Введение в курс математического анализа

Понятие о логической символике

На ряду со специальными символами и терминами, которые будут вводиться в курсе математического анализа, рассмотрим распространенные символы математической логики.

$\neg$ - знак <u>отрицания</u>; знак $\neg A$ означает «не A» (отрицание высказывания A);

$\wedge$ - знак <u>конъюнкции</u>, заменяет союз «и»;

$\vee$ - знак <u>дизъюнкции</u>, заменяет союз «или»; запись $A \vee B$ означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний *A, B;*

$\Rightarrow$ - знак следования (импликация);

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности (эквивалентности).

Данные символы записаны в порядке приоритета.

В записи высказываний о множествах часто используют логические операторы:

$\forall$ - знак (квантор) существования. Заменяет слова: «для любого», «для каждого», «для всех». Заметим, что $\forall$ - перевернутая буква английского слова *All* (все).

: - «такой что».

$\exists$ - знак (квантор) существования. Заменяет слова: «существует», «найдется».

$\exists$ - перевернутая первая буква английского слова *Exists* (существует).

<u>Примеры.</u>

Пусть α и β некоторые высказывания, тогда:

1. $\alpha \wedge \beta$ - имеют место высказывания α и β одновременно.
2. $\alpha \vee \beta$ - имеет место высказывание α или β.
3. $\forall x \alpha$ - для любого x имеет место высказывание α.
4. $\exists x : \beta$ - <u>существует</u> x, для которого имеет место высказывание β.
5. запись $\alpha \Rightarrow \beta$ - означает, что α влечет β или β следует из α. Иначе: β - необходимое условие (признак) α, α - достаточное условие (признак) β.
6. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ - означает, что β следует из α и α следует из β. Иначе: α равносильно β; α необходимо и достаточно для β; α тогда и только тогда, когда β.
7. $\alpha \overset{def}{\Leftrightarrow} \beta$ (или $\alpha \overset{Def:}{\Leftrightarrow} \beta$) – утверждение β является определением понятия α.

Значок *def* означает, что сформулированное утверждение справедливо по определению (от английского *definition* – определение).

Аналогичное обозначение $\alpha := \beta$.

Основные понятия о множествах

Наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств. Основатель теории множеств немецкий математик Георг Кант (1845-1918гг).

Множество элементов (объектов) - одно из первичных (неопределенных) понятий математики, является одним из самых фундаментальных в математике.

Синонимы: множество, совокупность, собрание, коллекция объектов, объединяемых по какому-то правилу, характеристическому свойству).

Вообще, всеобъемлющего определения множества не существует.

Множества обозначаются заглавными буквами ***A, B, C, …*** **Объекты** множеств назовем его элементами и будем обозначать маленькими буквами: ***a, b, c, …***

Множества определяются некоторым свойством ***a***, которым должен обладать или не обладать каждый из рассматриваемых объектов: те объекты, которые обладают свойством ***a***, образуют множество ***A.***

Будем в дальнейшем рассматривать множества, входящие в некоторое определенное «универсальное» множество объектов ***M***. Тогда множества объектов ***A, B, C, …*** и т.д.

некоторые подмножества из ***M.*** Если ***a*** – элемент множества ***A***, то пишут $a \in A$ (***a*** принадлежит множеству ***A***) или $A \ni a$ (множество ***A*** содержит элемент ***a***).

Факт непринадлежности элемента «***a***» множеству ***A*** обозначается так $a \notin A$ (т.е. не обладает свойством ***a***).

Частные случаи множеств:

- **конечное** – состоящее из конечного числа элементов;
- **бесконечное** – состоящее из бесконечного числа элементов;
- $\varnothing$ - **пустое множество**. Множество, не содержащее ни одного элемента.

Два множества называются **равными**, если состоят из одних и тех же элементов:

Отрицание равенства $A \neq B$.

Отношение между множествами $A \subset B$ называется **отношением включения**.

Запись $A \subset B (B \supset A)$ означает: любой элемент множества ***A*** является элементом множества ***B.***

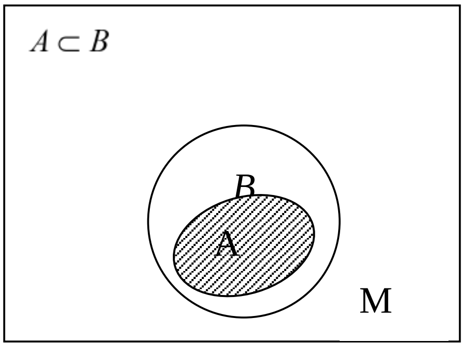
или: ***A*** – является подмножеством множества ***B***.

или: ***B*** содержит ***A.***

или: ***B*** включает ***A.***

Итак, $(A \subset B) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in A, x \in B$

$$(A \subset B) := \{\forall x \in M \mid (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\}$$



В этом случае $(A = B) \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Очевидно, что для любого множества ***A*:** $\varnothing \subset A$.

Замечание. Если x – объект, P – свойство, т.е. $P(x)$ - обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x \mid P(x)\}$ - обозначают множество (класс) объектов, обладающих свойством P.

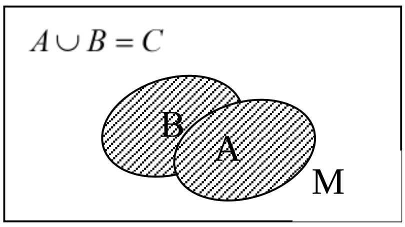
Простейшие операции над множествами.

Пусть A и B - подмножества множества ***M***, т.е. $A \subset M$ и $B \subset M$.

Определение 1. Объединением (соединением, суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из все тех и только тех элементов ***M***, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A или B.

Обозначают: $A \cup B = C = \{x \in M \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

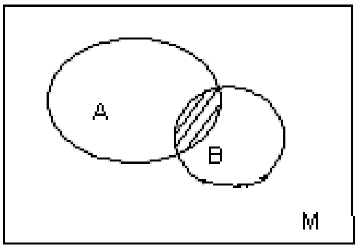
Пример. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$



Обобщение. Если $\{A_\alpha\}$ - совокупность множеств A_α из ***M***, то $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ есть объединение всех A_α так, что $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = \{x \in M \,/\, x \in A_\alpha, \text{хотя бы для одного } \alpha\}$, бесконечный набор $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{x \in M \mid x \in A_1 \vee x \in A_2, \ldots, \vee x \in A_n \ldots\}$

Определение 2. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество, образованное всеми теми элементами и только теми элементами множества ***M***, которые принадлежат одновременно множествам A и B.

Обозначение. $A \cap B = C := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.



Пример. $\{1,2,3\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3\}$.

Замечание. Если у множеств A и B нет общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

Обобщение. Если $\{A_\alpha\}$ - совокупность множеств из ***M***, то

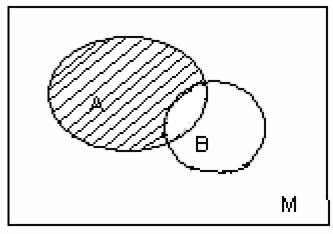
$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \{x \in M \mid x \in A_\alpha \text{ при каждом } \alpha\}.$$

Если бесконечный набор $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in M \mid x \in A_n \text{ для любого } n \in N\}$.

Непосредственно из $Df1 \wedge 2 \Rightarrow$ следующие предположения:

1. $A \subset A$, $A \overset{\text{объед}}{\cup} A = A$, $A \overset{\text{пересеч.}}{\cap} A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup B = B \cap A$ (коммутативность объединение);
3. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (ассоциативность объединения);
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (ассоциативность пересечения);
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ и вообще
7. $\left(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_\alpha (A_\alpha \cap B)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
8. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ и вообще
9. $\left(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha\right) \cup C = \bigcap\limits_\alpha (A_\alpha \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
10. $A \cup M = M$ (вытекает из **Определения 1**)
11. Отношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из двух отношений $A \cup B = B$, $A \cap B = A$
12. $A \subset B, B \subset C$, то $A \subset C$ свойство транзитивности вытекает непосредственно из *Определение.*
13. $A \subset B, B \subset A$, то $A = B$

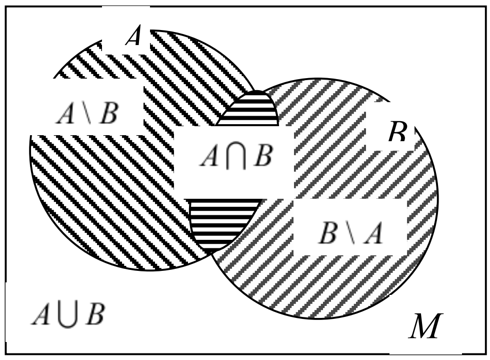
Определение 3. Разностью между A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов множества ***A***, которые не содержаться в множестве ***B***.



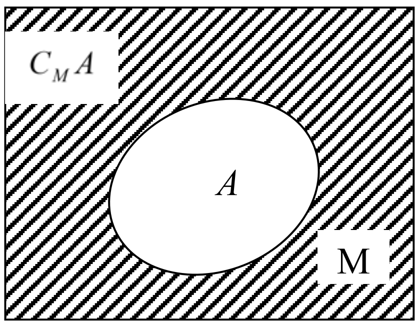
Обозначение: $A \setminus B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Пример. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,4,7,8,9\} = \{1,3,5\}$

Пример. Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$,тогда $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4,5\}$.



Определение 4. Разностью между множеством M и содержащемся в нем подмножеством A обычно называют дополнением A в M и обозначают через $C_M A$ или CA



Действительные числа.

Понятие числа, так же, как и понятие множества, является первичным и основным в математике. Под числом понимается некоторая величина, используемая для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Письменными знаками для обозначения чисел служат цифры, а также символы математических операций. Рассмотрим основные числовые множества.

Определение. Назовём множество $\Re$ – **множеством действительных (вещественных) чисел,** если для него выполнена следующая система аксиом:

I. **Аксиомы сложения.** *Определена бинарная операция сложения «+» ставящая в соответствие каждой паре элементов $x, y \in \Re$ некоторый элемент $x + y \in \Re$ называемый* **суммой элементов** x **и** y. *При этом должны быть выполнены следующие условия:*

I_1. Аксиома существования нулевого элемента

$$\exists 0 \in \Re : \forall x \in \Re \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x.$$

I_2. Аксиома существования противоположного элемента

$$\forall x \in \Re \; \exists (-x) \in \Re : \Rightarrow x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

I_3. Ассоциативность операции сложения

$$\forall x,y,z\in\Re\Rightarrow(x+y)+z=x+(y+z)$$

I$_4$. коммутативность операции сложения

$$\forall x,y\in\Re\Rightarrow x+y=y+x$$

II. **Аксиомы умножения.** *Определена бинарная операция умножения «$\cdot$» ставящая в соответствие каждой паре элементов $x,y\in\Re$ некоторый элемент $x\cdot y\in\Re$ называемый* **произведением** x **и** y. *При этом должны быть выполнены следующие условия:*

II$_1$. Аксиома существования единичного элемента

$$\exists 1\in\Re:\forall x\in\Re\setminus 0\Rightarrow x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

II$_2$. Аксиома существования обратного элемента

$$\forall x\in\Re\setminus 0\quad \exists x^{-1}\in\Re\setminus 0:\ x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1.$$

II$_3$. Ассоциативность операции умножения

$$\forall x,y,z\in\Re\Rightarrow(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$$

II$_4$. коммутативность операции сложения

$$\forall x,y\in\Re\Rightarrow x\cdot y=y\cdot x$$

II А. Закон дистрибутивности умножения относительно сложения.

$$\forall x,y,z\in\Re\Rightarrow(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

С точки зрения современной алгебры, набор этих аксиом означает, что множество действительных чисел является **полем**. Иногда здесь добавляется еще одна аксиома:

II В. Нетривиальность поля. Единица и ноль – это разные элементы, т.е. $1\neq 0$.

Далее следуют аксиомы, определяющие отношения между элементами в $\Re$.

III. **Аксиомы порядка.** *Между любыми элементами в $\Re$ имеется отношение «$\leq$» (меньше либо равно), т.е. $\forall x,y\in\Re$ установлено: справедливо отношение $x\leq y$ или нет. При этом должны быть выполнены следующие условия:*

III$_1$. Отношение рефлексивности

$$\forall x\in\Re\Rightarrow x\leq x.$$

III$_2$.

$$\forall x,y\in\Re\quad из\,(x\leq y)\wedge(y\leq x)\Rightarrow x=y.$$

III$_3$. Отношение транзитивности

$$\forall x,y,z\in\Re\quad из\,(x\leq y)\wedge(y\leq z)\Rightarrow x\leq z$$

III$_4$.

$$\forall x,y\in\Re\quad (x\leq y)\vee(y\leq x)$$

III А. Закон связи сложения и порядка.

$$\forall x,y,z\in\Re\quad из\,(x\leq y)\Rightarrow x+z\leq y+z$$

III А. Закон связи умножения и порядка.

$$\forall x,y\in\Re\quad из\,(0\leq y)\wedge(0\leq x)\Rightarrow 0\leq xy$$

Из аксиом III, III А и III В следует, что множество действительных чисел является **упорядоченным**.

IV. Аксиома непрерывности (полноты) $\Re$. *Какие бы ни были 2 непустых множества X и Y обладающих свойством, что для каждой пары элементов $x\in X$, и $y\in Y$ выполнено условие $x\leq y$, найдётся такое действительное число c $(c\in\Re)$, что неравенство $x\leq c\leq y$ справедливо для всех $x\in X$ и $y\in Y$.*

$$\forall X,Y\in\Re,\forall x\in X\ и\ \forall y\in Y,\ x\leq y\ \ \exists c\in\Re: x\leq c\leq y$$

Можно сказать, что число c отделяет числа множества X от чисел множества Y, т.е. число c является либо наибольшим в множестве X (тогда в множестве Y нет наименьшего числа) либо наименьшим в множестве Y (тогда в множестве X нет наибольшего числа)

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Поэтому действительные числа принято изображать точками прямой оси, на которой выбраны единица измерения отрезков и начальная точка.

Множество $\Re$ - **плотное**, т.е. между любыми двумя различными числами x и y содержится бесконечное множество действительных чисел z удовлетворяющих двойному неравенству $x<z<y$ (или $y<z<x$). Например, если $x<y$ то одним из таких чисел является $z=\dfrac{x+y}{2}$. В самом деле

$$x<y \Rightarrow \begin{cases} 2x<x+y \\ x+y<2y \end{cases} \Rightarrow 2x<x+y<2y \Rightarrow x<\frac{x+y}{2}<y$$

Изложенный выше подход к определению действительных чисел называется аксиоматическим. Помимо этого, существуют конструктивные подходы, такие как: теория фундаментальных последовательностей Кантора, теория бесконечных десятичных дробей, Теория сечений в области рациональных чисел.

Рассмотрим основные числовые подмножества множества действительных чисел

1. **Множество натуральных чисел** N. Это множество определяется следующим образом (индуктивный метод):

А) $1 \in N$

Б) если число $n \in N$, то число $(n+1) \in N$

Таким образом $N=\{1,2,\ldots,n,n+1,\ldots\}$

<u>Определение.</u> Скажем, что $p \in N$ является **минимальным числом** для множества $A \subset N$, если $p \in A$ и $p \le m, \forall m \in A$. Для минимального элемента p из множества A используется обозначение $p=\min A$.

<u>Аксиома</u> (Принцип минимального числа). *В любом непустом подмножестве натуральных чисел* $(N \neq \varnothing)$ *существует минимальное число*.

Принцип минимума является одной из аксиом теории натуральных чисел.

2. **Множество целых чисел** Z**.** Это множество состоит из всех натуральных чисел, всех противоположных им чисел и нуля.

Таким образом, $Z=\{\ldots-(n+1),-n,\ldots,-1,0,1,2,\ldots,n,(n+1),\ldots\}$.

3. **Множество рациональных чисел** $Q=\left\{\dfrac{m}{n}\middle| m \in Z, n \in N\right\}$ и $\dfrac{kp}{kq}=\dfrac{p}{q},\ \forall k \in Z,\ k \neq 0$.

4. **Иррациональными числами** называется числа, которое является действительными, но не являются рациональным. Множество иррациональных чисел обозначается I. В силу данного определения $I=\Re \setminus Q$.

Комплексные числа.

<u>Определение комплексного числа</u>

<u>Определение.</u> Комплексным числом z будем называть упорядоченную пару действительных чисел x, y, записанную в форме $z=x+iy$, где i- новый объект **"мнимая единица"**.

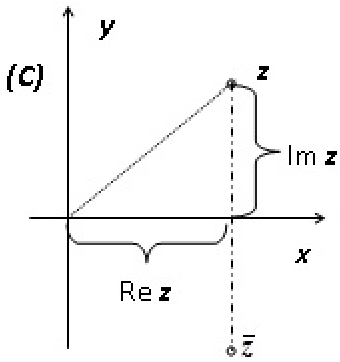
Первая компонента комплексного числа z, действительное число x, называется действительной частью числа z, это обозначается так: $x=\operatorname{Re} z$; вторая компонента, действительное число y, называется мнимой частью числа z: $y=\operatorname{Im} z$.

<u>Определение.</u> Два комплексных числа $z_1=x_1+y_1 i$ и $z_2=x_2+y_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \{(x_1=x_2) \wedge (y_1=y_2)\}.$$

Множество комплексных чисел не упорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + yi$ изображается как точка с координатами (x, y) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью C.



Определение. Под **мнимой единицей** i будем понимать число, имеющее на комплексной плоскости координаты $(0,1)$.

Определение. **Суммой** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, т.е.

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2.$$

Это означает, что геометрически комплексные числа складываются как векторы на плоскости, покоординатно.

Определение. **Произведением** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, т.е.

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2, \quad \operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2.$$

Для двух комплексных чисел с нулевой мнимой частью $z_1 = x_1 + 0i$ и $z_2 = x_2 + 0i$ получим

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (0 + 0)i = x_1 + x_2 + 0i,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0) + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0)i = x_1 x_2 + 0i,$$

т.е. для множества комплексных чисел с нулевой мнимой частью операции сложения и умножения не выводят за пределы этого множества.

Отождествим каждое такое число с действительным числом x, равным действительной части комплексного числа, т.е. будем считать, что $z = x + 0i \equiv x$. Теперь действительные числа - подмножество множества комплексных чисел C. Далее, числа с нулевой действительной частью, т.е. числа вида $z = 0 + yi = yi$, называются **мнимыми** числами. Мнимое число с единичной мнимой частью будем записывать просто как i: $0 + 1i = i$; квадрат этого числа, по определению умножения, равен

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1,$$

Замечание. В этой связи хочется отметить, что распространённое определение мнимой единицы, как числа, квадрат которого равен -1 является **некорректным**. Такое определение не обладает свойством однозначности, так как, например, число $-i$ тоже удовлетворяет уравнению $z^2 = -1$.

Легко убедиться, что операция сложения на множестве комплексных чисел Z имеет свойства, аналогичные аксиомам, которым удовлетворяет операция сложения действительных чисел (см. **Аксиомы действительных чисел**):

I.1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

I.2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

I.3. Существует такой элемент $0 \in C$, что $0 + z = z$ для $\forall z \in C$. Этот элемент - число $0 = 0 + 0i$.

I.4. Для каждого элемента $z \in C$ существует такой элемент $-z$, что $z + (-z) = 0$. Этот элемент - число $-x - yi$. Сумма чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $-z_2 = -x_2 - y_2 i$ называется разностью чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$.

Таким образом, множество комплексных чисел образуют **коммутативную (Абелеву) группу относительно сложения**.

Прежде, чем определить операцию деления комплексных чисел, введём понятия сопряжённого числа и модуля комплексного числа.

Определение. Число $\overline{z} = x - yi$ называется числом, **сопряжённым** к числу $z = x + yi$. Часто сопряжённое число обозначается также символом z^*.

Определение. Действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа $z = x + yi$.

Геометрически модуль числа z - длина радиуса вектора точки z; модуль разности чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между этими точками:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Найдём произведение сопряжённых чисел:

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = (x \cdot x - y \cdot (-y)) + (x \cdot (-y) + y \cdot x)i = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Таким образом, $z \cdot \overline{z}$ - всегда неотрицательное действительное число, причём $z \cdot \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Для нахождения частного комплексных чисел $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$ домножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Для операции умножения справедливы свойства

II.1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

II.2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

II.3. Произведение числа $1 = 1 + 0i \in C$ на любое число $z \in C$ равно z;

II.4. Для каждого числа $z \in C, z \neq 0$ существует такое число $z^{-1} \in C$, такое что

$$z \cdot z^{-1} = 1,\ z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2};$$

Таким образом, согласно этим свойствам, множество комплексных чисел без нуля образует **коммутативную группу относительно умножения**.

III.1. Операции сложения и умножения подчиняется закону дистрибутивности:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Группа свойств I – III говорит о том, что множество комплексных чисел является **полем.**

IV. Операция сопряжения имеет следующие свойства:

$$\overline{\overline{z}} = z; \quad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z; \quad z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z \cdot i; \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2;$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2; \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Примеры выполнения арифметических действий с комплексными числами: пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Тогда

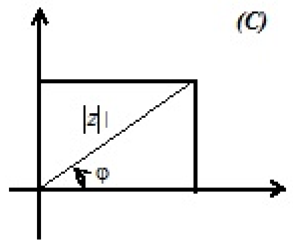
$$z_1+z_2=(2-3i)+(4+5i)=(2+4)+(-3+5)i=6+2i\,;$$

$$z_1\cdot z_2=(2-3i)\cdot(4+5i)=\left(2\cdot4+(-3)\cdot5\cdot i^2\right)+\left(2\cdot5+(-3)\cdot4\right)i=23-2i\,;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{(8-15)+(-12-10)i}{16+25}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i\,.$$

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа.</u>

Запись комплексного числа в виде $z=x+yi$ называется **алгебраической формой** комплексного числа. Изобразим число z как точку на плоскости с декартовыми координатами x,y. Если теперь перейти к полярным координатам ρ и φ то $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ |z|=\rho$, поэтому $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.



Угол φ называется **аргументом** комплексного числа. Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π). Если, например, $\varphi=\pi/6$, то значения φ, равные $\pi/6\pm2\pi,\ \ \pi/6\pm4\pi$ и т.д. тоже будут соответствовать числу z, поэтому значение аргумента, удовлетворяющее условиям $-\pi<\arg z\le\pi$, будем называть главным и обозначать $\arg z$. Для обозначения всех значений аргумента комплексного числа z применяется символ $\operatorname{Arg} z$: $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Запись комплексного числа в виде $z=|z|\left(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)\right)=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** числа.

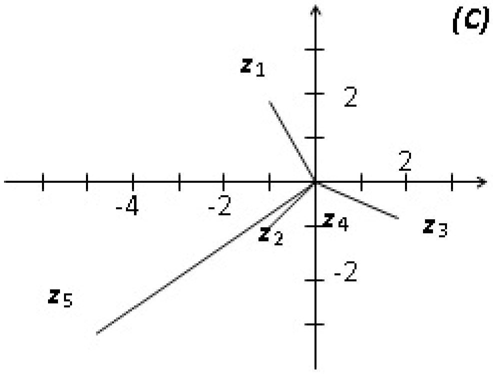
Число $0=0+0i$ - единственное число, модуль которого равен нулю; аргумент для этого числа не определён.

Переход от тригонометрической формы к алгебраической очевиден: $x=|z|\cos\varphi,\ x=|z|\sin\varphi$. Формулы для перехода от алгебраической формы к тригонометрической таковы:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2};\quad \arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x), & x>0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi, & x<0,\quad y>0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)-\pi, & x<0,\quad y<0;.\end{cases}$$

При решении задач на перевод алгебраически заданного комплексного числа в тригонометрическую форму следует изобразить это число на комплексной плоскости C и, таким образом, контролировать полученный результат.

<u>**Пример.**</u> Записать в тригонометрической форме числа $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=-1-i$, $z_3=\sqrt{3}-i$, $z_4=-i$, $z_5=-5-3i$.



Решение:

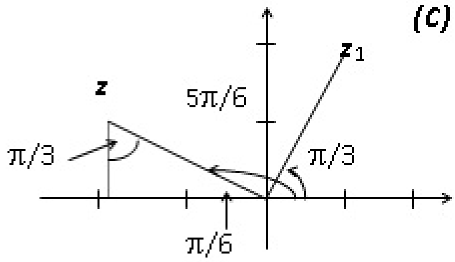
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \qquad z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],\ z_4 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$z_5 = \sqrt{34}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5} - \pi\right)\right].$$

Пример. Привести к тригонометрической форме число $z = -\sin(\pi/3) + i\cos(\pi/3)$.

Решение. Изобразим на комплексной плоскости C вместе с точкой z точку $z_1 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$.



Из рисунка понятно, что $\arg z = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$, поэтому $z = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$.

В тригонометрической форме легко интерпретируются такие действия, как умножение, деление, возведение в степень. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\cdot\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\cdot\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

Вывод: *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, аргументы складываются.*

Очевидно, если $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$\overline{z}_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = |z_2|(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)),$$

т.е. операция сопряжения не меняет модуль числа, и изменяет знак его аргумента, поэтому

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2} = \frac{|z_1|\cdot|\overline{z}_2|\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]}{|z_2|\cdot|\overline{z}_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Вывод: *при делении комплексных чисел их модули делятся друг на друга, аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.* $|z| = |\overline{z}|$; $\quad Arg\, z = -Arg\,\overline{z}$.

Показательная форма комплексного числа.

В XVIII веке Эйлером была получена формула, связывающая тригонометрические функции и экспоненту

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \quad \textbf{(ф-ла Эйлера)}$$

Доказательство этой формулы будет дано несколько позже в теме «Степенные ряды». Сейчас же мы рассмотрим одно из важных практических приложений этой формулы. Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \mathrm{ch}\, iy, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \mathrm{sh}\, iy,$$

где функции $\mathrm{ch}\, x$ и $\mathrm{sh}\, x$ называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом соответственно (подробнее в теме «Сложная функция»)

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то получим:

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.** В этой форме умножение и деление комплексных чисел выполняются и интерпретируются также легко, как и в тригонометрической:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}\right] \cdot \left[|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}\right] = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot e^{i(\varphi_2 + \varphi_2)} = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Кроме того, используя показательную форму записи, легко доказать следующие свойства:

1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3) $|z^n| = |z|^n$

С помощью показательной формы записи легко осуществляются операции возведения в степень и извлечения корня

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi} \quad \textbf{(формула Муавра)}$$

<u>Пример.</u>

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} = \left(\frac{2\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)}{\sqrt{2}\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)}\right)^{20} =$$

$$= \frac{2^{20}}{2^{10}} \frac{e^{i\cdot 20\pi/3}}{e^{i\cdot(-5\pi)}} = 2^{10} \frac{e^{i\cdot(6\pi + 2\pi/3)}}{e^{i\cdot\pi}} = 1024 \frac{e^{i\cdot 2\pi/3}}{-1} = -1024\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

В качестве второго примера выведем формулы для $\cos 5\phi$ и $\sin 5\phi$: если $z = \cos\phi + i\sin\phi$, то, по формуле бинома Ньютона,

$$z^5=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=C_5^0\cos^5\varphi+C_5^1 i\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi+C_5^2 i^2\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi+$$
$$+C_5^3 i^3\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi+C_5^4 i^4\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi+C_5^5 i^5\sin^5\varphi=$$
$$=\cos^5\varphi+5i\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi=$$
$$=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\left(5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi\right)$$

С другой стороны,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=\cos5\varphi+i\sin5\varphi,$$

поэтому, приравнивая действительные и мнимые части этих двух представлений пятой степени числа z, получим

$$\cos5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$

В заключение рассмотрим операцию извлечения корня n-ой степени из комплексного числа z. По определению, любое число w, такое, что $w^n=z$, называется корнем n-ой степени из числа z.

Пусть $z=|z|(\cos\operatorname{Arg}z+i\sin\operatorname{Arg}z)$, $w=|w|(\cos(\arg w)+i\sin(\arg w))$.

Тогда $w^n=|w|^n(\cos n\arg w+i\sin n\arg w)=|z|(\cos\operatorname{Arg}z+i\sin\operatorname{Arg}z)$.

Числа равны, если равны их модули и аргументы, поэтому $|w|^n=|z|$, $n\arg w=\operatorname{Arg}z$, откуда

$$|w|=\sqrt[n]{|z|},\quad \arg w=\frac{1}{n}\operatorname{Arg}z=\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi),$$

или

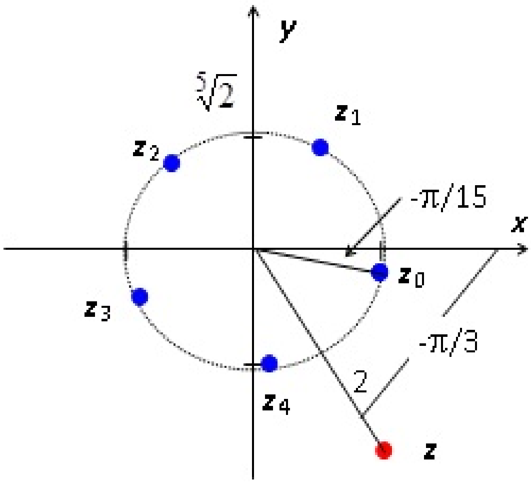
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)}$$

при этом n различных значения корня n-ой степени из числа z получаются при $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

<u>Пример.</u> Найти все значения $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$.

<u>Решение.</u> Число $z=1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме равно $z=2(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$.

Все пять значений корня даются формулой $z_k=\sqrt[5]{2}\left[\cos(-\pi/15+2\pi k/5)+i\sin(-\pi/15+2\pi k/5)\right]$ при $k=0,1,2,3,4$.



Они расположены на окружности радиуса $\sqrt[5]{2}$. Значение, соответствующее $k=0$, имеет аргумент $(-\pi/3):5=-\pi/15$, остальные расположены с интервалом по φ, равным $2\pi/5$, в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

Принцип математической индукции

Теорема. *Пусть некоторое множество **A** натуральных чисел* $(A \subset N)$ *удовлетворяет следующим 2-м условиям:*

1. $1 \in A$.
2. *если* $n \in A$, *то* $n+1 \in A$,

тогда множество A *содержит все натуральные числа, т.е.* $A = N$.

Доказательство: Допустим, что утверждение теоремы не имеет места, т.е. $A \neq N$. Тогда множество $CA = C_N A = N \setminus A \neq \varnothing$ содержит минимальный элемент – натуральное число n^* (принцип минимального числа). В силу предположения 1) $n^* > 1$. Но тогда, $n^* - 1$ тоже натуральное число, которое уже принадлежит A. Мы приходи к противоречию с условием 2).

На основании этой теоремы формулируется метод, который очень удобно использовать при доказательстве некоторых теорем.

Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение $A(n)$ справедливо для любого $(n \in N)$, достаточно доказать, что:

1) это утверждение справедливо в каком-нибудь частном случае, например при $n = 1$
2) из справедливости утверждения при $n = k$ следует справедливость утверждения при $n = k + 1$

Пример. Докажем, что $\forall n \in N$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Пусть $A = \left\{ n \in N \,/\, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\}$.

Заметим, что при $n=1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1$, т.е. $1 \in A$.

Далее, если $n \in A$, то

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right] =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right] = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$$

откуда следует, что $(n+1) \in A$. В силу принципа математической индукции имеем $A \subset N$, т.е. наша формула справедлива $\forall n \in N$.

Неравенство Якоби Бернулли
(1654-1705 гг., швейцарский математик)

Теорема. *Для* $\forall \alpha \in R,\ \alpha \geq -1$ и $\forall n \in N$ *справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \qquad (1)$$

Доказательство. Применим метод математической индукции

1. $1 \in A$, т.к. $(1+\alpha)^1 \geq 1+\alpha$ - очевидно.
2. Пусть $n \in A$, тогда $(\alpha+1)^{n+1} = (1+\alpha)^n (1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha)$, $(1+\alpha) > 0$.

$$1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (1+n)\alpha, \text{ (т.к. } n\alpha^2 \geq 0), \ (n+1) \in A.$$

Согласно принципу математической индукции $A = N$. Наше утверждение доказано.

Неравенство Коши

Среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

Теорема. ***(неравенство Коши)*** *Для любого набора* $\{a_1, a_2, ... a_n\} \subset [0, +\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \ \forall n \in N, \ (1)$$

Причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что если хотя бы одно из $a_i = 0$. Тогда левая часть неравенства (1) равна нулю, а правая неотрицательна, т.е. неравенство Коши выполняется. Поэтому будем далее предполагать, что все $a_i \neq 0$. Докажем вначале вспомогательное неравенство. Обозначим

$$G_k = \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}$$

Тогда

$$a_{k+1} = \frac{\left(G_{k+1}\right)^{k+1}}{\left(G_k\right)^k} = G_k \left(\frac{G_{k+1}}{G_k}\right)^{k+1} = G_k \left(1 + \left(\frac{G_{k+1}}{G_k} - 1\right)\right)^{k+1}$$

В соответствии с неравенством Бернулли имеем

$$G_k \left(1 + \left(\frac{G_{k+1}}{G_k} - 1\right)\right)^{k+1} \ge G_k \left(1 + (k+1)\left(\frac{G_{k+1}}{G_k} - 1\right)\right) = (k+1)G_{k+1} - kG_k$$

Таким образом

$$a_{k+1} \ge (k+1)G_{k+1} - kG_k \qquad (2)$$

Воспользуемся теперь методом математической индукции

1) При $n = 2$ (1) принимает вид $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}$, что легко доказать, исходя из неравенства $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0$.

2) Предположим, что (1) справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Имеем по предположению индукции

$$a_1 + a_2 + ... + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k} = kG_k$$

Далее

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} \ge kG_k + (k+1)G_{k+1} - kG_k = (k+1)G_{k+1}$$

Последнее неравенство означает, что

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{k+1}}$$

Неравенство Коши доказано.

Бином Ньютона.

$\forall\, a, в \in \Re$ *и* $\forall n \in N$ справедливо разложение

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \cdot b^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot k} a^{n-k} \cdot b^k + ... + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n. \qquad (*)$$

Обозначения.

1) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$ причем $0! \overset{Df}{=} 1$, $1! \overset{Df}{=} 1$.

2) $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} = C_n^k$; или $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_n^0 = 1, C_n^n = 1$

C_n^k - число сочетаний из “n” по “k”, *C* – первая буква французского слова *combination* – сочетание.

Тогда

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Где $C_n^k a^{n-k} b^k$ - называют членами разложения (*), а числа C_n^k **- коэффициентами разложения** или **биноминальными коэффициентами**.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A = \left\{ n \in N \,/\, \left(a+b\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \right\}$. Тогда для этих чисел выполняется формула бинома Ньютона. Проверим это с помощью метода математической индукции

1) $1 \in A$, т.к. $\left(a+b\right)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$

2) Пусть $n \in A$, т.е. на этом множестве выполняется формула $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, докажем что на этом множестве выполняется формула для *“n+1”*, тем самым докажем, что $N \subseteq A$

$$\left(a+b\right)^{n+1} = \left(a+b\right)\left(a+b\right)^n =$$
$$= \left(a+b\right)\left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n\right) =$$
$$= C_n^0 a^{n+1} + a^n b\left(C_n^1 + C_n^0\right) + \ldots + a^{n-k+1} b^k \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + \ldots + a^2 b^{n-1}\left(C_n^{n-1} + C_n^{n-2}\right) +$$
$$+ a b^n \left(C_n^n + C_n^{n-1}\right) + C_n^n b^{n+1}.$$

Биномиальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} + \frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-k+1\right)!} = \frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] =$$
$$= \frac{n!\left(n+1\right)}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!\left(n-k+1\right)k} = \frac{\left(n+1\right)!}{\left(n-k+1\right)!k!} = C_{n+1}^k,$$

Тогда

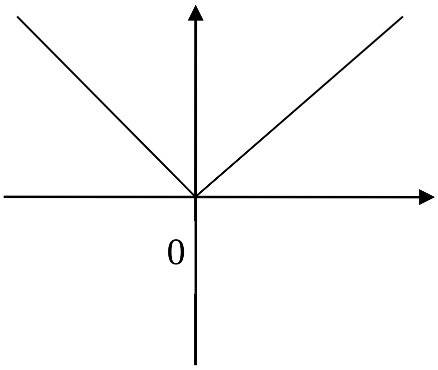
$$\left(a+b\right)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + \ldots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k.$$

т.к. $n+1 \in A$ и $\forall\, n \in N \Rightarrow A \in N$, поэтому формула бинома Ньютона истинна.

Абсолютная величина числа (модуль числа)

<u>Определение.</u> **Модулем действительного числа** x называется величина, обозначаемая $|x|$, которая находится по формуле:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \ge 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$$



$|x| \geq 0$

$|x| = |-x| \geq 0$

График функции $y = |x|$.

Модуль обладает следующими свойствами:

1) $\forall\, x \in R \quad |x| \geq 0\, и\, |x| = 0 \;\Leftrightarrow x = 0$

2) $\forall\, x, y \in R \;\; |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

<u>Доказательство:</u> Если $x \cdot y = 0$, то либо $x = 0$ либо $y = 0 \Rightarrow |x| \cdot |y| = 0 = |x \cdot y|$. Пусть $x \cdot y \neq 0$, если $x \cdot y > 0$, то x и y - одного знака. $|x||y| = |\pm x||\pm y| = xy = |xy|$, если же $x \cdot y < 0$, то x и y - разных знаков. $|x||y| = |\pm x||\mp y| = -xy = |xy|$

3) $\forall \varepsilon > 0$ *неравенство* $|x| \leq \varepsilon$ *эквивалентно двойному неравенству* $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

<u>Доказательство:</u> По *определению*: $-|x| \leq x \leq |x|$ и $-|x| \geq -\varepsilon$. Поэтому $-\varepsilon \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \varepsilon$, т.е. $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$

И обратно, пусть $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Тогда, если $x \geq 0$, то $|x| = x \leq \varepsilon$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x \leq \varepsilon$ (т.к. $-\varepsilon \leq x$). Следовательно, $|x| \leq \varepsilon$.

4) **<u>Неравенство треугольника</u>** $\forall x, y \in \Re$ *имеет место неравенство* $|x + y| \leq |x| + |y|$

<u>Доказательство</u>. По определению:

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Согласно свойству (3): $|x + y| \leq |x| + |y|$.

<u>Замечание.</u> $\forall x, y \in \Re$ имеет место неравенство $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

<u>Доказательство.</u> Имеем $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$, но тогда $|x - y| \geq |x| - |y|$ (*). Далее $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |x - y|$, откуда получаем $|x - y| \geq |y| - |x|$ (**). Из (*) и (**) следует $|x - y| \geq ||x| - |y||$

<u>Замечание.</u> $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Re$

а) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

б) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \geq ||x_1| - |x_2| - \ldots - |x_n||$

Имеют место равенство

5) $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|}$ доказать самостоятельно!!!

Верхняя и нижняя грани числовых множеств

<u>Определение 1.</u> Множество $A\subset R$ называется **ограниченным снизу**, если $\forall\, x\in A, \exists\, a\in R: x\geq a$, a – нижняя грань множества А.

<u>Определение 2.</u> Множество $A\subset R$ называется **ограниченным сверху**, если $\forall\, x\in A, \exists\, b\in R: x\leq b$, b – верхняя грань множества В.

<u>Определение 3.</u> Множество $A\subset R$ называется **ограниченным**, если оно ограниченно и снизу и сверху, т.е. $\forall\, x\in A, \exists\, a, b\in R: a\leq x\leq b$ или, что тоже самое $\forall\, x\in A, \exists\, M>0, M\in\Re: |x|\leq M$

<u>Замечание.</u> В записи:

а) $\forall\, x\in A: \alpha$ следует подразумевать: “Для любого элемента $x\in A$ имеет место предложение α”

б) $\alpha \overset{Df}{\Leftrightarrow} \beta$ - утверждение β является определением α.

<u>Определение 4.</u> $m=\inf A$ (*infinum* - низшее, латинское) - **точная нижняя грань** множества $A\overset{Df}{\Leftrightarrow}$, если m наибольшая из всех нижних граней, т.е.

а) $\forall\, x\in A \quad x\geq m$

б) $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, x\in A \quad : x-\varepsilon\leq m$

<u>Определение 5.</u> $M=\sup A$ (supremum – высшее, латинское) - **точная верхняя грань** множества $A\overset{Df}{\Leftrightarrow}$, если M наименьшая из всех верхних граней, т.е.

а) $\forall\, x\in A \quad x\leq M$

б) $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, x\in A \quad : x+\varepsilon\geq M$

<u>Теорема</u> (*Вейерштрасса*). *Всякое ограниченное сверху (снизу) множество* $A\subset R$ *обладает точной верхней (нижней) гранью, т.е.* $\exists\, M=\sup A \quad \left(\exists\, m=\inf A\right)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть непустое множество A ограничено сверху. Следовательно, существует непустое множество B - множество верхних границ, такое что

$$\forall x\in A \text{ и } \forall y\in B: x\leq y$$

Тогда, в силу аксиомы непрерывности (полноты) $\exists M\in\Re: x\leq M\leq y$. Точка M в этом случае принадлежит множеству B так как $x\leq M$. С другой стороны эта точка минимальная из B, так как $M\leq y$. Следовательно, $M=\sup A$.

<u>Теорема.</u> (Принцип Архимеда) $\forall a\in R, \quad \exists\, n\in N: n>a.$

Иными словами, утверждается, что не существует наибольшего натурального числа.

<u>Доказательство.</u> (От противного). Предположим, что

$\exists a\in R: \ \forall\, n\in N, n\leq a \Rightarrow \ N\neq 0$

и ограничено сверху числом α, т.е. $\exists B=\sup N$. Тогда

$$\forall B'<B, B'=B-1 \ \ \exists n'\in N: n'\geq B'=B-1, n'+1\geq B, n'+1\in N \ (!)$$

Полученное противоречие показывает, что множество N неограниченно, т.е. не наибольшего натурального числа.

<u>Теорема</u> (о существовании целой части числа)<u>.</u> $\forall\, x\in R, \ \exists$ *такое* $p\in Z$, *что выполнены неравенства* $p\leq x<p+1$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим |x|. Согласно принципу Архимеда $\exists\, n\in N, n>|x| \Leftrightarrow -n\leq x\leq n$.

Рассмотрим подмножество N: $A=\{-n; -n+1; -1; 0; 1; 2; ...; n-1; n\}$

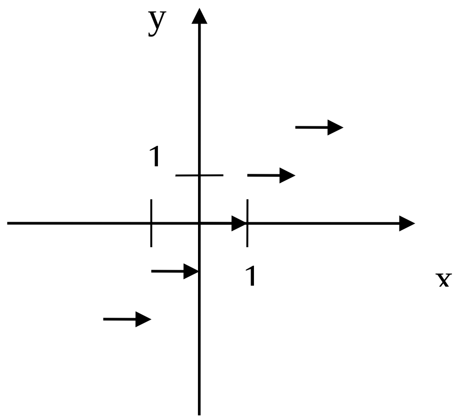
1) Если x - целое число, то $\exists\, p\in A$ такое что $p=x\Rightarrow p+1>x$, т.е. выполнено условие

$$p\leq x\leq p+1$$

2) Если x не целое, тогда если $x>n-1$, то $p=n-1$, если же $x<n-1$, тогда сравним x и $n-2$ …и после конечного числа шагов найдем такое число p, что $p\leq x\leq p+1$**.**

Определение 1. Целое число p удовлетворяющее условию ***Теоремы*** называется **целой частью числа** $x \in R$ и обозначается $p = [x]$.

График функции $y = [x]$.



Лемма о вложенных отрезках

Рассмотрим множество отрезков $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n \in \Re$.

Определение. Система отрезков $\{\Delta_n\}$ называется **системой вложенных отрезков**, если первый отрезок содержит второй, второй – третий,…, т.е. $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$

Лемма Коши-Кантора. *Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n = [a_n, b_n]$. Т.к. отрезки вложены, то $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$.

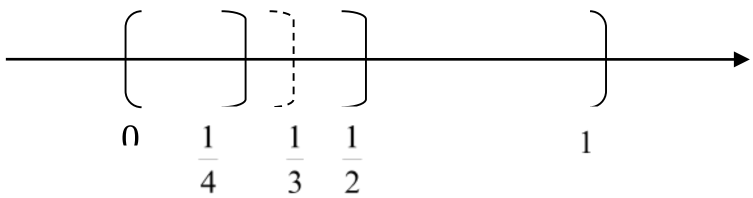
Рассмотрим два множества $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$, $A \ne \varnothing, B \ne \varnothing$. Докажем, что эти множества удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности (полноты).

Рассмотрим $\forall a_n \in A$ и $\forall b_m \in B$ положим $p = \max\{m, n\}$, тогда $a_n \le a_p \le b_p \le b_m \Rightarrow a_n \le b_m$.

Итак, доказано, что A и B - удовлетворяют аксиоме непрерывности (полноты), т.е. $\exists c \in R$, такое что $a_n \le c \le b_m$ $\forall a_n \in A$ и $\forall b_m \in B$ $\Rightarrow$ $a_n \le c \le b_n$, $\forall n$, т.е. $c \in \Delta_n$ $\forall n$, или $c \in \bigcap_n \Delta_n \Rightarrow \bigcap_n \Delta_n \ne 0$.

Замечание. Лемма не имеет места для системы вложенных интервалов.

Доказательство.



$$J_n = \left(0; \frac{1}{n}\right), n \in N$$

Допустим $\bigcap_n J_n \ne 0$, т.е. $\exists a \in J_n$, $\forall n \in N$, т.е. $0 < a < \frac{1}{n}$ (*) $\forall n \in N$, $\frac{1}{a} > 0$. Согласно принципу Архимеда $\exists n_0 \in N, n_0 > \frac{1}{a}$, но $a < \frac{1}{n_0}$, т.к. $n_0 \in N$ и (*).

Получаем противоречие, возникшее из предположения. Следовательно, утверждение верно.

Метрические и арифметические пространства.

Для получения содержательных результатов в математическом анализе необходимо введение понятия расстояния между точками множества (метриками).

<u>Определение.</u> Множество **X** называется **метрическим пространством**, если $\forall x, y \in X$ поставлено в соответствие число $\rho(x,y)$ причем:

1) $\rho(x,y) \geq 0 \ \ \forall x,y \in X$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ - аксиома симметрии.
3) $\forall x,y,z \in X$, $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ - аксиома треугольника

$\rho(x,y)$ расстояние между элементами x и $y \in X$.

$\rho(x,y)$ - метрика.

<u>Пример.</u> $\Re$ - множество точек на плоскости. $\Re$ - метрическое пространство с расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$.

Частным случаем метрического пространства является арифметическое пространство.

<u>Определение.</u> "n" - **мерными арифметическим пространством** $\Re^n$ будем называть множество упорядоченных совокупностей из "n" действительных чисел: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$ с метрикой $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;

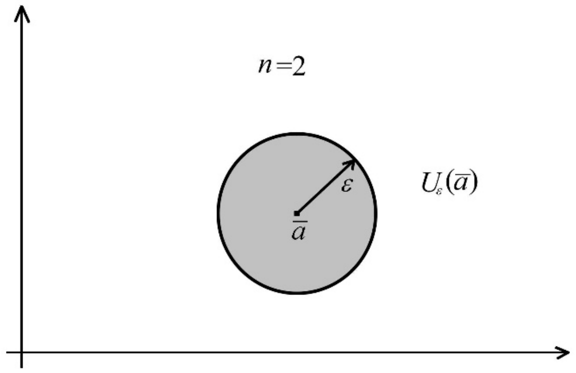
Можно показать, что все аксиомы расстояния выполняются.

<u>Частные случаи.</u>

1. $\Re^1 = \Re$ - множество действительных чисел (совокупность точек на действительной оси), числовая прямая $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$
2. $\Re^2$ - совокупность точек с координатами x_1 и x_2, т.е. $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Re^2$. При этом $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^2 \ \Rightarrow \ \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$
3. $\Re^3$ - множество точек в пространстве с координатами x_1, x_2 и x_3 (трехмерное арифметическое пространство), т.е. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3$, $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$.

Открытые, замкнутые и компактные множества

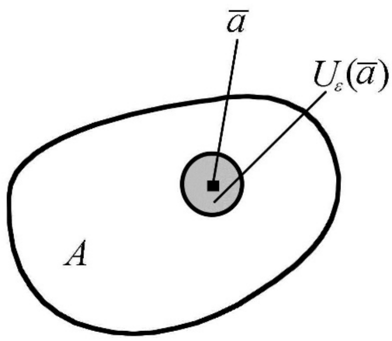
<u>Определение.</u> ε-*окрестностью* точки $\mathbf{a} \in R^n$ называется множество точек $\mathbf{x} \in R^n$ таких, что $\rho(\mathbf{x},\mathbf{a}) < \varepsilon$. Обозначим ее $U_\varepsilon(\mathbf{a})$.



__Замечание 1.__ В случае функции двух переменных **окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$

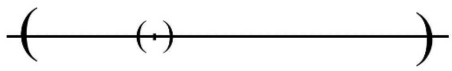
__Замечание 2.__ Как уже было отмечено ранее, в случае функции одной переменной окрестностью точки x_0 является симметричный относительно этой точки интервал. Для неё, как правило, используется специальное обозначение $O_\varepsilon(x_0)$

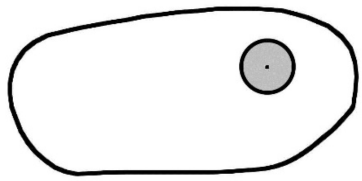
__Определение.__ Пусть $\mathbf{a} \in A \subset R^n$. Тогда $\mathbf{a}$ называется **внутренней точкой** этого множества, если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.



__Определение.__ $E \subset R^n$ - **открытое** множество, если все его точки - внутренние.

Примеры: интервал, круг без границы.





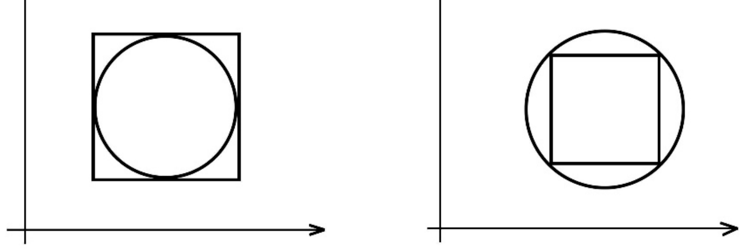
__Определение.__ Пусть $A \subset R^n$. Точка $\mathbf{a} \in R^n$ называется **предельной** точкой A, если $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \varnothing$.

__Определение.__ $F \subset R^n$ называется **замкнутым** множеством, если оно содержит все свои предельные точки.

__Примеры:__ отрезок, круг с границей.

__Замечание.__ Часто вместо «круглых» окрестностей рассматривают «прямоугольные», т.е. $\{\mathbf{x} : |x_i - a_i| < \varepsilon, i = 1,...,n\}$.

Легко видеть, что каждую «круглую» окрестность можно вписать в «прямоугольную» и наоборот.



__Определение.__ Множество называется **односвязным** или просто **связным**, если:

1) любые две его точки можно соединить непрерывной кривой целиком принадлежащей данному множеству,
2) любой замкнутый контур внутри множества можно непрерывно стянут в одну точку.

Если условие 2 не выполняется, то множество называется **многосвязным**.

Открытое связное множество называется **областью**. Объединение области и её границы называется **замкнутой областью**.

Примеры областей в $\Re^2$: открытый круг, прямоугольник (внутренние точки).

Кольцо не является односвязной областью.

В $\Re^3$ области принято подразделять на поверхностно односвязные и объёмно односвязные.

Определение. Трёхмерная область D называется **поверхностно односвязной**, если для любого замкнутой кривой L лежащей в внутри области D, внутри области D найдётся поверхность, ограниченная контуром L.

Примерами поверхностно односвязных областей являются: шар, параллелепипед, область, заключённая между концентрическими сферами. Примером поверхностно неодносвязной области является тор (бублик).

Определение. Трёхмерная область D называется **объёмно односвязной**, если для любой замкнутой поверхности S лежащей в внутри области D, внутри области D найдётся трёхмерная область, ограниченная поверхностью S.

Примерами объёмно односвязных областей являются: шар, параллелепипед, тор. Примером объёмно неодносвязной области является область, заключённая между концентрическими сферами.

Определение. Множество K из некоторого метрического пространства называется **компактным** если всякое его бесконечное подмножество имеет предельную точку. (Фреше, 1906 г.) Синонимом компактного множества является **компакт**.

Множество называется **предкомпактным**, если его замыкание – компакт.

Лемма Больцано-Вейерштрасса. *Любое ограниченное, бесконечное числовое множество $A \subset \Re^n$ имеет предельную точку.*

Замечание 1. Эта лемма имеет эквивалентную формулировку, которая будет дана в теме «Предел числовой последовательности». Там же приведено доказательство для одномерного случая.

Замечание 2. Лемма Больцано-Вейерштрасса утрачивает силу в произвольных метрических пространствах и выполняется только в компактах. Она играет роль **критерия компактности в пространстве $\Re^n$**, т.е. *множество $K \subset \Re^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнутое и ограниченное.*

Из леммы Больцано-Вейерштрасса следует, что отрезок $[a,b]$ является компактом. Приведём ещё несколько примеров компактных множеств в $\Re^n$:

1) Любая ломанная как объединение конечного числа отрезков также является компактом
2) Прямоугольник $\Pi = \{(x,y) \in \Re^2 : \ a \le x \le b, c \le y \le d\}$ - компакт
3) Круг $x^2 + y^2 \le a^2$ - компакт
4) n - мерный параллелепипед $\Pi = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \in \Re^n : \ a_i \le x_i \le b_i, i = \overline{1,n}\}$
5) n - мерный шар $S = \left\{\{x_1, \ldots, x_n\} \in \Re^n : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le a^2\right\}$ - компакт.

Следует отметить, что понятие «компакт» приобретает важное значение лишь при рассмотрении произвольных метрических пространств. В теории математического анализа оно является всего лишь синонимом замкнутости и ограниченности множества.

Определение функции

Определение. Пусть D_f — некоторое множество чисел. Если задан закон f, по которому каждому числу $x \in D_f$ ставится в соответствие единственное определенное число y, то будем говорить, что на множестве D задана **функция**, которую назовём f. Число y называется **значением функции** f в точке x. Число x называется **аргументом функции.** Обозначение функции: $y = f(x)$.

Множество D_f называется **областью определения функции**, а все значения y образуют множество E_f, которое называется **множеством значений** или **областью изменения функции**.

Замечание. Данное определение является определением **функции одной переменной**. Общее определение функции, которая может зависеть от нескольких аргументов будет дано позже.

Определение. Функция f называется **возрастающей (убывающей)** на множестве $G \subset D_f$, если для любых чисел x_1 и x_2 из множества G, таких что $x_1 < x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если существует такое число $m(M)$, что для всех значений x из области определения D_f имеет место неравенство $f(x) \geq m$ ($f(x) \leq M$).

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа m и M такие, что имеет место $m \leq f(x) \leq M$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **четной (нечетной)**, если:

1. Область определения D_f функции симметрична относительно начала координат.
2. Для любого значения $x \in D_f$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Замечание. График четной функции обладает осевой симметрией относительно оси OY, а график нечетной функции - центральной симметрией относительно начала координат.

Примеры.

Четные функции: $y = x^2$ и $y = |x|$

Нечетные функции: $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$.

Замечание. Функция $y = 0$ является одновременно четной и нечетной, а $y = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной, т.е. является функцией общего вида.

Определение. Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует число $T > 0$ такое, что для каждого $x \in D_f$ значения $x + T$ также принадлежат D_f и имеет место равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

Из данного определения следует, что чисел, обладающих таким же свойством, что и число T, бесконечно много. Например, $2T$, $-T$ и, вообще говоря, nT где $n \in \mathbb{Z}$.

Определение. Периодом функции $f(x)$ называется наименьшее положительное число T, удовлетворяющее условию периодичности $f(x+T) = f(x)$.

Очевидно, что если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $T_0 = T/a$.

<u>Замечание.</u> Из определения периодической функции следует, что ее область определения является неограниченной. Для построения графика периодической функции достаточно построить его на каком-либо отрезке длины, равной периоду, с последующим сдвигом этого графика влево и вправо.

<u>Задание.</u> Доказать, что функция $y=|\sin x|$ имеет период π.

<u>Доказательство.</u> Область определения D_f совпадает с $\Re$. Поэтому точки $x+\pi$ и $x-\pi$ принадлежат области определения функции $y=|\sin x|$. Проверим равенство

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x).$$

Действительно, функция $y=|\sin x|$ имеет период, равный π.

Способы задания функций

1. **Аналитическое задание.** Если указана совокупность операций, которые надо произвести над аргументом x, чтобы получить значение функции y, то говорят, что функция задана аналитически.

1). **Явное задание**: $y=f(x)$.

<u>Пример.</u> а) $y=\sqrt{x}+1,\ x\ge 0$;

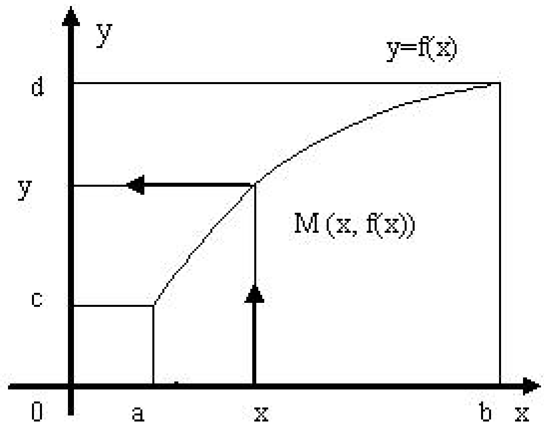
б) $y=x^2-5x-1$.

2). Неявное задание: уравнение $F(x,y)=0$, при некоторых условиях, задает функцию $y=f(x)$, если $F(x,f(x))\equiv 0$.

<u>Пример</u>: Уравнение $x^2+y^2=1$ при $y\ge 0$ задает функцию $y=\sqrt{1-x^2}$.

2. **Табличное задание**. На практике часто зависимость одной величины от другой находят опытным путем. В этом случае получается таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента.

3. **Графическое задание**. Графиком функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости xOy вида $M(x,f(x))$, где x – произвольное значение из области определения функции. Указанное геометрическое место точек, как правило, образует некоторую кривую l. В этом случае задание кривой l определяет отображение области определения на область изменения функции $f(x)$ (см. Рис).



4. **Словесное или описательное задание**. В этом случае функциональная зависимость выражается некоторым словесным утверждением.

<u>Пример.</u> а) Функция $y=[x]$ есть целая часть числа x

б) Функция $y=\{x\}$ есть дробная часть числа x

Графики функций $y=[x]$ и $y=\{x\}=x-[x]$.

1. Заметим, что $[x]$ означает целую часть числа x, т.е. $[x]=n$, если $x=n+r$, где $0\le r<1$, причем данная функция определена при любом значении $x\in\Re$.

Рассматривая промежутки изменения x вида $n\le x\le n+1$ при $n\in Z$, получим, что $[x]=n$. Поэтому нетрудно построить график $y=[x]$.

2. Запишем выражение $\{x\}=x-[x]$ на промежутке $x\in[n,n+1)$, тогда

$$y=\{x\}=x-[x]=n+r-n=r.$$

Следовательно, значение функции в точке $n+r$ равно дробной части числа x, т.е. $y\in[0,1)$.