Оглавление

1. Множества и операции над ними

Множество S - это собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества S.

Множество A называется подмножеством множества B, если всякий элемент из A является элементом B. Если A является подмножеством B и B не является подмножеством A, то говорят, что A является строгим (собственным) подмножеством B.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым, оно является подмножеством любого множества. Множество U называется универсальным, т.е. все рассматриваемые множества являются его подмножеством.

Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. *A=B.*

Множества A и B считаются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Мощность конечного множества A – это число его элементов.

Мощность множества обозначают $|A|$.

Множества называются равномощными, если их мощности совпадают.

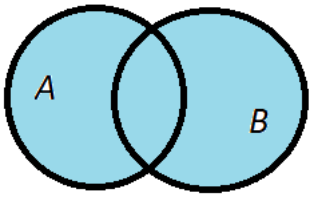
Множество из всех подмножеств множества A называют булеаном *P(A).*

Булеан равен 2^n, где n – количество элементов множества A.

Операции на множествами:

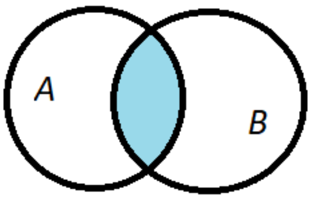
1) Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x |\ x \in A\ \vee x \in B\}$$



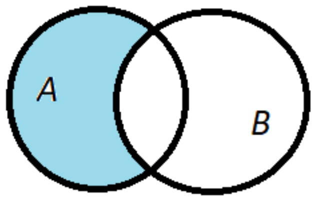
2) Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B.

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x |\ x \in A\ \wedge x \in B\}$$



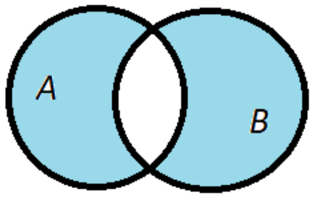
3) Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$$\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \{x |\ x \in A\ \wedge x \notin B\}$$



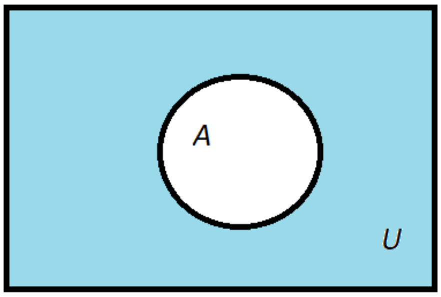
4) Симметрической разностью множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В.

$$A + B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$



5) Абсолютным дополнением множества А называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству А.

$$\bar{A} = U \backslash A$$



6) Прямым произведением множеств X и Y называется множество $X \times Y$, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары <x, y>, такие, что $x \in X, y \in Y$.

*Упорядоченная пара <x, y> интуитивно пределяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядк. Две пары <x, y>, <u, v> считаются равными тогда и только тогда, когда x=u, y=v.

1. Коммутативность объединения $A\cup B=B\cup A$	1'. Коммутативность пересечения $A\cap B=B\cap A$
2. Ассоциативность объединения $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	2'. Ассоциативность пересечения $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	3'. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A\cup\varnothing=A$ $A\cup\overline{A}=U$ $A\cup U=U$	4'. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A\cap U=A$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$ $A\cap\varnothing=\varnothing$
5. Закон идемпотентности объединения $A\cup A=A$	5'. Закон идемпотентности пересечения $A\cap A=A$
6. Закон де Моргана $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	6'. Закон де Моргана $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
7. Закон поглощения $A\cup(A\cap B)=A$	7'. Закон поглощения $A\cap(A\cup B)=A$
8. Закон склеивания $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$	8'. Закон склеивания $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$
9. Закон Порецкого $A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$	9'. Закон Порецкого $A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$
10. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}}=A$	

2. Парадокс Рассела

Пусть K – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента.

Содержит ли K само себя в качестве элемента?

1) Если да, то по определению K, оно не должно быть элементом K, следовательно, противоречие
2) Если нет, то опять же по определению K, оно должно быть элементом K, следовательно, противоречие

3. Отношения на множествах. Операции над отношениями

Пусть A и B – множества. Декартово произведение $A \times B$ – это множество упорядоченных пар.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Отношением на множестве A и B называется $R \subset A \times B$

Бинарным отношением ρ называется множество упорядоченных пар.

Определение. ***Областью определения*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*

$$dom\ R = \{a | \exists (a, b) \in R\}$$

Определение. ***Областью значений*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*

$$Im\ R = \{b | \exists (a, b) \in R\}$$

Любое подмножество декартова квадрата $A \times A$ называется отношением на множестве A.

Отношение равенства – это отношение $Id_A = \{(a, a) | a \in A\}$

Если R – отношение на множестве A, то обратным отношением называют:

$$R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\}$$

Операции над отношениями:

1) *Произведение отношений*

$R_1 \subset A \times B$

$R_2 \subset B \times C$

$R_1 R_2 \subset A \times C$

$$R_1 R_2 = \{a, c | \exists b \in B: (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2\}$$

Пусть $A = B = C = \mathbb{N}$

$R_1 = R_2 = R_3 = \{(a, b) | a < b\}$

$R_1 R_2 = \{(a, c) | c > a + 1\}$

Если было бы: $A = B = C = \mathbb{R}$

$R_1 R_2 = \{(a, c) | a < c\}$

4. Рефлексивность, симметричность, транзитивность, линейность отношения

1) Отношение R – рефлексивно, если $(a, a) \in R, \forall a \in A$

Если каждый элемент из этого множества находится в отношении R с самим собой.

$(a, a) \in R \ \forall a \in A \ \Leftrightarrow Id_A \in R$

2) Отношение R – симметрично, если $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Longrightarrow R = R^{-1}$
3) Отношение R – транзитивно, если $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R \ \Leftrightarrow R^2 \subset R$
4) Отношение R, обладающее всеми тремя свойствами, называется отношением эквивалентности
$$a \sim b$$
5) Линейность отношения R означает, что для любых $x, y \in A, x \neq y$ или $(x, y) \in R$, или $(y, x) \in R$

5. Замыкание отношения относительно некоторого свойства. Построение замыканий отношений

Пусть задано некоторое отношение и некоторое свойство. Замыканием отношения относительно данного свойства называется наименьшее отношение, содержащее заданное отношение и обладающее данным свойством

Пример

$$R \subset A \times A$$

$$[R]_{\text{рефл}} = R \cup Id_A$$

$$[R]_{\text{сим}} = R \cup R^{-1}$$

$$[R]_{\text{транз}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Пояснение:

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subset [R]_{\text{транз}}$$

Пусть aTb и bTc – это значит, что $(a,b) \in R^k, (b,c) \in R^l$

(a,b) цепочка из пар a и b, a – начало, b – конец

(b,c) – цепочка из пар b, c, b – начало, c – конец

$(a,c) \in R^{k+l} \Longrightarrow (a,c) \in T$

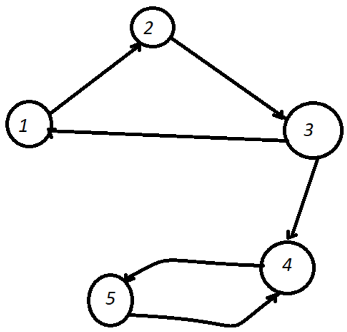
6. Представление отношений на конечных множествах в виде матрицы. Построение транзитивного замыкания.

$$[R]_{\text{транз}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Конечное отношение можно представить в виде прямоугольной матрицы. Ее столбцы соответствуют первым координатам, а строки – вторым координатам. На пересечении *I*-го столбца и *J*-й строки ставится 1, если выполнено отношение *Xi A Yj*. Если отношение не выполнено, то в соответствующей клетке ставится 0, либо она остается пустой.

Есть условно какой-то граф, по нему строим матрицу смежности, после возводим в квадрат каждый раз до того момента, пока матрица не перестанет изменяться.

Пример: (Если отношение рефлексивно)



$$\text{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^8 = M^4 => M^4 - \text{транзитивное замыкание}$

Если отношение не рефлексивно:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1 = M$

$M_2 = M(Id \cup M_1)$

$M_3 = M(Id \cup M_2)$

7. Отношение эквивалентности, определение и свойства. Фактор-множество.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***рефлексивным****, если для любого элемента $x \in X$ выполняется $x \rho x$.*

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***симметричным****, если для любых $x, y \in X$ из $x \rho y$ следует $y \rho x$.*

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***транзитивным****, если для любых $x, y, z \in X$ из $x \rho y$ и $y \rho z$ следует $x \rho z$.*

Определение. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение на множестве X называется отношением ***эквивалентности*** *на множестве X.*

Отношение эквивалентности между элементами множетсва X – это отношение между некоторыми парами: $a \sim b$, которое обладает следующими свойствами:

- Рефлективность $a \sim a$
- Симметрия если $a \sim b,$ то $b \sim a$
- Транзитивность если $a \sim b, b \sim c,$ то $a \sim c$

Классом эквивалентности называется:

$$R_a = \{x \in A | a \sim x\}$$

1) $\forall a \in A, \exists R_b : a \in R_b$
2) $R_a \cap R_b = \emptyset \vee R_a = R_b$

Пусть A – непустое множетсв. Фактор множеством A по отношению эквивалентности R называется множетсво A/R всех классов эквивалентности.

$$A/R = \{R_A\}$$

Разбиением множества A называется такое семейство его непустых подмножеств, что каждый элемент множества A входит в точности в один член семейства.

Другими словами, разбиение множества А есть семество непустых подмножеств, объединение которых совпадает с множеством А, а пересечение любых двух из них пусто.

8. Отображения. График отображения. Свойства инъективности и сюръективности.

Полностью определенная функция $f: X \to Y$ называется отображение X в Y.

Определение. ***Бинарным*** *(или двуместным)* ***отношением*** $\boldsymbol{\rho}$ *называется множество упорядоченных пар.*

Если ρ есть отношение и пара $<x, y>$ принадлежит этому отношению, то наряду с записью $<x, y> \in\rho$ употребляется запись $x\rho y$. Элементы x и y называются координатами (или компонентами) отношения ρ.

Определение. ***N-арным отношением*** *называется множество упорядоченных n-ок.*

Определение. ***Областью определения*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*

$$dom\ R = \{a | \exists (a, b) \in R\}$$

Определение. ***Областью значений*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*

$$Im\ R = \{b | \exists (a, b) \in R\}$$

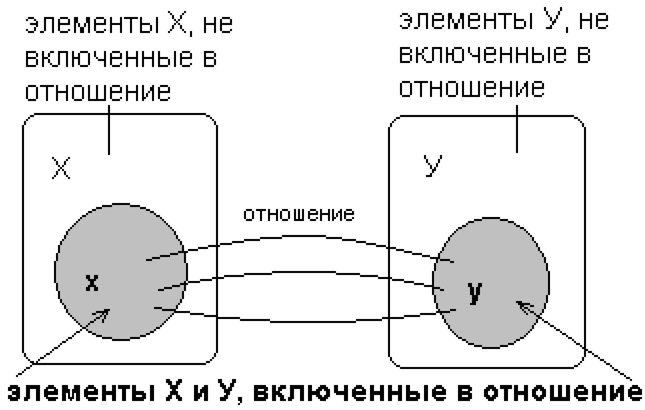


Рис. 8.

Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств. Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-той строки и j-го столбца, равен 1, если a_i и a_j имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.
3. *Определение. Назовем f* ***n-местной функцией*** *из X в Y если $f{:}X^n \to Y$. Тогда пишем $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и говорим, что y – значение функции при значении аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*
4. Пусть $f{:}X \to Y$.

5. *Определение. Функция f называется **инъективной**, если для любых x_1, x_2, y из $y=f(x_1)$ и $y=f(x_2)$ следует, что $x_1=x_2$, то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*
6. *Определение. Функция f называется **сюръективной**, если для любого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$ такой, что $y=f(x)$.*
7. *Определение. Функция f называется **биективной**, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

Пример 9

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

1. функция $f(x)=e^x$ - инъективна, но не сюръективна;
2. функция $f(x)=x^3-x$ – сюръективна, но не инъективна;
3. функция $f(x)=2x+1$ – биективна.

Определение. ***Суперпозиция функций*** *– функция, полученная из системы функций $f, f_1, f_2, \ldots, f_k$ некоторой подстановкой функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.*

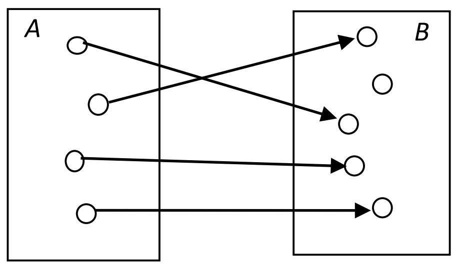
Пример 10.
Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

9. Биективное отображение. Мощность множества.

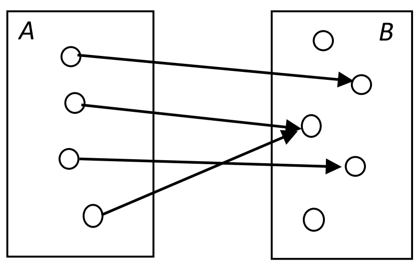
Свойства отображений (функций).

1) Отображение f: $A \to B$ называется ***инъективным***, если оно различные элементы из A отображает в различные элементы из B: $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Это свойство можно показать с помощью диаграмм Венна.



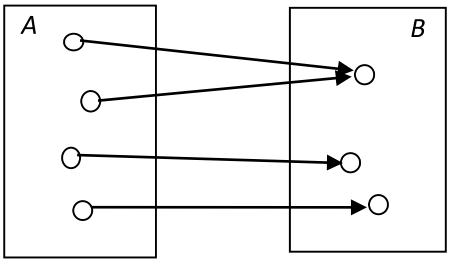
инъективное



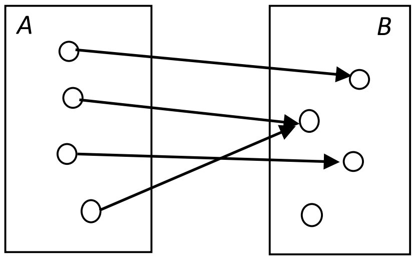
не является инъективным

2) Отображение f: $A \to B$ называется ***сюръективным*** или отображением на все множество B, если в каждый элемент множества B отображается хотя бы один элемент из A: $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$.

Это свойство тоже можно показать с помощью диаграмм Венна.



сюръективное



не является сюръективным

3) Отображение *f*: *A*→*B*, которое одновременно инъективно и сюръективно, называется *биективным* или взаимно однозначным отображением множества *A* на множество *B*.

Определение. ***Мощность*** *конечного множества A - это число его элементов.*

Мощность множества обозначают |A|.

Пример 3.

$|\varnothing|=0$, $|\{\varnothing\}|=1$.

Определение. Множества называются ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

Определение. Множество всех подмножеств множества A называется ***булеаном*** *P(A).*

Известно, что если множество A содержит n элементов, то множество $P(A)$ содержит 2^n элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества A в виде 2^A.

Пример 4.

$A=\{0, 1, 2\}$, $P(A)=\{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

10. Теорема Кантора о неравномощности множества и его булеана.

Никакое множество X не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Доказательство:

Пусть φ − взаимно однозначное соответствие между X и P(X) всех подмножеств множества X. Рассмотрим те элементы $x \in X$, которые не принадлежат соответствующему им подмножеству. Пусть Z – образованное ими множество:

$$Z = \{x \in X | x \notin \varphi(x)\}$$

Докажем, что подмножество Z не соответствует никакому элементу множества X. Пусть это не так и $Z = \varphi(z)$ для некоторого элемента $z \in X$. Тогда

$$z \in Z \Leftrightarrow z \notin \varphi(z) \Leftrightarrow z \notin Z$$

(первое – по построению множества Z, второе – по предположению $\varphi(z) = Z$). Полученное противоречие показывает, что Z действительно ничему не соответствует, так что φ не взаимно однозначно.

С другой стороны, любое множество X равномощно некоторой части множества P(X). В самом деле, каждому элементу $x \in X$можно поставить в соответствие одноэлементное подмножество {x}. Поэтому, вспоминая определение сравнения множеств по мощности, можно сказать, что мощность множества X всегда меньше мощности множества P(X).

11. Графы, определение. Ориентированные графы, мультиграфы (псевдографы).

Определение 7.1. ***Графом*** $G=G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (***множества вершин***) и множество E двухэлементных подмножеств множества V. Множество E называется ***множеством ребер***.

Вершины v_i и v_j множества V называются ***соединенными*** ребром (v_i, v_j) или ***инцидентны*** к ребру (v_i, v_j), если $(v_i, v_j)\in E$. Если (v_i, v_j) – ребро, тогда вершины v_i и v_j называются ***концами*** ребра (v_i, v_j). Ребро (v_i, v_j) называется также ***инцидентным*** к вершинам v_i и v_j. Две вершины называются ***смежными***, если они инцидентны к одному ребру. Два ребра называются ***смежными***, если они инцидентны к общей вершине.

Число вершин графа G обозначим v, а число ребер - e:

$$|V| = v, \quad |E| = e\,.$$

Определение 7.2. ***Ориентированный граф*** или ***орграф*** $G=G(V, E)$ – это такой граф, который состоит из множества V вершин и множества E упорядоченных пар элементов из V. Элемент множества E называется ***дугой***. Если $(v_i, v_j)\in E$, то v_i называется ***начальной вершиной*** дуги (v_i, v_j), а v_j называется ***конечной вершиной***.

Геометрическое представление графов следующее:

1) вершина графа – точка в пространстве (на плоскости);
2) ребро неориентированного графа – отрезок;
3) дуга ориентированного графа – направленный отрезок.

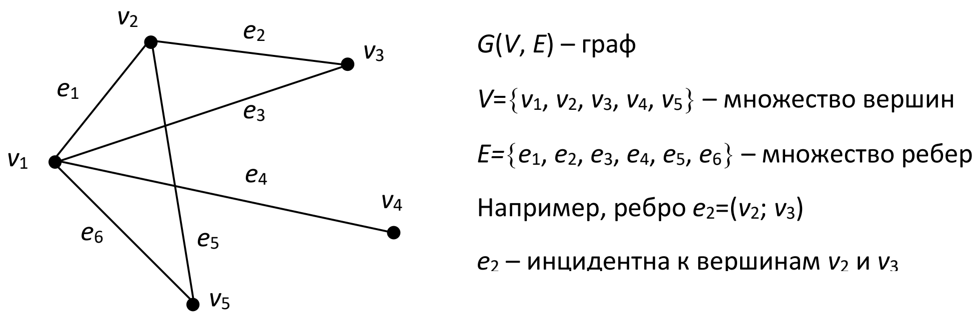
Ребро, которое соединяет вершину саму с собой, называется ***петлей***. Если в графе допускается наличие петель, то он называется ***графом с петлями*** или ***псевдографом***. Если в графе допускается наличие более одного ребра между двумя вершинами, то он называется ***мультиграфом***. Например, граф, построенный для решения задачи о кенигсбергских мостах. Если каждая вершина графа и (или) ребра помечена, то такой граф называется ***помеченным*** (или ***нагруженным***). В качестве пометок обычно используются буквы или целые числа.

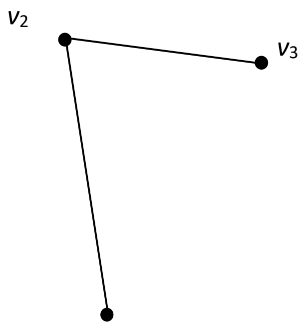
Если орграф содержит более чем одну дугу из одной вершины в другую, то называется ***ориентированным мультиграфом***. Если каждая дуга помечена, то будем говорить, что это ***помеченный орграф***.

Определение 7.3. Граф $G'(V', E')$ называется ***подграфом*** (или ***частью***) графа $G(V,E)$, если $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$. Если $V'=V$, то G' называется ***остовным подграфом*** G.

Аналогично, как и для графа, для орграфа вводится понятие ориентированный подграф.

Пример 7.1. Дан неориентированный граф.





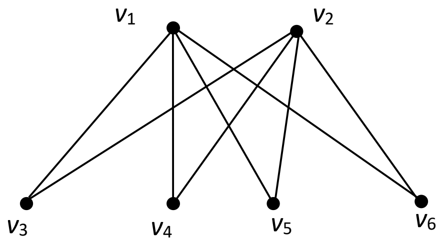
Подграф данного графа

,

Определение 7.4. Граф называется ***полным***, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n.

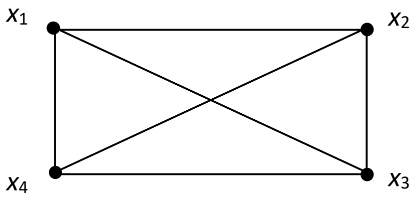
Определение 7.5. Граф $G=G(V, E)$ называется ***двудольным***, если V можно представить как объединение непересекающихся множеств, скажем $V=A\cup B$, так что каждое ребро имеет вид (v_i, v_j), где $v_i\in A$ и $v_j\in B$. Двудольный граф называется ***полным двудольным*** графом $K_{m,\,n}$, если A содержит m вершин, B содержит n вершин и для каждого $v_i\in A$, $v_j\in B$ имеем $(v_i, v_j)\in E$.

Пример 7.2. Построить полный двудольный граф $K_{2,4}$ и полный граф K_4.



Полный двудольный граф $K_{2,4}$

$A=\{v_1, v_2\}$



Полный граф K_4

12. Задание конечного графа: список смежности, матрица инцидентности, матрица смежности

1) Смежность, Матрица смежности, Матрица инцидентности

Определение. Если e = {v, w} – ребро графа, то вершины v, w называются ***концами ребра e****; в этом случае также говорят, что* ***ребро*** *e* ***соединяет вершины*** *v, w.*

Определение. Если e = {v, w} – дуга орграфа, то вершина v называется ***началом****, а вершина w –* ***концом дуги*** *e; в этом случае также говорят, что дуга e исходит из вершины v и заходит в вершину w.*

Между элементами множества вершин и множества ребер определено отношение *инцидентности*. Говорят, что ребро *e* инцидентно вершинам *v*, *w*, если оно соединяет эти вершины и наоборот, каждая из вершин *v*, *w* инцидентна ребру *e*.

Определение. Две вершины называются ***смежными****, если существует ребро, концами которого они являются. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.*

2) 3)

Пусть $D = (V, X)$ – ***орграф*** (*Если каждое ребро графа ориентированное, то граф называется* ***ориентированным*** *или* ***орграфом***), где $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Определение. ***Матрицей смежности*** *орграфа D называется квадратная матрица $A(D)=[a_{ij}]$ порядка n, у которой*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (v_i, v_j) \in X; \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Определение. ***Матрицей инцидентности*** *орграфа D называется $(n\times m)$ –матрица $B(D)=[b_{ij}]$, у которой*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если веошина } v_i \text{ является концом дуги } x_j; \\ -1, \text{ если вершина } v_i \text{ являяется началом дуги } x_j; \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_{j.} \end{cases}$$

Введем также матрицы смежности и инцидентности для неориентированных графов. Пусть $G = (V, X)$ – граф, где $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Определение. ***Матрицей смежности*** *графа G называется квадратная матрица A(G)=[a_{ij}] порядка n, у которой*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, если\ (v_i, v_j) \in X; \\ 0, если\ (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Определение. ***Матрицей инцидентности*** *графа G называется (n×m) –матрица B(G)=[b_{ij}], у которой*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1,\ если\ веошина\ v_i\ инцидентно\ ребру\ x_j; \\ \\ 0,\ если\ вершина\ v_i\ не\ инцидентна\ ребру\ x_j. \end{cases}$$

13. Маршруты и пути в графе. Циклы. Простые циклы

1) Маршруты и пути. Циклы.

Введем понятие маршрута для графа $G = (V, E)$ (и соответственно понятие пути для орграфа $D = (V, E)$).

Определение. ***Маршрутом*** *в данном графе G называется конечная последовательность ребер вида* $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ *(обозначаемая также* $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$*).*

Каждому маршруту соответствует последовательность вершин $v_0v_1v_2 \ldots v_m$; v_0 – начальная вершина, а v_m – конечная вершина маршрута. Одна и та же вершина может одновременно оказаться начальной, конечной и внутренней. Таким образом, мы будем говорить о маршруте из v_0 в v_m.

Определение. ***Длиной маршрута*** *называется число ребер в нем.*

2) Циклы.

Определение. ***Длиной маршрута*** *называется число ребер в нем.*

Определение. Маршрут называется ***цепью****, если все его ребра различны, и* ***простой цепью****, если все вершины тоже различны (кроме, может быть, начальной и конечной вершин).*

Определение. Цепь или простая цепь ***замкнуты****, если начальная и конечная вершины совпадают.*

Определение. Замкнутая простая цепь, содержащая, по крайней мере, одно ребро, называется ***циклом****.*

Определение. ***Обхватом*** *графа называется длина его кратчайшего цикла*

14. Связность графа. Разрезы графа. Деревья, лес. Матрица достижимости

2) Связность графов

Определение. ***Вершина*** *w орграфа D (графа G)* ***достижима*** *из вершины v, если либо v=w, либо существует путь из v в w(маршрут, соединяющий v, w).*

Дадим более удобное определение связных графов.

Определение. Граф называется ***связным****, если для любых двух его вершин v, w существует простая цепь из v в w.*

Определение. Граф (орграф) называется ***связным (сильно связным)****, если для любых двух его вершин v, w существует маршрут (путь), соединяющий v, w (из v и w).*

Определение. Орграф называется ***односторонне связным****, если для любых его двух вершин, по крайней мере, одна достижима из другой.*

Определение. Если граф не является связным, то он называется ***несвязным****.*

Определение. ***Компонентой связности*** *графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа.*

3) Разрез графа.

Определение. Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется ***разделяющейся****.*

Определение. ***Разделяющим множеством*** *связного графа G называется такое множество его ребер, удаление которого приводит к несвязному графу.*

Определение. ***Разрезом*** *называется такое разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим.*

Определение. Разрез, состоящий из одного ребра, называется ***мостом*** *(перешейком).*

Пример 80.

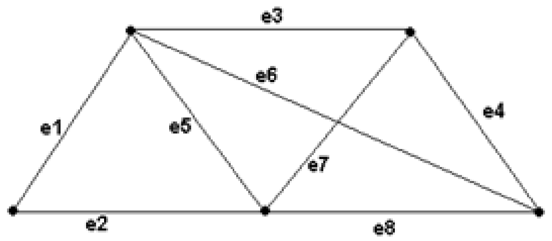


Рис. 33.

Для графа, изображенного на рис.33, каждое из множеств $\{e_1, e_2, e_5\}$ и $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ является разделяющим.
Разрезом является множество ребер $\{e_1, e_2\}$.
В графе возможно выделить несколько разделяющих множеств и разрезов.

Определение. Граф G называется ***деревом****, если он является связным и не имеет циклов. Граф G, все компоненты связности которого являются деревьями, называется* ***лесом****.*

Определение. ***Основным деревом*** *связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.*

15. Эйлеров цикл и путь в графе. Гамильтонов путь и цикл.

Эйлеровы цепи и циклы

Эйлеров путь (**эйлерова** цепь) **в графе** — это **путь**, проходящий по всем рёбрам **графа** и притом только по одному разу. (ср. Гамильтонов **путь**). **Эйлеров цикл** — **эйлеров путь**, являющийся **циклом**, то есть замкнутый **путь**, проходящий через каждое ребро **графа** ровно по одному разу.

Классической в теории графов является следующая задача.

В городе Кенигсберге имеется два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Преголь и друг с другом так, как показано на рисунке 36. Задача состоит в следующем: осуществить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя по одному разу по каждому мосту, вернуться обратно. Решение этой задачи сводится к нахождению некоторого специального маршрута в графе.

Пусть G – псевдограф.

Определение. Цепь (цикл) в G называется эйлеровой (эйлеровым), если она (он) проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа G.

Поставим в соответствие схеме мультиграф G, изображенный на рисунке 37, в котором каждой части суши соответствует вершина, а каждому мосту – ребро, соединяющее соответствующие вершины. На языке теории графов задача звучит следующим образом: найти эйлеров цикл в мультиграфе G.

Определение. Граф является эйлеровым, если он содержит эйлеров цикл.

Рассмотрим вопрос о наличии эйлеровой цепи и цикла в псевдографе.

Теорема. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая вершина имеет четную локальную степень.

Теорема. Связный граф содержит эйлерову цепь тогда и только тогда, когда ровно две вершины имеют нечетную локальную степень. Рис. 36. Рис. 37.

Завершая рассмотрение эйлеровых графов, рассмотрим алгоритм построения эйлеровой цепи в данном эйлеровом графе. Этот метод известен под названием алгоритма Флёри.

Теорема. Пусть G – эйлеров граф; тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к эйлеровой цепи графа G. Выходя из произвольной вершины и, идем по ребрам графа произвольным образом, соблюдая лишь следующие правила:

· стираем ребра по мере их прохождения и стираем также изолированные вершины, которые при этом образуются;

· на каждом этапе идем по мосту только тогда, когда нет других возможностей.

Пример 84.

Любой простой полный граф с нечетным количеством вершин является эйлеровым. Любой циклический граф является эйлеровым. Граф, являющийся колесом, не является эйлеровым

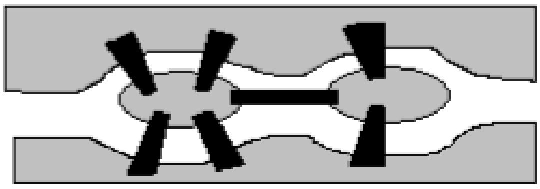


Рис. 36.

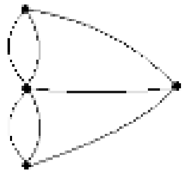


Рис. 37.

Гамильтоновы цепи и циклы

Гамильтонов граф — граф, содержащий **гамильтонов цикл**. При этом **гамильтоновым циклом** является такой **цикл** (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу; то есть простой **цикл**, в который входят все вершины графа.

Пусть G – псевдограф.

Определение. Цепь (цикл) в G называется гамильтоновой (гамильтоновыми), если она (он) проходит по одному разу через каждую вершину псевдографа G.

Определение. Граф является гамильтоновым, если он содержит гамильтонов цикл.

С понятием гамильтоновых циклов тесно связана так называемая задача коммивояжера: в нагруженном графе G определить гамильтонов цикл минимальной длины (иными словами, коммерсант должен совершить поездку по городам и вернуться обратно, побывав в каждом городе ровно один раз, и при этом стоимость такой поездки должна быть минимальной).

Приведем теорему Дирака, которая отвечает на вопрос: существует ли в графе гамильтонов цикл.

Теорема. Если в простом графе с n (³ 3) вершинами локальная степень каждой вершины не менее n/2, то граф является гамильтоновым.

Пример 85.

Любой простой полный граф является гамильтоновым. Любой циклический граф является гамильтоновым. Граф, являющийся колесом, является гамильтоновым.

16. Степени вершин в графе. Критерий (полу-)эйлеровости графа.

Определение. Степенью вершины v графа G называется число d(v) ребер графа, которым инцидентна эта вершина.

Определение. Вершина, локальная степень которой равна 0, называется изолированной; степень которой равна 1 – висячей.

Замечание. В случае неориентированного псевдографа обычно считается, что вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине v, равен 2 (тогда как вклад любого другого ребра, инцидентного вершине v, равен 1).

Определение. Полустепенью исхода (захода) вершины v орграфа D называется число δ^+(v) (δ^- (v)) дуг орграфа D, исходящих из вершины v (заходящих в вершину v).

Замечание. В случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине v, равен 1, как в δ^+ (v), так и в δ^- (v).

Количество вершин и ребер в графе G обозначим соответственно через n(G) и m(G), а количество вершин и дуг в орграфе D – через n(D) и m(D).

Утверждение. Для любого псевдографа G выполняется равенство

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m(G).$$

Утверждение. Для любого ориентированного псевдографа D выполняется равенство

$$\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = m(G).$$

Критерий эйлеровости

Граф называется ***эйлеровым грфом***, если в нем существует циклический маршрут, содержащий каждое ребро в точности один раз.

Граф называется ***полуэйлеровым***, если для него существует маршрут (не циклический), содержащий каждое ребро в точности один раз.

В обоих случаях вершины можно проходить неоднократно. Очевидно, что любой эйлеров граф, является полуэлеровым.

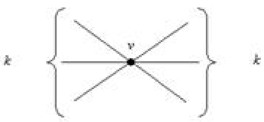
Теорема (критерий эйлеровости).

Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и все степени его вершин четны.

Доказательство:

Необходимость:

Доказать, что степени вершин эйлерова графа G четны. Т. к. граф эйлеров, то существует эйлеров цикл, который проходит через все ребра исходного графа. Возьмем произвольную вершину v $\in$ V, G = (V, E). Т. к. граф G Эйлеров, то вершина v $\in$ Эйлерову циклу. Пусть эта вершина встречается ровно k раз в Эйлеровом цикле, т.е. ровно k раз вошли и вышли из нее по новым не пройденным ребрам.



Т.к. эйлеров цикл содержит все ребра исходного графа. Тогда степень вершины v равна 2k, т.е. четна. А так как v произвольная вершина исходного графа, то все вершины имеют четную степень.

Достаточность:

Пусть G-связен и степени всех его вершин четны. Т.к. в графе нет изолированных вершин, то степени всех его вершин четные и не меньше 2.

$$d(\upsilon) \geq 2, \forall \upsilon \in V(G)$$

по лемме (если в графе степени всех вершин не меньше 2, то он содержит цикл) в G $\exists$ цикл C. Выбросив из графа G все ребра, лежащие в цикле C, получим граф H.

$H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$, на n вершинах, что и граф G (число ребер в H $\subset$ число ребер в G). В этом графе степени всех вершин тоже четны.

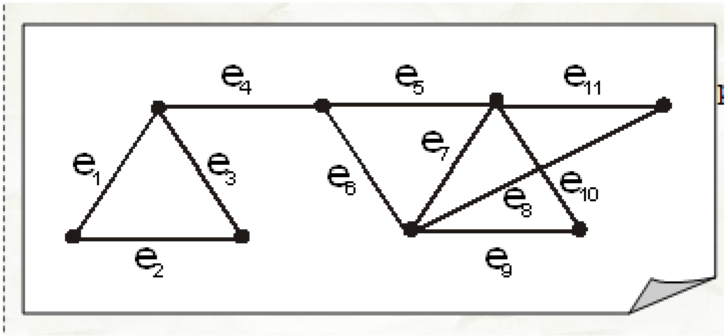
По индукционному предположению в каждом компоненте H_i $\exists$ эйлеров цикл C_i.

Строим эйлеров маршрут в G следующим образом:

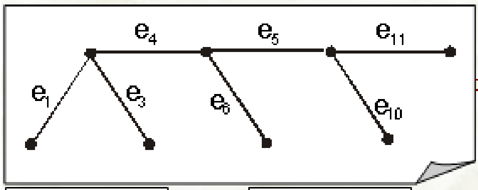
Теорема.

Граф является ***полуэйлеровым*** тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин(одной вершины не может быть из леммы о рукопожатиях).

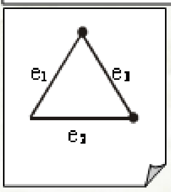
17. Фундаментальная система циклов графа. Построение.

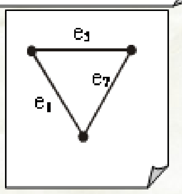


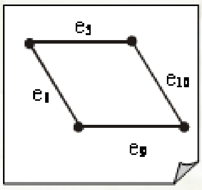
Пусть дан граф G. Зафиксируем некоторый его остов T. Как известно (критерии дерева), если добавить к T некоторое ребро графа G (удаленное при получении остова), то появится ровно один цикл. Множество циклов, полученных таким способом, называется ***Фундаментальной системой циклов***, ассоциированной с остовом T. Ясно, что все циклы, полученные таким способом, различны и их количество равно циклическому рангу $\nu(G)$.

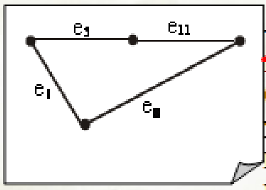


Так, например, если G — граф на предыдущем рисунке и T — его остов на рисунке справа, то фундаментальная система циклов G, ассоциированная с остовом T, следующая:





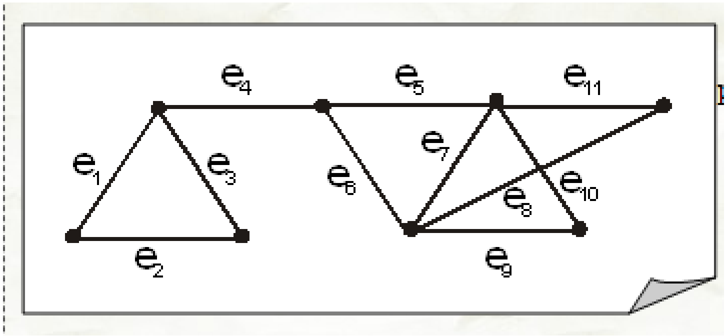




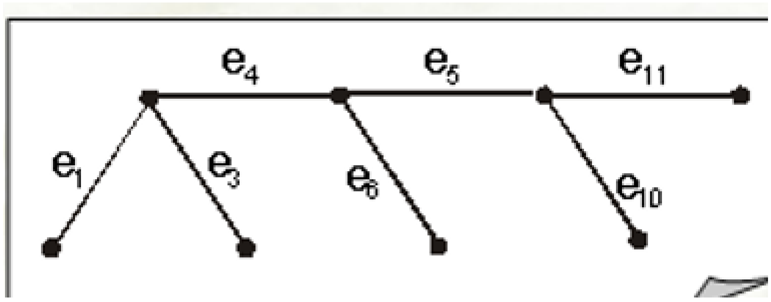
Согласно [illegible] критериях дерева (пункт [illegible]) удаление [illegible] ребра из [illegible] T [illegible]

18. Фундаментальная система разрезов графа. Построение.

Граф G:

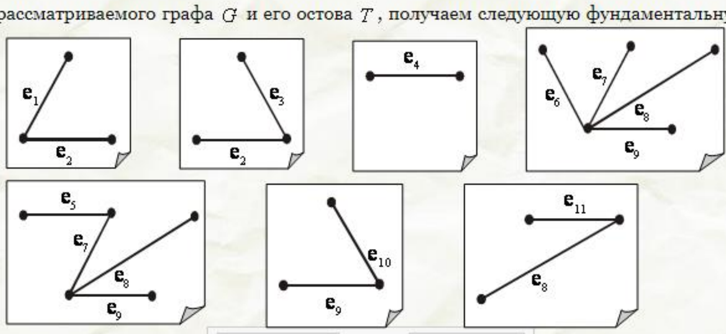


Остов T:



Согласно теореме о критериях дерева (пункт d)) удаление любого ребра из остова T разбивает T на две компоненты связности. Пусть V_1 — вершины одной компоненты, а V_2 — другой. Если добавить к такому ребру остова T другие ребра графа G, соединяющие вершины V_1 с вершинами V_2, то получим некоторый разрез графа G. Множество разрезов, полученных таким способом. Называется ***Фундаментальной системой разрезов*** графа G, ассоциированной с остовом T. Понятно, что количество разрезов в фундаментальной системе равно числу ребер в остове, которое совпадает с рангом разрезов графа G.

Для рассматриваемого графа G и его остова T, получаем следующую фундаментальную систему разрезов:



< Предыдущая   Следующая >

19. Расстояния в графе. Диаметр и радиус графа. Нахождение кратчайшего пути в графе.

Эксцентриситетом вершины называется расстояние до самой дальней вершины графа.

Радиусом графа называется минимальный эксцентриситет среди всех вершин графа

Диаметром графа - это наибольшее расстояние между всеми парами вершин графа

7.2.5. Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа

Длиной маршрута называется количество рёбер в нем (с повторениями). Если маршрут $M = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, то длина M равна k (обозначается $|M| = k$).

Расстоянием между вершинами u и v (обозначается $d(u,v)$) называется длина кратчайшей цепи $\langle u,v \rangle$, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $\neg\exists\ \langle u,v \rangle$, то по определению $d(u,v) \overset{\text{Def}}{=\!=} +\infty$.

Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии n от вершины v (обозначение $D(v,n)$), называется *ярусом*:

$$D(v,n) \overset{\text{Def}}{=\!=} \{u \in V \mid d(v,u) = n\}.$$

Ясно, что всякий связный граф однозначно разбивается на ярусы относительно данной вершины.

Диаметром графа G (обозначается $D(G)$) называется длина длиннейшей геодезической.

7.2.6. Эксцентриситет и центр

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v в связном графе $G(V, E)$ называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G:

$$e(v) \stackrel{\text{Def}}{=\!=} \max_{u \in V} d(v, u).$$

Заметим, что наиболее эксцентричные вершины — это концы диаметра.

Радиусом $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин:

$$R(G) \stackrel{\text{Def}}{=\!=} \min_{v \in V} e(v).$$

Вершина v называется *центральной*, если её эксцентриситет совпадает с радиусом граф, $e(v) = R(G)$. Множество центральных вершин называется *центром* и обозначается $C(G)$:

$$C(G) \stackrel{\text{Def}}{=\!=} \{v \in V \mid e(v) = R(G)\}.$$

Пример

На рис. 7.9 указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов. Вершины, составляющие центр, выделены.

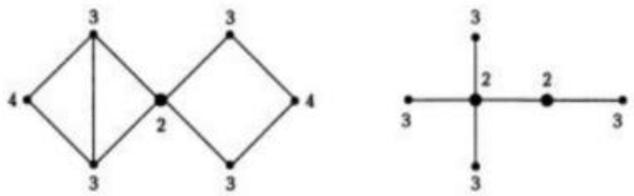


Рис. 7.9. Эксцентриситеты вершин и центры графов

Алгоритм 6.11. *Алгоритм кратчайшего пути на орграфе*

```
for x ∈ X do begin
    Mark[x] = FALSE;
    Dist[x] = ∞;
end;
y = x0;
Mark[x0] = TRUE;
Dist[x0] = 0;
while not Mark[z] do begin
   for x ∈ X do
       if not Mark[x] and dist[x] > dist[y] + w[y, z] then begin
           dist[x] = dist[y] + w[y, x];
           prev[x] = y;
       end;
{Поиск новой вершины y ∈ X с минимальной временной меткой}
   dist[y] = min{x∈X and Mark[x]=FALSE} dist[x];
   Mark[y] = TRUE;
end.
```

Prev[x] указывает на вершину с окончательной меткой, ближайшую к вершине *x*. Последовательность вершин кратчайшего пути будет имеет следующий вид:

$$z,\ prev[z],\ prev[prev[z]], prev[prev[prev[z]]], \ldots\ ,\ x_0,$$

а значение *Dist[z]* составит длину пути из x_0 *в* z. Очередная новая вершина, претендующая на постоянную метку, обозначается через *y*.

- *Сложность алгоритма*, Алгоритм обращается к телу цикла *while* не более $|X| - 1$ раз, и число операций, требующихся при каждом таком обращении, равно $O(|X|)$. Тогда сложность алгоритма составит $O(|X|^2)$.

Интересно заметить, что если требуется найти длины кратчайших путей от x_0 до всех вершин графа, то в алгоритме 6.11 условие цикла *while not Mark[z] do begin* надо заменить на условие *while* $\bigvee_{x \in X}$ *not Mark[x] do begin*. При этом сложность алгоритма останется прежней.

20. Матрица расстояний в графе и ее нахождение. Нахождение числа связных компонент графа.

7.4.2. Матрица смежности

Представление графа с помощью квадратной булевой матрицы

$$M : \textbf{array}\ [1..p, 1..p]\ \textbf{of}\ 0..1,$$

отражающей смежность вершин, называется *матрицей смежности*, где

$$M[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j, \\ 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

Для матрицы смежности $n(p,q) = O(p^2)$.

Пример

$$G: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Матрица смежности графа симметрична относительно главной диагонали, поэтому достаточно хранить только верхнюю (или нижнюю) треугольную матрицу.

8.1.4. Оценка числа рёбер через число вершин и число компонент связности

Инварианты $p(G)$, $q(G)$ и $k(G)$ не являются независимыми.

ТЕОРЕМА *Пусть p — число вершин, q — число рёбер, k — число компонент связности графа. Тогда*

$$p - k \leqslant q \leqslant \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}.$$

Доказательство

[$p - k \leqslant q$.] Индукция по p. База: $p = 1$, $q = 0$, $k = 1$. Пусть оценка верна для всех графов с числом вершин меньше p. Рассмотрим граф G, $p(G) = p$. Удалим в G вершину v, которая не является точкой сочленения: $G' := G - v$. Тогда если v — изолированная вершина, то $p' = p - 1$, $k' = k - 1$, $q' = q$. Имеем

$p - k = p' - k' \leqslant q' = q$. Если v — не изолированная вершина, то $p' = p - 1$, $k' = k$, $q' < q$. Имеем: $p - k = 1 + p' - k' \leqslant 1 + q' \leqslant q$.

[$q \leqslant (p-k)(p-k+1)/2$.] Метод выделения «критических» графов. Число рёбер q графа с p вершинами и k компонентами связности не превосходит числа рёбер в графе с p вершинами и k компонентами связности, в котором все компоненты связности суть полные графы. Следовательно, достаточно рассматривать только графы, в которых все компоненты связности полные. Среди всех графов с p вершинами и k полными компонентами связности наибольшее число рёбер имеет граф $\widetilde{K_p}$, в котором все рёбра сосредоточены в одной компоненте связности:

$$\widetilde{K_p} := K_{p-k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} K_1.$$

Действительно, пусть есть две компоненты связности G_1 и G_2, такие что $1 < p_1 = p(G_1) \leqslant p_2 = p(G_2)$. Если перенести одну вершину из компоненты связности G_1 в компоненту связности G_2, то число рёбер изменится на $\Delta q = p_2 - (p_1 - 1) = p_2 - p_1 + 1 > 0$. Следовательно, число рёбер возросло. Таким образом, достаточно рассмотреть граф $\widetilde{K_p}$. Имеем:

$$q(\widetilde{K_p}) = (p-k+1)(p-k+1-1)/2 + 0 = (p-k)(p-k+1)/2. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1 *Если $q > (p-1)(p-2)/2$, то граф связен.*

Доказательство

Рассмотрим неравенство $(p-1)(p-2)/2 < q \leqslant (p-k)(p-k+1)/2$ при различных значениях k.

$k = 1$	$(p-1)(p-2)/2 < (p-1)p/2$	выполняется,
$k = 2$	$(p-1)(p-2)/2 < (p-2)(p-1)/2$	не выполняется,
$k = 3$	$(p-1)(p-2)/2 < (p-3)(p-2)/2$	не выполняется

и т. д. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2 *В связном графе $p - 1 \leqslant q \leqslant p(p-1)/2$.*

Доказательство

Следует из теоремы при $k = 1$. $\square$

21. Сильно и слабо-связные компоненты ориентированного графа. Конденсация ориентированного графа.

8.5.1. Сильная, односторонняя и слабая связность

В неориентированном графе две вершины либо связаны (если существует соединяющая их цепь), либо не связаны. В ориентированном графе отношение связанности узлов несимметрично, а потому определение связности отличается.

Пусть $G(V, E)$ — орграф, v_1 и v_2 — его узлы. Говорят, что два узла v_1 и v_2 *сильно связаны* в орграфе G, если существует путь (ориентированная цепь) как из v_1 в v_2, так и из v_2 в v_1. Говорят, что два узла v_1 и v_2 *односторонне связаны* в орграфе G, если существует путь либо из v_1 в v_2, либо из v_2 в v_1. Говорят, что два узла v_1 и v_2 *слабо связаны* в орграфе G, если они связаны в графе G', полученном из G забыванием ориентации рёбер. Если все вершины в орграфе сильно (односторонне, слабо) связаны, то орграф называется *сильно* (*односторонне*, *слабо*) *связным*. Сильная связность влечет одностороннюю связность, которая влечет слабую связность. Обратное неверно.

Пример

На рис. 8.7 показаны диаграммы сильно, односторонне и слабо связных орграфов.

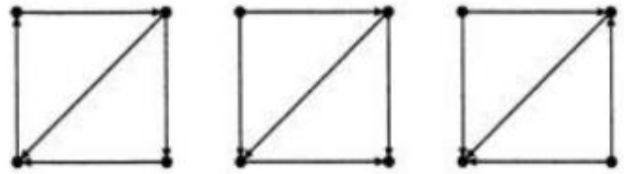


Рис. 8.7. Сильная (слева), односторонняя (в центре) и слабая (справа) связность

8.5.2. Компоненты сильной связности

Компонента сильной связности (употребляется аббревиатура КСС) орграфа G – это его максимальный сильно связный подграф.

Каждая вершина орграфа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считаем, что она сама образует КСС. *Конденсацией* G^* орграфа G (или *графом Герца*, или *фактор-графом*) называется орграф, который получается стягиванием в одну вершину каждой КСС орграфа G.

Пример

На рис. 8.8 показаны диаграммы орграфа и его конденсации.

ЗАМЕЧАНИЕ

Фактор-граф не содержит циклов.

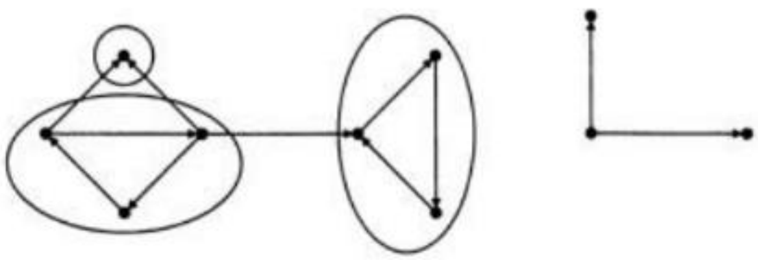
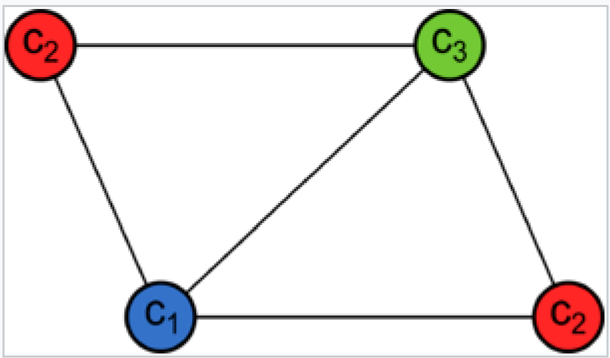


Рис. 8.8. Орграф (слева) и его фактор-граф (справа)

22. Правильная раскраска графа. Хроматический многочлен графа. Хроматическое число графа.

Определение 1. Правильной раскраской графа называется такая раскраска его вершин, что никакие две смежные вершины графа не раскрашены в один и тот же цвет.



Пример раскраски графа из четырех вершин.

Определение 2. Граф называется k-раскрашиваемым, если для него существует правильная раскраска в k цветов.

Произвольная функция $f(v)$ на множестве вершин графа называется раскраской графа. Раскраска называется правильной, если $f(v_1) \neq f(v_2)$ для любых смежных вершин v_1 и

v_2. Минимальное число k, при котором граф G является k- раскрашиваемым, называется хроматическим числом графа $\chi(G)$.

Для определения числа способов раскраски графа в x цветов можно составить хроматический полином $P(G, x)$. Значение полинома при конкретном $x = x_0$ равно числу правильных раскрасок графа в x_0 цветов.

(**Определение 3.** Хроматическим числом $\chi(G)$ графа $G(V, E)$ называется такое минимальное число t, для которого существует t-раскраска графа.

Определение 4. Хроматический многочлен (полином) $P(G, t)$ — число способов раскрасить граф G в t цветов.)

Вид хроматического полинома графа:

Имеется лемма, утверждающая, что *хроматический полином графа имеет вид*

$$P(G, x) = P(G_1, x) + P(G_2, x), \tag{1.3}$$

где G_1 — граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Другой вариант леммы:

$$P(G, x) = P(G_1, x) - P(G_2, x), \tag{1.4}$$

где G_1 — граф, полученный из G удалением ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Теоремы для получения хроматического полинома:

При получении хроматического полинома могут быть полезны следующие теоремы [2].

Теорема 8. *Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.*

Теорема 9. *Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.*

Теорема 10. *Наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом полиноме графа G равно числу компонент связности графа G.*

23. Нахождение хроматического многочлена графа.

Вид хроматического полинома графа:

Имеется лемма, утверждающая, что *хроматический полином графа имеет вид*

$$P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x), \tag{1.3}$$

где G_1 — граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Другой вариант леммы:

$$P(G,x) = P(G_1,x) - P(G_2,x), \tag{1.4}$$

где G_1 — граф, полученный из G удалением ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Теоремы для получения хроматического полинома:

При получении хроматического полинома могут быть полезны следующие теоремы [2].

Теорема 8. *Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.*

Теорема 9. *Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.*

Теорема 10. *Наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом полиноме графа G равно числу компонент связности графа G.*

Пример нахождения хроматического полинома:
https://www.youtube.com/watch?v=FsSbWj3DKLk

Пример нахождения хроматического полинома из учебника:

1.3.2. Пример. *Найти хроматический полином графа (рис. 6).*

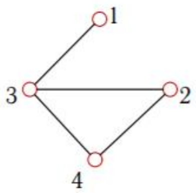


Рис. 6

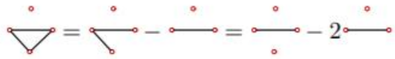
Решение

В зависимости от числа ребер графа можно использовать разложение (1.3) или (1.4). Если графа почти полный, то добавив несколько ребер по разложению (1.3), получим хроматический полином в виде суммы факториальных степеней. Если же ребер мало, и для получения пустого графа требуется удалить только несколько ребер, то следует использовать разложение (1.4) с удалением ребер. Такие действия называются хроматической редукцией.

1. Хроматическая редукция по пустым графам. Воспользуемся леммой (1.4). Удаляя ребра и отождествляя соответствующие вершины (стягивая ребра), сведем исходный граф к пустым графам. Сначала разложим граф на два, убрав, а затем стянув ребро 1-3. Выполненное действие запишем в виде условного равенства

$$G = $$  $$= G_1 - G_2.$$

Здесь операция сложения или вычитания относится не к самому графу, а к его хроматическому полиному. Таким образом последнее равенство означает, что $P(G) = P(G_1) - P(G_2)$. Для сокращения записи обозначение $P()$ будем опускать. Далее разложим каждый из графов G_1 и G_2, пользуясь той же леммой

$$G_1 = $$  $$= O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2),$$

$$G_2 = $$  $$= O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1).$$

Приведем подобные члены

$$\begin{aligned} G = G_1 - G_2 = O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2) - \\ - (O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)) = O_4 - 4O_3 + 5O_2 - 2O_1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Получим в итоге искомый хроматический полином

$$P(G, x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \tag{1.9}$$

Разложение (1.8) называется хроматической редукцией графа по пустым графам.

Очевидно, результат соответствует утверждениям теорем 8-10. Коэффициенты в 1.9 образуют знакопеременную последовательность, а коэффициент при x^3 равен 4 — числу ребер. Наименьшая степень x в полиноме равна 1, т.е. числу компонент связности графа.

2. Хроматическая редукция по полным графам. Добавим сначала к графу (рис. 6) ребро 1-4, получим граф с большим числом ребер. Затем в этом же (исходном) графе отождествим вершины 1 и 4. В результате получим два графа

$$G = $$  $$(1.10)$$

Отождествление вершин всегда приводит к уменьшению порядка и (иногда) размера графа. Второй граф — это полный граф K_3, его преобразовывать больше не требуется. К первому графу добавим ребро 1-2 и отождествим вершины 1 и 2:

 $$= K_4 + K_3. \tag{1.11}$$

В итоге

 $$= K_4 + 2K_3. \tag{1.12}$$

Хроматический полином примет вид

$$\begin{aligned} P(G, x) = x^{(4)} + 2x^{(3)} = x(x-1)(x-2)(x-3) + \\ + 2x(x-1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Разложение (1.12) называется хроматической редукцией графа по полным графам.

24. Планарные графы

Будем говорить, что граф укладывается на поверхности S, если его можно так нарисовать на S, что никакие два его ребра не пересекаются. Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости; плоский граф — это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рисунке 35а, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рисунке 35б.

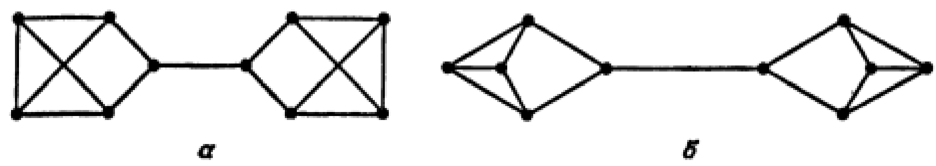


Рисунок 35 (а, б)

Теорема 1. Для каждого простого планарного графа существует планарная укладка, в которой все ребра графа можно изобразить в виде отрезков прямых линий.▪

Если граф не укладывается на плоскости, то его можно уложить на некоторой другой поверхности.

Теорема 2. Граф G укладывается на плоскости тогда и только тогда, когда он укладывается на сфере.

Два основных непланарных графа, называемые графами Куратовского, представлены на рисунке 36. Один из них K_5 — полный граф на пяти вершинах, а другой — $K_{3,3}$. Называем эти графы основными непланарными графами потому, что они играют основополагающую роль в характеризации планарности.

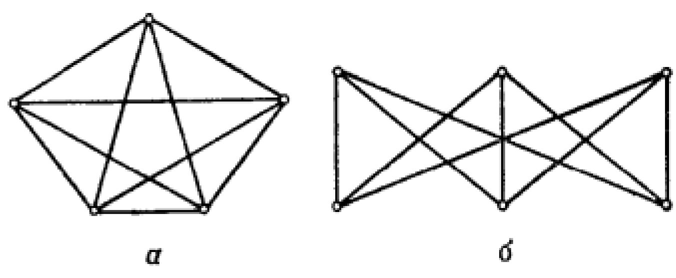


Рисунок 36 (а – K_5, б – $K_{3,3}$)

Будем говорить, что граф G* является *абстрактно двойственным* к G, если между ребрами графов G и G* существует взаимно однозначное соответствие, обладающее тем свойством, что подмножество ребер из G образует цикл в G тогда и только тогда, когда соответствующее ему подмножество ребер из G* образует разрез в G*.

Теорема 3. Если граф G* абстрактно двойствен к графу G, то G абстрактно двойствен к G*.

Абстрактное определение двойственности, обобщающее понятие геометрической двойственности и характеризующее планарные графы:

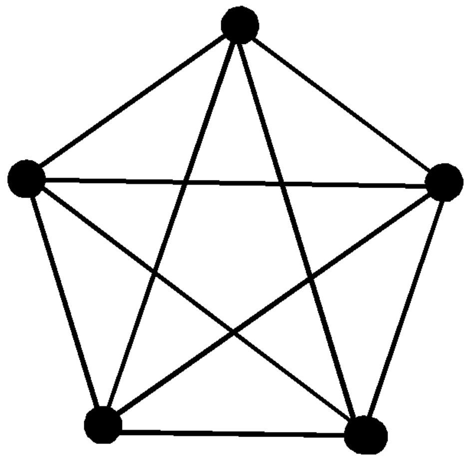
Теорема 4. Граф является планарным тогда и только тогда, когда он обладает абстрактно двойственным.

Теорема 5. (формула Эйлера) Пусть v – число вершин плоского графа, e – число ребер, f – число связных областей, на которые граф делит плоскость. Эти числа связаны равенством v − e + f = 2. Левая часть называется **эйлеровой характеристикой**.

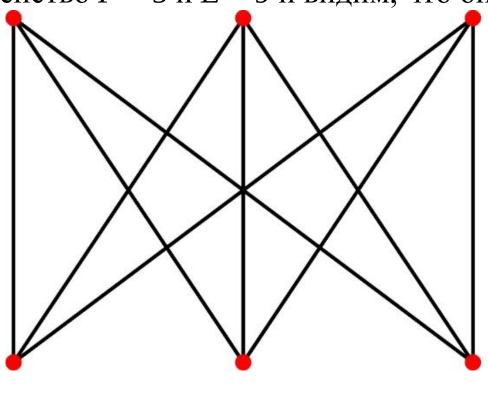
25. Примеры непланарных графов. Теорема Понтрягина-Куратовского.

Примеры:

1. **Полный граф с пятью вершинами.**
   Лемма. Полный граф с пятью вершинами ($К_5$) нельзя уложить на плоскость.
   Доказательство: для него не выполняется $E \leq 3V - 6$



2. **Полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой из долей**
   Лемма. Полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой из долей ($К_{3,3}$) нельзя уложить на плоскости.
   Доказательство: по формуле Эйлера граф имеет 5 граней.
   С другой стороны: любая грань (включая внешнюю) содержит чётное число рёбер — а значит, не менее 4. Поскольку каждое ребро включается в ровно две грани, получается соотношение $4F \leq 2E$, F — количество граней, E — количество рёбер. Подставляем в это неравенство F = 5 и E = 9 и видим, что оно не выполняется.



Теорема Понтрягина-Куратовского:

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразбиениий полного графа с пятью вершинами (K_5) и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле ($K_{3,3}$).

26. Проблема 4 красок и ее связь с хроматическим числом графа.

Проблема 4 красок (или же теорема): всякую расположенную на плоскости или на сфере карту можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. При этом области должны быть односвязными, а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке не считаются общей границей для них.

Эта теорема имеет аналог в *дискретной математике*: хроматическое число планарного графа не превосходит 4.

27. Булевы функции, определение, формы записи. Булевы функции нуля и одной переменной.

Определение. Булевой функцией f(x1, x2, …,x_n) называется n-местная функция, аргументы которой принимают значения во множестве {0, 1} и сама функция принимает значения в этом же множестве.

Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2n строк, в которой в каждой строке записывают одну из оценок списка переменных, принимающих значение 0 или 1.

Пример 31.

Для *n=3* булеву функцию можно задать таблицей 17.

Таблица 17

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$f(0, 0, 0)$
1	0	0	1	$f(0, 0, 1)$
2	0	1	0	$f(0, 1, 0)$
3	0	1	1	$f(0, 1, 1)$
4	1	0	0	$f(1, 0, 0)$
5	1	0	1	$f(1, 0, 1)$
6	1	1	0	$f(1, 1, 0)$
7	1	1	1	$f(1, 1, 1)$

Используется также задание булевой функции в виде двоичного слова, длина которого зависит от числа переменных.

Пример 32.

Пусть задана булева функция от трех переменных (табл. 18). Тогда число наборов $2^3 = 8$.

Таблица 18

№ набора	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Номера наборов всегда нумеруются, начиная с нуля, в таблице приведено стандартное расположение всех наборов функции трех переменных (обратите внимание, что каждый набор представляет собой двоичный код числа, равный номеру соответствующего набора). Первые четыре столбца одинаковы для всех булевых функций от трех переменных. Столбец значений функции задается или вычисляется.

Эту же функцию можно записать f(x1, x2, x3)=00101101.

Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n переменных. Константы 0 и 1 считают нуль-местными булевыми функциями.

Утверждение. Каждой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция.

Теорема. Пусть f(x1, x2, …, x_k) k-местная булева функция. Если f не равна тождественно нулю, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных x1, x2, …, x_n и находящаяся в СДНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Теорема 2. Пусть f(x1, x2, …, x_n) k-местная булева функция. Если f не равна тождественно единице, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных x1, x2, …, xk и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Поскольку каждая булева функция представима в виде формулы логики высказываний, то принцип построения СДНФ и СКНФ сохраняется такой же как и для формул логики высказываний.

Булевы функции он нуля переменных: константы 0 и 1.

Булевы функции одной переменной:

Существует всего 4 двоичные функции зависящие от одной переменной

$$|\mathbb{P}_2(1)| = 2^{2^1} = 4$$

Приведем таблицы истинности этих функций

x	$f_1(x)$
0	0
1	0

x	$f_2(x)$
0	1
1	1

x	$f_3(x)$
0	0
1	1

x	$f_4(x)$
0	1
1	0

$f_1(x) \equiv 0$ – тождественный нуль
$f_2(x) \equiv 1$ – тождественная единица
$f_3(x) = x$–тождественная функция
$f_4(x) = \bar{x}$ – функция отрицание, или инверсия

Билет без форм записи

28. Булевы функции 2 переменных и их свойства.

Поскольку $n=2$, различных булевых функций от двух переменных существует ровно 16 (табл. 19).

Таблица 19

№ функции	Значение функции	Формула, соответствующая функции
1	$f=0000$	$f=0$
2	$f=0001$	$f=x_1 \wedge x_2$
3	$f=0010$	$f=\overline{x_1 \rightarrow x_2}$
4	$f=0011$	$f=x_1$
5	$f=0100$	$f=\overline{x_1} \wedge x_2$
6	$f=0101$	$f=x_2$
7	$f=0110$	$f=x_1 \oplus x_2$
8	$f=0111$	$f=x_1 \vee x_2$
9	$f=1000$	$f=\overline{x_1 \wedge x_2}$
10	$f=1001$	$f=x_1 \approx x_2$
11	$f=1010$	$f=\overline{x_2}$
12	$f=1011$	$f=x_1 \vee \overline{x_2}$
13	$f=1100$	$f=\overline{x_1}$
14	$f=1101$	$f=x_1 \rightarrow x_2$
15	$f=1110$	$f=\overline{x_1 \vee x_2}$
16	$f=1111$	$f=1$

Приведем таблицы истинности некоторых из них

xy	$x\&y$	$x \vee y$	$x\oplus y$	$x\sim y$	$x \to y$	$x\|y$	$x \downarrow y$
00	0	0	0	1	1	1	1
01	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	0	1	0
11	1	1	0	1	1	0	0

1. $x\&y$ или xy – функция конъюнкция, логическое умножение, логическое «и» $x\&y = max(x, y)$.
2. $x \vee y$ – функция дизъюнкция, логическое сложение, логическое «или» $x \vee y = max(x, y)$
3. $x\oplus y$ – функция сложение по модулю 2, «исключающее или». Значение функции равно остатку от деления алгебраической суммы чисел x и y на 2.
4. $x\sim y$ – функция эквивалентность, логическое тождество. Функция принимает значение 1, на наборах где $x = y$. Заметим, что значение функции «эквивалентность» на каждом наборе противоположно значению функции «сложение по модулю 2». Значит функцию «эквивалентность» можно выразить формулой: $x\sim y = \overline{x\oplus y}$
5. $x \to y$ – функция импликация, «логическое следование». Для запоминания значений, которые принимает функция можно использовать правило: «из лжи может следовать все что угодно из истины следует только истина» (0-ложь, 1-истина)
6. $x|y$ – штрих Шеффера, «не и»
$$x|y = \overline{x\&y}$$
7. $x \downarrow y$ – стрелка Пирса, «не или»
$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

29. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма булевой функции. Построение.

Определение. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)– это формула, в которой функция представлена в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Определение. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)– это формула, в которой функция представлена в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.

Определение. Сумма всех рангов элементарных конъюнкций (дизъюнкций) входящих в форму называется рангом формы (или сложностью формы)

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Определение. Представление функции в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций построенных по всем наборам принадлежащим носителю функции называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma} \in N_f} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$$

Алгоритм построения СДНФ.

1. Находим наборы $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ входящие в носитель функции N_f, такие что $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$
2. Для каждого набора составляем соответствующую ему элементарную конъюнкцию $K_{\tilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$
3. Соединяем все полученные конъюнкции знаком $\vee$, получившаяся форма является СДНФ

$$f_{\text{СДНФ}} = \bigvee_{\tilde{\sigma} \in N_f} K_{\tilde{\sigma}}$$

Теорема 1. Любая булева функция, не являющаяся константой, может быть представленная СДНФ.

Замечание 1.

$$r_{\text{СДНФ}} = |N_f| \cdot n, \text{ где } |N_f| \text{- число наборов в носителе.}$$

Доказательство. Каждая из элементарных конъюнкций, входящих в СДНФ имеет ранг n, число таких конъюнкций равно числу наборов в носителе функции, следовательно $r_{\text{СДНФ}} = |N_f| \cdot n$.

30. Совершенная конъюнктивная нормальная форма булевой функции. Построение.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Определение. Представление функции в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций построенных по всем наборам принадлежащим дополнению носителя функции называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{\tilde{\sigma} \in \overline{N}_f} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}\right)$$

Алгоритм построения СКНФ:

1. Находим наборы $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ входящие в дополнение носителяфункции $\overline{N}_f$, т.е. такие что $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.
2. Для каждого набора составляем соответствующую ему элементарную дизъюнкцию $D_{\tilde{\sigma}} = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$.
3. Соединяем все полученные дизъюнкции знаком &, получившаяся форма является СКНФ

$$f_{\text{СКНФ}} = \mathop{\&}_{\tilde{\sigma} \in \overline{N}_f} D_{\tilde{\sigma}}$$

Теорема 2. Любая булева функция, не являющаяся константой, может быть представленная как СКНФ.

Замечание 2.

$r_{\text{СКНФ}} = |\bar{N}_f| \cdot n$, где $|\bar{N}_f|$- число наборов принадлежащих дополнению носителя.

Замечание 3. Если функция является тождественной константой $f(\tilde{x}) \equiv 0$ или $f(\tilde{x}) \equiv 1$, ее тоже можно представить в виде суперпозиции переменной, отрицания переменной, &, ∨.

Например, возможны следующие представления: $0 = x \& \bar{x}$ *и* $1 = x \vee \bar{x}$

31. Полиномы Жегалкина

Определение. ***Многочленом Жегалкина*** *называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени:* $\sum X_{i_1} \ldots X_{i_k} + a_j$, *причем на каждом наборе <i_1, …, i_k> все a_{ij} ($j = 1, \ldots, k$) различны, $a_j \in \{0, 1\}$.*

Другими словами это сумма по модулю два всех возможных элементарных конъюнкций, не содержащих отрицаний.
$a_0, a_1, \ldots, a_{123..n}$ - либо 0 либо 1

Теорема 3 (Жегалкин И.И.). Любая булева функция представима в виде многочлена Жегалкина причем единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых).

Рассмотрим два алгоритма для нахождения многочлена Жегалкина.

Алгоритм 1 построения многочлена Жегалкина (*посредством СДНФ*)

1. В СДНФ функции заменить все символы $\vee$ на символы $\oplus$.
2. Выносим за скобки одинаковые сомножители и упрощаем формулу, применяя закон: $xy \oplus x\bar{y} = x(y \oplus \bar{y}) = x \cdot 1 = x$ (так как $y \oplus \bar{y} = 1$).
3. Все отрицания переменных $\bar{x}_i$ заменяем на выражения $1 \oplus x_i$.
4. Раскрываем скобки, применяя сочетательный и распределительный законы алгебры логики, приводим подобные члены, вычеркивая одинаковые пары слагаемых, поскольку $x \oplus x = 0$.
5. Полученный в результате преобразований многочлен будет многочленом Жегалкина для данной функции.

Алгоритм 2: Построение многочлена Жегалкина с помощью треугольника Паскаля.

Построить многочлен Жегалкина для функции *f=10011110*.

Решение.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина:

Шаг 1. Строим таблицу (табл. 57). Первый столбец содержит возможные слагаемые полинома Жегалкина. Нулевому набору всегда соответствует слагаемое 1. Остальным наборам соответствует слагаемое, представляющее собой конъюнкцию переменных, которые на данном наборе принимают значение 1. Следующие n столбцов – всевозможные наборы из 0 и 1, соответствующие переменным. Далее столбец значений функции f. Функция g является вспомогательной, поэтому изначально этот столбец не заполнен.

Таблица 57

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	0	0	0	1		
x_3	0	0	1	0		
x_2	0	1	0	0		
x_2x_3	0	1	1	1		
x_1	1	0	0	1		
$x_1 x_3$	1	0	1	1		
$x_1 x_2$	1	1	0	1		
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0		

Шаг 2. Построение треугольника Паскаля. Верхняя сторона треугольника есть функция f. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю два двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника представляет собой значение вспомогательной функции g (табл. 58).

Таблица 58

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	0	0	0	1	1	$f=$ 1 0 0 1 1 1 1 0
x_3	0	0	1	0	1	1 0 1 0 0 0 1
x_2	0	1	0	0	1	1 1 1 0 0 1
x_2x_3	0	1	1	1	0	0 0 1 0 1
x_1	1	0	0	1	0	0 1 1 1
$x_1 x_3$	1	0	1	1	1	1 0 0
$x_1 x_2$	1	1	0	1	1	1 0
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0	1	1

Шаг 3. Построение полинома Жегалкина. В полином войдут только те слагаемые, которым соответствует единица во вспомогательной функции g.

Для данной функции многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f = 1 + x_3 + x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3.$$

32. Минимальная полная система булевых функций, штрих Шеффера и стрелка Пирса

Штрих Шеффера- бинарная логическая операция, булева функция над двумя переменными. Штрих Шеффера, обычно обозначаемый |, эквивалентен операции И-НЕ и задаётся следующей таблицей истинности:

X	Y	X | Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рис 1. (Штрих Шеффера)

Стрелка Пирса- бинарная логическая операция, булева функция над двумя переменными. Стрелка Пирса, обычно обозначаемая ↓, эквивалентна операции ИЛИ-НЕ и задаётся следующей таблицей истинности:

a	b	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Полная система булевых функций:

Определение. ***Система булевых функций*** $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *называется* ***полной****, если любая булева функция может быть выражена через функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *с помощью суперпозиций.*

Пример 42.

Исходя из определения полной системы булевых функций, следует, что система $\{\wedge, \vee, \neg\}$ является полной, так как любая булева функция может быть представима в виде СДНФ и/либо СКНФ.

Минимальная система булевых функций:

Определение. ***Минимальной ДНФ (МДНФ)*** *функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется ДНФ, реализующая функцию f и содержащая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими функцию f.*

Минимальную ДНФ данной формулы можно найти, перебрав конечное число равносильных ей ДНФ и выбрав среди них ту, которая содержит минимальное число переменных. Однако при большом числе переменных такой перебор практически невыполним. Существуют эффективные способы нахождения минимальной ДНФ. Рассмотрим два из них.

Каждый из рассмотренных ниже методов состоит из двух этапов:

- построение сокращенной ДНФ;
- построение матрицы покрытий. Построение МДНФ.

33. Замкнутые классы булевых функций, Теорема Поста

Замкнутые классы булевых функций:

*Определение. Класс (множество) К булевых функций называется **функционально замкнутым**, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.*

Пример 43.

1. Четыре булевы функции одной переменной ($f_1 = 00$, $f_2 = 11$, $f_3 = 01$, $f_4 = 10$) образуют замкнутый класс.

2. Булевы функции $f_1 = x$ и $f_2 = \bar{x}$ образуют замкнутый класс.

Теорема Поста:

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов T_0, T_1, L, M, S нашлась хотя бы одна функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

34. Конечные автоматы. Определение

Конечные автоматы:

Конечный автомат содержит управляющее устройство, входной и выходной каналы. Для управляющего устройства выделено начальное состояние q_0. Работа автомата осуществляется в дискретные такты времени t= 1, 2, 3, …. На входной канал автомата последовательно поступают символы $x_1, x_2, \ldots$, при этом управляющее устройство изменяет свое состояние, а на выходе появляются выходные символы $y_1, y_2, \ldots$. Работа автомата определяется системой команд, каждая из которых имеет вид $q_i x_r \to q_j y_s$, где q_i, q_j – внутренние состояния автомата, x_r – входной символ, y_s – выходной символ. Обычно требуют, чтобы выполнялось условие однозначности, т.е. не может быть двух команд с одинаковыми левыми и различными правыми частями. Такой автомат называется детерминированным. Выходной символ, вырабатываемый автоматом, зависит не только от входного символа на текущем такте времени, но и от внутреннего состояния. В свою очередь, внутреннее состояние автомата зависит от входных символов, поступивших в предыдущие такты времени. В этом смысле автомат обладает памятью.

Определение конечного автомата:

Конечный автомат $M=(Q, X, Y, \delta, \lambda)$, где $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$ – конечное множество внутренних состояний автомата, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество входных символов (входной алфавит), $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – множество выходных символов (выходной алфавит), $\delta(q,x) : Q \times X \to Q$ – функция переходов автомата из одного состояния в другое, $\lambda(q,x) : Q \times X \to Y$ – функция выходов. Состояние автомата соответствует памяти о прошлом, позволяя устранить время как явную переменную. Автомат обычно задают таблицей переходов, в заголовках строк которой стоят все возможные состояния автомата, в заголовках столбцов – все символы входного алфавита, а на пересечениях строк и столбцов – следующее состояние автомата и выходной символ.

35. Машина Тьюринга

Машина Тьюринга:

Машина Тьюринга представляет собой абстрактное устройство, состоящее из ленты, управляющего устройства, считывающей головки. Лента разбита на ячейки, в которые заносится один символ внешнего алфавита $A=\{a_0,...,a_{n-1}\}$, а также пустой символ. Управляющее устройство в каждый момент времени может находиться в одном из состояний из множества $Q=\{q_0,q_1,...,q_{r-1}\}$, $r\geq 1$ (внутреннего алфавита). Считывающая головка может перемещаться вдоль ленты, считывать содержимое обозреваемой ячейки, записывать в нее новый символ и совершать движение.

Работа управляющего устройства характеризуется тремя функциями:

$$
\begin{aligned}
&G:\quad Q\times A\to Q,\\
&F:\quad Q\times A\to A,\\
&D:\quad Q\times A\to\{S,L,R\}
\end{aligned}
$$

где G — функция переходов, F — функция выходов, D — функция движений (S — отсутствие движения, L — движение влево, R — движение вправо).

Функции G,F,D могут быть заданы *командами*: $q_i a_i q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Совокупность всех команд, определяющих работу машины Тьюринга, называется *программой*. *Конфигурацией* машины называется слово $a_{j-1}a_{jl-1}q_i a_{jl} a_{js}$. Конфигурация, соответствующая началу работы, называется *начальной*. Если некоторое состояние q_0 является заключительным, то машина прекращает работу (достигает заключительной конфигурации). Если начав работу на слове P, машина T остановится за конечное число шагов, то говорят, что машина *применима* к слову P, и результатом применения машины T к слову P является $T(P)$. В противном случае машина T *не применима* к слову P.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n), n>1,$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел. Слово $1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0...01^{\alpha_n+1}$ называется основным машинным кодом набора в алфавите $\{0,1\}$ и обозначается $k(\tilde{\alpha})$. ($1^m=\underbrace{11...1}_{m}$)

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется *частичной числовой функцией*, если $x_i\in N=\{0,1,...,m,...\}$ и в том случае, когда на наборе $\tilde{\alpha}$ функция $f(\alpha)$ определена, $f(\alpha)\in N$.

Частичная функция называется *вычислимой* (по Тьюрингу), если существует машина T, такая, что

а) если $f(\tilde{\alpha})$ определено, то $T_f(k(\tilde{\alpha}))=k(f(\tilde{\alpha}))$;

б) если $f(\tilde{\alpha})$ не определено, то либо $T(k(\tilde{\alpha}))$ не является кодом числа из N, либо T_f не применима к слову $k(\tilde{\alpha})$.

Говорят, что машина T *правильно вычисляет* функцию $f(\tilde{x}^n)$ если:

а) $f(\tilde{\alpha}^n)$ определено, $T(k(\tilde{\alpha}^n)) = k(f(\tilde{\alpha}))$ и головка в заключительный момент обозревает левую единицу кода $k(f(\tilde{\alpha}))$;

б) $f(\tilde{\alpha}^n)$ не определено, машина T не останавливается.