Функциональные последовательности и ряды

Сходимость и равномерная сходимость функциональной последовательности

Определение. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, где каждая функция $f_n(x)$ определена на некотором множестве E. Такая последовательность называется **функциональной последовательностью**.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon, x_0)$, такой, что неравенство

$$\left| f(x_0) - f_n(x_0) \right| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$.

Значение $f(x_0)$ называется в этом случае пределом последовательности $\{f_n(x)\}$ в точке $x = x_0$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \quad (1)$$

Совокупность всех x при которых выполняется равенство (1) называется **областью сходимости** функциональной последовательности. Таким образом, пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Скажем теперь, что последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ на множестве E, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой точки x из рассматриваемого множества существует номер $N = N(\varepsilon, x)$, такой, что неравенство

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$.

При выбранном значении $\varepsilon > 0$ каждой точке множества E соответствует свой номер $N(\varepsilon, x)$ и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам множества E, будет бесчисленное множество. Если можно выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек множества E, т.е. будет общим для всех точек.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на множестве E (обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$ для всех точек множества E.

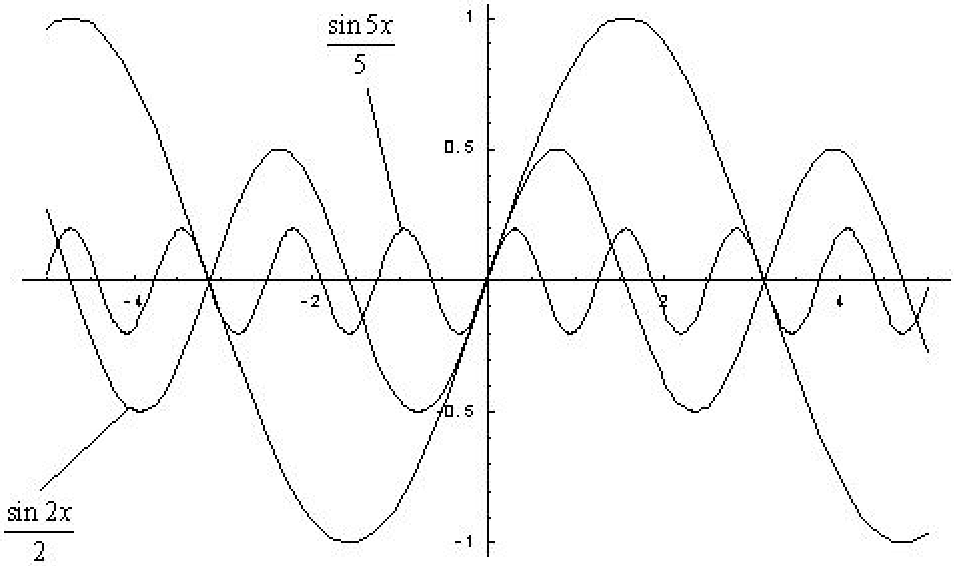
Пример. Рассмотрим последовательность $\dfrac{\sin x}{1}, \dfrac{\sin 2x}{2}, \ldots, \dfrac{\sin nx}{n}, \ldots$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x) = 0$, т.к.

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

В самом деле $\left| \dfrac{\sin nx}{n} \right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} \right]$

Следовательно, посдедовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Построим графики этой последовательности:



Как видно, при увеличении числа n график последовательности приближается к оси x .

Пример неравномерно сходящийся последовательности будет дан позже.

Упражнения. Доказать, что последовательность сходится равномерно на множестве E, и найти её предельную функцию

1) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}, \quad E = [-1,1]$

2) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}, \quad E = R$

3) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(n^2 x\right)}{\sqrt[3]{n+x}}, \quad E = [0, \infty)$

4) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}, \quad E = [1, \infty)$

Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности. Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определённых на множестве E, сходилась равномерно на этом множестве к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0 \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \sup\limits_{x\in E} \left| f_n(x) - f(x) \right|$. Это числовая последовательность. Если $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве E, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon\ \forall x \in E$$

Так как, последнее неравенство выполнено для любых x, то и $\sigma_n < \varepsilon$

Обратно, если $\sigma_n < \varepsilon$, то используя неравенство $\left| f_n(x) - f(x) \right| \le \sigma_n$ получим, что $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon\ \forall x \in E$ откуда следует, что $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве E. **Теорема доказана**

Пример. Доказать, что последовательность сходится равномерно на множестве E, и найти её предельную функцию

1) $f_n(x) = \dfrac{2n^2 x}{1 + n^\alpha x^2}, \quad \alpha > 4, \quad E = R$

2) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad E = [0,1]$

3) $f_n(x)=nx^2e^{-nx}, \quad E=[2,\infty)$

Решение. 1) Если $x=0$, то $f_n(0)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. Если $x\neq 0$, то $\left|f_n(x)\right|\le \dfrac{2}{|x|n^{\alpha-2}}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n(x)\right|=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|n^{\alpha-2}}=0 \quad т.к.\ \alpha>4 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\ при\ \alpha>4.$$

Следовательно, $f(x)=0$ – предельная функция последовательности $\{f_n(x)\}$. Далее, при $x\neq 0$ справедливо неравенство $1+n^{\alpha}x^2\ge 2n^{\alpha/2}|x|$, причём равенство имеет место только в случае, когда $n^{\alpha}x^2=1$, т.е. при $|x|=n^{-\alpha/2}$ (проверяется путём непосредственного возведения в квадрат). Поэтому

$$\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup_{x\in E}\left|\frac{2n^2x}{1+n^{\alpha}x^2}\right|\le\sup_{x\in E}\frac{2n^2|x|}{2n^{\alpha/2}|x|}=\frac{1}{n^{\alpha/2-2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0, \quad т.к.\ \alpha>4$$

Следовательно, $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на E.

Указания к примерам 2) и 3) Для оценки $\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|$ можно с помощью производной найти точки максимума функций $\{f_n(x)\}$ на множестве E

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того, чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась к функции $f(x)$ на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N\ и\ \forall p\in\mathbb{N}\Rightarrow\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon\ \forall x\in E \qquad (2)$$

Доказательство (Необходимость). Пусть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на E. Тогда по определению равномерной сходимости

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall k>N(\varepsilon)\Rightarrow\left|f_k(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall x\in E$$

В частности, последнее неравенство справедливо при $k=n$, если $n>N(\varepsilon)$ и при $k=n+p$ для $p\in\mathbb{N}$, т.е.

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ и }\ \left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Но тогда

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|f_{n+p}(x)-f(x)-\left(f_n(x)-f(x)\right)\right|\le$$
$$\le\left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|+\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Тем самым необходимость доказана

Достаточность. Зафиксируем произвольную точку $x=x_0$, и пусть $\{f_n(x_0)\}$ удовлетворяет условию Коши. Но $\{f_n(x_0)\}$ - числовая последовательность и в силу Критерия Коши для числовой последовательности она имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

Так как предел существует для каждого $x_0\in E$, то на множестве E определена функция (скажем, $f(x)$), которая является предельной для последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E. Запишем теперь условие Коши в виде

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N\ и\ \forall p\in N\Rightarrow\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall x\in E$$

Переходя теперь к пределу в последнем неравенстве при $p \to \infty$ и учитывая, что $\exists \lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ получим

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x \in E$$

а это и означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. **Теорема доказана**

<u>Следствие.</u> *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *не является равномерно сходящейся на множестве* E *если не выполнены условия Коши, т.е.*

$$\exists \varepsilon_0 : \forall N \ \exists n > N, \exists p \in \mathbb{N} \ \text{и} \ \exists x_k \in E: \ \left| f_{n+p}(x_k) - f_n(x_k) \right| > \varepsilon_0 \qquad (3)$$

Фактически это означает, что для того, чтобы доказать, что функциональная последовательность не является равномерно сходящейся нужно предъявить последовательность точек $\{x_n\}$, которая содержится в множестве E и для которой модуль разности

$$\left| f_{n+p}(x_n) - f_n(x_n) \right|$$

не стремится к нулю при $n \to \infty$

<u>Пример.</u> Показать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$ не является равномерно сходящейся на множестве $E = (0,1)$

<u>Решение.</u> Для любого натурального N возьмём $n = p = N$ и $x_n = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\left| f_{n+p}(x_n) - f_n(x_n) \right| = \left| f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) - f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \ln 1 \right| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$$

Полученная разность не стремится к нулю, т.е. выполняется условие (3), следовательно, последовательность $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$ не является равномерно сходящейся на множестве $E = (0,1)$. Между тем

$$f_n(x) = \frac{\ln nx}{\sqrt{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

<u>Замечание 1.</u> Этот пример показывает, что из сходимости $\{f_n(x)\}$ во всех точках множества E не следует равномерная сходимость. Поэтому, если существует предельная функция $f(x)$, а условия в определении равномерной сходимости не выполняются, то говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится к функции** $f(x)$ **неравномерно.** Таким образом, можно сказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ неравномерно, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на множестве E и при этом

$$\exists \varepsilon_0 : \forall N \ \exists n > N \ \text{и} \ \exists x_k \in E: \ \left| f_n(x_k) - f(x_k) \right| > \varepsilon_0 \qquad (4)$$

<u>Замечание 2.</u> Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, неравномерно сходящаяся на множестве E, может равномерно сходится на некотором подмножестве множества E.

<u>Упражнение.</u> Показать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$ сходится равномерно на множестве $E = [a,b], \quad 0 < a < b < 1$

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad E_1 = [0,1], \quad E_2 = [0,q] \quad (0 < q < 1)$

Решение. Предельной функцией является $f(x)=0$. Для любого натурального N возьмём $n=N$ и $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, тогда $x_n\in E_1$ для любого натурального n и при этом

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\varepsilon_0$$

Таким образом, выполнено условие (4). Следовательно, последовательность сходится неравномерно. Интересно, что на множестве E_2 указанная функциональная последовательность будет сходиться равномерно. В самом деле, максимум разности $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|$ находится из уравнения

$$f_n'(x)=\left(x^n-x^{2n}\right)'=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=0,$$

которое имеет следующее решение

$$x_n^{(1)}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}},\quad x_n^{(2)}=0.$$

Последовательность $x_n^{(1)}$, соответствующая максимуму, стремится к 1, следовательно, найдётся номер N при котором $x_N>q$. Таким образом, все члены этой последовательности, начиная с номера N, не принадлежат множеству E_2. Поэтому максимум будет в точке q

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_2}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}q^n\left|1-q^n\right|=0$$

Следовательно, последовательность $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ сходится равномерно на множестве $E_2=[0,q]\quad(0<q<1)$

Упражнения. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функции

1) $f_n(x)=n\sin\frac{1}{nx},\quad E=(0,1]$. **Указание:** Предельная функция $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=\frac{1}{n}$

2) $f_n(x)=n^2x^2e^{-nx},\quad E=(0,2)$ **Указание:** Предельная функция $f(x)=0$. С помощью производной оценить $\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|$

*Сходимость в среднеквадратичном**

Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$. Будем предполагать, что функции $f_n(x)$ и некоторая функция $f(x)$ являются интегрируемыми на $[a,b]$. Тогда следующая функция

$$\left[f_n(x)-f(x)\right]^2=f_n^2(x)-2f_n(x)f(x)+f^2(x)$$

также будет интегрируемой на $[a,b]$.

Определение. Будем говорить, что функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится в среднеквадратичном** к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f_n(x)-f(x)\right]^2dx=0$$

Замечание. Из данного определения следует, что если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднеквадратичном к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то она сходится в среднеквадратичном к функции $f(x)$ на любом отрезке целиком лежащем внутри $[a,b]$.

Установим теперь взаимосвязь между сходимостью, равномерной сходимостью и сходимостью в среднеквадратичном.

Теорема. *Если функциональная последовательность $\left\{ f_n\left(x\right)\right\}$ сходится равномерно к функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a, b\right]$, то она сходится в среднеквадратичном к $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a, b\right]$.*

Доказательство. Из условия равномерной сходимости следует, что для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой, что $\forall n > N$ имеет место неравенство

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)}}$$

Тогда

$$\int_a^b\left[f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right]^2dx<\int_a^b\frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)}dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Откуда следует сходимость в среднеквадратичном.

Однако, нетрудно показать, что *сходимость в среднеквадратичном на отрезке не влечет за собой не только равномерной сходимости, но и даже сходимости хотя бы в одной точке отрезка*. В самом деле, рассмотрим последовательность отрезков:

$$I_1=\left[0,1\right],\quad I_2=\left[0,\frac{1}{2}\right],\quad I_3=\left[\frac{1}{2},1\right],$$
$$I_4=\left[0,\frac{1}{4}\right],\quad I_5=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\quad I_6=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\quad I_7=\left[\frac{3}{4},1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{2^n}=\left[0,\frac{1}{2^n}\right],\quad I_{2^n+1}=\left[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}\right],\ldots,I_{2^{n+1}-1}=\left[1-\frac{1}{2^n},1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Определим теперь n - й член функциональной последовательности так:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\in I_n\\ 0, & x\notin I_n\end{cases}$$

Рассмотрим также функцию $f\left(x\right)\equiv 0$. Тогда

$$\int_a^b\left[f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right]^2dx<\int_{I_n}dx=0$$

Следовательно, функциональная последовательность $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ сходится в среднеквадратичном к функции $f\left(x\right)\equiv 0$ на отрезке $\left[0,1\right]$. При этом ясно, что ни в какой точке x_0 отрезка $\left[0,1\right]$ сходимости последовательность $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ к нулю нет, так как, при любом сколь угодно большом n найдётся отрезок I_n на котором $f_n\left(x\right)=1$.

Покажем также, что *из сходимости на отрезке не следует сходимость в среднеквадратичном на этом отрезке*. В самом деле, рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{n}\sin nx, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{n},\\ 0, & \dfrac{\pi}{n}\le x\le\pi\end{cases}$$

Очевидно, что $\forall x\in\left[a,b\right]$ имеем $f_n\left(x\right)\to f\left(x\right)\equiv 0\quad\left(n\to\infty\right)$, то есть на отрезке $\left[0,\pi\right]$ имеет место поточечная сходимость. Но при этом

$$\int_0^\pi\left[f_n\left(x\right)-0\right]^2dx=\int_0^\pi n\sin^2 nx\,dx=n\int_0^\pi\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

Сходимости в среднеквадратичном нет.
Итак, с учетом выводов предыдущих параграфов, имеем следующие утверждения:
1) *из равномерной сходимости на отрезке следует обычная сходимость.*
2) *из равномерной сходимости на отрезке следует сходимость в среднем.*
Более, ничего утверждать нельзя.

*Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами**

В середине XIX века представление о функции как аналитическом выражении, казалось, полностью изжило себя. А формирующийся на базе интегрального и дифференциального исчисления анализ занимался произвольными функциями, которые не всегда могут быть представлены при помощи аналитического выражения. По этому поводу Вейерштрассом была написана работа «Об аналитическом представлении так называемых произвольных функций», в которой было показано, что произвольная непрерывная функция есть предел многочленов. В дальнейшем выяснилось, что и самые «патологические» функции, например, функция Дирихле, допускают такого рода представления, но лишь с большим числом предельных переходов.

Теорема Вейерштрасса (о приближении непрерывных функций многочленами). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ равномерно сходящаяся к $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер N, зависящий от ε, такой что $\forall n > N$ будет справедливо неравенство*

$$\left|P_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b].$$

т.е. любую непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию можно равномерно приблизить многочленом с любой степенью точности.

Доказательство. (без доказательства).

Сходимость функционального ряда

Определение. Ряд типа

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

где $u_n(x)$ – некоторые функции определённые на множестве E называется **функциональным рядом.**

Определение. **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, ...$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке $(x = x_0)$, если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Упражнение. Дать определение сходящегося функционального ряда на языке $\varepsilon - \delta$

Определение. Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на множестве E, если последовательность частных сумм этого ряда сходится равномерно $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E

Упражнение. Дать определение равномерно сходящегося ряда на языке $\varepsilon - \delta$.

Замечание 1. Следует отметить, что сходимость ряда во всех точках некоторого интервала, вовсе не означает равномерную сходимость. Рассмотрим пример. Пусть на множестве $E = (0, 1]$ задан ряд члены которого определяются следующим образом

$$u_1(x) = \frac{1}{1+x} - 1,$$
$$u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n-1)x}, \quad 0 < x \le 1$$

Тогда

$$S_n(x) = -1 + \frac{1}{1+nx}$$

Здесь $S_n(x)$ – есть непрерывная функция на множестве $(0,1]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = -1$

Тогда, для последовательности точек $x_n = 1/n$

$$\left|S_n(x_n) - S(x_n)\right| = \left|-1 + \frac{1}{1+nx_n} + 1\right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Тем самым не выполняется критерий равномерной сходимости. Следовательно, нет равномерной сходимости на множестве $(0,1]$.

Если в качестве множества взять отрезок $[0,1]$ то сумма ряда будет ещё и разрывной, так как

$$S(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Такие ряды принято называть **неравномерно сходящимися**.

Упражнение. Дать определение неравномерно сходящегося ряда на языке $\varepsilon - \delta$

Замечание 2. Сходимость может приобрести или утратить равномерность после умножения всех членов ряда на множитель независящий от n. Так если в предыдущем примере домножить $u_n(x)$ на x, получим

$$u_1(x) = \frac{x}{1+x} - x,$$
$$u_n(x) = \frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}, \quad 0 \le x \le 1$$

$$S_n(x) = -x + \frac{x}{1+nx}$$

Очевидно, что $S(x) = -x \quad \forall x \in [0,1]$ и кроме того

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad 0 \le x \le 1$$

Следовательно, ряд равномерно сходится к $-x$. При этом, сумма ряда получилась непрерывной функцией.

Замечание 3. Ряд может приобрести равномерную сходимость, если изменить множество E. Так например, ряд в замечании 1 будет сходиться равномерно на множестве $[a, +\infty)$, $a > 0$.

Приведём здесь ещё несколько примеров неравномерно сходящихся рядов.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ **.**

Ряд не сходится равномерно ни в каком интервале с концом $x=0$. Последнее можно установить и непосредственно: если $x=1/n$. Во-первых

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|=|x|\left|\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right|=\frac{|x|e^{-nx}}{1-e^{-x}}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|S\left(\frac{1}{n}\right)-S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1-e^{-1/n}}e^{-1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/n}e^{-1}\right|\to e^{-1}$$

Так, что верхняя грань разности $\left|S(x)-S_n(x)\right|$ не является малой вблизи значения $x=0$.

Сумма ряда будет также разрывной функцией так как $S_n(0)=0, \quad S(0)=0$

$$S_n(x)=x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}, \quad S(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}, \quad x>0$$

В этом случае с помощью эквивалентностей или правила Лопиталя можно установить, что

$$\lim_{x\to 0} S(x)=1$$

Следовательно, в точке $x=0$ предельная функция терпит разрыв.

Упражнения. Доказать неравномерную сходимость следующих рядов

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x), \quad 0\le x\le 1$

2) ряд у которого частичная сумма задаётся выражением $S_n(x)=nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$

Критерии равномерной сходимости функционального ряда

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

Обозначим через $r_N(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)$ остаток ряда (1). Имеет место следующая теорема

Теорема (необходимое и достаточное условие сходимости функционального ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *на множестве* E *необходимо и достаточно чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\left|r_n(x)\right|=0 \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow \left|r_n(x)\right|<\varepsilon\ \forall x\in E \qquad (1)$$

Доказательство следует из теоремы о необходимом и достаточном условии сходимости функциональной последовательности.

Следствие. (Достаточное условие неравномерной сходимости). *Пусть ряд* (1) *сходится и при этом*

$$\exists \varepsilon_0 : \forall N\ \ \exists n>N \text{ и } \exists x_k\in E: \ \left|r_n(x_k)\right|>\varepsilon_0 \qquad (2)$$

Тогда ряд (1) *сходится неравномерно*

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость следующие ряды

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \quad E_1=[-q,q], |q|<1, \quad E_2=(-1,1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\quad E=[0,+\infty)$

Решение. 1) Прежде всего $\forall x\in(-1,1)$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ следовательно, на множествах E_1 и E_2 ряд сходится. Исследуем теперь на равномерную сходимость. Для этого оценим остаток ряда сначала на множестве E_1

$$\left|r_{n-1}(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}x^k\right|=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|\le\left|\frac{q^n}{1-q}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ n>\log_q(1-q)\varepsilon\ \Rightarrow\ N=\left[\log_q(1-q)\varepsilon\right]$$

Таким образом, на множестве E_1 ряд сходится равномерно

На множестве E_2

$$\left|r_n(x)\right|=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=\left\{x=1-\frac{1}{n}\right\}=\left|\frac{(1-1/n)^n}{1-1+1/n}\right|=ne\to\infty\quad(n\to\infty)$$

Следовательно, на множестве E_2 ряд сходится неравномерно

2) $\left|r_{n-1}(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+x}}\right|\le\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\ \Rightarrow\ n>\frac{1}{\varepsilon^2}\ \Rightarrow\ N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$

Следовательно, ряд сходится равномерно.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* $N(\varepsilon)$, *что при любом* $n>N$ *и* $\forall p\in\mathbb{N}$ *неравенство*

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon\qquad(3)$$

выполнялось бы для всех x на множестве E.

Следствие. (Необходимый признак сходимости ряда). *Положим в критерий Коши* $p=1$. *Тогда получаем:* $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x\in X\ \to\ \left|a_{n+1}(x)\right|<\varepsilon$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)=0$.

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Пусть: 1) *общие члены функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *удовлетворяют неравенству* $\left|u_n(x)\right|\le b_n\ \ \forall x\in[a,b]$,

2) *числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *сходится*

Тогда функциональный ряд сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке $[a,b]$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Доказательство. Достаточно проверить справедливость критерия Коши, т.е. доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X\quad\left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$.

Но последнее неравенство следует из того, что

$$\left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|\le\left|u_{n+1}(x)\right|+\ldots+\left|u_{n+p}(x)\right|\le b_{n+1}+\ldots+b_{n+p},$$

а для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется критерий Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon .$$

Теорема доказана

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 3 > 1$ сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке $[-1, 1]$ выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ расходится.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ равномерно и абсолютно сходится на всей числовой прямой, т.к. для всех x $\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$, а $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится.

Рассмотрим в заключении ещё два признака равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема. (Признак равномерной сходимости Дирихле)

1) *Пусть, последовательность* $\{B_n(x)\}$, *где* $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ *равномерно ограничена на множестве* E, *т.е.*

$\exists M > 0 : \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \to |B_n(x)| \le M$

2) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна на множестве* E *и равномерно стремится к нулю, т.е.*

$$\forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \to a_{n+1}(x) \le a_n(x) \ \text{и} \ a_n(x) \rightrightarrows 0 \ \text{на} \ E$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E.

Доказательство.

Из условия 2) имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in X \ \to \ |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Воспользуемся следующей оценкой полученной при доказательстве признака Дирихле для числовых рядов, а именно, $\forall n > N(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \le 2M\left(|a_{n+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|\right) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon$$

Поэтому, в силу критерия Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E. **Теорема доказана.**

Теорема. (Признак равномерной сходимости Абеля)

1) *Пусть, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E

2) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна на множестве* E *и равномерно ограничена, т.е.*

$$\forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{выполняется} \ a_{n+1}(x) \le a_n(x) \ \text{и} \ \exists M > 0 : \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \to |a_n(x)| \le M$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E

<u>Доказательство.</u> Обозначим

$$B_n^p(x) = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right|$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ удовлетворяет условию Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \to \ |a_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

С помощью преобразования Абеля получим

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x) b_{n+j}(x)$$

Так как

$$b_{n+j}(x) = B_n^j(x) - B_n^{j-1}(x), \ \text{где} \ j = \overline{1, p}, \ B_n^0(x) = 0,$$

то

$$\sigma = \sum_{j=1}^{p-1} \left[a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x) \right] B_n^j(x) + a_{n+p}(x) B_n^p(x)$$

Тогда

$$|\sigma| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^{p-1} \left(a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x) \right) + \frac{\varepsilon}{3M} |a_{n+p}(x)| = \frac{\varepsilon}{3M} \left(a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x) + |a_{n+p}(x)| \right) < \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ на множестве $E = [q, 2\pi - q], \quad 0 < q < 2\pi - q$

<u>Решение.</u> При $\alpha > 1$ равномерная сходимость устанавливается с помощью признака Вейерштрасса. Если $0 \le \alpha < 1$, последовательность $\{a_n\}$ с общим членом $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ монотонно стремится к нулю, и кроме того при $x \ne 2\pi m, \quad m \in Z$

$$|B_n(x)| \le \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \le \frac{1}{\left| \sin \frac{q}{2} \right|}$$

Следовательно, по теореме Дирихле, ряд сходится равномерно на множестве E при $0 \le \alpha < 1$ и окончательно можно сказать, что он сходится на E равномерно при $\alpha > 1$.

Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей

Теорема. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. Пусть $\forall n \ f_n \in C(E)$. Тогда $f \in C(X)$.

Доказательство. Требуется доказать, что $\forall x_0 \in E$ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Ввиду равномерной сходимости $\exists N : \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

В частности, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. По условию, при любом n функция $f_n(x)$ – непрерывная.

Значит, $\exists \delta > 0 \ \forall x : |x - x_0| < \delta \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.

При выбранных n и δ имеем:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| +$$
$$+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Сумма равномерно сходящегося ряда, члены которого являются непрерывными функциями, есть непрерывная функция.

Доказательство. Применим предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда.

Теорема. (почленное интегрирование ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к своей сумме $S(x)$ на отрезке $[a,b]$ и все $u_n(x) \in C[a,b]$. Тогда $\forall x \in [a,b]$

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt.$$

Доказательство. Обозначим при произвольном N,

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x), \ r_N(x) = S(x) - S_N(x)$$

Тогда $S_N(x)$ – непрерывная функция и, т.к. по предыдущей теореме $S(x)$ – непрерывная функция, $r_N(x)$ – также непрерывная функция. Тогда

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \int_a^x S(t)\, dt = \int_a^x (S_N(t) + r_N(t))\, dt = \int_a^x S_N(t)\, dt + \int_a^x r_N(t)\, dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{N} u_n(t) dt +$$
$$+ \int_a^x r_N(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \int_a^x u_n(t)\, dt + \int_a^x r_N(t)\, dt.$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\int_a^x r_N(t)\, dt \to 0$ при $N \to \infty$,

Т.к., по определению, $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^x u_n(t)\, d = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt$.

Но $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \ \forall N > N_0 \ \ \forall t \in [a,b] \ |r_N(t)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому при $N > N_0$

$$\left| \int_a^x r_N(t)\, dt \right| < \int_a^x |r_N(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x - a) \le \varepsilon$$

и требуемое утверждение доказано.

Замечание. Для функциональных последовательностей эта теорема формулируется следующим образом: Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. Пусть $f_n(x) \in C[a,b]$. Тогда $\forall x \in [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt .$$

Теорема. (о почленном дифференцировании ряда). Пусть:

1. $\forall n \;\; u_n(x) \in C^1[a,b],$;
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a,b]$ (и пусть его сумма обозначена $S(x)$);
3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$.

Тогда $\forall x \in [a,b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = S'(x).$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(x)$ – сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Тогда $\varphi(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция. Поэтому $\forall x \in [a,b]$ существует ее интеграл от a до x и он, по предыдущей теореме, равен

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(a)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a).$$

Значит, $S'(x) = \varphi(x)$ или $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Замечание. Соответствующая теорема для последовательностей может быть сформулирована так: Пусть

1) $f(x), f_n(x) \in C[a,b]$

2) $f_n(x) \to f(x), x \in [a,b], \; n \to \infty$

3) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x), \; x \in [a,b], n \to \infty$.

Тогда $\varphi(x) = f'(x)$, или $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

Степенные ряды.

Важный частный случай функциональных рядов представляют собой **степенные ряды**, т.е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

или, в более общем случае,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (2)$$

Поскольку при замене $z - z_0 = x$ ряд (2) переходит в ряд (1), достаточно рассмотреть ряд (1).

<u>Теорема 1.</u> (Теорема Абеля) 1) *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится в точке* $x = q$, *то он сходится абсолютно для любого значения* x *такого, что* $|x| < |q|$.

2) *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *расходится в точке* $x = q$, *то он расходится для любого значения* x *такого, что* $|x| > |q|$

<u>Доказательство</u>. Докажем первую часть. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ – сходится, $\lim_{n\to\infty} a_n q^n = 0$.

Тогда $|a_n x^n| = |a_n q^n| \left|\frac{x^n}{q^n}\right| \le C\left|\frac{x}{q}\right|^n$, где $C = \max\left\{|a_0|, |a_1 q|, |a_2 q^2|, ..., |a_n q^n|, 1\right\}$.

Так как $\left|\frac{x}{q}\right| < 1$, прогрессия $C\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{q}\right|^n$ сходится.

Значит, по первой теореме о сравнении, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n q^n|$, т.е. исходный ряд абсолютно сходится.

Что касается второй части теоремы, то расходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x| > |q|$ тоже устанавливается с помощью первой теоремы сравнения. **Теорема доказана.**

Эта теорема позволяет выяснить структуру множества, на котором сходится степенной ряд. Отметим сразу же, что множество всех значений x, на которых степенной ряд (1) сходится, называется **областью сходимости** степенного ряда (1)

Во-первых, очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $x = 0$. Кроме того, есть ряды, которые сходятся <u>только</u> в этой точке, например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Если же ряд сходится в точках, отличных от $x = 0$, то возможны два случая.

В первом из них область сходимости не ограничена. Тогда, ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Во втором случае область сходимости ограничена. Обозначим через R точную верхнюю грань множества $|x| < |q|$. Число R называется **радиусом сходимости** ряда. Из определения R следует, что:

1. Если $|x| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится;
2. Если $|x| > R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится.

В случае, когда ряд сходится на всей числовой прямой $\Re$, полагают $R = \infty$.

В точках $x = \pm R$ общего утверждения о сходимости сделать нельзя (т.е. бывают ряды, сходящиеся в обеих этих точках, бывают – сходящиеся лишь в одной из них, бывают – расходящиеся в обеих точках. Примеры будут приведены ниже).

Найдем формулы, с помощью которых можно вычислить R – радиус сходимости степенного ряда. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$. Применим к его исследованию признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$, и если $|x|k<1$, то ряд сходится. Если же $|x|k>1$, то общий член $\left|a_n x^n\right|$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ не стремится к 0. Но тогда и общий член $a_n x^n$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не стремится к 0 и ряд расходится.

Иными словами, ряд сходится при $|x|<\frac{1}{k}$ и расходится при $|x|>\frac{1}{k}$. Таким образом, число

$$R=\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (3)$$

представляет собой радиус сходимости степенного ряда. (Если $k=0$, то $|x|\cdot 0=0<1$ при всех x и ряд сходится на всей числовой прямой, что обозначается равенством $R=\infty$).

Дадим другую формулу для радиуса сходимости. Применим к рассматриваемому ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ признак Коши. $\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}$. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$. Тогда, как и выше, при $|x|\cdot k<1$ ряд сходится, а при $|x|\cdot k>1$ - расходится. Поэтому

$$R=\frac{1}{k}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (4)$$

Рассмотрим примеры.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$. В точках $x=\pm 1$ ряд, очевидно, расходится.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

В точке $x=-1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по теореме Лейбница. В точке $x=1$ гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. В данном случае формулы (3), (4) для нахождения радиуса сходимости применять нельзя. Для нахождения радиуса сходимости применим к рассматриваемому ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+1}}{a_n x^{2n-1}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(-1)^n(2n+1)}\right|=x^2<1 \quad\Rightarrow\quad |x|<1$$

В точках $x=\pm 1$ получается условно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$.

В точках $x=\pm 1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который абсолютно сходится.

Свойства степенного ряда

<u>**Лемма.**</u> *Пусть* $r<R$. *Тогда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится на множестве* $|x|\le r$ *абсолютно и равномерно.*

<u>**Доказательство.**</u> Так как $r<R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Так как $\left|a_n x^n\right| \le |a_n| r^n$, можно применить теорему Вейерштрасса, из которой и следует утверждение леммы.

<u>**Замечание.**</u> Лемма <u>отнюдь не утверждает</u> равномерной сходимости степенного ряда на $(-R,R)$. Да это, вообще говоря, и неверно. Например, прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится на $(-1,1)$ <u>неравномерно</u>. Однако этот ряд сходится равномерно на любом $[a,b]$, $[a,b]\subset(-1,1)$.

<u>**Теорема.**</u> **(Абель)**. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *имеющий сумму* $f(x)$, *сходится (хотя бы неабсолютно) при* $x=R$, *то* $\lim\limits_{x\to R-0} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(R)$ *(т.е. сумма ряда непрерывна слева).*

Без доказательства.

На основании этих двух утверждений доказывается теорема о непрерывности суммы степенного ряда.

<u>**Теорема.**</u> *Степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *представляет собой функцию, непрерывную на* $(-R;R)$, *где* R *– радиус сходимости ряда.*

<u>**Доказательство.**</u> Пусть теперь $x\in(-R,R)$, т.е. $|x|<R$. Выберем r так, чтобы $|x|\le r<R$. Тогда, по доказанной лемме, ряд сходится на $[-r,r]$ абсолютно и равномерно. Поскольку все функции $a_n x^n$ – непрерывные, сумма ряда есть непрерывная на $[-r,r]$ функция. Значит, эта функция непрерывна и в выбранной, произвольной точке x отрезка $[-r,r]$. Односторонняя непрерывность а точках $x=\pm R$ следует из теоремы Абеля.

<u>**Следствие.**</u> **(Единственность степенного ряда)**. *Пусть*

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

и в некоторой окрестности $x=0$ $f_1(x)\equiv f_2(x)$. *Тогда* $a_n\equiv b_n$.

<u>**Доказательство.**</u> При $x=0$ получаем:

$$a_0+0=b_0+0,\ a_0=b_0.$$

Поэтому

$$a_1x+a_2x^2+\ldots=b_1x+b_2x^2+\ldots.$$

При $x\ne 0$ после сокращения на x имеем

$$a_1+a_2x+\ldots=b_1+b_2x+\ldots.$$

В правой и левой частях стоят степенные ряды, а они, по доказанному, есть непрерывные функции, поэтому равенство сохраняется и при $x=0$, откуда $a_1=b_1$ и т.д. (Отметим, что здесь существенно использована <u>непрерывность</u> ряда в точке $x=0$).

Действия со степенными рядами

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \pm b_n\right) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение, полученное из записанного выше равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \ldots + q_n b_0 \end{cases}$$

Теорема. *Для любого* $x \in (-R, R)$ *справедливо равенство*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть r удовлетворяет неравенствам $|x| < r < R$. Тогда степенной ряд сходится равномерно на $[-r, r]$ и его можно почленно проинтегрировать. Кроме того,

$$\int_0^x a_n t^n dt = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Для любого* $x \in (-R, R)$ *справедливо равенство*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Доказательство. Выберем r_0, r_1 так, чтобы $|x| < r_0 < r_1 < R$. По определению R, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n r_1^n \right|$ сходится. Поэтому $\exists C > 0$ (см. доказательство теоремы 1): $\left| a_n r_1^n \right| \le C$. Рассмотрим величину

$$\left| n a_n x^{n-1} \right| = n \left| a_n \right| r_0^{n-1} \left(\frac{x}{r_0} \right)^{n-1} \le n \left| a_n \right| r_0^{n-1} = n \left| a_n \right| r_1^{n-1} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{n-1} \le \ \le \frac{nC}{r_1} \cdot \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{n-1}.$$

По признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nC}{r_1} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{n-1}$ сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)C\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n\cdot r_1}{r_1\cdot n\cdot C\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}}=\frac{r_0}{r_1}<1.$$

Значит, мы оценили члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_nx^{n-1}\right|$ при $|x|\le r_0$ членами сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nC}{r_1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}.$$

Применяя теорему Вейерштрасса на $[-r_0,r_0]$, получаем, что этот ряд равномерно сходится. Следовательно, почленное дифференцирование обосновано на отрезке $[-r_0,r_0]$, а значит, и в точке x. Ввиду произвольности точки $x\in(-R,R)$, теорема доказана.

Важное замечание. Из доказанных теорем вытекает, что при интегрировании и дифференцировании радиус сходимости не уменьшается. Но увеличиться он также не может. Если бы, например, он увеличился и стал равен R_1, $R_1>R$ при интегрировании, мы продифференцировали бы этот полученный при интегрировании ряд и получили бы с одной стороны, ряд, совпадающий с исходным, а с другой стороны, имеющий радиус сходимости не меньший, чем $R_1>R$ (по доказанному).

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при почленном интегрировании и дифференцировании.

Однако поведение в концевых точках $\pm R$ может меняться. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится на $[-1,1]$. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$, получающийся из исходного дифференцированием, сходится только на $[-1,1)$, а прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, получающаяся при дифференцировании ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (сходящегося на $[-1,1)$), сходится на $(-1,1)$.

Ряд Тейлора

Рассмотрим теперь функцию $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, представляемую степенным рядом в области его сходимости. Очевидно, $a_0=f(0)$. Далее, последовательно применяем теорему о почленном дифференцировании ряда.

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$

откуда $f'(0)=a_1$

Тогда $f''(x)=2a_2+3\cdot2\cdot a_3x+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$, откуда

$$f''(0)=2a_2,\ a_2=\frac{f''(0)}{2}.$$

Продолжая далее

$f'''(x)=3\cdot2\cdot a_3+4\cdot3\cdot2\cdot a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\ldots$, $f'''(0)=6a_3$ и т.д.

…

$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1+(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots2\cdot x+\ldots$, $f^{(n)}(0)=n!a_n$ ·

Следовательно, при всех n $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Таким образом,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Это можно сформулировать так: степенной ряд, сходящийся к $f(x)$, представляет собой **ряд Тейлора** для своей суммы $f(x)$.

Если $f(x)$ имеет производные произвольного порядка в точке $x=0$, то можно образовать соответствующий ей ряд Тейлора.

Важное замечание. Не всегда этот ряд сходится к самой функции $f(x)$. Например, нетрудно доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

имеет производные произвольного порядка в точке $x=0$ и все они равны 0, т.е. $0 = f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots$. Ряд Тейлора этой функции тождественно равен 0 и не совпадает с $f(x)$.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к самой функции $f(x)$, является выполнение следующего равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right] = 0$$

Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Рассмотрим некоторые из них.

Разложение при помощи алгебраического деления

Это самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\dfrac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$\begin{array}{l|l} -\,1 & 1 - x \\ \underline{\;1 - x\;} & \overline{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots} \\ \quad x & \\ \quad -\,\underline{x - x^2} & \\ \qquad x^2 & \\ \qquad -\,\underline{x^2 - x^3} & \\ \qquad\quad x^3 & \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Разложение при помощи формул Тейлора и Маклорена

Если применить к той же функции формулу Маклорена, то получаем:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2};\quad f'(0)=1;\ f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3};\quad f''(0)=2;\ f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4};\quad f'''(0)=3!;$$

………………………………

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\quad f^{(n)}(0)=n!;$$

Итого, получаем:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Имеет место следующая лемма

Лемма. *Если для любого отрезка* $[-H;H]$ *при любом* n $\max\limits_{x\in[-H;H]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le C(H)$, *то* $\forall x\in\Re\ r_n(x)\to 0$.

Доказательство. Для произвольного $x\in\Re$ выберем H так, чтобы $x\in[-H;H]$. Применим к $f(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),\ \text{где}\ r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\Theta<1.$$

По условию, $\left|f^{(n+1)}(\Theta x)\right|\le C(H)$ и $\left|r_n(x)\right|\le\frac{C(H)}{(n+1)!}H^{n+1}$.

По признаку Даламбера ряд с членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{C(H)H^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C(H)H^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!C(H)H^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{H}{n+2}=0.$$

Поэтому его общий член $\frac{C(H)}{(n+1)!}H^{n+1}$ стремится к 0, значит и $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Ввиду произвольности $x\in\Re$ получаем, что

$$\forall x\in\Re\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Пример. Разложение e^x. Для получения разложения e^x заметим, что $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$, и для любого отрезка $[-H;H]$ $\max\limits_{x\in[-H;H]}\left(e^x\right)^{(n)}=e^H$. Поэтому лемма применима с $C(H)=e^H$, и мы получаем:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Пример. Разложение $\sin x$ и $\cos x$. Для нахождения разложения $\sin x$ и $\cos x$ учтем, что $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\Re$ $\left|\cos^{(n)}(x)\right|\le 1,$ $\left|\sin^{(n)}(x)\right|\le 1$ и в лемме можно положить $C(H)=1$. Поэтому $\forall x\in\Re$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Разложения для $e^x,\sin x,\cos x$ позволяет нам вывести очень важные для дальнейшего **формулы Эйлера.** Подставим в разложение для e^x вместо x величину ix. Тогда (пока формально) получим:

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots.$$

Группируя действительные и мнимые слагаемые, получаем:

$$e^{ix}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ +i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=\cos x+i\sin x.$$

Для обоснования законности наших действий заметим, что ряд $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, как доказано выше, абсолютно сходится, поэтому в нем можно переставить слагаемые (в частности так, как это сделано выше), и сумма его сохранится. Упомянем, что и для $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

Если в разложение для e^x подставить вместо x число $-ix$, то получим:

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x.$$

Поэтому из двух полученных формул следует, что

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Кроме того, для любого комплексного числа $a+bi$ получаем

$$e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}\left(\cos bx+i\sin bx\right).$$

<u>Пример.</u> Разложение $(1+x)^m$.

Если обозначить $f(x)=(1+x)^m$, то $f^{(n)}(0)=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$. Поэтому

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Это разложение верно для всех $x\in(-1;1)$. Для нахождения R используем формулу

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\cdot(n+1)!}{n!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1.$$

Кроме того, без доказательства, отметим, что если:

$m\geq 0$ то разложение справедливо при $x\in[-1,1]$,

$-1<m<0$ то разложение справедливо при $x\in(-1,1]$,

$m\geq 0$ то разложение справедливо только при $x\in(-1,1)$

<u>Разложение функции в ряд при помощи интегрирования и дифференцирования.</u>

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x)=f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int\limits_0^x df(t)=\int\limits_0^x f'(t)dt;\qquad f(t)\big|_0^x=\int\limits_0^x f'(t)dt;\qquad f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(x)dx;$$

<u>Пример.</u> Разложить в ряд функцию $f(x)=\ln(1+x)$.

При $f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x)=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ получается из разложения для $\frac{1}{1-x}$ с помощью замены x на $-x$.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Тогда получаем:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Окончательно получим:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

В заключение приведем несколько полезных следствий из разложения $\ln(1+x)$.

<u>Следствие 1.</u> Легко видеть, что

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\ldots-(-1)^n\frac{x^n}{n}-\ldots.$$

Поэтому

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\ldots+\frac{x^{2m}}{2m+1}+\ldots\right) \text{ при } |x|<1.$$

Полагая $x=\dfrac{1}{2n+1}, n\in\mathbb{Z}$, получаем, что

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+1)2n}=\frac{n+1}{n}$$

и тогда

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right).$$

Этим разложением можно воспользоваться при вычислении логарифмов и при доказательстве **формулы Стирлинга**.

<u>Следствие 2.</u> (Формула Стирлинга).

Приведем эту формулу без доказательства. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\Theta}{12n}},\ 0<\Theta<1.$

<u>Пример.</u> Разложить в степенной ряд функцию $\operatorname{arctg} x$.

<u>Решение.</u> Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x)=\operatorname{arctg} x,\quad f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad \operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$$

Разложение в ряд подынтегральной функции получается из разложения для $\dfrac{1}{1+x}$ с помощью замены x на x^2:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

Тогда

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Окончательно получаем:

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Для разложения функций в степенные можно также пользоваться теоремой о почленном дифференцировании. Таким образом, можно разлагать в ряд функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее первообразной.

<u>Пример</u>. Разложить в ряд функцию $f\left(x\right)=\frac{1}{\left(1-x\right)^2}$.

<u>Решение</u>. Воспользуемся формулой дифференцирования степенных рядов

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

Вычисление определённых интегралов с помощью рядов.

С помощью степенных рядов можно приближённо находить так называемые «неберущиеся» интегралы (определённые).

Принцип этого метода состоит в том, чтобы заменить подынтегральную функцию по формуле Тейлора и почленно проинтегрировать полученную сумму.

<u>Пример.</u> С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

Т.к. интегрирование производится в окрестности точки $x=0$, то можно воспользоваться для разложения подынтегральной функции формулой Маклорена.

Разложение функции $\cos x$ имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

Зная разложение функции $\cos x$ легко найти функцию $1-\cos x$:

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подынтегральное выражение.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{\left(2n\right)!}+\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{\left(2n\right)!}$$

Теперь представим наш интеграл в виде:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{\left(2n\right)!}dx$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда. (Т.е. интеграл от суммы будет представлен в виде суммы интегралов членов ряда).

<u>Упражнение.</u> Доказать, что ряд сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5].

Итак:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{\left(2n\right)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n\right)!}\int_0^{0,5}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n\right)!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\cdot 0,5^{2n-1}}{\left(2n\right)!\left(2n-1\right)}$$

Итого, получаем:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n\right)!\left(2n-1\right)2^{2n-1}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-\ldots=$$
$$=0,25-0,00174+0,0000086-\ldots\approx 0,248$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Для справки: Точное (вернее – более точное) значение этого интеграла: 0,2482725418…