- Билет1 Вопрос1 / (1) Множества. Основные операции над множествами. Метрические и арифметические пространства.

17 декабря 2022 г. 22:50

+ Билет1 Вопрос2 / (31) Главная часть приращения функции. Формула линеаризации функции. Геометрический смысл дифференциала.

17 декабря 2022 г. 21:01

3.3. Приложение теории дифференциала к приближенным вычислениям. Линеаризация функций

Близость исходной функции и ее касательной в окрестности точки касания служит источником многочисленных приближенных формул для вычисления значений функций.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и Δx – приращение аргумента в этой точке, а Δy – соответствующее приращение функции. Тогда $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим приближенное равенство

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x.$$

Заметим, что дифференциал вычислить проще, чем приращение функции, поэтому последнее равенство играет большую роль в приближенных вычислениях.

Пример 1. Вычислить с помощью дифференциала $\sqrt[3]{1,01}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Тогда с учетом соотношения $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ для данной функции имеем $f(x+\Delta x) \approx \sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)'_x \cdot \Delta x = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\Delta x.$

При $x = 1$, $\Delta x = 0,01$ получаем

$$\sqrt[3]{1,01} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0,01 = 1 + \frac{0,01}{3} \approx 1,0033.$$

По таблицам находим, что $\sqrt[3]{1,01} = 1,0032$.

Оценим погрешность приближенных вычислений. Относительная погрешность равна $\left|\dfrac{1,0033 - 1,0032}{1,0032}\right| = 0,001$ (0,1 %).

Теория из методички по производным(линеаризация).

Методичка производные

$\boxed{N20}$ Ураа!!!

$a = (7,88)^{-\frac{1}{3}}$

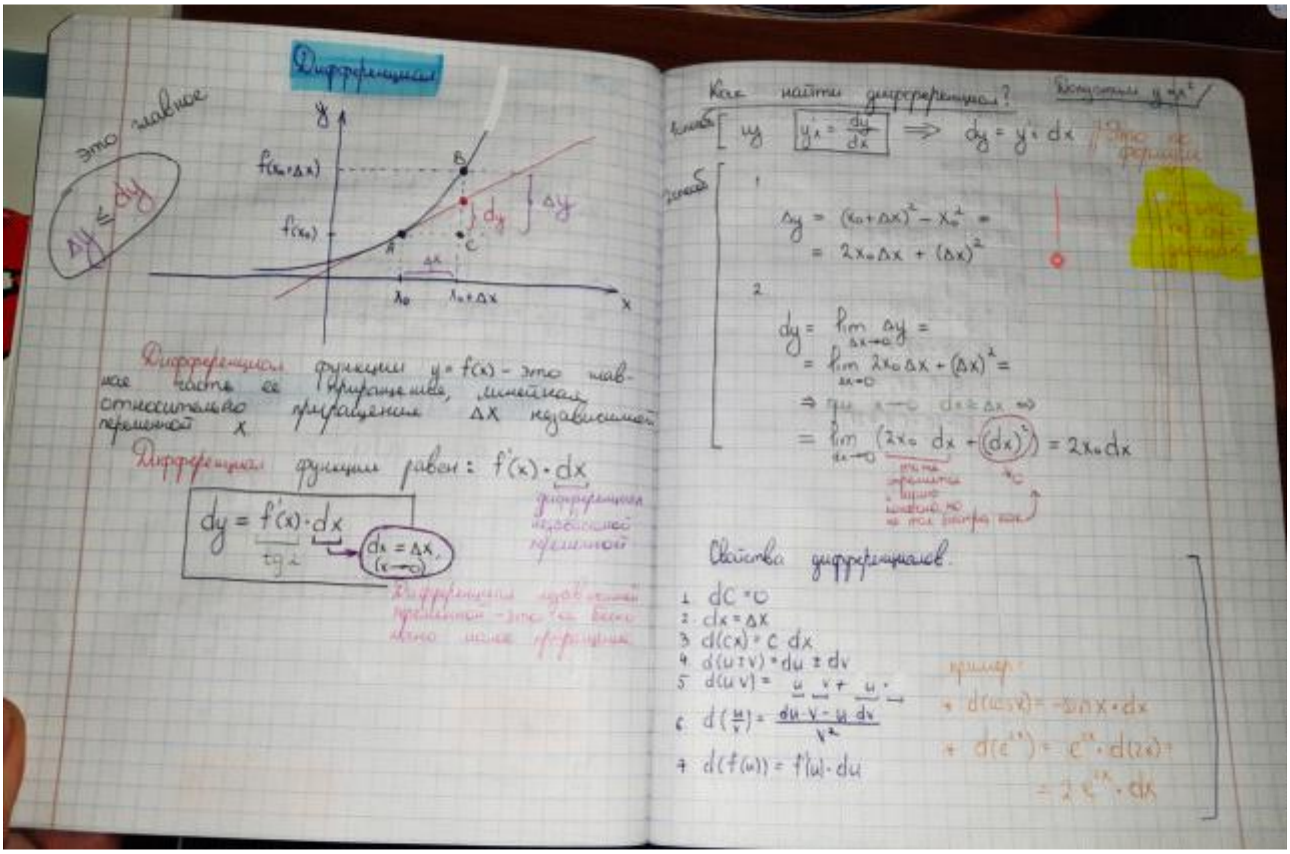
$a = (8-0,12)^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = x^{-\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}\cdot\Delta x$

для $x = 8$, $\Delta x = -0,12$:

$f(x+\Delta x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8^{4/3}}\cdot(-0,12) =$

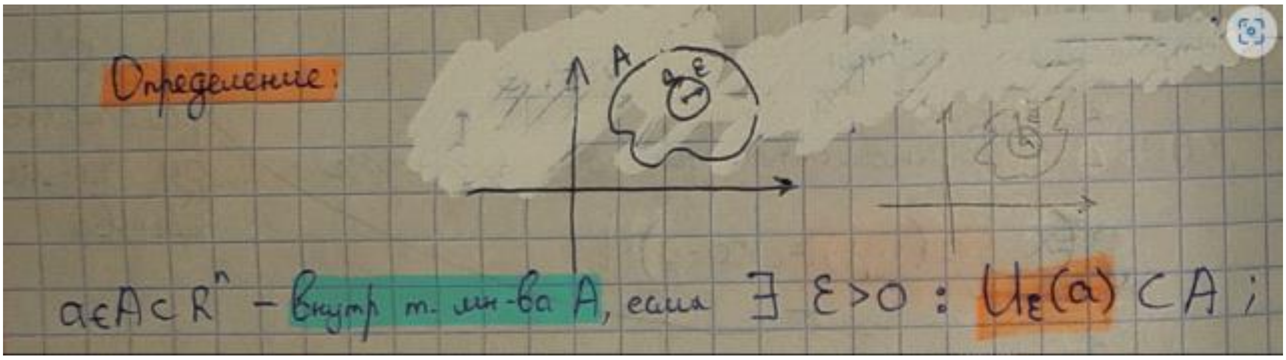
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{25} = 0,5025$

Как это применялось в методичке по производным(линеаризация).



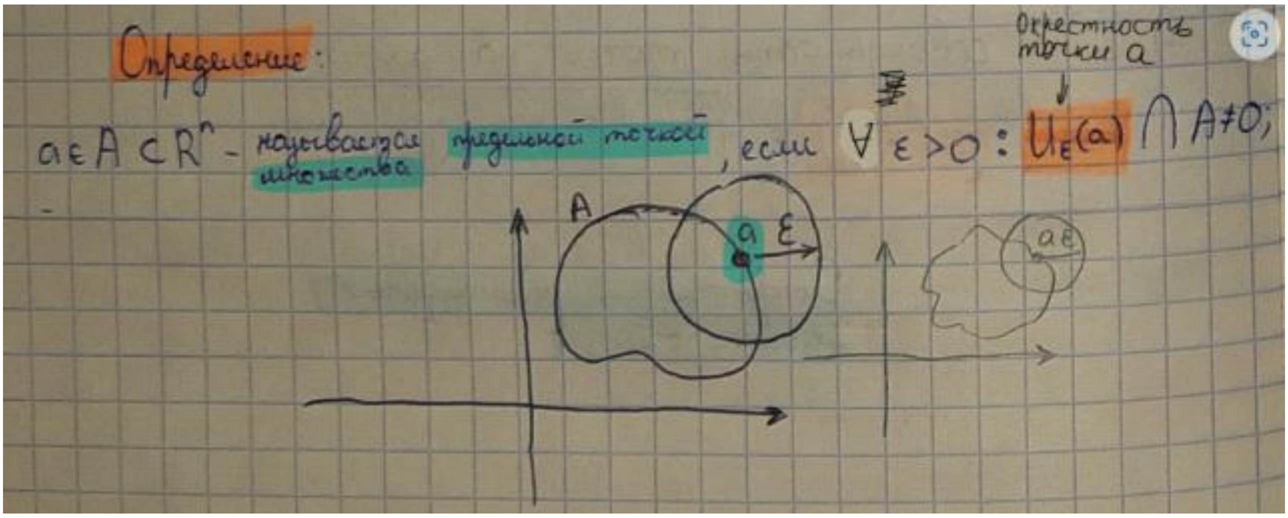
+ Билет2 Вопрос1 / (2) Открытые и замкнутые множества, окрестности. Односвязные и многосвязные множества, области.

17 декабря 2022 г. 22:50



Определение:

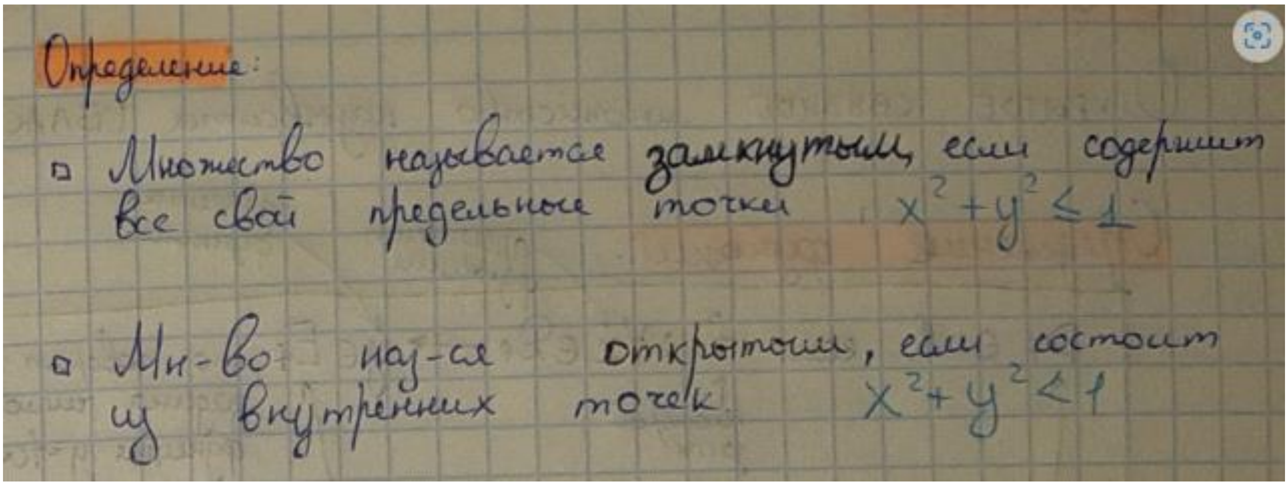
$a \in A \subset R^n$ – внутр. т. мн-ва A, если $\exists\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subset A$;



Определение:

$a \in A \subset R^n$ - называется предельной точкой множества, если $\forall\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$;

Окрестность точки a



Определение:

- Множество называется замкнутым, если содержит все свои предельные точки $x^2 + y^2 \leq 1$
- Мн-во наз-ся открытым, если состоит из внутренних точек $x^2 + y^2 < 1$

...

17 декабря 2022 г. 22:59

Определение:

Множество называется ОДНОСВЯЗНЫМ или СВЯЗНЫМ, если: → это круг 

1 условие) $\forall$ две точки можно соединить непрерывной прямой, целиком лежащей внутри данного множества.

2 условие) $\forall$ любой замкнутый контур можно стянуть в точку, на данном множестве, не разрывая

МНОГОСВЯЗНЫМ множество называется если:

1) ✓
2) ✗

Определение:

Открытое связное множество называется ОБЛАСТЬЮ.

+ Билет2 Вопрос2 / (32) Свойства дифференциала. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала.

17 декабря 2022 г. 21:02

<u>Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.</u>

Пусть $y = f(x)$ и $x = g(t)$, т.е. y - сложная функция. Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной, в связи с чем, эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $dx \neq \Delta x$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ уже не является инвариантной.

Свойства дифференциалов:

1. $dC = 0$
2. $dx = \Delta x$
3. $d(cx) = c \cdot dx$
4. $d(u \pm v) = du \pm dv$
5. $d(uv) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{\quad}$
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$
7. $d(f(u)) = f'(u) \cdot du$

пример

* $d(\cos x) = -\sin x \cdot dx$
* $d(e^{2x}) = e^{2x} \cdot d(2x) = 2e^{2x} \cdot dx$

+ Билет3 Вопрос1 / (3) Определение ограниченного множества. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Теоремы о верхней и нижней гранях числовых множеств. Лемма о вложенных отрезках.

17 декабря 2022 г. 22:50

Определение ограниченного множества.

Множество A называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

Ограничено снизу:

$A \subset R$ ограничено снизу, если $\forall x \in A\ \exists a \in R: x > a$, где a – нижняя грань множества A

Ограничено сверху:

$A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (действ числа), если $\forall x \in A\ \exists a \in \mathbb{R}: x \leq a$, где a – верхняя грань для A.

9. Точная верхняя грань множества

Составить определение точной верхней грани множества.

{Наименьшее} среди всех чисел, ограничивающих {сверху} множество X {$\subset$} $\mathbb{R}$, называется его точной {верхней} гранью.

10. Точная нижняя грань множества

Составить определение точной нижней грани множества.

{Наибольшее} среди всех чисел, ограничивающих {снизу} множество X {$\subset$} $\mathbb{R}$, называется его точной {нижней} гранью.

...

17 декабря 2022 г. 23:15

- Лемма о вложенных отрезках:

$\underbrace{\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}}_{\text{система отрезков } \Delta_n}$: $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n$ называется системой вложенных отрезков

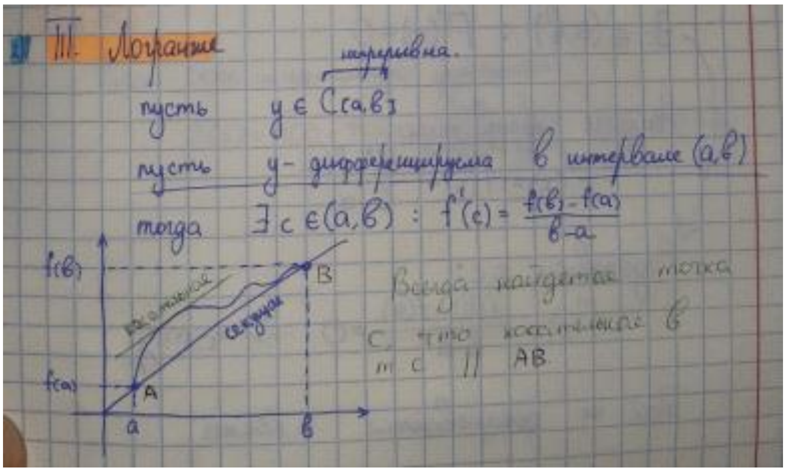
Пример системы вложенных отрезков: [1 [2 [3 4]] 5]

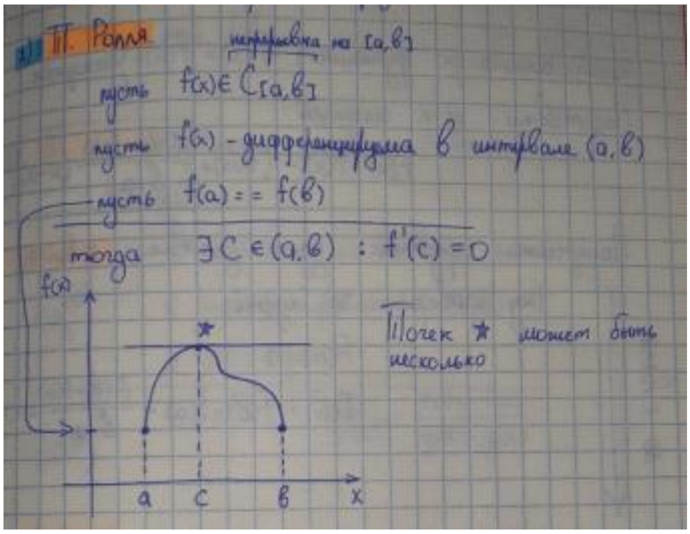
- Лемма Коши-Кантора: (НЕ верна для системы вложенных интервалов)

$\underbrace{\forall}_{\text{для любых}} \{\Delta_n\} \ \underbrace{\exists}_{\text{найдётся}}$ непустое пересечение

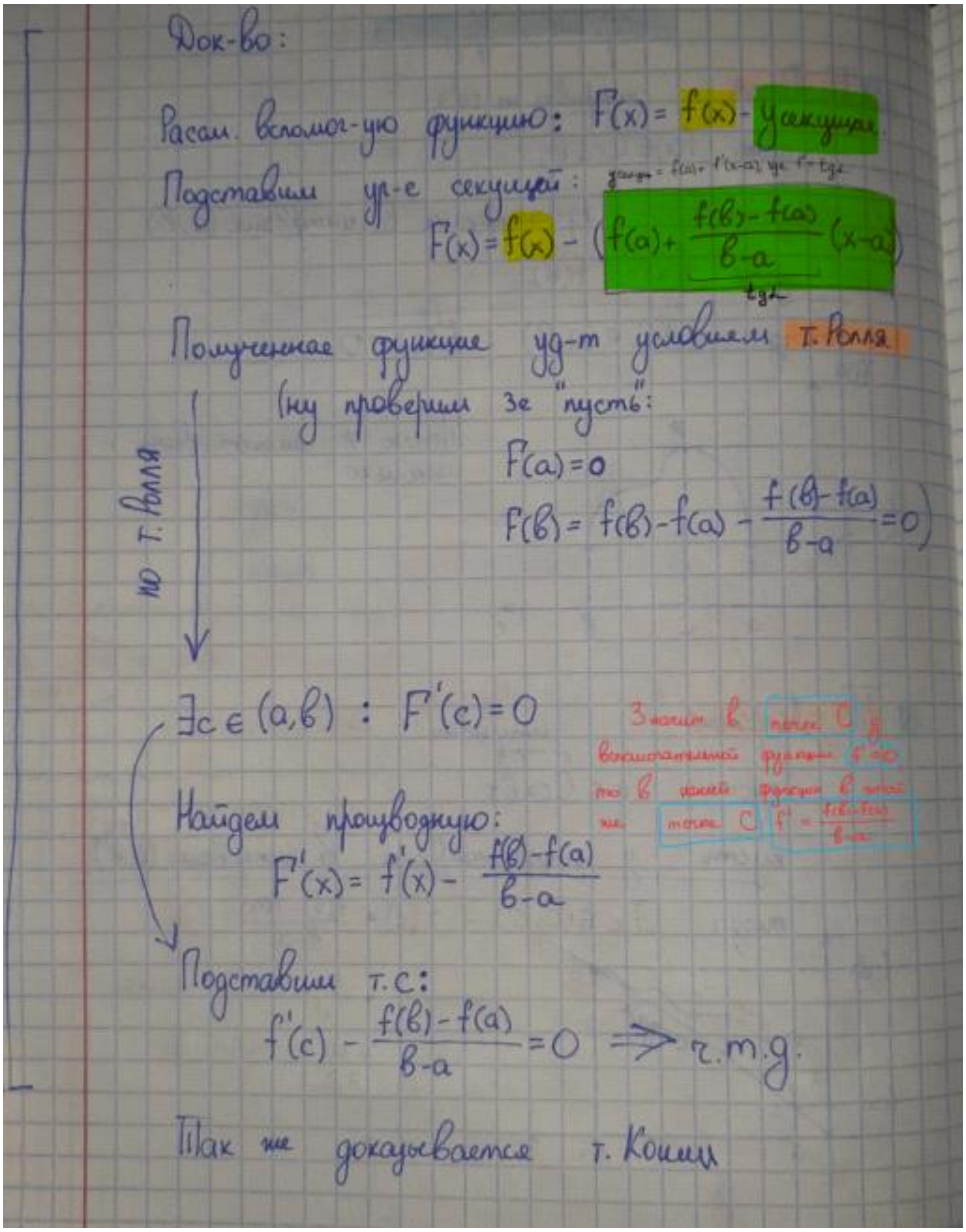
+ Билет3 Вопрос2 / (33) Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о свойствах дифференцируемых функций. Формула конечных приращений.

17 декабря 2022 г. 21:10





Док-во теоремы Логранже:



...

17 декабря 2022 г. 22:19

Теорема Коши:

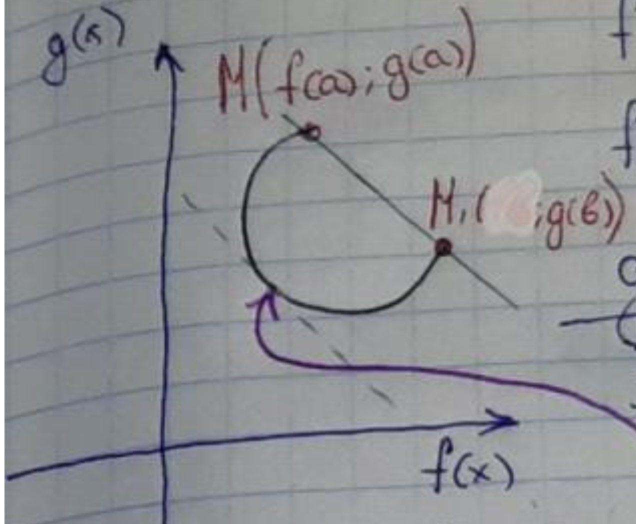
f и g заданы на $[a,b]$

$f, g \in$ Continue $[a;b]$

$f, g \in$ Differential $(a;b)$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$

$\exists$ хотя бы 1на $c \in (a;b)$: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$



функция задаётся параметрически

На $[a;b]$ лежит $(\cdot)C$, что наша функция имеет -- паралельна

(!) Если $g'(x) = 1$, то ТЕОРЕМА ЛОГРАНЖА.

+ Билет4 Вопрос1 / (4) Метод математической индукции. Неравенства Бернулли и Коши.

17 декабря 2022 г.   22:50

Неравенство Бернулли, с доказательством по индукции:

+ дополнительно про мат-индукцию

$$\boxed{(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha,}$$

где $\alpha \geq -1$, $n \in N$

индукция ведется по натуральным

1) пусть $n = 1$

$(1+\alpha) \geq 1+\alpha$

2)

$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$;

$(1+\alpha)^n \cdot (1+\alpha) \geq 1+n\alpha+\alpha$

подставили вместо нижнюю оценку

$(1+n\alpha)\cdot(1+\alpha) \geq 1+n\alpha+\alpha$

ч.т.д.

Неравенство Коши:

Неравенство Коши (доказательство)

$$\forall a_1,\dots,a_n > 0$$

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$$

Мат-индукция:

В основе метода математической индукции лежит **принцип математической индукции**.

Он заключается в следующем: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального n, если

1. оно справедливо для n = 1 и
2. из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального n = k следует его справедливость для n = k+1.

+ Билет4 Вопрос2 / (34) Применение производной к раскрытию неопределенностей в пределах. Правило Лопиталя

17 декабря 2022 г. 22:50

Приложения производной.
Правило Лопиталя.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных, если этот предел существует.

Если имеется неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$,

то

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}==\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

+ Билет5 Вопрос1 / (5) Определение функции. График функции. Чётные и нечётные функции. Периодические функции. Способы задания функции.

Функция – это такое отображение из X в Y, при котором каждый элемент из X получает, причем единственный, образ из Y.

Определение 1: Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

Определение 2: Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

Теория:

Если для функции $y = f(x)$ при любом x из области определения ($x \in X$) выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, то функция имеет период T и называется периодической.

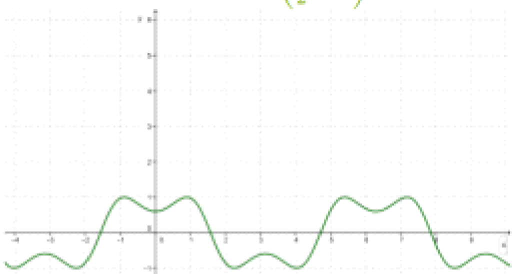
Если T является периодом функции $y = f(x)$, $x \in X$, то кратное T число также является её периодом.

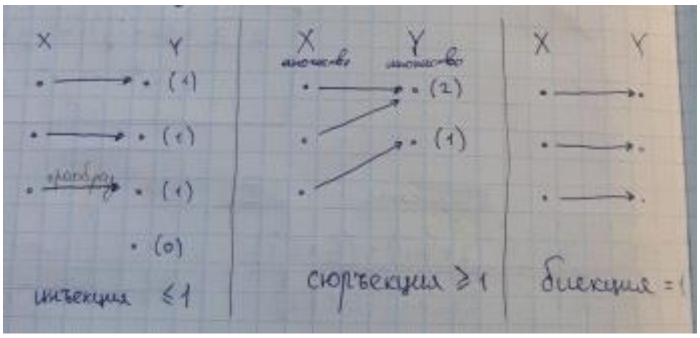
Различных периодов у периодической функции бесконечное множество.

Наименьшим положительным периодом функции называется наименьшее из положительных чисел T, являющихся периодом данной функции.

Хорошим примером периодических функций могут служить тригонометрические функции $y = sinx$, $y = cosx$ (период этих функций равен 2π), $y = tgx$ (период равен π) и другие. Функция $y = const$ также является периодической. Для нее периодом является любое число $T \neq 0$.
График периодической функции обычно строят на промежутке $[x_0; x_0 + T)$, а затем повторяют на всю область определения.

Построим график функции $y = sin\left(\frac{5}{2}cos\ x\right)$.





Функция из X в Y называется инъекцией (сюръекцией, биекцией), если каждый эл-т множества Y имеет не более одного прообраза в множестве X (не менее одно, равно один)

...

17 декабря 2022 г. 23:47

Способы задания функции:

1. **Аналитическое задание.** Если указана совокупность операций, которые надо произвести над аргументом x, чтобы получить значение функции y, то говорят, что функция задана аналитически.

1). **Явное задание**: $y = f(x)$.

<u>Пример.</u> а) $y = \sqrt{x} + 1,\ x \ge 0$;

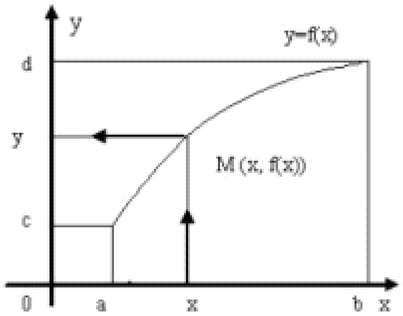
б) $y = x^2 - 5x - 1$.

2). Неявное задание: уравнение $F(x, y) = 0$, при некоторых условиях, задает функцию $y = f(x)$, если $F(x, f(x)) \equiv 0$.

<u>Пример</u>: Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ при $y \ge 0$ задает функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2. **Табличное задание**. На практике часто зависимость одной величины от другой находят опытным путем. В этом случае получается таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента.

3. **Графическое задание**. Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости xOy вида $M(x, f(x))$, где x – произвольное значение из области определения функции. Указанное геометрическое место точек, как правило, образует некоторую кривую l. В этом случае задание кривой l определяет отображение области определения на область изменения функции $f(x)$ (см. Рис).



4. **Словесное или описательное задание**. В этом случае функциональная зависимость выражается некоторым словесным утверждением.

<u>Пример.</u> а) Функция $y = [x]$ есть целая часть числа x

б) Функция $y = \{x\}$ есть дробная часть числа x

<u>Графики функций</u> $y = [x]$ <u>и</u> $y = \{x\} = x - [x]$.

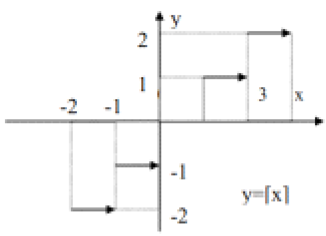
1. Заметим, что $[x]$ означает целую часть числа x, т.е. $[x] = n$, если $x = n + r$, где $0 \le r < 1$, причем данная функция определена при любом значении $x \in \Re$.

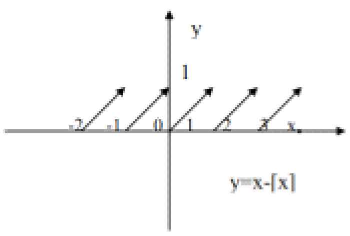
Рассматривая промежутки изменения x вида $n \le x \le n+1$ при $n \in Z$, получим, что $[x] = n$. Поэтому нетрудно построить график $y = [x]$.

2. Запишем выражение $\{x\} = x - [x]$ на промежутке $x \in [n, n+1)$, тогда

$$y = \{x\} = x - [x] = n + r - n = r.$$

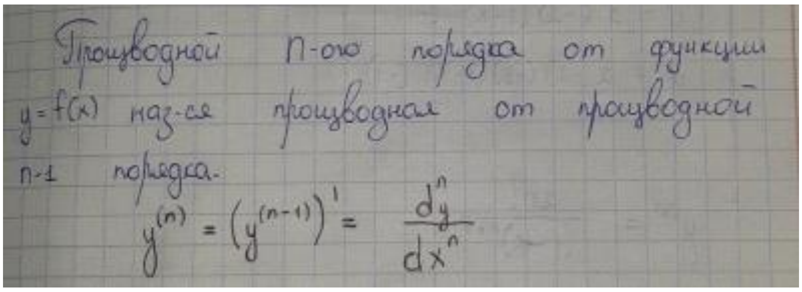
Следовательно, значение функции в точке $n + r$ равно дробной части числа x, т.е. $y \in [0,1)$.





+ Билет5 Вопрос2 / (35) Определение производной n-го порядка. Правила нахождения производной n-го порядка. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.

Определение производной n-го порядка:

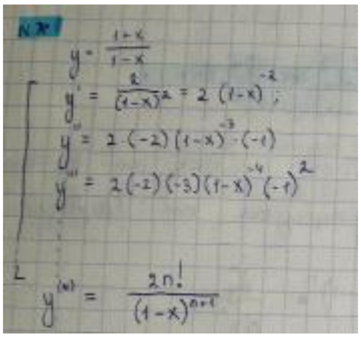


Производной n-ого порядка от функции $y=f(x)$ наз-ся производная от производной n-1 порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$y_x^{(n)} = \frac{dy^n}{dx^n} \Rightarrow$ дифференциалы высших порядков — это и есть дифференциалы высших.

Определение n-ой производной через выявление закономерности:



N*

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

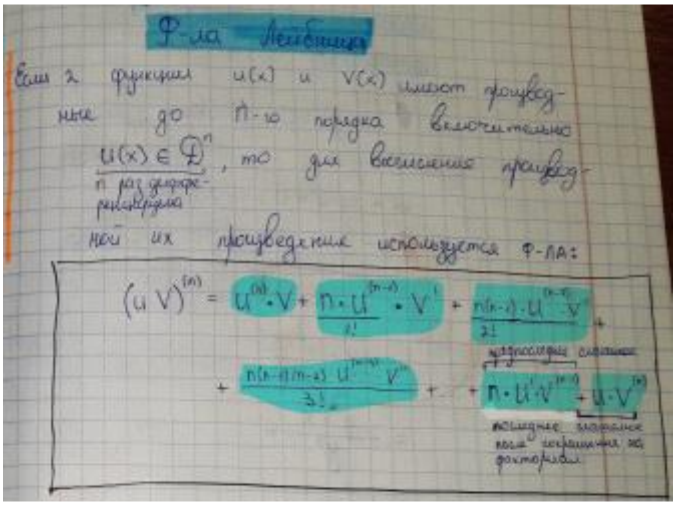
$$y' = \frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2};$$

$$y'' = 2\cdot(-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$y''' = 2(-2)(-3)(1-x)^{-4}(-1)^2$$

$$y^{(n)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

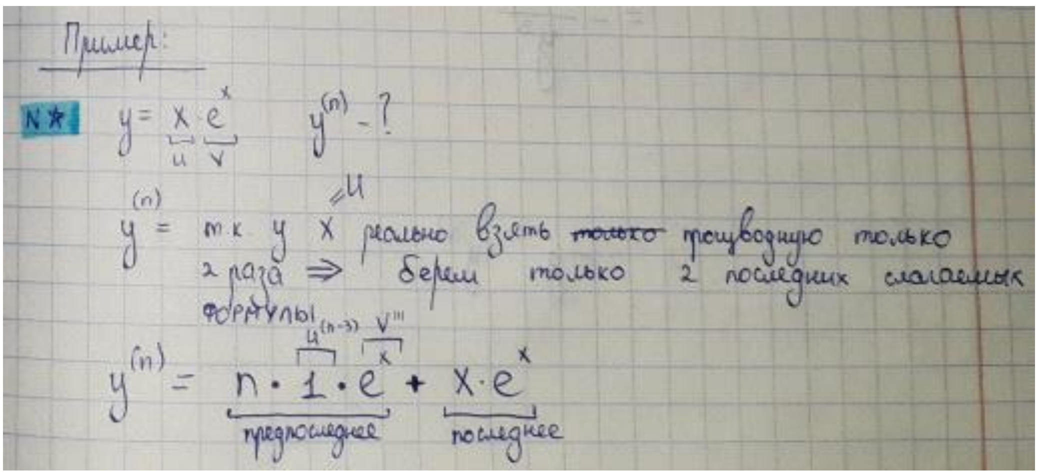
Формула Лейбница:



Ф-ла Лейбница

Если 2 функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно ($u(x) \in D^n$ — n раз дифференцируема), то для вычисления производной их произведения используется ф-ла:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + \frac{n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'}{1!} + \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot u^{(n-2)} v''}{2!}}_{\text{предпоследнее слагаемое}} + \frac{n(n-1)(n-2)\, u^{(n-3)} v'''}{3!} + \ldots + \underbrace{n\cdot u' v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}}_{\text{последнее слагаемое после сокращения на факториал}}$$



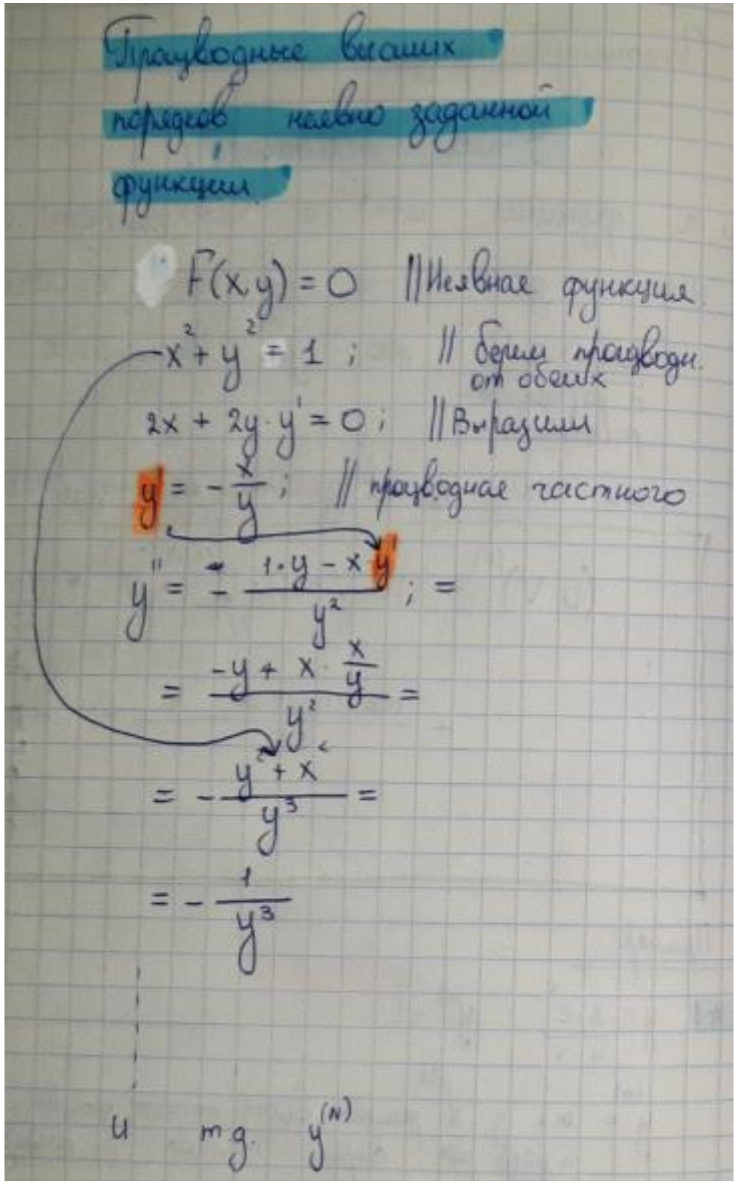
Пример:

N* $y = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v}$ $\quad y^{(n)}$ - ?

$y^{(n)} =$ т.к. у x реально взять ~~только~~ производную только 2 раза ⇒ берем только 2 последних слагаемых формулы

$$y^{(n)} = \underbrace{n\cdot 1\cdot e^x}_{\text{предпоследнее}} + \underbrace{x\cdot e^x}_{\text{последнее}}$$

Производные высших порядков неявной функции:



Производные высших порядков неявно заданной функции

$F(x,y)=0$ // Неявная функция

$x^2+y^2=1$; // берем производн. от обеих

$2x+2y\cdot y'=0$; // Выразим

$y'=-\frac{x}{y}$; // производная частного

$y''=-\frac{1\cdot y-x y'}{y^2}$; $=$

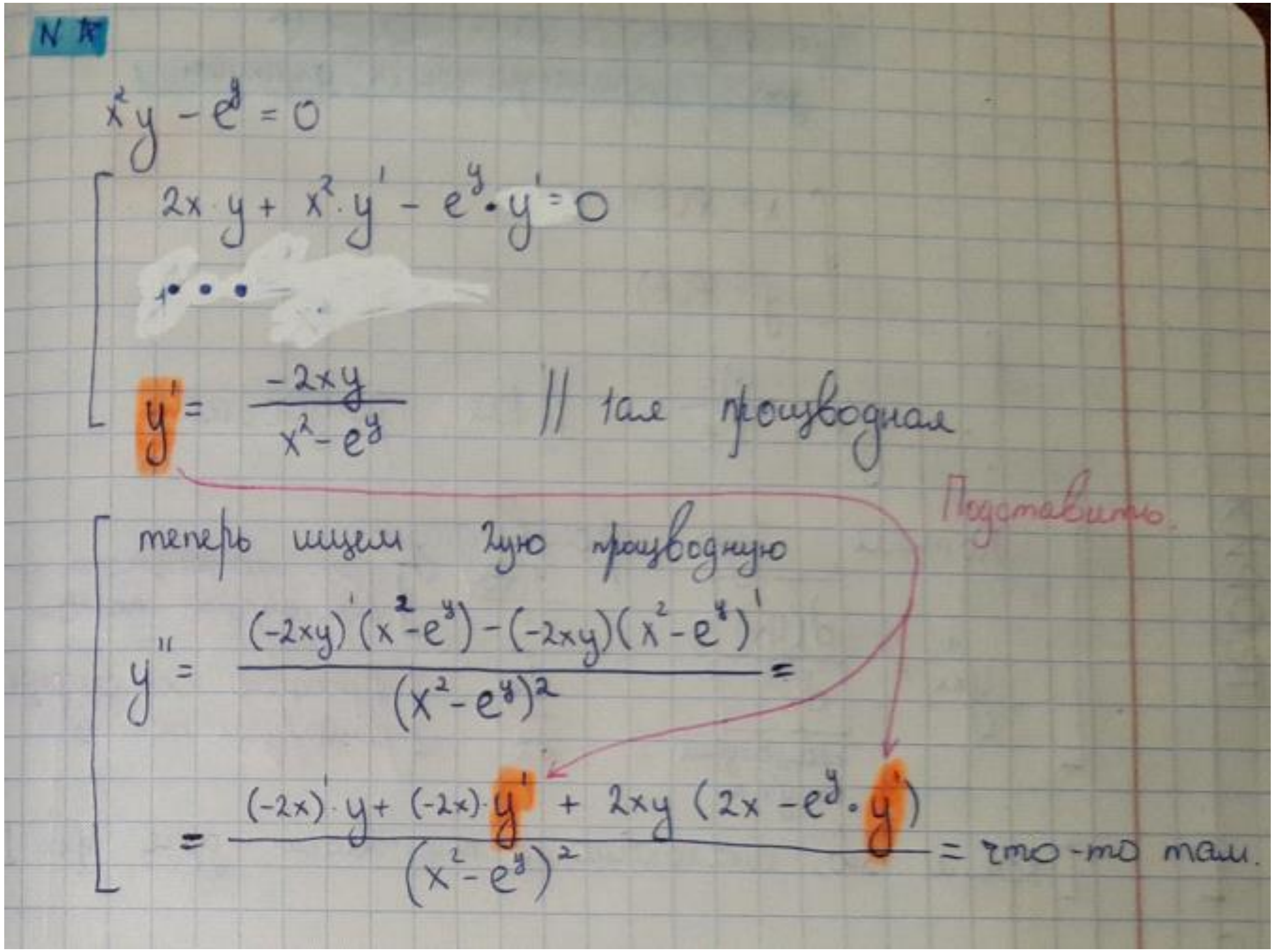
$=\frac{-y+x\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=$

$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=$

$=-\frac{1}{y^3}$

и т.д. $y^{(n)}$

Пример:



N

$x^2y-e^y=0$

$2x\cdot y+x^2\cdot y'-e^y\cdot y'=0$

$y'=\frac{-2xy}{x^2-e^y}$ // 1ая производная

Подставить.

теперь ищем 2ую производную

$y''=\frac{(-2xy)'(x^2-e^y)-(-2xy)(x^2-e^y)'}{(x^2-e^y)^2}=$

$=\frac{(-2x)'\cdot y+(-2x)\cdot y'+2xy\,(2x-e^y\cdot y')}{(x^2-e^y)^2}=$ что-то там.

...

18 декабря 2022 г. 0:23

Производные высших порядков для параметрических функций.

ТЕОРИЯ

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\boxed{f' = \frac{dy}{dx} \;\Big|:dt\; = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$ // 1ая производная

Хотим 2ую производную

$$y''_{xx} = \boxed{\frac{d(y'_x)}{dx}} = \frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

] 1ую производную дифференцируем по t.

] функцию x дифференцируем по t

производная от y'_x по x.

[хотим 3ю, аналогично, но подставляем уже y''_{xx}]

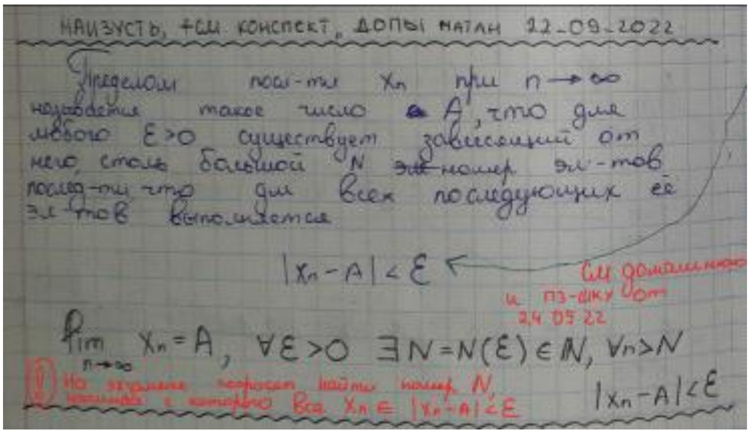
Пример:

N★
$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$$

1ая производная
$$y'_x = \frac{\frac{2tg\,t}{\cos^2 t}}{2\cos t(-\sin t)} = \frac{\sin t}{\cos^3 t\,\cos t\,(-\sin t)} = -\frac{1}{\cos^4 t};$$

2ая производная
$$y''_{xx} = \frac{(-\cos^{-4} t)'_t}{(\cos^2 t)'_t} = \frac{4\cos^{-5} t\cdot(\cancel{-\sin t})}{2\cos t\cdot \cancel{\sin t}} = \frac{2}{\cos^6 t};$$

+ Билет6 Вопрос1 / (6) Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Ограниченные последовательности. Теорема о связи между сходящимися и ограниченными последовательностями.



НАИЗУСТЬ, +См. КОНСПЕКТ, ДОПЫ МАТАН 22-09-2022

Пределом пос-ти x_n при $n \to \infty$ называется такое число A, что для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящий от него столь большой N ~~эл~~ номер эл-тов посл-ти что для всех последующих её эл-тов выполняется

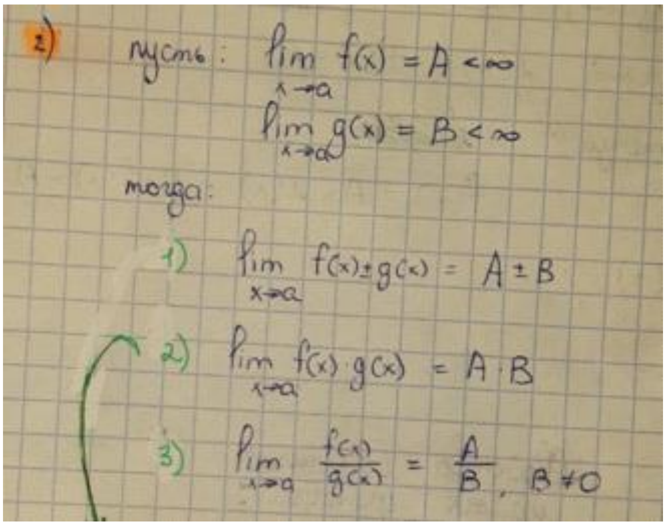
$$|x_n - A| < \varepsilon$$

См домашнюю и ПЗ-шку от 24.09.22

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > N \ |x_n - A| < \varepsilon$$

! Но [illegible] найти номер N, [illegible] с которого все $x_n \in |x_n - A| < \varepsilon$

Свойства сходящихся последовательностей(==теоремы о пределах):



2) пусть: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A < \infty$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B < \infty$

тогда:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, \ B \neq 0$

17. Ограниченные последовательности

Составить определение ограниченной последовательности.

{Числовая} последовательность $\{x_n\}$ называется {ограниченной}, если {существует} такое число M {>} 0, что для {всех элементов} последовательности выполняется соотношение $|x_n|$ {<} M для {любого} $n \in \mathbb{N}$.

18. Неограниченные последовательности

Составить определение неограниченной последовательности.

{Числовая} последовательность $\{x_n\}$ называется {неограниченной}, если для {любого} числа A $>$ 0, {существует} хотя бы один элемент {последовательности?} $\{x_n\}$, удовлетворяющий {неравенству}:

1. $|x_n| = A$;
2. $|x_n| < A$;
3. $|x_n| > A$; - верно

Теорема 3. Сходящаяся последовательность ограничена.

+ Билет6 Вопрос2 / (36) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Остаточные члены в форме Лагранжа и Коши

17 декабря 2022 г.   22:50

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (или $b \leqslant x \leqslant a$), причем в каждой внутренней точке этого отрезка существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то на этом отрезке справедлива *формула Тейлора*

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где $\xi=a+\theta(x-a)$ и $0<\theta<1$.

В частности, при $a=0$ имеем (*формула Маклорена*):

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\underbrace{\bar{o}(x^5)}_{\text{Остаток Пиано}} \quad (x\to 0)$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\begin{cases}\bar{o}((x-x_0)^n)\ (x\to x_0) & \text{Пиано}\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ \xi\in(x;x_0) & \text{Лагранж}\\ \dfrac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x) & \text{Коши}\end{cases}$$

Символика Ландау:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n}=0$$

$\Downarrow$

Пиано

+ Билет7 Вопрос1 / (7) Лемма Больцано-Вейерштрасса. Теорема о единственности предела последовательности. Достаточное условие расходимости последовательности.

17 декабря 2022 г. 23:03

33.Теорема Больцано-Вейерштрасса

Сформулировать теорему Больцано-Вейерштрасса.

Из любой {ограниченной} последовательности можно выделить {сходящуюся} подпоследовательность, а из любой {неограниченной} последовательности - бесконечно {большую} подпоследовательность, имеющую предел, равный $\pm\infty$.

Теорема о единственности предела п-ти:

„Пос-ть не может иметь более 1 предела"

Док-во от противного.

Пусть $\exists a, b : a \neq b$

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$b = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Тогда по определению должны выполняться 2 неравенства:

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

$$|x_n - b| < \varepsilon/2$$

Почему тут $\frac{\varepsilon}{2}$ а не ε?

Рассмотрим разность: // $|a-b| < \varepsilon$

$$|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| <$$

по нерав-ву Δ-ка

$\varepsilon/2 + \varepsilon/2$, ч.т.д.

т.к. $\varepsilon \to 0$, $a = b$, ч.т.д.

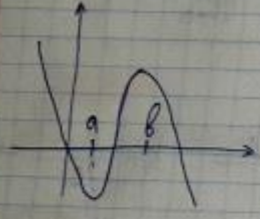
следствие:

Достаточное условие расходимости пос-ти.

„Если из пос-ти можно выделить 2 подпоследовательности с разными пределами, то пос-ть РАСХОДИТСЯ"

+ Билет7 Вопрос2 / (37) Возрастание и убывание функций. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Монотонность ф-ций –



Функция возрастает на интервале, если:

$\forall x_1 < x_2 \in$ интервалу, $f(x_1) < f(x_2)$

Функция убывает ——"——

если:

$\forall x_1 < x_2 \in (a,b)$ $f(x_1) > f(x_2)$

Если $\exists$ δ-окрестность $(\cdot)$ x_0, в которой $\forall x \neq x_0$ выполнено $f(x) > f(x_0)$, то $(\cdot)$ x_0 назыв-ся ТОЧКОЙ МИНИМУМА функции $y=f(x)$. Число $f(x_0)$ – МИНИМУМ

Если $\exists$ δ-окрестность $(\cdot)$ x_0 в которой $\forall x \neq x_0$ выполнено $f(x) < f(x_0)$, то $(\cdot)$ x_0 наз-ся ТОЧКОЙ МАКСИМУМА функции $y=f(x)$

Необходимое условие $\exists$ экстремума в $(\cdot)$:

„Если x_0 – $(\cdot)$ экстремума, то $f'(x_0)=0$ или не существует".

Достаточное условие 1

Если $\exists$ δ-окрестность критической $(\cdot)$ x_0, в которой $f'(x)>0$, при $x \in (x_0-\delta, x_0)$

и

$f'(x)<0$, при $x \in (x_0, x_0+\delta)$,

то x_0 – точка max.

аналогично

Достаточное условие 2:

„Если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$,

то x_0 – max

и если $f''(x_0)>0$,

то x_0 – min

и если $f''(x_0) = = 0$,

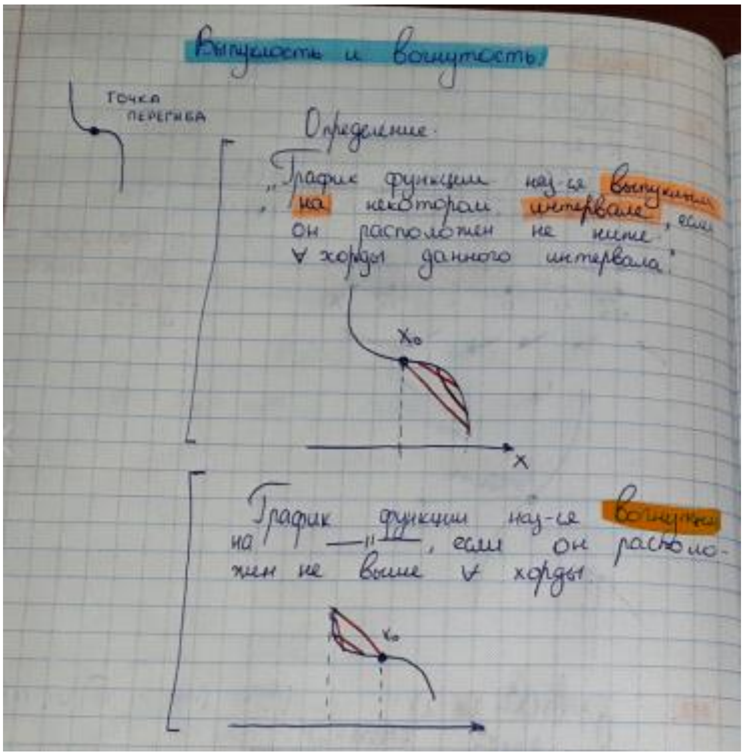
то нет экстремума.

-Билет8 Вопрос1 / (8) Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.

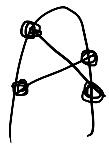
17 декабря 2022 г. 23:03

+ Билет8 Вопрос2 / (38) Выпуклость и вогнутость функции: определение, критерии. Точки перегиба: определение, способ нахождения.

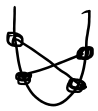
Определение:



Скорее такой рисунок:



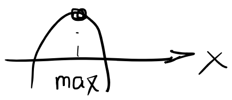
– выпуклый



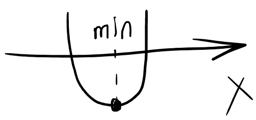
– вогнутый

Критерии:

$f'' < 0 \Rightarrow$



$f'' > 0 \Rightarrow$



???

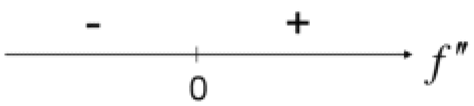
Способ нахождения:

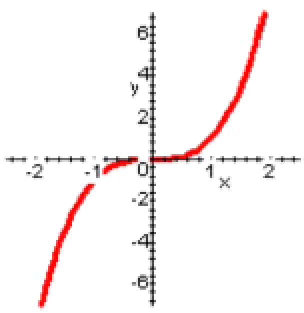
Выпуклость функции. Точки перегиба.

Примеры.

1. $f(x) = x^3$

$f''(x) = 6x$



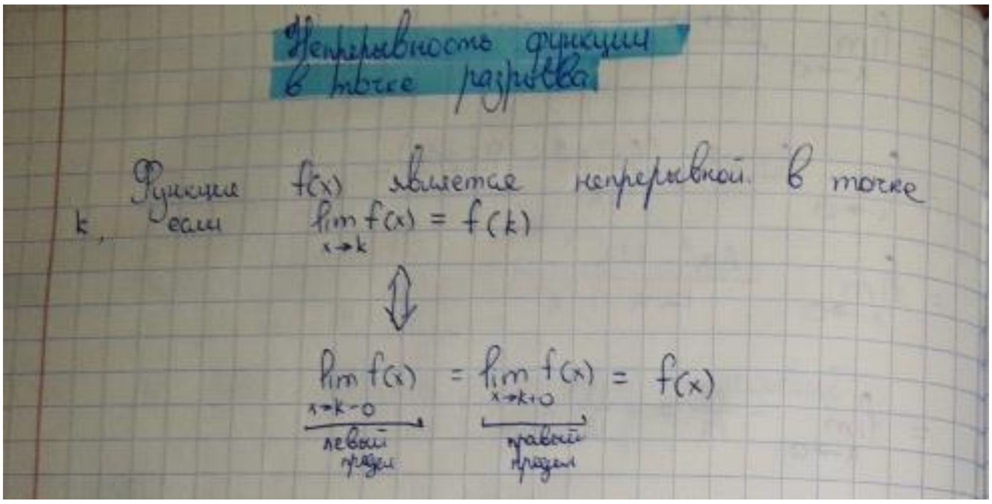


0 – точка перегиба

-Билет9 Вопрос1 / (9) Число е.

17 декабря 2022 г. 23:03

+ Билет9 Вопрос2 / (39) Бесконечные разрывы функций. Асимптоты.

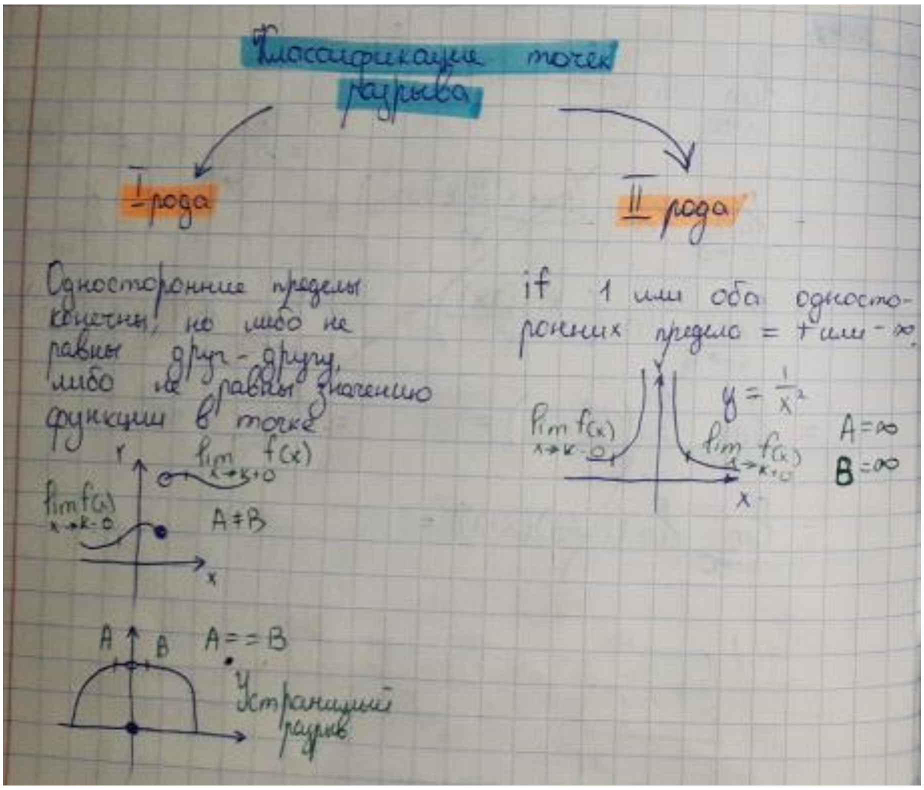


Непрерывность функции в точке разрыва

Функция f(x) является непрерывной в точке k, если $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\lim_{x\to k-0} f(x)}_{\text{левый предел}} = \underbrace{\lim_{x\to k+0} f(x)}_{\text{правый предел}} = f(x)$$



Классификация точек разрыва

I рода

Односторонние пределы конечны, но либо не равны друг другу, либо не равны значению функции в точке

$\lim\limits_{x\to k+0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to k-0} f(x)$

A≠B

A = = B

Устранимый разрыв

II рода

if 1 или оба односторонних предела = +∞ или −∞

$y = \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to k-0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to k+0} f(x)$

A=∞

B=∞

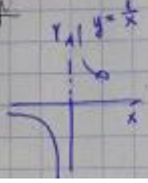
...

18 декабря 2022 г. 11:31

Асимптоты

Если (·) (x, y) непрерывно перемещается по кривой $y=f(x)$ так, чтобы хотя бы одна из её координат стремилась к ∞ и при этом расст. от (·) до некоторой прямой стремится к 0, то эта прямая наз-ся АСИМПТОТОЙ

пример



$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y=0$ асимптота 1

$x=0$ асимптота 2.

АСИМПТОТЫ

вертикальные

$y \to \infty$

* имеют вид:
  $x = a$

* расположены в (·) разрыва II рода (нули знаменател)

наклонные

$x \to \infty$

* имеют вид:
  $y = kx + b$,

где:

соответствующие k_1, соответствующие b_1, b_2, если $k_1 \neq k_2$

$k_1 = tg\,\alpha = \lim\limits_{x\to \text{[illegible]}} \frac{f(x)}{x}$

$k_2 = tg\,\alpha = \lim\limits_{x\to \text{[illegible]}} \frac{f(x)}{x}$

$b_1 = \lim\limits_{x\to \text{[illegible]}} f(x) - k_1 \cdot x$

$b_2 = \lim\limits_{x\to \text{[illegible]}} f(x) - k_2 \cdot x$

+ Билет10 Вопрос1 / (10) Предел функции в точке по Коши и по Гёйне, их эквивалентность. Предел функции на бесконечности. Односторонние пределы.

Предел функции в точке:

Предел функции по Коши:

Число A наз-ся пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от него $\delta > 0$, такое что для любого x взятого из $D(f)$ (область определения) функции, из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ (т.е. $x \neq x_0$) следует нер-во: $|f(x) - A| < \varepsilon$

эквивалентны!

Предел функции по Гейне.

Число A наз-ся пределом функции $f(x)$ по Гейне, при $x \to x_0$, если для любой пос-ти аргументов, лежащей в обл-ти ~~ее~~ определения функции, сходящейся к x_0, но не содержащей x_0 среди своих эл-тов последовательность значений функций, на эл-тах этой пос-ти сходится к числу A.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ если } \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(f),\ x_n \to x_0,\ \not\ni x_0 \quad f(x_n) \to A$$

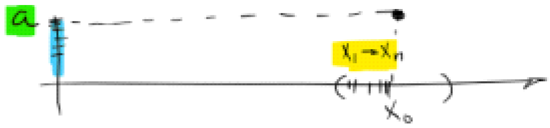
...

18 декабря 2022 г. 11:48

Пределы на бесконечности:

△ Предел функции по Гейне на бесконечности

Число a (конечное или бесконечно удаленное) называется **предел функции $f(x)$ в бесконечно удаленной точке x_0**:



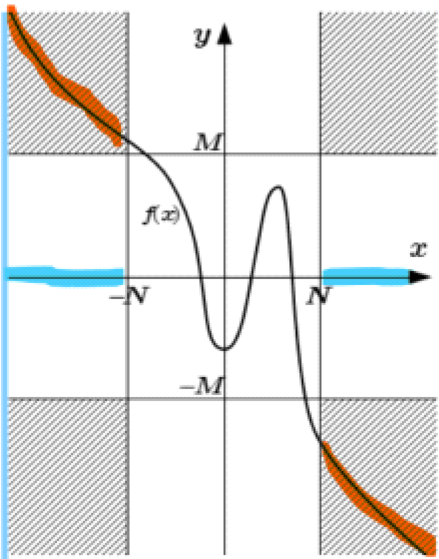
$$a = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

если

1) существует такая окрестность $U(x_0)$ бесконечно удаленной точки x_0, на которой функция определена (здесь $x_0 = \infty$ или $x_0 = -\infty$ или $x_0 = +\infty$);

2) для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, элементы которой принадлежат окрестности $U(x_0)$: $x_n \in U(x_0)$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$



Бесконечный предел функции на бесконечности:
$|f(x)| > M$ *при* $|x| > N$

△ Бесконечный предел функции по Коши на бесконечности

Предел функции $f(x)$ при x стремящемся к бесконечности ($x \to \infty$), равен бесконечности, если

1) существует такая окрестность бесконечно удаленной точки $|x| > K$, на которой функция определена (здесь K – положительное число);

2) для любого, сколь угодно большого числа $M > 0$, существует такое число $N_M > K$, зависящее от M, что для всех x, $|x| > N_M$, значения функции принадлежат окрестности бесконечно удаленной точки:

$|f(x)| > M$.

Бесконечный предел при x стремящемся к бесконечности обозначают так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Или $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

С помощью логических символов существования и всеобщности, определение бесконечного предела функции можно записать так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall M > 0 \ \exists N_M > 0 \ \forall x,\ |x| > N_M : |f(x)| > M.$$

Аналогично вводятся определения бесконечных пределов определенных знаков, равных $+\infty$ и $-\infty$:

Односторонние пределы:

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x=a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

<u>Теорема о связи между пределом и односторонними пределами.</u> *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x=a$ предел равный A необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали одновременно оба равных между собою односторонних предела, т.е.*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A & \text{// левый предел в (·) } a. \\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A & \text{// правый предел в (·) } a. \end{cases}$$

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Из существования предела в точке $x=a$ следует что

из $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Но первое неравенство можно записать в виде системы

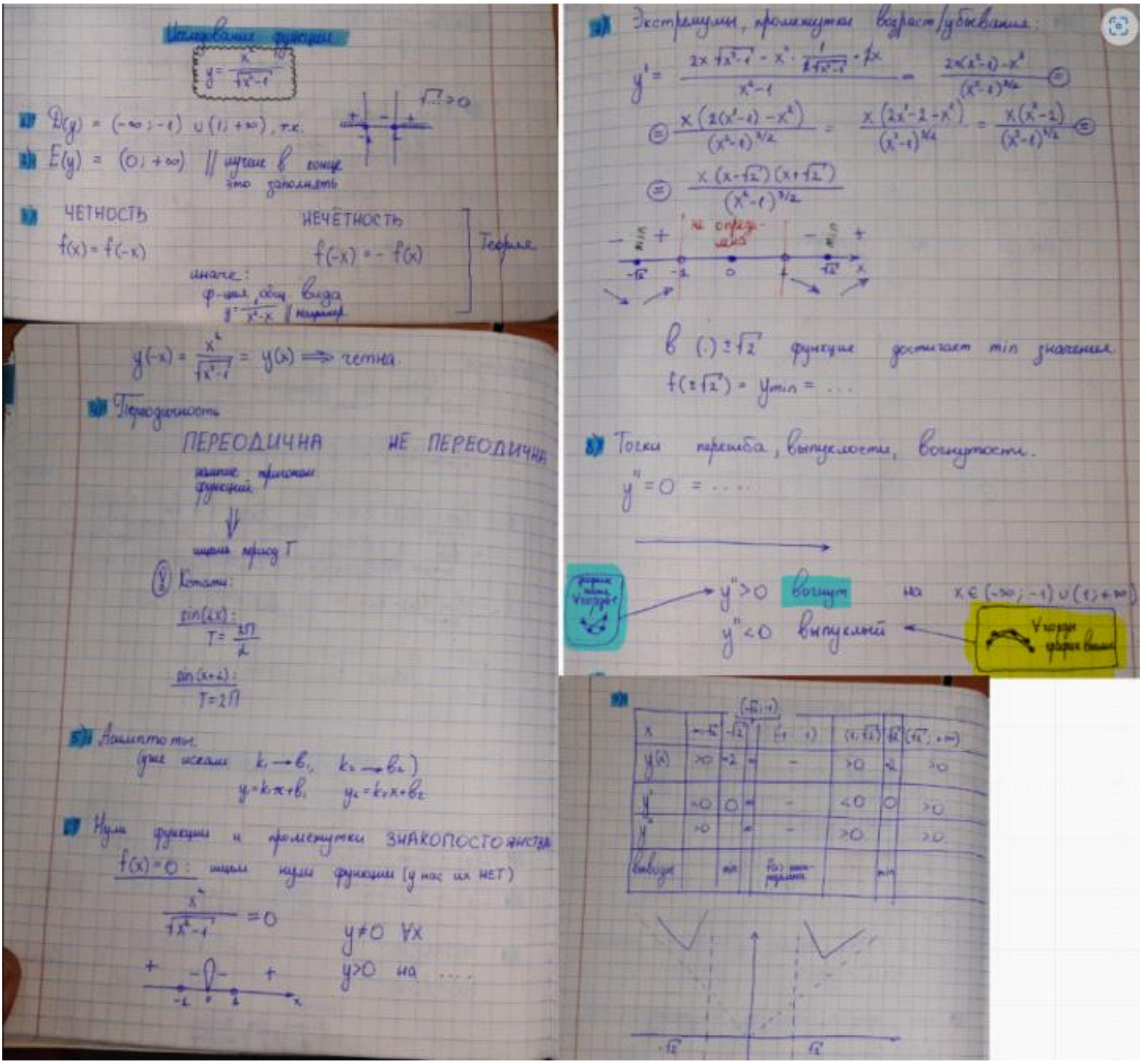
$$0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x-a<\delta, & x>a \\ 0<a-x<\delta, & x<a \end{cases}$$

откуда получаем существование двух равных односторонних переделов. Очевидно, по той же причине верно и обратное утверждение.

+ Билет10 Вопрос2 / (40) Схема построения графика функции.

17 декабря 2022 г. 23:04

Алгоритм исследования функции:



+ Билет11 Вопрос1 / (11) Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A – одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ ($+\infty$ или $-\infty$) если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) *Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.* Докажем это утверждение для двух функций. В самом деле, пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б/м при $x \to a$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_1 > 0: \ \textit{из} \ \ 0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_2 > 0: \ \textit{из} \ \ 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0: \ \textit{из} \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, $\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = 0$, т.е. $\alpha(x)+\beta(x)$ есть б/м при $x \to a$.

2) *Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.* В самом деле, пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$, т.е. $\exists M > 0$ такое, что $f(x) \le M$ для любых x удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta_1$. Пусть далее $\alpha(x)$ б/м при $x \to a$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_2 > 0: \ \textit{из} \ \ 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0: \ \textit{из} \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |\alpha(x) f(x)| \le M|\alpha(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

12

Следовательно, $\lim_{x\to a}(\alpha(x) f(x)) = 0$, т.е. $\alpha(x) f(x)$ есть б/м при $x \to a$.

3) *Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.* Это свойство следует из 2) так как бесконечно малая функция при $x \to a$ является ограниченной в некоторой окрестности точки $x = a$.

4) *Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.* (Тоже следствие 2, т.к. это частное можно представить в виде произведения бесконечно малой функции на ограниченную)

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x)$ б/б при $(x \to a)$ (или $(x \to \infty)$), то $y(x) = 1/f(x) \to 0$ $(x \to a)$ т.е., является бесконечно малой (обратное неверно)*

Контрпример. $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ - б/м при $x \to 0$, но функция

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 \sin(1/x)}$$

не является б/б т.к. при $x \to 0$, не определена в точках $x = 1/\pi n$ и следовательно

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 \sin(1/x)} \text{ не существует}$$

11

❗**Замечание.** Для того, чтобы утверждение последней теоремы было верным, необходимо потребовать, чтобы б/м не обращалась в нуль.

Рассмотрим вопрос о связи между пределами и бесконечно малыми функциями. Имеет место следующая теорема.

+ Билет11 Вопрос2 / (41) Определение первообразной. Основные свойства первообразной. Таблица простейших интегралов.

17 декабря 2022 г.   23:07

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x)=F_2(x)+C.$$

Определение: **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением $F(x)+C$. Записывают:

$$\int f(x)dx=F(x)+C;$$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left[\int f(x)dx\right]'=\left[F(x)+C\right]'=f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=d\left[F(x)+C\right]=dF(x)+dC=dF(x)=f(x)dx;$
3. $\int dF(x)=F(x)+C;$
4. $\int\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx;$ (проверяется дифференцированием с учётом 1.)

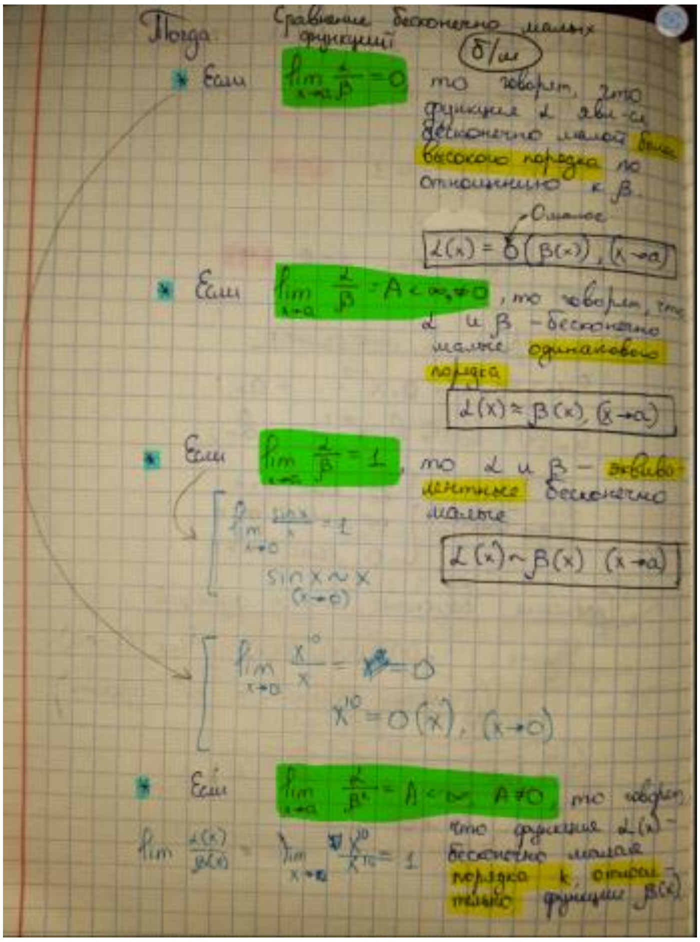
Пример: $\int\left(x^2-2\sin x+1\right)dx=\int x^2dx-2\int\sin x dx+\int dx=\frac{1}{3}x^3+2\cos x+x+C;$

1. $\int 0\cdot dx=C$
2. $\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$
3. $\int x^n\cdot dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ $n\neq -1,\ x>0$
4. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
6. $\int e^x dx=e^x+C$
7. $\int\sin x dx=-\cos x+C$
8. $\int\cos x dx=\sin x+C$
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C$
10. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\ |x|<|a|$
12. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
13. «Высокий» логарифм: $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ |x|\neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

+ Билет12 Вопрос1 / (12) Связь между пределами и бесконечно малыми функциями. Арифметические действия с пределами.

17 декабря 2022 г. 23:07

Связь между пределами и бесконечно малыми функциями:



Арифметические операции над ~~сходящимися последовательностями~~ пределами:

Пусть даны сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b. \qquad (1)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

2) $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha a, \quad \forall \alpha \in \Re$;

3) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

+ Билет12 Вопрос2 / (42) Интегрирование путем замены переменной и формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Способ подстановки (замены переменных).

Если сложно с помощью непосредственного интегрирования отыскать первообразную функции $f(x)$, то можно воспользоваться заменой переменных таким образом, чтобы полученный в результате интеграл, можно было бы найти используя табличные значения. Рассмотрим интеграл

$$\int f(x)dx$$

Сделаем в нём замену $x=\varphi(t)$, получим:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]d\varphi(t)=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Данная формула носит название **формулы замены переменных в неопределённом интеграле**. При этом, как уже было сказано, замену надо делать таким образом, чтобы свести исходный интеграл к табличному. Расмотрим несколько примеров

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену $t=\sin x$, $dt=\cos xdx$.

$\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)'=u'v+uv'$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv)=udv+vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv=\int udv+\int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv=uv-\int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2\sin xdx=\left\{\begin{matrix}u=x^2; & dv=\sin xdx;\\ du=2xdx; & v=-\cos x\end{matrix}\right\}=-x^2\cos x+\int\cos x\cdot 2xdx=$

$=\left\{\begin{matrix}u=x; & dv=\cos xdx;\\ du=dx; & v=\sin x\end{matrix}\right\}=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin xdx\right]=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

В ряде случаев метод интегрирования по частям приводит к так называемому «зацикливанию». В этом случае, возможно выразить интеграл алгебраически. Рассмотрим пример

Пример. Вычислить интегралы $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$

$$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx=\left\{\begin{matrix}u=e^{ax}; & du=ae^{ax}dx;\\ dv=\cos bxdx; & v=\frac{1}{b}\sin bx\end{matrix}\right\}=$$

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int\sin bx\cdot e^{ax}dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx=$$

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx\cancel{=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I}$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}I=\frac{b}{b^2}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов. Рассуждая, аналогично можно найти

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

+ Билет13 Вопрос1 / (13) Теоремы об устойчивости неравенств. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о трёх функциях.

17 декабря 2022 г. 23:07

Теоремы об устойчивости неравенств:

???

1) Для последовательностей:

Теорема (о предельном переходе в двух неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, *и пусть* $a_n \le c_n \le b_n$, *по крайней мере, начиная с некоторого номера* $(n \ge n_0)$.

Тогда последовательность $|c_n|$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

2) Для функций:

<u>Теорема 5.</u> (теорема о трёх функциях) *Если* $g(x) \le f(x) \le u(x)$ *вблизи точки* $x = a$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

<u>Доказательство.</u> Из условия теоремы следует, что существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки $x = a$ в которых выполняются неравенства

$$|g(x) - A| < \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon \ (1)$$

$$|u(x) - A| < \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon < u(x) - A < \varepsilon \ (2)$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда по условию задачи и с учётом имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \text{из} \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow -\varepsilon < g(x) - A \le f(x) - A \le u(x) - A < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$$ **Теорема доказана.**

+ Билет13 Вопрос2 / (43) Неопределенный интеграл от рациональной функции. Интегрирование простейших дробей.

17 декабря 2022 г. 23:07

Метод A,B,C... по сути:

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде):

$$P(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r},$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{M_{ij}x+N_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

или в подробной форме

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots$$
$$+\frac{A_{k1}}{(x-a_k)}+\frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$
$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots$$
$$+\frac{M_{r1}x+N_{r1}}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{M_{r2}x+N_{r2}}{(x^2+p_rx+q_r)^2}+\ldots+\frac{M_{r\beta_r}x+S_{r\beta_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}}$$

где A_{ij}, M_{ij}, N_{ij} – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_{ij}, M_{ij}, N_{ij} применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Типы:

1) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Пример:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-\frac{3}{2}x-1)}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{3}{4})^2+(\frac{5}{4})^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{(x-\frac{3}{4})4}{5}+C$$

3) $\int\frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}$

1) переместить в числитель производную знаменателя

2) разделить на 2 интеграла I_1 и I_2

$$I_1=\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}\qquad I_2=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

4) $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

* $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
* $\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$

Пример:

$$\int\sqrt{x-x^2}\,dx=\int\sqrt{-(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})}\,dx=$$
$$=\int\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\,d(x-\frac{1}{2})=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}+$$
$$+\frac{1}{8}\arcsin^2\frac{(x-\frac{1}{2})}{1}+C$$

...

18 декабря 2022 г. 13:02

Пример:

$$\int \frac{4x^2+x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx = I$$

$$\frac{4x^2+x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{4x^2+x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

по сути $Bx+D$ надо всегда!!!

$$4x^2+x+2 = A(x+1)^2 + B\cdot x + C(x+1)\cdot x$$

$$4x^2+x+2 = A(x^2+2x+1) + Bx + C(x^2+x)$$

$$4x^2+x+2 = Ax^2+2Ax+A+Bx+Cx^2+Cx$$

$$4x^2+x+2 = x^2(A+C)+x(2A+B+C)+A$$

$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+C=1 \\ \boxed{A=2} \end{cases} \qquad \boxed{C=2} \quad 4+B+2=1 \quad B+6=1 \quad \boxed{B=-5}$$

2 способа определить $A, B \dots$:

1 способ: подставляешь $x = 1, 2 \dots \forall n \in N$, пока не сможешь решить систему

Все ур-я ЛНЗ

2 способ:
$x^n : 0 = A+B \dots$
$x^{n-1} : 0 = A-B \dots$
$\vdots$
$x^2 : 4 = A$
$x^1 :$ аналогично

Все ур-я — ЛНЗ.

(!) А комбинация ур-ий может оказаться ЛЗависимой.

$$I = 2x^2 - \int\left(\frac{2}{x} + \frac{-5}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}\right)dx = 2x^2 - 2\ln|x| + 5\frac{(x+1)^{-1}}{-1} - 2\ln|x+1| + C$$

2°. Метод Остроградского. Если $Q(x)$ имеет кратные корни, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx, \qquad (6)$$

где $Q_1(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$,

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x),$$

$X(x)$ и $Y(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $X(x)$ и $Y(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования тождества (6).

Пример 4. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

Дифференцируя это тождество, получим:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

или

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, будем иметь:

$$D=0;\; E-A=0;\; F-2B=0;\; D+3C=0;\; E+2A=0;\; B+F=-1;$$

отсюда

$$A=0;\; B=-\frac{1}{3};\; C=0;\; D=0;\; E=0;\; F=-\frac{2}{3}$$

и, следовательно,

N1250

$$\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

① Ищем $Q_1(x)$:
$Q(x) = (x^2-3x+2)^3$
$Q'(x) = 3(x^2-3x+2)^2\cdot(2x-3)$ $\Rightarrow Q_1(x) = НОД(Q(x), Q'(x)) = (x^2-3x+2)^2$

② Ищем $Q_2(x)$:
$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x) = (x^2-3x+2)^3 : (x^2-3x+2)^2 = x^2-3x+2$

[illegible]

③ Запишем:

$$\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx = \frac{Cx+d}{(x^2-3x+2)^2} + \int \frac{Ax+B}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{-\frac{1}{2}}{(x^2-3x+2)^2} + C$$

$$\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{C(x^2-3x+2)^2 - 2(Cx+d)(x^2-3x+2)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4} + \frac{Ax+B}{x^2-3x+2}$$

$$\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{C(x^2-3x+2) - 2(Cx+d)(2x-3) + (Ax+B)(x^2-3x+2)^2}{(x^2-3x+2)^3}$$

1 способ: $x = \dots$;

2 способ: по [illegible]

3 способ: приравн.

$2x-3 = C(x^2-3x+2) - 2(Cx+d)(2x-3) + (Ax+B)(x^2-3x+2)^2$

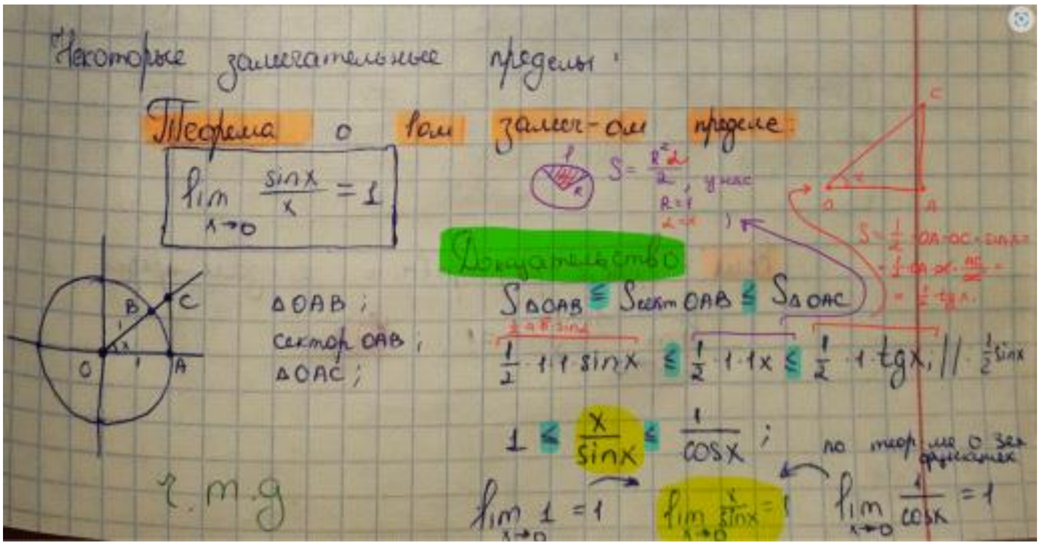
$2x-3 = $ [illegible]

$2x-3 = $ [illegible]

$$\begin{cases} a=0 \\ \dots \Rightarrow b=0 \\ \dots = 0 \Rightarrow c=0 \\ \dots = 2 \Rightarrow d=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Билет14 Вопрос1 / (14) Первый и второй замечательные пределы.

17 декабря 2022 г. 23:07



Теорема **(Второй замечательный предел)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство. В соответствии с теоремой о существовании целой части числа: $\forall x\in\Re\ \ \exists n\in\mathbb{Z}:\ n\le x\le n+1$. Тогда

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}\ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\overset{?}{=}e\cdot 1=e;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\overset{?}{=}\frac{e}{1}=e;\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ как

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

+ Билет14 Вопрос2 / (44) Неопределенный интеграл от рациональной функции. Разложение правильных дробей на простейшие.

17 декабря 2022 г. 23:07

См билет 13 вопрос 2

+ Билет15 Вопрос1 / (15) Сравнение бесконечно малых функций. Свойства эквивалентных бесконечно малых. Теорема о замене бесконечно малых на эквивалентные. Основные эквивалентности.

17 декабря 2022 г. 23:07

См билет11 вопрос1

+ Билет15 Вопрос2 / (45) Неопределенный интеграл от иррациональной функции. Интегрирование выражений вида:

17 декабря 2022 г. 23:08

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right).$$

1°. Интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right]dx, \qquad (1)$$

где R — рациональная функция и p_1, q_1, p_2, q_2, ... — целые числа.

Интегралы вида (1) находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n,$$

где n — наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2, ...

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Подстановка $2x-1=z^4$ приводит интеграл к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int \frac{2z^3\,dz}{z^2-z}=2\int \frac{z^2\,dz}{z-1}=2\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=$$

$$=(z+1)^2+2\ln|z-1|+C=\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$$

4°. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n и p — рациональные числа.

Условия Чебышёва. Интеграл (5) выражается через конечную комбинацию элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) если p — целое число;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Здесь применяется подстановка $a+bx^n=z^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число. В этом случае используется подстановка $ax^{-n}+b=z^s$.

Пример 3. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=I$. $=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

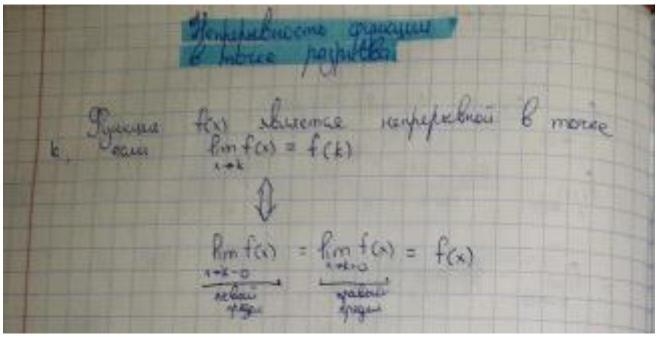
Решение. Здесь $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{4}$; $p=\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$. Следовательно, имеет место случай 2) интегрируемости.

Подстановка

$$1+x^{\frac{1}{4}}=z^3$$

+ Билет16 Вопрос1 / (16) Непрерывность функции в точке. Действия с непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

17 декабря 2022 г. 23:12

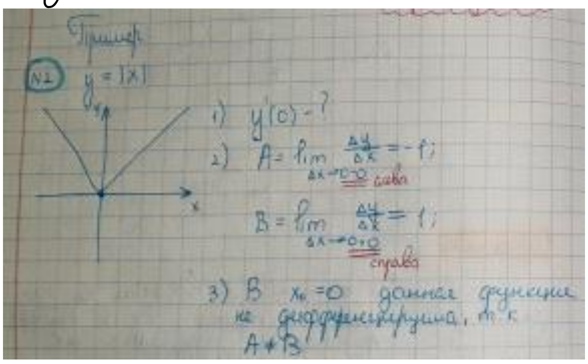


Теорема. Дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как $\Delta y = \Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ - условие дифференцируемости, то при $\Delta x \to 0$ получаем $\Delta y \to 0$. Последнее означает непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Замечание 1. Непрерывность не является достаточным условием дифференцируемости функции (См. пример ниже).

Вот почему



$y=|x|$ – непрерывна
НО! В (·) x_0 правая производная НЕ равна левой
$\Downarrow$
НЕ дифференцируема.

Замечание 2. Дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную прямую.

...

18 декабря 2022 г. 16:54

Действия над непрерывными функциями:

Теорема 1.11. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке также непрерывны следующие функции:

1) $y = f(x) \pm g(x)$;

2) $y = f(x) \cdot g(x)$;

3) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем второе определение непрерывности функции в точке и свойства пределов, получим:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Так как пределы от рассмотренных функций равняются значениям этих функций в предельной точке, то эти функции непрерывны.

Непрерывность элементарных функций:

1. **Непрерывность многочленов**

Так как функция $y = x$ непрерывна в любой точке, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций, функция $y = x^2$ – непрерывная. Последовательно применяя вышеупомянутую теорему, получаем, что для любого натурального m функция $y = x^m$ – непрерывна. Умножая непрерывные функции $x, x^2, x^3, \dots, x^k$ на постоянные числа $c_1, c_2, \dots, c_k$ соответственно, получаем, что $c_1x, c_2x^2, \dots, c_kx^k$ – непрерывные функции. Сложив $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ получаем непрерывную функцию. Итак, многочлен – непрерывная на всей прямой функция.

2. **Непрерывность рациональной функции**

По определению, **рациональной функцией** $R(x)$ называется отношение двух многочленов, $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Во всех тех точках x_0, где $Q(x) \neq 0$, функция $R(x)$ непрерывна по теореме о непрерывности частного. Если же в точке x_0 выполняется равенство $Q(x_0) = 0$, то в этой точке может быть устранимый разрыв, как например, в точке $x_0 = 1$ у функции [illegible]. Кроме того, в этой точке может оказаться разрыв второго рода, как, например, в точке $x_0 = 0$ у функции $R(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.

3. **Непрерывность показательной функции**

Функция $y = a^x$ монотонна (возрастает при $a>1$, убывает при $0<a<1$) и множеством ее значений при $x \in R$ является бесконечный промежуток – множество всех положительных чисел. По доказанной теореме, функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси.

4. **Непрерывность логарифмической функции**

Функция $\log_a x$ монотонна (возрастает при $a>1$, убывает при $0<a<1$) и при $x \in (0, +\infty)$ ее множеств значений есть R. По доказанной теореме, $y = \log_a x$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

5. **Непрерывность функции $y = x^{\alpha}$**

Функция $y = x^{\alpha}$ определена при $x>0$, причем $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. По доказанному, $z = \alpha \ln x$ – непрерывная функция при $x>0$, функция $y = e^z$ непрерывна при всех z, поэтому, по теореме о непрерывности сложной функции, $y = x^{\alpha}$ – непрерывная при $x>0$ функция.

6. **Функция $y = \sin x$**

При вычислении предела $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ было установлено, что если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \sin x < x$. Ввиду нечетности функций $y = x$ и $y = \sin x$, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \quad x < \sin x < 0$. Из этого сразу следует, что при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $|\sin x| < |x|$. Пусть x_0 произвольная точка. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Это равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$. В свою очередь, это равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} 2\sin\dfrac{x - x_0}{2}\cos\dfrac{x + x_0}{2} = 0$. Так как, по доказанному выше, $\left|\sin\dfrac{x - x_0}{2}\right| < \left|\dfrac{x - x_0}{2}\right|$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin\dfrac{x - x_0}{2} = 0$. Кроме того, функция $2\cos\dfrac{x + x_0}{2}$, очевидно, ограниченная. По свойствам бесконечно малых, получаем требуемое.

7

y

Функция $y = \cos x$

Она непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции, так как $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $z = \dfrac{\pi}{2} - x$ – непрерывная функция и $y = \sin z$ – тоже непрерывная функция.

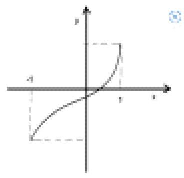
8. **Функция $y = \operatorname{tg} x$**

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. В этих, последних, она имеет разрыв второго рода.

9. **Функция $y = \operatorname{ctg} x$**

Она непрерывна во всех точках, кроме точек $x = \pi n$, $n \in Z$, где она имеет разрыв второго рода.

10. **Непрерывность функции $y = \arcsin x$**

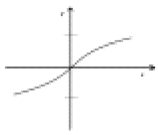


Она определена на отрезке $[-1, 1]$, возрастает на нём и множеством её значений является отрезок $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. По доказанной теореме 14.1, $y = \arcsin x$ непрерывна на $[-1, 1]$.

11. **Непрерывность функции $y = \arccos x$**

Следует из тождества $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$ – функция, также непрерывная на $[-1, 1]$.

12. **Непрерывность функции $y = \operatorname{arctg} x$**



Функция определена и возрастает на всей числовой прямой. Множество значений – интервал $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Поэтому $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна на всей числовой прямой.

13. **Непрерывность функции $y = \operatorname{arctg} x$.**

Следует из равенства : $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

+ Билет16 Вопрос2 / (46) Неопределенный интеграл от иррациональной функции. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Подстановки Эйлера.

17 декабря 2022 г. 23:12

Подстановки Эйлера.

Леонард Эйлер (Русский математик, 1707-1783)

1) Если $a>0$, то интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ рационализируется подстановкой

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$.

2) Если $a<0$ и $c>0$, то интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$.

3) Если $a>0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, то интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

Пример.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

+ Билет17 Вопрос1 / (17) Классификация точек разрыва функции. Доопределение по непрерывности.

17 декабря 2022 г. 23:12

См. билет9 вопрос 2

+ Билет17 Вопрос2 / (47) Неопределенный интеграл от иррациональной функции. Интегрирование выражений вида (см. рис) с помощью выделения полного квадрата и тригонометрических подстановок.

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

17 декабря 2022 г. 23:12

Тригонометрические подстановки по избавлению от радикала:

2°. **Тригонометрические подстановки.** Пусть $a > 0$, тогда:

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то обычно полагают $x = a \sin t$; отсюда

$\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a \cdot \cos t$

$\hookrightarrow dx = (a \sin t)' \cdot dt = a \cdot \cos t \cdot dt$

Т.к. делаем замену, основание интегрирования должно поменяться.

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t.$$

$dx = [a(1+tg^2 t)]' \cdot dt = a \cdot 2 tg\, t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot dt = \frac{2 \sin t}{\cos t \cdot \cos^2 t} dt = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} dt$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагают $x = a \sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}} = a \cdot tg\, t$

$dx = \frac{a}{\cos^2 t} \cdot dt$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то полагают $x = a \operatorname{tg} t$; отсюда

$$\sqrt{x^2+a^2} = a \sec t.$$

$\sqrt{a^2 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = a \cdot \sec t$

Заметим, что тригонометрические подстановки не всегда оказываются выгодными.

Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться *гиперболическими подстановками*, которые имеют аналогичный характер (см. пример 1209).

О тригонометрических и гиперболических подстановках более подробно см. в § 9.

Выделения полного квадрата:

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ. В наиболее простейших случаях можно выделить полный квадрат под знаком корня.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

+ Билет18 Вопрос1 / (18) Определение сложной функции. Предел сложной функции. Непрерывность сложной функции. Гиперболические функции.

17 декабря 2022 г. 23:12

Сложная функция:

Сложная функция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

Определение. Если функция $y=f(x)$ отображает множество X в Y, а функция $z=g(y)$ отображает множество Y в Z, тогда функция $z=g(f(x))$ называется суперпозицией функций f и g или сложной функцией аргумента x множества X, Y и Z – подмножества R.

Пример. $z=\sin(\sqrt{x}+1)$, $z=e^{x^2+\sin x}$

Предел сложной функции:

Теорема о пределе сложной функции

суперпозиция $= f(g(x))$

Пусть функции $t=g(x)$ и $y=f(t)$ имеют пределы:

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$;

$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = y_0$.

И пусть существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_0(x_0)$ точки x_0, на которой

$g(x) \neq t_0; \quad x \in \overset{\circ}{U}_0(x_0)$.

Тогда существует предел сложной функции $f(g(x))$, и он равен y_0:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = y_0$.

Здесь x_0, t_0, y_0 – конечные или бесконечно удаленные точки: $x_0, t_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Окрестности и соответствующие им пределы могут быть как двусторонние, так и односторонние.

Доказательство ⇓

Непрерывность сложной функции:

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z=g(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, тогда суперпозиция функций f и g, т.е. функция $z=g(f(x))=F(x)$, является непрерывной в точке x_0.

Гиперболические функции:

Пример. (Гиперболические функции)

Функции $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ называются гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом соответственно. Относительно гиперболических функций справедливы формулы:

$$\operatorname{ch}(x \pm y)=\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y)=\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

+ Билет18 Вопрос2 / (48) Неопределенный интеграл от иррациональной функции. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

17 декабря 2022 г. 23:12

Билет 13 вопрос2

+ Билет19 Вопрос1 / (19) Непрерывность функции на отрезке. Теоремы Коши об обращении в нуль функции непрерывной на отрезке и о промежуточном значении функции

17 декабря 2022 г. 23:12

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале**, если она непрерывна в любой точке интервала. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a,b), а на краях отрезка является односторонне непрерывной.

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

<u>Свойство 1.</u> (**1-я Теорема Больцано** (1781-1848) – **Коши**). *Если функция* $f(x)$ - *непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри интервала* (a,b), *где* $f(x)=0$.

Т.е. если $\operatorname{sign}(f(a))\neq\operatorname{sign}(f(b))$, *то* $\exists x_0 : f(x_0)=0$.

+ Билет19 Вопрос2 / (49) Интегрирование тригонометрических выражений вида . Универсальная тригонометрическая подстановка. $R(\sin x, \cos x)$.

17 декабря 2022 г. 23:12

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg}t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int\frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int\frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}x/2 + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с её помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int\frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int\frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x/2 + 1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно косинуса или синуса.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$ если функция R является нечетной относительно косинуса.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{matrix}\sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x\end{matrix}\right\} = \int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int\frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4}dt = \int\frac{dt}{t^4} - 3\int\frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно синуса.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}dx = \left\{\begin{matrix}\cos x = t \\ dt = -\sin x dx\end{matrix}\right\} = -\int\frac{1-t^2}{2+t}dt = \int\frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t+2}dt = \int\left[\frac{(t+2)^2 - 4t - 5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int\left[t + 2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2}\right]dt = \int t dt + \int 2dt - 4\int\frac{t dt}{t+2} - 5\int\frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int\frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B, \quad A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2, \quad \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1\end{matrix}\right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int\frac{dt}{t+2} - 4\int dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функции R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Для преобразования подынтегральной функции в рациональную используется подстановка $t = \operatorname{tg}x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}x - 16}dx = \left\{\begin{matrix}\operatorname{tg}x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg}x) = dt\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int\frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x + 3 - 5}{\operatorname{tg}x + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x - 2}{\operatorname{tg}x + 8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int\cos mx\cos nx dx = \int\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\cos nx dx = \int\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\sin nx dx = \int\frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

Пример. $\int\sin 7x\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int\cos 5x dx - \frac{1}{2}\int\cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$

+ Билет20 Вопрос1 / (20) Свойства функций непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении функции.

17 декабря 2022 г. 23:12

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале**, если она непрерывна в любой точке интервала. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a,b), а на краях отрезка является односторонне непрерывной.

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойство 1. (**1-я Теорема Больцано** (1781-1848) – **Коши**). *Если функция* $f(x)$ *- непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри интервала* (a,b), *где* $f(x)=0$.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a))\neq\mathrm{sign}(f(b))$, *то* $\exists x_0 : f(x_0)=0$.

Свойство 2: (**2-я Теорема Больцано** (1781-1848) – **Коши**). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$, *принимает на этом отрезке все свои промежуточные значения, т.е., если* $f(a)=A, f(b)=B, A\leq B$, *то* $\forall C\in(A,B)\exists c\in(a,b): C=f(c)$.

Свойство 3: (**1-я Теорема Вейерштрасса** (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)) *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке* $[a,b]$ *выполняется условие* $-M\leq f(x)\leq M$.

Свойство ~~2~~4: (**2-я Теорема Вейерштрасса** (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$, *принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют такие значения* x_1 *и* x_2, *что* $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$, *причем*

$$m\leq f(x)\leq M$$

+ Билет20 Вопрос2 / (50)

17 декабря 2022 г. 23:12

2. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений $R(\sin x, \cos x)$ в случае, когда подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$ (или $\cos x$) или четна относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2} = 2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2+4t+4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}x/2+2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с её помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int\frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x/2+1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **если функция R является нечетной относительно косинуса или синуса.**

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$ если функция R является нечетной относительно косинуса.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{array}{l}\sin x = t\\ dt = \cos x dx\\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x\end{array}\right\} = \int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt = \int\frac{dt}{t^4} - 3\int\frac{dt}{t^2} +$$

$$+3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **если функция R является нечетной относительно синуса.**

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left\{\begin{array}{l}\cos x = t\\ dt = -\sin x dx\end{array}\right\} = -\int\frac{1-t^2}{2+t}dt = \int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int\frac{tdt}{t+2} - 5\int\frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int\frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B, \quad A + Bt + 2 = t\\ B = 1, \quad A = -2, \quad \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1\end{array}\right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int\frac{dt}{t+2} - 4\int dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **если функция R четная относительно** $\sin x$ **и** $\cos x$.

Для преобразования подынтегральной функции в рациональную используется подстановка $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}x - 16}dx = \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}x = t;\\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg}x) = dt\end{array}\right\} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2+6t-16} = \int\frac{dt}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+3-5}{\operatorname{tg}x+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}x+8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int\cos mx\cos nx dx = \int\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\cos nx dx = \int\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\sin nx dx = \int\frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

Пример. $\int\sin 7x\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int\cos 5x dx - \frac{1}{2}\int\cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$

-Билет21 Вопрос1 / (21) Определение монотонной функции. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции. Теорема о множестве значений функции монотонной и непрерывной на отрезке.

17 декабря 2022 г. 23:16

Теорема Вейерштрасса. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

-Билет21 Вопрос2 / (51)

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет22 Вопрос1 / (22) Обратная функция. График обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет22 Вопрос2 / (52) Определенный интеграл. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Интегральные суммы. Суммы Дарбу. Теорема об условии существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет23 Вопрос1 / (23) Обратные тригонометрические и гиперболические функции.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет23 Вопрос2 / (53) Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет24 Вопрос1 / (24) Определение производной функции. Производные основных элементарных функций.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет24 Вопрос2 / (54) Определенный интеграл, как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет25 Вопрос1 / (25) Определение дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции. Непрерывность дифференцируемой функции.

17 декабря 2022 г. 23:16

-Билет25 Вопрос2 / (55) Формула замены переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

17 декабря 2022 г.   23:16

-Билет26 Вопрос1 / (26) Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет26 Вопрос2 / (56) Приложение интегрального исчисления к геометрии. Площадь плоской фигуры.

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет27 Вопрос1 / (27) Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции.

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет27 Вопрос2 / (57) Приложение интегрального исчисления к геометрии. Площадь криволинейного сектора

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет28 Вопрос1 / (28) Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет28 Вопрос2 / (58) Приложение интегрального исчисления к геометрии. Длина кривой.

17 декабря 2022 г. 23:19

-Билет29 Вопрос1 / (29) Производная обратной функции и функции, заданной параметрически.

17 декабря 2022 г. 23:19

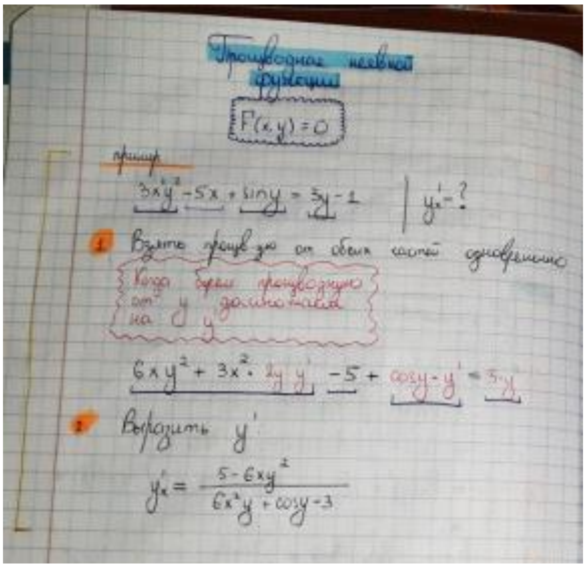
-Билет29 Вопрос2 / (59)

17 декабря 2022 г. 23:19

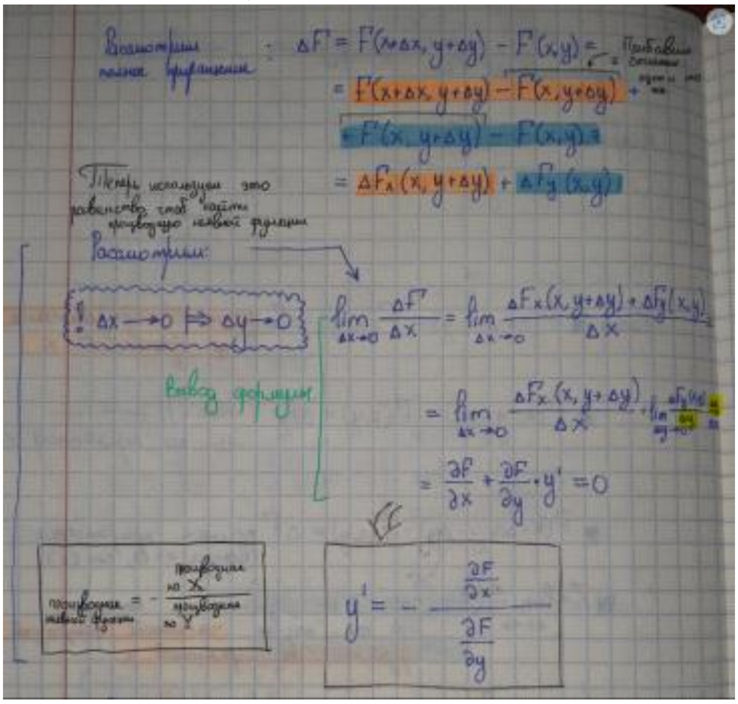
-Билет30 Вопрос1 / (30) Производная неявно заданной функции.

17 декабря 2022 г. 21:00

1 способ:



2 способ: Он был на лекциях



-Билет30 Вопрос 2 / (60)

17 декабря 2022 г. 22:50