Аналитическая геометрия

Уравнение поверхности и линии в пространстве.

<u>Определение.</u> Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности в пространстве называется **уравнением** этой поверхности.

$$F(x,y,z)=0 \quad (1)$$

<u>Определение.</u> Если для любых x, y и z удовлетворяющих уравнению (1) выполняется равенство $F(-x,-y,z)=F(x,y,z)$, то говорят, что поверхность заданная уравнением (1) **симметрична относительно оси** Oz. Ось Oz при этом называется **осью симметрии** данной поверхности.

Если для любых x, y и z удовлетворяющих уравнению (1) выполняется равенство $F(-x,y,z)=F(x,y,z)$, то говорят, что поверхность заданная уравнением (1) **симметрична относительно плоскости** yOz. Плоскость yOz при этом называется **плоскостью симметрии** данной поверхности.

<u>Упражнение.</u> Сформулировать условия симметрии поверхности относительно осей Ox и Oy, а также относительно плоскостей xOy и xOz.

<u>Определение.</u> **Алгебраической поверхностью** в пространстве называется множество точек, которое в некоторой декартовой системе координат может быть задано уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x^{k_i} y^{l_i} z^{m_i} = 0 \qquad (2)$$

где A_i - произвольные константы, k_i, l_i, m_i - целые неотрицательные числа.

Число $p=\max_i\{k_i+l_i+m_i\}$ называется **порядком (или степенью)** алгебраической поверхности.

<u>Пример.</u> 1) $x^2+y^2+z^2-1=0$ - алгебраическая поверхность второго порядка (сфера).

1) $x^2+y^2+\ln z-1=0$ - неалгебраическая поверхность.

На плоскости, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной системе координат удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$.

<u>Определение.</u> **Алгебраической линией** на плоскости называется множество точек, которое в некоторой декартовой системе координат может быть задано уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x^{k_i} y^{l_i} = 0 \quad (3)$$

где A_i - произвольные константы, k_i, l_i - целые неотрицательные числа.

Число $p=\max_i\{k_i+l_i\}$ называется **порядком (или степенью)** алгебраической линии на плоскости.

<u>Теорема.</u> (без доказательства) *Алгебраическая поверхность порядка* p *в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением* (2).

Такая же теорема имеет место и для алгебраических линий.

Кривая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким- либо уравнением.

Пусть $F(x,y,z)=0$ и $\Phi(x,y,z)=0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии l. Тогда пару уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases} (4)$$

назовем **уравнением линии** l **в пространстве**.

Плоскости в пространстве.

Общее уравнение плоскости.

<u>Определение.</u> Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D – некоторые числа.

Очевидно, что плоскость является алгебраической поверхностью первого порядка.

Возможны следующие частные случаи:

$A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox

$B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy

$C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz

$D = 0$ – плоскость проходит через начало координат

$A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy

$A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz

$B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz

$A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox

$B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy

$C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz

$A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy

$A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz

$B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

Таким образом, $$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору **a** .

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, принадлежащая плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали. Векторное уравнение плоскости.

<u>Предложение.</u> *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\mathbf{n} = (A, B, C)$ имеет вид:*

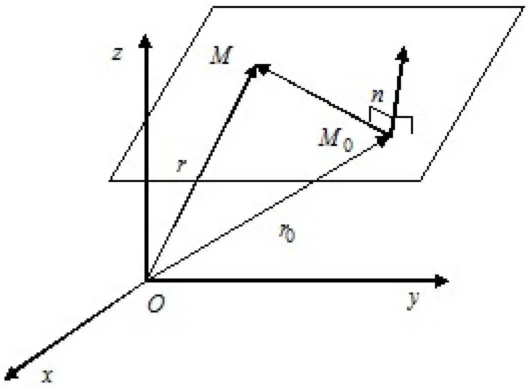
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

<u>Доказательство.</u> Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ - радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$,

$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ - радиус-вектор текущей точки $M_0(x, y, z)$



Т.к. вектор $\mathbf{n}$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n}\right) = 0 \quad (2)$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорема доказана.

<u>Замечание.</u> Уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(\overrightarrow{M_0M},\mathbf{n}\right)=\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{n}\right)=\left(\mathbf{r},\mathbf{n}\right)-\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}\right)=0$$

Обозначив, $\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}\right)=p$ получим **уравнение плоскости в векторной форме**

$$\left(\mathbf{r},\mathbf{n}\right)=p$$

Пусть α, β и γ - углы, образованные вектором нормали $\mathbf{n}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда единичный вектор нормали можно записать в виде

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma$$

и уравнение плоскости

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ поделить обе части на $-D$

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0,$$

заменив $-\frac{D}{A}=a,\ \ -\frac{D}{B}=b,\ \ -\frac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

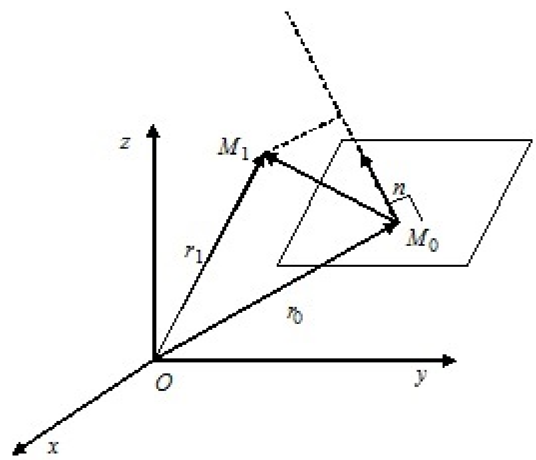
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Числа a, b и c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями Ox, Oy и Oz.

Расстояние от точки до плоскости.

Найдём расстояние от произвольной точки $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ до плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$. Пусть точка $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ принадлежит плоскости π. Тогда, расстояние от произвольной точки M_1 до плоскости π очевидно равно проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=\left(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\right)$ на направление вектора $\mathbf{n}=\left(A,B,C\right)$. Искомая проекция равна

$$d=\left|\text{Пр}_n\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\mathbf{n}\right)\right|}{\left|\mathbf{n}\right|}=\frac{\left|A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)+C\left(z_1-z_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$
$$=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$



Таким образом, искомое расстояние равно $d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Примеры.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4,-3,12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP}=(4;-3;12); \qquad \left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{16+9+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\mathbf{n}=\left(\frac{4}{13};-\frac{3}{13};\frac{12}{13}\right)$$

Таким образом, $A=\frac{4}{13}, B=-\frac{3}{13}, C=\frac{12}{13}$ воспользуемся формулой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\frac{4}{13}(x-4)-\frac{3}{13}(y+3)+\frac{12}{13}(z-12)=0$$

$$\frac{4}{13}x-\frac{16}{13}-\frac{3}{13}y-\frac{9}{13}+\frac{12}{13}z-\frac{144}{13}=0$$

$$\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z-\frac{169}{13}=0$$

$$4x-3y+12z-169=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2,0,-1)$ и $Q(1,-1,3)$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z+5=0$.

Вектор нормали к плоскости $3x+2y-z+5=0$ $\mathbf{n}=(3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(1-8)-y(1-12)+(z+1)(-2+3)=0$$

$$-7(x-2)+11y+(z+1)=0$$

$$-7x+14+11y+z+1=0$$

$$-7x+11y+z+15=0$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-1,4)$ и $B(3,2,-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: $Ax+By+Cz+D=0$, вектор нормали к этой плоскости $\mathbf{n}=(A,B,C)$. Вектор $\overrightarrow{AB}=(1,3,-5)$ принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\mathbf{n}_2=(1,1,2)$. Т.к. точки A и B принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\mathbf{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=11\mathbf{i}-7\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\mathbf{n}_1=(11,-7,-2)$. Т.к. точка A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е.

$$11\cdot 2-7\cdot 1-2\cdot 4+D=0 \Rightarrow D=-21.$$

Итого, получаем уравнение плоскости: $11x-7y-2z-21=0$.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4,-3,12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{OP}=(4,-3,12)$. Искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$4x-3y+12z+D=0.$$

Для нахождения коэффициента D подставим в уравнение координаты точки P:

$$16+9+144+D=0$$

$$D=-169$$

Итого, получаем искомое уравнение: $4x-3y+12z-169=0$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1,0,3)$, $A_2(2,-1,3)$, $A_3(2,1,1)$, $A_4(1,2,5)$.

1) Найти длину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\{2-1;-1-0;3-3\}=\{1;-1;0\}; \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}(ед).$$

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

$$\overrightarrow{A_1A_4}=\{1-1;2-0;5-3\}=\{0;2;2\}$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=2\sqrt{2}(ед)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=(1;-1;0)(0;2;2)=-2$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cos\alpha=2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha=4\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}; \qquad \alpha=120^0$$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали $\mathbf{n}$ к грани $A_1A_2A_3$ как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(2-1,1-0,1-3)=(1,1,-2);$$

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\mathbf{i}(0-2)-\mathbf{j}(0+2)+\mathbf{k}(-1-1)=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}=(-2;-2;-2), \quad |\mathbf{n}|=2\sqrt{3}.$$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\left(\mathbf{n},\overrightarrow{A_1A_4}\right)=|\mathbf{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cos\beta=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}\cos\beta$$

$$\left(\mathbf{n},\overrightarrow{A_1A_4}\right)=-4-4=-8.$$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma=90^\circ-\beta$.

$$\sin\gamma=\cos\beta=\frac{|-8|}{4\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \gamma=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|=\sqrt{3}(ед^2)$$

5) Найти объем пирамиды.

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right],\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\mathbf{n},\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|=\frac{4}{3}\ (\text{ед}^3).$$

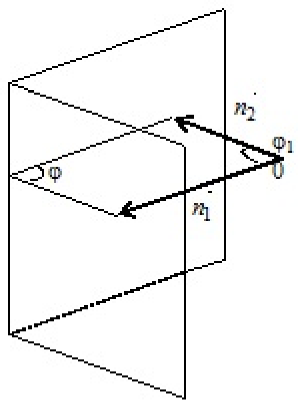
6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) = 2x+2y+2z-8=0$$

Таким образом, уравнение плоскости $x+y+z-4=0$

Угол между плоскостями.



Угол φ между двумя плоскостями в пространстве связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi=\varphi_1$ или $\varphi=180^\circ-\varphi_1$, т.е. $\cos\varphi=\pm\cos\varphi_1$.

Определим угол φ_1. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} (\mathbf{n}_1,\mathbf{r})+D_1=0 \\ (\mathbf{n}_2,\mathbf{r})+D_2=0 \end{cases},$$

где $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi_1=\frac{(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Плоскости параллельны, значит векторы нормалей коллинеарны: $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$. Это условие выполняется, если:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Прямая на плоскости.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$ Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ { $By + C = 0$ }- прямая параллельна оси Ox
- $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $A \neq 0$, $B = C = 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор $\mathbf{n} = (A, B)$ перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (3,-1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки M .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить

$$-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b,$$

то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с уравнением прямой через вектор нормали можно построить уравнение прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha + B\beta = 0$ называется направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\mathbf{a} = (1,-1)$ и проходящей через точку $M(1,2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax+By+C=0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$A\cdot 1+B\cdot(-1)=0 \ \Rightarrow \ A=B$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax+Ay+C=0$, или $x+y+C/A=0$.

При $x=1$, $y=2$ получаем $C/A=-3$, т.е. искомое уравнение:

$$x+y-3=0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax+By+C=0$, $C\neq 0$, то, разделив на $-C$, получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \text{ где } a=-\frac{C}{A}; \ \ b=-\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример. Задано общее уравнение прямой $x-y+1=0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C=1, \ -\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1 \ \Rightarrow \ a=-1, \ \ b=1.$$

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax+By+C=0$ разделить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$$

нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu C<0$, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$$

$$\frac{x}{(65/12)}+\frac{y}{(-13)}=1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{65}{5}=\frac{12}{5}x-13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{1}{13}, \quad \frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0; \qquad \cos\varphi=\frac{12}{13}; \ \sin\varphi=-\frac{5}{13}; \ p=5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

Для определения параметров a и b имеем следующую систему

$$\begin{cases} a=b \\ \dfrac{ab}{2}=4 \end{cases} \Rightarrow \quad a=4 \, или \, a=-4.$$

Значение $a=-4$ не подходит по условию задачи. Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или $x+y-4=0$.

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,-3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1=y_1=0$, $x_2=-2$; $y_2=-3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}; \qquad 3x-2y=0.$$

<u>Для самостоятельного решения:</u> Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3,-4)$ и параллельных осям координат.

Ответ: { $x+3=0$; $y+4=0$ }.

Угол между прямыми на плоскости.

<u>Определение.</u> Если заданы две прямые $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1=k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1=-1/k_2$.

<u>Предложение.</u> *Прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты, т.е $A_1/A_2=B_1/B_2=\lambda$. Если еще и $C_1/C_2=\lambda$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

<u>Определение.</u> Прямая, проходящая через точку $M(x_0,y_0)$ и перпендикулярная к прямой $y=kx+b$ представляется уравнением:

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$$

Расстояние от точки до прямой.

<u>Предложение.</u> *Если задана точка $M(x_0,y_0)$, то расстояние до прямой $Ax+By+C=0$ определяется как*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть точка $M_1(x_1,y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1:

$$d=\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0 \\ A\left(y_1-y_0\right)-B\left(x_1-x_0\right)=0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+Ax_0+By_0+C=0,$$

то, решая, получим:

$$x_1-x_0=-\frac{A}{A^2+B^2}\left(Ax_0+By_0+C\right),$$

$$y_1-y_0=-\frac{B}{A^2+B^2}\left(Ax_0+By_0+C\right)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Определить угол между прямыми: $y=-3x+7$, $y=2x+1$.

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right|=1 \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Пример. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1=3/5$, $k_2=-5/3$, $k_1k_2=-1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника $A(0,1)$, $B(6,5)$, $C(12,-1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1} \;\Rightarrow\; \frac{x}{6}=\frac{y-1}{4} \;\Rightarrow\; 4x=6y-6 \;\Rightarrow\; y=\frac{2}{3}x+1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид $y=kx+b$, где $k=-3/2$. Тогда

$$y=-\frac{3}{2}x+b.$$

Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$-1=-\frac{3}{2}12+b \;\Rightarrow\; b=17.$$

Итого: $y=-\frac{3}{2}x+17$ или $3x+2y-34=0$.

Для самостоятельного решения: Даны стороны треугольника $x+y-6=0$, $3x-5y+15=0$, $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

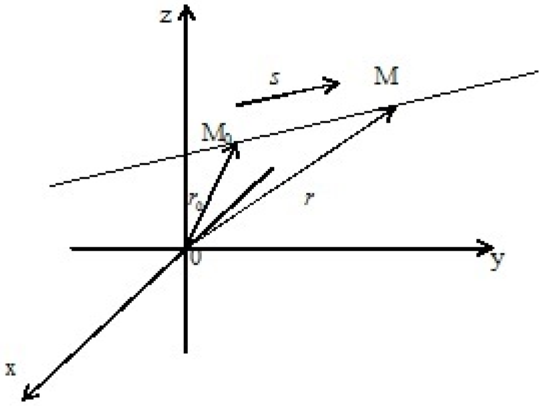
Указание: Сначала следует найти координаты вершин треугольника, как точек пересечения сторон, затем воспользоваться методом, рассмотренном в предыдущем примере.

Ответ: { $x-y=0$; $5x+3y-26=0$; $3x+5y-26=0$ }.

Прямая в пространстве.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\mathbf{s}=(m,n,p)$, параллельный данной прямой. Вектор $\mathbf{s}$ называется **направляющим вектором** прямой. На прямой возьмём две произвольные точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M(x,y,z)$.



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, очевидно, что $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{s}$, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{s}$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем **каноническое уравнение прямой** в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

<u>Определение.</u> Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\mathbf{s}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Отсюда получим: $m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$.

Числа m, n, и p, называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\mathbf{s}$ - ненулевой вектор, то m, n, и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$(\mathbf{n},\mathbf{r})+D=0,$$

где $\mathbf{n}$ - нормаль плоскости; $\mathbf{r}=(x,y,z)$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $(\mathbf{n}_1,\mathbf{r})+D_1=0$ и $(\mathbf{n}_2,\mathbf{r})+D_2=0$, векторы нормали имеют координаты: $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases}(\mathbf{n}_1,\mathbf{r})+D_1=0\\(\mathbf{n}_2,\mathbf{r})+D_2=0\end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, и p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\mathbf{s}=[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}=m\mathbf{i}+n\mathbf{j}+p\mathbf{k}.$$

<u>Пример.</u> Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату $x=0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases}y=3z-1\\4y-z-7=0\end{cases}\quad\begin{cases}y=3z-1\\12z-4-z-7=0\end{cases}\quad\begin{cases}y=3z-1\\z=1\end{cases}\quad\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases},\ \text{т.е. } A(0,2,1).$$

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\4&-1\end{vmatrix}=-11;\quad n=-\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&3\\5&-1\end{vmatrix}=17;\quad p=\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\5&4\end{vmatrix}=13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases}2x+3y-16z-7=0\\3x+y-17z=0\end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем $z=0$. Тогда:

$$\begin{cases}2x+3y-16z-7=0\\3x+y-17z=0\end{cases};\quad \begin{cases}2x+3y-7=0\\y=-3x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases};$$

Получаем: $A(-1,3,0)$.

Направляющий вектор прямой:

$$\mathbf{s}=[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&3&-16\\3&1&-17\end{vmatrix}=-35\mathbf{i}-14\mathbf{j}-7\mathbf{k}.$$

Итого: $\frac{x+1}{-35}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z}{-7}$; $\quad\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$;

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1:\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{s}_1$$

$$l_2:\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_2+t\mathbf{s}_2$$

$$\mathbf{r}=(x,y,z),\ \mathbf{r}_1=(x_1,y_1,z_1),\ \mathbf{r}_2=(x_2,y_2,z_2),\ \mathbf{s}_1=(m_1,n_1,p_1),\ \mathbf{s}_2=(m_2,n_2,p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами α этих прямых связаны соотношением: $\varphi=\alpha$ или $\varphi=180^\circ-\alpha$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi=\pm\frac{(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

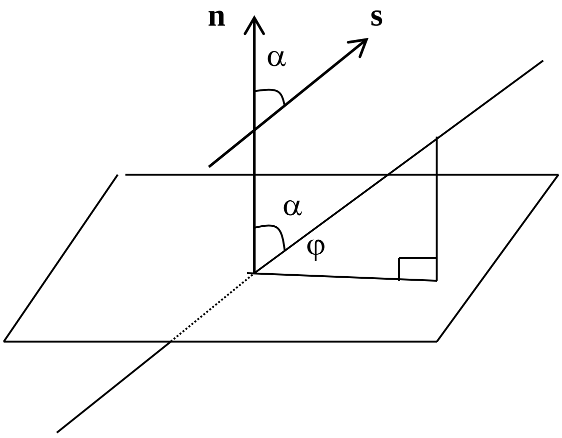
Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

Угол между прямой и плоскостью.

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть плоскость задана уравнением $(\mathbf{n},\mathbf{r})+D=0$, а прямая - $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{s}$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\varphi=90^\circ-\alpha$, где α - угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$. Этот угол может быть найден по формуле:



$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{n},\mathbf{s})}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{(\mathbf{n},\mathbf{s})}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

В координатной форме: $\sin\varphi = \pm\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\mathbf{n}\perp\mathbf{s},\quad (\mathbf{n},\mathbf{s})=0,\quad Am+Bn+Cp=0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны, т.е. $\mathbf{n}=\alpha\mathbf{s}$.

$$\mathbf{n}=\alpha\mathbf{s};\qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}=\alpha$$

Уравнение пучка плоскостей

Пучком плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через фиксированную прямую **– ось пучка**. Так как, любая прямая может быть задана как пересечение двух плоскостей, то уравнение пучка плоскостей будет иметь вид

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Рассмотрим основные типы кривых второго порядка.

Окружность.

Определение. **Окружностью** называется геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром окружности**.

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ представляет собой окружность радиуса R и с центром в точке (a,b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2+y^2-4x+2{,}5y-2=0$$

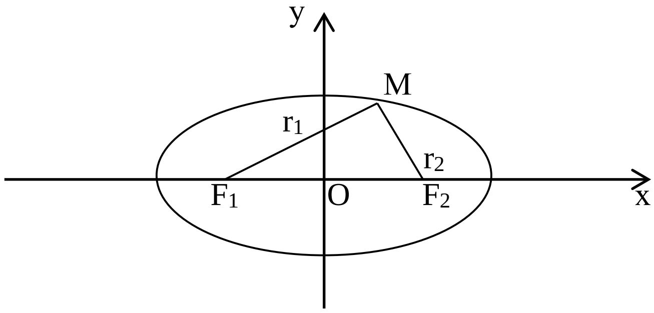
$$x^2-4x+4-4+y^2+2{,}5y+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}-2=0$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{125}{16}\right)^2=\frac{121}{16}$$

Отсюда находим $O\left(1,-\frac{5}{4}\right); R=\frac{11}{4}$.

Эллипс.

Определение. **Эллипсом** называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек есть величина постоянная. Эти точки называются **фокусами.**



F_1, F_2 – фокусы. $F_1=(c,0); F_2=(-c,0)$, c – половина расстояния между фокусами;

Выведем уравнение эллипса. Пусть r_1 - расстояние от первого фокуса до точки на кривой, r_2 - расстояние от второго фокуса до той же точки на кривой. По определению эллипса сумма r_1 и r_2 - есть величина постоянная. Обозначим $r_1+r_2=2a$. Тогда

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$r_2=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=4a^2-4xc$$

$$a^2(c-x)^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-a^4-x^2c^2=0$$
$$x^2(a^2-c^2)-a^2(a^2-c^2)+a^2y^2=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Так как $r_1+r_2=2a>2c$, то $a>c$. Тогда обозначая $a^2-c^2=b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось), получаем

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Это **каноническое уравнение эллипса**. Здесь: a – **большая полуось**; b – **малая полуось**.

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$e=\frac{c}{a}.$$

Т.к. $c<a$, то $e<1$.

Определение. Величина $k=b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1-k=(a-b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2=1-e^2$.

Если $a=b$ ($c=0, e=0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, то точка находится вне эллипса.

Теорема. *Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу верны соотношения*:

$$r_1=a-ex, r_2=a+ex.$$

Доказательство. Выше было показано, что $r_1+r_2=2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1=\sqrt{(c+x)^2+y^2}$$
$$r_2=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y}=a-\frac{c}{a}x=a-ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2=a+ex$. Теорема доказана.

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$$x=\frac{a}{e}, \quad x=-\frac{a}{e}.$$

Теорема. *Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету e.*

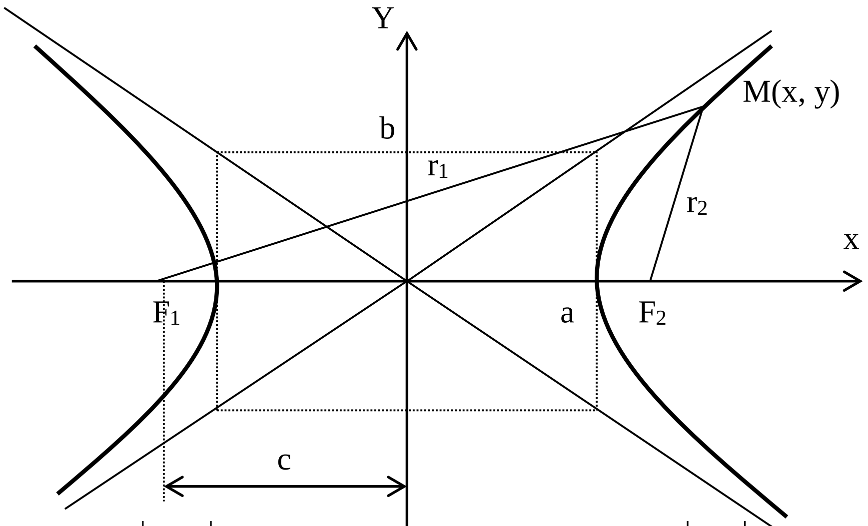
Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю точку эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

1) Координаты нижней точки: $x=0,\, y^2=16,\, y=-4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2=a^2-b^2=25-16=9, \quad c=3, F_2\left(-3,0\right)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4}; \qquad 4x=-3y-12; \qquad 4x+3y+12=0$$

Гипербола.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $\left|r_1-r_2\right|=2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $\left|F_1F_2\right|=2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку $M\left(x,y\right)$. Тогда:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-4a^2+4xc$$
$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-a^4-x^2c^2=0$$
$$-x^2(c^2-a^2)+a^2(c^2-a^2)+a^2y^2=0$$
$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Так как $c>a$, то положим $c^2-a^2=b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2=b^2x^2-a^2y^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Получили **каноническое уравнение гиперболы**.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось $2a$ называется **действительной осью** гиперболы.

Ось $2b$ называется **мнимой осью** гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x$.

<u>Определение.</u> Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

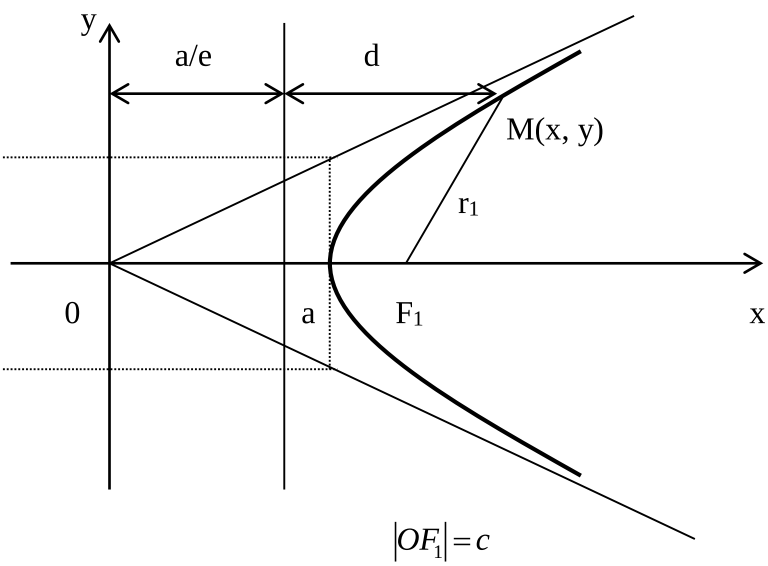
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если $a = b$, $e = \sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

<u>Определение.</u> Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm \frac{a}{e}$.

<u>Теорема.</u> *Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

<u>Доказательство.</u> Изобразим схематично гиперболу.



$$|OF_1| = c$$

Из очевидных геометрических соотношений можно записать:

$$\frac{a}{e} + d = x,$$

следовательно

$$d = x - \frac{a}{e}.$$

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2$$

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 - a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

$$r = \frac{c}{a}x - a$$

Тогда т.к. $\frac{c}{a} = e$, то $r = ex - a$.

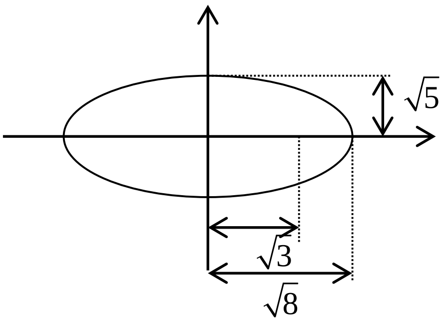
Итого: $\dfrac{r}{d} = \dfrac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

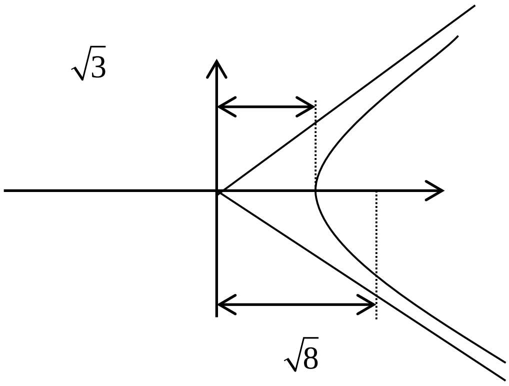
Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. <u>Теорема доказана.</u>

<u>Пример.</u> Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

<u>Пример.</u> Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы:

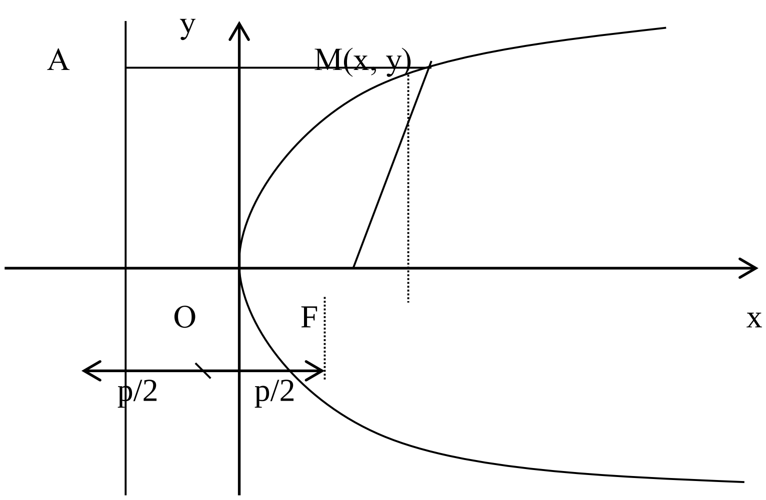
$$c^2 = a^2 + b^2 = 16, \quad e = \frac{c}{a} = 2; \quad c = 2a; \quad c^2 = 4a^2 \Rightarrow a^2 = 4; \quad b^2 = 16 - 4 = 12.$$

Итого: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

<u>Парабола.</u>

<u>Определение.</u> **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой **фокусом**, и от данной прямой, называемой **директрисой** и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы. Из геометрических соотношений:

$$AM = MF; \quad AM = x + \frac{p}{2};$$

$$MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = y^2 + x^2 - xp + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: $x = -\frac{p}{2}$.

<u>Пример.</u> На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$.

$$r = x + \frac{p}{2} = 4;$$

следовательно: $x = 2, y^2 = 16, y = \pm 4$.

Искомые точки: $M_1(2,4)$, $M_1(2,-4)$.

*Примеры преобразования уравнения кривых при смене системы координат**

<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид:

$$r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}.$$

Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4, \quad 3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$$

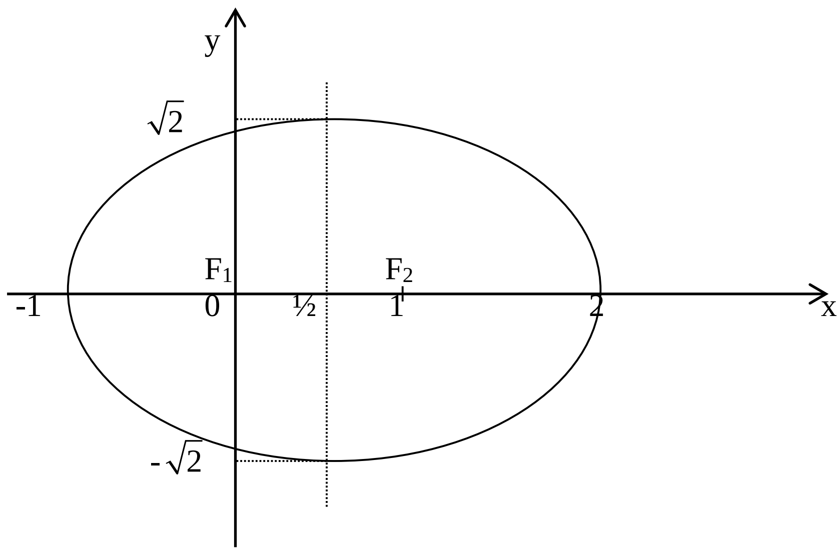
$$9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2, \quad 8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x - 1/2)^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0, \quad 8(x - 1/2)^2 + 9y^2 = 18$$

$$\frac{(x - 1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1/2 вправо, большая полуось a равна 3/2, меньшая полуось $b = \sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1/2$. Эксцентриситет равен $e = c/a = 1/3$. Фокусы $F_1(0,0)$ и $F_2(1,0)$.



<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид:

$$r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}.$$

Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{4 - \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$4\sqrt{x^2+y^2} - 5x = 9, \quad 4\sqrt{x^2+y^2} = 5x + 9$$

$$16x^2 + 16y^2 = 81 + 90x + 25x^2, \; 9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0$$

$$9(x^2 + 10x + 25 - 25) - 16y^2 + 81 = 0$$

$$9(x+5)^2 - 225 - 16y^2 + 81 = 0, \; 9(x+5)^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ox на 5 влево, большая полуось $a = 4$, меньшая полуось $b = 3$, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2, c = 5, e = c/a = 5/4$. Фокусы $F_1(-10, 0)$ и $F_2(0, 0)$.

Построим график этой гиперболы.