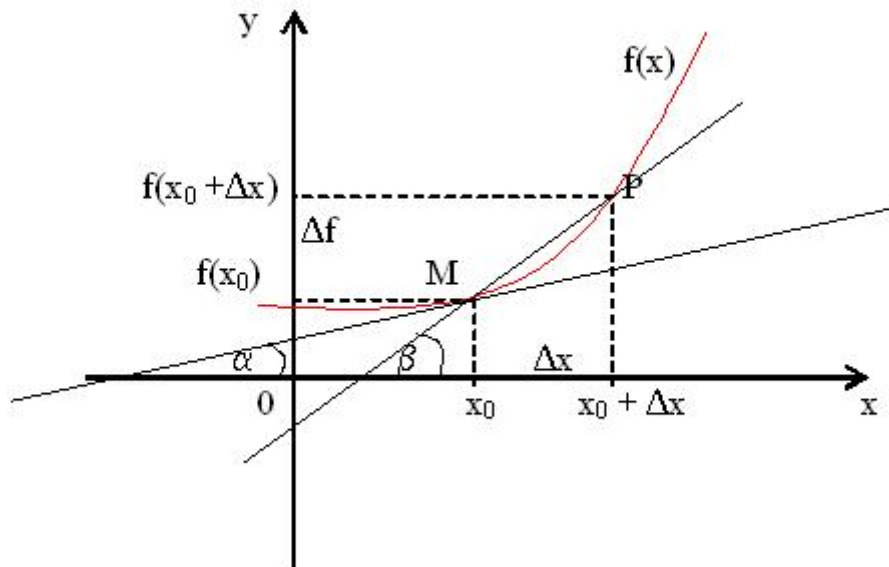


Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Таким образом, с геометрической точки зрения производная в точке есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в этой точке (**геометрический смысл производной**).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. Известно, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

Но так как эта прямая является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то ее угловой коэффициент k должен быть равен $f'(x_0)$. Чтобы найти b , воспользуемся тем, что касательная проходит через точку $(x_0, f(x_0))$. Значит

$$b = f(x_0) - kx_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Подставляя в уравнение прямой $y = kx + b$ найденные значения k и b , получим уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически, производная функции показывает скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной.

Пусть функция $f(t)$ - закон движения (изменения координат) материальной точки, t – время. Тогда

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} - \text{мгновенная скорость движения материальной точки в момент времени}$$

t

Соответственно, вторая производная функции – скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0, \quad C = \text{const}$	7) $(\sin x)' = \cos x$	13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$	8) $(\cos x)' = -\sin x$	14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3) $(e^x)' = e^x$	9) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
4) $(a^x)' = a^x \ln a$	10) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
5) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Пример. Найти угловые коэффициенты касательных к параболе $y = 2x^2 - 2$ в точках, абсциссы которых соответственно равны $x_1 = 1, \quad x_2 = -2$.

Решение. Вычислим производные функции $f(x)$ в точках $x_1 = 1, \quad x_2 = -2$. Так как $y' = 4x$, то $y'(1) = 4, \quad y'(-2) = -8$. Значит, искомые угловые коэффициенты соответствующих касательных будут равны $k(1) = 4, \quad k(-2) = -8$.

Пример. Написать уравнение касательных к параболе $y = x^2 + 1$ в точках $(1, 2)$ и $(0, 1)$.

Решение. Находим угловые коэффициенты касательных в соответствующих точках $k_1 = y'(1) = 2, \quad k_2 = y'(0) = 0$. Тогда имеем уравнения касательных $y - 2 = 2(x - 1)$ и $y - 1 = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если приращение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, отвечающее приращению аргумента Δx , может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где A - постоянное число (для точки $x = x_0$), не зависящее от Δx ; $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция Δx , т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$

Иначе говоря, приращение $\Delta f(x_0)$ имеет вид $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

Далее покажем дифференцируемость некоторых функций.

1. $y = x^2 + 2.$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2 - x^2 - 2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2, \quad A = 2x, \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x.$$

2. $y = \ln x.$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} + o(\Delta x), \quad A = \frac{1}{x}$$

3. $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2\left(\frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= 2\left(\frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)\right) \left[\cos x + \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x\right] = (\Delta x + o(\Delta x)) \left(\cos x - 2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{4}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= \cos x \Delta x - 2o(\Delta x) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{4}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x \Delta x + o(\Delta x^2)\end{aligned}$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке $x = x_0$, необходимо и достаточно чтобы $f(x)$ имела в этой точке производную.

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $y = f(x)$ в т. x дифференцируема, тогда

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x)$$

Разделим Δy на Δx и вычислим предел частного $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A.$$

С другой стороны $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Значит, $f'(x_0)$ существует и равна A .

2. Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

Тогда разность функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и предела $f'(x_0)$ есть величина бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x); \quad \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

Следовательно $\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$.

Положим $f'(x_0) = A$ для точки $x = x_0$, тогда $\Delta y = \Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$.

Теорема доказана.

Теорема. Дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как $\Delta y = \Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ - условие дифференцируемости, то при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем $\Delta y \rightarrow 0$. Последнее означает непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Замечание 1. Непрерывность не является достаточным условием дифференцируемости функции (См. пример ниже).

Замечание 2. Дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную прямую.

Определение. Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых

функция может иметь разрыв в точке x_0 , а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0 , она может быть в ней не дифференцируема. Соответствующие примеры были приведены чуть выше.

Пример: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной и, следовательно, не дифференцируема в этой точке.

Существуют и более экзотические примеры непрерывных, но недифференцируемых функций. Так, например, функция Вейерштрасса

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

где a — произвольное нечетное число, не равное единице, а b — положительное число, меньшее единицы.

Функциональный ряд, стоящий справа, мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

поэтому функция Вейерштрасса определена и непрерывна при всех вещественных x . Тем не менее, эта функция не имеет производной ни в одной точке по крайней мере при

$$ab > \frac{3\pi}{2} + 1, \quad a > 1 \quad (1)$$

Для доказательства отсутствия производной в произвольной точке x_0 , построим две последовательности $\{x_n^1\}$ и $\{x_n^2\}$, сходящиеся к точке x_0 , покажем, что отношения

$$\frac{f(x_n^1) - f(x_0)}{x_n^1 - x_0} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_n^2) - f(x_0)}{x_n^2 - x_0} \quad (2)$$

имеют разные знаки, по крайней мере, при выполнении условия (1)

Для построения указанных последовательностей предварительно определим такие целые числа ξ_n , чтобы выполнялось

$$a^n x_0 \in \left[\xi_n - \frac{1}{2}, \xi_n + \frac{1}{2} \right),$$

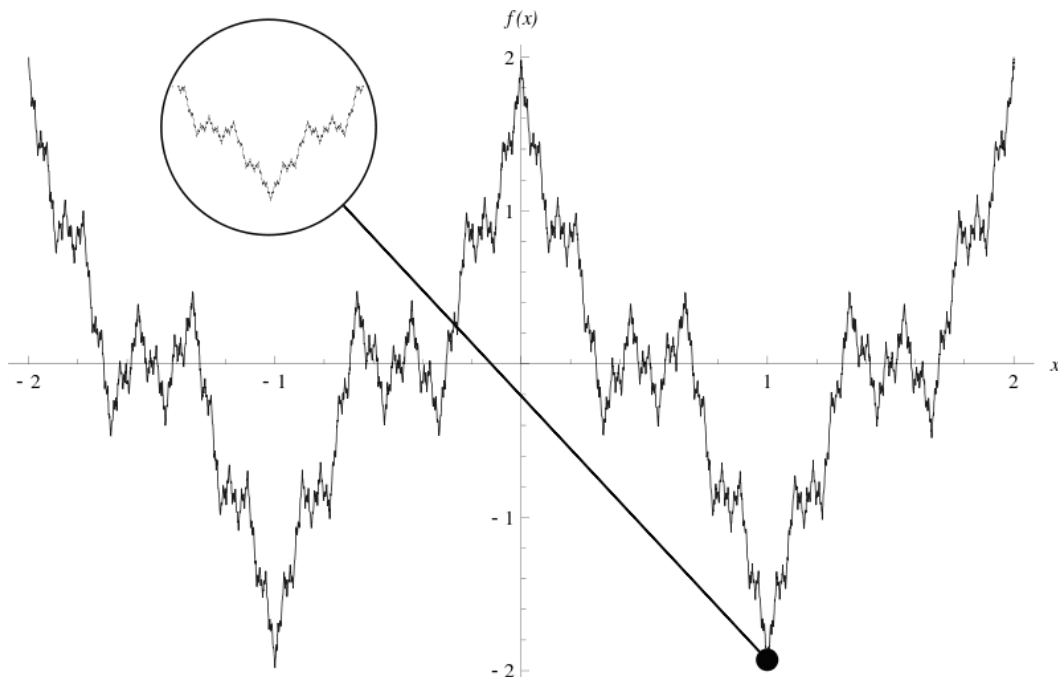
а затем положим

$$x_n^1 = \frac{\xi_n - 1}{a^n}, \quad x_n^2 = \frac{\xi_n + 1}{a^n}.$$

Подставляя эти последовательности в (2), получим

Отсутствие производной во всех точках при более общих условиях $ab \geq 1, a > 1$ было установлено Годфри Харолдом Харди (английский математик 1877-1947) в 1916 году

График этой функции имеет фрактальный характер, демонстрируя самоподобие: увеличиваемая область (в круге) подобна всему графику.



Замечание. Необходимым и достаточным условием существования производной функции $f(x)$ в точке x является равенство односторонних производных, т.е.

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

В этом случае левая и правая касательные совпадают.

Основные правила дифференцирования.

$$1) (Cy)' = Cy', \quad C = const$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x) = Cy(x)$. Так как приращение функции u имеет вид $\Delta u = Cy(x + \Delta x) - Cy(x) = C\Delta y$, то

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = C \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и после перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $u'(x) = Cy'(x)$.

Обозначим далее $u = f(x)$, $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x .

$$2) (u + v)' = u' + v'$$

Доказательство. Для суммы $w = u + v$ имеем $\Delta w = \Delta u + \Delta v$, тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и после перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $(u + v)' = u' + v'$.

Аналогично доказывается утверждение для разности функций.

$$3) (uv)' = u'v + uv'$$

Доказательство. Обозначим $w = uv$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta w &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)\Delta v - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] = u(x + \Delta x)\Delta v + v(x)\Delta u \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = u(x + \Delta x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и после перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим $w' = (uv)' = u'v + uv'$.

$$4) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Доказательство. Приращение функции $w(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ равно

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x + \Delta x)v(x)} \end{aligned}$$

Тогда после деления последнего равенства на Δx и перехода в нем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$, $u = g(y)$, причем область значений функции y входит в область определения функции u . Тогда

$$u'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$$

Доказательство. Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$, т.к. $y = f(x)$ – непрерывная функция. Поэтому

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Тогда $u'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$. Теорема доказана.

Пример. Найти производную функции $y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = (x^2 e^{x^2})' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + x e^{x^2} = 2x e^{x^2} (1+x^2) \ln x + x e^{x^2} =$$

$$= x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x)$$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных или дробно-рациональных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Определение. Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u, \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right) \Rightarrow (u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x \cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x \sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

Производная обратной функции.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи воспользуемся равенством

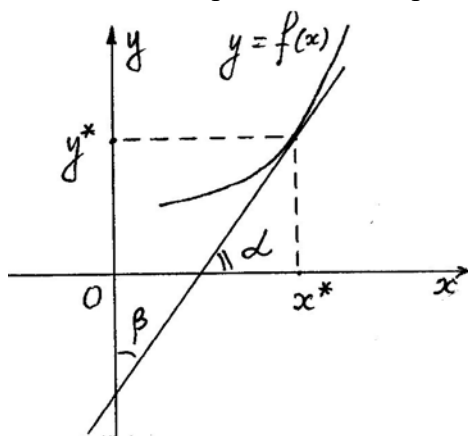
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

Переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$. Так как обратная функция дифференцируема, то из $\Delta y \rightarrow 0$ следует, что $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Выясним геометрический смысл производной обратной функции.



Так как $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, имеем

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \beta$$

Пример. Найти формулу для производной функции $\operatorname{arctg} x$.

Функция $\operatorname{arctg} x$ является, обратной к функции $\operatorname{tg} x$, т.е. её производная может быть найдена следующим образом. Пусть $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$

Известно, что $y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

По приведенной выше формуле получаем:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Таким образом, получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Производная функции, заданной параметрически.

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически, т.е.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

(здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ полагаем дифференцируемыми), то ее производную вычисляем

по определению производной: $y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если он существует).

Т.к. $\Delta y = \psi'(t)\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t$, $\Delta x = \varphi'(t)\Delta t + \alpha_2(\Delta t)\Delta t$ тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi'(t)\Delta t + \alpha_1(\Delta t) \cdot \Delta t}{\varphi'(t)\Delta t + \alpha_1(\Delta t) \cdot \Delta t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Итак, $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ при $x = \varphi(t)$.

Пример. Найти производную функции $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Способ 1. Выразим одну переменную через другую $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Способ 2. Применим параметрическое задание данной кривой: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b \cos t}{-a \sin t} \\ \cos t &= \frac{x}{a}, \quad \sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Производная функции, заданной неявно

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением вида

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Пример: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + \ln y = 0$.

Определение. Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) такова, что уравнение $F(x, y) = 0$ при подстановке в него $y = f(x)$ обращается в тождество относительно x , то функция $y = f(x)$ называется **неявной функцией** заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Вопросы существования и дифференцируемости неявной функции будут более подробно рассмотрены в разделе «Функции многих переменных». Пока же чисто формально определим понятие производной неявной функции и правило её вычисления.

Рассмотрим разность $\Delta F_x(x, y) = F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$. Эта разность называется **частным приращением** функции $F(x, y)$ по переменной x . Аналогично, $\Delta_y F(x, y) = F(x, y + \Delta y) - F(x, y)$ называется **частным приращением** функции $F(x, y)$ по переменной y .

Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F(x, y)}{\Delta x}$, то он называется **частной производной** по переменной x функции $z = F(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается символами z'_x (или $F'_x(x, y)$, z_x , $F_x(x, y)$).

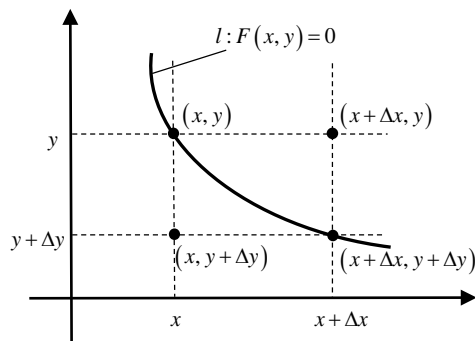
Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y F(x, y)}{\Delta y}$, то он называется **частной производной** по переменной y функции $z = F(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается символами z'_y (или $F'_y(x, y)$, z_y , $F_y(x, y)$).

Пусть имеем функцию двух переменных $z = F(x, y)$, где $y = f(x)$ дифференцируемая функция. Тогда $F(x, y)$ является функцией переменного x как сложная функция $z = F(x, f(x))$

Если переменная x получает приращение Δx , то переменная $y = f(x)$ также принимает приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в силу непрерывности $f(x)$. Откуда получим:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) + \\ &+ F(x, y + \Delta y) - F(x, y) = \Delta F_x(x, y + \Delta y) + \Delta F_y(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение ΔF называется **полным приращением** функции $F(x, y)$. Равенство нулю объясняется тем, что точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ удовлетворяет уравнению (1), потому что приращения Δx и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ не являются независимыми.



Тогда после деления равенства (2) на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ (отсюда следует, что $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$) получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_y F(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y F(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'_x(x, y) + F'_y(x, y) y' = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad F'_y \neq 0.$$

Примеры:

$$1. \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0. \quad 2x + 2y \cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

$$2. \quad \sin x + yx = 0. \quad \cos x + y + y'x = 0,$$

$$y' = -\frac{y + \cos x}{x} = -\frac{\frac{\sin x}{x} - \cos x}{x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

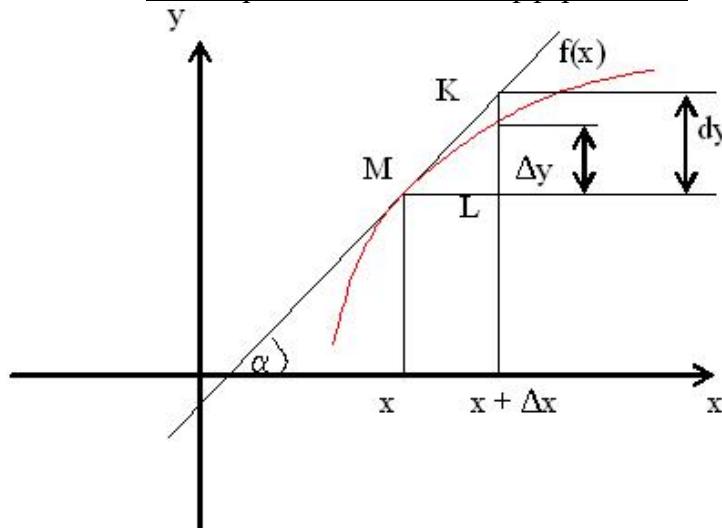
Величина $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения Δy .

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$, или просто df .

Из определения следует, что если x - независимая переменная, то $\Delta x = dx$ и поэтому $dy = df = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Как следует из определения дифференцируемой функции её приращение может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Дифференциал функции, таким образом, является главной частью приращения функции. Следовательно, приращение функции в некоторой произвольной точке x_0 можно приближённо записать в виде

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Т.к. $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, а $\Delta x = x - x_0$ получаем $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Полученная формула носит название **формулы линеаризации**.

Пример. Найти дифференциал функции $y = \sin x^2$.

$$dy = (\sin x^2)' dx = 2x \cos x^2 dx$$

Пример. Найти дифференциал функции $y = e^{\sqrt{x}}$.

$$dy = \left(e^{\sqrt{x}} \right)' dx = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$$

Пример. Вычислить приближенное значение $\arccos(0.45)$

Рассмотрим функцию $y = \arccos x$. Положим $x = 0.05$, $\Delta x = dx = -0.05$

Воспользуемся формулой $\Delta y \approx dx = f'(x)dx \Rightarrow y(x + \Delta x) \approx y(x) + f'(x)dx$. Имеем

$$\arccos(0.45) \approx \arccos x - \frac{dx}{\sqrt{1-0.5^2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{0.05}{\sqrt{0.75}} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{10\sqrt{3}}$$

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$$1) d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx + v' dx = du \pm dv$$

$$2) d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = u dv + v du$$

$$3) d(Cu) = C du$$

$$4) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$ и $x = g(t)$, т.е. y - сложная функция. Тогда $dy = f'(x) g'(t) dt = f'(x) dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной, в связи с чем, эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t , то $dx \neq \Delta x$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x) \Delta x$ уже не является инвариантной.

Теоремы о среднем.

Теорема Ролля.

(Роль (1652-1719)- французский математик)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε , $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равна нулю, т.е. $f'(\varepsilon) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox . Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая $M = m$ и $M \neq m$.

Пусть $M = m$. Тогда функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть $M \neq m$. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$. Обозначим ε , $a < \varepsilon < b$ точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M - наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon + \Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0$$

$$\text{При этом } \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(\varepsilon) = 0. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

- 1) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.
- 2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $n-1$ -го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $n-1$ -го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

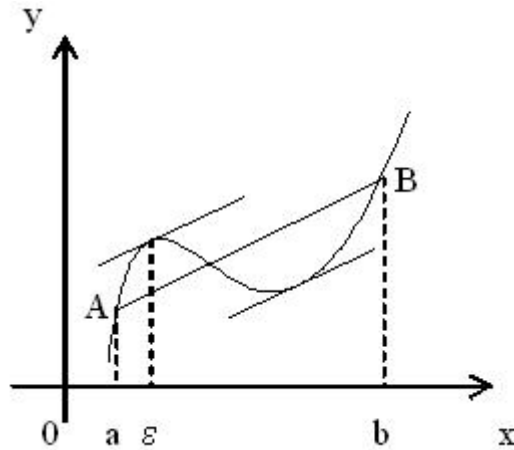
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon). \quad (1)$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB .



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B . Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{\text{сек}AB}$$

Уравнение секущей AB можно записать в виде:

$$y_{\text{сек}AB} - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то

$$F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда получаем формулу (1). **Теорема доказана.**

Определение. Выражение $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta f = f'(a + \theta \Delta x) \Delta x, \text{ где } 0 < \theta < 1, \Delta x = b - a, \Delta f = f(b) - f(a).$$

Пример. На дуге AB кривой $y = 4x - x^2$ найти точку M , в которой касательная параллельна хорде AB , если $A(1, 3)$ и $B(4, 0)$.

По теореме Лагранжа имеем

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 4 - 2\varepsilon = \frac{0 - 3}{4 - 1} = -1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Тогда

$$f(\varepsilon) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 10 - \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$$

Следовательно, искомая точка $M\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$

Теорема Коши.
(Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε .

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функций в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

которая на интервале $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при $x = a$ и $x = b$ $F(b) = F(a) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

$$\text{А т.к. } g'(\varepsilon) \neq 0, \text{ то } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение. Пусть дана функция $y = f(x)$, такая что:

- 1) $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $I_1 \subset D_f$
- 2) функция $z = f'(x)$ тоже дифференцируема на некотором интервале $I_2 \subset I_1 \subset D_f$

Тогда

$$y'' = (y')'$$

называется **второй производной** функции $y = f(x)$. Функция $y = f(x)$ при этом называется **дважды дифференцируемой**.

Аналогично далее, если $y = f(x)$ является $n-1$ раз дифференцируемой, то

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)'$$

называется n -й **производной** функции $y = f(x)$.

Обычно 1-е три производные обозначаются штрихами: y', y'', y''' , а производные старших порядков начиная с четвёртого, обозначаются как $y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$

Пример. $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Найдём k -ю производную. Имеем

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ y''' &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$$

Пусть теперь $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Тогда, n -я производная $y^{(n)} = n!$, а все последующие производные равны нулю, т.е.

$$(x^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Пример. $y = \sin x$. Найдём n -ю производную. Имеем

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ y''' &= -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ y^{(4)} &= \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

и так далее. Поэтому

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \sin x, & n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^{(n-1)/2} \cos x, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Упражнение. Доказать, что

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos x, & n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin x, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Вообще, отнюдь не для любой бесконечно дифференцируемой функции можно найти формулу n -ю производной. В ряде случаев приходится ограничиваться первыми двумя-тремя производными, чего обычно хватает для практических вычислений.

Упражнение. Найти n -е производные для следующих функций:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $y = a^x, \quad y = e^x$ | 5) $y = (ax+b)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ |
| 2) $y = \log_a x, \quad y = \ln x$ | 6) $y = (ax+b)^n, \quad n \in \mathbb{N}$ |

3) $y = \sin^2 x$

7) $y = \cos^2 x$

4) $e^x \sin x$

8) $e^x \cos x$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)};$

2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$

3) $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

Последнее равенство называется **формулой Лейбница**.

Обозначение. Множество n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ обозначается $C^n_{[a, b]}$ ($f(x) \in C^n_{[a, b]}$), множество бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ – соответственно $C^\infty_{[a, b]}$ ($f(x) \in C^\infty_{[a, b]}$)

По формуле $d^n y = d(dy^{n-1})$ может быть найден **дифференциал n -го порядка**. Отметим при этом, что дифференциалы высших порядков *не обладают свойством инвариантности*.

Покажем это на примере второго дифференциала. Если $y = f(x) = f(\varphi(t))$, где $x = \varphi(t)$, то

$$d^2 y = d(f'(x) dx)$$

В случае если x независимая переменная имеем

$$d^2 y = d(f'(x) dx) = f''(x) dx dx = f''(x) (dx)^2 = f''(x) dx^2$$

Поэтому вторая производная часто пишется в виде

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Аналогично, n -я производная записывается как

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Но, если $x = \varphi(t)$, то $dx = \varphi'(t) dt$ зависит от t , поэтому

$$d^2 y = d(f'(x) dx) = d(f'(x)) dx + f'(x) d(dx) = f''(x) (dx)^2 + f'(x) d^2 x, \quad \text{где} \\ d^2 x = \varphi''(t) dt^2$$

Таким образом, форма второго дифференциала изменилась при переходе от независимой переменной к сложной функции.

Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы, то

1) $d^n(Cu) = C d^n u;$

2) $d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v;$

3) $d^n(u \cdot v) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u d^k v$

Пример. Выписать формулы для $d^2(uv)$ и $d^3(uv)$

$$d^2(u \cdot v) = \sum_{k=0}^2 C_2^k d^{2-k} u d^k v = d^2 u + 2 du dv + d^2 v,$$

$$d^3(u \cdot v) = \sum_{k=0}^3 C_3^k d^{3-k} u d^k v = d^3 u + 3d^2 u dv + 3dud^2 v + d^3 v,$$

Пример. Найти $d^2 y$ и $d^3 y$ для функции $y = \sin^2 x$. Имеем

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \quad (\sin^2 x)'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x,$$

$$(\sin^2 x)''' = (2 \cos 2x)' = -4 \cos 2x$$

Тогда по формуле (2)

$$d^2(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'' dx^2 = 2 \cos 2x dx^2, \quad d^3(\sin^2 x) = (\sin^2 x)''' dx^3 = -4 \sin dx^3.$$

Упражнения 3. Выписать формулы для $d^4(uv)$ и $d^5(uv)$ и найти $d^2 y$, $d^3 y$, $d^4 y$ и $d^5 y$ для функции $y = \frac{1}{1-x}$.

Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty - \infty.$$

Теорема (правило Лопиталья). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x . Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит

между точками a и x , то при $x \rightarrow a$ получим $\varepsilon \rightarrow a$, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$

стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad g'(x) = e^x; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1/x}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{3/x} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{3/x}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x}$.

$$f'(x) = e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2} \right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{x}{4}e^{x/2} = \frac{1}{4}e^{x/2}(4+x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}(4+x)/4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+x}{4e^{x/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{x/2}} = 0;$$

Замечание. При использовании правила Лопиталья надо проявлять осторожность. Очень важно, чтобы в исследуемой точке предел отношения производных, о котором говорится в теореме, существовал. В противном случае применение правила Лопиталья может привести к неверному результату. Рассмотрим пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

Очевидно, что данный предел существует, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

С другой стороны, применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad \text{не существует}$$

Мы пришли к неверному результату именно потому, что условие теоремы, о котором говорилось выше, не выполнено.

Следует отметить, что правило Лопиталья – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталья может быть использован и какой-либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \quad g''(x) = \sin x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; \quad g'''(x) = \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$$

Неопределенности вида 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования.

Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Пример: Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$.

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{1/x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0..$$

Следовательно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0; \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}; - \text{ получили неопределенность.}$$

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

Формула Тейлора.

Тейлор (1685-1731) – английский математик

Теорема 1. (Локальная формула Тейлора) 1) Пусть функция $f(x) \in C^n[a, b]$. Тогда, в некоторой окрестности точки $x = x_0 \in (a, b)$ справедливо следующее разложение:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

это выражение называется **формулой Тейлора**, а выражение $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ называется **остаточным членом в форме Пеано**.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению функции $f(x)$, а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке $x = x_0$.

$$P_n(x_0) = f(x_0); \quad P'_n(x_0) = f'(x_0); \quad P''_n(x_0) = f''(x_0); \quad \dots \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

(1)

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем производные многочлена в точке $x = a$ и составляем систему уравнений:

[illegible]

$$f(x_0) = C_0$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 C_2$$

.....

$$f^{(n)}(x_0) = n!C_n$$

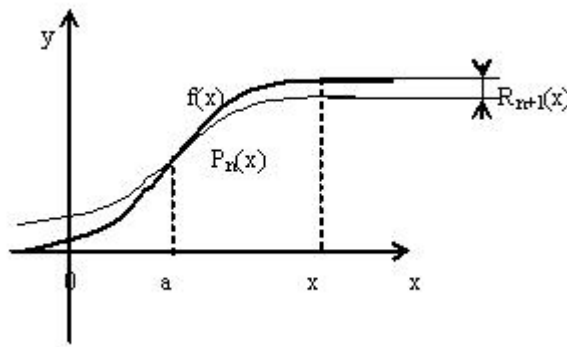
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$
$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$
$$P_n(x_0) = f(x_0)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} P_n(x) = P_n(x_0) \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - P_n(x)] = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^k} = \begin{cases} 0, & k \leq n \\ \text{const} \neq 0, & k = n+1 \end{cases} \Rightarrow R_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

Замечание 1. Если $\exists f^{(n+1)}(x_0)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \Rightarrow R_n(x) = O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \quad (4)$$

Как видно на рисунке, в точке $x = x_0$ значение многочлена в точности совпадает со значением функции. Однако, при удалении от точки $x = x_0$ расхождение значений увеличивается.



Теорема 2. (Нелокальная формула Тейлора). Пусть функция $f(x) \in C^n[a, b]$. Тогда, $\forall \varphi(t) \in C^1[x_0, x]$ и $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in (x_0, x)$ существует точка $\varepsilon \in (x_0, x)$ такая, что в некоторой окрестности точки $x = x_0 \in (a, b)$ справедливо следующее разложение:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

где

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{n! \varphi'(\varepsilon)} f^{(n+1)}(\varepsilon) (x - \varepsilon)^n \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим

$$F(t) = f(x) - P_n(t, x) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

Эта функция является дифференцируемой. В самом деле

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k = \\ &= -f'(t) + f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k)!} (x - t)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \end{aligned}$$

При этом, с учетом (4)

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = R_n(x)$$

Следовательно, по теореме Коши, $\forall \varphi(t) \in C^1[x_0, x]$ и $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in (x_0, x)$ существует точка $\varepsilon \in (x_0, x)$ такая, что

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)}$$

Подставляя сюда найденные выражения для $F(x)$, $F(x_0)$ и $F'(x)$ получим формулу (5). Теорема доказана.

Замечание 2. При $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ получим остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

который называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Т.к. точка $\varepsilon \in (x_0, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\varepsilon = x_0 + \theta(x - x_0)$.

Тогда можно записать:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Если принять $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!} (\Delta x)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Теперь, если принять $n = 0$, получим:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$$

– это выражение называется **формулой Лагранжа**. (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик и механик).

Формула Тейлора имеет огромное значение для различных математических преобразований. С ее помощью можно находить приближённые значения различных функций, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д. В частности, можно отметить, что полученная ранее формула линеаризации представляет собой первые два члена формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Погрешность этой формулы

$$R_1(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2} (x - x_0)^2$$

Замечание 3. При $\varphi(t) = x - t$ получим остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n!} (x - x_0)(x - \varepsilon)^n$$

который называется **остаточным членом в форме Коши**.

Формула Маклорена.

(Колин Маклорен (1698-1746) шотландский математик.)

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1$$

Здесь записана формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой-либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа a очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке a , значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки a для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Применение принципа разложения в ряд позволяет производить вычисления на ЭВМ в режиме реального времени, что немаловажно при решении конкретных технических задач.

1) Функция $f(x) = e^x$.

Находим:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$\text{Тогда: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

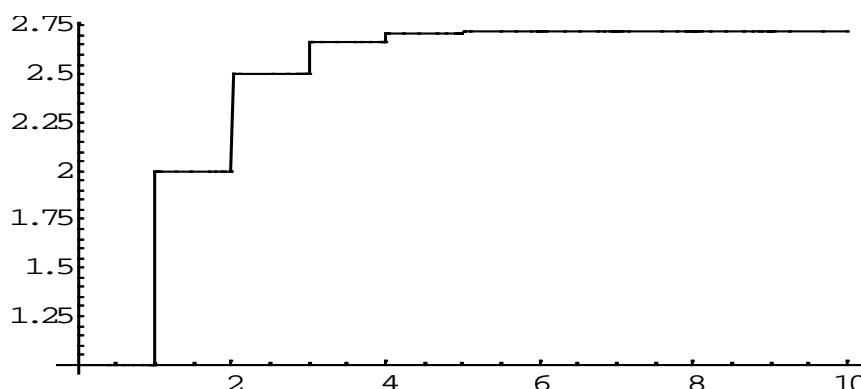
Пример: Найдем значение числа e . В полученной выше формуле положим $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: $e = 2,71827876984127003$

Для 10 членов разложения: $e = 2,7182818011463451$

Для 100 членов разложения: $e = 2,71828182845904553$



На графике показаны значения числа e с точностью в зависимости от числа членов разложения в ряд Тейлора.

Как видно, для достижения точности, достаточной для решения большинства практических задач, можно ограничиться 6-7 – ю членами ряда.

2) Функция $f(x) = \sin x$.

Получаем $f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\text{Итого: } \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

3) Функция $f(x) = \cos x$.

Для функции $\cos x$, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Пример: Применить полученную формулу для нахождения синуса любого угла с любой степенью точности.

На приведенных ниже графиках представлено сравнение точного значения функции и значения разложения в ряд Тейлора при различном количестве членов разложения.

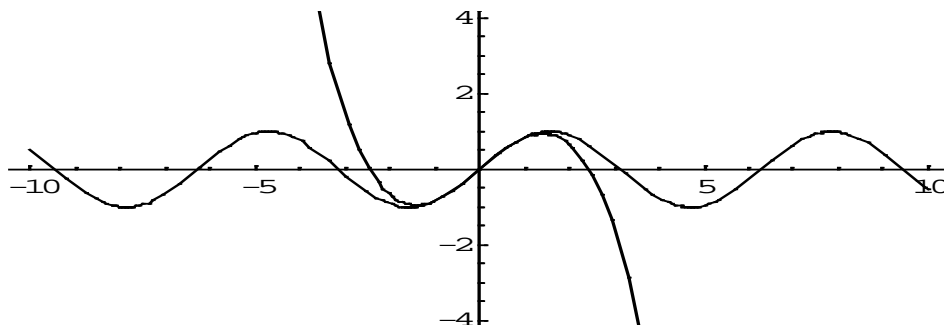


Рис. 1. Два члена разложения

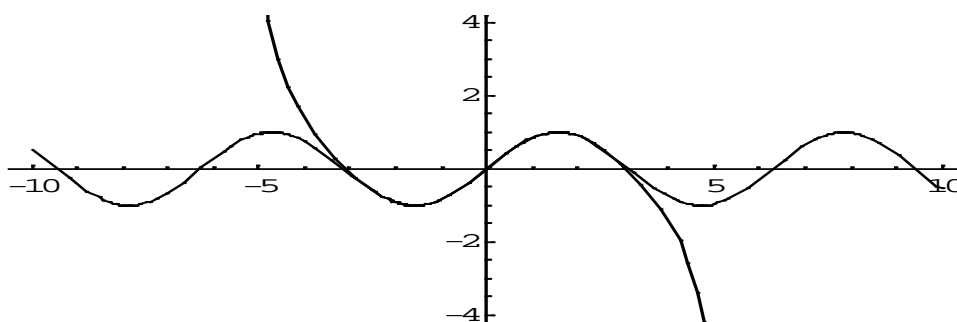


Рис. 2. Четыре члена разложения

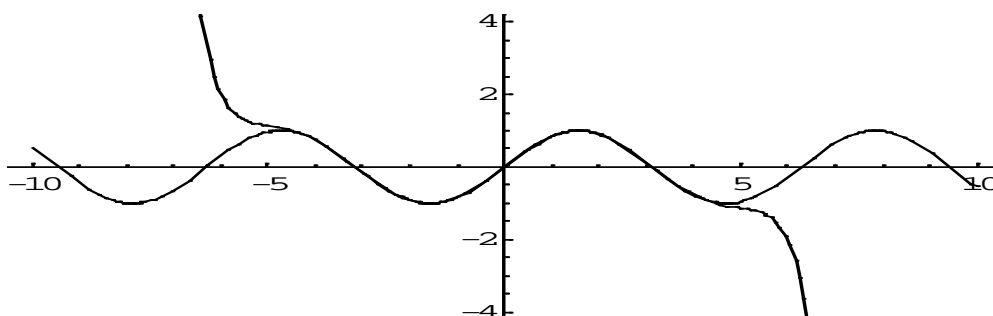


Рис. 3. Шесть членов разложения

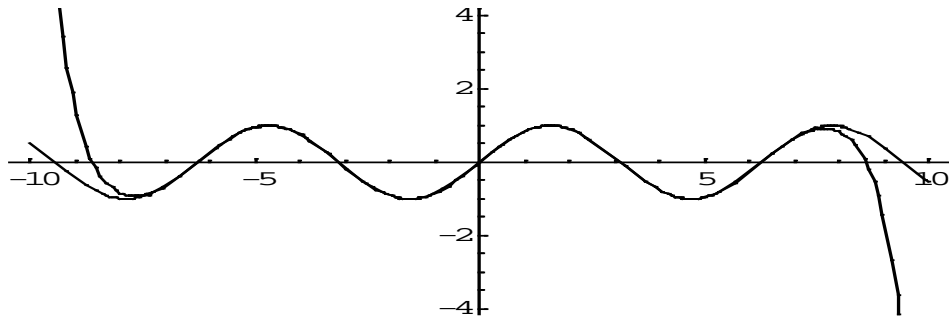


Рис. 4. Десять членов разложения

Чтобы получить наиболее точное значение функции при наименьшем количестве членов разложения надо в формуле Тейлора в качестве параметра a выбрать такое число, которое достаточно близко к значению x , и значение функции от этого числа легко вычисляется.

Для примера вычислим значение $\sin 20^\circ$.

Предварительно переведем угол 20° в радианы: $20^\circ = \frac{\pi}{9}$.

Применим разложение в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами разложения:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^5 = 0,348889 - 0,007078 + 0,000043 = 0,341854$$

В четырехзначных таблицах Брадиса для синуса этого угла указано значение 0,3420.

Выше говорилось, что при $x \rightarrow 0$ функция $y = \sin x$ является бесконечно малой и может при вычислении быть заменена на эквивалентную ей бесконечно малую функцию $y = x$. Теперь видно, что при x , близких к нулю, можно практически без потери в точности ограничиться первым членом разложения, т.е. $\sin x \cong x$.

Пример: Вычислить $\sin 28^\circ 13' 15''$.

Для того, чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} 1^\circ &= \frac{\pi}{180}; & 28^\circ &= \frac{28\pi}{180}; \\ 1' &= \frac{\pi}{60 \cdot 180}; & 13' &= \frac{13\pi}{60 \cdot 180}; \\ 1'' &= \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; & 15'' &= \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; \\ 28^\circ 13' 15'' &= \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180} \left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60} \right) = 0,492544 \text{ рад} \end{aligned}$$

Если при разложении по формуле Тейлора ограничиться тремя первыми членами, получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \Rightarrow \sin 28^\circ 13' 15'' \approx 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$$

Сравнивая полученный результат с точным значением синуса этого угла,

$$\sin 28^\circ 13' 15'' = 0,472869017612759812,$$

видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

4) Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

Тогда:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \quad 0 < \theta < 1$$

Если в полученной формуле принять $\alpha = n, n \in N$ и $f^{(n+1)}(x) = 0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Получилась формула, известная как **бином Ньютона**.

5) Функция $f(x) = \ln(1+x)$.

Получаем: $f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = 0$;

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{(1+x)^3}; \quad f'''(0) = 2;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!;$$

$$\text{Итого: } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n + R_{n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма $\ln 1,5$. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

$$\ln 1,5 = 0,4054651081081643811$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} - \frac{0,5^4}{4} + \frac{0,5^5}{5} - \frac{0,5^6}{6} + \frac{0,5^7}{7} = 0,4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.

Пример. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{-x^2}$ в окрестности $x_0 = 0$. Для решения используем результат для e^x . В этом решении заменим x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \pm \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} e^{-(\theta x)^2}, \quad 0 < \theta < 1$$

Пример. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = (1-x)^{-1}$ в окрестности точек $x_0 = 0$ и $x_0 = -1$. Воспользуемся разложением для $(1+x)^\alpha$. Имеем для точки $x_0 = 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(-1-1)\dots(-1-n+1)}{n!} (-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Для получения разложения в точке $x_0 = -1$ сделаем замену $y = x+1$ при этом точка $x_0 = -1$ переходит в точку $y_0 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-y} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-y/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{2n+1}}.$$

Иногда, для разложения функций в Ряд Тейлора, приходится пользоваться непосредственно формулой (1).

Пример 9. Найти первые три члена ряда Тейлора для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Имеем

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0, \quad f'(x) = (\cos x)^{-2}, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = 2 \sin x (\cos x)^{-3}, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 2(\cos x)^{-2} + 6 \sin^2 x (\cos x)^{-4}, \quad f'''(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = 16 \sin x (\cos x)^{-3} + 24 \sin^3 x (\cos x)^{-5}, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 16(\cos x)^{-4} + 120 \sin^2 x (\cos x)^{-4} + 120 \sin^4 x (\cos x)^{-6}, \quad f^{(5)}(0) = 16.$$

Таким образом

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций. Точки экстремума.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тогда:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \xi < x_2$

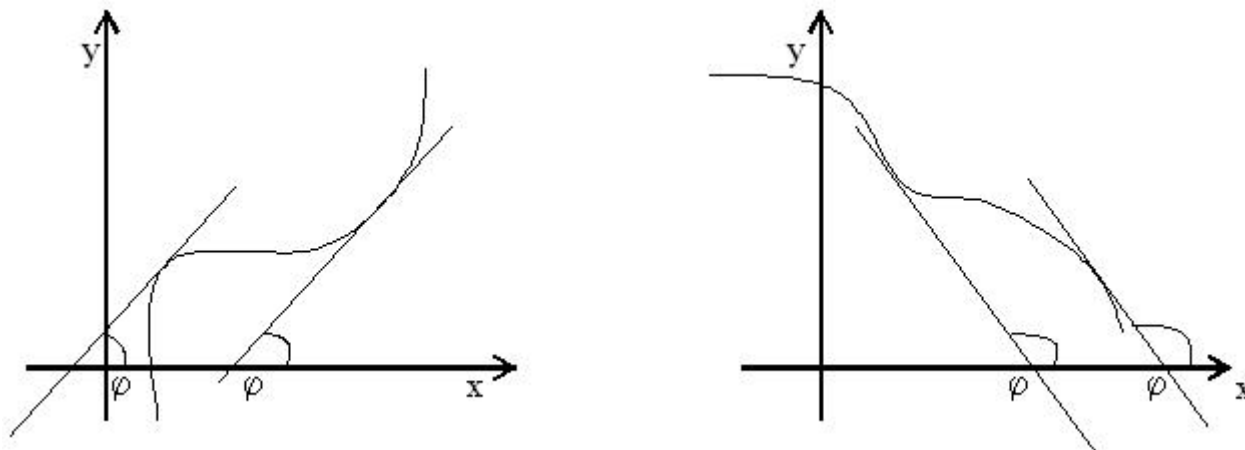
По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) .

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 **локальный максимум**, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 , т.е. $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 **локальный минимум**, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом достаточно малом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь локальный максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать локальный максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки локального максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых $\Delta x > 0$ верно неравенство

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е. } f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} &> 0 \quad \text{при } \Delta x < 0 \\ \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} &< 0 \quad \text{при } \Delta x > 0 \end{aligned}$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x) \geq 0$, а если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x) \leq 0$.

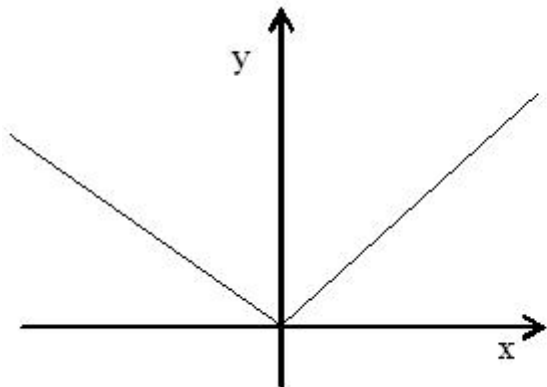
А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, теорема доказывается аналогично. **Теорема доказана.**

Замечание. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

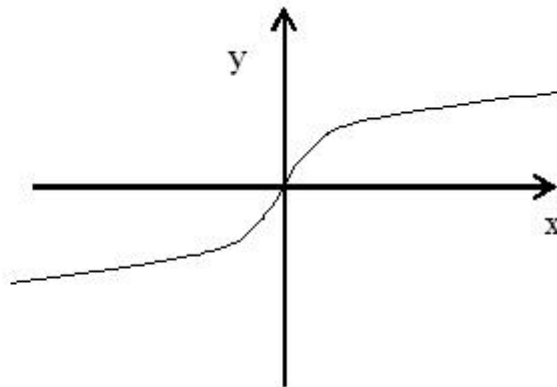
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Определение. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума по первой производной). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-”, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-” на “+” то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где ε - точка между x и x_1 .

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon) > 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$; $f'(\varepsilon) < 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1 , т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично. **Теорема доказана.**

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

- 1) Найти критические точки функции.
- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума по второй производной)
 Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 . Тогда функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$ и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство. Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) < 0$. Т.к. функция $f''(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1 .

Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1 , но $f'(x_1) = 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

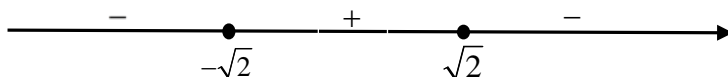
Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если наряду с $f'(x_1) = 0$ имеет место равенство $f''(x_1) = 0$, то для выяснения характера особенности точки требуется дальнейшее исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x\sqrt{4-x^2}$. Имеем

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

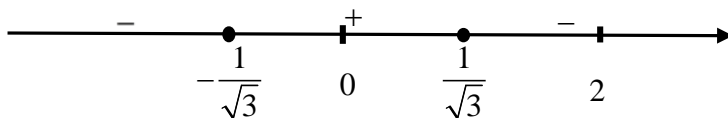
Точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ являются стационарными проверим их на экстремум



Таким образом $x_1 = -\sqrt{2}$ - точка локального минимума, $x_2 = \sqrt{2}$ - точка локального максимума.

Пример. Найти максимальное значение функции $y = x - x^3$ на отрезке $[0, 2]$. Имеем

$$y' = 1 - 3x^2 = (1 - \sqrt{3}x)(1 + \sqrt{3}x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

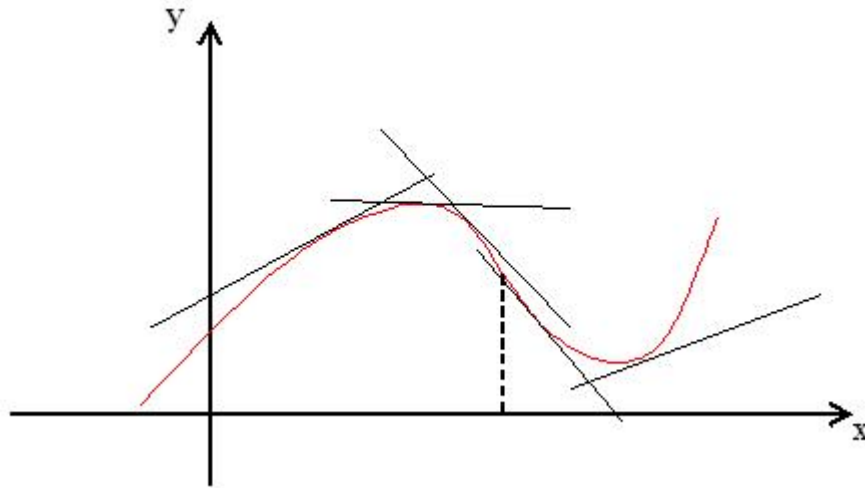


Получаем, что $x_1 = -1/\sqrt{3}$ - точка локального минимума, но она не принадлежит отрезку $[0, 2]$. Точка $x_2 = 1/\sqrt{3}$ - точка локального максимума и принадлежит отрезку $[0, 2]$. Далее

$$y(0) = 0, \quad y(2) = 2 - 8 = -6, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Таким образом, $y_{\min} = y(2) = -6$, $y_{\max} = y(1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.



Определение. Кривая называется **выпуклой вверх** (или просто **выпуклой**) на интервале (a,b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая называется **выпуклой вниз** (или **вогнутой**) на интервале (a,b) , если все ее точки лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y = f(x)$;

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } c - \text{точка между } x \text{ и } x_0.$$

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \text{ где } c_1 - \text{точка между } x_0 \text{ и } c$$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_1$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(c_1) > 0$ на интервале (a,b) , то кривая $y = f(x)$ вогнута на интервале (a,b) . **Теорема доказана.**

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Доказательство.

1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ — точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба. **Теорема доказана.**

Пример 3. Исследуем на выпуклость и вогнутость функцию $y = x + \sin x$. Имеем

$$y' = 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x_n^{(1)} = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$y'' = -\sin x = 0 \Rightarrow x_k^{(2)} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Последовательность $\{x_k^{(2)}\}$ содержит внутри себя последовательность $\{x_n^{(1)}\}$ и в этих точках y'' не является ни положительной, ни отрицательной. Следовательно экстремум в них отсутствует. С другой стороны, в промежутках $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$ $y'' < 0$ следовательно на этих промежутках функция $y = x + \sin x$ выпукла вверх. В промежутках $(\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$ $y'' > 0$ следовательно на этих промежутках функция $y = x + \sin x$ выпукла вниз. Точки $x_n^{(1)} = \pi + 2\pi n$ являются точками перегибов.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область определения функции. Здесь же по возможности можно указать и область значений.
- 2) Чётность и нечётность функции
- 3) Периодичность функции
- 4) Точки пересечения с координатными осями
Пересечение с осью Ox определяется системой равенств $y = 0, \quad f(x) = 0$
Пересечение с осью Oy определяется системой равенств $x = 0, \quad y = f(0)$
- 5) Точки разрыва (если они имеются) и их характер.
- 6) Точки максимума и минимума (если они имеются). Интервалы возрастания и убывания.
- 7) Точки перегиба (если они имеются). Области выпуклости и вогнутости.
- 8) Асимптоты. (если они имеются).
- 9) Построение графика.

Ниже рассмотрим несколько примеров исследования методами дифференциального исчисления различных типов функций.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

- 1) Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = -1, \quad x = 1$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty, \infty)$.

- 2) Функция является нечётной
 - 3) Функция неперiodическая
 - 4) Точки пересечения с координатными осями. График проходит через начало координат $(0, 0)$ и более нигде с осями не пересекается
 - 5) Точками разрыва функции являются точки $x = -1, \quad x = 1$. Это разрывы 2-го рода.
 - 6) Экстремумы и промежутки возрастания (убывания).
- Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Критические точки: $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = -1$, $x = 1$.

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ -1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \end{aligned}$$

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

7) Точки перегиба и промежутки выпуклости (вогнутости).

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2)4x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -1 < x < 0, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ 0 < x < 1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \end{aligned}$$

8) Асимптоты.

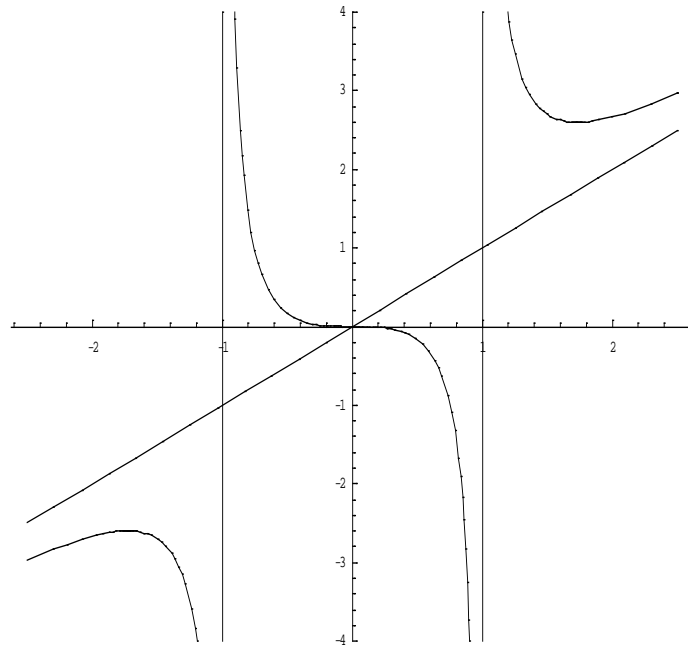
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты — $y = x$.

9) Построим график функции:



Пример: Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и построить ее график.

- 1) Областью определения данной функции являются все действительные числа $x \in \mathbb{R}$
- 2) Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
- 3) Функция непериодическая
- 4) Точки пересечения с координатными осями:

с осью Oy : $x = 0, y = 1$;

с осью Ox : $x = 1, y = 0$.

- 5) Точки разрыва и асимптоты. Разрывов нет и следовательно, вертикальных асимптот тоже нет.
- 6) Возрастание и убывание функции, точки экстремума.

$$y' = \frac{1}{3}(1-x^3)^{-2/3} \cdot (-3x^2).$$

Видно, что $y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке $x = 0$ первая производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке $x = 0$ функция скорее всего имеет перегиб.

- 7) Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции и приравниваем её нулю

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}} \quad y'' = 0$$

Точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$ являются точками перегиба, т.к.

$$y''(1-0) < 0, y''(1+0) > 0, y''(-0) > 0, y''(+0) < 0$$

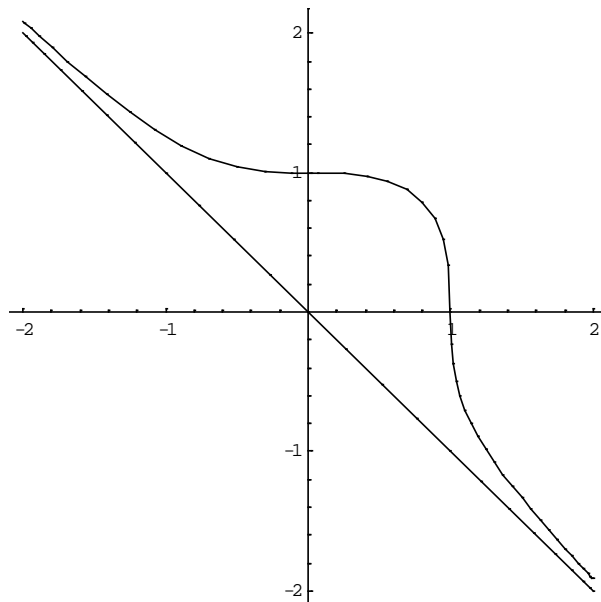
- 8) Наклонные асимптоты: общее уравнение $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x^3+x^3)}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} = 0;$$

Итого: $y = -x$ – наклонная асимптота.

- 9) Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

- 1) Областью определения функции являются все значения x , кроме $x = 0$.
- 2) Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
- 3) Функция не периодична
- 4) Точки пересечения с координатными осями:

$$\text{с осью } Ox: y = 0, x = -\sqrt[3]{4}$$

с осью $Oy: x = 0$; y – не существует.

- 5) Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

- 6) Находим точки экстремума функции и точки перегиба.

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 2, \quad y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функция возрастает,

$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функция убывает,

$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функция возрастает.

Таким образом, точка $(2, 3)$ является точкой минимума.

- 7) Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$$y'' = \frac{24}{x^4} > 0 \text{ при любом } x \neq 0, \text{ следовательно, функция вогнута на всей области}$$

определения.

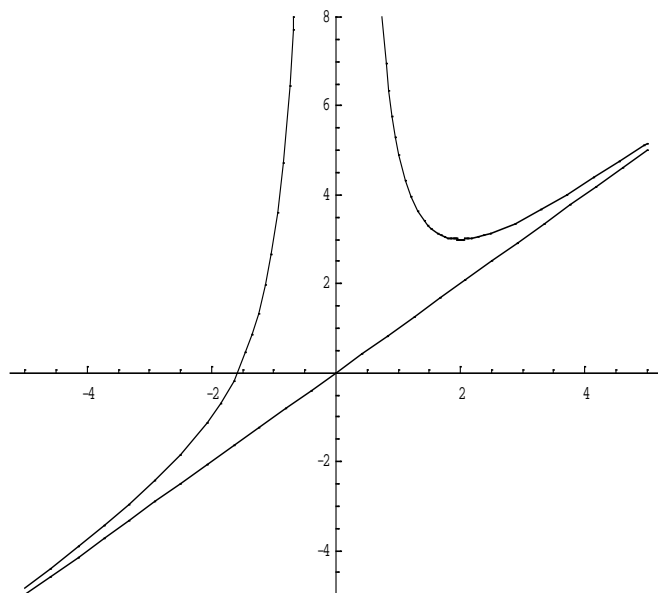
- 8) Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

- 9) Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = x(x-1)^3$ и построить ее график.

- 1) Областью определения данной функции является вся числовая ось $x \in \mathbb{R}$.
- 2) В смысле четности и нечетности функция является функцией общего вида.
- 3) Функция не периодична.
- 4) Точки пересечения с осями координат:

с осью Oy : $x = 0, y = 0$;

с осью Ox : $x = 1, x = 1, y = 0$.

- 5) Точек разрыва нет и поэтому вертикальных асимптот нет.
- 6) Находим точки экстремума и промежутки возрастания (убывания)

$$y' = [x(x-1)^3]' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

Получаем две критические точки: $x = 1$ и $x = \frac{1}{4}$.

7) Точки перегиба и промежутки выпуклости вогнутости. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = [(x-1)^2(4x-1)]' = 2(x-1)(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

Систематизируем полученную информацию в таблице:

	$(-\infty; \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f(x)$	Убывает, выпукла вниз	min	Возрастает, выпукла вниз	пере гиб	Возрастает, выпукла вверх	пере гиб	возрастает выпукла вниз

8) Попробуем найти наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-1)^3}{x} = \infty \text{ - наклонных асимптот не существует.}$$

9) Построим график функции.

