Функции нескольких переменных

Определение скалярной и векторной функции многих переменных.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных. При этом основные определения и формулировки теорем будем приводить для функций n переменных

<u>Определение.</u> Скалярной функцией n **переменных** $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1,...,x_n)$ называется отображение множества $D_f \subset \Re^n$ на множество $E_f \subset \Re$. Множество D_f называется **областью определения функции** f, множество E_f называется **множеством значений функции** f.

<u>Определение.</u> Вектор-функцией n **переменных** $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется отображение множества $D_f \subset R^n$ на множество $Y \subset R^m$, где $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_m)$, $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1,..., f_m)$.

Задать вектор-функцию – это все равно, что задать m скалярных функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1,...,x_n) \end{cases}.$$

<u>Примеры.</u>

1. $z = x + y$ – функция двух переменных, паре (x, y) сопоставляет число z, такое что $z = x + y$. В общем случае функцию двух переменных будем обозначать $z = f(x, y)$, функцию трёх переменных $u = f(x, y, z)$.

2. $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$. Это отображение $R^3 \to R^2$, которое определяет вектор-функцию 3-х переменных.

3. Вектор-функция скалярного аргумента $R^1 \to R^3$ (вектор-функция одной переменной) может быть проиллюстрирована следующим примером

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \text{ – винтовая линия.}$$

<u>Определение.</u> Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.

<u>Определение.</u> Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

<u>Пример.</u> Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$

<u>Решение.</u> Уравнение семейства поверхностей имеет вид $x^2 + z^2 - y^2 = C$.

Если $C = 0$ получаем $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ - конус

Если $C > 0$ получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство однополостных гиперболоидов

Если $C < 0$ получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство двуполостных гиперболоидов

<u>Определение.</u> Если каждой точке M множества $D \subset \Re^n$ ставится в соответствие некоторая скалярная величина y (задана функция $y = f(\mathbf{x})$), то говорят, что задано **скалярное поле** $y(M)$**.** Вектор-функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяет **векторное поле.**

Предел функции многих переменных. Непрерывность

Определение. Пусть $\mathbf{a}\in R^n$, $\mathbf{b}\in R^m$, $\mathbf{f}:R^n\to R^m$ – вектор-функция, $\mathbf{a}$ – предельная точка области определения вектор-функции $\mathbf{f}$. Вектор $\mathbf{b}$ называется **пределом вектор-функции** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ при стремлении вектора $\mathbf{x}$ к вектору $\mathbf{a}$ (обозначается $\mathbf{b}=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$) если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\ \forall\mathbf{x}\in\dot{U}_\delta(\mathbf{a})\ \Rightarrow\ \mathbf{f}(\mathbf{x})\in U_\varepsilon(\mathbf{b})$$

или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\mathbf{x}:\ \ 0<\rho_{R^n}(\mathbf{x},\mathbf{a})<\delta\ \ \Rightarrow\rho_{R^m}(\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{b})<\varepsilon$.

или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\mathbf{x}:0<\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2}<\delta\ \ \Rightarrow\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(f_i(\mathbf{x})-b_i)^2}<\varepsilon$.

Здесь и далее вектора $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n)$, $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_n)$. Для скалярной функции это определение будет звучать так:

Определение. Пусть $\mathbf{a}\in R^n$, $A\in R$, $f:R^n\to R$ – скалярная функция n переменных, $\mathbf{a}$ – предельная точка области определения функции $f(\mathbf{x})$. Число A называется **пределом скалярной функции** $f(\mathbf{x})$ при стремлении вектора $\mathbf{x}$ к вектору $\mathbf{a}$ (обозначается $A=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}f(\mathbf{x})$) если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\ \forall\mathbf{x}\in\dot{U}_\delta(\mathbf{a})\Rightarrow\ f(\mathbf{x})\in U_\varepsilon(A)$$

или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\mathbf{x}:\ 0<\rho_{R^n}(\mathbf{x},\mathbf{a})<\delta\ \Rightarrow\rho_R(f(\mathbf{x}),A)<\varepsilon$.

или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\mathbf{x}:0<\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2}<\delta\ \ \Rightarrow|f(\mathbf{x})-A|<\varepsilon$

Замечание 1. Используя метрику ρ предел функций можно записать в виде

$$A=\lim_{\rho(\mathbf{x},\mathbf{a})\to 0}f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{b}=\lim_{\rho(\mathbf{x},\mathbf{a})\to 0}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Замечание 2. Для функций многих переменных не вводится понятие одностороннего предела, так как предполагается, что точка $\mathbf{x}$ стремится к точке $\mathbf{a}$ произвольным образом, но траектория должна принадлежать области определения функции $f(\mathbf{x})$. Более того, *если при движении $\mathbf{x}$ к $\mathbf{a}$ по разным траекториям получаются разные значения пределов, то это означает, что общего предела не существует*.

Замечание 3. Неравенство

$$0<\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2}<\delta \qquad (*)$$

в определении предела можно заменить системой неравенств

$$0<|x_j-a_j|<\delta \qquad (**)$$

С геометрической точки зрения неравенство (*) определяет «сферическую» окрестность точки $\mathbf{a}$, а система неравенств (**) определяет «кубическую окрестность» точки $\mathbf{a}$.

Приведём здесь аналогичное определение для функции двух переменных.

Определение: Число A называется **пределом** функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$ (записывают так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$), если $\forall\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для любых точек $M(x,y)$ удовлетворяющих неравенствам

$$0<|x-x_0|<\delta,\quad 0<|y-y_0|<\delta$$

будет выполняться также неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Имеет место следующая теорема

Теорема. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}): R^n \to R^m$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ существует $\Leftrightarrow$ $\forall i = 1,\dots,m$ $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$.

Доказательство. (Необходимость). Поскольку $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(f_i(\mathbf{x}) - b_i\right)^2} \ge \max\limits_{i=1,\dots,m} \left|f_i(\mathbf{x}) - b_i\right|$, из предыдущего определения следует, что $\left|f_i(\mathbf{x}) - b_i\right| < \varepsilon$ при $i = 1,\dots,m$. Но это как раз и означает, что $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксировано. Выберем $\delta_1,\dots,\delta_m$ так, чтобы при $0 < \rho(\mathbf{x},\mathbf{a}) < \delta_i$ выполнялось неравенство $\left|f_i(\mathbf{x}) - b_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Взяв $\delta = \min(\delta_1,\dots,\delta_m)$ получаем, что при $0 < \rho(\mathbf{x},\mathbf{a}) < \delta$ выполняется $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(f_i(\mathbf{x}) - b_i\right)^2} < \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.

Для функции нескольких переменных $f(x_1,\dots,x_n)$ можно определить понятие предела по одной из переменных x_i при фиксированных значениях остальных переменных. В связи с этим возникает понятие **повторного предела**.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)$, определенную в некоторой выколотой окрестности точки (x_0, y_0). Выберем и зафиксируем переменную x. Получим функцию как бы одной переменной. Рассмотрим предел:

$$\varphi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Будем считать, что $\varphi(x)$ существует. Теперь снимем фиксацию с переменной x и рассмотрим следующий предел:

$$A = \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$$

Если этот предел существует, то говорят, что А есть **повторный предел** функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

$$A = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Аналогично мы можем фиксировать сначала переменную y. В этом случае мы также получим повторный предел, но, вообще говоря, другой:

$$B = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Это определение можно распространить и на функции с произвольным количеством переменных $f(x_1,\dots,x_n)$.

Замечание. Следует отметить, что повторный предел вовсе не обязан совпадать с обычным пределом. Рассмотрим здесь несколько примеров

Пример 1. Функция, не имеющая предела в начале координат, но имеющая предел при приближении к началу координат по любой прямой. В частности, эта функция имеет оба частных предела

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $A = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$, $B = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ и кроме того, если $y = kx$, то

$$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2}$$

Таким, образом, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{x^2+k^2}=0$

Тем не менее, общего предела не существует, так как если, например, $y=x^2$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f\left(x,x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

<u>Пример 2</u>. Функция, у которой существует общий предел и один из повторных.

$$f(x,y)=\begin{cases} y+x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

Очевидно, что $\left|f(x,y)\right|=\left|y+x\sin\dfrac{1}{y}\right|\leq |x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}$

Поэтому, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$ и кроме того, $\lim\limits_{x\to 0}\left(y+x\sin\dfrac{1}{y}\right)=y$

Следовательно, $B=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} y=0$. Первый повторный не существует, т.к.

$$\lim_{y\to 0}\left(y+x\sin\frac{1}{y}\right) - \underline{\text{не существует}}$$

<u>Упражнение.</u> Проверить, что у функции

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & x,y\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

существует обычный предел и не существует повторных.

<u>Теорема.</u> *Пусть функция $f(x,y)$, определена в выколотой окрестности точки (x_0,y_0) и имеет в этой точке общий предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

Пусть, кроме того $\forall y$ из окрестности точки (x_0,y_0) существует предел

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Тогда существует повторный предел

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A$$

и он равен общему пределу этой функции в этой же точке.

<u>Замечание.</u> В обратную сторону утверждение, вообще говоря, неверно. (См. разобранные примеры)

<u>Доказательство.</u> В силу существования двойного предела $\forall\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$ такое, что из неравенств $0<|x-x_0|<\delta, 0<|y-y_0|<\delta$ будет следовать, что $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $x\to x_0$ получим

$$\lim_{x\to x_0}|f(x,y)-A|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x,y)-A\right|=|\varphi(y)-A|<\varepsilon$$

Это означает, что

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A$$

Что и требовалось доказать.

Для вычисления пределов функций многих переменных можно использовать как алгебраические приёмы, так и эквивалентности. Так, например, если существует предел

$$\lim_{\rho(\mathbf{x},\mathbf{a})\to 0} f(\mathbf{x})=0$$

то тогда имеет место первый замечательный предел для функций многих переменных

$$\lim_{\rho(\mathbf{x},\mathbf{a})\to 0}\frac{\sin f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}=\lim_{f(\mathbf{x})\to 0}\frac{\sin f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}=1$$

Аналогичным образом доказываются остальные замечательные пределы и соответствующие им эквивалентности.

Как и в случае функций одной переменной приведём здесь формулировку леммы Больцано-Вейерштрасса и независимое доказательство в терминах теории пределов.

Лемма Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной системы точек* $\{\mathbf{x}_k\}$, где $\mathbf{x}_k=\{x_{k1},\ldots,x_{kn}\}\in\Re^n$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В силу ограниченности $\{\mathbf{x}_k\}$ для любого k найдётся число M такое, что

$$\rho(\mathbf{x}_k,0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{ki}^2}\le M$$

Отсюда следует, что $|x_{ki}|\le M$. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для ограниченных числовых последовательностей, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_j i}\}$ с пределом равным некоторому числу a_i. Тогда подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ будет сходится к точке $\mathbf{a}=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Что и требовалось доказать.

Определение: Пусть точка $\mathbf{x}_0$ принадлежит области определения функции $f(\mathbf{x})$. Тогда функция $y=f(\mathbf{x})$ называется **непрерывной** в точке $\mathbf{x}_0$, если

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)\qquad(1)$$

причем точка $\mathbf{x}$ стремится к точке $\mathbf{x}_0$ произвольным образом.

Замечание. Для функций многих переменных не вводится понятие односторонней непрерывности (как и понятие одностороннего предела), т.е. предполагается, что точка $\mathbf{x}$ стремится к точке $\mathbf{x}_0$ произвольным образом, но траектория должна принадлежать области определения функции $f(\mathbf{x})$.

Если в какой-либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $f(\mathbf{x})$. Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $f(\mathbf{x})$ не определена в точке $\mathbf{x}_0$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(\mathbf{x}_0)$.

Замечание. Функция многих переменных может быть непрерывной по каждой переменной в отдельности, но не являться при этом непрерывной. В качестве иллюстрации можно рассмотреть следующий пример

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что это функция непрерывна по переменным x и y всюду, но тем не менее разрывна в точке $(0,0)$, т.к. не имеет в этой точке предела (обычного)

Определение. Отображение $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **непрерывно** в точке $\mathbf{a}$, если $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Согласно сказанному выше, непрерывность отображения $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x}))$ равносильна непрерывности всех функций $f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})$.

Так же, как и в случае одной переменной, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть даны две функции* $f_1, f_2 : \Re^n \to \Re$, определенные в $\dot{U}_\delta(\mathbf{a})$. *Если* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}) = A_1, \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_2(\mathbf{x}) = A_2$, *то справедливы утверждения:*

1) $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\alpha f_1(\mathbf{x}) + \beta f_2(\mathbf{x})) = \alpha A_1 + \beta A_2,\ \forall \alpha, \beta \in \Re$

2) $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x})) = A_1 A_2$

3) *если* $A_2 \neq 0$, *то* $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} = \dfrac{A_1}{A_2}$.

Замечание. *Утверждение 1 справедливо и для вектор-функций, при условии, что они принадлежат одному линейному пространству.*

Следствие. *Линейная комбинация, произведение и частное (при* $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$*) непрерывных функций* $f_1(\mathbf{x})$ *и* $f_2(\mathbf{x})$ *являются непрерывными функциями. Линейная комбинация вектор-функций является непрерывной вектор-функций.*

Теорема. *Если отображение* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *непрерывно в точке* $\mathbf{a} \in R^n$, $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, *отображение* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ *непрерывно в точке* $\mathbf{b} \in R^m$, *то отображение* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ *непрерывно в точке* $\mathbf{a}$.

Доказательство. Для всякой окрестности $W_\varepsilon(\mathbf{g}(\mathbf{b}))$ существует $V_\gamma(\mathbf{b})$ такая, что $\forall \mathbf{y} \in V_\gamma(\mathbf{b})\quad g(\mathbf{y}) \in W_\varepsilon(g(\mathbf{b}))$. Но $\forall V_\gamma(\mathbf{b})\ \exists U_\delta(\mathbf{a}) : \forall \mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a})\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V_\gamma(\mathbf{b})$. Эта окрестность $U(\mathbf{a})$ - искомая, т.к. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V_\gamma(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \in W_\varepsilon(\mathbf{g}(\mathbf{b}))$.

Теорема. (Теорема о сохранении знака непрерывной функции). Если функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{a} \in R^n$ *и* $f(\mathbf{a}) \neq 0$, то $\exists U(\mathbf{a}) : \ \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})\quad f(\mathbf{x}) f(\mathbf{a}) > 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f(\mathbf{a}) > 0$, то и $f(\mathbf{x}) > 0$. Действительно, взяв $\varepsilon = \dfrac{f(\mathbf{a})}{2}$, получаем по определению непрерывности окрестность $U(\mathbf{a})$ $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) : \ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \dfrac{f(\mathbf{a})}{2} \Rightarrow f(\mathbf{x}) > \dfrac{f(\mathbf{a})}{2} > 0$.

Свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность

Определение. Функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна на множестве $X \subset \Re^n$ (обозначается $f(\mathbf{x}) \in C(X)$) если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Для непрерывных скалярных функций многих переменных имеют место свойства аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменных. Речь идёт о свойствах, устанавливаемых с помощью теорем Больцано-Коши, Вейерштрасса и Кантора. Правда, в отличие от функций одной переменной в данном случае эти теоремы удобнее доказывать с помощью Леммы Гейне-Бореля (См. раздел «Введение в курс математического анализа»)

Первая теорема Больцано-Коши (о нуле функции). *Пусть функция* $f(\mathbf{x})$ *определена и непрерывна в некоторой связной области* D. *Если в двух точках* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$ *из области* D *функция* $f(\mathbf{x})$ *принимает значения противоположных знаков, то в этой области найдётся, по крайней мере, одна точка* $\mathbf{x}^*$ *в которой функция* $f(\mathbf{x})$ *обращается в нуль.*

Доказательство. От противного. Предположим, что не существует точки, в которой функция $f(\mathbf{x})$ обращается в нуль. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из области D принимает значения противоположных знаков и при этом не обращается в нуль ни в одной точке любой ломанной соединяющей точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Каждую точку ломанной вместе с точками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ можно окружить окрестностью $U_\delta(\mathbf{x})$, в которой функция $f(\mathbf{x})$ сохраняет знак. В результате получаем систему окрестностей E налегающих друг на друга, и целиком покрывающих ломаную. Ломаная прямая является компактом (замкнутое и ограниченное множество). Следовательно, по лемме Бореля, из системы E можно выделить конечную подсистему E_n покрывающую ломаную прямую. Двигаясь теперь по этой системе окрестностей от точки $\mathbf{x}_1$ к точке $\mathbf{x}_2$ получаем, что функция $f(\mathbf{x})$ не меняет знак, что противоречит условию теоремы. Следовательно, существует по крайней мере одна точка $\mathbf{x}^*$ в которой функция $f(\mathbf{x})$ обращается в нуль. Теорема доказана.

<u>Вторая теорема Больцано-Коши</u> (о промежуточном значении). *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в некоторой связной области D. Если в двух точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из области D функция $f(\mathbf{x})$ принимает различные значения, т.е. $f(\mathbf{x}_1) = A$, $f(\mathbf{x}_2) = B$, то $\forall C \in (A, B)$ найдётся точка по крайней мере одна точка $\mathbf{x}^*$ в которой $f(\mathbf{x}^*) = C$.*

<u>Доказательство.</u> Также, как и в случае функции одной переменной необходимо ввести вспомогательную функцию

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - C$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям первой теоремы Больцано-Коши, поэтому найдётся точка $\mathbf{x}^*$, в которой $F(\mathbf{x}^*) = C$. Отсюда получаем, что $f(\mathbf{x}^*) = C$. Что и требовалось доказать.

<u>Замечание</u> (эквивалентная формулировка второй теоремы Больцано-Коши). *Непрерывный образ связного множества (т.е. множества, любые 2 точки которого можно соединить кривой, целиком лежащей внутри этого множества) есть связное множество.*

<u>Первая теорема Вейерштрасса</u>. *Функция $f(\mathbf{x})$ непрерывная на компакте K, ограничена на нём.*

<u>Доказательство.</u> В силу непрерывности функции $f(\mathbf{x})$ она является ограниченной в некоторой малой окрестности любой точки $\mathbf{x} \in K$. Множество таких окрестностей образуют покрытие E компакта K, из которого по лемме Бореля можно выделить конечное подпокрытие E_n состоящее из окрестностей некоторых точек $\mathbf{x}_n$. В каждой такой окрестности функция $f(\mathbf{x})$ ограничена, т.е. существуют числа m_i, M_i такие что

$$m_i \le f(\mathbf{x}) \le M_i$$

Положив теперь $m = \min\{m_i\}$, $M = \max\{M_i\}$ получим

$$m \le f(\mathbf{x}) \le M \quad \forall \mathbf{x} \in K$$

Что и требовалось доказать.

<u>Вторая теорема Вейерштрасса</u>. *Если* функция *$f(\mathbf{x})$ непрерывна на компакте K, то она достигает на нём точной верхней и нижней граней.*

<u>Доказательство.</u> По аналогии с функциями одной переменной

<u>Замечание.</u> Иногда вторую теорему Вейерштрасса формулируют следующим образом: *Непрерывный образ компактного множества есть компактное множество*.

<u>Определение.</u> Функция $f(\mathbf{x})$, определённая на множестве X, **равномерно непрерывна** на нём, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: из неравенства $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$. Причём число δ не зависит от $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

Равномерная непрерывность, как обобщённое понятие непрерывности, выполняется не для любых множеств (см. примеры для функции одной переменной). Очевидно, что равномерно непрерывная на множестве X функция является просто непрерывной на нём. Обратное утверждение является, вообще говоря, неверным. В качестве критерия равномерной непрерывности можно привести теорему Кантора.

<u>Теорема.</u> (Теорема Кантора). *Непрерывная на компакте K функция равномерно непрерывна на нем, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta \quad |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon$.*

<u>Доказательство</u>. Воспользуемся доказательством от противного. Пусть $f(\mathbf{x})$ – функция, отвечающая условиям теоремы (на компакте K), но не равномерно непрерывная на нём. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta > 0$ существуют такие точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, расстояние между которыми меньше δ, но расстояние между их образами не менее ε:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \forall \delta > 0 \ \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K : \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta, \text{ но при этом } \left| f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) \right| \geq \varepsilon$$

Возьмём последовательность $\{\delta_k\}$, сходящуюся к 0, например, $\{1/k\}$. Так как K компакт, то можно построить ограниченные последовательности $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ так, чтобы

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) < \frac{1}{k}, \text{ но при этом } \left| f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \right| \geq \varepsilon$$

Далее, по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящиеся последовательности:

$$\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}^* \in K, \quad \mathbf{y}_{k_j} \to \mathbf{y}^* \in K$$

Но так как расстояние между ними стремится к нулю, по лемме о вложенных отрезках они стремятся к одной точке: $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \xi$. И, так как $f(\mathbf{x})$ непрерывна, то

$$f\left(\mathbf{x}_{k_j}\right) \to f(\xi), \quad f\left(\mathbf{y}_{k_j}\right) \to f(\xi) \quad \Rightarrow \quad \left| f\left(\mathbf{x}_{k_j}\right) - f\left(\mathbf{y}_{k_j}\right) \right| \to 0$$

что противоречит предположению, что $\left| f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \right| \geq \varepsilon$.

Стало быть, функция, непрерывная на компакте, действительно равномерно непрерывна на нём.

Производные функций нескольких переменных. Дифференцируемость.

Определение. Рассмотрим функцию $y = f(\mathbf{x})$, определённую в окрестности точки $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Введём следующие обозначения

$$\Delta \mathbf{x}_i = (0, \ldots, 0, \Delta x_i, 0, \ldots 0) \text{ - частное приращение аргумента, где } \Delta x_i = x_i - a_i$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a} \text{ - полное приращение аргумента}$$

Величина

$$\Delta_i f(\mathbf{a}) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

называется **частным приращением** функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_i. Она представляет собой приращение функции при фиксированных значениях всех переменных, кроме i-той.

Величина $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \Delta f(\mathbf{a})$ называется **полным приращением** функции f в точке $\mathbf{a}$, соответствующим приращению аргумента $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$.

Пример. Для функции двух переменных $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Определение. **Частной производной** функции $y = f(\mathbf{x})$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{\Delta_i f(\mathbf{a})}{x_i - a_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(\mathbf{a})}{\Delta x_i}$$

при условии, что он существует.

Частная производная обозначается: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, f'_{x_i}. Таким образом

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \overset{def}{=} \lim_{\Delta \mathbf{x}_i \to 0} \frac{\Delta_i f(\mathbf{a})}{\Delta x_i}$$

Из приведённого определения следует, что функция n переменных может иметь n частных производных. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь две частные производные, для которых приняты следующие обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}; \quad z'_y; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}; \quad f'_y(x,y).$$

Аналогичным образом, рассмотрим вопрос о вычислении производных вектор-функции $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$, определённой в окрестности точки $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$. Величина

$$\Delta_j\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{f}(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_n)=\mathbf{f}(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_n)-\mathbf{f}(a_1,...,a_n)$$

называется **частным приращением** вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по переменной x_j.

Величина $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})=\Delta\mathbf{f}(\mathbf{a})$ называется **полным приращением** функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{a}$, соответствующим приращению аргумента $\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$.

Определение. **Частной производной** вектор-функции $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по переменной x_j называется предел

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})=\lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_j\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\Delta x_j}, \quad \Delta x_j=x_j-a_j$$

при условии, что он существует.

Данный предел является, вообще говоря, векторной величиной и понимается следующим образом

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})\overset{def}{=}\lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_j\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\Delta x_j}=\left(\lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_j f_1(\mathbf{a})}{\Delta x_j}, \lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_j f_2(\mathbf{a})}{\Delta x_j}, \ldots, \lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_j f_m(\mathbf{a})}{\Delta x_j}\right)$$

Совокупность всех частных производных вида $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ образуют прямоугольную матрицу $\mathbf{J}$ размера $m\times n$

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

которая называется **матрицей Якоби** вектор-функции $\mathbf{f}$.

Замечание. Так как вычисление частных производных формально сводится к дифференцированию функции одной переменной, то при нахождении частных производных справедливы правила нахождения производных функции одной переменной. Здесь речь идет о нахождении частной производной суммы функции, частной производной произведения и частного двух функций. Так же можно выносить за знак частной производной функцию независящую от переменной, по которой ищется частная производная.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости функций многих переменных.

Пример. Найти частные производные функции $z=x^y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

Определение. Функция $f(\mathbf{x})$ называется **дифференцируемой** в точке $\mathbf{a}$, если существуют такие постоянные числа $A_1,...,A_n$ и функции $\alpha_i=\alpha_i(\mathbf{x})$, $\alpha_i(\mathbf{x})\to 0$ при $\mathbf{x}\to\mathbf{a}, i=1,...,n$, такие что

$$\Delta f(\mathbf{a})=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\mathbf{x})\Delta x_i, \ \alpha_i(\mathbf{x})\to 0, \mathbf{x}\to\mathbf{a}, \quad i=1,...,n. \quad (1)$$

При $n=1$ данное определение совпадает с известным определением дифференцируемости ФОП $f(x)$. Для функций одной переменной дифференцируемость равносильна существованию производной. В случае функции нескольких переменных ситуация несколько сложнее.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{a}$. Тогда для любого $i=1,\dots,n$ равенство (1) дает

$$\Delta_i f(\mathbf{a}) = A_i(x_i - a_i) + \alpha_i(\mathbf{x})(x_i - a_i) \text{ при } \mathbf{x} \to \mathbf{a} \quad (2).$$

Поскольку $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ при фиксированных значениях $x_j \equiv a_j$, $j \neq i$ равносильно тому, что $x_i \to a_i$, равенство (2) означает, что функция $f(\mathbf{x})$ зависит от одной переменной x_i.

$f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$ дифференцируема в точке $x_i = a_i$ и, значит, существует $\lim\limits_{x_i \to a_i} \dfrac{\Delta_i f(\mathbf{a})}{x_i - a_i} \overset{def}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = A_i$ называемый, по определению, частной производной функции f по переменной x_i в точке $\mathbf{a}$.

Мы только что, тем самым, доказали теорему:

Теорема. *Если функция* $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{a}$, *то для всех* $i=1,\dots,n$ *существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Таким образом, существование частных производных – необходимое условие дифференцируемости. При этом

$$\Delta f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{x}) \Delta x_i, \ \alpha_i(\mathbf{x}) \to 0 \text{ при } \mathbf{x} \to \mathbf{a}.$$

Другое необходимое условие дифференцируемости – непрерывность функции, как показывает следующая теорема.

Теорема. *Если функция* $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{a}$, *то* $f \in C(\mathbf{a})$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ $\Delta f(\mathbf{a}) \to 0$ (т.к. $\Delta f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$). Но это сразу следует из равенства (1), так как $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \Delta x_i = 0$.

Однако, в отличие от случая $n=1$, из существования частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ не следует даже непрерывность функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{a}$ и тем более не следует дифференцируемость $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{a}$.

Пример 1. $n=2$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$.

Тогда так как $f(\Delta x, 0) = 0$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Однако $f(x,y)$ даже не непрерывна в точке $(0,0)$.

Пример 2. Функция, имеющая частные производные всюду, но которая, тем не менее, разрывна и, следовательно, не дифференцируема

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Эта функция, как было показано ранее, имеет частные пределы по каждой переменной. Можно также показать, что и частные производные тоже существуют всюду. Тем не менее, эта функция не дифференцируема в точке $(0,0)$

Пример 3. Ещё один пример. Для функции $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ частные производные в точке $(0,0)$ равны 0, так как $f(x,0) = 0$ и $f(0,y) = 0$. В остальных точках

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$$

и ясно, что эти производные терпят разрыв в точке $(0,0)$.

Приращение $\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{0\cdot 0}$ нельзя представить в виде, указанном в определении дифференцируемой функции. Действительно, в соответствии с определением дифференцируемой функции имеем:

$$\sqrt[3]{xy}=0\cdot x+0\cdot y+\alpha_1(x,y)x+\alpha_2(x,y)y,\ \alpha_1(x,y),\alpha_2(x,y)\to 0 \text{ при } (x,y)\to(0,0)$$

Полагая $y=x$ получаем

$$\sqrt[3]{x^2}=(\alpha_1(x,x)+\alpha_2(x,x))x, \text{ или } 1=(\alpha_1(x,x)+\alpha_2(x,x))\cdot x^{\frac{1}{3}},$$

что невозможно, так как при $x\to 0$ правая часть стремится к 0, а левая нет!

Итак, существование частных производных, как было доказано, есть только необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *существуют в окрестности точки* $\mathbf{a}$ *и непрерывны в этой точке. Тогда функция* $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{a}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ принадлежит рассматриваемой окрестности $\mathbf{a}$. При этом все точки $(a_1,x_2,...,x_n)$, $(a_1,a_2,x_3,...,x_n)$, $(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ также принадлежат рассматриваемой окрестности. Приращение функции $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})$ представим в виде

$$f(x_1,...,x_n)-f(a_1,x_2,...,x_n)+f(a_1,a_2,x_3,...,x_n)+...+f(a_1,...,a_{n-1},x_n)-f(a_1,...,a_n) \quad (4)$$

и рассмотрим разности

$$f(a_1,...,a_{k-1},x_k,...,x_n)-f(a_1,...,a_k,x_{k+1},...,x_n) \quad (5)$$

составляющие в сумме приращение (4).

Положим $\varphi(x_k)=f(a_1,...,a_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n)$ (то есть фиксируем все переменные, до $k-1$-ой включительно). Тогда, рассматриваемая разность (5) имеет вид $\varphi(x_k)-\varphi(a_k)$. Функция φ по условию дифференцируема на отрезке, соединяющем a_k и x_k. Значит, она непрерывна на этом отрезке и можно применить теорему Лагранжа, согласно которой

$$\varphi(x_k)-\varphi(a_k)=\varphi'(a_k+\Theta_k(x_k-a_k))(x_k-a_k), \text{ где } 0<\Theta_k<1.$$

Но $\varphi'(a_k+\Theta_k(x_k-a_k))=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,...,a_{k-1},a_k+\Theta_k(x_k-a_k),x_{k+1},x_n)$.

По условию непрерывности частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,...,a_k+\Theta_k(x_k-a_k),x_{k+1},...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})+\alpha_k(\mathbf{x}), \text{ где } \alpha_k(\mathbf{x})\to 0 \text{ при } \mathbf{x}\to\mathbf{a}.$$

Поэтому каждая из разностей (5) имеет вид $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})(x_k-a_k)+\alpha_k(\mathbf{x})(x_k-a_k)$, а приращение (4) совпадает с (3) из определения дифференцируемости. **Теорема доказана**.

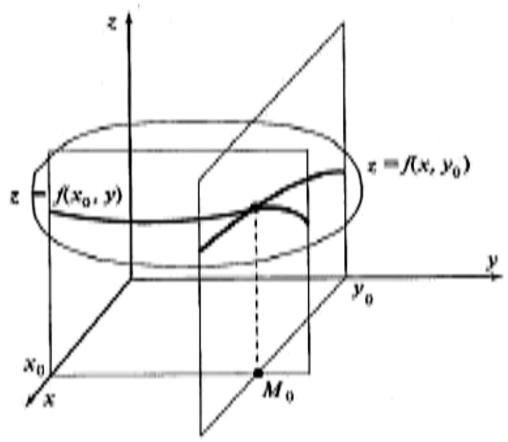
Замечание. Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функций. Например, можно доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin(1/x)+y^2\sin(1/y), & xy\neq 0\\ x^2\sin(1/x), & x\neq 0, y=0\\ y^2\sin(1/y), & x=0, y\neq 0\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$, но частные производные в этой точке не непрерывны.

Геометрический смысл частных производных

Геометрический смысл частных производных установим на примере функций двух переменных. В этом случае $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве. Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую области определения функции $z = f(x, y)$, и сделаем сечение поверхности плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.f'(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.f'(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

Эти плоскости вырежут на поверхности плоские линии $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$, которые являются графиками функций одной переменной. Тогда, частная производная f'_x в точке (x_0, y_0) совпадёт с обычной производной $f'(x, y_0)$ в точке $x = x_0$, а частная производная f'_y в точке (x_0, y_0) совпадёт с обычной производной $f'(x_0, y)$ в точке $y = y_0$. Известно, что $f'(x, y_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке $x = x_0$, а $f'(x, y_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $z = f(x_0, y)$ в точке $y = y_0$. Отсюда следует, что *значения частных производных f'_x и f'_y в точке $M_0(x_0, y_0)$ численно совпадают с угловыми коэффициентами касательных, проведённых к плоским кривым, полученным при пересечении поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz.* Это и есть геометрический смысл частных производных.

Замечание. Из проведённых рассуждений в частности следует, что вектора, коллинеарные построенным касательным будут иметь координаты

$$\mathbf{l}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{l}_y = (1, 0, f_y)$$

а вектор $\mathbf{n}$, нормальный к ним обоим, соответственно, равен

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

При переходе к пространству $\Re^n$ геометрический смысл частных производных, несмотря на отсутствие геометрического образа функции $y = f(\mathbf{x})$, сохраняется. В этом случае надо рассмотреть сечение гиперповерхности $y = f(\mathbf{x})$ системой гиперплоскостей $x_i = x_{i0}$, проходящих через точку $\mathbf{x}_0$. В сечениях получатся гиперплоские кривые, угловые коэффициенты которых в точке $\mathbf{x}_0$ совпадают с $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$.

Дифференциал функции многих переменных

<u>Определение:</u> Полным дифференциалом функции $y = f(\mathbf{x})$ называется главная линейная относительно Δx_i часть приращения функции Δy в точке $\mathbf{x}_0$.

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

<u>Замечание.</u> Здесь использован тот факт, что в случае если x_i – независимые переменные, то $\Delta x_i = dx_i$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ дифференциал равен:

$$dz = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$$

Составим из частных производных следующий вектор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}.$$

Этот вектор называется **«набла»-оператор** или оператор Гамильтона. Этот оператор отображает множество дифференцируемых функций на множество непрерывных функций. Его действие на функцию $f(\mathbf{x})$ определяется следующим образом

$$\nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$

Тогда дифференциал функции n переменных в точке $\mathbf{a}$ можно записать с помощью скалярного произведения следующим образом

$$df(\mathbf{a}) = (\nabla f(\mathbf{a}), d\mathbf{x}), \quad d\mathbf{x} = \{dx_1, \dots, dx_n\}.$$

Для отображения $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ пространства R^n в R^m, состоящего из дифференцируемых функций, также можно определить дифференциал

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (df_1(\mathbf{a}) \quad \dots \quad df_m(\mathbf{a}))^T.$$

при этом

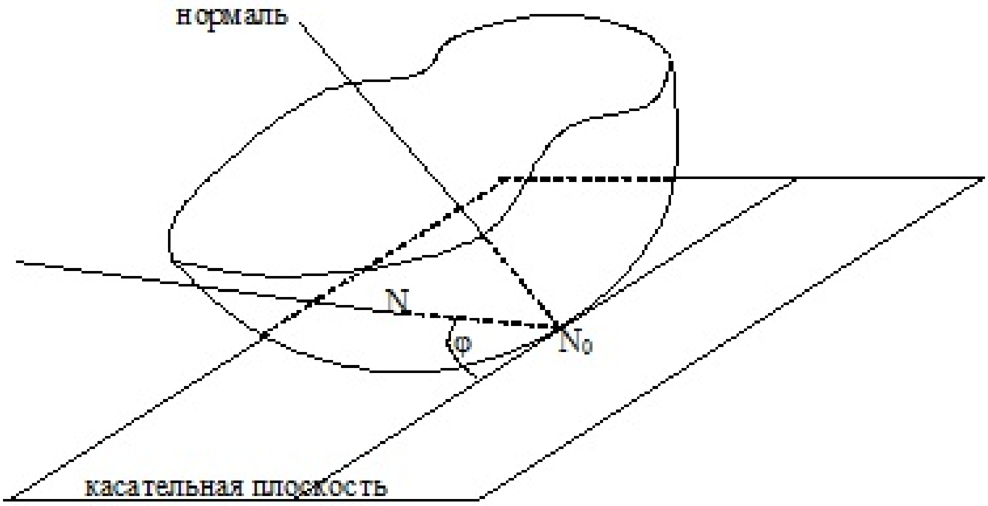
$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_j} dx_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_j} dx_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \mathbf{J} d\mathbf{x}.$$

где матрица $\mathbf{J}$ есть матрица Якоби вектор-функции $\mathbf{f}$, $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)^T$.

Геометрический смысл полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

<u>Определение.</u> Нормалью (нормальной прямой) к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.



В какой-либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, то касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, (x_0, y_0))$ существует и, исходя из геометрического смысла частных производных (см. замечание), **уравнение касательной плоскости** имеет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = df(x_0, y_0).$$

Отсюда следует, что *геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *является приращение аппликаты (координаты* z*) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки* (x_0, y_0) *к точке* $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной. Для произвольной функции n переменных геометрический смысл дифференциала сохраняется, с той лишь разницей, что вместо касательной плоскости рассматривается касательная гиперплоскость, а вместо нормальной прямой, нормальная гиперпрямая.

Зная вектор нормали к касательной плоскости, построенной в точке (x_0, y_0), можно написать **уравнение нормальной прямой** к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

<u>Пример.</u> Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2\,,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=-1;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1);\qquad x-2y+z=0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1};$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}$. Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x})$$
$$f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\Delta f(\mathbf{x})$$

Если подставить в эту формулу приближённое выражение приращения функции через дифференциал $\Delta f(\mathbf{x})\approx df(\mathbf{x})$ то получим приближенную формулу:

$$f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\approx f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Delta x_i$$

В случае функций двух переменных $z=f(x,y)$ эта формула будет иметь вид

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x=1,\ y=2,\ z=1$.

Из заданного выражения определим

$$\Delta x=1.04-1=0.04,\ \Delta y=1.99-2=-0.01,\ \Delta z=1.02-1=0.02$$

Найдем значение функции $u(x,y,z)=\sqrt{1^2+\ln 1}=1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2z\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du=0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=1\cdot 0{,}04-0\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=0{,}04+0{,}01=0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx u(1,2,1)+du=1+0{,}05=1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Теоремы о среднем. Формула конечных приращений.

Для функций многих переменных остаются справедливыми теоремы о среднем (Ролля и Лагранжа), с той лишь разницей, что в качестве области будет рассматриваться не отрезок на числовой оси, а компакт (замкнутое и ограниченное в $\Re^n$ множество)

<u>Теорема Ролля.</u> *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$, *где* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *дифференцируема на компакте* K *и принимает на его границе одинаковые значения. Тогда, в компакте* K *найдётся, по крайней мере, одна точка* $\mathbf{x}_0$, *в которой*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего, заметим, что если функция $y = f(\mathbf{x})$ дифференцируема, то существуют все частные производные. С другой стороны, из дифференцируемости следует непрерывность, а непрерывная функция на компакте достигает наибольшего и наименьшего значений (<u>Вторая теорема Вейерштрасса</u>). Поэтому дальше доказательство можно вести по той же схеме, что и для функций одной переменной. Обозначив эти значения M и m соответственно, рассмотрим два различных случая $M = m$ и $M \neq m$.

Пусть $M = m$. Тогда функция $f(\mathbf{x})$ компакте K сохраняет постоянное значение, и в любой точке интервала её частные производные равны нулю. В этом случае за $\mathbf{x}_0$ можно принять любую точку компакта K.

Пусть $M \neq m$. Так значения на границе компакта K равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри компакта K. Обозначим $\mathbf{x}_0$, точку внутри компакта K, в которой $f(\mathbf{x}_0) = M$. Так как M - наибольшее значение функции, то для любого частного приращения $\Delta\mathbf{x}_i$ (будем считать, что точка $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_i$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta_i f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_0) \le 0$$

При этом $\dfrac{\Delta_i f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} = \begin{cases} \le 0, & \textit{если} \quad \Delta x_i > 0 \\ \ge 0, & \textit{если} \quad \Delta x_i < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке $\mathbf{x}_0$ существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_i f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i}$.

Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta x_i > 0}} \dfrac{\Delta_i f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} \le 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta x_i < 0}} \dfrac{\Delta_i f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} \ge 0$, то можно сделать вывод:

$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_i f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} = 0$, т.е. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$. **Теорема доказана**.

Далее, используя теорему Ролля можно доказать теорему Лагранжа.

<u>Теорема Лагранжа.</u> *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$ *дифференцируема на компакте* K *и в некоторой точке* $\mathbf{x}_1 \in K$, *где* $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ *проведена секущая гиперплоскость к гиперповерхности, определяемой функцией* $y = f(\mathbf{x})$. *Тогда, найдётся, по крайней мере, одна точка* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *внутри компакта* K *в которой касательная гиперплоскость параллельна секущей гиперплоскости.*

<u>Доказательство.</u> Уравнение секущей гиперплоскости имеет вид

$$y - y_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(x_i - x_i^1\right)$$

где $y_1 = f(\mathbf{x}_1)$.

По аналогии с функцией одной переменной введём вспомогательную функцию $F(\mathbf{x})$ определяемую равенством

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - y_1 - \sum_{i=1}^{n} A_i \left(x_i - x_i^1\right) \qquad (1)$$

Покажем, что эта функция на контуре Γ, определяемом системой уравнений

$$\Gamma:\begin{cases} y = f(\mathbf{x}), \\ y - y_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i\left(x_i - x_i^1\right) \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

В самом деле, приравнивая правые части данной системы получаем

$$f(\mathbf{x}) = y_1 + \sum_{i=1}^{n} A_i\left(x_i - x_i^1\right)$$

Подставляя в (1) получим, что $F(\mathbf{x})\big|_{\Gamma} = 0$. Наконец из дифференцируемости функции $y = f(\mathbf{x})$ и линейной функции следует дифференцируемость функции $F(\mathbf{x})$. Таким образом условия теоремы Ролля выполнены, значит существует точка $\mathbf{x}_0$ в которой

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = 0$$

Тогда используя (1) получим

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = A_i$$

Решение последней системы и определяет точку $\mathbf{x}_0$, в которой касательная гиперплоскость задаётся уравнением

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i\left(x_i - x_i^0\right) \qquad (2)$$

где $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

Эта плоскость параллельна секущей гиперплоскости (так как нормальные векторы совпадают). **Теорема доказана**.

Замечание 1. Формула (2) записанная в виде

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\left(x_i - x_i^0\right)$$

называется **формулой конечных приращений Лагранжа**.

Замечание 2. Теорема Лагранжа в данной формулировке не является справедливой для вектор-функции (см. тему «Вектор-функции. Элементы дифференциальной геометрии»).

Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Допустим, что $f(\mathbf{x})$ – дифференцируемая в точке $\mathbf{a}$ функция, $x_i = x_i(t)$ и $x_i(t_0) = a_i$, причем $x_i(t)$ – дифференцируемые в точке t_0 функции. Положим $F(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Тогда

$$\Delta F(t_0) = \Delta f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = f(x_1(t),\ldots,x_n(t)) - f(a_1,\ldots,a_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\left[x_i(t) - a_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{x})\left[x_i(t) - a_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\Big[x_i'(t)(t-t_0) + \beta_i(t)(t-t_0)\Big] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{x})\Big[x_i'(t)(t-t_0) + \beta_i(t)(t-t_0)\Big],$$

где $\beta_i \to 0$ при $t \to t_0$, а $\alpha_i(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, что имеет место при $t \to t_0$.

Тогда

$$F'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta F(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, x_i'(t_0) \qquad (1).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x_i = x_i(t_1,...,t_k) = x(\mathbf{t}),\ i = 1,...,n$. Применяя полученное выше правило, получаем

$$\frac{\partial F(\mathbf{t}_0)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0), \quad \mathbf{t}_0 = \left(t_1^0,...,t_k^0\right), \quad \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{a} \ \ (2).$$

Равенства (1) и (2) дают правила вычисления производных сложных функций.

Пример. $z = e^{2x+3y}, \quad x = \cos t, \quad y = t^2$. Найти $\frac{dz}{dt}$

Решение. Согласно формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Найдём производные входящие в это равенство

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x+3y}, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

Подставляя найденные значения в предыдущее равенство, получим

$$\frac{dz}{dt} = -2\sin t e^{2x+3y} + 6te^{2x+3y} = (6t - 2\sin t)e^{2\sin t + 3t^2}$$

Пример. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad x = u\sin v, \quad y = u\cos v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

Решение. В соответствии с формулой (2) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Вычислим необходимые частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\cos v}{u}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{\sin v}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u\cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -u\sin v$$

Таким образом

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\cos v}{u}\sin v - \frac{\sin v}{u}\cos v = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\cos v}{u}u\cos v - \frac{\sin v}{u}(-u\sin v) = 1$$

Замечание. Конечно, при решении конкретных задач, не всегда следует пользоваться формулами (1) и (2) вычисления производной сложной функции. Иногда проще вначале выполнить подстановку, а потом произвести дифференцирование. Так, например, если в последнем примере подставить функции $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ в $z = f(x,y)$, получим

$$z = \operatorname{arctg}\frac{u\sin v}{u\cos v} = \operatorname{arctg}\operatorname{tg} v = v$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1$.

Тем не менее, следствием этих правил является **инвариантность** формы записи первого дифференциала. Именно, пусть $f = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$. Тогда

$$dF(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial t_j}dt_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)dt_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}dt_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}dt_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = df$$

Это означает, что как в случае независимых переменных $x_1,...,x_n$, так и в случае зависимых переменных $df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.

Частные производные высших порядков.

Если функция $f(x,y)$ определена и дифференцируема в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.** Производные этих функций (если они существуют) будут называться **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f''_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f''_{yx}(x,y).$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

<u>Определение.</u> Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Для функции n переменных $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ частные производные второго порядка обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ или $f''_{x_ix_j}$.

Возникает вопрос: всегда ли $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{a})$?

Ответ на него такой: <u>нет</u>, не всегда! Можно показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

имеет неравные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0{,}0)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0{,}0)$. В самом деле, положив вначале $y=0$, найдём частную производную по переменной y

$$\frac{\partial f(x{,}0)}{\partial y}=\begin{cases} x, & x\neq 0\\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0{,}0)}{y}=0, & x=0\end{cases}$$

Затем, положив $x=0$, найдём частную производную по переменной x

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\begin{cases} -y, & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x{,}0)-f(0{,}0)}{x}=0, & x=0\end{cases}$$

При этом $\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial y}$.

Если ещё посчитать значения этих производных в произвольных точках, то можно будет убедиться, что функция $z=f(x,y)$ будет дифференцируемой, так как все её частные производные непрерывны.

Найдём теперь смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial x\partial y}=\begin{cases} 1, & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=1, & x=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,y)}{\partial y\partial x}=\begin{cases}-1, & x\neq 0\\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=-1, & x=0\end{cases}$$

Таким образом, получили, что

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1$$

Итак, смешанные частные производные в точке $(0,0)$ оказались неравны.

Ответ на вопрос: в каком случае смешанные частные производные будут равны даётся следующей теоремой.

Теорема. *Пусть* $f(x,y)$ *определена в открытой области* D *и пусть в этой области существуют частные производные до второго порядка включительно*

$$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Пусть $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *непрерывны в точке* (x_0,y_0).

Тогда в этой точке $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Доказательство. Пусть $h,k\neq 0$ числа такие, что область D содержит все точки из прямоугольника со сторонами от x_0 до x_0+h и от y_0 до y_0+k. Пусть

$$W(h,k)=\frac{1}{hk}\left(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)\right).$$

Положим

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k},\ \psi(y)=\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h},$$

тогда

$$W=\frac{1}{k}\left[\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\right]=\frac{1}{h}\left[\frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k}\right].$$

В промежутке $[x_0;x_0+h]$, по условию теоремы, функция $\varphi(x)$ имеет производную

$$\varphi'(x)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)}{k}.$$

и, значит, $\varphi(x)$ непрерывна, причем по теореме Лагранжа

$$W=\frac{1}{k}\left[\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\right]=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h,y_0)\right)=$$ (вновь по теореме

Лагранжа) $=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\Theta_1 h,y_0+\Theta_2 k)$, где $0<\Theta_1<1,\ 0<\Theta_2<1$.

С другой стороны, аналогично, получаем

$$W=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\Theta_3 h,y_0+\Theta_4 k),\text{ где } 0<\Theta_3<1,\ 0<\Theta_4<1.$$

Следовательно, устремляя (h,k) к $(0,0)$ получаем, ввиду непрерывности

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}W=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}W=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

Таким образом, теорема доказана.

Как видно из доказанной теоремы, достаточным условием равенства смешанных производных в точке является их непрерывность в данной точке.

Упражнение. Показать, что в рассмотренном примере смешанные производные не являются непрерывными в точке $(0, 0)$.

Замечание. По аналогии можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $u = f(x_1,..., x_n)$ *определена в открытой области* $D \subset R^n$ *и имеет в этой области всевозможные частные производные до* $(k-1)$*-го порядка включительно и смешанные производные* k*-го порядка, причем все эти производные непрерывны в* D. *При этих условиях значение любой* k*-й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производится последовательное дифференцирование.*

Например, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}$ и т.п.

Дифференциалы высших порядков

Пусть $u = f(\mathbf{x})$ имеет непрерывные производные в области $D \subset R^n$. Тогда

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad (1).$$

При этом, если $x_1,..., x_n$ – <u>независимые</u> переменные, то $dx_1,..., dx_n$ можно считать <u>постоянными</u> величинами, на зависящими от $\mathbf{x}$. Поэтому $d^2 x_i = d(dx_i) = 0, i = 1,..., n$.

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка. Положим по определению

$$d^2 f(\mathbf{x}) = d(df(\mathbf{x})) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \qquad (2).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $d^2 x_i \equiv 0$. Например, при $n = 2$

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

при $n = 3$

$$\partial^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dxdz.$$

Вообще, легко заметить, что используя формальную операторную запись,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 f = (\nabla, d\mathbf{x})^2 f \qquad (3).$$

Аналогично, полагая $d^k f = d(d^{k-1} f)$, находим:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k f = (\nabla, d\mathbf{x})^k f \qquad (4)$$

в предположении, что для f существуют частные производные до k-го порядка включительно.

Доказательство этого утверждения можно провести индукцией по k. Мы не будем подробно останавливаться на этом.

Отметим, что если $x_i = x_i(t_1,..., t_k)$ (т.е. переменные x_i не <u>независимые</u>, а представляют собой функции от других переменных), то $d^2 x_i$, вообще говоря, не равны 0 и, хотя ввиду инвариантности 1-го дифференциала, формула (1) сохраняется, уже в формулах (2) и (3) (не говоря о (4)) следует внести изменения. Именно, вместо (3) в этом случае верна формула

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2 x_i \quad (5).$$

«Добавок» по отношению к (3) получается из-за того (см. вывод (2)), что в нашем случае

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j + \frac{\partial f}{\partial x_i}d^2 x_i .$$

Однако, если $x_i = a_{i1}t_1 + ... + a_{ik}t_k + b_i$ то $dx_i = a_{i1}dt_1 + ... + a_{ik}dt_k$ и $d^2 x_i = d(const) = 0$. Поэтому в случае <u>линейной</u> замены переменных (6) формулы (3) и (4) сохраняются.

Раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя.

Ранее уже были рассмотрены некоторые методы вычисления пределов функций многих переменных. Рассмотрим следующую задачу: найти предел

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \qquad (1)$$

Если $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) = 0$, то получаем неопределённость вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Как известно, кроме таких неопределённостей существуют также неопределённости: $\left\{\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^0\right\}$. В случае функции одной переменной достаточно эффективным приёмом для раскрытия неопределённостей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ является правило Лопиталя. Это правило с некоторыми видоизменениями сохраняет силу и для функций многих переменных. Так как, неопределённости вида $\left\{\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty}, \infty^0\right\}$ с помощью алгебраических преобразований сводятся к неопределённости $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, поэтому изложение метода будем проводить для неопределённостей именного этого типа.

При изучении функций одной переменной были определены отношения между бесконечно малыми функциями, кроме того было введено понятие <u>порядка малости</u>, а именно: *бесконечно малая функция одной переменной* $y = f(x)$ *называется* ***бесконечно малой порядка k,*** *если предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x^k}$ *конечен и отличен от нуля.*

В таком виде данное определение нельзя использовать для функций многих переменных, поэтому мы дадим это определение заново и покажем, что оно не противоречит ранее данному определению для функций одной переменной.

<u>**Определение.**</u> Функция $y = f(\mathbf{x})$ является **бесконечно малой** k**-го порядка** в точке $\mathbf{a}$ если:

1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$,
2) $d^i f(\mathbf{a}) = 0, \quad i < k$,
3) $d^k f(\mathbf{a}) \neq 0$.

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$, которая является бесконечно малой порядка k в точке $x = a$. В этом случае её можно представить в виде $f(x) = (x-a)^k g(x)$, где $g(a) \neq 0$. Найдём n-ю производную функции $f(x)$. По формуле Лейбница

$$f^{(n)}(a)=\left(\left(x-a\right)^k g(x)\right)^{(n)}\Big|_{x=a}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\left(x-a\right)^k\right)^{(i)} g^{(n-i)}(x)\Big|_{x=a}=\begin{cases}0, & n<k,\\ k!g(a), & n=k\end{cases}$$

Это и означает, что $d^i f(\mathbf{a})=0, \quad i<k$, $d^k f(\mathbf{a})\neq 0$. И обратно, интегрируя равенство $d^k f(x)=k!g(x)$ в пределах от a до x, с применением теоремы о среднем, получим, что $f(x)=(x-a)^k g(x)$. Таким образом, эквивалентность этих определений в случае функции одно переменной установлена. Докажем теперь следующую теорему

<u>Теорема</u> (обобщённое правило Лопиталя). *Пусть функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $\mathbf{a}$ *и являются бесконечно малыми первого порядка в этой точке. Пусть также все их первые частные производные отличны от нуля. Тогда для существования предела* (1)

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}=b \qquad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})/\partial x_i}{\partial g(\mathbf{a})/\partial x_i}=\frac{f'_{x_i}(\mathbf{a})}{g'_{x_i}(\mathbf{a})}=b, \quad \forall i=\overline{1,n} \qquad (3)$$

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Пусть предел (2) существует, а условие (3) не выполнено. Например, для первых частных производных

$$\frac{f'_{x_1}(\mathbf{a})}{g'_{x_1}(\mathbf{a})}=b_1,$$

а для всех остальных частных производных

$$\frac{f'_{x_i}(\mathbf{a})}{g'_{x_i}(\mathbf{a})}=b, \quad \forall i=\overline{2,n}$$

Тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа получим

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})}{g(\mathbf{x})-g(\mathbf{a})}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f'_{x_1}(\mathbf{a})\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}{g'_{x_1}(\mathbf{a})\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{b_1 g'_{x_1}(\mathbf{a})\Delta x_1+b\sum_{i=2}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}{g'_{x_1}(\mathbf{a})\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}$$

Положим $\Delta x_i=(\Delta x_1)^2, \quad i=\overline{2,n}$, тогда этот предел будет равен b_1. Если взять, например $\Delta x_i=(\Delta x_2)^2, \quad \forall i\neq 2$, предел будет равняться b. Это означает, общий предел не существует. Мы пришли к противоречию, следовательно, для существования предела (2) необходимо выполнение условия (3)

<u>Достаточность.</u> Пусть теперь условие (3) выполнено. Тогда, по формуле конечных приращений Лагранжа получаем

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})}{g(\mathbf{x})-g(\mathbf{a})}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{b\sum_{i=2}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}{\sum_{i=2}^{n} g'_{x_i}(\mathbf{a})\Delta x_i}=b$$

Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> Условиями теоремы не запрещено, чтобы величина b равнялась 0 или ∞. Тем не менее, теорема не даёт ответа на вопрос, что будет, если часть частных производных по каким либо координатам одновременно для функций $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ обращаются в нуль в точке $\mathbf{a}$. Например, пусть первые частные производные по переменной x_1 равны нулю

$$f'_{x_1}(\mathbf{a})=g'_{x_1}(\mathbf{a})=0$$

Очевидно, что в этом случае для существования двойного предела (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f'_{x_1}(\mathbf{x})}{g'_{x_1}(\mathbf{x})} = \frac{f'_{x_i}(\mathbf{a})}{g'_{x_i}(\mathbf{a})} = k, \quad \forall i = \overline{2,n}$$

Аналогично разбираются другие случаи обращения в нуль частных производных. Если же в нуль обращаются частные производные по разным переменным, например $f_{x_1}(\mathbf{a}) = g_{x_2}(\mathbf{a}) = 0$, то не выполняется необходимое условие существования общего предела, следовательно, он существует.

Замечание 2. Данная теорема может быть обобщена на случай, когда функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ являются бесконечно малыми k-го порядка в точке $\mathbf{a}$. В этом случае, для существования общего предела потребуется равенство отношений соответствующих смешанных частных производных k-го порядка в точке $\mathbf{a}$.

Однородные функции. Формула Эйлера.

Определение. Функция n переменных $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ определённая в области D называется **однородной функцией k-й степени (k-го порядка)** если для любого действительного числа $\alpha \in \Re$ справедливо равенство

$$f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n) = \alpha^k f(x_1,\ldots,x_n) \qquad (1)$$

или в векторной форме

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x})$$

Примеры.

1) $z = ax + by$ – однородная функция (многочлен) 1-й степени
2) $z = ax^2 + bxy + cy^2$ – однородная функция второй степени
3) $z = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}$ – однородная функция (многочлен) n-й степени
4) $z = ax^2 + by$ – не является однородной функцией

Исследуем основные свойства однородных функций. Для этого рассмотрим вначале однородную функцию нулевой степени. В этом случае

$$f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$$

Положив $\alpha = 1/x_1$ получим

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right) \qquad (2)$$

Введя теперь новые переменные $t_i = x_{i+1}/x_1$, $i = \overline{1,n-1}$ получим

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right) = \varphi(t_1,\ldots,t_{n-1})$$

Таким образом, в однородной функции нулевой степени можно уменьшить количество переменных на одну. Очевидно также, что функция φ тоже будет однородной функцией нулевого порядка.

Рассмотрим теперь однородную функция k-й степени. Тогда

$$f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n) = \alpha^k f(x_1,\ldots,x_n)$$

Сделав ту же замену переменных $\alpha = 1/x_1$ получим

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{x_1^k} = f\left(1, \frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right) = \varphi(t_1,\ldots,t_{n-1}) \qquad (3)$$

где $\varphi(t_1,\ldots,t_{n-1})$, как нетрудно видеть, является однородной функцией нулевой степени.

Формулы (2) и (3) дают общие выражения для однородных функций нулевой и k-й степени. С использованием этих формул можно установить, что например:

1) $\sin\frac{x}{y}$ – однородная функция нулевого порядка.

2) $x^2\sin\frac{x}{y}$ – однородная функция второго порядка.

Используя определение нетрудно доказать следующие свойства:

1) Сумма двух однородных функций одинаковой степени определённых в области D есть однородная функция той же степени в области D.

2) Произведение двух однородных функций степени k и m определённых в области D есть однородная функция степени $k+m$ в области D.

3) *Частное двух однородных функций степени k и m определённых в области D есть однородная функция степени $k-m$ в области D.*

Кроме того, очевидно, что сумма двух однородных функций разных степеней не является однородной функцией (см. пример 4).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании однородных функций. Рассмотрим однородную функция k-й степени. Продифференцируем равенство (1) по переменной α (левую часть как сложную функцию)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial(\alpha x_i)}x_i = k\alpha^{k-1}f.$$

Если теперь в последнем равенстве положить теперь $\alpha=1$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = kf.$$

Это равенство носит название **формулы Эйлера**.

Формула Тейлора

Из доказанной в первом семестре теоремы следует, что

$$\Delta F(t_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kF(t_0)+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F\big(t_0+\Theta(t-t_0)\big),,\quad 0<\Theta<1 \qquad (1)$$

при условии существования $m+1$ производной функции F в окрестности точки t_0.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0\in R^n$, $f(\mathbf{x})$ обладает непрерывными частными производными всех порядков до $(m+1)$-го включительно в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}$ принадлежит этой окрестности с отрезком, соединяющим $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$. Параметрические уравнения этого отрезка имеют вид:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\ 0\le t\le 1, \text{ или } x_i=x_i^0+t\left(x_i-x_i^0\right), i=1,\dots,n.$$

Рассмотрим функцию $F(t)=f\big(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\big)$.

Тогда $\Delta f(\mathbf{x}_0)=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=F(1)-F(0)=\Delta F(0)$.

Согласно формуле (1) при $t_0=0, t=1$ это приращение равно

$$\Delta F(0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kF(0)+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F(\Theta).$$

Осталось заметить, что так как $\mathbf{x}$ линейно зависит от t, $d^2x_i=0, i=1,\dots,n$, то выполняется свойство инвариантности для всех дифференциалов функции $f(\mathbf{x})$, т.е.

$$d^kF(0)=d^kf(\mathbf{x}_0), k=1,\dots,m \text{ и } d^{m+1}F(\Theta)=d^{m+1}f\big(\mathbf{x}_0+\Theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\big).$$

Тогда

$$\Delta f(\mathbf{x}_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kf(\mathbf{x}_0)+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f\big(\mathbf{x}_0+\Theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\big)$$

Выпишем в качестве примера члены до третьего прядка малости в формуле Тейлора для функции двух переменных $z = f(x, y)$. Рассмотрим произвольную точку (x_0, y_0), тогда

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2!}\Big[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2 \Big] +$$
$$+\frac{1}{3!}\Big[f'''_{xxx}(x_0,y_0)\Delta x^3 + 3 f'''_{xxy}(x_0,y_0)\Delta x^2\Delta y + 3 f'''_{xyy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y^3 + f'''_{yyy}(x_0,y_0)\Delta y^3 \Big] + o\left(\rho^3\right),$$
$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Пример. $z = \sin(x+y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Решение.

$$z'_x = z'_y = \cos(x+y), \quad z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 1,$$
$$z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = -\sin(x+y), \quad z''_{xx}(0,0) = z''_{xy}(0,0) = z''_{yy}(0,0) = 0,$$
$$z'''_{xxx} = z'''_{xxy} = z'''_{xyy} = z'''_{yyy} = -\cos(x+y), \quad z'''_{xxx}(0,0) = z'''_{xxy}(0,0) = z'''_{xyy}(0,0) = z'''_{yyy}(0,0) = -1$$

Таким образом,

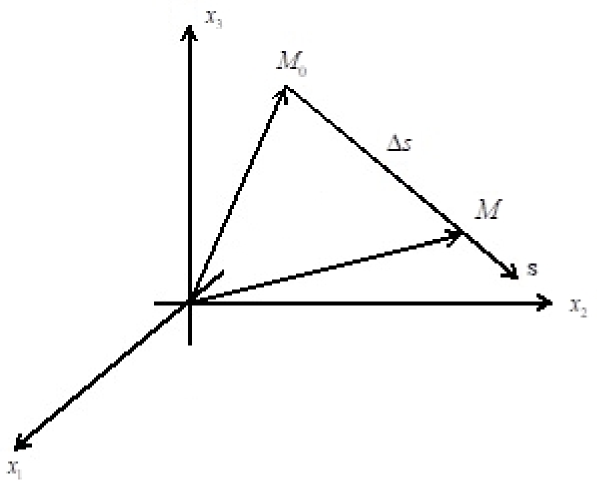
$$\sin(x+y) = x + y - \frac{1}{3!}\left(x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\right) + o\left(\rho^3\right) = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + o\left(\rho^3\right), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Эту формулу можно индуктивно обобщить. Получим

$$\sin(x+y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x+y)^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Производная по направлению. Градиент.

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ в точке $M(\mathbf{x})$ и точке $M_1(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n$, $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.



Проведем через точки M и M_1 вектор $\mathbf{s}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей обозначим соответственно φ_i. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\mathbf{s}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\mathbf{s}$ обозначим Δs.

$$\Delta s = \left|\overline{M_0 M}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$$

Далее предположим, что функция $u(\mathbf{x})$ дифференцируема в некоторой области, содержащей точки M и M_1. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i,$$

где величины α_i – бесконечно малые при $\Delta s \to 0$.

В ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta s} = \cos\varphi_i$$

Таким образом, приведенное выше равенство может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cos\varphi_i \;;$$

Из этого равенства следует следующее определение:

Определение: Предел $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ называется **производной функции** $f(\mathbf{x})$ **по направлению вектора** $\mathbf{s}$ в точке $M(\mathbf{x})$, который в прямоугольной декартовой системе координат равен

$$\frac{\partial f(M)}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(M)}{\partial x_i} \cos\varphi_i$$

Для функций трёх переменных $u = f(x, y, z)$ имеем соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

где α, β, γ углы образованные вектором $\mathbf{s}$ с осями Ox, Oy и Oz.

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $M_0(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, где $M(3, 0)$

Решение. Прежде всего, необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{M_0 M}$.

$$\overrightarrow{M_0 M} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx.$$

Значения этих величин в точке A: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4$.

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ производим следующие преобразования:

$$\mathbf{s} = \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

За величину $\mathbf{s}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{M_0 M}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Окончательно получаем: $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ – значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ в точке M_0.

Определение: Если в некоторой области D задана функция дифференцируемая $f(\mathbf{x})$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям частных производных функции f в соответствующей точке

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbf{e}_i=\nabla f,$$

где $\{\mathbf{e}_i\}$ – ортонормированный базис в $\Re^n$, ∇ – «набла»-оператор, определяемый как

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}.$$

При этом говорят, что в области D задано **поле градиентов**.

Для функций трёх переменных $u=f(x,y,z)$

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{dy}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=\nabla f,\ \nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\},$$

где $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ – базис прямоугольной декартовой системы координат.

Теорема: *Пусть задана дифференцируемая функция* $f(\mathbf{x})$. *Тогда производная* $\frac{\partial f}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\mathbf{s}$ *равняется проекции вектора* $\operatorname{grad} f$ *на вектор* $\mathbf{s}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{s}=\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i\mathbf{e}_i$ и некоторую функцию $y=f(\mathbf{x})$ и найдем скалярное произведение векторов $\mathbf{s}$ и $\operatorname{grad} f$.

$$(\operatorname{grad} f,\mathbf{s})=(\nabla f,\mathbf{s})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos\varphi_i$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции f по направлению $\mathbf{s}$.

Т.е. $(\operatorname{grad} f,\mathbf{s})=\frac{\partial f}{\partial s}$. Если угол между векторами $\operatorname{grad} f$ и $\mathbf{s}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\mathbf{s}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|\operatorname{grad} f|\cdot\cos\varphi=\frac{\partial f}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства и является проекцией вектора $\operatorname{grad} f$ на вектор $\mathbf{s}$. Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля f в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Установим ряд важных свойств градиента: пусть $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ имеют все частные производные 1-го порядка. Тогда

1. $\nabla(f_1(\mathbf{x})+f_2(\mathbf{x}))=\nabla f_1(\mathbf{x})+\nabla f_2(\mathbf{x})$;
2. $\nabla(cf(\mathbf{x}))=c\nabla f(\mathbf{x})$;

3. $\nabla\left(f_1(\mathbf{x})\cdot f_2(\mathbf{x})\right)=f_1(\mathbf{x})\nabla f_2(\mathbf{x})+f_2(\mathbf{x})\nabla f_1(\mathbf{x})$;

4. Если $f_2(\mathbf{x})\neq 0$, то $\nabla\left(\dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})}\right)=\dfrac{f_2(\mathbf{x})\nabla f_1(\mathbf{x})-f_1(\mathbf{x})\nabla f_2(\mathbf{x})}{\left(f_2(\mathbf{x})\right)^2}$;

5. Если $F(u)$ – функция от одной переменной, имеющая производную, то $\nabla F\left(f(\mathbf{x})\right)=F'\left(f(\mathbf{x})\right)\nabla f(\mathbf{x})$.

Доказательства всех этих свойств вполне аналогичны. Разберем, например, свойство (3). По правилам дифференцирования,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 f_2)=f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_i},$$

$$\nabla(f_1 f_2)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 f_2),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(f_1 f_2)\right)=$$

$$=\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ldots,f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)=f_1\nabla f_2+f_2\nabla f_1.$$

Пример. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке M_0 по направлению нормали, проходящей через эту точку к поверхности S и образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

$$u=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2},$$
$$S:\ x^2-6x+9y^2+z^2=4z+23,\quad M_0(3,0,-4).$$

Решение.

$$\mathbf{n}=\operatorname{grad}F,\quad F(x,y,z)=x^2-6x+9y^2+z^2-4z-23,$$

$$\operatorname{grad}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}=(2x-6)\mathbf{i}+18y\mathbf{j}-(2z-4)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}|_{M_0}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}-12\mathbf{k},\quad |\mathbf{n}|=\sqrt{0^2+0^2+(-12)^2}=12,$$

$$\cos\alpha=0,\quad\cos\beta=0,\quad\cos\gamma=-1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\quad\frac{\partial U}{\partial z}=0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}=0.6,\quad\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}=0,\quad\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0{,}6\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-1)=0.$$

Пример. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$в точке M_0.

$$v=x^2-y^2-3z^2,\quad u=\frac{x}{yz^2},\quad M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Решение. Пусть α - искомый угол.

$$\cos\alpha=\frac{(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)_{M_0}}{|\operatorname{grad}u|_{M_0}\cdot|\operatorname{grad}v|_{M_0}},$$

$$\operatorname{grad}v=2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}-6z\mathbf{k},\quad\operatorname{grad}v|_{M_0}=\sqrt{2}\mathbf{i}-\sqrt{2}\mathbf{j}-2\sqrt{3}\mathbf{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} v\right|_{M_0}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4,$$

$$\operatorname{grad} u=\frac{1}{yz^2}\mathbf{i}-\frac{x}{y^2z^2}\mathbf{j}-\frac{2x}{yz^3}\mathbf{k},$$

$$\operatorname{grad} u\,|_{M_0}=3\sqrt{2}\mathbf{i}-3\sqrt{2}\mathbf{j}-6\sqrt{3}\mathbf{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} u\right|_{M_0}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(-3\sqrt{2}\right)^2+\left(-6\sqrt{3}\right)^2}=12,$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}}{4\cdot 12}=1\Rightarrow \alpha=\pi.$$

Пример. Пусть $\mathbf{r}=(x,y,z),\ r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найдем

$$\nabla r=\nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}r,\frac{\partial}{\partial y}r,\frac{\partial}{\partial z}r\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Для часто встречающихся в физике радиальных функций $F(r)$ согласно свойству (5) получаем:

$$\nabla F(r)=F'(r)\nabla r=F'(r)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума

Пусть $f(\mathbf{x})$ определена в окрестности точки $\mathbf{x}_0\in R^n$. Будем говорить, что $\mathbf{x}_0$ – **точка локального минимума (строгого)**, если для всех $\mathbf{x}$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\mathbf{x}_0)$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x})>f(\mathbf{x}_0)$. Точка $\mathbf{x}_0$ – **точка локального максимума**, если для всех $\mathbf{x}\in\dot{U}(\mathbf{x}_0)$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x})<f(\mathbf{x}_0)$. Точки минимума и максимума называются **точками экстремума** функции.

Теорема. Если $\mathbf{x}_0$ – точка экстремума и существует $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=0,\ \forall i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим точки, у которых все координаты, кроме i-ой фиксированы и равны координатам точки $\mathbf{x}_0$, а координата x_i меняется. Тогда функцию $f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right)$ можно рассматривать как функцию от одной переменной x_i, имеющую экстремум в точке x_i^0 и дифференцируемую в этой точке. Поэтому производная этой функции равна 0. Вместе с тем она, по определению, есть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Разумеется, в точке экстремума частные производные могут и не существовать.

Пример. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$. Эта точка, очевидно, точка минимума, т.к. если хотя бы одно из чисел x,y отлично от 0, величина $z>0$. Но $z(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$ и $z(0,y)=\sqrt{y^2}=|y|$, поэтому частные производные в точках $x=0$ и $y=0$ не существуют.

Замечание 2. Если все частные производные в точке экстремума $\mathbf{x}_0$ существуют, то все они равны 0 и $\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$, а также $df(\mathbf{x}_0)\equiv 0$ как функция от $dx_1,\ldots,dx_n$.

Определение. Точка $\mathbf{x}_0$, в которой все частные производные равны нулю, называется **стационарной точкой**.

Замечание 3. Равенство нулю всех частных производных не является достаточным условием экстремума.

Пример. $z = xy$, в точке $(0,0)$ все частные производные равны нулю, но это не экстремум. Эта точка является стационарной

Замечание 4. В точке экстремума дифференцируемой функции $z(x, y)$ касательная плоскость параллельна плоскости OXY.

Достаточные условия экстремума

Сначала мы изложим схему исследования функции $f(\mathbf{x})$ на экстремум. Прежде всего, найдем **стационарные** точки $\mathbf{x}_0$, т.е. такие, что $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (или $df(\mathbf{x}_0) = 0$). Затем предполагая, что $f(\mathbf{x})$ имеет частные производные до 2-го порядка включительно, непрерывные в стационарных точках, применим в этих точках формулу Тейлора

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0 + \Theta\Delta\mathbf{x}) = \{0 < \Theta < 1\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_0)\Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_{ij}(\mathbf{x})\Delta x_i \Delta x_j$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{ij}(\mathbf{x}) \to 0$ при $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0}$

(поскольку $\Theta\Delta\mathbf{x}$ – точка, близкая к $\mathbf{0}$, а производные 2-го порядка непрерывные и $df(\mathbf{x}_0) = 0$).

Таким образом, знак приращения совпадает со знаком 2-го дифференциала, так как второе слагаемое бесконечно мало при $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Второй дифференциал есть квадратичная форма от $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$. Если это – положительно определенная форма, то $\Delta f(\mathbf{x}_0) > 0$ и в точке $\mathbf{x}$ – минимум. Если форма отрицательно определенная, то максимум. Если форма неопределенная (т.е. меняет знак), то экстремума нет.

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_0)\Delta x_i \Delta x_j$:

А) положительно определённая, если

$$A_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

В этом случае в точке $\mathbf{x}_0$ - минимум

Б) отрицательно определённая, если

$$A_{11} < 0,\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0,\ \ldots,\ (-1)^n \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

В этом случае в точке $\mathbf{x}_0$ – максимум.

Выписанные условия и являются достаточными условиями экстремума.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, которая имеет непрерывные производные 2-го порядка в точке (x_0, y_0). Если (x_0, y_0) - стационарная точка то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Обозначим $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

(при этом $d^2 f(x_0, y_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$).

Если $D = AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то (x_0, y_0) – точка минимума.

Если $D = AC - B^2 > 0$ и $A < 0$ – то максимума.

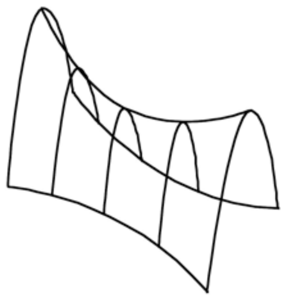
Если $D = AC - B^2 < 0$, то экстремума в рассматриваемой точке нет.

Если $AC - B^2 = 0$ – необходимо дальнейшее исследование.

Замечание. Достаточное условие экстремума имеет простую геометрическую иллюстрацию. В окрестности точки экстремума график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» эллиптического параболоида:

В случае точки минимума

В случае точки максимума



Если же этот график «почти» гиперболического параболоида (седло), то экстремума нет.

Пример. Найти точки экстремума функции $z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Найдем стационарные точки: $P_1(2,1), P_2(-2,-1), P_3(1,2), P_4(-1,-2)$. Найдем вторые частные производные и их числовые значения A_i, B_i, C_i в каждой точке P_i, $(i = 1, \ldots, 4)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x; \ A_1 = 12, A_2 = -12, A_3 = 6, A_4 = -6;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y; \ B_1 = 6, B_2 = -6, B_3 = 12, B_4 = -12;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x; \ C_1 = 12, C_2 = -12, C_3 = 6, C_4 = -6.$$

Тогда:

$$D_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 108 > 0 \text{ - экстремум есть;}$$

$$D_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 108 > 0 \text{ - экстремум есть;}$$

$$D_3 = A_3C_3 - B_3^2 = -108 < 0 \text{ - экстремума нет;}$$

$$D_4 = A_4C_4 - B_4^2 = -108 < 0 \text{ - экстремума нет;}$$

Поскольку $A_1 > 0$, то точка $P_1(2, 1)$ – точка минимума; так как $A_2 < 0$, то $P_2(-2, 1)$ – точка максимума; $z_{\min} = f(2,1) = -28, \quad z_{\max} = f(-2,-1) = 28$.

<u>Пример.</u> Найти точки экстремума функции $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

Решение. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 = 0 \end{cases}$$

определим стационарную точку $P_1(0,0)$. Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \ A_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \ B_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2, \ C_1 = 0$$

$D_1 = 0$ – неопределенность; требуется дополнительное исследование. Рассмотрим поведение функции z в окрестности точки $P_1(0,0)$

Представим $z = f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Очевидно, что $f(0,0) = 0$. Рассмотрим любую окрестность точки $P_1(0,0)$. Среди точек, расположенных в первом квадранте сколь угодно близко к нулю, располагаются точки, у которых $x > y > 0$, и точки, у которых $y > x > 0$. Отсюда следует, что сколь угодно близко к точке $P_1(0,0)$ найдется точка $P_2(x, y), \quad (x > 0,\ y > 0,\ x > y)$, такая, что

$$f(P_2) > 0, \text{ т.е. } f(P_1) - f(P_2) > 0,$$

а также точка $P_3(x, y), \quad (x > 0,\ y > 0,\ y > x)$, такая, что

$$f(P_3) < 0, \text{ т.е. } f(P_1) - f(P_3) < 0$$

Поэтому функция не имеет экстремума.

Неявная функция

Термин «неявная функция» относится к способу задания функциональной зависимости между x и y и означает, что вместо <u>явной формулы</u> $y = f(x)$ эта зависимость представлена уравнением $F(x, y) = 0$.

Следует отметить, что уравнение $F(x, y) = 0$ <u>не всегда</u> определяет функцию $y = f(x)$. Например, уравнение $x = 1$ функцию $y = f(x)$ <u>не определяет</u>.

Кроме того, уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда позволяет <u>однозначно</u> выразить y через x. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, задающее окружность на плоскости, определяет при $-1 \le x \le 1$ две непрерывные функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. В этом примере можно, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $y \ge 0$. Тогда мы получим только $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$.

Условия, при которых существует единственная функция $y = f(x)$, задаваемая уравнением $F(x, y) = 0$, дает следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> *Пусть* $F(x,y)$ *определена и непрерывна вместе с частными производными* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *в окрестности точки* (x_0, y_0) *такой, что* $F(x_0, y_0)=0$ *и* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\neq 0$.

Тогда существуют числа ε *и* δ *такие, что на множестве* $|x-x_0|\le\delta, |y-y_0|\le\varepsilon$ *уравнение*

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$y=f(x) \qquad (2),$$

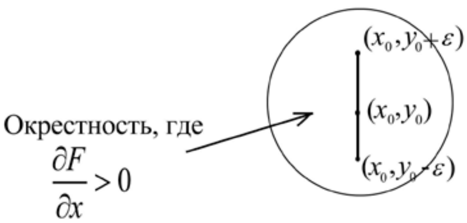
где $f(x)$ *– непрерывная и дифференцируемая на* $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ *функция, и*

$$f'(x)=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

<u>Замечание.</u> Равносильность (1) и (2) означает, что уравнение (1) однозначно определяет в рассматриваемой области дифференцируемую функцию $y=f(x)$ такую, что $F(x, f(x))\equiv 0$ при $x\in[x_0-\delta; x_0+\delta]$.

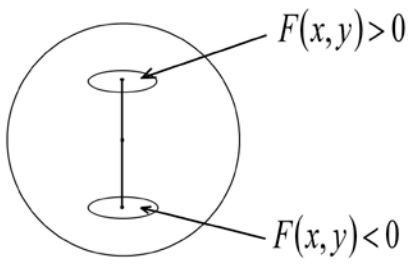
Доказательство. По условию $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\neq 0$. Пусть, для определенности, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)>0$. Ввиду непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, это неравенство выполняется при всех (x,y) из некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Следовательно, $\exists\varepsilon>0$ такое, что функция $F(x_0, y)$ обладает на отрезке $[y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon]$ положительной производной и, значит, возрастает. Поскольку $F(x_0, y_0)=0$, из этого следует, что при $y_0-\varepsilon\le y\le y_0$ функция $F(x_0, y)<0$, а при $y_0\le y\le y_0+\varepsilon$ $F(x_0, y)>0$.

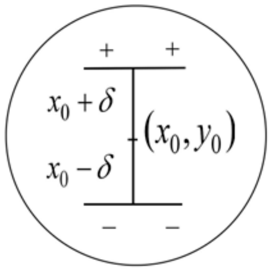


Далее, $F(x,y)$ – также непрерывна. Поэтому она сохраняет знак в некоторой окрестности любой точки, где она положительна или отрицательна.

Значит, можно выбрать δ так, чтобы $\begin{cases} F(x, y_0+\varepsilon)>0 \\ F(x, y_0-\varepsilon)<0 \\ x\in[x_0-\delta; x_0+\delta] \end{cases}$.



При любом фиксированном $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ функция $F(x, y)$ возрастает на $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. При этом $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Поэтому существует, притом единственное значение y такое, что $F(x, y) = 0$. Это значение соответствует точке x. Это соответствие и обозначается $y = f(x)$.



Таким образом, искомая функция построена. При этом, просто по построению $F(x, f(x)) \equiv 0$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Докажем, что $f(x)$ непрерывна. Пусть приращению Δx соответствует приращение Δy. При этом $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ по построению $f(x)$. Но F – дифференцируемая функция, поэтому

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (3),$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Так как по построению окрестности $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, из равенства (3) следует, что при $\Delta x \to 0$ также и $\Delta y \to 0$, что означает непрерывность построенной $f(x)$ ($\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$).

Из равенства (3) следует, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \beta\right)\Delta y = \left(-\frac{\partial F}{\partial x} - \alpha\right)\Delta x, \text{ т.к. } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0,\ \alpha \text{ и } \beta \to 0$$

при достаточно малых Δx (а значит, по доказанному выше, и Δy) коэффициент при Δy отличен от 0 и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \beta}.$$

Значит, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать такую теорему:

<u>Теорема 2.</u> *Пусть функция $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна и имеет все непрерывные частные производные в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ такой, что $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$, причем $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$.*

Тогда существуют числа $\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon$ такие, что в области $|x_i - x_i^0| \le \delta_i, i = 1, \ldots, n,$ $|y - y^0| < \varepsilon$ уравнение $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, причем функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y)}.$$

Важную роль играет аналогичная теорема для <u>системы</u> уравнений. Сформулируем некоторый частный случай подобной теоремы.

<u>Теорема 3.</u> *Пусть*

$$\begin{cases} x_1(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad m < n \\ x_m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \end{cases} \qquad (4),$$

где функции $x_i(t_1, \ldots, t_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой области* $D \subset \Re^n$ *(точки* $(t_1, \ldots, t_n) \in D$ *).*

Пусть матрица Якоби J *имеет в этой области ранг* m.

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right).$$

Тогда, если, например, минор

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \frac{\partial x_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то в области D *систему* (4) *можно преобразовать к уравнениям*

$$\begin{cases} t_1 = t_1(t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, t_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_m = t_m(t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, t_n) = 0 \end{cases} \qquad (5),$$

причем t_i *есть непрерывно дифференцируемая функция от переменных* $t_{m+1}, \ldots, t_n$ *и их частные производные равны*

<u>Пример 1.</u> Дано уравнение $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \arctan\frac{y}{x}$. Найти y', y''.

<u>Решение</u>. Приведем уравнение к виду $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \arctan\frac{y}{x} = 0$.

При $x \neq 0$ левая часть – непрерывная функция.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\left(-y/x^2\right)}{1 + y^2/x^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0, \text{ если } y \neq x.$$

Итак, если $x \neq 0$ и $y \neq x$, то рассматриваемое уравнение определяет y как функцию от x, и

$$y' = -\frac{x + y}{y - x} = \frac{x + y}{x - y} \qquad (6).$$

Для подсчета второй производной:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2}.$$

Согласно (11),

$$y'' = \frac{\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)(x-y)-(x+y)\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)}{(x-y)^2} = 2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}.$$

Пример 2. Преобразовать уравнение $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$ считая новой функцией

$$w = \ln z - (x+y) \qquad (7),$$

и новыми независимыми переменными

$$u = x^2 + y^2,\ v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (8).$$

Решение. Согласно (7)

$$dw = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) - dx - dy \qquad (9).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{\partial w}{\partial u}(2xdx + 2ydy) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}\right) = \\ &= \left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dy \end{aligned} \qquad (10).$$

Из (9) и (10) получаем:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - 1 = 2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Откуда

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = yz + yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right), \quad x\frac{\partial z}{\partial y} = xz + xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z + \left(\frac{xz}{y^2} - \frac{yz}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Поэтому исходное уравнение можно заменить уравнением

$$\left(\frac{zx}{y^2} - \frac{yz}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Оно равносильно совокупности уравнений

$$\frac{zx}{y^2} - \frac{yz}{x^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

что и дает искомый результат.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Пусть дана функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_{n+m})$ и предположим, что переменные $x_1,\dots,x_{n+m}$ удовлетворяют уравнениям связи

$$\Phi_i(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m}) = 0, \quad i = 1,\dots,n \quad (1).$$

Определение. В точке $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$, удовлетворяющей уравнениям (1), функция $f(\mathbf{x})$ имеет условный максимум (минимум) если неравенство

$$f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_0),\ \left(f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}_0)\right)$$

выполняется в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ для всех точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих уравнению связи (1).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad (2)$$

которая называется **функцией Лагранжа**.

<u>Определение.</u> Точка $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$, где $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ называется **стационарной точкой функции Лагранжа**, если

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial \lambda_i} = \Phi_i(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (3)$$

Покажем, что необходимые условия условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$ совпадает с необходимыми условиями (3) обычного экстремума функции Лагранжа.

Предположим, что f и Φ_i обладают непрерывными частными производными, причем ранг матрицы Якоби равен n

$$\mathrm{Rg}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right) = n, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n+m \ .$$

Для определенности, пусть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \ . \qquad (4)$$

Тогда по теореме о системе неявных уравнений существуют функции

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \end{cases}$$

где t_j – непрерывные дифференцируемые функции и понятие условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$ совпадает с обычным экстремумом функции

$$f\left(\varphi_1(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}), \ldots, \varphi_n(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}), x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\right) = \psi(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

В этом случае уравнения связи превратятся в тождества

$$\Phi_i\left(\varphi_1(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}), \ldots, \varphi_n(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}), x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\right) \equiv 0$$

Стало быть, должны выполняться условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_l} = 0, \quad l = n+1, \ldots, n+m, \text{ т.е. } d\psi(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0$$

Иными словами, $\dfrac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_k} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0, \quad l = n+1, \ldots, n+m$.

Для нахождения $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ воспользуемся уравнениями связи

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n+m \qquad (5).$$

Из этой системы можно <u>линейно</u> выразить $dx_1, \ldots, dx_n$ через $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$, что и дает искомые выражения для $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$.

Есть, однако, специальный прием, называемый **методом неопределенных множителей Лагранжа,** который позволяет обойтись без решения этой системы. По инвариантности формы дифференциала, условие $d\psi\left(x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\right)=0$ равносильно условию $df\left(x_1,...,x_{n+m}\right)=0$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j=0 \qquad (6).$$

Умножим уравнения (5) на λ_i соответственно и сложим с (6):

$$\sum_{j=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right)dx_j=0,\quad j=1,\ldots,n+m \qquad (7).$$

Выберем λ_i так, чтобы коэффициенты при $dx_1,\ldots,dx_n$ одновременно обращались в 0, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}=0,\quad k=1,\ldots,n \qquad (8)$$

Это можно сделать потому, что определитель системы (7) в силу условия (4) не равен нулю.

Тогда (7) примет вид

$$\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l}\right)dx_l=0,$$

где $dx_{n+1},\ldots,dx_{n+m}$ – дифференциалы <u>независимых</u> переменных. Поэтому и

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l}=0,\quad l=n+1,\ldots,n+m \qquad (9).$$

Таким образом, из (8) и (9) получаем необходимые условия для условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\ldots,n+m \qquad (10)$$

К этим условиям следует добавить уравнения связи (1). Далее, так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}=\frac{\partial L}{\partial x_j},\quad j=1,\ldots,n+m,$$

$$\Phi_i=\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}.$$

то получаем, что уравнения (10) с уравнениями связи (1) которые являются необходимыми условиями условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$, совпадают с необходимыми условиями (3) экстремума функции Лагранжа.

Тем самым доказана следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\mathbf{x}_0$ *точка условного экстремума функции* $f(\mathbf{x})$ *при наличии связей* (1).
2) *Функции* $\Phi_i(\mathbf{x})$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\mathbf{x}_0$, *причём в самой точке ранг матрицы Якоби* (3) *равен* n.

Тогда найдутся такие множители $\boldsymbol{\lambda}_0=\left(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_n^0\right)$, *что точка* $\left(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0\right)$ *будет стационарной точкой функции Лагранжа.*

<u>Важное замечание.</u> При исследовании достаточных условий экстремума у функции Лагранжа не всегда можно применять критерий Сильвестра. Дело в том, что дифференциалы, входящие в выражение для второго дифференциала функции Лагранжа являются зависимыми. В то время как критерий Сильвестра этих связей не учитывает. При таком подходе может возникнуть ситуация, когда достаточные условия для функции Лагранжа не выполняются, но условный у функции $f(\mathbf{x})$ существует. Соответствующий пример будет приведён позже.

Для проверки достаточных условий необходимо исследовать второй дифференциал функции Лагранжа. Пусть $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0\right)$ стационарная точка функции Лагранжа соответствующая значению параметров $\boldsymbol{\lambda}_0 = \left(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0\right)$. Второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке равен

$$d^2 L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Надо учитывать, что дифференциалы, входящие в это выражение являются зависимыми величинами. Поэтому введём в рассмотрение следующее множество.

$$E_T = \left\{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}) \in \Re^n : \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \xi_j = 0 \right\}$$

Это множество называется **линейным многообразием**, и мы будем далее предполагать, что в силу (5) $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_{n+m}) \in E_T$.

Сформулируем и докажем следующие две теоремы.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\mathbf{x}_0$ *точка условного минимума функции* $f(\mathbf{x})$ *при наличии связей* (1).

2) Функции $\Phi_i(\mathbf{x})$ *имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки* $\mathbf{x}_0$*, причём в самой точке ранг матрицы Якоби* (3) *равен* n.

Тогда найдутся такие множители $\boldsymbol{\lambda}_0 = \left(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0\right)$*, что точка* $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ *будет стационарной точкой функции Лагранжа и в некоторой малой окрестности этой точки будет справедливо неравенство*

$$d^2 L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) \geq 0 \qquad (11)$$

при условии, что $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_{n+m}) \in E_T$.

<u>Доказательство.</u> Фактически надо только доказать справедливость неравенства (11), так как существование множителей $\boldsymbol{\lambda}_0 = \left(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0\right)$, таких, что $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ будет стационарной точкой функции Лагранжа было доказано в <u>теореме 1</u>. Если $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0\right)$ точка безусловного минимума функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$, то её второй дифференциал должен быть неотрицателен.

$$d^2 f\left(x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0\right) \geq 0$$

Тогда пользуясь правилом дифференцирования сложной функции ($dx_i \neq const$) имеем

$$\sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} d^2 x_j \geq 0 \qquad (12)$$

Дифференцируя дважды в точке $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0\right)$ уравнения связи (1) как сложную функцию получим равенства

$$\sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} d^2 x_j = 0 \quad (13)$$

Так как переменные x_i подчинены уравнениям связи (1), то в соответствии с <u>теоремой 1</u> в равенствах (12) и (13) выполняется условие $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_{n+m}) \in E_T$.

Если умножить каждое из равенств (13) на λ_l и сложить с (12) то получим

$$d^2 L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_j} d^2 x_j \geq 0 \quad (14)$$

Последняя сумма равна нулю так как $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ стационарная точка функции Лагранжа. Таким образом, в случае условного минимума имеем неравенство (11) при $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_{n+m}) \in E_T$.

Замечание. Точно также доказывается, что в случае условного максимума должно быть выполнено условие

$$d^2L(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)\le 0 \qquad (15)$$

Теорема 3. (Достаточные условия условного экстремума). *Пусть функции* $\Phi_i(\mathbf{x})$ *имеют непрерывные вторые частные производные в окрестности точки* $\mathbf{x}_0=\left(x_1^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$ *и пусть* $(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ *– стационарная точка функции Лагранжа и ранг матрицы Якоби равен* n. *Тогда:*

1) *Если* $d^2L(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ *есть положительно определённая квадратичная форма в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x}_0=\left(x_1^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$ *при* $d\mathbf{x}=(dx_1,...,dx_{n+m})\in E_T$, *то эта точка является точкой условного минимума функции* $f(\mathbf{x})$ *при наличии связей* (1)
2) *Если* $d^2L(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ *есть отрицательно определённая квадратичная форма в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x}_0=\left(x_1^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$ *при* $d\mathbf{x}=(dx_1,...,dx_{n+m})\in E_T$, *то эта точка является точкой условного максимума функции* $f(\mathbf{x})$ *при наличии связей* (1)
3) *Если* $d^2L(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ *есть неопределённая квадратичная форма в сколь угодно малой окрестности точки* $\mathbf{x}_0=\left(x_1^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$ *при* $d\mathbf{x}=(dx_1,...,dx_{n+m})\in E_T$, *то эта точка не является точкой условного экстремума функции* $f(\mathbf{x})$ *при наличии связей* (1)

Доказательство. Доказательство основано на том, что первые и вторые дифференциалы функций $f(\mathbf{x})$ и $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ в точке $(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ при выполнении условия $d\mathbf{x}=(dx_1,...,dx_{n+m})\in E_T$ совпадают, так как в этой точке $\Phi_i(\mathbf{x}_0)\equiv 0$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x,y)=xy$, если уравнение связи:

$$2x+3y-5=0$$

Решение. Строим функцию Лагранжа $L=xy+\lambda(2x+3y-5)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=x+3\lambda;$$

$$\begin{cases} y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{5}{12},\qquad x=\frac{5}{4},\qquad y=\frac{5}{6}.$$

Таким образом, функция может иметь экстремум в точке $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$. Проверим достаточные условия. Покажем вначале, что критерий Сильвестра в данном случае не даст никаких результатов. В самом деле

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0.$$

Второй минор

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0.$$

Третий минор

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6+6=12>0.$$

Данные неравенства говорят о том, что рассматриваемая точка не является точкой экстремума.

Таким образом, достаточные условия без учёта того, что $d\mathbf{x} = (dx_1,...,dx_{n+m}) \in E_T$ показывают, что у функции Лагранжа в точке $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ – нет экстремума. Тем не менее, выразим из уравнения связи y через x и подставим в функцию $f(x,y)$, получим

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = \frac{x(5-2x)}{3}.$$

Применяя необходимые условия экстремума имеем

$$\varphi'(x) = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{4}.$$

Применяя достаточные условия, находим что

$$\varphi''(x) = -\frac{4}{3} < 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{4} - \max$$

Таким образом, точка $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ является точкой условного максимума для функции $f(x,y) = xy$.

Получим теперь решение с помощью теоремы о достаточном условии условного экстремума. С этой целью найдём второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = 0dx^2 + 2dxdy + 0dy^2 + \lambda\left(0dx^2 + 0dxdy + 0dy^2\right) = 2dxdy.$$

Дифференцируя уравнение связи получаем

$$2dx + 3dy = 0 \;\Rightarrow\; dx = -\frac{3}{2}dy.$$

Таким образом

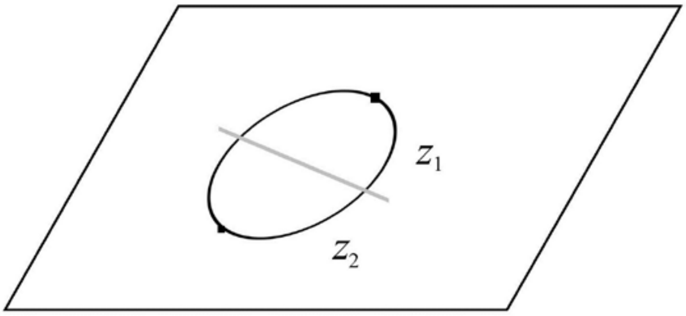
$$d^2L = -3dy^2 < 0.$$

Следовательно, точка $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ является точкой условного максимума для функции $f(x,y) = xy$.

Замечание. Если $d^2L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ является положительно (отрицательно) определённой формой на всём пространстве $\Re^{n+m}$, то она также будет положительно (отрицательно) определённой формой и при $d\mathbf{x} = (dx_1,...,dx_{n+m}) \in E_T$, $d\mathbf{x} \neq 0$. В этом случае в квадратичной форме $d^2L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ не нужно исключать зависимые дифференциалы.

Пример 2. Найти экстремум функции $z = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение 1. основано на том, что уравнение связи можно решить: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ и получить, соответственно, 2 функции от x: $z_1 = x + \sqrt{1-x^2}$, $z_2 = x - \sqrt{1-x^2}$. Первая из них имеет максимум в точке $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, вторая – минимум в точке $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Решение 2. Строим $L(x,y)=x+y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2\lambda},\\ y=-\dfrac{1}{2\lambda},\\ \dfrac{2}{4\lambda^2}=1,\lambda^2=\dfrac{1}{2}.\end{cases},\ \lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ получаем $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. При $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, имеем две точки: при $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ точка $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, при $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ точка $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Выясним, что происходит в этих точках. Воспользуемся достаточным условием условного экстремума.

$$d^2L=0dx^2+2\cdot 0dxdy+0dy^2+2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right).$$

В последнем равенстве $dx^2+dy^2>0$ при любых связях между dx и dy. Поэтому

$$d^2L\ \begin{cases}>0, & \lambda>0,\\ <0, & \lambda<0.\end{cases}$$

Таким образом, в точке $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – минимум, в точке $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – максимум.

В заключение, рассмотрим ещё один пример для функции трёх переменных содержащий несколько уравнений связи.

Пример 3. Найти условный экстремум функции $u=xyz$ при $x+y+z=5$ и $xy+yz+xz=8$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L=xyz+\lambda_1\left(x+y+z-5\right)+\lambda_2\left(xy+yz+xz-8\right).$$

Необходимые условия для экстремума будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda_1+\lambda_2\left(y+z\right)=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda_1+\lambda_2\left(x+z\right)=0,\ \frac{\partial L}{\partial z}=xy+\lambda_1+\lambda_2\left(y+x\right)=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x+y+z-5=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=xy+yz+xz-8=0.\end{gathered}\tag{16}$$

Заметим, что систему из последних двух уравнений можно привести к одному из трёх видов

$$\begin{cases}x+y=5-z,\\ xy=8-z(5-z)\end{cases},\quad\begin{cases}x+z=5-y,\\ xz=8-y(5-y)\end{cases},\quad\begin{cases}z+y=5-x,\\ zy=8-x(5-x)\end{cases}$$

Это симметрические системы и их решения имеют вид: $(a,b,z),(b,a,z)$ - для первой системы, $(a,y,b),(b,y,a)$ – для второй системы и $(x,a,b),(x,b,a)$ – для третьей системы. Всё вместе это означает с учётом симметрии всей системы по переменным x, y и z, что структура решения (16) будет иметь вид $(a,b,b),(b,a,b),(b,b,a)$. Положив для определённости $x=y$ получим

$$\begin{aligned}
&yz+\lambda_1+\lambda_2(y+z)=0,\\
&x^2+\lambda_1+2\lambda_2 x=0,\\
&2x+z-5=0,\\
&x^2+2xz-8=0
\end{aligned}$$

Выражая из предпоследнего равенства z через x и подставляя в последнее получим

$$x^2+2x(5-2x)-8=-3x^2+10x-8=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=2$, $x_2=\frac{4}{3}$. Тогда $y_1=2$, $y_2=\frac{4}{3}$, $z_1=1$, $z_2=\frac{7}{3}$. Рассмотрев точку $(2,2,1)$ получим систему для определения параметров λ_1 и λ_2 (второе и третье уравнения системы (16))

$$\begin{cases}2+\lambda_1+3\lambda_2=0\\4+\lambda_1+4\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2=-2\\\lambda_1=4\end{cases}$$

Соответственно для точки $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ поучаем

$$\begin{cases}\frac{28}{9}+\lambda_1+\frac{11}{3}\lambda_2=0\\\frac{16}{9}+\lambda_1+\frac{8}{3}\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2=-\frac{4}{3}\\\lambda_1=\frac{16}{9}\end{cases}$$

Итак, решением являются следующие точки $A_1(2,2,1)$, $A_2(1,2,2)$, $A_3(2,1,2)$ при $\lambda_1=4,\lambda_2=-2$ и $A_4\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $A_5\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $A_6\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ при $\lambda_1=\frac{16}{9}$, $\lambda_2=-\frac{4}{3}$.

Проверим достаточные условия. С этой целью найдём второй дифференциал функции Лагранжа.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=z+\lambda_2,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=x+\lambda_2,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=y+\lambda_2$$

$$d^2L=2(z+\lambda_2)dxdy+2(x+\lambda_2)dydz+2(y+\lambda_2)dxdz.$$

Второй дифференциал не является положительно определённым в $\Re^3$, поэтому для исследования на положительность (отрицательность) необходимо использовать уравнения связи, дифференцируя которые находим

$$dx+dy+dz=0,\quad xdy+ydx+ydz+zdy+xdz+zdx=0.$$

Группируя слагаемые во втором равенстве получаем

$$\begin{cases}dx=-dy-dz,\\xdy+xdz-ydy-zdz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dy=\frac{z-x}{x-y}dz\\dx=\frac{y-z}{x-y}dz\end{cases}$$

Тогда, второй дифференциал, с учётом связей равен

$$d^2L = 2\left[(z+\lambda_2)\frac{(z-x)(y-z)}{(x-y)^2} + (x+\lambda_2)\frac{z-x}{x-y} + (y+\lambda_2)\frac{y-z}{x-y}\right]dz^2 =$$

$$= 2\left[(z+\lambda_2)\frac{y-z}{z-x} + (x+\lambda_2)\frac{x-y}{z-x} + (y+\lambda_2)\frac{(y-z)(x-y)}{(z-x)^2}\right]dy^2 =$$

$$= 2\left[(z+\lambda_2)\frac{z-x}{y-z} + (x+\lambda_2)\frac{(x-y)(z-x)}{(y-z)^2} + (y+\lambda_2)\frac{x-y}{y-z}\right]dx^2.$$

Теперь, подставляя в полученное выражение найденные точки имеем

$$d^2L(A_1) = 2\left[(1-2)\frac{1-2}{2-1} + 0 + 0\right]dx^2 = 2dx^2 > 0,$$

$$d^2L(A_2) = 2\left[0 + (1-2)\frac{1-2}{2-1} + 0\right]dy^2 = 2dy^2 > 0,$$

$$d^2L(A_3) = 2\left[0 + 0 + (1-2)\frac{1-2}{2-1}\right]dz^2 = 2dz^2 > 0,$$

$$d^2L(A_4) = 2\left[\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{7/3-4/3}{4/3-7/3} + 0 + 0\right]dx^2 = -2dx^2 < 0,$$

$$d^2L(A_5) = 2\left[0 + \left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{7/3-4/3}{4/3-7/3} + 0\right]dy^2 = -2dy^2 < 0,$$

$$d^2L(A_6) = 2\left[0 + 0 + \left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{7/3-4/3}{4/3-7/3}\right]dz^2 = -2dz^2 < 0.$$

Таким образом, в точках A_1, A_2 и A_3 имеется условный минимум $u_{\min} = 4$, а в точках A_4, A_5 и A_6 – условный максимум $u_{\min} = \frac{112}{27}$.

Как видно, основную проблему при нахождении экстремума представляет решение системы уравнений, определяющих необходимые условия экстремума. На практике такие системы решаются численно, так как аналитическое выражение одних переменных через другие из уравнений связи может оказаться просто невозможным.

Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области

Задача о наибольшем и наименьшем значении функции в области аналогична задаче о наибольшем и наименьшем значении функции одной переменной на отрезке.

Пусть дана функция $y = f(\mathbf{x})$, определённая в области D, а Γ – граница этой области. Необходимо найти её наибольшее и наименьшее значение в этой области. Решение данной задачи распадается на ряд этапов:

1) Решается задача на безусловный экстремум. Найденные здесь точки проверяются на принадлежность области D,
2) Решается задача на условный экстремум, где в качестве уравнений связи выступает уравнение границы области D. Если граница Γ не является гладкой, а представляет собой объединение конечного числа гладких границ, то задачу на условный экстремум надо решать отдельно на каждой такой границе. Кроме того, необходимо проверить места излома. Для функций двух переменных это будут точки, для функций трёх переменных – кривые в пространстве.
3) Из множества точек полученных в предыдущих пунктах выбираются точки, дающие наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(\mathbf{x})$.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ в области D, заданной неравенством $|x| + |y| \le 1$.

Решение. Найдём вначале стационарные точки функции $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0.$$

Решением является единственная точка $(0, 0)$. Эта точка принадлежит области D. Проверим достаточные условия

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad AC - B^2 = 5 > 0.$$

Следовательно, точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума. Займёмся теперь поиском условного экстремума. Область D состоит из четырёх гладких кривых

1) $x + y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$
2) $-x + y = 1, \quad x < 0, \quad y \ge 0$
3) $x - y = 1, \quad x \ge 0, \quad y < 0$
4) $x + y = -1, \quad x < 0, \quad y < 0$

Найдём условный экстремум для первого контура. Функции Лагранжа имеет вид

$$L_1 = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Из необходимых условий экстремума получаем систему

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = 2x - y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial y} = -x + 2y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0.$$

Решением этой системы является точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$. Выражение для второго дифференциала имеет вид

$$d^2 L_1 = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2.$$

Используя уравнение связи имеем

$$dx + dy = 0 \;\Rightarrow\; dx = -dy \;\Rightarrow\; d^2 L_1 = 6dx^2 > 0.$$

Таким образом, рассматриваемая точка является точкой условного минимума. Для второго контура имеем соответственно

$$L_2 = x^2 - xy + y^2 + \lambda(-x + y - 1),$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} = -x + 2y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = -x + y - 1 = 0.$$

Решением этой системы является точка $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$. Эта точка также будет точкой условного минимума.

Для остальных контуров получим точки $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, которые также будут являться точками условного минимума.

Значения функции во всех найденных точках равны

$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, минимальное значение в области D есть $f = 0$.

Наконец рассмотрим угловые точки. Их четыре: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$

$$f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) = 1.$$

Следовательно, $f = 1$ есть максимальное значение функции в области D.

Окончательный ответ:

$$f_{\max} = f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) = 1, \quad f_{\min} = f(0,0) = 0.$$