAN     STDEV   SE MEAN    99.0 PERCENT C.I.
ppm           5     239.2      29.3      13.1   ( 178.9,   299.5)
```

Antes de concluir esta sección, es preciso hacer dos comentarios. El primero se refiere al supuesto de que la población muestreada tiene una distribución normal. En el mundo real, casi nunca sabemos si una población muestreada tiene una distribución normal o no. Sin embargo, estudios empíricos indican que divergencias moderadas respecto a este supuesto no afectan seriamente los coeficientes de confianza para intervalos de confianza de muestra pequeña. Por ejemplo, si la población de concentraciones de dióxido de silicio en las soluciones con agente antiincrustaciones del ejemplo 8.9 tiene una distribución con forma de campana, aunque no sea normal, es probable que el coeficiente de confianza real para el intervalo de confianza de 99% será cercano a .99; al menos lo suficiente para que resulte útil en la práctica. En consecuencia, quienes realizan experimentos utilizan a menudo el intervalo de confianza de muestra pequeña que presentamos en el recuadro para estimar la media de población de una distribución no normal siempre que la distribución tenga forma de campana y su asimetría no sea pronunciada. En el caso de poblaciones que se apartan considerablemente de la normalidad, se recomiendan otras técnicas de estimación (como la estimación robusta) o métodos independientes de la distribución (llamados **no paramétricos**). La estadística no paramétrica es el tema del capítulo 15.

El segundo comentario tiene que ver con que se conozca o se desconozca σ. Hemos demostrado (ejemplo 7.7) que cuando se conoce σ y la población muestreada tiene una distribución normal, la distribución de muestreo de $\bar{y}$ es normal sea cual sea el tamaño de la muestra. Es decir, si se conoce el valor de σ y se sabe que la muestra proviene de una población normal, se puede utilizar la distribución z en lugar de la distribución t para establecer intervalos de confianza. No obstante, en la realidad pocas veces (o nunca) se conoce σ. Por tanto, siempre utilizaremos s en lugar de σ en las fórmulas de intervalo de confianza, y la distribución de muestreo de $\bar{y}$ será una distribución t. Es por esto que la fórmula para un intervalo de confianza de muestra grande que presentamos al principio de esta sección sólo es aproximada; en el caso de una muestra grande, $t \approx z$. Muchos paquetes de *software* de estadística proporcionan los resultados para los intervalos de confianza *exactos* cuando se desconoce σ; por tanto, estos resultados se basan en la distribución t. Sin embargo, por razones prácticas seguiremos haciendo la distinción entre los intervalos de confianza z y t dependiendo de si el tamaño de la muestra es grande o pequeño.

EJERCICIOS

8.24 Ingenieros químicos de la Universidad de Murcia (España) realizaron una serie de experimentos para determinar cuál es la membrana más efectiva para usarse en un muestreador pasivo (*Environmental Science & Technology*, vol. 27, 1993). La efectividad de un muestreador pasivo se midió en términos de la tasa de muestreo, registrada en centímetros cúbicos por minuto. En un experimento se colocaron seis muestreadores pasivos con sus caras paralelas al flujo de aire, el cual tuvo una velocidad de 90 centímetros por segundo. Después de seis horas se determinó la tasa de muestreo de cada muestreador. Con base en los resultados, se calculó un intervalo de confianza de 95% de (49.66, 51.48) para la tasa de muestreo media.

a. ¿Cuál es el coeficiente de confianza para este intervalo?
b. Haga una interpretación teórica del coeficiente de confianza del inciso a.
c. Haga una interpretación práctica del intervalo de confianza.
d. ¿Qué supuestos, si acaso, son necesarios para que el intervalo produzca inferencias válidas?

8.25 La relación teórica entre flujo de calor y gradiente de temperatura para materiales homogéneos es bien conocida y se describe mediante una ecuación de Fourier. Sin embargo, la relación no se cumple para materiales no homogéneos como cuerpos porosos o con capilares, sistemas celulares, suspensiones y pastas. Se efectuó un experimento para estimar el tiempo de relajación térmica medio (definido como el tiempo medio necesario para acumular la energía térmica que se requiere para una transferencia propagadora de calor) de varios materiales no homogéneos (*Journal of Heat Transfer*, agosto de 1990). Se determinó un intervalo de confianza de 95% de 20.0 ± 6.4 segundos para el tiempo de relajación térmica medio de la arena.

a. Haga una interpretación práctica del intervalo de confianza de 95 por ciento.
b. Haga una interpretación teórica del intervalo de confianza de 95 por ciento.

8.26 Rocas inusuales en "Las Siete Islas" situadas en la parte baja del Río San Lorenzo en Canadá han estado atrayendo a los geólogos a esta área durante más de un siglo. Hace poco se completó un importante reconocimiento geológico de "Las Siete Islas" con el propósito de crear un modelo tridimensional de gravedad del área (*Canadian Journal of Earth Sciences*, vol. 27, 1990). Una de

8.43 Muchos veteranos de Vietnam tienen niveles peligrosamente altos de la dioxina 2, 3, 7, 8-TCDD en la sangre y el tejido graso como resultado de su exposición al defoliador Agente Naranja. Un estudio publicado en *Chemosphere* (vol. 20, 1990) informó los niveles de TCDD en 20 veteranos de Vietnam residentes en Massachusetts que pudieron haber estado expuestos al Agente Naranja. En la tabla se muestran las cantidades de TCDD (medidas en partes por billón) en el plasma sanguíneo y tejido graso extraídos de cada veterano, seguidas de un listado de SAS que proporciona estadísticas resumidas. Utilice la información del listado para construir un intervalo de confianza que le permita comparar el nivel medio de TCDD en el plasma con el nivel de TCDD medio en el tejido graso de veteranos de Vietnam expuestos al Agente Naranja. Interprete el resultado.

Veterano	*Niveles de TCDD en plasma*	*Niveles de TCDD en tejido graso*	*Veterano*	*Niveles de TCDD en plasma*	*Niveles de TCDD en tejido graso*
1	2.5	4.9	11	6.9	7.0
2	3.1	5.9	12	3.3	2.9
3	2.1	4.4	13	4.6	4.6
4	3.5	6.9	14	1.6	1.4
5	3.1	7.0	15	7.2	7.7
6	1.8	4.2	16	1.8	1.1
7	6.0	10.0	17	20.0	11.0
8	3.0	5.5	18	2.0	2.5
9	36.0	41.0	19	2.5	2.3
10	4.7	4.4	20	4.1	2.5

Fuente: Schecter, A. *et al.*, "Partitioning of 2, 3, 7, 8-chlorinated dibenzo-*p*-dioxins and dibenzofurans between adipose tissue and plasma lipid of 20 Massachusetts Vietnam veterans", *Chemosphere*, vol. 20, núms. 7-9, 1990, págs. 954-955 (tablas I y II).

N Obs	Variable	N	Minimum	Maximum	Mean	Std Dev
20	PLASMA	20	1.6000000	36.0000000	5.9900000	8.1279829
	FAT	20	1.1000000	41.0000000	6.8600000	8.4656209
	DIFF	20	-5.0000000	9.0000000	-0.8700000	2.9773001

8.8 Estimación de la proporción de una población

Ahora consideraremos un método para estimar la proporción binomial p de éxitos; es decir, la proporción de elementos de una población que tienen cierta característica. Por ejemplo, a un inspector de control de calidad podría interesarle la proporción de artículos defectuosos producidos en una línea de ensamble; o un proveedor de combustible para calefacción podría estar interesado en la proporción de hogares dentro de su área de servicio que tienen calefacción por gas natural.

Un candidato lógico para estimador puntual de la proporción de la población p es la proporción de la muestra $\hat{p} = y/n$, donde y es el número de observaciones de una muestra de tamaño n que tiene la característica de interés (es decir, y es el número de "éxitos"). En el ejemplo 7.7 demostramos que, si n es grande, $\hat{p}$ es aproximadamente normal, con media

$$E(\hat{p}) = p$$

y varianza

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

Por tanto, $\hat{p}$ es un estimador insesgado de p, y (aunque no se demostrará aquí) tiene la varianza más pequeña entre todos los estimadores insesgados; es decir $\hat{p}$ es el MVUE de p. Dado que $\hat{p}$ es aproximadamente normal, lo podemos utilizar como estadística del pivote y aplicar el teorema 8.2 para deducir la fórmula de un intervalo de confianza para p con muestra grande, fórmula que se muestra en el recuadro.

Intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ con muestra grande para una proporción de población, p

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{p}} \approx \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

donde $\hat{p}$ es la proporción en la muestra de observaciones con la característica de interés, y $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

[*Nota:* El intervalo es aproximado porque debemos sustituir los $\hat{p}$ y $\hat{q}$ de la muestra por los valores de población correspondientes en el cálculo de $\sigma_{\hat{p}}$.]

Supuesto: El tamaño de la muestra n es lo bastante grande como para que la aproximación sea válida. Como regla práctica, la condición de tamaño de muestra "suficientemente grande" se satisface si $n\hat{p} \geq 4$ y $n\hat{q} \geq 4$.

Observe que debemos sustituir $\hat{p}$ y $\hat{q}$ en la fórmula para calcular $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{pq/n}$ a fin de construir el intervalo. Esta aproximación será válida en tanto el tamaño de la muestra n tenga el tamaño suficiente. Muchos investigadores adoptan la regla empírica de que n tiene "el tamaño suficiente" si el intervalo $\hat{p} \pm 2\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$ no contiene a 0 ni a 1. Recuérdese (sección 7.6) que esta regla se satisface si $n\hat{p} \geq 4$ y $n\hat{q} \geq 4$.

EJEMPLO 8.13

Es común utilizar aceros inoxidables en las plantas químicas para manejar fluidos corrosivos. Sin embargo, estos aceros tienen especial susceptibilidad al agrietamiento por corrosión causada por esfuerzos en ciertos entornos. En una muestra de 295 fallas de aleaciones de acero que ocurrieron en refinerías de petróleo y plantas petroquímicas en Japón durante los últimos 10 años, 118 se debieron a agrietamiento por corrosión causada por esfuerzos y a fatiga de corrosión (*Materials Performance*, junio de 1981). Establezca un intervalo de confianza de 95% para la verdadera proporción de fallas de aleaciones causadas por agrietamiento por corrosión debida a esfuerzos.

Solución

La proporción de la muestra de fallas de aleación causados por corrosión es

$$\hat{p} = \frac{\text{Número de fallas de aleación en la muestra causadas por corrosión}}{\text{Número de fallas de aleación en la muestra}}$$

$$= \frac{118}{295} = .4$$

Por tanto, $\hat{q} = 1 - .4 = .6$. Entonces, el intervalo de confianza de 95% es, aproximadamente,

$$\hat{p} \pm z_{.025}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = .4 \pm 1.96\sqrt{\frac{(.4)(.6)}{295}} = .4 \pm .056$$

o sea (.344, .456). [Observe que la aproximación es válida porque tanto $n\hat{p} = 118$ como $n\hat{q} = 177$ son mayores que 4.]

Tenemos una confianza de 95% de que el intervalo entre .344 y .456 contiene la verdadera proporción de fallas de aleación causadas por corrosión. Si seleccionáramos repetidamente muestras aleatorias de $n = 295$ fallas de aleaciones y estableciéramos un intervalo de confianza de 95% basado en cada una de las muestras, esperaríamos que 95% de los intervalos de confianza construidos contendrían a p.

Existen procedimientos de muestra pequeña para estimar una proporción de población p. Estas técnicas son similares a los procedimientos de muestra pequeña para estimar una media de población μ. (Recuerde que $\hat{p} = y/n$ se puede considerar como la media de una muestra de resultados de Bernoulli 0–1.) Sin embargo, no presentaremos aquí los detalles porque la mayor parte de las encuestas prácticas utiliza muestras con el tamaño suficiente para aplicar el procedimiento de esta sección.

EJERCICIOS

8.44 Una encuesta sobre vivienda estadounidense realizada por el Departamento de Comercio de Estados Unidos reveló que 750 de 1,500 propietarios de casas muestreados siguen la filosofía de "hágalo usted mismo", es decir, realizaron ellos mismos la mayor parte del trabajo en por lo menos una de las mejoras o reparaciones de su hogar (Bureau of the Census, *Statistical Brief*, mayo de 1992). Estime, con un intervalo de confianza de 95%, la verdadera proporción de propietarios de casas estadounidenses que realizan ellos mismos la mayor parte del trabajo de mejoramiento o reparación de sus hogares. Interprete el resultado.

8.45 La encuesta del "Agujero Negro", patrocinada por el Consejo de Investigación sobre Empleo Profesional, informa cuáles son los puestos más difíciles de llenar en las listas de los reclutadores. En la encuesta más reciente, 95 de 285 reclutadores consideraron los puestos de ingeniería como los "más difíciles de llenar" (*Industrial Engineering*, agosto de 1990). Estime el verdadero porcentaje de reclutadores que consideran que los puestos más difíciles de llenar son los de ingeniería. Utilice un intervalo de confianza de 99 por ciento.

8.46 Refiérase al informe del *Journal of the Medical Association* (21 de abril de 1993) sobre la frecuencia del hábito de fumar cigarrillos entre adultos estadounidenses, ejercicio 8.29. De los 43,732 encuestados, 11,239 indicaron que fumaban actualmente y 10,539 indicaron que habían fumado antes pero que ya no lo hacían.

a. Establezca e interprete un intervalo de confianza de 90% para el porcentaje de adultos estadounidenses que actualmente fuman cigarrillos.
b. Establezca e interprete un intervalo de confianza de 90% para el porcentaje de adultos estadounidenses que antes fumaban cigarrillos.

8.73 Una corporación acerera grande llevó a cabo un experimento para comparar el contenido medio de hierro de dos entregas de mineral de hierro aterronado. Siguiendo las normas de la industria, se seleccionaron al azar n especímenes de mineral de hierro de cada entrega y se analizaron para determinar su contenido de hierro. Con base en experimentos previos, se sabe que el contenido de hierro varía dentro de un intervalo de aproximadamente 3%. ¿Qué tamaño deberá tener n si la compañía acerera desea estimar la diferencia en el contenido medio de hierro de las dos entregas con una exactitud de .05% y una confianza de 95% en que sea correcta? [*Sugerencia:* Para obtener un valor aproximado de σ_1 y σ_2, suponga $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y utilice un intervalo de 4σ. Entonces, $3 \approx 4$ y $\sigma \approx \frac{3}{4}$.]

8.74 Los *sistemas de planificación de requisitos de materiales* (MRP, *materials requirements planning*) son sistemas computarizados de planificación y control para operaciones de fabricación. Desde su introducción a mediados de los años 60, los sistemas MRP se han utilizado para gestionar inventarios de materias primas y trabajos en proceso al mismo tiempo que mejoran la atención a los clientes. Suponga que desea estimar la proporción p de empresas manufactureras que utilizan sistemas MRP. ¿Qué tamaño aproximado de muestra se requeriría para estimar p con una exactitud de .02 y un coeficiente de confianza de .95? (Utilice una estimación conservadora de $p \approx .5$ en sus cálculos.)

EJERCICIO OPCIONAL

8.75 En la determinación del tamaño de muestra necesario para estimar p, demuestre que el tamaño de muestra n es máximo cuando $p = .5$.

8.13 Resumen

La **estimación** es un procedimiento para inferir el valor de uno (o más) parámetros de población. Los **estimadores**, reglas que nos dicen cómo calcular una **estimación** en particular de un parámetro con base en información contenida en una muestra, pueden ser de dos tipos. Un **estimador puntual** utiliza los datos de muestra para calcular un solo número que sirva como estimación de un parámetro de población. Un **estimador de intervalo** utiliza los datos de muestra para calcular dos números que definen un intervalo que, con alguna probabilidad previamente determinada, contendrá el parámetro estimado.

Los estimadores puntuales y de intervalo se pueden obtener intuitivamente; resulta razonable utilizar las estadísticas de muestra para estimar los parámetros de población correspondientes (el **método de momentos**). Además, se pueden obtener estimadores puntuales empleando el **método de máxima verosimilitud** (sección 8.3) o el **método de mínimos cuadrados** (capítulo 11); los estimadores de intervalo se pueden establecer utilizando **estadísticas del pivote** y el procedimiento ilustrado en la sección 8.4. En general, preferimos los estimadores puntuales **insesgados** y que tienen **varianza mínima**, esto es, **estimadores insesgados con varianza mínima** (MVUE). Para un **coeficiente de confianza** dado, preferimos estimadores de intervalo con una anchura de intervalo media pequeña y sujeta a poca variación.

Presentamos varios estimadores puntuales y de intervalo e ilustramos su aplicación en situaciones prácticas. (Estos resultados se resumen en las tablas 8.10a y 8.10b.) Si repasamos los ejemplos, se hace evidente que la estimación, como método de inferencia, busca contestar la pregunta "¿qué valor tiene el parámetro θ?" En el capítulo 9 abordaremos las inferencias desde un punto de vista diferente.

TABLA 8.10a Resumen de procedimientos de estimación: Caso de una sola muestra

Parámetro θ	Estimador $\hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma_{\hat{\theta}}$	Aproximación a $\sigma\hat{\theta}$	Intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$	Tamaño de muestra	Supuestos adicionales
Media μ	$\bar{y}$	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\bar{y} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$n \geq 30$	~~Ninguno~~ TCLim ó Normal.
					$\bar{y} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ donde $t_{\alpha/2}$ se basa en $(n-1)$ gl	$n < 30$	Población normal
Proporción binomial p	$\hat{p} = \frac{y}{n}$	p	$\sqrt{\frac{pq}{n}}$	$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$	n suficientemente grande para que el intervalo $\hat{p} \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ no contenga a 0 o a 1	Ninguno
Varianza σ^2	s^2	σ^2	No se necesita	No se necesita	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$ Donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ son los valores tabulados de χ^2, dados en la tabla 8 del apéndice II, que ubican $\alpha/2$ en cada cola de la distribución ji cuadrada con $(n-1)$ gl, es decir, $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$ y $P(\chi^2 \geq \chi^2_{(1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha/2$	Todo n	Población normal