41.Производная функции

- это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю.

42.Теорема непрерывности функции, имеющей производную.

- Если функция дифференцируема в некоторой точке a, то она непрерывна в этой точке

43.Определение правой и левой производной.

Правой производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при Δx→+0, т. е. Δx→0, Δx > 0, и обозначается символом $f'(x_0+0)$

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Левой производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения Δy к приращению аргумента Δx при Δx→−0, т.е. $\Delta x\to 0$, $\Delta x < 0$, и обозначается символом $f'(x_0-0)$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

44.Теорема о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции в точке.

- Для того, чтобы функция f(x) была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы у нее существовала производная в этой точке. $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция, при Δx→0.

45.Дифференциал функции

- это главная линейная часть её приращения по приращению аргумента

46.Теорема о предельном положении секущей.

Предельное положение секущей при h -> 0 называется касательной к графику f (x) в точке x_o.

47.Теорема Ферма.

Если функция определена в некоторой окрестности точки, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) значение и имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

48.Теорема Ролля.

Если функция f:
1) *непрерывна на отрезке* [*a*,*b*];
2) *имеет в каждой точке интервала* (*a*,*b*) *конечную или определенного знака бесконечную производную*;
3) *принимает равные значения на концах отрезка* [*a*,*b*] *, т. е.*

$$f(a) = f(b); \qquad (12.3)$$

то существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$ *, что*

$$f'(\xi) = 0.$$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в открытом промежутке (a, b), на концах этого промежутка сохраняет непрерывность и принимает одинаковые значения: $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю: $f'(c) = 0$.

49.Теорема Лагранжа о конечном приращении.Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая в каждой его внутренней точке, то на интервале (*a*, *b*) найдется такая точка *x* = *c*, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

50.Достаточный признак локального экстремума с помощью первой производной

Если первая производная функции в точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через нее производная меняет знак, то данная точка является точкой экстремума, причем если знак меняется с "+" на "-", то это точка максимума, с "-" на "+" – точка минимума.

51.Теорема Коши о среднем значении.

Пусть на отрезке определены две непрерывные фунции $f, g \in C([a,b])$. Пусть также $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $f'(x)$, а функция g дифференцируема, то есть $g \in \mathcal{D}((a,b))$, и $\forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$.

Тогда $\exists c \in (a,b) \quad \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

52.Формула Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, то ее можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

(1)

где функция $R_n(x)$ (остаточный член разложения) и ее производные до n-го порядка включительно обращаются в нуль в точке $x = x_0$:

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), \qquad (1)$$