Оглавление

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Постановка задачи

В интегральном исчислении решается следующая основная задача: зная производную от некоторой функции, восстановить саму функцию. Однако, часто требуется решить более общую задачу: требуется найти функцию, если известно некоторое соотношение между этой неизвестной функцией, ее производными и независимым переменным. Это соотношение называется дифференциальным уравнением.

Итак, дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение между независимым переменным, неизвестной функцией и ее первой производной. В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано следующим образом:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1.1}$$

Всякая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая данному уравнению (то есть обращающая его в тождество), называется решением данного уравнения. Дифференциальное уравнение (1.1.1) называется уравнением, не разрешенным относительно производной. Если его возможно разрешить относительно y', то оно приводится к виду

$$y' = f(x, y).$$

Это уравнение называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Назовем график решения дифференциального уравнения интегральной кривой. Обычно дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Иногда задают значение y_0 искомой функции при некотором значении x_0, как говорят, в этом случае задают начальное условие. С геометрической точки зрения задача отыскания решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием равносильна тому, чтобы найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку (x_0, y_0) на плоскости *XOY*, и называется задачей Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$. При достаточно общих условиях, а именно, если функции $f(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ непрерывны во всех точках некоторой области *G* на плоскости *XOY*, для каждой точки (x_0, y_0) этой области *G* существует единственная функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению и принимающая значение y_0 при $x = x_0$. Эта теорема называется теоремой Коши.

Общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области *G* называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $y = \varphi(x, C)$ является решением дифференциального уравнения при любом конкретном *C* из некоторого множества;
2) для любой точки (x_0, y_0) из области *G* можно найти такое C_0, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения нередко приходим к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, разрешив которое относительно *y*, мы могли бы получить общее решение. Однако, это не всегда удается сделать. Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение дифференциального уравнения, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Всякая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при $C = C_0$, называется частным решением. Если в общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ подставить $C = C_0$, то получим частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Подведем итог. Решить дифференциальное уравнение, это значит:

1) найти его общее решение или общий интеграл, если не задано на-

чальное условие;

2) найти то частное решение или частный интеграл, который удовлетворяет заданному начальному условию.

Например, можно заметить, что функция $y=\sqrt{C^2-x^2}$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{/}=-\frac{x}{y}$, а функция $y=\sqrt{25-x^2}$ является частным решением этого уравнения при начальном условии $y(3)=4$.

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y^{/}=f(x)g(y) \tag{1.2.1}$$

или

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \tag{1.2.2}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Решим уравнение (1.2.1) в общем виде:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Пример 1.2.1. [1] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y^{/}=-\frac{y}{x}$.

Решение.

Так как $y^{/}=\frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y| = \ln\frac{C}{|x|}.$$

Пропотенцируем обе части равенства:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

Пример 1.2.2. [1] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2y^2$. Ответ: $y = -\dfrac{3}{C + x^3}$.

Пример 1.2.3. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\,y' = 0$ и запишите ответ в виде $C = \varphi(x, y)$. Ответ: $C = 2\sqrt{2 - x^2} - \operatorname{arctg} y$.

Пример 1.2.4. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$ и запишите ответ в виде $C = \varphi(x, y)$. Ответ: $C = \dfrac{(x^2+1)^5}{(y^2+4)^3}$.

1.3 Однородные уравнения относительно *x*, *y*

Уравнения вида

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.3.1}$$

называются однородными уравнениями относительно x, y.

Эти уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой $\frac{y}{x} = t(x)$:

$$y = tx,\ y' = t'x + t,$$

$$t'x + t = F(t),$$

$$\frac{dt}{F(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Пример 1.3.1. [1] Найдите решение задачи Коши: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 2$.

Решение.

Заметим, что данное уравнение имеет вид $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, а, значит, является однородным относительно *x*, *y*. Введем новую функцию $t(x) = \frac{y}{x}$.

$$y = tx,\ y' = t'x + t,$$

$$t'x + t = t + t^2,$$

$$\frac{dt}{dx}x = t^2,$$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{t} = \ln|x| + C,$$

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C,$$

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + C}.$$

Воспользуемся начальным условием:

$$2 = \frac{-1}{C},$$

$$C=-\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{-x}{-\frac{1}{2}+\ln|x|},$$

$$y=\frac{2x}{1-\ln(x^2)}.$$

Мы нашли частное решение данного уравнения, которое является решением задачи Коши.

Пример 1.3.2. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2}+y$. Ответ: $y+\sqrt{2x^2+y^2}=Cx^5$.

Пример 1.3.3. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$. Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-3\ln(x^2+y^2)+\ln|Cx^5|=0$.

1.4 Уравнения, сводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$y'=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.4.1}$$

Случай 1. Пусть $a_2=b_2=0$, $c_2=1$. Тогда уравнение (1.4.1) примет вид $y'=F(ax+by+c)$. Сделаем замену $u(x)=ax+by+c$. Тогда $u'=a+by'$, $y'=\frac{u'-a}{b}$, $\frac{u'-a}{b}=F(u)$, $u'=a+bF(u)$. Легко показать, что это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим $\Phi(x,u,C)=0$, и, учитывая, что $u=ax+by+c$, получаем общий интеграл первоначального дифференциального уравнения $\Phi(x,ax+by+c,C)=0$.

Случай 2. Рассмотрим теперь уравнение (1.4.1) при условии $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

Обозначая эти отношения буквой λ, получим $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$. В этом случае уравнение (1.4.1) может быть переписано в виде

$$y' = F\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Видно, что правая часть зависит только от линейного выражения $a_2x + b_2y$. Следовательно, сделав замену, как и в первом случае $u = a_2x + b_2y$, мы сможем свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Случай 3. Рассмотрим теперь уравнение (1.4.1) при условии $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Введем новые переменные u и v, связанные с x и y соотношениями

$$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases},$$

где x_0 и y_0 пока неизвестные постоянные.

$$dx = du,\ dy = dv,\ y'_x = \frac{dv}{du} = v'_u.$$

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{a_1u + b_1v + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2u + b_2v + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right).$$

Подберем теперь x_0 и y_0 так, чтобы выражения, стоящие в круглых скобках, равнялись нулю:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет единственное решение, так как определитель системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

При таком выборе x_0 и y_0 уравнение станет однородным относительно u и v.

$$v_u' = F\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$$

$$v_u' = F\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \frac{v}{u}}\right)$$

Решая его и подставляя в полученное решение вместо u выражение $x - x_0$, вместо v выражение $y - y_0$, получим общий интеграл уравнения (1.4.1).

Пример 1.4.1. [1] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = 3\left(y - \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}$.

Решение.

Заметим, что данное уравнение имеет вид $y' = F(ax + by + c)$ (случай 1). Сделаем замену $y - \frac{x}{2} = u$. Тогда $y' - \frac{1}{2} = u'$.

$$u' + \frac{1}{2} = 3u^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2},$$

$$\int u^{-\frac{2}{3}} du = 3\int dx,$$

$$3\sqrt[3]{u} = 3x + 3C,$$

$$y - \frac{x}{2} = (x + C)^3,$$

$$y = (x + C)^3 + \frac{x}{2}.$$

Пример 1.4.2. [1] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{4x + 2y + 1}{2x + y}$.

Решение.

Заметим, что данное уравнение имеет вид $y' = F\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, причем $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ (случай 2). Сделаем замену $2x+y=u$. Тогда $2+y'=u'$.

$$u'-2=\frac{2u+1}{u},$$

$$\int\frac{udu}{4u+1}=\int dx,$$

$$\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}\ln|4u+1|=x+C,$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{1}{16}\ln|8x+4y+1|=C.$$

Пример 1.4.3. [1] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x+y+1}{x-y+3}$.

Решение.

Заметим, что данное уравнение имеет вид $y'=F\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, причем $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ (случай 3). Проведем замену $\begin{cases}x=u+x_0\\ y=v+y_0\end{cases}$, где x_0, y_0 найдем как решение системы

$$\begin{cases}x_0+y_0+1=0\\ x_0-y_0+3=0\end{cases}.$$

Получаем:

$$\begin{cases}x_0=-2\\ y_0=1\end{cases},$$

$$\begin{cases}x=u-2\\ y=v+1\end{cases},$$

$$y'=v',$$

$$v'=\frac{u+v}{u-v},$$

$$v'=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}},$$

$$\frac{v}{u}=t(u),\ v=tu,\ v'=t'u+t,$$

$$t'u + t = \frac{1+t}{1-t},$$

$$\int \frac{(1-t)dt}{1+t^2} = \int \frac{du}{u},$$

$$\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln|Cu|,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \ln\left|Cu\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}\right|,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \ln\left|C\sqrt{u^2+v^2}\right|,$$

$$e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x+2}} = C\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\,.$$

Пример 1.4.4. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$. Ответ: $\dfrac{7(x-1)}{x-y} = \ln|C(x-y)|$.

Пример 1.4.5. [2] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y+2}{2x+y-4}$. Ответ: $\dfrac{x+y-1}{(y+2)^2} = C$.

1.5 Линейные уравнения первого порядка

Линейным называется уравнение, которое можно привести к виду

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (1.5.1)$$

Это уравнение называется линейным, так как оно является уравнением первой степени относительно неизвестной функции y и ее производной y'. Если в линейном уравнении правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то уравнение называется линейным неоднородным, если $Q(x)=0$ – линейным однородным (не следует путать уравнения $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и $y' + P(x)y = 0$.) Если в неоднородном уравнении заменить $Q(x)$ нулем, то мы получим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному. Линейное однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Теорема 1.5.1. Линейное неоднородное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = z \cdot \varphi(x)$, где z – новая неизвестная функция, а $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, отличное от нуля.

$$y' = z'\varphi(x) + z\varphi'(x)$$

$$z'\varphi(x) + z\left(\varphi'(x) + P(x)\varphi(x)\right) = Q(x)$$

$$z'\varphi(x) = Q(x)$$

$$z = \int \frac{Q(x)}{\varphi(x)} dx + C$$

$$y = \varphi(x)\int \frac{Q(x)}{\varphi(x)} dx + C\varphi(x)$$

Данная теорема дает и метод решения неоднородного уравнения.

1) Находим частное решение однородного уравнения $\varphi(x) \neq 0$.

2) Проводим подстановку $y = z \cdot \varphi(x)$ и находим z.

3) Возвращаемся к старой переменной и находим y.

Кроме того, как будет показано далее, общее решение неоднородного уравнения можно найти как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому можно привести немного иную схему решения неоднородного уравнения, называемую методом вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение однородного уравнения $y = C \cdot \varphi(x)$.

2) Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$y = C(x) \cdot \varphi(x)$.

3) Находим общее решение неоднородного уравнения $y = C \cdot \varphi(x) + C(x) \cdot \varphi(x)$.

Пример 1.5.1. [1] Найдите общее решение неоднородного уравнения $y' - xy = x^3$.

Решение.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение:

$$y' - xy = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx,$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

2) Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$y' = C'e^{\frac{x^2}{2}} + Cxe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставим эти функции в первоначальное уравнение:

$$C'e^{\frac{x^2}{2}} + Cxe^{\frac{x^2}{2}} - Cxe^{\frac{x^2}{2}} = x^3,$$

$$C'e^{\frac{x^2}{2}} = x^3,$$

$$\int dC = \int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$C = -(x^2 + 2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Мы вычислили интеграл, применив последовательно метод замены переменной ($t = -\frac{x^2}{2}$) и метод интегрирования по частям.

$$y = -(x^2 + 2)e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$y = -x^2 - 2.$$

Мы нашли частное решение неоднородного уравнения.

3) Найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - x^2 - 2.$$

Пример 1.5.2. [2] Найдите решение задачи Коши: $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$. Ответ: $y = e^{\sin x} - 2(\sin x + 1)$.

Пример 1.5.3. [2] Найдите решение задачи Коши: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$, $y(1) = 1$. Ответ: $y = \frac{1}{x}$. Промежуточный результат: $y = Cx + \frac{1}{x}$.

1.6 Уравнения Бернулли

Уравнения вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{1.6.1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ данные непрерывные функции от x (или в частном случае постоянные), называются уравнениями Бернулли. Будем решать это уравнение, полагая, что α – произвольное действительное число, причем $\alpha \neq 0$ (в противном случае уравнение является линейным) и $\alpha \neq 1$ (в противном случае уравнение является уравнением с разделяющимися переменными). Покажем, что заменой переменного его можно свести к линейному.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$$

$$u = y^{1-\alpha},\ u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',\ \frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{u'}{1-\alpha}$$

$$\frac{u'}{1-\alpha} + P(x)u = Q(x)$$

Решая это уравнение, находим u как функцию от x. Затем, учитывая, что $u = y^{1-\alpha}$, $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, найдем неизвестную функцию y.

Пример 1.6.1. [1] Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy' + 6y = 2x^2\sqrt{y}$.

Решение.

Наше уравнение является уравнением Бернулли, где $\alpha = \frac{1}{2}$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{y}$:

$$x\frac{y'}{\sqrt{y}} + 6\sqrt{y} = 2x^2.$$

Сделаем замену $u = \sqrt{y}$, тогда $u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2u'$.

$$2xu' + 6u = 2x^2,$$

$$u' + 3\frac{u}{x} = x.$$

Полученное линейное неоднородное уравнение первого порядка решим методом вариации произвольной постоянной.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение.

$$u' + 3\frac{u}{x} = 0,$$

$$\int\frac{du}{u} = -3\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = -3\ln|x| + \ln C,$$

$$u = \frac{C}{x^3}.$$

2) Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$u = \frac{C(x)}{x^3}.$$

$$u' = \frac{C' x^3 - 3x^2 C}{x^6}.$$

Подставим эти функции в линейное неоднородное уравнение:

$$\frac{C' x^3 - 3x^2 C}{x^6} + \frac{3C}{x^3 \cdot x} = x,$$

$$\frac{C' x^3}{x^6} = x,$$

$$C' = x^4,$$

$$C = \frac{x^5}{5},$$

$$u = \frac{x^2}{5},$$

$$u = \frac{C}{x^3} + \frac{x^2}{5}.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\sqrt{y} = \frac{C}{x^3} + \frac{x^2}{5},$$

$$y = \left(\frac{C}{x^3} + \frac{x^2}{5}\right)^2.$$

Пример 1.6.2. [2] Найдите решение задачи Коши: $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x$, $y(0) = 1$. Ответ: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}$. Промежуточные результаты: $\frac{1}{y^3} = C \cdot \cos^3 x + \cos x$, $\frac{1}{y^3} = \cos x$.

Пример 1.6.3. [2] Найдите решение задачи Коши: $xy' + y = xy^2$, $y(1) = 1$. Ответ: $y = \frac{1}{x - x\ln|x|}$. Промежуточный результат: $\frac{1}{y} = Cx - x\ln|x|$.

1.7 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1.7.1}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – непрерывные функции. Если выражение $Mdx + Ndy$ является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $u(x,y)$, то уравнение (1.7.1) называется уравнением в полных дифференциалах. Известно, что необходимым и достаточным условием того, что выражение $Mdx + Ndy$ есть полный дифференциал, является выполнение равенства $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Если это условие выполнено, то мы можем с помощью криволинейного интеграла найти функцию $u(x,y)$ и записать уравнение в виде $du(x,y) = 0$, тогда $u(x,y) = C$. Это и есть общий интеграл уравнения (1.7.1)

Пример 1.7.1. [1] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $2xy^3dx + (3x^2y^2 - 2)dy = 0$.

Решение.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$u(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} 2xy^3dx + (3x^2y^2 - 2)dy =$$

$$= \int\limits_0^x (2x \cdot 0^3 dx + (3x^2 0^2 - 2) \cdot 0 \cdot dx) + \int\limits_0^y (3x^2y^2 - 2)dy = x^2y^3 - 2y,$$

$$x^2y^3 - 2y = C.$$

В процессе вычисления интеграла был выбран путь интегрирования, указанный на рисунке 1.7.1.

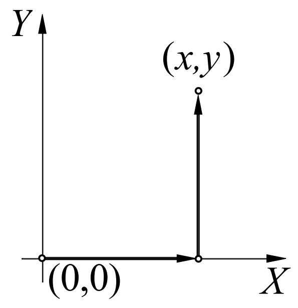

Рисунок 1.7.1 – Путь интегрирования

1.8 Интегрирующий множитель

Далеко не всякое уравнение вида (1.7.1) является уравнением в полных дифференциалах. Однако, для всякого уравнения (1.7.1) такого, что функции M и N дифференцируемы в рассматриваемой области, существует функция $\mu(x, y)$, тождественно не равная нулю, после умножения на которую всех членов уравнения (1.7.1) левая часть становится полным дифференциалом. Эта функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем. Всякое уравнение (1.7.1) при условии дифференцируемости функций M и N имеет интегрирующий множитель, однако не всегда этот множитель удается практически найти. Если же интегрирующий множитель найден, то данное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах.

На практике обычно ищут интегрирующий множитель μ, зависящий только от x или только от y (какой из этих двух вариантов выбирать – решается подбором).

Пример 1.8.1. [1] Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $(1 - x^2 y)dx + (x^2 y - x^3)dy = 0$.

Решение.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2.$$

Найдем $\mu(x)$.

$$\mu(x)(1-x^2y)dx+\mu(x)(x^2y-x^3)dy=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)(1-x^2y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)(x^2y-x^3)\right),$$

$$\mu(x)(-x^2)=\mu^{/}(x)(x^2y-x^3)+\mu(x)(2xy-3x^2),$$

$$\mu^{/}(x)x^2(y-x)=\mu(x)\cdot 2x(x-y),$$

$$\mu^{/}(x)x=-2\mu(x),$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2dx}{x},$$

$$\ln|\mu|=-2\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\mu(x)=\frac{C}{x^2},$$

$$\mu(x)=\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0,$$

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,0)}^{(x,y)}\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=$$

$$=\int\limits_1^x\frac{dx}{x^2}+\int\limits_0^y(y-x)dy=-\frac{1}{x}\bigg|_1^x+\frac{y^2}{2}-xy=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{2}-xy+1,$$

$$\frac{y^2}{2}-xy-\frac{1}{x}=C.$$

1.9 Некоторые задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача о распаде радия

Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Пусть коэффициент пропорциональности k известен. Требуется узнать, какое количество нераспавшегося радия останется к моменту времени t, если в начальный момент времени $t=0$ радия было A.

Решение.

Обозначим количество нераспавшегося радия в момент времени t за y. Задача заключается в том, чтобы найти y как функцию от t. Скорость изменения какой-либо величины есть производная от этой величины по времени.

$$\frac{dy}{dt}=-ky$$

Знак «минус» появился потому, что количество радия со временем уменьшается, то есть $\frac{dy}{dt}<0$, тогда, как k мы считаем положительным.

$$\frac{dy}{y}=-kdt$$

$$\ln|y|=-kt+C$$

$$y=Ce^{-kt}$$

$$y(0)=A,\ C=A$$

$$y=Ae^{-kt}$$

Задача с касательной

Найдите уравнение кривой, которая проходит через точку (2;3) и обладает тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение.

Рассмотрим рисунок 1.9.1.

$$f'(x) = y' = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$y = \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{6}{x}$$

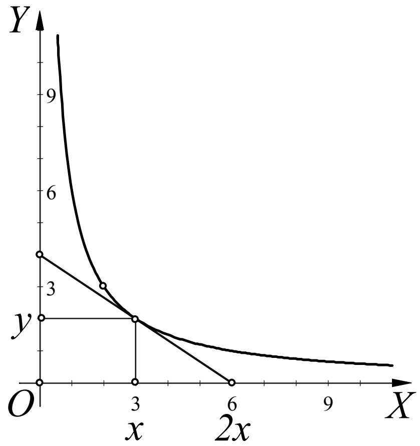

Рисунок 1.9.1 –Задача с касательной

ГЛАВА 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Основные определения. Теорема существования. Начальные условия

Соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные до n-го порядка включительно, называется дифференциальным уравнением n-го порядка. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка таков:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (2.1.1)$$

Всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (2.1.1), обращает его в тождество, называется решением этого уравнения, а график функции $y = \varphi(x)$ – интегральной кривой.

Если дифференциальное уравнение (2.1.1) имеет решения, то этих решений имеется бесконечно много. Для того, чтобы из семейства всех решений выделить одно определенное, надо задать некоторые дополнительные условия, налагаемые на искомое решение. Эти условия называются начальными. Как мы знаем, в случае дифференциального уравнения первого порядка начальное условие ставится так: найти то решение уравнения, которое при $x = x_0$ принимает значение y_0. Для уравнений второго и более высоких порядков этого условия уже недостаточно.

Вообще, для случая уравнения n-го порядка следует задать n начальных условий:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (2.1.2)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \qquad (2.1.3)$$

Теорема 2.1 (Коши). При достаточно общих условиях существует и притом единственное решение уравнения (2.1.3), или более строго: если функция $(n+1)$-го переменного $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и ее частные производные первого порядка по y, y', …, $y^{(n-1)}$ непрерывны при всех x, близких к x_0 и всех значениях y, y', …, $y^{(n-1)}$ близких соответственно к числам y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение уравнения (2.1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1.2).

Решение $y = \varphi(x)$, которое для всех значений x из некоторой области удовлетворяет начальным условиям, называется частным решением уравнения. Совокупность всех частных решений данного дифференциального уравнения называется общим решением этого уравнения. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка обычно записывается в виде функции, содержащей n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Для того, чтобы из общего решения выделить тот или иное частное, надо задать начальные условия и, используя их, найти значения произвольных постоянных. Для уравнения n-го порядка задают n начальных условий, с помощью которых составляются n уравнений с n неизвестными. Решая систему этих уравнений, находят все произвольные постоянные.

Если общее или частное решения заданы формулой, не разрешенной относительно y, то мы назовем эту формулу общим или частным интегралом.

2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Решение этого уравнения сводится к последовательному интегрированию его правой части. Действительно, интегрируя, получим:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, найдем $y^{(n-2)}$:

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx \right] dx + C_1 x + C_2 .$$

После n-кратного применения этого процесса, найдем

$$y = \varphi(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n ,$$

где $\varphi(x)$ – результат n-кратного интегрирования функции $f(x)$.

Пример 2.2.1. Найдите общее решение уравнения $y^{//} = \cos 4x + e^{2x}$.

Решение.

Найдем общее решение уравнения, проинтегрировав два раза его правую часть:

$$y^{/} = \int \left(\cos 4x + e^{2x} \right) dx ,$$

$$y^{/} = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 ,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx ,$$

$$y = -\frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 .$$

2. Рассмотрим уравнение, не содержащее явно неизвестную функцию, то есть уравнение вида $F(x, y^{/}, y^{//}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Это уравнение можно свести к уравнению более низкого порядка с помощью замены переменного $y^{/} = z(x)$. Тогда

$$y^{//} = z^{/} ,\ \ldots,\ y^{(n)} = z^{(n-1)} ,$$

и уравнение примет вид:

$$F(x, z, z^{/}, \ldots, z^{(n-1)}) = 0 .$$

Это уравнение $(n-1)$-го порядка. Допустим, мы нашли его общее решение:

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) .$$

А значит

$$y^{/} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) ,$$

$$y = \int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) dx + C_n .$$

Пример 2.2.2. [1] Найдите общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{H}\sqrt{1 + y'^2}$.

Решение.

В данном уравнении в явном виде отсутствует y, значит понизить порядок уравнения можно с помощью подстановки $y' = z(x)$, $y'' = z'$.

$$z' = \frac{1}{H}\sqrt{1+z^2},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{H},$$

$$\ln|z + \sqrt{1+z^2}| = \frac{x}{H} + \ln C_1,$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = C_1 e^{\frac{x}{H}},$$

$$\sqrt{1+z^2} = C_1 e^{\frac{x}{H}} - z,$$

$$1 + z^2 = C_1^2 e^{\frac{2x}{H}} - 2C_1 z e^{\frac{x}{H}} + z^2,$$

$$z = \frac{C_1}{2} e^{\frac{x}{H}} - \frac{1}{2C_1} e^{-\frac{x}{H}},$$

$$y' = \frac{C_1}{2} e^{\frac{x}{H}} - \frac{1}{2C_1} e^{-\frac{x}{H}},$$

$$y = H\left(\frac{C_1}{2} e^{\frac{x}{H}} + \frac{1}{2C_1} e^{-\frac{x}{H}}\right) + C_2.$$

3. Рассмотрим уравнение, не содержащее явно неизвестную функцию, а также несколько ее первых производных. То есть рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

В этом случае сделаем замену $y^{(k)} = z(x)$, при этом порядок уравнения понизится на k единиц.

Пример 2.2.3. [1] Найдите решение задачи Коши: $y''' = \frac{2y''}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.

Решение.

Сделаем замену $y'' = z(x)$, $y''' = z'$.

$$z' = \frac{2z}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln C_1,$$

$$z = C_1 x^2,$$

$$y'' = C_1 x^2,$$

$$y' = C_1^* x^3 + C_2,$$

$$y = C_1^{**} x^4 + C_2 x + C_3.$$

В процессе решения мы переобозначили константы: $C_1^* = \frac{C_1}{3}$, $C_1^{**} = \frac{C_1^*}{4}$.

$$y' = 4C_1^{**} x^3 + C_2,$$

$$y'' = 12C_1^{**} x^2.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} C_1^{**} + C_2 + C_3 = 0 \\ 4C_1^{**} + C_2 = 2 \\ 12C_1^{**} = 1 \end{cases}.$$

Итак, $C_1^{**} = \frac{1}{12}$, $C_2 = \frac{5}{3}$, $C_3 = -\frac{7}{4}$.

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{5x}{3} - \frac{7}{4}.$$

4. Рассмотрим уравнение, не содержащее явно независимую переменную, то есть уравнение вида

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Для понижения порядка такого уравнения следует сделать замену $y' = z(y)$, считая при этом z новой неизвестной функцией, зависящей от y, при этом y играет роль новой независимой переменной. После такой замены мы получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

$$y' = z(y), \; y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z.$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(y, z, z' \cdot z) = 0.$$

Решая это уравнение, найдем соотношение между z и y:

$$\Phi(y, z, C_1) = 0,$$

$$\Phi(y, y', C_1) = 0.$$

Это уравнение первого порядка. Решая его, находим соотношение между y и x, при этом появится вторая произвольная постоянная.

Пример 2.2.4. [1] Найдите решение задачи Коши: $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$.

Решение.

Проведем замену $y' = z(y)$, тогда $y'' = z' \cdot z$.

$$z'z = -\frac{1}{y^3}.$$

$$\int z dz = -\int \frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1},$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}\,.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$\sqrt{\frac{1}{1^2} + C_1} = 1,$$

$$C_1 = 0,$$

$$y' = \frac{1}{y},$$

$$\int y dy = \int dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = x + C_2\,.$$

Вновь воспользуемся начальными условиями:

$$2 + C_2 = \frac{1^2}{2},$$

$$C_2 = -\frac{3}{2},$$

$$y = \sqrt{2x - 3}\,.$$

Пример 2.2.5. [2] Найдите общее решение уравнения $y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' = 2x$. Ответ: $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$.

Пример 2.2.6. [2] Найдите общее решение уравнения $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x^3$. Ответ: $y = x^3 - 3x + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$.

Пример 2.2.7. [2] Найдите решение задачи Коши: $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$. Ответ: $y = -\frac{1}{x}$.

Пример 2.2.8. [2] Найдите решение задачи Коши: $y'' y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$. Ответ: $y = -\sqrt{2x - 1}$.

2.3 Общая теория линейных уравнений

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

называется линейным, если выражение, стоящее в левой части, является линейной функцией от y, y', …, $y^{(n)}$ с коэффициентами, которые могут быть либо постоянными числами, либо функциями от x. Следовательно, любое линейное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = b,$$

где a_0, a_1, …, a_n, b – либо функции от x, либо числа.

В том случае, когда все коэффициенты a_0, a_1, …, a_n являются постоянными числами, уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами (при этом свободный член может быть постоянным, а может зависеть от x). Если в линейном уравнении свободный член $b = 0$, то уравнение называется уравнением без правой части или однородным. Если $b \neq 0$, уравнение называется уравнением с правой частью или неоднородным.

Среди всевозможных типов дифференциальных уравнений n-го порядка линейные уравнения являются самыми простыми. Вместе с тем это и самые важные уравнения: они широко используются в физике, механике, технике.

Рассмотрим некоторые свойства линейных уравнений. Эти свойства справедливы для любых линейных дифференциальных уравнений, независимо от того, постоянны у них коэффициенты или нет. Ограничимся пока изучением линейных уравнений второго порядка:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b, \qquad (2.3.1)$$

где a_0, a_1, a_2, b – функции от x или числа.

Теорема 2.3.1 (О существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения). Если все коэффициенты и правая часть линейного уравнения (2.3.1) непрерывны в интервале $(A;B)$, причем коэффициент a_0 не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, то, каковы бы ни были начальные условия в точке $x_0 \in (A;B)$, существует и только одна функция, определенная в интервале $(A;B)$, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению и данным начальным условиям.

Доказательство.

Уравнение (2.3.1) может быть переписано в виде

$$y'' = -\frac{a_1}{a_0}y' - \frac{a_2}{a_0}y + \frac{b}{a_0}. \qquad (2.3.2)$$

Выражение, стоящее в правой части, является непрерывной функцией как от x (функции $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, $\frac{b}{a_0}$ – непрерывны), так и от y и y' (так как это выражение линейно относительно y и y'). Кроме того, частные производные от этого выражения по y и по y' непрерывны (эти частные производные равны соответственно $-\frac{a_2}{a_0}$ и $-\frac{a_1}{a_0}$). А значит, в силу теоремы Коши верна и данная теорема.

Теорема 2.3.2. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются решениями линейного уравнения без правой части

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

то функция $C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$ также является решением этого уравнения, каковы бы ни были числа C_1 и C_2.

Доказательство.

$y = C_1\varphi + C_2\psi$, $y' = C_1\varphi' + C_2\psi'$, $y'' = C_1\varphi'' + C_2\psi''$.

$a_0(C_1\varphi'' + C_2\psi'') + a_1(C_1\varphi' + C_2\psi') + a_2(C_1\varphi + C_2\psi) = 0$,

$C_1(a_0\varphi'' + a_1\varphi' + a_2\varphi) + C_2(a_0\psi'' + a_1\psi' + a_2\psi) = 0$.

Выражения, стоящие в первой и второй скобках, равны нулю, так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения.

Определение 2.3.1. Пару частных решений линейного однородного уравнения второго порядка $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называют фундаментальной системой решений в интервале $(A;B)$, если ни в одной точке этого интервала определитель

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1^{/}(x) & f_2^{/}(x) \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль. Определитель W называется определителем Вронского или вронскианом.

Пусть два решения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ линейно зависимы в интервале $(A;B)$, то есть для всех $x \in (A;B)$ $\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) = 0$, где α и β – некоторые числа, неравные нулю одновременно. Тогда определитель Вронского для этих функций будет тождественно равен нулю в $(A;B)$. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Тогда $\varphi(x) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\psi(x)$ и

$$W = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi^{/} & \psi^{/} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\beta}{\alpha}\psi & \psi \\ -\dfrac{\beta}{\alpha}\psi^{/} & \psi^{/} \end{vmatrix} = 0.$$

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.3.3. Если два решения уравнения $a_0 y^{//} + a_1 y^{/} + a_2 y = 0$ линейно независимы в интервале $(A;B)$, то они образуют фундаментальную систему решений.

Доказательство.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – линейно независимые частные решения. Допустим, что в какой-либо точке $x_0 \in (A;B)$ определитель Вронского для этих двух функций равен нулю:

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}\varphi(x_0) & \psi(x_0)\\ \varphi'(x_0) & \psi'(x_0)\end{vmatrix}=0.$$

Подберем числа α и β так, чтобы они удовлетворяли системе

$$\begin{cases}\alpha\varphi(x_0)+\beta\psi(x_0)=0\\ \alpha\varphi'(x_0)+\beta\psi'(x_0)=0\end{cases}.$$

Числа α и β можно подобрать так, чтобы хотя бы одно из них было бы отлично от нуля, так как определитель системы $W(x_0)=0$. При таком выборе α и β функция $f(x)=\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ будет решением уравнения, удовлетворяющим условиям $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$.

С другой стороны ясно, что функция, тождественно равная нулю, также удовлетворяет этому уравнению и этим начальным условиям. В силу теоремы 2.3.1 эти два решения тождественно равны друг другу, то есть

$$f(x)\equiv 0,$$

$$\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)\equiv 0.$$

Так как α и β не равны нулю одновременно, то функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в $(A;B)$. Получили противоречие с условием. Значит, определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке, то есть система фундаментальна.

Следствие 1. Для фундаментальности системы двух частных решений необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимы.

Следствие 2. Если определитель Вронского для пары решений равен нулю хотя бы в одной точке, то он тождественно равен нулю.

Теорема 2.3.4. Если функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ образуют в интервале $(A;B)$ фундаментальную систему частных решений уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y=C_1f_1(x)+C_2f_2(x), \tag{2.3.3}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство.

Доказательство этой теоремы состоит из двух частей.

1) Надо доказать, что всякая функция, входящая в систему (2.3.3) является решением уравнения.
2) Надо убедиться, что это семейство содержит все частные решения данного уравнения.

Первая часть доказана в теореме 2.3.2. Остается доказать, что всякое решение $\varphi(x)$ входит в семейство (2.3.3).

Пусть $x_0 \in (A;B)$, причем $\varphi(x_0) = \alpha_0$, $\varphi'(x_0) = \alpha_1$. Убедимся, что можно выбрать постоянные C_1 и C_2 так, чтобы частное решение, получающееся из (2.3.3) при этих значениях постоянных, удовлетворяло тем же начальным условиям, что и функция $\varphi(x)$:

$$\begin{cases} C_1 f_1(x_0) + C_2 f_2(x_0) = \alpha_0 \\ C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) = \alpha_1 \end{cases}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Значит, система имеет единственное решение. При этих значениях постоянных частное решение, входящее в семейство (2.3.3), удовлетворяет тем же начальным условиям, что и решение $\varphi(x)$. В силу теоремы единственности решения полученное частное решение тождественно равно $\varphi(x)$, то есть $\varphi(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$, где C_1 и C_2 – числа, удовлетворяющие системе.

Итак, любое наперед заданное решение $\varphi(x)$ входит в семейство $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ при некоторых значениях произвольных постоянных. Теорема доказана.

Пример 2.3.1. [1] Рассмотрим уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$. Подстановкой легко убедиться, что функции $f_1(x) = e^{2x}$ и $f_2(x) = e^{3x}$ являются решениями уравнения. Кроме того,

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0 .$$

Следовательно, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} .$$

Решим это уравнение с начальными условиями $f(0) = 1$, $f^{/}(0) = -2$.

$$y^{/} = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} .$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 = -2 \end{cases}, \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -4 \end{cases}.$$

$$y = 5e^{2x} - 4e^{3x} .$$

Теорема 2.3.5. Если a_0, a_1, a_2 непрерывны в интервале $(A;B)$, причем $a_0 \neq 0$ всюду в $(A;B)$, то уравнение $a_0 y^{//} + a_1 y^{/} + a_2 y = 0$ имеет хотя бы одну фундаментальную систему решений.

Доказательство.

Рассмотрим два частных решения:

$\varphi(x)$: $\varphi(x_0) = 1$, $\varphi^{/}(x_0) = 0$;

$\psi(x)$: $\psi(x_0) = 0$, $\psi^{/}(x_0) = 1$; $x_0 \in (A;B)$.

Эти решения существуют в силу теоремы 2.3.1. Они образуют фундаментальную системы решений, так как их определитель Вронского $W(x_0) \neq 0$, а, значит, по следствию из теоремы 2.3.3 он не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(A;B)$.

Теорема 2.3.6. Если решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему для некоторого линейного однородного уравнения, то решения $\overline{y}_1 = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ и $\overline{y}_2 = \gamma f_1(x) + \delta f_2(x)$ также образуют фундаментальную систему, если числа α, β, γ и δ таковы, что $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Доказательство.

Составим определитель Вронского для функций $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ и покажем, что он отличен от нуля.

$$\overline{W}=\begin{vmatrix}\overline{y}_1 & \overline{y}_2\\ \overline{y}_1' & \overline{y}_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha f_1+\beta f_2 & \gamma f_1+\delta f_2\\ \alpha f_1'+\beta f_2' & \gamma f_1'+\delta f_2'\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha f_1 & \gamma f_1\\ \alpha f_1' & \gamma f_1'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta f_2 & \gamma f_1\\ \beta f_2' & \gamma f_1'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha f_1 & \delta f_2\\ \alpha f_1' & \delta f_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta f_2 & \delta f_2\\ \beta f_2' & \delta f_2'\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\beta f_2 & \gamma f_1\\ \beta f_2' & \gamma f_1'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha f_1 & \delta f_2\\ \alpha f_1' & \delta f_2'\end{vmatrix}=\beta\gamma\begin{vmatrix}f_2 & f_1\\ f_2' & f_1'\end{vmatrix}+\alpha\delta\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ f_1' & f_2'\end{vmatrix}=$$

$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ f_1' & f_2'\end{vmatrix}=(\alpha\delta-\beta\gamma)W$$

Определитель $W\neq 0$, так как решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему, а $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ по условию. Значит и $\overline{W}\neq 0$, то есть система решений $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ – фундаментальна.

Теорема 2.3.7. Если известно хотя бы одно не обращающееся в нуль частное решение $\varphi(x)$ уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, то можно найти второе частное решение $\psi(x)$ такое, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ образуют фундаментальную систему решений, с помощью замены $y=z(x)\cdot\varphi(x)$, где z – новая неизвестная функция.

Доказательство.

Действительно, после этой замены уравнение преобразуется к виду

$$a_0\varphi(x)z''+\left(2a_0\varphi'(x)+a_1\varphi(x)\right)z'=0.$$

Проведем подстановку $z'=u(x)$. Тогда

$$a_0\varphi(x)u'+\left(2a_0\varphi'(x)+a_1\varphi(x)\right)u=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем какое-нибудь его частное решение, отличное от нуля. Затем, учитывая, что $z'=u(x)$, найдем z, а, значит, из формулы $y=z(x)\cdot\varphi(x)$ найдем y. Это и будет функция $\psi(x)$.

Докажем, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ образуют фундаментальную систему. Действительно, определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & z\varphi \\ \varphi' & z'\varphi + z\varphi' \end{vmatrix} = \varphi^2 z' = \varphi^2 u$$

отличен от нуля хотя бы в одной точке, так как φ не обращается в нуль, а u – не тождественный нуль.

Теорема 2.3.8. Если функция $F(x)$ является решением данного неоднородного уравнения, а $f(x)$ – решением соответствующего однородного уравнения, то функция $f(x)+F(x)$ является решением данного неоднородного уравнения.

Теорема 2.3.9. Пусть дано линейное уравнение $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b$. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему частных решений соответствующего однородного уравнения, а $F(x)$ – какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения, то общее решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + F(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

То есть общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

2.4 Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим вопрос о том, как найти хотя бы одно частное решение неоднородного уравнения, если нам известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Изложенный далее метод отыскания частного решения называется методом вариации произвольных постоянных. Рассмотрим неоднородное уравнение (2.4.2) и соответствующее ему однородное уравнение (2.4.1):

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (2.4.1)$$

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b. \qquad (2.4.2)$$

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.4.1). Будем искать частное решение неоднородного уравнения (2.4.2) в виде

$$y = z_1(x) f_1(x) + z_2(x) f_2(x), \qquad (2.4.3)$$

где $z_1(x)$ и $z_2(x)$ неизвестные функции. Для того, чтобы найти эти функции, надо иметь два уравнения. Одно из них получается из условия, что функция (2.4.3) должна удовлетворять уравнению (2.4.2). Второе уравнение мы можем задать произвольно. Лагранж предложил выбрать это условие так:

$$\overline{y}' = z_1 f_1' + z_1' f_1 + z_2 f_2' + z_2' f_2,$$

$$z_1' f_1 + z_2' f_2 = 0.$$

То есть

$$\overline{y}' = z_1 f_1' + z_2 f_2'.$$

$$\overline{y}'' = z_1' f_1' + z_1 f_1'' + z_2' f_2' + z_2 f_2''.$$

Подставим первую и вторую производные в уравнение (2.4.2):

$$a_0(z_1' f_1' + z_1 f_1'' + z_2' f_2' + z_2 f_2'') + a_1(z_1 f_1' + z_2 f_2') + a_2(z_1 f_1 + z_2 f_2) = b.$$

Группируем члены, содержащие z_1 и z_2:

$$z_1(a_0 f_1'' + a_1 f_1' + a_2 f_1) + z_2(a_0 f_2'' + a_1 f_2' + a_2 f_2) + a_0(z_1' f_1' + z_2' f_2') = b.$$

Первая и вторая скобки обращаются в нуль, так как функции f_1 и f_2 являются решениями уравнения (2.4.1). Таким образом, чтобы найти функции z_1 и z_2, надо решить систему

$$\begin{cases} z_1' f_1 + z_2' f_2 = 0 \\ z_1' f_1' + z_2' f_2' = \dfrac{b}{a_0} \end{cases}.$$

Эта система непротиворечива, так как является системой алгебраических уравнений первой степени относительно z_1' и z_2', причем определителем системы является определитель Вронского, который отличен от нуля, так как функции f_1 и f_2 образуют фундаментальную систему:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решая систему, найдем неизвестные функции z_1' и z_2', а, значит, и сами функции z_1 и z_2:

$$z_1 = \int z_1' dx, \; z_2 = \int z_2' dx.$$

Подставляя z_1 и z_2 в равенство (2.4.3), найдем частное решение уравнения (2.4.2):

$$y = z_1(x) f_1(x) + z_2(x) f_2(x).$$

Пример 2.4.1. [1], [2] Найдите общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, если известно, что фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения составляют функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

Решение.

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1' = -C_2' \operatorname{tg} x \\ C_2' \sin x \operatorname{tg} x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1' = -\operatorname{tg} x \\ C_2' = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 = \ln|\cos x| \\ C_2 = x \end{cases},$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Пример 2.4.2. [2] Найдите решение задачи Коши для уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ с начальными условиями $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Ответ: $y = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x + \sin x \cdot \ln|\sin x| - x \cos x$.

Заметим, что определения и теоремы, сформулированные в двух последних параграфах для линейных уравнений второго порядка, легко обобщить на линейные уравнения произвольного n-го порядка.

2.5 Комплексные числа

Рассмотрим декартов квадрат

$$C = R \times R = \{(a,b) \mid a,b \in R\}.$$

Будем считать, что $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Введем на множестве C операции сложения и умножения следующим образом:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Множество C с заданными операциями сложения и умножения называется множеством комплексных чисел. Множество C является полем. Проверим выполнимость некоторых аксиом.

1) Роль нулевого элемента играет пара $(0,0)$. Действительно, $\forall (a,b)$ $(0,0) + (a,b) = (a,b) + (0,0) = (a,b)$.

2) Роль противоположного элемента для пары (a,b) играет пара $(-a,-b)$. Действительно,

$$\forall(a,b)\in C\ \ \exists(-a,-b)\in C\ \ (a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)=(0,0).$$

3) Роль единичного элемента играет пара $(1,0)$. Действительно, $\forall(a,b)$ $(1,0)(a,b)=(a,b)$.

4) $\forall(a,b)\neq(0,0)\ \ \exists(x,y)\in C\ \ (a,b)(x,y)=(1,0)$. Действительно,

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases},\ \begin{cases} y(a^2+b^2)=-b \\ x(a^2+b^2)=a \end{cases},\ \begin{cases} y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}\in R \\ x=\dfrac{a}{a^2+b^2}\in R \end{cases}.$$

Заметим, что упорядоченную пару (a,b) можно трактовать как точку плоскости с декартовыми координатами (a,b), или как радиус-вектор (a,b), исходящий из начала координат. В этом заключается геометрический смысл комплексного числа.

Алгебраическая форма записи

Введем обозначение: $(0,1)=i$. Легко показать, что $i^2=-1$. Действительно, $i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$. Число i называется мнимой единицей. Числа вида bi, где $b\in R$ называются чисто мнимыми числами. Любое комплексное число (a,b) можно представить в виде:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi.$$

Это алгебраическая форма записи комплексного числа. Укажем основные действия с комплексными числами в алгебраической форме.

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Тригонометрическая форма записи

Модулем комплексного числа называется длина радиуса-вектора, изображающего это число. Аргументом комплексного числа называется угол между положительной полуосью абсцисс и вектором, изображающим это число.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\ 0\le\arg\alpha<2\pi\,,\ -\pi\le\arg\alpha<\pi\,.$$

$$\alpha=a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$\alpha=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$\beta=c+di=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

$$\alpha\beta=r\rho[(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi)i]=$$

$$=r\rho[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)]$$

Если $\beta\ne 0$:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{\rho}\,\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}=\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)}{1}=$$

$$=\frac{r}{\rho}[\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)]$$

$\alpha^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \qquad \arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|} \qquad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta$$

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n \qquad \arg(\alpha^n)=n\arg\alpha$$

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}.$$

Показательная форма записи

$$\alpha=re^{i\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Пример 2.5.1. Найдите корни квадратного уравнения $x^2-8x+41=0$.

Решение.

$$D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 41=-100,$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{-100}}{2}=\frac{8\pm 10i}{2}=4\pm 5i\,.$$

Пример 2.5.2. Найдите все корни $\sqrt[3]{-1}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3},\ k = \overline{0,2}.$$

При $k = 0$ получаем $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, при $k = 1$ получаем -1, при $k = 2$ получаем $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Итак, мы получили корни: $\left\{-1; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

2.6 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Итак, пока остается открытым лишь один вопрос: как найти фундаментальную систему решений для линейного однородного уравнения. Для произвольного линейного однородного уравнения нет общего метода. Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты линейного уравнения постоянны. То есть рассмотрим уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.6.1}$$

где a_0, a_1, $a_2 \in R$, $a_0 \neq 0$.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде $y = e^{rx}$, где r – неизвестное число. Подставим функции $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ в уравнение (2.6.1):

$$(a_0 r^2 + a_1 r + a_2)e^{rx} = 0.$$

Видно, что функция $y = e^{rx}$ будет являться решением уравнения (2.6.1) тогда и только тогда, когда многочлен $a_0 r^2 + a_1 r + a_2$, который называется характеристическим многочленом, будет равен нулю.

При рассмотрении характеристического многочлена могут представиться следующие случаи.

Случай 1.

Характеристический многочлен имеет различные действительные корни $r_1 \neq r_2$. Тогда получаем два частных решения уравнения (2.6.1): $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$. Легко видеть, что они образуют фундаментальную систему решений:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0 .$$

Значит общее решение уравнения (2.6.1) запишется в виде:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} .$$

Случай 2.

Характеристический многочлен имеет равные действительные корни $r_1 = r_2 = r_0$.

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 ,$$

$$D = 0 ,\ r_0 = -\frac{a_1}{2a_0} .$$

Одно частное решение находится сразу: $y_1 = e^{r_0 x}$. Для того, чтобы найти второе решение, можно воспользоваться методом, изложенным в теореме 2.3.7.

$$y = z e^{r_0 x} ,$$

$$y' = z' e^{r_0 x} + z r_0 e^{r_0 x} ,$$

$$y'' = z'' e^{r_0 x} + 2 r_0 z' e^{r_0 x} + z r_0^2 e^{r_0 x} .$$

$$a_0 (z'' e^{r_0 x} + 2 r_0 e^{r_0 x} z' + z r_0^2 e^{r_0 x}) + a_1 (z' e^{r_0 x} + z r_0 e^{r_0 x}) + a_2 z e^{r_0 x} = 0$$

$$a_0 z'' + (2 a_0 r_0 + a_1) z' + (a_0 r_0^2 + a_1 r_0 + a_2) z = 0$$

Коэффициент при z' равен нулю, так как $r_0 = -\frac{a_1}{2a_0}$, а коэффициент при *z* равен нулю, так как r_0 – корень характеристического уравнения. Итак,

$$z'' = 0 ,$$

$$z' = 1,$$

$$z = x,$$

$$y = xe^{r_0 x}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений: $y_1 = e^{r_0 x}$ и $y_2 = xe^{r_0 x}$. Действительно:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_0 x} & xe^{r_0 x} \\ r_0 e^{r_0 x} & xr_0 e^{r_0 x} + e^{r_0 x} \end{vmatrix} = e^{2r_0 x} \neq 0.$$

Итак, общее решение уравнения (2.6.1) запишется в виде:

$$y = C_1 xe^{r_0 x} + C_2 e^{r_0 x}.$$

Случай 3.

Заметим, что корнями характеристического уравнения могут также являться и мнимые числа. Но здесь нет нового случая: все предшествующие рассуждения сохраняют силу. Так как коэффициенты уравнения – вещественные числа, то мнимые корни могут появляться только попарно с сопряженными: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Получаем следующую фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x},\ y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Так как мы изучаем только вещественные функции, то естественно поставить вопрос: нельзя ли подобрать фундаментальную систему так, чтобы обе входящие в нее функции были вещественными.

По формуле Эйлера:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

$$\overline{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \overline{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Обе эти функции являются решениями данного линейного уравнения, так как они являются линейными комбинациями частных решений. Система $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ фундаментальна, так как здесь $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2i}$, $\delta = -\frac{1}{2i}$, а значит

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -\frac{1}{4i} - \frac{1}{4i} = -\frac{1}{2i} \neq 0.$$

$$\overline{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \overline{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Следовательно, если корни характеристического многочлена мнимые числа $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 2.6.1. Найдите общее решение уравнения $y^{//} - 3y^{/} + 2y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$r_{1,2} = \{1;2\}.$$

Запишем общее решение однородного уравнения по формуле для первого случая:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример 2.6.2. [1] Найдите общее решение уравнения $y^{//} - 6y^{/} + 9y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$

$$r_{1,2} = \{3;3\}.$$

Запишем общее решение однородного уравнения по формуле для второго случая:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Пример 2.6.3. [1] Найдите общее решение уравнения $y^{//} - 4y^{/} + 5y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 - 4r + 5 = 0,$$

$$r_{1,2} = \{2 \pm i\}.$$

Запишем общее решение однородного уравнения по формуле для третьего случая:

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

2.7 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{bx} P_m(x)$

Рассмотрим уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{bx} P_m(x), \tag{2.7.1}$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени *m*. Будем искать частное решение этого уравнения в виде $e^{bx} Q(x)$, где $Q(x)$ – произвольный многочлен. Подставим $e^{bx} Q(x)$ в уравнение (2.7.1).

$$y = e^{bx} Q(x),$$

$$y' = b e^{bx} Q(x) + e^{bx} Q'(x),$$

$$y'' = b^2 e^{bx} Q(x) + 2b e^{bx} Q'(x) + e^{bx} Q''(x).$$

$$a_0 (b^2 Q(x) + 2b Q'(x) + Q''(x)) + a_1 (b Q(x) + Q'(x)) + a_2 Q(x) = P_m(x).$$

$$Q(x)(a_0 b^2 + a_1 b + a_2) + Q'(x)(2a_0 b + a_1) + Q''(x) a_0 = P_m(x). \tag{2.7.2}$$

Обозначая характеристический многочлен через $f(r)$ и замечая, что

$$a_0 b^2 + a_1 b + a_2 = f(b),$$

$$2a_0 b + a_1 = f'(b),$$

$$a_0 = \frac{f''(b)}{2},$$

мы можем переписать равенство (2.7.2) в виде

$$Q(x)f(b)+Q'(b)f'(b)+Q''(x)\frac{f''(b)}{2}=P_m(x). \qquad (2.7.3)$$

Итак, для того, чтобы функция $e^{bx}Q(x)$ была частным решением уравнения (2.7.1), необходимо и достаточно, чтобы многочлен $Q(x)$ обращал равенство (2.7.3) в тождество.

Случай 1.

Пусть b – не корень характеристического уравнения. То есть $f(b)\neq 0$. Очевидно, что если в формулу (2.7.3) подставить вместо $Q(x)$ многочлен степени m, то в левой части этой формулы получится многочлен той же степени. Посмотрим, можно ли подобрать коэффициенты $Q(x)$ так, чтобы после его подстановки в левую часть равенства (2.7.3) получился бы в точности многочлен $P_m(x)$. Пусть

$$P_m(x)=A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\ldots+A_1x+A_0,$$

$$Q(x)=B_mx^m+B_{m-1}x^{m-1}+\ldots+B_1x+B_0.$$

Здесь $A_m,\ \ldots,\ A_0$ – заданные числа, $B_m,\ \ldots,\ B_0$ – неизвестные коэффициенты. Подставим функцию $Q(x)$ в равенство (2.7.3).

$$(B_mx^m+B_{m-1}x^{m-1}+\ldots+B_1x+B_0)f(b)+$$

$$+(mB_mx^{m-1}+(m-1)B_{m-1}x^{m-2}+\ldots+B_1)f'(b)+$$

$$+(m(m-1)B_mx^{m-2}+\ldots+2B_2)\frac{f''(b)}{2}=$$

$$=A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\ldots+A_1x+A_0$$

$$\begin{cases} f(b)B_m=A_m \\ f(b)B_{m-1}+mf'(b)B_m=A_{m-1} \\ f(b)B_{m-2}+(m-1)f'(b)B_{m-1}+\dfrac{m(m-1)}{2}f''(b)B_m=A_{m-2} \\ \ldots \end{cases}$$

Эта система позволяет однозначно определить все неизвестные: из первого уравнения находим B_m, это возможно, так как $f(b)\neq 0$; из второго уравнения находим B_{m-1}, что возможно по той же причине, и так далее.

Случай 2.

Пусть b – корень характеристического многочлена кратности 1. То есть $f(b)=0$, $f^{/}(b)\neq 0$. Перепишем равенство (2.7.3):

$$Q^{/}(x)f^{/}(b)+Q^{//}(x)\frac{f^{//}(b)}{2}=P_m(x). \qquad (2.7.4)$$

Видно, что, взяв в качестве $Q(x)$ многочлен степени $m+1$, мы получим в результате подстановки многочлен степени *m*. Таким образом, $Q(x)$ надо искать в виде:

$$Q(x)=B_{m+1}x^{m+1}+B_m x^m+\ldots+B_1 x+B_0.$$

Легко видеть, что B_0 можно взять любым. Поэтому пусть $B_0=0$. Подставляя этот многочлен в равенство (2.7.4), мы можем так же, как и в предыдущем случае, доказать, что система уравнений для определения коэффициентов B_{m+1}, …, B_1 разрешима (пользуясь тем, что $f^{/}(b)\neq 0$). Следовательно, в этом случае надо искать частное решение в виде

$$y=xe^{bx}(B_{m+1}x^m+B_m x^{m-1}+\ldots+B_1).$$

Случай 3.

Пусть b – корень характеристического многочлена кратности 2. То есть $f(b)=0$, $f^{/}(b)=0$, $f^{//}(b)=2a_0\neq 0$. Уравнение (2.7.3) приводится к виду:

$$\frac{f^{//}(b)}{2}Q^{//}(x)=P_m(x),$$

$$a_0 Q^{//}(x)=P_m(x).$$

В качестве $Q(x)$ надо взять многочлен степени $m+2$, коэффициенты которого определяются из предыдущего равенства. При этом свободный член и коэффициент при x могут быть взяты произвольно, так как они не входят в выражение $Q^{//}(x)$. Возьмем эти коэффициенты равными нулю. Таким образом, частное решение надо искать в виде

$$y=(B_{m+2}x^{m+2}+B_{m+1}x^{m+1}+\ldots+B_2x^2)e^{bx},$$

или

$$y=x^2e^{bx}(B_{m+2}x^m+\ldots+B_2).$$

Подведем итог. Итак, если правая часть уравнения (2.7.1) с постоянными коэффициентами имеет вид $e^{bx}P_m(x)$, то:

1) если b – не корень характеристического многочлена, то частное решение следует искать в виде $y=e^{bx}Q_m(x)$;
2) если b – корень кратности 1, то – в виде $y=e^{bx}xQ_m(x)$;
3) если b – корень кратности 2, то – в виде $y=e^{bx}x^2Q_m(x)$.

Заметим, что, если в правой части уравнения (2.7.1) стоит функция Ae^{bx}, $A\in R$, то эту функцию можно рассматривать как $e^{bx}P_m(x)$, где $m=0$. Если же в правой части стоит функция $P_m(x)$, то и эту функцию можно рассматривать как $e^{bx}P_m(x)$, где $b=0$.

Пример 2.7.1. [3] Найдите общее решение уравнения $y''-3y'+2y=10e^{-x}$.

Решение.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение.

$$y''-3y'+2y=0,$$

$$r^2-3r+2=0,$$

$$r_{1,2}=\{1;2\}.$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

2) Учитывая, что $m=0$, а $b=-1$ не является корнем характеристического уравнения, будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y=Ae^{-x}$. Итак,

$$y=Ae^{-x},$$

$$y'=-Ae^{-x},$$

$$y'' = Ae^{-x}.$$

Подставим эти функции в первоначальное уравнение:

$$Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2(Ae^{-x}) = 10e^{-x},$$

$$A + 3A + 2A = 10,$$

$$A = \frac{5}{3}.$$

Значит, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y = \frac{5}{3}e^{-x}$.

3) Найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$$

Пример 2.7.2. [3] Найдите общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{x}(3 - 4x)$.

Решение.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение.

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$r_{1,2} = \{1;2\}.$$

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}.$$

2) Учитывая, что $m = 1$, а $b = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y = (Ax + B)xe^{x}$. Итак,

$$y = (Ax^2 + Bx)e^{x},$$

$$y' = (2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x},$$

$$y'' = 2Ae^{x} + 2(2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x}.$$

Подставим эти функции в первоначальное уравнение и разделим обе части на e^{x}:

$$2A+2(2Ax+B)+(Ax^2+Bx)-3((2Ax+B)+(Ax^2+Bx))+2(Ax^2+Bx)=3-4x$$

$$\begin{cases} A-3A+2A=0 \\ 4A+B-6A-3B+2B=-4, \\ 2A+2B-3B=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}.$$

Значит, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y=e^x x(2x+1)$.

3) Найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^x x(2x+1).$$

Пример 2.7.3. [3] Найдите общее решение уравнения $y^{//}-3y^{/}+2y=2x^3-30$.

Решение.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение.

$$y^{//}-3y^{/}+2y=0,$$

$$r^2-3r+2=0,$$

$$r_{1,2}=\{1;2\}.$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

2) Учитывая, что $m=3$, а $b=0$ не является корнем характеристического уравнения, будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Проведя расчеты, получим $y=x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$.

3) Найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}.$$

2.8 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{\alpha x}\cos\beta x P_m(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x Q_s(x)$

Метод неопределенных коэффициентов можно применять и в этом случае. Пусть для определенности $m \ge s$. Укажем без обоснования следующую схему.

1) Если $\alpha \pm \beta i$ – не корни характеристического уравнения, то следует искать частное решение в виде $y = e^{\alpha x}\cos\beta x L_m(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x K_m(x)$, где $L_m(x)$ и $K_m(x)$ – произвольные многочлены степени *m*.
2) Если $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения, то следует искать частное решение в виде $y = e^{\alpha x} x\cos\beta x L_m(x) + e^{\alpha x} x\sin\beta x K_m(x)$, где $L_m(x)$ и $K_m(x)$ – произвольные многочлены степени *m*.

Пример 2.8.1. [3] Найдите общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\frac{x}{2}$.

Решение.

1) Составим однородное уравнение и найдем его общее решение.

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$r_{1,2} = \{1;2\}.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2) Учитывая, что $m = 0$, а числа $1 \pm \frac{i}{2}$ не являются корнями характеристического уравнения, будем искать частное решение в виде

$$y = Ae^x \cos\frac{x}{2} + Be^x \sin\frac{x}{2}.$$

Итак,

$$\begin{array}{r|c}
2 & y = Ae^x \cos\frac{x}{2} + Be^x \sin\frac{x}{2} \\
-3 & y' = \left(A + \frac{B}{2}\right)e^x \cos\frac{x}{2} + \left(-\frac{A}{2} + B\right)e^x \sin\frac{x}{2} \\
1 & y'' = \left(\frac{3}{4}A + B\right)e^x \cos\frac{x}{2} + \left(-A + \frac{3}{4}B\right)e^x \sin\frac{x}{2}
\end{array}$$

$$\begin{cases} 2A - 3\left(A + \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}A + B\right) = 2 \\ 2B - 3\left(-\frac{A}{2} + B\right) + \left(-A + \frac{3}{4}B\right) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} A = -\frac{8}{5} \\ B = -\frac{16}{5} \end{cases}.$$

Мы нашли частное решение неоднородного уравнения:

$$y = -\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right).$$

3) Укажем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right).$$

Пример 2.8.2. [2] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$.

Ответ: $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x\left(-\frac{2}{5}\sin x + \frac{3}{10}\cos x\right)$.

Пример 2.8.3. [2] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$. Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - \frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$.

2.9 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью более сложного вида

Если правая часть уравнения представляет собой сумму нескольких выражений типа $e^{bx}P_m(x)$, $e^{\alpha x}\cos\beta x P_m(x)$, $e^{\alpha x}\sin\beta x P_m(x)$, то для нахождения частного решения уравнения можно использовать следующую теорему.

Теорема 2.9.1. Если $\overline{y}_1$ – частное решение уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$, а $\overline{y}_2$ – частное решение уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x)$, то $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ – частное решение уравнения

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x). \tag{2.9.1}$$

Доказательство. Подставим сумму $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ в уравнение (2.9.1):

$$a_0\left(\overline{y}_1'' + \overline{y}_2''\right) + a_1\left(\overline{y}_1' + \overline{y}_2'\right) + a_2(\overline{y}_1 + \overline{y}_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(a_0\overline{y}_1'' + a_1\overline{y}_1' + a_2\overline{y}_1\right) + \left(a_0\overline{y}_2'' + a_1\overline{y}_2' + a_2\overline{y}_2\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

Справедливость последнего равенства очевидна. Теорема доказана.

Пример 2.9.1. [3] Найдите общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = x - e^{-2x} + 1$.

Решение.

Приведем краткое решение данной задачи. Сначала найдем общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Затем найдем частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = x + 1$, учитывая, что правая часть имеет вид $e^{bx}P_m(x)$, причем $m = 1$, а $b = 0$ не является корнем характеристического уравнения:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Затем найдем частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$, учитывая, что правая часть также имеет вид $e^{bx}P_m(x)$, причем $m=0$, а $b=-2$ не является корнем характеристического уравнения:

$$y=-\frac{1}{12}e^{-2x}.$$

Значит, частное решение первоначального уравнения имеет вид

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x},$$

а его общее решение –

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}.$$

2.10 Линейные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Теория линейных уравнений с постоянными коэффициентами, изложенная для уравнений второго порядка, переносится почти без изменений на уравнения любого порядка.

Известно, что всякий многочлен *n*-ой степени может быть единственным образом разложен на линейные множители:

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+...+a_1r+a_0=a_n(r-r_1)(r-r_2)...(r-r_{n-1})(r-r_n),$$

где r_1, …, r_n – корни многочлена, которые могут быть как действительными, так и мнимыми. При этом, если какой-нибудь из линейных множителей $r-r_i$ встречается в этом разложении *k* раз, то число r_i называется корнем кратности *k*. Если число $\alpha+\beta i$, где $\beta\neq 0$, является корнем кратности *k* многочлена с действительными коэффициентами, то число $\alpha-\beta i$ также является корнем той же кратности для этого многочлена.

Пусть дано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_ny^{(n)}+...+a_1y'+a_0y=0. \qquad (2.10.1)$$

Многочлен $a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0$ называется характеристическим многочленом уравнения (2.10.1).

Теорема 2.10.1. Каждому действительному корню r_0 кратности 1 характеристического многочлена соответствует одно частное решение уравнения (2.10.1), этим решением является функция $y = e^{r_0 x}$. Каждому действительному корню r_0 кратности $k > 1$ соответствует k частных решений $e^{r_0 x}$, $xe^{r_0 x}$, …, $x^{k-1} e^{r_0 x}$. Каждому мнимому корню $\alpha + \beta i$ кратности 1 и сопряженному с ним корню $\alpha - \beta i$ соответствует пара частных решений $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Каждому мнимому корню $\alpha + \beta i$ кратности $k > 1$ и сопряженному с ним корню $\alpha - \beta i$ соответствует $2k$ частных решений $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $xe^{\alpha x} \cos \beta x$, …, $x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $xe^{\alpha x} \sin \beta x$, …, $x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$. Полученные таким образом n частных решений образуют фундаментальную систему.

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{bx} P_m(x)$. Если b – не корень характеристического уравнения, то частное решение по-прежнему следует искать в виде $y = e^{bx} Q_m(x)$. Если же b – корень характеристического уравнения кратности k, то следует искать частное решение в виде $y = x^k e^{bx} Q_m(x)$.

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{\alpha x} \cos \beta x P_m(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x Q_s(x)$, где $m \geq s$. Если числа $\alpha \pm \beta i$ – не корни характеристического уравнения, то частное решение по-прежнему следует искать в виде $y = e^{\alpha x} \cos \beta x L_m(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x K_m(x)$. Если же $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения кратности k, то следует искать частное решение в виде $y = x^k e^{\alpha x} \cos \beta x L_m(x) + x^k e^{\alpha x} \sin \beta x K_m(x)$.

Пример 2.10.1. [2] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-x} + e^{-x}(x^2 - x)$.

Пример 2.10.2. [2] Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + x^2 e^{2x}$.

2.11 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

При решении многих задач требуется найти функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}. \qquad (2.11.1)$$

Такая система называется нормальной. Проинтегрировать систему – значит найти функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$, удовлетворяющие системе и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_{n0}. \qquad (2.11.2)$$

Интегрирование системы производится следующим образом.

Дифференцируем по x первое уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя $\frac{dy_1}{dx}$, …, $\frac{dy_n}{dx}$ на f_1, …, f_n, получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, ..., y_n).$$

Дифференцируем полученное уравнение и, поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, ..., y_n).$$

После $(n-1)$-го дифференцирования получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, ..., y_n).$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \dots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}. \qquad (2.11.3)$$

Из первых $n-1$ уравнений определим y_2, …, y_n, выразив их через x, y_1, $\frac{dy_1}{dx}$, …, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}) \end{cases}. \qquad (2.11.4)$$

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений (2.11.3), получим уравнение n-го порядка для определения y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \qquad (2.11.5)$$

Решая это уравнение, находим y_1:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, ..., C_n). \qquad (2.11.6)$$

Дифференцируя это выражение $n-1$ раз, найдем $\frac{dy_1}{dx}$, …, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от x, C_1, …, C_n. Подставляя эти функции в уравнения (2.11.4), определяем y_2, …, y_n:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1 ..., C_n) \\ ... \\ y_n = \psi_n(x, C_1 ..., C_n) \end{cases}. \qquad (2.11.7)$$

Для того, чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (2.11.2), остается найти из уравнений (2.11.6) и (2.11.7) соответствующие значения постоянных C_1, …, C_n.

Заметим, что если система (2.11.1) линейна относительно искомых функций, то и уравнение (2.11.5) будет линейным.

Пример 2.11.1. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases}, \; y(0) = 1, \; z(0) = 0.$$

Решение.

$$y'' = y' + z' + 1$$

$$y'' = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$

$$y'' = -3y - 2z + 3x + 1$$

$$\begin{cases} y' = y + z + x \\ y'' = -3y - 2z + 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = y' - y - x \\ y'' = -3y - 2y' + 2y + 2x + 3x + 1 \end{cases}$$

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 5x - 9$$

$$y' = -C_1e^{-x} + C_2e^{-x} - C_2xe^{-x} + 5$$

$$z = -C_1e^{-x} + C_2e^{-x} - C_2xe^{-x} + 5 - C_1e^{-x} - C_2xe^{-x} - 5x + 9 - x$$

$$z = -2C_1e^{-x} + C_2e^{-x}(1-2x) - 6x + 14$$

Итак,

$$\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 5x - 9 \\ z = -2C_1e^{-x} + C_2e^{-x}(1-2x) - 6x + 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 9 \\ 0 = -2C_1 + C_2 + 14 \end{cases}, \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = 6 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9 \\ z = -20e^{-x} + 6e^{-x}(1-2x) - 6x + 14 \end{cases}.$$

Пример 2.11.2. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}.$$

Решение.

$$x'' = y' + z'$$

$$x'' = 2x + z + y$$

$$x''' = 2x' + z' + y'$$

$$x''' = (2y + 2z) + (x + y) + (x + z)$$

$$x''' = 3y + 3z + 2x$$

$$\begin{cases} x' = y + z \\ x'' = 2x + z + y \\ x''' = 3y + 3z + 2x \end{cases}$$

В приведенных рассуждениях мы предполагали, что из первых $n-1$ уравнений системы (2.11.3) можно определить функции y_2, …, y_n. Может случиться, что y_2, …, y_n исключаются не из $n-1$, а из меньшего числа уравнений. Тогда для определения y_1 мы получим уравнение, порядок которого ниже *n*.

$$x^{//} - x^{/} - 2x = 0$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \tag{2.11.8}$$

$$x^{/} = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

$$y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - z \tag{2.11.9}$$

Подставим (2.11.8) и (2.11.9) в третье равенство условия задачи.

$$z^{/} = 3C_1 e^{2t} - z$$

$$z^{/} + z = 3C_1 e^{2t}$$

$$z = C_3 e^{-t} + C_1 e^{2t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \\ z = C_3 e^{-t} + C_1 e^{2t} \end{cases}$$

Пример 2.11.3. Решите систему

$$\begin{cases} x^{/} = x - y + z \\ y^{/} = x + y - z \,. \\ z^{/} = 2x - y \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{cases} .$$

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ

3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

В задачах 1.1-1.12 требуется найти общий интеграл или общее решение, если не задано начальное условие, и частный интеграл или частное решение при наличии начального условия.

Задачи для разбора у доски

1.1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$. Ответ: $x^2 - 1 = C(y^2 + 1)$.

1.2. $xyy' = 1 - x^2$. Ответ: $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$.

1.3. $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$, $y(0) = 1$. Ответ: $y = \dfrac{x + 1}{1 - x}$.

1.4. $y' = 3x - 2y + 5$. Ответ: $4y - 6x - 7 = Ce^{-2x}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.5. $y' \operatorname{tg} x - y = a$. Ответ: $y = C\sin x - a$.

1.6. $xy' + y = y^2$. Ответ: $Cx = \dfrac{y - 1}{y}$.

1.7. $y' + \sqrt{\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$. Ответ: $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C$.

1.8. $y' = 10^{x+y}$. Ответ: $10^x + 10^{-y} = C$.

1.9. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$. Ответ: $C - 2\sin\dfrac{x}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}\right|$.

1.10. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$. Ответ: $\ln y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

1.11. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Ответ: $\cos x = \sqrt{2}\cos y$.

1.12. $y' = \cos(x - y)$. Ответ: $x + \operatorname{ctg}\dfrac{x - y}{2} = C$.

3.2 Однородные уравнения относительно *x*, *y*. Уравнения, сводящиеся к однородным

В задачах 2.1-2.10 требуется найти общий интеграл или общее решение.

Задачи для разбора у доски

2.1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$. Ответ: $Cx^3 = \dfrac{y-2x}{y+x}$.

2.2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. Ответ: $\ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2.3. $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$. Ответ: $C = x^2 + y^2 - xy + x - y$.

Задачи для самостоятельного решения

2.4. $xdy - ydx = ydy$. Ответ: $\ln|y| + \dfrac{x}{y} = C$.

2.5. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. Ответ: $x^2 + y^2 = Cy$.

2.6. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Ответ: $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

2.7. $y^2 + x^2 y' = xyy'$. Ответ: $Cy = e^{\frac{y}{x}}$.

2.8. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$. Ответ: $y = xe^{Cx+1}$.

2.9. $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$. Ответ: $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$.

2.10. $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$. Ответ: $C(y+2) = e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$.

3.3 Линейные уравнения

В задачах 3.1-3.7 требуется найти общий интеграл или общее решение, если не задано начальное условие, и частный интеграл или частное решение при наличии начального условия.

Задачи для разбора у доски

3.1. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$. Ответ: $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$.

3.2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$. Ответ: $x = Cy^3 + \dfrac{y^2}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.3. $y' + y = \cos x$. Ответ: $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

3.4. $y' + ay = e^{mx}$. Ответ: $y = \begin{cases} Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m+a}, & m \neq -a \\ (C+x)e^{-ax}, & m = -a \end{cases}$.

3.5. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$. Ответ: $x = Ce^{2y} + \dfrac{1}{4}(2y^2 + 2y + 1)$.

3.6. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$. Ответ: $x = \dfrac{C}{y} + y\ln y$.

3.7. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$, $y(1) = 0$. Ответ: $y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$.

3.4 Уравнения Бернулли

В задачах 4.1-4.5 требуется найти общий интеграл или общее решение.

Задачи для разбора у доски

4.1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. Ответ: $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.2. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$. Ответ: $y = \dfrac{1}{(x+1)(C + \ln|x+1|)}$.

4.3. $xy' + y = y^2 \ln x$. Ответ: $y(Cx + \ln x + 1) = 1$.

4.4. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2}{\cos^2 x}\sqrt{y}$. Ответ: $\sqrt{y} = \dfrac{C}{x} + \operatorname{tg} x + \dfrac{\ln|\cos x|}{x}$.

4.5. $ydy - \dfrac{ay^2}{x^2}dx = \dfrac{bdx}{x^2}$. Ответ: $y^2 = Ce^{-\frac{2a}{x}} - \dfrac{b}{a}$.

3.5 Уравнения первого порядка смешанных типов

В задачах 5.1-5.5 требуется найти общий интеграл или общее решение, если не задано начальное условие, и частный интеграл или частное решение при наличии начального условия.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. Ответ: $C = \dfrac{x^2+1}{y^2+1}$.

5.2. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$. Ответ: $y + x = Cx(y + 5x)$.

5.3. $y' = \dfrac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$. Ответ: $\ln|C(y-x)| = -\dfrac{6(x-1)}{y-x}$.

5.4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $y = 0 \cdot (x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(x+1)^4$.

5.5. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x$, $y(1) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}$. Ответ: $y^{-1} = 0 \cdot \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} x$.

3.6 Уравнения в полных дифференциалах

В задачах 6.1-6.5 требуется найти общий интеграл.

Задачи для разбора у доски

6.1. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$.

Ответ: $x^4 - x^2 y^2 + y^4 = C$.

6.2. $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$. Ответ: $x + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = C$.

Задачи для самостоятельного решения

6.3. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$. Ответ: $xe^y - y^2 = C$.

6.4. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$. Ответ: $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$.

6.5. $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})ydy = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \dfrac{y^2}{2} = C$.

3.7 Интегрирующий множитель

В задачах 7.1-7.5 требуется найти общий интеграл.

Задачи для разбора у доски

7.1. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$. Ответ: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = C$.

7.2. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$. Ответ: $\dfrac{\ln x}{y} + \dfrac{y^2}{2} = C$.

Задачи для самостоятельного решения

7.3. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$. Ответ: $x - \dfrac{y}{x} = C$.

7.4. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$. Ответ: $(x^2 + y^2)e^x = C$.

7.5. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$.

Ответ: $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$.

3.8 Геометрические и физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задачи для разбора у доски

8.1. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат. Ответ: $y^2 = Cx$.

Задачи для самостоятельного решения

8.2. Найти линию, у которой длина нормали (отрезок ее от точки линии до оси абсцисс) есть постоянная величина a. Ответ: $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

8.3. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 20 с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 мин после остановки мотора; найти также расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

Ответ: 0,467 км/ч; 85,2 м.

3.9 Уравнения, допускающие понижение порядка

В задачах 9.1-9.13 требуется найти общий интеграл или общее решение, если не заданы начальные условия, и частный интеграл или частное решение при наличии начальных условий.

Задачи для разбора у доски

9.1. $y'' = x + \sin x$. Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

9.2. $y'' - 2(\operatorname{ctg} x) y' = \sin^3 x$. Ответ: $y = C_1 x - \dfrac{C_1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C_2$.

9.3. $y''' = (y'')^3$. Ответ: $y = \frac{1}{3}\sqrt{(C_1 - 2x)^3} + C_2 x + C_3$.

9.4. $yy'' = y'^2$. Ответ: $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Задачи для самостоятельного решения

9.5. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. Ответ: $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1 x + C_2$.

9.6. $(y'')^2 = y'$. Ответ: $y = \frac{2}{3}\left(C_1 + \frac{x}{2}\right)^3 + C_2$.

9.7. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$. Ответ: $x = \operatorname{arctg}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2$.

9.8. $yy'' - yy'\ln y = y'^2$. Ответ: $\frac{x + C_2}{2} = C_1 \operatorname{arctg}(C_1 \ln y)$, $C_1 > 0$.

9.9. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Ответ: $y = x^3 + 3x + 1$.

9.10. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y = -\ln|1 - x|$.

9.11. $y''' = \frac{1}{x}$. Ответ: $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

9.12. $y''' = \cos 2x$. Ответ: $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

9.13. $xy^{V} = y^{IV}$. Ответ: $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

3.10 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

В задачах 10.1-10.14 требуется найти общее решение, если не заданы начальные условия, и частное решение при наличии начальных условий.

Задачи для разбора у доски

10.1. $y'' + y' - 2y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

10.2. $y'' - 2y' + y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$.

10.3. $y'' + 6y' + 13y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x$.

10.4. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

Ответ: $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$.

10.5. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.

10.6. $64y^{VIII} + 48y^{VI} + 12y^{IV} + y'' = 0$.

Ответ:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\frac{x}{2} + C_4 \sin\frac{x}{2} + C_5 x\cos\frac{x}{2} + C_6 x\sin\frac{x}{2} + C_7 x^2\cos\frac{x}{2} + C_8 x^2 \sin\frac{x}{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

10.7. $y'' - 9y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$.

10.8. $y'' - 4y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{4x}$.

10.9. $y'' + y = 0$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

10.10. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{x}\cos\frac{x}{2} + C_2 e^{x}\sin\frac{x}{2}$.

10.11. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$.

Ответ: $y = 3e^{-2x}\sin 5x$.

10.12. $y''' + 9y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$.

10.13. $y^{IV} = 16y$. Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

10.14. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 x^2 e^{x}$.

3.11 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{bx}P_m(x)$

В задачах 11.1-11.5 требуется найти общее решение.

Задачи для разбора у доски

11.1. $y'' - 5y' + 6y = x^2 e^{x}$. Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)$.

11.2. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(2x - 1)$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{3x} x(x-3)$.

11.3. $y^{//} + y = x^3 - 2x$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^3 - 8x$.

Задачи для самостоятельного решения

11.4. $2y^{//} + 5y^{/} = 5x^2 - 2x - 1$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$.

11.5. $2y^{//} + 5y^{/} = e^x$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{7}e^x$.

3.12 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами с особой правой частью вида $e^{\alpha x} \cos \beta x P_m(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x Q_m(x)$

В задачах 12.1-12.5 требуется найти общее решение.

Задачи для разбора у доски

12.1. $y^{//} - 5y^{/} + 6y = 20x \cos x$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(2x + \frac{4}{5}\right)\cos x - (2x+2)\sin x$.

12.2. $y^{//} - 4y^{/} + 5y = 7e^{2x} \sin x$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x - \frac{7}{2} x e^{2x} \cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

12.3. $y^{//} - 7y^{/} + 6y = \sin x$.

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$.

12.4. $2y^{//} + 5y^{/} = 29 \cos x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + 5\sin x - 2\cos x$.

12.5. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin\frac{4}{5}x$.

Ответ: $y = C_1 e^{\frac{3}{5}x} \cos\frac{4}{5}x + C_2 e^{\frac{3}{5}x} \sin\frac{4}{5}x - \frac{1}{8} e^{\frac{3}{5}x} x\cos\frac{4}{5}x$.

3.13 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью более сложного вида

В задачах 13.1-13.4 требуется найти общее решение.

Задача для разбора у доски

13.1. $y'' + 4y = \sin 2x + 5e^{3x}$.

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x\cos 2x + \frac{5}{13} e^{3x}$.

Задачи для самостоятельного решения

13.2. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)$.

13.3. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh} x$.

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{x}$.

13.4. $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x\cos x - e^{-x}$.

3.14. Метод вариации произвольных постоянных

В задачах 14.1-14.4 требуется найти общее решение.

Задача для разбора у доски

14.1. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$.

Задачи для самостоятельного решения

14.2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Ответ: $y = e^x (C_1 + C_2 x + x\,\mathrm{arctg}\, x - \ln\sqrt{x^2+1})$.

14.3. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x + \dfrac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + \dfrac{e^x}{2}\arcsin e^x + \dfrac{1}{2}e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

14.4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Ответ: $y = e^x (C_1 + C_2 x) + xe^x \ln|x|$.

3.15. Уравнения высших порядков смешанных типов

В задачах 15.1-15.7 требуется найти общее решение, если не заданы начальные условия, и частное решение при наличии начальных условий.

Задачи для самостоятельного решения

15.1. $(1+\sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.

Ответ: $y = C_1\left(\dfrac{x^2}{2} - \sin x\right) + C_2 x + C_3$.

15.2. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Ответ: $y = \mathrm{arctg}\, 5x$.

15.3. $y''' - y'' = 6x + 5$. Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^3 - \dfrac{11}{2}x^2$.

15.4. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + xe^x$.

15.5. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + e^x(0{,}9\sin x - 0{,}3\cos x)$.

15.6. $y'' + 5y' = 50\,\mathrm{sh}\,5x$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 5xe^{-5x} + \frac{1}{2}e^{5x}$.

15.7. $y'' + y = 2\,\mathrm{ctg}\,x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Ответ: $y = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x + 2\sin x \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$.

3.16 Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В задачах 16.1-16.3 требуется найти решение системы уравнений.

Задача для разбора у доски

16.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t \\ y = e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t] \end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

16.2. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{cases}$.

16.3. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + e^{t} + e^{-t} \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \dfrac{t}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + \dfrac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) + \dfrac{1}{2}t(e^{t} + e^{-t}) \end{cases}$.

799. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5).$

801. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i).$

803. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i).$

805. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1).$

786. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$