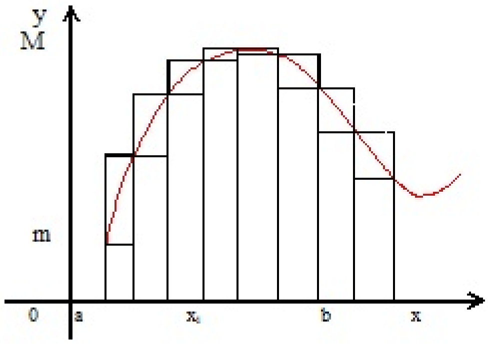
Определенный интеграл.

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a,b]$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Тогда $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = 1,\ldots,n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_{i-1}, x_i] \to m_i, M_i$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\,, \quad \overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}_n$ называется **нижней интегральной суммой Дарбу**, а сумма $\overline{S}_n$ – **верхней интегральной суммой Дарбу**, причём, т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, и следовательно

$$m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$$

Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ выберем некоторую точку ξ_i.

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Так как $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, то $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i) \Delta x_i \le M_i \Delta x_i$. Следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}_n \le \sigma_n \le \overline{S}_n. \qquad (1)$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Наибольший отрезок разбиения $\max \Delta x_i$ называется **шагом разбиения**. Если $\max \Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a,b]$ стремится к бесконечности.

<u>Определение определённого интеграла:</u> Если при любых разбиениях отрезка $[a,b]$ и произвольном выборе точек ξ_i интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S при $\max \Delta x_i \to 0$, то этот предел называется **определенным интегралом Римана** от функции

$f(x)$ на отрезке $[a,b]$. В этом случае функция называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a,b]$.

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sigma_n = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a,b]$ – отрезок интегрирования.

<u>Эквивалентное определение.</u> Функция $f(x)$ является **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a,b]$ если верхняя и нижняя суммы Дарбу имеют общий предел, т.е.

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \overline{S}_n = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \underline{S}_n = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Это следует из того, что если $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \overline{S}_n = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \underline{S}_n$ то в силу неравенства (1) и теоремы о 3-х функциях оба эти предела равны S. С другой стороны если эти пределы неравны, то предел σ_n будет зависеть от способа разбиения. Следовательно, функция $f(x)$ не будет интегрируемой.

<u>Теорема</u> (необходимое и достаточное условие интегрируемости).

Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой необходимо и достаточно, чтобы разность $\left|\overline{S}_n - \underline{S}_n\right|$ стремилась к нулю при любом способе разбиения отрезка $[a,b]$ и при стремлении шага разбиения к нулю.

<u>Доказательство.</u> Необходимость следует из того, что если $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$ имеют общий предел, то $\left|\overline{S}_n - \underline{S}_n\right| \to 0$ при $n \to \infty$ и $\max\Delta x_i \to 0$.

Достаточность. Из неравенства $\underline{S}_n \le \sigma_n \le \overline{S}_n$ следует, что при $\left|\overline{S}_n - \underline{S}_n\right| \to 0$ имеем

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \overline{S}_n = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \underline{S}_n = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sigma_n = S = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

<u>Доказательство.</u> В самом деле, для непрерывной функции и для любого ε найдётся число δ такое, что неравенство

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

справедливо если $|x_1 - x_2| < \delta$.

Пусть все отрезки разбиения меньше δ, т.е. $|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Тогда верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|M_i - m_i| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Следовательно, верхняя и нижняя суммы Дарбу удовлетворяют условию

$$\left|\overline{S}_n - \underline{S}_n\right| = \sum_{i=1}^{n} |M_i - m_i| \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$

Т.е. $\left|\overline{S}_n - \underline{S}_n\right| \to 0$ при $n \to \infty$ и $\delta \to 0$, что даёт условие интегрируемости.

<u>Следствие.</u> *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет не более конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*

<u>Замечание.</u> То, что функция имеет конечное число точек разрыва существенно. Здесь в качестве примера можно рассмотреть функцию Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{рациональное число}\\ 0, & x-\text{иррациональное число}\end{cases},\quad x\in[0,1]$$

Так как любой промежуток разбиения содержит как рациональные точки, так и иррациональные, то $\underline{S_n}=0, \overline{S_n}=1$. Следовательно, эта функция не интегрируема.

Теорема. *Монотонная ограниченная на $[a,b]$ функция всегда интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ - монотонно возрастающая на $[a,b]$ функция. Тогда её колебания в промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ будут

$$\omega_i=f(x_{i+1})-f(x_i)$$

Зададимся любым $\varepsilon>0$ и положим

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

Если $\Delta x_i<\delta$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)=\delta\big(f(b)-f(a)\big)=\varepsilon$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx=A\int\limits_a^b f(x)dx,$

2) $\int\limits_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx,$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx=0,$

4) Если $f_1(x)\le f_2(x)$ на отрезке $[a,b], a<b$, то $\int\limits_a^b f_1(x)dx\le\int\limits_a^b f_2(x)dx.$

Для доказательства необходимо составить интегральные суммы для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и перейти к пределу.

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то:

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Доказательство следует из неравенства $m(b-a)\le\underline{S_n}\le\sigma_n\le\overline{S_n}\le M(b-a)$. Далее необходимо перейти к пределу.

Следствие. Если положить $f(x)\equiv1$, то получим $m=M=1$, следовательно

$$\int\limits_a^b dx=b-a$$

т.е. получаем выражение для длины отрезка $[a,b]$.

6) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$

7) Свойство аддитивности. Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов. Для доказательства необходимо составить интегральные суммы для каждого из промежутков и перейти к пределу.

8) **<u>Первая теорема о среднем.</u>** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке существует точка* ε *такая, что*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

<u>Доказательство:</u> В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Пусть

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \quad \mu \in [m, M]$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует число $\varepsilon \in [a,b]$, такое что $\mu = f(\varepsilon)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

9) **<u>Обобщенная теорема о среднем.</u>** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка* ε*, такая, что*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

<u>Замечание.</u> Условие знакопостоянства функции $\varphi(x)$ существенно. В качестве примера можно рассмотреть интеграл

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2$$

Применение же обобщённой теоремы о среднем даёт

$$\int_0^\pi x\cos x dx = \varepsilon\int_0^\pi \cos x dx = \varepsilon\sin x\Big|_0^\pi = 0$$

10) **<u>Вторая теорема о среднем.</u>** *Если в промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ монотонно убывает, а $\varphi(x)$ - интегрируема, то существует точка $\xi \in [a,b]$*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx$$

Примеры вычисления интегралов с помощью интегральных сумм

Рассмотрим несколько примеров вычисления определённого интеграла с помощью интегральных сумм

Пример. Вычислим интеграл

$$\int_a^b x^\alpha dx, \quad \alpha \neq -1, \quad 0 < a < b$$

Решение. Так как x^α - непрерывная функция на $[a,b]$ при $0<a<b$, то она интегрируема, т.е. предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения и выбора промежуточных точек. Следовательно, мы можем воспользоваться любым разбиением отрезка $[a,b]$, лишь бы только шаг разбиения в пределе стремился к нулю. Поэтому, возьмём следующее разбиение

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^i, \ldots, aq^n = b$$

где $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$q^i \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \forall i,$$
$$aq^{i+1} - aq^i \le b(q-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Возьмем промежуточные точки на левых концах отрезков разбиения и запишем интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(aq^i\right)^\alpha \left(aq^{i+1} - aq^i\right) = a^{\alpha+1}(q-1) \sum_{i=0}^{n-1} \left(q^{\alpha+1}\right)^i = a^{\alpha+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1}{q^{\alpha+1} - 1} =$$
$$= \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$$

Используя эквивалентность $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \to 0$ получаем

$$\sigma_n = \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Пример. Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x}, \quad 0 < a < b$$

Решение. Воспользовавшись результатами предыдущего примера найдём

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(aq^i\right)^{-1} \left(aq^{i+1} - aq^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (q-1) = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{b}{a}$$

Здесь использована эквивалентность $a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \to 0$

Объединяя результаты обоих примеров в один получаем

$$\int_a^b x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \ln\dfrac{b}{a}, & \alpha = -1 \end{cases} \qquad 0 < a < b$$

Пример. Найдём ещё интеграл

$$\int_a^b \sin x dx, \quad a < b$$

Решение. Здесь разобьём отрезок $[a,b]$ на равные части, положив в качестве шага разбиения $h=(b-a)/n$. Тогда $x_i=a+ih,\ \ i=0,\ldots,n,\ x_0=a, x_n=b$. Подынтегральную функцию будем вычислять на правых концах промежутков разбиения. Имеем

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} h\sin(a+ih)$$

Домножим и поделим данное равенство на $2\sin h/2$ получим

$$2\sigma_n\sin\frac{h}{2}=2\sum_{i=1}^{n} h\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=h\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)\right]=$$

$$=h\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{5h}{2}\right)+\ldots+\cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right]=$$

$$=h\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right]=h\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]$$

Таким образом,

$$\sigma_n=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]\xrightarrow[h\to 0]{}\cos a-\cos b$$

Итак,

$$\int_a^b \sin x dx=\cos a-\cos b,\quad a<b$$

<u>Замечание.</u> Если $a>b$, то для составления интегральных сумм при выборе промежуточных точек надо поменять концы промежутков разбиения.

<u>Упражнение.</u> Доказать с помощью интегральных сумм следующую формулу

$$\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a,\quad a<b$$

Из рассмотренных примеров видно, что даже для вычисления простейших определёных интегралов с помощью интегральных сумм приходится прилагать значительные усилия. Поэтому данный способ вычисления определённых интегралов на практике используется крайне редко. Наиболее часто используется метод изложенный ниже.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a=const$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x (Применяется теорема о среднем).

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\{\xi\in(x,x+\Delta x)\}=f(x)$$

Следовательно, $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$

<u>Упражнение.</u> Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt=-f(x)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.*

Теорема (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая- либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием ***формулы Ньютона – Лейбница****.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое-то постоянное число C, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов. Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Методы вычисления определенного интеграла.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$. Пусть:

1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f[\varphi(t)]$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$,

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Тем самым получена формула замены переменных в определённом интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример.

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \{x = \pi - t\} = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

Следовательно, $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$

Пример.

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \{x = \operatorname{tg}\varphi\} = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg}\varphi)d\varphi = \left\{1+\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}\right\} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}d\varphi + \int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln\cos\varphi d\varphi = \left\{\begin{matrix} \text{во втором интеграле} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} - \psi \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\psi\right)d\psi = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

Сделаем замену переменной $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{e^{\operatorname{tg} t}+1} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{e^{-\operatorname{tg} t}dt}{e^{-\operatorname{tg} t}+1} = I$$

С другой стороны

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{e^{\operatorname{tg} t}+1} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+e^{\operatorname{tg} t} - e^{\operatorname{tg} t}}{e^{\operatorname{tg} t}+1}dt = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{e^{\operatorname{tg} t}}{e^{\operatorname{tg} t}+1}dt = \left\{\begin{matrix} t = -z \\ dt = -dz \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{2} + \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \frac{e^{-\operatorname{tg} z}}{e^{-\operatorname{tg} z}+1}dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{e^{-\operatorname{tg} z}}{e^{-\operatorname{tg} z}+1}dz = \frac{\pi}{2} - I.$$

Сравнивая с предыдущим результатом, получаем равенство $\frac{\pi}{2} - I = I$.

Следовательно, $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dt}{e^{\operatorname{tg}t}+1}=\frac{\pi}{4}$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример. $\int\limits_0^{\pi}dx=x\Big|_0^{\pi}=\pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^{\pi}dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)}=\left\{\operatorname{tg}x=t\right\}=\int\limits_0^{0}\frac{dt}{1+t^2}=0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\operatorname{tg}x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x=\pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Важные примеры. Рассмотрим интеграл

1) $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx$, где $f(x)$ нечётная на $[-a,a]$ функция

Имеем

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=\begin{Bmatrix}\text{во первом интеграле}\\ x=-t\end{Bmatrix}=-\int\limits_{0}^{a}f(t)dt+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=0$$

2) Аналогично доказывается, что

$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$, где $f(x)$ чётная на $[-a,a]$ функция

Таким образом

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx, & f(x)-\textit{чётная функция}\\ 0, & f(x)-\textit{нечётная функция}\end{cases}$$

3) Докажем, что $\int\limits_{a}^{a+T}f(x)dx=\int\limits_{0}^{T}f(x)dx$, где $f(x)$ периодическая функция с периодом T. Действительно

$$\int\limits_{a}^{a+T}f(x)dx=\int\limits_{a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{T}f(x)dx+\int\limits_{T}^{a+T}f(x)dx=\begin{Bmatrix}\text{в 3-м интеграле}\\ x=t+T\end{Bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{T}f(x)dx-\int\limits_{a}^{0}f(x)dx=\int\limits_{0}^{T}f(x)dx$$

Интегрирование по частям.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Пример.

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx,\quad I_n'=\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx,\quad n\in N$$

Рассмотрим первый интеграл и проинтегрируем его по частям

$$I_n=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}xd\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$

$$=\left\{\cos^2 x=1-\sin^2 x\right\}=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

Следовательно, $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

Пусть $n=2k$, тогда

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},\quad I_2=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2},\quad I_2=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2},\quad I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

При $n=2k-1$ имеем

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin xdx=1,\quad I_3=\frac{2}{3},\quad I_5=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},\quad I_{2k-1}=\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$$

Упражнение: показать, что для I_n' получаются аналогичные результаты.

Пример. $I_n=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^n xdx,\quad n\in N$

По аналогии с предыдущим примером сделаем следующее преобразование:

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^n xdx=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{n-2}x\,\mathrm{tg}^2 xdx=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx,=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{n-2}xd(\mathrm{tg}\,x)-I_{n-2}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x\Big|_0^{\pi/4}-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

Таким образом

$$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

Имеем

$$I_0=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4},\quad I_1=\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}\,xdx=-\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Для четных номеров получаем

$$I_2=1-I_0=1-\frac{\pi}{4},\quad I_4=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4},\quad I_6=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-\frac{\pi}{4},$$

$$I_{2k}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+k}}{2j-1},\quad k=1,2,\ldots$$

Для нечетных соответственно

$$I_3=\frac{1}{2}-I_1=\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2},\quad I_5=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2},\quad I_7=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$I_{2k+1}=(-1)^{k+1}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+k}}{j},\quad k=1,2,\ldots$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx,,\quad n\in N$

Указание. С помощью формулы дополнительного угла свести этот интеграл к $\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{2n+1}xdx$

Пример. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}dx=\int\limits_0^1\operatorname{arctg}xd\ln(x+1)=\operatorname{arctg}x\ln(x+1)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}\ln 2=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

Пример. $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\sin nxdx,\quad I_n'=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\cos nxdx,\quad n\in N$

Рассмотрим первый интеграл. Проинтегрируем его по частям

$$I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\sin nxdx=-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n xd\cos nxdx=$$

$$=-\frac{1}{n}\left(\cos^n x\cos nxdx\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\sin x\cos nxdx=\frac{1}{n}-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\sin x\cos nxdx$$

Прибавим к обеим частям по I_n, получим

$$2I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\sin nxdx=-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n xd\cos nxdx=$$

$$=-\frac{1}{n}\left(\cos^n x\cos nxdx\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\sin x\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{n}-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\left(\sin x\cos nx-\cos x\sin nx\right)dx=\frac{1}{n}+\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\sin\left((n-1)x\right)dx=\frac{1}{n}+I_{n-1}$$

Откуда находим

$$I_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+I_{n-1}\right)$$

По этой рекуррентной формуле можно окончательно получить

$$I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^2}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right)$$ (Доказать самостоятельно)

Аналогично находим, что

$$I_n'=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Пример. $I_{\alpha,n}=\int\limits_0^1 x^\alpha\ln^n xdx,\quad n\in N,\alpha>0$

Интегрирование по частям даёт

$$I_{\alpha,n}=\int\limits_0^1 x^\alpha\ln^n xdx=\frac{1}{\alpha+1}\int\limits_0^1\ln^n xdx^{\alpha+1}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x\Big|_0^1-\frac{n}{\alpha+1}\int\limits_0^1 x^\alpha\ln^{n-1}xdx=-\frac{n}{\alpha+1}I_{\alpha,n-1}$$

Откуда получается

$$I_{\alpha,n}=-\frac{n}{\alpha+1}I_{\alpha,n-1}\ \Rightarrow\ I_{\alpha,n}=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$$

Пример. Вычислить интеграл $I_n=\int\limits_{-\ln n}^{\ln n}\operatorname{ch}^n x dx,\quad n\in N$

$$I_n=\int\limits_{-\ln n}^{\ln n}\operatorname{ch}^n x dx=2\int\limits_0^{\ln n}\operatorname{ch}^{n-1}x\operatorname{ch}x dx=2\int\limits_0^{\ln n}\operatorname{ch}^{n-1}x d\operatorname{sh}x=2\operatorname{ch}^{n-1}x\operatorname{sh}x\Big|_0^{\ln n}-$$

$$-2(n-1)\int\limits_0^{\ln n}\operatorname{ch}^{n-2}x\operatorname{sh}^2 x dx=\left\{\operatorname{sh}\ln n=\frac{e^{\ln n}-e^{-\ln n}}{2}=\frac{n^2-1}{2n},\quad \operatorname{ch}\ln n=\frac{e^{\ln n}+e^{-\ln n}}{2}=\frac{n^2+1}{2n}\right\}=$$

$$=2\frac{n^4-1}{2^n n^n}\left(n^2+1\right)^{n-2}-(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

Откуда получаем

$$nI_n=\frac{n^4-1}{2^{n-1}n^n}\left(n^2+1\right)^{n-2}-(n-1)I_{n-2}\quad\Rightarrow I_n=\frac{n^4-1}{2^{n-1}n^{n+1}}\left(n^2+1\right)^{n-2}-\frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

Для вычисления интегралов по данной формуле надо знать I_1 и I_2. Имеем

$$I_1=\int\limits_{-\ln 1}^{\ln 1}\operatorname{ch}x dx=\int\limits_0^0\operatorname{ch}x dx=0$$

$$I_2=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\operatorname{ch}^2 x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)dx=\left[\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)+x\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{4}\left(4-\frac{1}{4}\right)+\ln 2=\frac{15}{16}+\ln 2$$

Упражнения. Доказать формулы

1. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\sin\left((n+2)x\right)dx=\frac{1}{n+1}$
2. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\cos\left((n+2)x\right)dx=0$
3. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\cos\left((n+2)x\right)dx=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$
4. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\sin\left((n+2)x\right)dx=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1},\quad n\in N$

Докажем, например, формулу 2. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n+2}x\cos\left((n+2)x\right)dx$$

И проинтегрируем его по частям дважды

$$I_{n+2}=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n+2}x\cos\left((n+2)x\right)dx=\frac{1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n+2}x d\sin\left((n+2)x\right)=$$

$$=\frac{1}{n+2}\cos^{n+2}x\sin\left((n+2)x\right)\Big|_0^{\pi/2}+\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n+1}x\sin x\sin\left((n+2)x\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{n+1}x\sin x d\cos\left((n+2)x\right)=$$

$$=-\frac{1}{n+2}\cos^{n+1}x\sin x\cos\left((n+2)x\right)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(-(n+1)\cos^n x\sin^2 x+\cos^{n+2}x\right)\cos\left((n+2)x\right)dx=$$

$$=-\frac{n+1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\sin^2 x\cos\left((n+2)x\right)dx+\frac{1}{n+2}I_{n+2}=$$

$$=\left\{\sin^2 x=1-\cos^2 x\right\}=-\frac{n+1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\cos\left((n+2)x\right)dx+I_{n+2}$$

Таким образом, получено, что

$$I_{n+2}=-\frac{n+1}{n+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\cos\left((n+2)x\right)dx+I_{n+2}$$

откуда следует, что $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos((n+2)x)dx = 0$.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Рассмотрим вопрос о вычислении площадей плоских фигур. Для этого, прежде всего, определим понятие плоской фигуры и её площади.

Определение. Произвольное ограниченное множество точек плоскости будем называть **плоской фигурой**. Если плоскую фигуру можно представить как объединение конечного числа непересекающихся прямоугольников, то такую фигуру будем называть **клеточной**.

Определение. Под прямоугольником будем понимать множество точек вида $K = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$. **Площадью прямоугольника** будем называть число $S(K) = (b-a)(d-c)$. **Площадью клетчатой фигуры** назовём соответственно сумму площадей прямоугольников, из которых она состоит.

Замечание. В дальнейшем при рассмотрении кратных интегралов будет показано, что площадь клетчатой фигуры не зависит от способа разбиения на прямоугольники и обладает следующими свойствами:

1) ***неотрицательностью***
2) ***аддитивностью***, т.е. площадь двух непересекающихся клеточных фигур равна сумме их площадей
3) ***инвариантностью***, т.е. площади двух равных клетчатых фигур совпадают
4) ***монотонностью***, т.е. если клетчатые фигуры G_1 и G_2 таковы, что $G_1 \subset G_2$, то площадь фигуры G_1 не превосходит площади фигуры G_2

Определение. Плоскую фигуру G назовём **квадрируемой**, если $\forall \varepsilon > 0$ найдутся клеточные фигуры q и Q, такие что

$$q \subset G \subset Q \text{ и } 0 \le S(Q) - S(q) < \varepsilon \qquad (1)$$

где $S(Q)$ и $S(q)$ - площади клеточных фигур q и Q. В этом случае площадью квадрируемой фигуры назовём число $S(G)$, удовлетворяющее условию

$$S(q) \le S(G) \le S(Q) \qquad (2)$$

для любых клетчатых фигур, удовлетворяющих условию (1).

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любой квадрируемой фигуры* G *число* $S(G)$ *существует и единственно, причём*

$$S(G) = \inf S(Q) = \sup S(q) \qquad (3)$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса о существовании точных верхней и нижней гранях ограниченных множеств существуют числа $\inf S(Q)$ и $\sup S(q)$ такие что

$$\inf S(Q) \le S(Q) \text{ и } \sup S(q) \ge S(q)$$

С другой стороны, для любых клеточных фигур q и Q удовлетворяющих условию (1) всегда выполняется неравенство

$$S(q) \le S(Q)$$

поэтому

$$S(q) \le \inf S(q) \le \inf S(Q) \le S(Q)$$

По ***аксиоме полноты*** $\Re$ существует число $S(G)$ такое, что будет выполняется условие

$$S(q) \le \inf S(q) \le S(G) \le \inf S(Q) \le S(Q)$$

Покажем, что это число единственно. Предположим, что существует ещё одно число $S'(G)$ такое что $S(q) \le S'(G) \le S(Q)$. Тогда

$$\left|S(G) - S'(G)\right| \le S(Q) - S(q)$$

для любых клеточных фигур, удовлетворяющих условию (1).

Так как G - квадрируемая фигура, то разность $S(Q) - S(q)$ можно сделать сколь угодно малой. Таким образом

$$\left|S(G) - S'(G)\right| \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Таким образом $S(G) = S'(G)$. Следовательно, квадрируемая фигура имеет площадь $S(G)$ удовлетворяющее условию (3).

Теорема 2. *Для того, чтобы плоская фигура G была квадрируема необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовали такие квадрируемые плоские фигуры q' и Q', что*

$$q' \subset G \subset Q', \quad 0 \le S(Q') - S(q') < \varepsilon \qquad (4)$$

где $S(Q')$ и $S(q')$ площади фигур q' и Q'.

Доказательство. **Необходимость.** Так как фигура G квадрируема, то условия (4) выполняются автоматически. Для этого достаточно положить $q' = q$ и $Q' = Q$, где q и Q удовлетворяют условиям (1).

Достаточность. Из условия (4) существуют квадрируемые плоские фигуры q' и Q' такие, что

$$q' \subset G \subset Q', \quad 0 \le S(Q') - S(q') < \varepsilon$$

Так как q' и Q' квадрируемые плоские фигуры, то существуют клеточные фигуры q и Q такие, что

$$q \subset q', Q' \subset Q, \quad 0 \le S(q') - S(q) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \le S(Q) - S(Q') < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

Теперь, из условий (4) и (5) имеем

$$q \subset G \subset Q, \quad 0 \le S(Q) - S(q) < \frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \varepsilon$$

Это значит, что G - квадрируемая фигура

Площадь криволинейной трапеции

Как известно, одной из основных задач, приведших к понятию определённого интеграла, является задача о вычислении площади **криволинейной трапеции**, т.е. фигуры определяемой в плоскости Oxy условиями

$$G = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

где $f(x) \in C_{[a,b]}$.

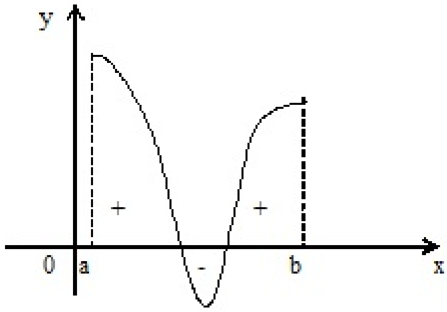
Теорема. *Криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой и её площадь равна*

$$S(G) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Ограничиваясь пояснением к доказательству заметим, что в качестве клеточных фигур здесь выступают ступенчатые фигуры, вписанные и описанные вокруг трапеции (см. определение определённого интеграла). Их площади определяются нижней и верхней суммами Дарбу, которые при стремлении шага разбиения к нулю и дают формулу (1).

Для знакопеременной функции необходимо вычислять площадь на каждом промежутке знакопостоянства функции, после чего результаты складываются или воспользоваться формулой

$$S(G)=\int_a^b |f(x)|dx$$



Рассмотрим теперь фигуру, представляющую собой следующее множество точек на плоскости $G=\{(x,y): a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$, где $f_1(x), f_2(x)\in C_{[a,b]}$ и $0\le f_1(x)\le f_2(x)$ на $[a,b]$. Используя свойство аддитивности площадей имеем

$$\int_a^b f_2(x)dx = S(G)+\int_a^b f_1(x)dx$$

Откуда с учётом свойства линейности определённого интеграла находим

$$S(G)=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

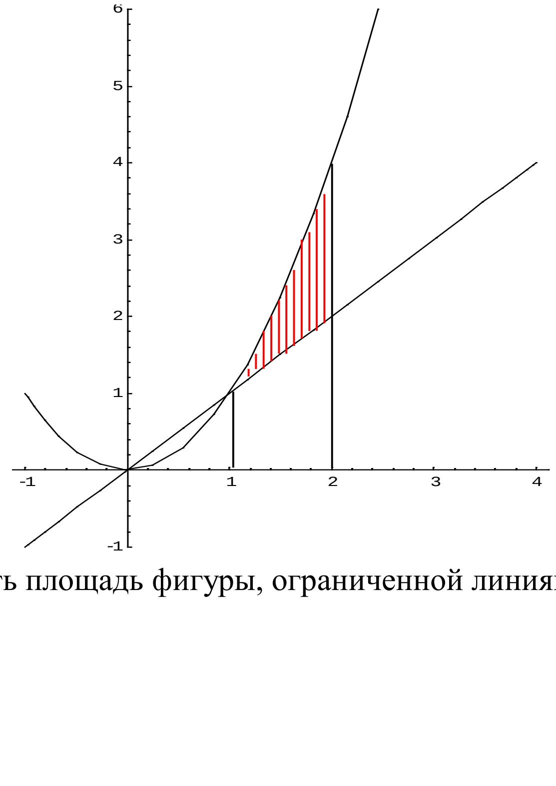
Очевидно, если фигура задана параметрически с помощью уравнений: $\alpha\le t\le\beta$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$, то

$$S=\int_a^b y(x)dx=\left\{\begin{matrix} x=x(t), & y=y(x(t))=y(t) \\ dx=x'(t)dt, a\to\alpha, & b\to\beta \end{matrix}\right\}=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x, y=x^2, x=2$.

Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\text{ (ед}^2\text{)}$$



Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\ln x$, $x=e^{-1}$, $x=e$.

$$S=\int_{1/e}^{e}\sqrt{x}dx-\int_{1/e}^{e}\ln x dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}-x\ln x\right)\Bigg|_{1/e}^{e}+\int_{1/e}^{e}dx=\frac{2}{3}\left(e^{3/2}-\frac{1}{e^{3/2}}\right)-e-\frac{1}{e}$$

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ и осью Ox.

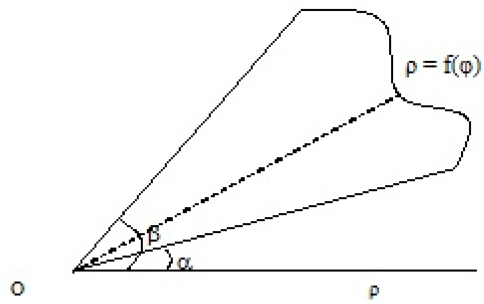
Здесь $0\le t\le 2\pi$, поэтому

$$S=4\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=4\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=4(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+2\int_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=8\pi+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=12\pi.$$

Нахождение площади криволинейного сектора.

Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Пусть уравнение кривой Γ в этой системе координат, имеет вид $\rho=f(\varphi)$, где ρ - длина радиус-вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус-вектора к полярной оси, $f(\varphi)$ - непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$ функция. Тогда, плоская фигура G, ограниченная кривой Γ и отрезками лучей, составляющих с полярной осью углы α и β, называется **криволинейным сектором**.



Теорема. *Криволинейный сектор G является квадрируемой фигурой, и его площадь может быть найдена по формуле*

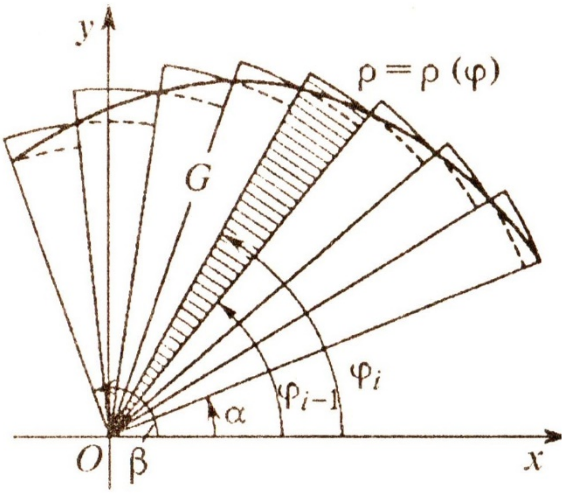
$$S(G)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi \quad (2)$$

Доказательство. Разобьём промежуток $[\alpha,\beta]$ на части

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta.$$

Так как функция $f(\phi)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то на каждом промежутке $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ достигает наибольшего и наименьшего значений. Пусть

$$m_i=\inf_{[\varphi_{i-1},\varphi_i]}f(\varphi),\quad M_i=\sup_{[\varphi_{i-1},\varphi_i]}f(\varphi)$$



Обозначим далее через q_i и Q_i круговые секторы радиусами m_i и M_i и углами $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Эти секторы являются квадрируемыми плоскими фигурами и их площади равны

$$S(q_i) = \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S(Q_i) = \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$$

Пусть далее q - объединение фигур $q_1, \ldots, q_n$ и Q - объединение фигур $Q_1, \ldots, Q_n$. Тогда фигуры q и Q тоже квадрируемые плоские фигуры и их площади равны

$$S(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S(Q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\varphi_i$$

Эти суммы являются нижней и верхней суммами Дарбу для функции $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$. Так как эта функция непрерывна, то при стремлении шага разбиения к нулю эти суммы имеют предел равный

$$S(G) = \lim_{\lambda\to 0} S(Q) = \lim_{\lambda\to 0} S(q) = \inf S(Q) = \sup S(q) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi$$

Таким образом, криволинейный сектор G - квадрируемая фигура и его площадь находится по формуле (2). Теорема доказана.

Пример. Найдём площадь фигуры, ограниченной Лемнискатой Бернулли, заданной уравнением

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Решение. Фигура симметрична относительно координатных осей. Площадь части фигуры, лежащей в первом квадранте равна

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}$$

Таким образом, вся площадь равна $S = 4\cdot\frac{a^2}{4} = a^2$

Пример. Найти площадь, ограниченную окружностями $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = \sqrt{3}a\sin\varphi$.

Решая совместно уравнения окружностей, находим точки их пересечения $O(0,0)$ и $A\left(a\sqrt{3}/2, \pi/6\right)$. Дуга OCA, описывается концом радиус-вектора при изменении φ от 0 до $\pi/6$. Тогда

$$S_{OCA} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6} 3a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{3a^2}{4}\int_{0}^{\pi/6}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{3a^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi/6} = \frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Дуга OBA, описывается концом радиус-вектора при изменении φ от $\pi/6$ до $\pi/2$. Тогда

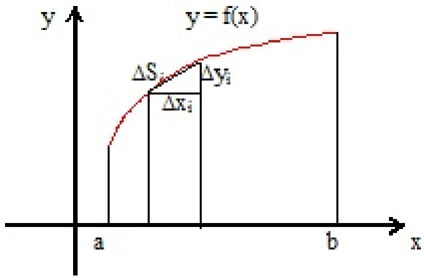
$$S_{OBA}=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}a^2\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Следовательно, искомая площадь

$$S=S_{OCA}+S_{OBA}=\frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{a^2}{4}\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$$

Вычисление длины дуги кривой.

Пусть на плоскости задана кривая $\Gamma=\{y=f(x),\quad x\in[a,b]\}$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на части набором точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$



Соединив точки отрезками прямых, получим ломаную линию, которая является вписанной в кривую Γ. Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\ .$$

Так как длина дуги $s(\Gamma)$ равна верхней грани длин всех вписанных в неё ломанных, то получаем

$$S=\lim_{\max\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \qquad (1)$$

Из геометрических соображений: $\Delta S_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(x_{i-1})$$

Тогда

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Таким образом

$$s(\Gamma)=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad (2)$$

<u>Замечание.</u> Для того, чтобы данный вывод был строгим надо доказать, что предел в формуле (1) действительно соответствует верхней грани длин всех вписанных в кривую Γ ломанных.

Для плоской кривой $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ получим соответственно

$$s(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (3)$$

Для плоской кривой заданной явно уравнением $y=f(x)$ получаем из (3)

$$s(\Gamma)=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad (4)$$

где учтено, что $x'=1$ (производная независимой переменной) и $y'=f'(x)$.

Наконец, если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$s(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}d\varphi\,,\ \rho=f(\varphi). \qquad (5)$$

<u>Пример.</u> Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y и найдем ее производную:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\,,\ y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Тогда

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}$$

Следовательно, $S=2\pi r$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=r^2$, т.е.

$$\rho=f(\varphi)=r\,,\ \rho'=\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=0$$

Тогда $s=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{0+r^2}d\varphi=r\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r$

Вычисление объемов тел.

<u>Тело и его объём</u>

<u>Определение.</u> Произвольное ограниченное множество точек пространства будем называть **телом**. Тело будем называть **клеточным**, если его можно представить, как объединение конечного числа непересекающихся прямоугольных параллелепипедов, т.е. тел вида

$$\Pi=\left\{(x,y,z):\ a_1<x<b_1, a_2<y<b_2, a_3<z<b_3\right\}$$

<u>Определение.</u> **Объёмом прямоугольного параллелепипеда** назовём число

$$V(\Pi)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$$

а **объёмом клетчатого тела** – сумму объёмов составляющих его параллелепипедов.

<u>Определение.</u> Тело Ω будем называть **кубируемым**, если $\forall\varepsilon>0$ найдутся клеточные тела такие P и p, что

$$p\subset\Omega\subset P,\ \ 0\le V(P)-V(p)<\varepsilon \qquad (1)$$

где $V(p)$ и $V(P)$ - объёмы клетчатых тел p и P соответственно.

Также как и в случае квадрируемых фигур доказывается, что *тело Ω кубируемо, тогда и только тогда, когда существует единственное число $V(\Omega)$ такое, что неравенство*

$$V(p)\le V(\Omega)\le V(P) \quad (2)$$

выполняется для любых клетчатых тел p и P, удовлетворяющих условию $p\subset\Omega\subset P$ и при этом

$$V(\Omega)=\sup V(p)=\inf V(P) \quad (3)$$

Теорема. *Если основанием цилиндрического тела является плоская квадрируемая фигура* G, *то тело* Ω *кубируемо и его объём* $V(\Omega)$ *равен*

$$V(\Omega)=h\cdot S(G)$$

где $S(G)$ *- площадь основания,* h *- высота цилиндра.*

Для доказательства необходимо предъявить клеточные фигуры p и P удовлетворяющие условию (1), чтобы при этом выполнялись неравенство (2) и равенство (3).

Раз основание является квадрируемой фигурой, следовательно, существуют клетчатые фигуры q и Q, такие, что

$$q\subset G\subset Q,\ \ 0\le S(Q)-S(q)<\frac{\varepsilon}{h}$$

Далее рассмотрим цилиндры Ω_1 и Ω_2 в основаниях которых лежат клетчатые фигуры q и Q и высота которых равна h. Тела Ω_1 и Ω_2 являются кубируемыми (так как могут быть представлены как объединение непересекающихся параллелепипедов) и их объёмы равны

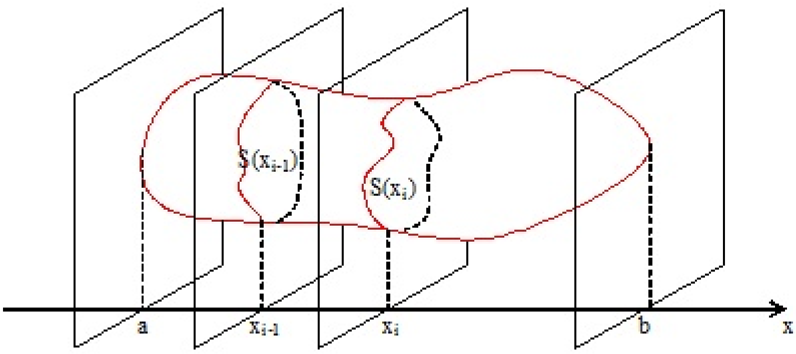
$$V(\Omega_1)=h\cdot S(q),\ \ V(\Omega_2)=h\cdot S(Q)$$

Так как $\Omega_1\subset\Omega\subset\Omega_2,\ \ 0\le V(\Omega_2)-V(\Omega_1)<\varepsilon$, то Ω - кубируемое тело и его объём равен

$$V(\Omega)=\sup V(p)=\inf V(P)=h\cdot S(G)$$

<u>Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.</u>

Пусть имеется тело Ω. Площадь любого поперечного сечения тела S, известна как непрерывная функция $S=S(x)$. Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка $[a,b]$. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1},x_i]$ функция $S(x)$ непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.



Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси Ox, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, и просуммировав полученные объёмы, получим $\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$.

Таким образом, тело Ω кубируемо. В качестве клетчатых тел p и P здесь выступают ступенчатые фигуры состоящие соответственно из вписанных и описанных вокруг тела Ω цилиндров. Объёмы этих тел как было установлено равны

$$V(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ и } V(p)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел (так как $S(x)$ непрерывна и следовательно интегрируема, а суммы (1) являются верхней и нижней суммами Дарбу для функции $S(x)$):

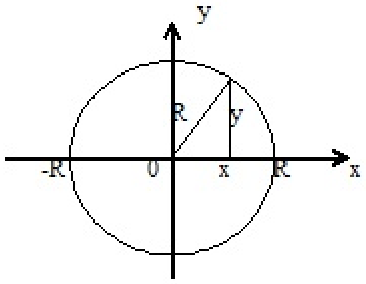
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$$

Таким образом, объем тела Ω в силу формул (2) и (3) может быть найден по формуле:

$$V(\Omega)=\int_a^b S(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию $S(x)$, что весьма проблематично для сложных тел.

<u>Пример:</u> Найти объем шара радиуса R.



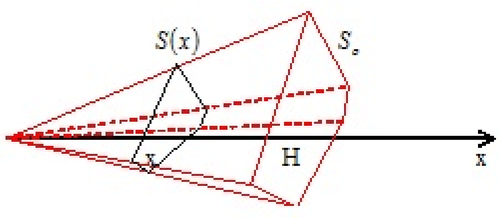
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2-x^2}$.Тогда функция площадей сечений имеет вид:

$$S(x)=\pi\left(R^2-x^2\right).$$

Получаем объем шара:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

<u>Пример:</u> Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S_o.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

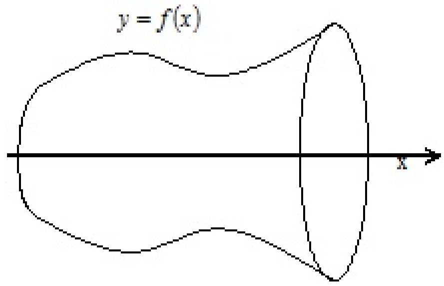
$$\frac{S(x)}{S_o}=\left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $S(x)=\dfrac{S_o}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V=\displaystyle\int_0^H \frac{S_o}{H^2}x^2dx=\frac{S_o x^3}{3H^2}\Bigg|_0^H=\frac{1}{3}S_oH$

Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y=f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x=const$ представляет собой круг радиуса $R=|f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Точно также, при вращении кривой $x=g(y)$, $y\in[c,d]$ получаем

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)dy$$

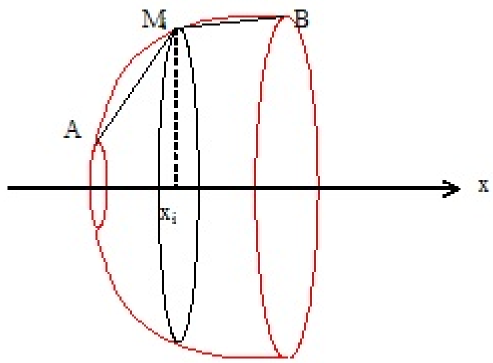
Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси $\rho=\rho(0)$, то

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi d\varphi$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\sqrt{x}e^{-x^2}$, $x\in[0,a]$ вокруг оси $y=Ox$. Имеем

$$V=\pi\int_0^a xe^{-2x^2}dx=-\frac{\pi}{4}e^{-2x^2}\Big|_0^a=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0=A, M_1,\dots,M_{n-1}, M_n=B$. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.Получаем:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$$

Тогда

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i \quad \Rightarrow \qquad \Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Тогда

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

- формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Физические приложения определённого интеграла

Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

<u>**Определение.**</u> Рассмотрим систему материальных точек $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,n}$ на плоскости xOy. Пусть массы этих точек равны m_i. Тогда, **статическим моментом** M_x этой системы относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек m_i на их ординаты y_i

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Аналогично определяется статический момент M_y этой системы относительно оси Oy.

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

<u>**Определение.**</u> Моментами инерции I_x, I_y этой системы относительно осей Ox и Oy называются соответственно суммы произведений масс точек на квадраты расстояний от осей Oy и Ox (именно в таком порядке!!!).

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

В качестве статических моментов и моментов инерции однородных плоских дуг и фигур принимаются соответствующие моменты масс, равномерно распределённых вдоль этих дуг. Т.е. скажем в случае плоской дуги (т.е. дуги, лежащей в некоторой плоскости) осуществляется её разбиение на n частей, составляется интегральная сумма (более строго см. тему криволинейные интегралы) и после предельного перехода при стремлении шага разбиения к нулю получаются следующие формулы

$$M_x=\int_a^b \rho(M)yds,\quad M_y=\int_a^b \rho(M)xds,\quad I_x=\int_a^b \rho(M)y^2ds,\quad I_y=\int_a^b \rho(M)x^2ds \quad (1)$$

где $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ - дифференциал дуги кривой, M - точка на дуге, $\rho(M)$ - линейная плотность дуги (в случае геометрической дуги полагается $\rho(M)\equiv 1$). Таким образом, в случае явного задания кривой $y=f(x)$ формулы (1) будут иметь вид

$$\begin{gathered}M_x=\int_a^b \rho(x)y\sqrt{1+y'^2}dx,\quad M_y=\int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+y'^2}dx,\\ I_x=\int_a^b \rho(x)y^2\sqrt{1+y'^2}dx,\quad I_y=\int_a^b \rho(x)x^2\sqrt{1+y'^2}dx\end{gathered} \quad (2)$$

Замечание 1. Если кривая задана параметрически, в виде

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$$

то дифференциал дуги равен $ds=\sqrt{\phi'^2+\psi'^2}dt$ и формулы (1) запишутся в виде

$$\begin{gathered}M_x=\int_\alpha^\beta \rho(t)\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\quad M_y=\int_\alpha^\beta \rho(t)\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\\ I_x=\int_\alpha^\beta \rho(t)\psi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\quad I_y=\int_\alpha^\beta \rho(t)\varphi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\end{gathered} \quad (3)$$

Замечание 2. Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$ дифференциал дуги равен соответственно $ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$. Декартовы координаты связаны с полярными координатами следующими соотношениями

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\quad \varphi\in[\alpha,\beta]$$

Следовательно, формулы (1) в полярных координатах примут вид

$$\begin{gathered}M_x=\int_\alpha^\beta \rho(\varphi,r)r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi,\quad M_y=\int_\alpha^b \rho(\varphi,r)r\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi,\\ I_x=\int_\alpha^\beta \rho(\varphi,r)r^2\sin^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi,\quad I_y=\int_\alpha^\beta \rho(\varphi,r)r^2\cos^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi\end{gathered}$$

Аналогично, для криволинейной трапеции ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ с учётом того, что дифференциал площади криволинейной трапеции равен с учётом того, что дифференциал площади криволинейной трапеции равен $dS=ydx$ получается

$$\begin{gathered}M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \rho(x,y)ydS=\frac{1}{2}\int_a^b \rho(x,y)y^2dx,\quad M_y=\int_a^b \rho(x,y)xdS=\int_a^b \rho(x,y)xydx,\\ I_x=\frac{1}{3}\int_a^b \rho(x,y)y^2dS=\frac{1}{3}\int_a^b \rho(x,y)y^3dx,\quad I_y=\int_a^b \rho(x,y)x^2dS=\int_a^b \rho(x,y)x^2ydx\end{gathered} \quad (4)$$

где $\rho(x,y)$ - поверхностная плотность плоской фигуры (в случае геометрической фигуры полагается $\rho(x,y)\equiv 1$).

Упражнение. Написать формулы статических моментов и моментов инерции для фигуры ограниченной кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$

Пример. Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ лежащей в верхней полуплоскости.

Решение. Так как фигура лежит в верхней полуплоскости, то $t\in[0,\pi]$. Далее

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{9a\sin^2 t\cos^4 t+9a\cos^2 t\sin^4 t}dt=3a\sin t\cos t dt$$

Тогда, полагая $\rho(t)\equiv 1$ (для геометрической линии) находим

$$M_x=3a^2\int_0^\pi \sin^4 t\cos t dt=\frac{3a^2}{5}\sin^5 t\Big|_0^\pi=0,$$

$$M_y=3a^2\int_0^\pi \cos^4 t\sin t dt=-\frac{3a^2}{5}\cos^5 t\Big|_0^\pi=\frac{6a^2}{5},$$

$$I_x=3a^3\int_0^\pi \sin^7 t\cos t dt=\frac{3a^3}{8}\sin^8 t\Big|_0^\pi=0,$$

$$I_y=3a^3\int_0^\pi \cos^7 t\sin t dt=-\frac{3a^3}{8}\cos^8 t\Big|_0^\pi=\frac{6a^3}{8}=\frac{3a^3}{4}.$$

Нахождения центра тяжести плоских фигур

Координаты центра тяжести (x_c, y_c) материальной дуги AB с плотностью $\rho=\rho(M)$, где M - точка дуги находится по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b \rho(M)x ds}{\int_a^b \rho(M) ds},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b \rho(M)y ds}{\int_a^b \rho(M) ds} \qquad (1)$$

где m - масса дуги AB (подробнее см. тему Криволинейные интегралы), M_x и M_y - статические моменты инерции дуги AB, ds - дифференциал дуги.

Для нахождения центра тяжести криволинейной трапеции ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ используются формулы

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b \rho(M)x dS}{\int_a^b \rho(M) dS},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b \rho(M)y dS}{\int_a^b \rho(M) dS} \qquad (2)$$

где m - масса криволинейной трапеции (подробнее см. тему Поверхностные интегралы), M_x и M_y - статические моменты инерции криволинейной траеции, dS - дифференциал поверхности, который в случае криволинейной трапеции равен $dS=ydx$.

Упражнение. Записать формулы (1), для кривой заданной:

А) явно уравнением $y=f(x)$

Б) в параметрической форме

В) в полярных координатах

Упражнение. Написать формулы координат центра тяжести для фигуры ограниченной кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$

Теоремы Гульдена.

1. *Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей её равна, длине дуги кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести дуги.*
2. *Объём тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, не пересекающей её и расположенной в плоскости фигуры равен произведению площади этой фигуры на длину окружности описанной центром тяжести этой фигуры.*

Замечание. *Если дуга (фигура) пересекают ось вращения, то их необходимо разбить на части каждая из которых удовлетворяет условиям теорем Гульдена, найти площади поверхностей вращения (объёмы поверхностей вращения) и результаты сложить.*

Пример. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = a\operatorname{ch}(x/a)$, $x \in [-a, a]$.

Решение. В силу чётности функции $y = a\operatorname{ch}(x/a)$ её график симметричен относительно оси Oy, а в силу симметрии отрезка $[-a, a]$ относительно начала координат, можно утверждать, что центр тяжести лежит на оси Oy, т.е. $x_c = 0$. Найдём y_c. Имеем для геометрической фигуры $\rho(M) \equiv 1$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x/a)}\,dx = \operatorname{ch}(x/a)\,dx$$

$$y_c = \frac{a\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{ch}^2(x/a)\,dx}{\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{ch}(x/a)\,dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 по отдельности. Начнём с интеграла I_2

$$I_2 = \int\limits_{-a}^{a} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = 2a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\bigg|_0^a = 2a(\operatorname{sh}1 - \operatorname{sh}0) = 2a\operatorname{sh}1$$

Для интеграла I_1 имеем соответственно

$$I_1 = a\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = 2a\int\limits_{0}^{a} \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = a\int\limits_{0}^{a}\left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = a\left(x + \frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\bigg|_0^a =$$

$$= a\left(a + \frac{a}{2}\operatorname{sh}2\right) = \frac{a^2(2 + \operatorname{sh}2)}{2}$$

Теперь находим

$$y_c = \frac{a^2(2 + \operatorname{sh}2)}{4a\operatorname{sh}1} = \frac{a(2 + \operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}$$

Пример. Найти координаты центра тяжести части фигуры, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ лежащей в первой координатной четверти.

Решение. Границей этой фигуры является дуга эллипса, лежащего в первой координатной четверти и координатные оси. Для решения задачи удобно записать уравнение эллипса в параметрической форме. С этой целью сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Тогда

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$$

$$x_c=\frac{a\int\limits_0^{\pi/2}\cos t dt}{\int\limits_0^{\pi/2}dt}=\frac{a\sin t\Big|_0^{\pi/2}}{\pi/2}=\frac{2a}{\pi},\quad y_c\frac{b\int\limits_0^{\pi/2}\sin dt}{\int\limits_0^{\pi/2}dt}=-\frac{b\cos t\Big|_0^{\pi/2}}{\pi/2}=\frac{2b}{\pi}.$$

Пример. Найти площади поверхности и объём торов, образованных вращением круга $(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ вокруг оси Ox.

Решение. Если круг вращается вокруг оси Ox, то центр его тяжести находится на расстоянии b от оси вращения. Длина окружности, как известно, $2\pi R$. Поэтому, согласно первой теореме Гульдена площадь поверхности S равна

$$S=2\pi Rb$$

Площадь круга равна πR^2, длина окружности описанной центром тяжести круга равна $2\pi b$. Следовательно, согласно, второй теоремы Гульдена объём тора V равен

$$V=\pi R^2\cdot 2\pi b=2\pi^2 bR^2$$

Дальнейшие приложения определённого интеграла к задачам физики

Давление жидкости.

Из курса физики известно, что согласно закону Паскаля сила давления жидкости P на пластинку пропорциональна произведению площади пластинки S на глубину её погружения x, т.е.

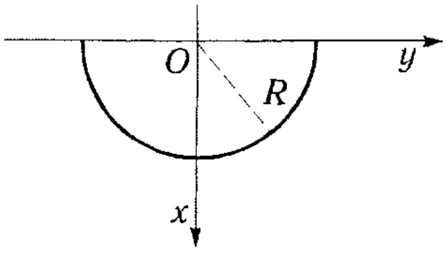
$$P=\rho xS$$

где ρ - плотность жидкости, которую будем считать постоянной.

В случае, когда пластинка имеет форму криволинейной трапеции ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ то сила давления на её боковую поверхность равно

$$P=\rho\int\limits_a^b xdS=\rho\int\limits_a^b xydx \qquad (1)$$

Пример. Цилиндрическая цистерна наполовину наполнена жидкостью с плотностью ρ. Найти силу давления на каждую из торцевых стенок цистерны, если её радиус равен R.



Решение. Здесь $y=\sqrt{R-x^2}$ поэтому

$$P=\rho\int\limits_0^R x\sqrt{R-x^2}dx=\frac{R}{2}\int\limits_0^R\sqrt{R-x^2}dx^2=-\frac{R}{3}\left(R-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^R=\frac{R}{3}$$

Соответственно, если бы цистерна была бы полной, сила давления составила бы примерно $2R/3$.

Работа силы.

Работа A переменной силы $f(s)$ по перемещению единицы массы из положения $s=a$ в положение $s=b$ равна

$$A=\int_a^b f(s)ds \quad (2)$$

где ds - дифференциал дуги, s - параметр дуги (переменная длина дуги).

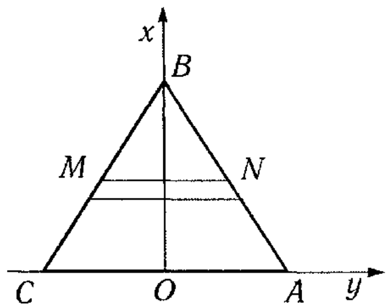
Замечание. Интеграл (2) следует понимать в смысле криволинейного интеграла первого рода (см. тему Криволинейные интегралы). В случае, если переменная сила действует в направлении оси Ox, то $s=x, ds=dx$ и поэтому

$$A=\int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

Если траектория точки описывается уравнением $s=s(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, где $s(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то

$$A=\int_\alpha^\beta f(s(t))s'(t)dt \quad (4)$$

Пример. Имеется пирамида высотой H и с квадратным основанием, сторона которого равна a. Вычислить работу, затрачиваемую при её постройке, по преодолению силы тяжести.



Решение. Выделим двумя паралледьными плоскостями элементарный объём пирамиды (см. рисунок) находящийся на высоте x. Из подобия треугольников $\Delta ABC\sim\Delta NBM$ имеем

$$\frac{NM}{AC}=\frac{BE}{BO} \Rightarrow \frac{y}{2a}=\frac{H-x}{H} \Rightarrow 2y=a\left(1-\frac{x}{H}\right)$$

Считая, что при достаточно мелко разбиении площадь сечения в промежутке $[x, x+dx]$ остаётся постоянной, находим, что элементарный объём dV равен

$$dV=(2y)^2dx=a^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2dx$$

Работа по подъёму этого элементарного объёма на высоту x будет равна

$$dA=\rho dVx=\rho a^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2xdx$$

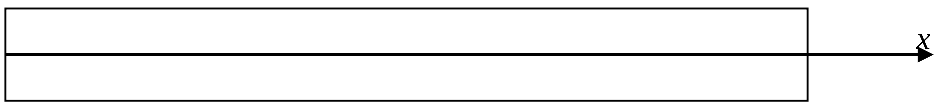
Соответственно, вся работа по постройке пирамиды равна

$$A=\int_0^H\rho a^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2xdx=\rho a^2\int_0^H\left(x-\frac{2x^2}{H}+\frac{x^3}{H^2}\right)dx=\rho a^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\rho a^2\left(\frac{H^2}{2}-\frac{2H^3}{3H}+\frac{H^4}{4H^2}\right)=\rho a^2H^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\rho a^2H^2}{12}$$

Пример. Найти работу по растяжению цилиндрического стержня площадью сечения S, длины L на величину ΔL.

Решение. Совместим ось Ox со срединной линией стержня.



0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ L

Растягивающие усилие F согласно закону Гука равно

$$F = ES\frac{x}{L}$$

где E - модуль Юнга, x - удлинение вдоль оси Ox.

Подставляя силу F в формулу (3) находим

$$A = \int_0^{\Delta L} ES\frac{x}{L}dx = \frac{ES}{L}\int_0^{\Delta L} xdx = \frac{ES}{L}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\Delta L} = \frac{ES}{L}\frac{\Delta L^2}{2}$$

<u>Пройденный путь материальной точки.</u>

Если задан закон изменения скорости $v = f(t)$, то закон движения материальной точки будет определяться как

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \qquad (5)$$

где t_0 - время начала движения, t - текущее время.

Так, например, путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 равен

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \qquad (6)$$

<u>**Пример.**</u> Скорость движения точки определяется законом $v = v_0 - at$, где v_0 - начальная скорость, a - ускорение. Найти путь и время до полной остановки тела.

<u>**Решение.**</u> Остановка произойдёт в момент времени T, когда скорость станет равной нулю. Таким образом,

$$0 = v_0 - aT \;\; \Rightarrow \;\; T = \frac{v_0}{a}$$

Тогда, пройденный путь определяется по формуле (6)

$$S = \int_0^T (v_0 - at)dt = \left(v_0 t - \frac{at^2}{2}\right)\Bigg|_0^T = v_0 T - \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a}$$

<u>Скорость истечения жидкости из отверстия</u>

Рассмотрим сосуд, заполненный жидкостью. Пусть на расстоянии h от поверхности жидкости в стенке сосуда имеется отверстие. Тогда, согласно закону Торричелли, скорость истечения жидкости из отверстия равна $v = \mu\sqrt{2gh}$, где g - ускорение свободного падения, μ - коэффициент, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия (для воды в случае круглого отверстия $\mu = 0.6$).

Пусть время полного опорожнения сосуда равно T. Разобьём промежуток времени $[0, T]$ на бесконечно малые промежутки $[t_{i-1}, t_i], i = \overline{1,n}$ на протяжение которых можно считать, что скорость истечения жидкости из сосуда постоянна и площадь поперечного сечения $S(x)$ также постоянна. Рассмотрим малый промежуток времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Пусть к моменту времени t_i уровень жидкости понизился на с x_{i-1} до x_i, тогда

$$v(x_i) = \mu\sqrt{2g(h - \xi_i)}$$

где ξ_i - промежуточная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$

За это время вытек объём жидкости

$$\Delta V_i = v(\xi_i)\Delta t_i = \mu\sqrt{2g(h-\xi_i)}\Delta t_i$$

С другой стороны, этот же объём равен опорожнённой части сосуда равной

$$\Delta V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$$

где Δx_i - изменение уровня за время Δt_i.

Из двух последних равенств находим

$$\mu\sqrt{2g(h-\xi_i)}\Delta t_i = S(\xi_i)\Delta x_i \;\Rightarrow\; \Delta t_i = \frac{S(\xi_i)}{\mu\sqrt{2g(h-\xi_i)}}\Delta x_i$$

Просуммировав по всем промежуткам разбиения и перейдя к пределу при стремлении шага разбиения к нулю получим, что время полного опорожнения T равно

$$T = \frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{S(x)}{\sqrt{(h-x)}}dx \qquad (7)$$

Соответственно, чтобы найти, на сколько понизится уровень жидкости за время t нужно решить уравнение

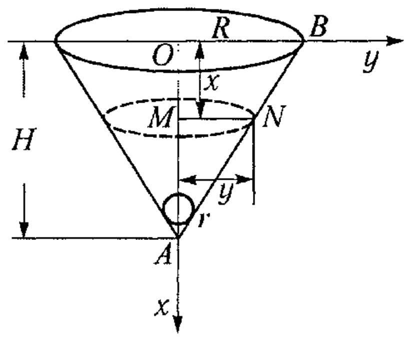
$$t = \frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{S(\xi)}{\sqrt{(h-\xi)}}d\xi \qquad (8)$$

Пример. Коническая воронка имеет следующие размеры: высоту H, радиус нижнего основания r, радиус верхнего основания R. Найти:

А) за сколько времени вся вода вытечет из воронки.

Б) найти уровень воды спустя половину времени полного опорожнения воронки.

В) найти зависимость уровня воды от времени



Решение. Найдём вначале выражение для площади сечения. Из подобия треугольников $\Delta ABO \sim \Delta MNO$ имеем:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{MA}{MN} \;\Rightarrow\; \frac{H}{R} = \frac{H-x}{y} \;\Rightarrow\; y = R\left(1-\frac{x}{H}\right)$$

Тогда площадь сечения $S(x)$ равна

$$S(x) = \pi R^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2$$

Время опорожнения воронки найдём по формуле (7)

$$T = \frac{\pi R^2}{\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{1}{\sqrt{(H-x)}}\left(1-\frac{x}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{3/2}dx = -\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}(H-x)^{5/2}\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}H^{5/2} = \frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Таким образом, время полного опорожнения равно

$$T = \frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}} \qquad (9)$$

Теперь найдём, сколько жидкости вытечет за время $T/2$. Имеем из уравнения (8)

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}\int_0^x (H-\xi)^{3/2}\,d\xi=-\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}(H-\xi)^{5/2}\Big|_0^x=$$

$$=\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}H^{5/2}-\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}(H-x)^{5/2}$$

Подставляя в последнее равенство значение, T найденное по формуле (9) приходим к куравнению

$$\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}H^{5/2}-\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}(H-x)^{5/2}=\frac{1}{5}\frac{\pi R^2}{\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\sqrt{H}-\frac{2}{H^2}(H-x)^{5/2}=\sqrt{H}\ \Rightarrow 2(H-x)^{5/2}=H^{5/2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (H-x)=2^{-5/2}H\ \Rightarrow\ x=H\left(1-2^{-5/2}\right)$$

Таким образом, за время $T/2$ уровень воды понизиться на величину

$$x=H\left(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

Наконец, для определения зависимости изменения уровня воды от времени вновь рассмотрим равенство (8)

$$t=\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}\int_0^x (H-\xi)^{3/2}\,d\xi=\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}H^{5/2}-\frac{2}{5}\frac{\pi R^2}{\mu H^2\sqrt{2g}}(H-x)^{5/2}$$

Откуда получаем

$$H^{5/2}-(H-x)^{5/2}=\frac{5}{2}\frac{\mu H^2\sqrt{2g}}{\pi R^2}t\ \Rightarrow\ H-x=\left[H^{5/2}-\frac{5}{2}\frac{\mu H^2\sqrt{2g}}{\pi R^2}t\right]^{2/5}$$

Следовательно, закон опорожнения имеет вид

$$x(t)=H-\left[H^{5/2}-\frac{5}{2}\frac{\mu H^2\sqrt{2g}}{\pi R^2}t\right]^{2/5}$$