Варианты заданий к курсовой работе по «Основам функционального анализа и вариационному исчислению»

Тема: Применение методов функционального анализа вариационных принципов в моделировании

1. Исследовать на близость нулевого и первого порядка кривые

1. $y=\dfrac{\sin nx}{n^{3/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,\pi]$	2. $y=\dfrac{\cos nx}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $y=\dfrac{\sin n^2 x}{n^{3/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,\pi]$	4. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x/n}{n^{3/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$
5. $y=\dfrac{\operatorname{tg}\left(x/n^2\right)}{n^{3/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$	6. $y=\dfrac{\ln^2 nx}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[e^{-1},e\right]$
7. $y=\dfrac{\ln^3 nx}{n^{1/3}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[e^{-1},e^2\right]$	8. $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x/n}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$
9. $y=\dfrac{x\sin nx}{n}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,\pi]$	10. $y=\dfrac{x\ln nx}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[e^{-1},e\right]$
11. $y=\dfrac{\arcsin x/n}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$	12. $y=\dfrac{x^n}{n}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,1]$
13. $y=\dfrac{e^{nx}}{n}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,1]$	14. $y=\dfrac{x\cos nx}{n}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,\pi]$
15. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x/n}{n^{1/2}}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,+\infty)$	16. $y=\dfrac{x^2\cos nx}{n}$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,\pi]$
17. $y=\dfrac{x}{n}$ и $y=\dfrac{x^2}{n}$, $x\in[0,1]$	18. $y=\dfrac{x^n}{n}$ и $y=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{n}$, $x\in[0,1]$
19. $y=\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ и $y\equiv 0$, $x\in[0,1]$	20. $y=\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ и $y=\sin\dfrac{x}{n}$, $x\in[0,1]$

2. Исследовать на непрерывность функционал $I(y)$ $y(x)\in C^1_{[0,\pi]}$ на кривой $y_0(x)$ в смысле близости нулевого и первого порядков

1. $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	2. $I=\int\limits_0^{\pi}\left(1+2y'^2\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
3. $I=\int\limits_0^{1}x^3\sqrt{1+y^2}dx,\quad y_0(x)=x,$	4. $I=\int\limits_0^{1}y'^2dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
5. $I=\int\limits_0^{\pi}\left(y+2y'^2\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	6. $I=\int\limits_0^{1}x^2\sqrt{1+y^2}dx,\quad y_0(x)=x,$
7. $I=\int\limits_0^{\pi}\left(1+y'^3\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	8. $I=\int\limits_0^{1}\left(y'+y\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
9. $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+y'^4}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	10. $I=\int\limits_0^{\pi}y\sqrt{1+y'^2}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
11. $I=\int\limits_0^{\pi}x\sqrt{1+y'^2}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	12. $I=\int\limits_0^{1}x^3\sqrt{1+y^2}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
13. $I=\int\limits_0^{1}y'^3\sqrt{1+y^2}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	14. $I=\int\limits_0^{\pi}x\sqrt{1+y'^4}dx,\quad y_0(x)\equiv x,$
15. $I=\int\limits_0^{1}y'^3dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	16. $I=\int\limits_0^{1}x^3\sqrt{1+y^3}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
17. $I=\int\limits_0^{1}y'^4dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	18. $I=\int\limits_0^{1}\left(y'-y\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$
19. $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-y'^4}dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$	20. $I=\int\limits_0^{\pi}\left(1-y'^3\right)dx,\quad y_0(x)\equiv 0,$

3. Найти первую и вторую вариации функционала

1. $I=\int_0^{\pi} y\sqrt{1+y'^4}\,dx$	2. $I=\int_0^{\pi}\left(x^2+xy'+y'^2\right)dx$
3. $I=\int_0^{\pi}\left(x^2+y''\right)dx$	4. $I=\int_0^{\pi}(xy+y'z)\,dx,\ y=y(x), z=z(x)$
5. $I=\iint_D\left(xy+z_y^2+z_x\right)dxdy,\ z=z(x,y)$	6. $I=\int_0^{\pi} y'\sqrt{1+x^4}\,dx$
7. $I=\int_0^{\pi}(y+y'+y'')\,dx$	8. $I=\iint_D\left(xyz+z_x+z_y\right)dxdy,\ z=z(x,y)$
9. $I=\int_0^{\pi}\left(y^2+xyy'^2\right)dx$	10. $I=\int_0^{\pi}\left(y+y''^2\right)dx$
11. $I=\int_0^{\pi}\left(y+y''+y^{(4)}\right)dx$	12. $I=\iint_D\left(z+z_x^2+z_y\right)dxdy,\ z=z(x,y)$
13. $I=\int_0^{\pi} y'\sqrt{1+y'}\,dx$	14. $I=\int_0^{\pi}(y+y'z+z'w)\,dx,$ $y=y(x), z=z(x), w=w(x)$
15. $I=\int_0^{\pi} y'\sqrt{1+y'^2}\,dx$	16. $I=\iint_D\left(z+z_x^2+z_y^2\right)dxdy,\ z=z(x,y)$
17. $I=\int_0^{\pi}(y+y''+y''')\,dx$	18. $I=\int_0^{\pi}\left(y^2-y''^2\right)dx$
19. $I=\int_0^{\pi} y''\sqrt{1+x^4}\,dx$	20. $I=\iint_D\left(z^2-z_x^2-z_y^2\right)dxdy,\ z=z(x,y)$

4. Найти экстремали функционалов:

1. $\int\limits_0^3 (3x-y)y'dx,\quad y(0)=1, y(3)=4{,}5$	2. $\int\limits_0^{2\pi} \left(y'^2-y^2\right)dx,\quad y(0)=1, y(2\pi)=1$
3. $\int\limits_{-1}^0 \left(12xy-y'^2\right)dx,\quad y(-1)=1, y(0)=0$	4. $\int\limits_0^{\pi} \left(4y\cos x-y^2+y'^2\right)dx,$ $y(0)=0, y(\pi)=0$
5. $\int\limits_0^1 y'''^2dx,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ $y(1)=1, y'(1)=4, y''(1)=12$	6. $\int\limits_0^{\pi} \left(y'''^2-y''^2\right)dx, y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ $y(\pi)=\pi, y'(\pi)=2, y''(\pi)=0$
7. $\int\limits_0^1 \left(y'^2-y-y^2\right)e^{2x}dx, y(0)=0, y(1)=e^{-1}$	8. $\int\limits_{-1}^1 \left(y'^2-2xy\right)dx,\quad y(-1)=-1, y(1)=1$
9. $\int\limits_{-1}^0 \left(y'^2+2xy\right)dx,\quad y(-1)=0, y(0)=2$	10. $\int\limits_0^1 \left(x+y'^2\right)dx,\quad y(0)=1, y(1)=2$
11. $\int\limits_0^1 \left(y_1'^2y_2'^2-2y_1y_2\right)dx, y_1(0)=y_2(0)=0,$ $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	12. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}dx,\quad y_1(0)=1, y_2(0)=2,$ $y_1(1)=2, y_2(1)=1$
13. $\int\limits_0^1 \left(y'^2+y^2\right)dx,\quad y(0)=0, y(1)=1$	14. $\int\limits_0^1 \left(e^xy'-y'^2\right)dx,\quad y(0)=1, y(1)=e$
15. $\int\limits_0^2 y''^2dx,\quad y(0)=y'(0)=0,$ $y(2)=1, y'(2)=2$	16. $\int\limits_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx,\quad y(0)=0, y(1)=2$
17. $\int\limits_0^1 yy'^2dx,\quad y(0)=1, y(1)=\sqrt[3]{4}$	18. $\int\limits_1^e \left(xy'^2+yy'\right)dx,\quad y(1)=0, y(e)=1$
19. $\int\limits_0^{\pi/4} \left(y'^2-y^2\right)dx,\quad y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	20. $\int\limits_1^2 \left(y'^2+2yy'+y^2\right)dx,\quad y(1)=1, y(2)=0$

5. Найти кратчайшее расстояние между кривыми

1. $y=4-x$ и $y=\sqrt{-x}$	2. $1=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ и $1=(x-3)^2+(y-3)^2$
3. $1=x^2+y^2$ и $y=\dfrac{4}{x}$	4. $1=x^2+y^2$ и $1=(x-3)^2+\dfrac{(y-3)^2}{4}$
5. $1=\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y-3)^2$ и $1=(x+3)^2+\dfrac{(y+3)^2}{4}$	6. $y=x^2+1$ и $y=\sqrt{x-1}$
7. $1=x^2-y^2$ и $y=\dfrac{3}{2}x$	8. $1=\dfrac{x^2}{4}-y^2$ и $y=x$
9. $1=\dfrac{x^2}{4}-y^2$ и $1=\dfrac{y^2}{4}-x^2$	10. $1=x^2+y^2$ и $36=(x-3)^2+(y-3)^2$
11. $y=x^2$ и $y=-(x-1)^2$	12. $1=x^2-y^2$ и $1=(x-3)^2+y^2$
13. $1=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ и $y=16-2x$	14. $1=(x-3)^2+(y-3)^2$ и $y=-x$
15. $4=x^2+y^2$ и $y=\dfrac{6}{x^2}$	16. $y=x^2+1$ и $y=1-x^2$
17. $y=2x-1$ и $y=4x^2-5$	18. $y=x+1$ и $y=6x^2-7$
19. $1=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ и $y=16-2x$	20. $1=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$ и $1=(x-6)^2+(y-6)^2$

6. Исследовать на экстремум функционалы:

1. $\int_0^1 \left(y'^2 + y^2\right) dx, \quad y(0) = -1, y(1) = 1$	2. $\int_0^a \left(1 - e^{-y'^2}\right) dx, \quad y(0) = 0, y(a) = b, a > 0$
3. $\int_2^3 \frac{x^3}{y'^2} dx, \quad y(2) = 4, y(3) = 9$	4. $\int_1^2 \left(xy'^4 - 2yy'^3\right) dx, \quad y(1) = 0, y(2) = 1$
5. $\int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2\right) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(1) = y_2(1) = 2$	6. $\int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 4y_2\right) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(1) = 1, y_2(1) = 0$
7. $\int_{-1}^1 \left(y'^2 + y'^3\right) dx, \quad y(-1) = -1, y(1) = 3$	8. $\int_{-1}^2 \left(x^2 y' + 1\right) y' dx, \quad y(-1) = 1, y(2) = 4$
9. $\int_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}\, dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(1) = 2, y_2(1) = 4$	10. $\int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 - y_2 y_1'\right) dx, y_1(0) = 2, y_2(0) = 1,$ $y_1(1) = e, y_2(1) = 0$
11. $\int_0^a \frac{x}{y'} dx, \quad y(0) = 0, y(a) = b, \quad a, b > 0$	12. $\int_1^2 \frac{x^2}{y'^3} dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 4$
13. $\int_0^1 e^y y'^2 dx, \quad y(0) = 0, y(1) = \ln 4$	14. $\int_0^1 e^y \left(\frac{y'^2}{2} + y^2\right) dx, \quad y(0) = 1, y(1) = e$
15. $\int_0^{\ln 2} \left(y'^2 + 3y^2\right) e^{2x} dx,$ $y(0) = 0, y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$	16. $\int_1^2 x^2 y'^2 dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$
17. $\int_1^3 \left(y'^2 + 12xy'\right) dx, \quad y(1) = 0, y(3) = 26$	18. $\int_0^a \frac{x}{y'^2} dx, \quad y(0) = 0, y(a) = b, \quad a, b > 0$
19. $\int_0^{\pi/2} \left(y^2 - y'^2\right) dx, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	20. $\int_0^1 (1 + x) y'^2 dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$