Теория пределов функции одной переменной.

Предел числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность** $\{x_n\}$

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(x_n)$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция. Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности, например:

$$\{x_n\} = \left\{(-1)^n\right\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$$

$$\{x_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\} = 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\ldots$$

Определение. Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N: \;\; \forall n > N \;\; \Rightarrow \;\; |x_n - a| < \varepsilon$

Это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к a при $n \to \infty$.

Свойство. *Если отбросить какое-либо конечное число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.*

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n > N$ верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $x_n = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| \le M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M, M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M , что

$$x_n \le M \ .$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число m, что

$$x_n \ge m$$

Пример. $x_n = n$ – ограничена снизу {1, 2, 3, … }.

Теорема. *Если* $x_n \to a$, *то последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена, т.е. существуют числа* m *и* M *такие что*

$$m \le x_n \le M \quad \forall n \in N$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что все члены последовательности с номерами $n > N$ будут лежать в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а вне этого интервала будут лежать точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Этих точек конечное множество, поэтому положим

$$m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a-\varepsilon\}$$

$$M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a+\varepsilon\}$$

Теперь все члены последовательности лежат в промежутке $[m, M]$. Таким образом, доказано, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Замечание. Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность

$$x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, \textit{при четном } n \\ 2-\dfrac{1}{n}, \textit{при нечетном } n \end{cases}$$

не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Используя теперь понятие предела числовой последовательности можно дать следующее определение предельной точки множества, а именно: *точка* a *называется предельной точкой множества* A *если существует последовательность точек* $\{x_n\}$ *из множества* A *сходящаяся к точке* a.

В терминах пределов последовательностей приведём также формулировку леммы Больцано-Коши и независимое доказательство.

Лемма Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть дана ограниченная числовая последовательность $\{x_n\}$. Из ограниченности последовательности следует, что все её члены лежат на некотором отрезке числовой прямой, который обозначим $[a_0, b_0]$. Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов последовательности. Обозначим его $[a_1, b_1]$. На следующем шаге повторим процедуру с отрезком $[a_1, b_1]$: разделим его на два равных отрезка и выберем из них тот, на котором лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим его $[a_2, b_2]$. Продолжая процесс, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$$

в которой каждый последующий является половиной предыдущего, и содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

Длины отрезков стремятся к нулю: $|b_k-a_k|=\dfrac{|b_0-a_0|}{2^k}\to 0,\quad k\to\infty$

В силу леммы о вложенных отрезках, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам: $a_k\le c\le b_k,\quad k=0,1,\ldots$

По построению на каждом отрезке $[a_k,b_k]$ лежит бесконечное число членов последовательности. Выберем последовательность $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$ соблюдая при этом условие возрастания номеров $n_0<n_1<\ldots$:

Тогда подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к точке c. Это следует из того, что расстояние от x_{n_k} до c не превосходит длины содержащего их отрезка $[a_k,b_k]$, откуда

$$|x_{n_k}-c|\le|b_k-a_k|\to 0,\quad k\to\infty$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Эквивалентная формулировка этой леммы была дана в теме «Открытые, замкнутые и компактные множества». При этом точка c как раз и играет роль предельной точки.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n\to a;\; x_n\to b;\quad a\ne b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |b-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\le|a-x_n|+|x_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

А т.к. ε - любое малое положительное число, то $|a-b|=0$, т.е. $a=b$. Теорема доказана.

Следствие. (Достаточное условие расходимости последовательности) *Если из последовательности можно выделить две подпоследовательности с разными пределами, то эта последовательность расходится.*

Пример. $x_n=(-1)^n$. Имеем $x_{2k}=1\;\Rightarrow\;\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=1,\quad x_{2k+1}=-1\;\Rightarrow\;\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=-1$

Таким образом, данная последовательность расходится.

Теорема. *Если* $x_n\to a$, *то* $|x_n|\to|a|$.

Доказательство. Из $x_n\to a$ следует, что $|x_n-a|<\varepsilon$. В то же время:

$||x_n|-|a||\le|x_n-a|$, т.е. $||x_n|-|a||<\varepsilon$, т.е. $|x_n|\to|a|$.

Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$$\forall M>0\,\exists N:\; |x_n|>M\;\forall n>N$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

В ряде случаев принято различать пределы $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, которые имеют место в случае, если $\forall M>0\,\exists N:\; x_n>M\;\forall n>N$ (соответственно $x_n<-M\;\forall n>N$)

Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Обратное утверждение неверно, так как, например, последовательность

$$\left\{n\sin\frac{\pi n}{2}\right\}=\{1,0,-3,0,5,0,-7,0,\ldots\}$$

является неограниченной, но не является бесконечно большой, так как не выполняется условие определения в точках $n=2k, k\in N$.

Монотонные последовательности.

<u>**Определение.**</u> 1) Если $x_{n+1}>x_n$ для всех n , то последовательность возрастающая.

2)Если $x_{n+1}\geq x_n$ для всех n , то последовательность неубывающая.

3)Если $x_{n+1}<x_n$ для всех n , то последовательность убывающая.

4)Если $x_{n+1}\leq x_n$ для всех n , то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными,** например:

$x_n=\dfrac{1}{n}$ – убывающая и ограниченная, $x_n=n$ – возрастающая и неограниченная.

<u>**Пример.**</u> Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности:

$$x_n-x_{n+1}=\frac{n}{2n+1}-\frac{n+1}{2n+3}=\frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$$

т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n . Таким образом, $x_{n+1}>x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

<u>**Пример.**</u> Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность

$$x_n=\frac{n}{5^n}.$$

Найдем x_{n+1} и разность $x_{n+1}-x_n$. Имеем

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{5^{n+1}},\quad x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{5\cdot 5^n}-\frac{n}{5^n}=\frac{n+1-5n}{5\cdot 5^n}=\frac{1-4n}{5\cdot 5^n}$$

Так как $n\in N$, то $1-4n<0$, т.е. $x_{n+1}<x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены, по крайней мере, с одной стороны.

<u>**Теорема Вейерштрасса.**</u> *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

<u>**Доказательство.**</u> Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq x_{n+1}\leq\ldots$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n\leq M$, где M – некоторое число.

Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет точную верхнюю грань, то

1) $x_n\leq a<a+\varepsilon$

2) $\forall\varepsilon>0\,\exists N:\ x_N>a-\varepsilon$, где a – точная верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$ - неубывающая последовательность, то при $n > N$ имеем: $a - \varepsilon < x_N \le x_n$. Т.е. $x_n > a - \varepsilon$ при $n > N$

Отсюда $\forall n > N$ получаем $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $|a - x_n| < \varepsilon.$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично. **Теорема доказана.**

Число e.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел. По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у члена x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех, а точнее $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le \left\{n! \ge 2^{n-1}\right\} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1-1/2^n}{1-1/2} < 1 + \frac{1}{1-1/2} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $e \le 3$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \ge 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e. Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,718281828459045…

Упражнение. Найти пределы последовательностей:

1) $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$

2) $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ldots$

Указание. Воспользоваться теоремой Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности и рекуррентными соотношениями $x_{n+1}=\sqrt{a+\sqrt{x_n}}$

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Пусть даны сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = b. \qquad (1)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha x_n = \alpha a,\quad \forall\alpha\in\Re$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = a\cdot b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, остальные доказываются аналогично. Пусть выполнены условия (1), тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1:\ \forall n>N_1\ \Rightarrow\ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2:\ \forall n>N_2\ \Rightarrow\ |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Положим $N=\max\{N_1,N_2\}$, тогда $\forall n>N$ имеем

$$|x_n \pm y_n-(a\pm b)| = |x_n-a\pm(y_n-b)| \le |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

Для третьего утверждения:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1:\ \forall n>N_1\ \Rightarrow\ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{4|b|}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2:\ \forall n>N_2\ \Rightarrow\ |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2|a|}$$

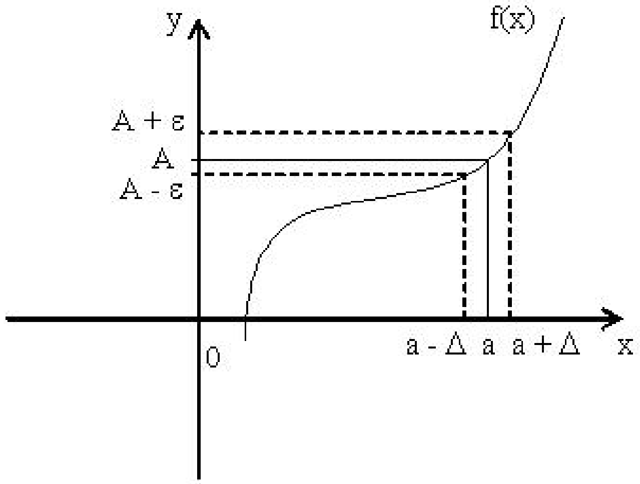
Положим $N=\max\{N_1,N_2\}$, тогда $\forall n>N$ имеем

$$|x_ny_n-ab| = |x_ny_n-ay_n+ay_n-ab| = |y_n(x_n-a)+a(y_n-b)| \le$$

$$\le |y_n||x_n-a|+|a||y_n-b| < (|b|+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{4|b|}+|a|\frac{\varepsilon}{2|a|} < \{|b|+\varepsilon<2|b|\} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Упражнение. Доказать утверждения 2) и 4).

Предел функции в точке.



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ (т.е. в самой точке $x=a$ функция может быть и не определена)

Определение. (предел функции по Коши) Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x таких, что $0<|x-a|<\delta$ верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta:\ из\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

То же определение может быть записано в другом виде:

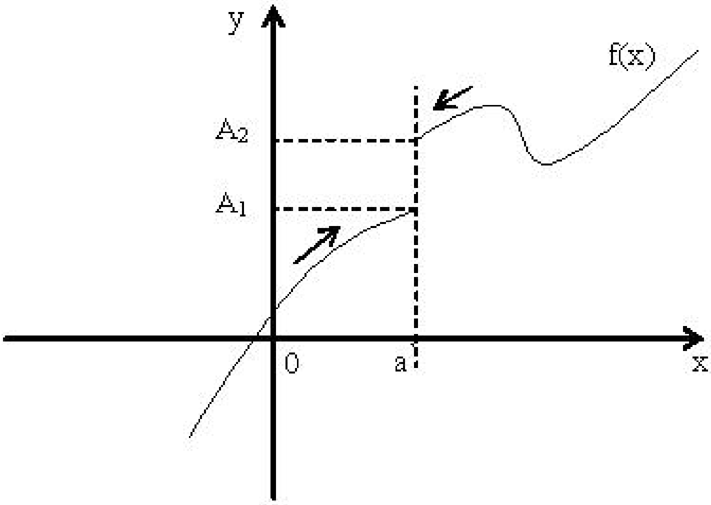
Если $a-\delta<x<a+\delta, x\neq a$, то верно неравенство $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ или $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}A$

Определение. Если $f(x)\to A_1$ при $x\to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **слева**, а если $f(x)\to A_2$ при $x\to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **справа**.

Запишем сказанное на языке $\varepsilon-\delta$:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta: из\ 0<a-x<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x=a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x=a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

<u>Теорема о связи между пределом и односторонними пределами.</u> *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x=a$ предел равный A необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали одновременно оба равных между собою односторонних предела, т.е.*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a-a} f(x)=A \\ \lim\limits_{x\to a+a} f(x)=A \end{cases}$$

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Из существования предела в точке $x=a$ следует что

$$\text{из}\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

Но первое неравенство можно записать в виде системы

$$0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x-a<\delta, & x>a \\ 0<a-x<\delta, & x<a \end{cases}$$

откуда получаем существование двух равных односторонних переделов. Очевидно, по той же причине верно и обратное утверждение.

<u>Теорема</u> (о единственности предела функции в точке). *Если функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет конечный предел, то этот предел единственный.*

<u>Доказательство</u> (по аналогии с теоремой о единственности предела последовательности)

В ряде случаев, удобно использовать другое определение предела функции. Идея этого определения заключается в том, что предел функции сводится к пределу последовательности.

<u>Определение.</u> (предел функции по Гёйне) Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ если она определена в некоторой $\dot{O}_\delta(a)$ и для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in \dot{O}_\delta(a) \forall n\in N$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta\, и\, N:\forall n>N\, из\, 0<|x_n-a|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-A|<\varepsilon \qquad (2)$$

<u>Теорема.</u> *Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

<u>Доказательство.</u> То, что из существования предела по Коши следует существование предела по Гёйне очевидно, т.к. условие (1) жёстче условия (2).

Докажем, что из существования предела по Гёйне следует существование предела по Коши. Предположим обратное, тогда

$$\exists\varepsilon_0:\forall\delta\,\exists x_{n(\delta)}: из\, |x_{n(\delta)}-a|<\delta \Rightarrow |f(x_{n(\delta)})-A|\ge\varepsilon_0$$

В частности, можно считать, что

$$из\quad |x_{n(\delta)}-a|<\frac{\delta}{n} \;\Rightarrow\; |f(x_{n(\delta)})-A|\ge\varepsilon_0$$

Из этого заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ и при этом, число A не может быть пределом последовательности значений функции $\{f(x_{n(\delta)})\}$, поэтому, число A не является пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ по Гёйне. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Замечание. Определением предела по Гейне удобно пользоваться в случае, когда нужно доказать отсутствие предела функции в точке. В самом деле, из данного определения и теоремы единственности существования предела следует*, что функция $f(x)$ в точке $x=a$ не имеет предела, если существуют 2 последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ лежащие в $\dot{O}_\delta(a)$ и при этом*

$$f(x_n')\xrightarrow[n\to\infty]{}A_1,\quad f(x_n'')\xrightarrow[n\to\infty]{}A_2,\quad A_1\neq A_2$$

Пример. Покажем, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ определённая всюду кроме точки $x=0$ не имеет предела в точке $x=0$.

Решение. Рассмотрим две последовательности

$$x_n^1=\frac{1}{\pi n},\quad x_n^2=\frac{1}{\pi/2+2\pi n}$$

которые сходятся к точке $x=0$.

Между тем,

$$f\left(x_n^1\right)=\sin\pi n\equiv 0,\quad f\left(x_n^2\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\equiv 1$$

Следовательно, последовательность $\left\{f\left(x_n^1\right)\right\}$ сходится к нулю, а последовательность $\left\{f\left(x_n^2\right)\right\}$ к единице. Получили, что функция $f(x)$ имеет два разных предела в точке $x=0$, что противоречит ***теореме о единственности предела функции***. Следовательно, функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x=a$, если существует такое число $M>0$, что $|f(x)|\leq M$ вблизи точки $x=a$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки $x=a$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A| \text{ или}$$

$$|f(x)|<\varepsilon+|A|, \text{ т.е. } |f(x)|<M, \text{где } M=\varepsilon+|A|.$$ **Теорема доказана.**

Следствие. Если функция не ограничена вблизи *точки* $x=a$, то в этой точке не существует конечного предела.

Теорема. *Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, причём $A\neq 0$, то существует проколотая окрестность точки $x=a$, в которой значения функции имеют тот же знак что и A.*

Доказательство. По определению предела по заданному $\varepsilon=\frac{|A|}{2}$ можно найти δ такое что для всех точек $x\in\dot{O}_\delta(a)$, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{|A|}{2}$$

Это неравенство можно записать в виде

$$A-\frac{|A|}{2}<f(x)<A+\frac{|A|}{2}$$

Таким образом, если $A>0$, то $f(x)>A-\frac{|A|}{2}>0$, если $A<0$, то $f(x)<A+\frac{|A|}{2}<0$.
Теорема доказана.

Имеет место и обратное утверждение, а именно:

Теорема. *Если $f(x)>0$ (или $f(x)\geq 0$) вблизи точки $x=a$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $A\geq 0$. Аналогично определяется знак предела при $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$.* **(без доказательства)**

Следствие. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке $x=a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$. Пусть также существует проколотая окрестность точки $x=a$ в которой $f(x)\geq g(x)$. Тогда $A\geq B$.*

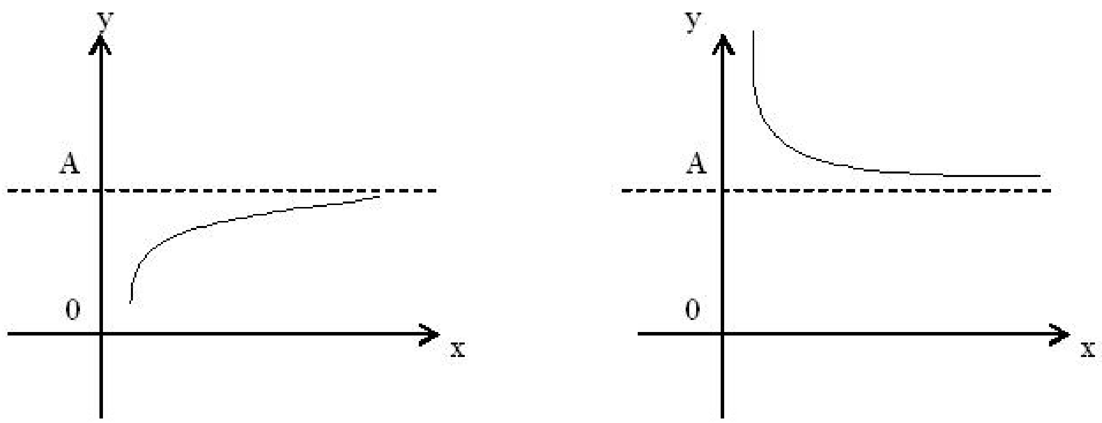
Для доказательства данного утверждения надо неравенство $f(x)\geq g(x)$ переписать в виде $f(x)-g(x)\geq 0$.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A-f(x)|<\varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности. Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ для любого $x>M$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ для любого $x<-M$, $M>0$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x\to a$, где a - число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\delta>0$, что неравенство

$$|f(x)|>M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0<|x-a|<\delta$$

Записывается $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

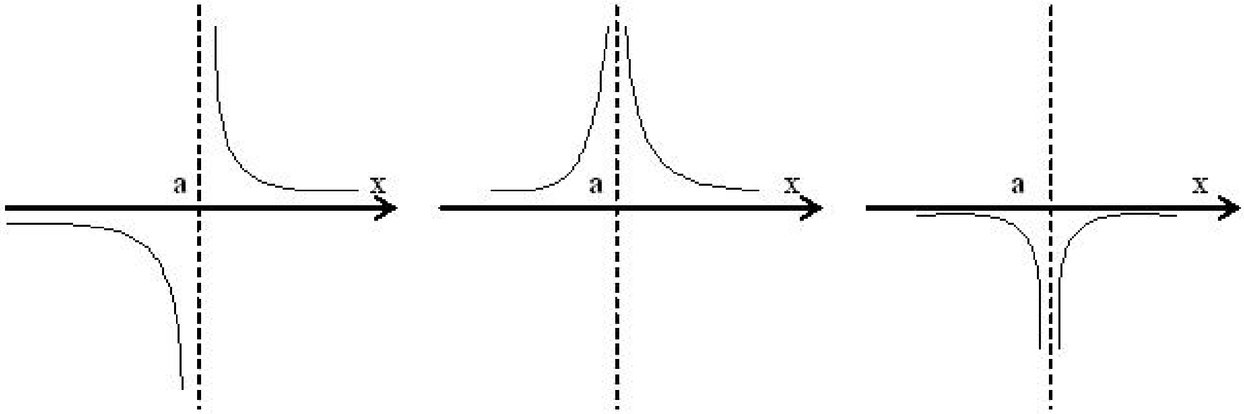
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,$$

а если заменить на $f(x)<-M,\ \ M>0$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при $x\to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x\to a} f(x)=A$, где A – одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

<u>Замечание.</u> *Любая бесконечно большая функция является неограниченной. Обратное утверждение не верно.*

<u>Пример неограниченной функции, которая не является бесконечно большой:</u> $f(x)=x\sin x$ - неограниченна при $x\to\infty$, но $\lim_{x\to\infty} x\sin x$ не существует.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x\to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ ($+\infty$ или $-\infty$) если $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Пример.</u> Функция $f(x)=x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim_{x\to 1} f(x)=1$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Если $f(x)$ б/б при $(x\to a)$ (или $(x\to\infty)$), то $y(x)=1/f(x)\to 0$ $(x\to a)$* т.*е., является бесконечно малой (обратное неверно)*

<u>Контрпример.</u> $f(x)=x^2\sin(1/x)$ - б/м при $x\to 0$, но функция

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2\sin(1/x)}$$

не является б/б т.к. при $x\to 0$, не определена в точках $x=1/\pi n$ и следовательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\sin(1/x)} \text{ не существует}$$

Замечание. Для того, чтобы утверждение последней теоремы было верным, необходимо потребовать, чтобы б/м не обращалась в нуль.

Рассмотрим вопрос о связи между пределами и бесконечно малыми функциями. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad (1)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - A - 0| < \varepsilon,$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$, т.е. $f(x) - A$ есть б/м при $x \to a$. Обозначив эту бесконечно малую через $\alpha(x)$ получим представление (1), так как

$$f(x) = A + \alpha(x) = A + f(x) - A = f(x)$$

Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to a$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x)| < \varepsilon$$

С другой стороны, из (1) следует, что $\alpha(x) = f(x) - A$, поэтому

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon \text{ т.е. } \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Свойства бесконечно малых функций:

1) *Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при* $x \to a$ *тоже бесконечно малая функция при* $x \to a$. Докажем это утверждение для двух функций. В самом деле, пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б/м при $x \to a$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_1 > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_2 > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, т.е. $\alpha(x) + \beta(x)$ есть б/м при $x \to a$.

2) *Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки* $x = a$ *является бесконечно малой функцией при* $x \to a$. В самом деле, пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$, т.е. $\exists M > 0$ такое, что $f(x) \le M$ для любых x удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta_1$. Пусть далее $\alpha(x)$ б/м при $x \to a$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_2 > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \; из \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x) f(x)| \le M|\alpha(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\left(\alpha(x)f(x)\right)=0$, т.е. $\alpha(x)f(x)$ есть б/м при $x\to a$.

3) *Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.* Это свойство следует из 2) так как бесконечно малая функция при $x\to a$ является ограниченной в некоторой окрестности точки $x=a$.

4) *Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.* (Тоже следствие 2, т.к. это частное можно представить в виде произведения бесконечно малой функции на ограниченную)

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a}C=C$, где $C=const$. Доказывается непосредственно по определению.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Доказательство. Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $A=\lim\limits_{x\to a}f(x),\ \ B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, тогда

$$f(x)\pm g(x)=A\pm B+\alpha(x)\pm\beta(x)$$

$A\pm B=const$, $\alpha(x)\pm\beta(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$, значит

$$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x).$$ **Теорема доказана.**

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Доказательство. Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$. Тогда $f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+A\beta(x)+\alpha(x)B+\alpha(x)\beta(x)$, $A\cdot B=const$, $A\beta(x)+\alpha(x)B+\alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$, значит

$$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}A\cdot B+0=A\cdot B=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x).$$ **Теорема доказана.**

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

Теорема 5. (теорема о трёх функциях) *Если $g(x)\le f(x)\le u(x)$ вблизи точки $x=a$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, то и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки $x=a$ в которых выполняются неравенства

$$|g(x)-A|<\varepsilon\ \ \text{или}\ \ -\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon\ (1)$$

$$|u(x)-A|<\varepsilon\ \ \text{или}\ \ -\varepsilon<u(x)-A<\varepsilon\ (2)$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, тогда по условию задачи и с учётом имеем

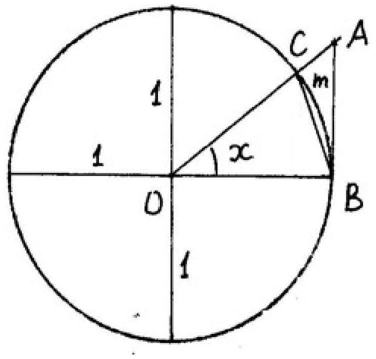
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \text{из}\ \ 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ -\varepsilon<g(x)-A\le f(x)-A\le u(x)-A<\varepsilon\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=A.$$ **Теорема доказана.**

Некоторые замечательные пределы.

Теорема (первый замечательный предел) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический круг. Имеем



Так как $S_{\Delta OBC}\le S_{сектOBC}\le S_{\Delta OAB}$ то

$\dfrac{1}{2}\sin x\le\dfrac{1}{2}x\le\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,x$ (при $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$).

Разделим неравенство на $\sin x\ne 0$, тогда

$1\le\dfrac{x}{\sin x}\le\dfrac{1}{\cos x}$ или $1\ge\dfrac{\sin x}{x}\ge\cos x$

Применяя теорему о трёх функциях находим, что

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Теорема (Второй замечательный предел) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Доказательство. В соответствии с теоремой о существовании целой части числа: $\forall x\in\Re\ \ \exists n\in\mathbb{Z}:\ n\le x\le n+1$. Тогда

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}\ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=e\cdot 1=e;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}=\dfrac{e}{1}=e;\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме двух, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & при\quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & при\quad n=m\\ \infty, & при\quad n>m\end{cases}$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$ - многочлены.

Доказательство последнего предела.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+....+\frac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x),\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при α,β $x\to a$. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x)=x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $g(x)=x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β. Обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x)),\ (x=a)$

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A,\ A\neq 0,\ A=const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**. Обозначается $\alpha(x)\approx\beta(x),\ (x=a)$

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1,$то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha(x)\sim\beta(x),\ (x=a)$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x)=x^{10}$ и $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to 0}x^9=0$$

т.е. функция $f(x)=x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)=x$. Записывается $x^{10}=o(x),\ (x=0)$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой функции β,** если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля. Если $\beta(x)=x-a$, то функция α называется просто **бесконечно малой порядка** k**.**

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha=x\sin x,\ \beta=x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha=x\sin\frac{1}{x},\ \beta=x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Аналогичным образом вводятся отношения для бесконечно больших функций.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha \ \ (x \to a)$, $\quad \left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$

2) Если $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \ \ (x \to a)$, то $\alpha \sim \gamma \ \ (x \to a)$, $\quad \left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\alpha / \beta} = 1 \right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1 \ и \ \beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Следствие.</u> А) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta}$

Б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

5) Если α и β - бесконечно малые при $x \to a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x \to a} \left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha} \right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

<u>Следствие.</u> Если α и β - эквивалентные бесконечно малые при $x \to a$, то тогда их разность есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с α или β

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x^2 + x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} (x+1) = 1.$$

Основные эквивалентности

1. $\sin x \sim x \ \ (x = 0)$. Доказательство следует из теоремы о первом замечательном пределе. Отсюда в частности следует, что

А) $\sin kx \sim kx \ \ (x = 0)$

Б) $\sin kx \sim \operatorname{tg} kx \sim kx \ \ (x = 0)$

Докажем, что $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$. В самом деле

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 / 2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2} = 4 \lim_{x \to 0} \frac{(x/2)^2}{x^2} = 1$$

<u>Упражнение.</u> Доказать, что $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2} \ \ (x = 0)$

2. $\ln(1+x) \sim x \quad (x=0)$. Следует из третьего замечательного предела

3. $(1+x)^m - 1 \sim mx \quad (x=0)$

Упражнение. Доказать, что $(1+x)^m - 1 - mx \sim m(m-1)\frac{x^2}{2} \quad (x=0)$

4. $a^x - 1 \sim x\ln a \quad (x=0)$

Замечание. Во всех рассмотренных случаях переменную x можно заменить бесконечно малой функцией, например:

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad (x=a)$ где $\alpha(x)$ б/м $(x=a)$

Примеры

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg}5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x\to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2/2} = \lim\limits_{x\to 0}2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \infty.$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0} =$$

$$=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to \pi/4}\frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x\to \pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x\to \pi/4}\frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{\begin{matrix} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{matrix}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\begin{Bmatrix} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{Bmatrix}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2-6x+8=0$	$x^2-8x+12=0$
$D=36-32=4$	$D=64-48=16$
$x_1=\dfrac{6+2}{2}=4$	$x_1=\dfrac{8+4}{2}=6$
$x_2=\dfrac{6-2}{2}=2$	$x_2=\dfrac{8-4}{2}=2$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример. Найти предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2),$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/)2}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

Для самостоятельного решения:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^2+5x-6}{x^3+2x^2+7x-1}=\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+4x+5\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x+2\right)\left(x^4+2x^3+7x^2+x-1\right)}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}=\dfrac{3}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}=-\dfrac{1}{4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}$ - не определен.

Непрерывность функции в точке.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$ верно неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. При этом, естественно, подразумевается, что $f(x_0)$ - конечное значение.

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$

<u>Определение.</u> Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

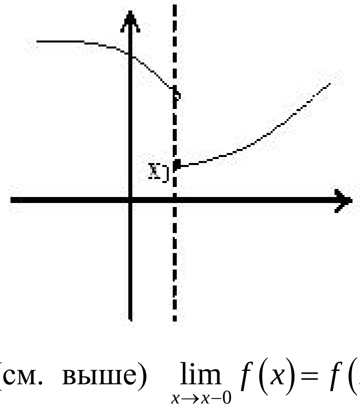
<u>Эквивалентное определение непрерывности.</u> Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x=x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной, т.е.

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=\alpha(x),$$

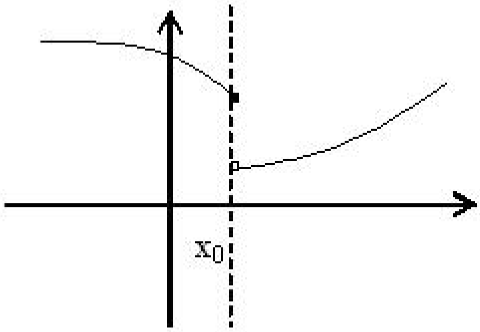
где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)=f(x_0)$, то функция называется **непрерывной справа.**



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)=f(x_0)$, то функция называется **непрерывной слева.**



Свойства непрерывных функций.

1) *Сумма, разность и произведение непрерывных в точке* x_0 *функций – есть функция, непрерывная в точке* x_0.

2) *Частное двух непрерывных функций* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *– есть непрерывная функция при условии, что* $g(x)$ *не равна нулю в точке* x_0.

3) *Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

4) **Теорема о сохранении знака неравенства непрерывной функции.** *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и* $f(x_0) > A$, *то существует число* $\delta > 0$ *такое что* $f(x) > A \ \forall x \in O_\delta(x_0)$

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций.

Определение. **Элементарной** называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций основных элементарных функций.

Основными элементарными функциями являются: x^α, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, а также обратные к ним: $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Докажем непрерывность некоторых основных элементарных функций

1) Функция $f(x) = C$, $C = const$ – непрерывная функция на всей области определения.
2) Линейная функция – непрерывная функция на всей области определения.
   Доказательство. Пусть $x = x_0$ - произвольная точка, тогда
   $\Delta f = |kx + b - kx_0 - b| = |kx - kx_0| = |k||x - x_0| < |k|\delta = \varepsilon$

Следовательно, при $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$ неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ будет выполнятся для любых x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, а это означает, что линейная функция непрерывна в точке $x = x_0$. Так как эта точка была выбрана произвольно, получаем. Что линейная функция непрерывна на всей числовой оси.

3) Степенная функция x^n – непрерывная функция на всей области определения, как результат произведения непрерывных функций.

4) Полином – непрерывная функция на всей области определения, как сумма непрерывных функций.
5) Дробно-рациональная функция

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$$

непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

6) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции $y=\sin x$.

Запишем приращение функции $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$, или после преобразования:

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x\to 0$ $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$, то она является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция $y=\sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x=x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

7) Показательная функция $y=a^x$ непрерывна на всей числовой оси. В самом деле, возьмём произвольную точку $x=x_0$ и исследуем приращение функции в этой точке

$$\Delta y=a^x-a^{x_0}=a^{x_0}\left(a^{x-x_0}-1\right)\sim a^{x_0}\ln a\cdot(x-x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

Следовательно, $\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, т.е. показательная функция непрерывна в точке $x=x_0$, а так как эта точка была выбрана произвольно, то отсюда следует непрерывность на всей числовой оси.

Упражнение. Доказать непрерывность функции $y=x^\alpha$ (Указание: рассмотреть приращение в виде $\Delta y=(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha$)

Доказательство непрерывности обратных функций будет приведено чуть позже. Подытоживая всё вышеизложенное, можно отметить, что *все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения*.

Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения непрерывности функции следует, что $x=x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок.

Если правый и левый пределы оказываются равны, то такую точку называют **устранимой** точкой разрыва. В этом случае функция $f(x)$ допускает **доопределение по непрерывности** в точке устранимого разрыва $x = x_0$. А именно, можно построить функцию $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

которая будет непрерывна в точке $x = x_0$.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Замечание.</u> Если функция определена в проколотой полуокрестности точки x_0, то она может быть либо точкой устранимого разрыва или точкой разрыва 2-го рода.

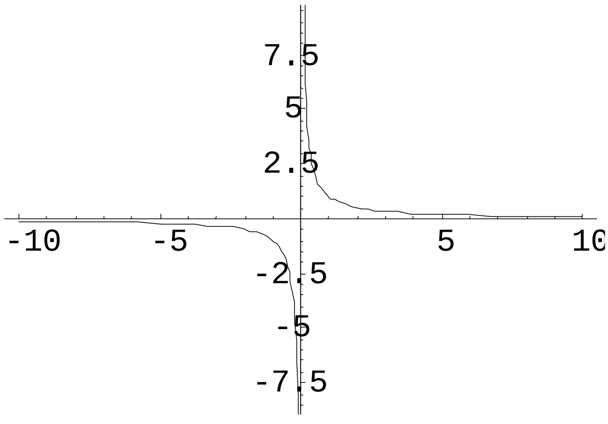
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2-го рода, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty.$$



<u>Пример.</u> $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

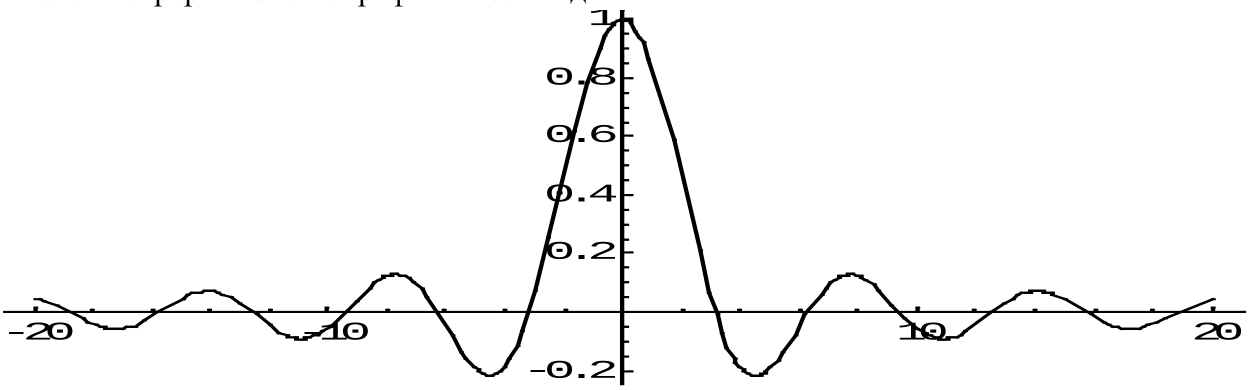
Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1-го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к.

$$\exists \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$$

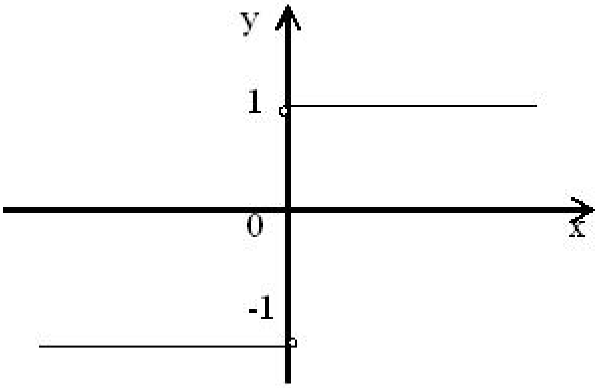
Доопределенная следующим образом функция:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x\neq 0\\ 1, & при \quad x=0\end{cases}$$

является непрерывной. Её график имеет вид



Пример. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & при \quad x>0\\ -1, & при \quad x<0\end{cases}$



Эта функция также обозначается $\operatorname{sign}(x)$ – знак x. В точке $x=0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1-го рода. Если доопределить функцию в точке $x=0$, положив $f(0)=1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0)=-1$, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x=0$ разрыв 1-го рода. В этом примере точка разрыва 1-го рода не является устранимой.

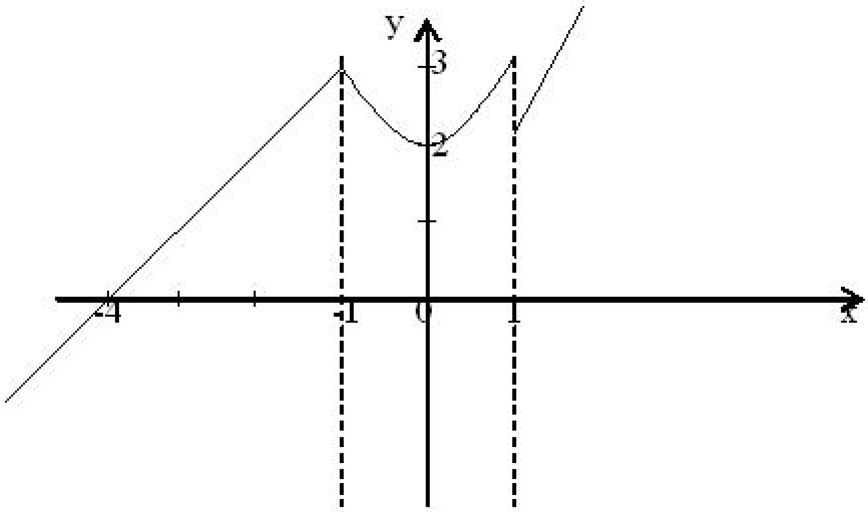
Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1-го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ x^2+2, & -1\le x\le 1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

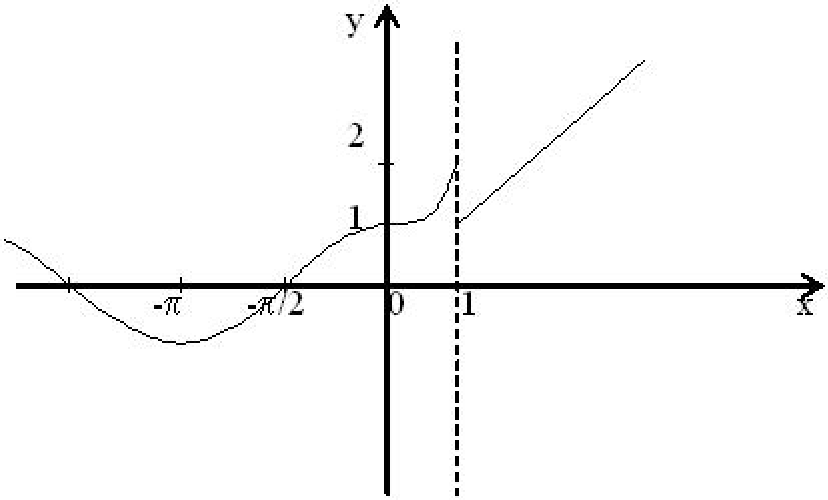
в точке $x = -1$ функция непрерывна, в точке $x = 1$ точка разрыва 1-го рода.



Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$$

в точке $x = 0$ функция непрерывна, в точке $x = 1$ точка разрыва 1-го рода



Замечание. Монотонная возрастающая или убывающая функция может иметь в области определения лишь разрывы первого рода.

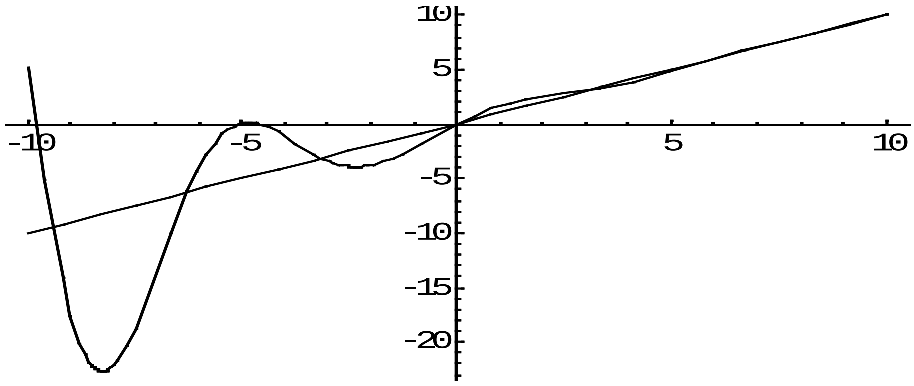
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

<u>Определение.</u> Прямая называется **асимптотой** к кривой $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки этой кривой до данной прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее виды и методы нахождения асимптот кривых.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – **вертикальная асимптота** кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

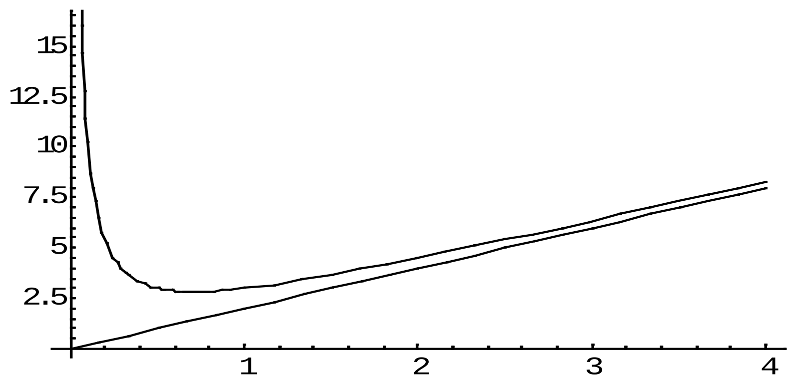
Вертикальных асимптот может быть несколько, например у функции $y = \operatorname{tg} x$ их бесконечное множество $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** к графику функции $y = f(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \neq \infty$

Очевидно, что функция может иметь не более двух горизонтальных асимптот. Например, $y = \dfrac{1}{x}$ имеет одну горизонтальную асимптоту $y = 0$, а функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Кривая $y = f(x)$ имеет **наклонную асимптоту** $y = kx + b$, если выполнены два условия:

1) Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq \{0, \infty\}$
2) Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = b \neq \infty$



Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$, кроме того, функция может иметь не более двух наклонных асимптот.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y\xrightarrow{x\to-0}+\infty$, $y\xrightarrow{x\to+0}-\infty$. Следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота.

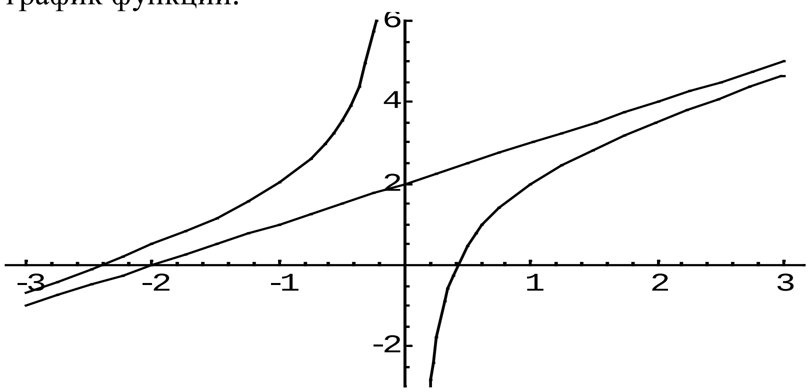
2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



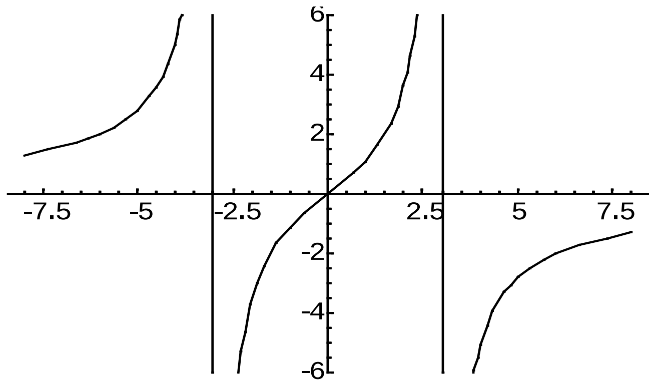
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{9x}{9-x^2}$.

Прямые $x=3$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{9-x^2}=0$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1}=0$$

Тогда, $y=0$ – горизонтальная асимптота.



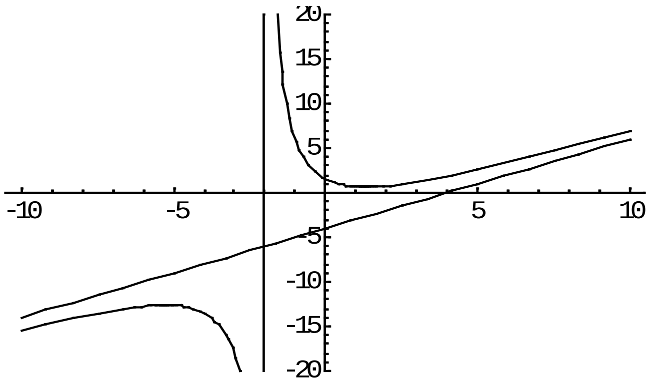
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой кривой.
Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-4$$

Итого, прямая $y=x-4$ является наклонной асимптотой.



Упражнение. Найти асимптоты функций
1) $y=x+\operatorname{arctg}x$
2) $y=xe^{-x}$
3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале**, если она непрерывна в любой точке интервала. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a,b), а на краях отрезка является односторонне непрерывной.

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

<u>Свойство 1.</u> (1-я Теорема Больцано (1781-1848) **– Коши**). *Если функция* $f(x)$ *- непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри интервала* (a,b)*, где* $f(x)=0$.

Т.е. если $\operatorname{sign}(f(a))\neq\operatorname{sign}(f(b))$*, то* $\exists x_0 : f(x_0)=0$.

<u>Доказательство.</u> (Схематично) Доказательство этой теоремы основано на применении метода половинного деления отрезка, в результате чего получается последовательность вложенных отрезков, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Эта последовательность, как известно, имеет предельную точку C . В силу непрерывности функция сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, если эта точка отлична от нуля. Но эта окрестность содержит в себе хотя бы один интервал, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков. Следовательно, эта предельная точка $C=0$.

<u>Свойство 2:</u> (2-я Теорема Больцано (1781-1848) **– Коши**). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$*, принимает на этом отрезке все свои промежуточные значения, т.е., если* $f(a)=A,\ f(b)=B,\ A\leq B$*, то* $\forall C\in(A,B)\,\exists c\in(a,b):C=f(c)$.

<u>Доказательство.</u> Если $A=B$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай $A<B$. Положим $g(x)=f(x)-C$, тогда можно сказать следующее

1) $g(x)\in C_{[a,b]}$
2) $g(a)=f(a)-C=A-C<0$, $g(b)=f(b)-C=B-C>0$

Тогда по предыдущей теореме $\exists c\in(a,b): g(c)=0$. Следовательно

$$f(c)-C=0 \ \Rightarrow \ f(c)=C .$$

Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> В обеих теоремах, непрерывность функции существенна. Например:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \ x\in[-1,1]$
2) $f(x)=\operatorname{sgn}(x),\ \ x\in[-1,1]$

<u>Свойство 3:</u> (1-я Теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)) *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке* $[a,b]$ *выполняется условие* $-M\leq f(x)\leq M$.

<u>Доказательство.</u> От противного. Предположим, что такого числа M не существует, Тогда найдётся по крайней мере хотя бы одна точка $c\in[a,b]$ в которой эта функция бесконечно большая, т.е.

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$$

Но в силу непрерывности функции $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)\neq\infty$, полученное противоречие показывает, что предположение о неограниченности функции $f(x)$ неверно.

<u>Свойство 2:</u> (2-я Теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$*, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют такие значения* x_1 *и* x_2*, что* $f(x_1)=m,\ \ f(x_2)=M$ *, причем*

$$m\leq f(x)\leq M$$

<u>Доказательство.</u> Докажем второе неравенство. По предыдущей теореме функция $f(x)$ ограничена, т.е. $\exists\alpha$, такое что $f(x)\le\alpha$, $\forall x\in[a,b]$. Пусть E - множество значений функции $f(x)$. Ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Обозначим

$$\sup_{[a,b]} E = M \le \alpha$$

Допустим, что M не достигается функцией $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $M\notin E$ и при этом

$$f(x)<M\ \forall x\in[a,b].$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}>0\quad \forall x\in[a,b]$$

Эта функция непрерывна на $[a,b]$ и следовательно ограничена на нём, т.е. $\exists\mu>0:\varphi(x)\le\mu$. Таким образом

$$\frac{1}{M-f(x)}\le\mu \ \Rightarrow\ M-f(x)\ge\frac{1}{\mu}\ \Rightarrow\ f(x)\le M-\frac{1}{\mu}$$

Так как M точная верхняя грань то найдётся число y_1: $M-\frac{1}{\mu}<y<M$. Соответственно по первой теореме Больцано-Коши найдётся число x_1 такое, что

$$f(x_1)=y_1>M-\frac{1}{\mu}$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $M\in E$ и, следовательно, найдётся точка x_2 такая, что $f(x_2)=M$. Аналогично доказывается и первое неравенство. **Теорема доказана.**

<u>Замечание 1.</u> Отметим, что эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например $f(x)=\sin x$).

<u>Замечание 2.</u> То, что множество является отрезком существенно. Например:

1) $f(x)=\operatorname{arctg}x,\quad x\in(-\infty,\infty)$

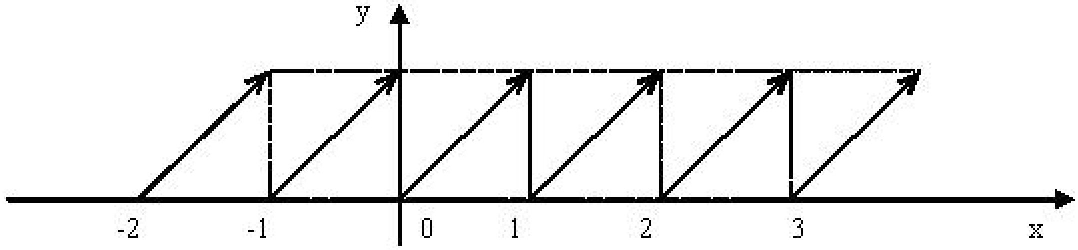
2) $f(x)=x,\quad x\in(0,1)$

Очевидно, в обоих этих случаях функция не достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

<u>Определение</u>. Функция $y=f(x)$ называется кусочно-непрерывной на промежутке $[a,b]$, если она определена в каждой точке $[a,b]$, непрерывна во всех внутренних точках этого промежутка, кроме быть может конечного числа точек, в которых она может иметь разрыв 1-го рода.

Например: $y=x-[x]$.



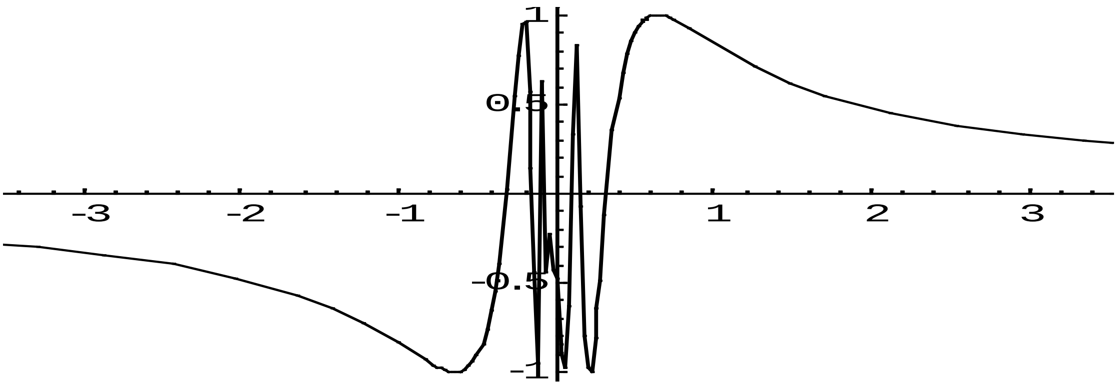
Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \delta$, верно неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого $\varepsilon > 0$ существует свое δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности δ зависит от ε и x.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918) - немецкий математик). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

Замечание. Теорема Кантора справедлива только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.

Пример. $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,a)$, но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_2) - f(x_1)| > \varepsilon_0$. В самом деле, положим $\varepsilon_0 = 1/2$, а в качестве точек x_1 и x_2 возьмём точки из последовательностей

$$x_{1n} = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad x_{2n} = \frac{1}{2\pi n}$$

Очевидно, что начиная с некоторого номера N, для любого наперёд заданного δ будет выполняться условие

$$\left|\frac{1}{\pi/2 + 2\pi n} - \frac{1}{2\pi n}\right| < \delta$$

Между тем $|f(x_{1n}) - f(x_{2n})| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon_0$.

Таким образом, функция $y = \sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной в промежутке $(0,a)$.

Сложная функция

Определение. Если функция $y = f(x)$ отображает множество X в Y, а функция $z = g(y)$ отображает множество Y в Z, тогда функция $z = g(f(x))$ называется суперпозицией функций f и g или сложной функцией аргумента x множества X, Y и Z – подмножества R.

Пример. $z = \sin\left(\sqrt{x} + 1\right), \quad z = e^{x^2 + \sin x}$

<u>Пример.</u> (Гиперболические функции)

Функции $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh}\ x}{\operatorname{ch}\ x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch}\ x}{\operatorname{sh}\ x}$ называются гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом соответственно. Относительно гиперболических функций справедливы формулы:

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

<u>Теорема</u>. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, тогда суперпозиция функций f и g, т.е. функция $z = g\left(f(x)\right) = F(x)$, является непрерывной в точке x_0.

<u>Доказательство</u>. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$$

Далее, в силу непрерывности функции $z = g(y)$ имеем

$$\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g\left(f(x_0)\right)$$

Следовательно

$$\exists \lim_{x \to x_0} g\left(f(x)\right) = g\left(f(x_0)\right)$$

что и доказывает непрерывность функции $z = g\left(f(x)\right)$ в точке x_0.

Обратная функция

<u>Определение</u>. Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y. Тогда функция $y = f(x)$ задает отображение f множества X на множество Y. Предположим теперь, что каждому элементу $y \in Y$ можно поставить в соответствие элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Последнее отображение $Y \to X$ называется обратным к f и обозначается f^{-1}. Отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ задает на множестве Y функцию $x = f^{-1}(y)$, которая называется **обратной** к функции $y = f(x)$.

<u>Замечание.</u> Из данного определения следует, что:

1) $f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \quad \forall y \in Y$
2) Функция $y = f(x)$ является обратной к функции $x = f^{-1}(y)$
3) $f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \quad \forall x \in X$

Переход от функции $y = f(x)$, $x \in X$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ сводится к перемене ролей множеств X и Y. Поэтому, графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy. Обычно, для обратной функции аргумент обозначают через x, а функцию через y, т.е. вместо

$x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. Таким образом, график функции $f^{-1}(x)$ получается из графика функции $f(x)$ зеркальным преобразованием плоскости xOy относительно прямой $y = x$.

<u>Пример:</u> Обратной функцией для $y = 2x$ будет функция $y = \dfrac{x}{2}$. Здесь переменные x и y уже поменялись ролями.

<u>Замечание</u>. Существуют функции, которые являются обратными сами себе: $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = a - x$, $a \in \Re$.

<u>Теорема</u> (о непрерывности обратной функции). *Если $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, причем множество $[\alpha,\beta]$ является областью изменения $f(x)$, то на промежутке $[\alpha,\beta]$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая также является непрерывной и монотонной.*

<u>Доказательство.</u> Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на нём все свои промежуточные значения, т.е. $\forall y \in [A,B] \exists x \in [a,b] : y = f(x)$. Докажем, что этот x – единственный. Предположим противное, т.е.

$$\exists y_1 \in [A,B] : \exists x_1, x_2 \in [a,b] : y_1 = f(x_1) \, и \, y_1 = f(x_2)$$

По условию теоремы функция $y = f(x)$ - строго монотонна на отрезке $[a,b]$, т.е. например, в случае строго возрастающей функции

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y_1 < y_1$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, обратная функция существует.

Докажем теперь, что если $y = f(x)$ строго возрастает на $[a,b]$, то $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает на $[\alpha,\beta]$. Возьмём произвольные точки $y_1, y_2 \in [\alpha,\beta] : y_1 < y_2$, тогда надо доказать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Предположим, что это не так, т.е.

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

Обозначим $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Тогда $x_1 \geq x_2$, откуда в силу монотонности функции $y = f(x)$ получаем, что $f(x_1) \geq f(x_2)$. Мы пришли к противоречию, следовательно, обратная функция строго возрастает на отрезке $[\alpha,\beta]$. **Теорема доказана.**

Важная роль этой теоремы достаточно очевидна, когда приходится доказывать непрерывность обратных функций.

<u>Обратные тригонометрические функции</u>

На участках монотонности функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ допускают обратные, которые обозначаются соответственно:

$y = \arcsin x$, $x \in [-1,1], y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x$, $x \in [-1,1], y \in [0,\pi]$;

$y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty,+\infty), y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty,+\infty), y \in (0,\pi)$.

Замечание. Для обратных тригонометрических функций имеют место равенства:

1. $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1,1]$.
2. $\cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1,1]$.
3. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.
4. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.
5. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$.
6. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, $x \in \Re$.
7. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x$, $x \in \Re$.
8. $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \Re$, $x \neq 0$.
9. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \Re$, $x \neq 0$.
10. $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in \Re$.

Приведем графики, указанных обратных тригонометрических функций.