7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

7.1. Основные понятия. Операции над комплексными числами

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа; $i = \sqrt{-1}$ – так называемая *мнимая единица**, т.е. число, квадрат которого равен -1 (корень уравнения $x^2 + 1 = 0$); x называется *действительной* (*вещественной*) *частью комплексного числа*, а y – *мнимой* его *частью*. Для этих чисел приняты следующие обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

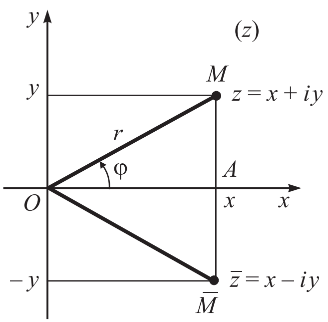


Рис. 7.1

Если $y = 0$, то $z = x \in \mathbf{R}$; если же $x = 0$, то число $z = iy$ называется *чисто мнимым*. С геометрической точки зрения всякому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $M(x, y)$ плоскости (или вектор $\overrightarrow{OM}$), и наоборот, всякой точке $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$. Между множествами комплексных чисел и точек плоскости Oxy установлено взаимно однозначное соответствие, поэтому данная плоскость называется *комплексной* и обозначается символом (z) (рис. 7.1).

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $\mathbf{C}$. Отметим, что $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Точки, соответствующие действительным числам $z = x$, расположены на оси Ox, которая называется *действительной осью комплексной плоскости*, а точки, соответствующие мнимым числам $z = iy$, – на оси Oy, которую называют *мнимой осью комплексной плоскости*.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа вида $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными* (см. рис. 7.1).

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

---

* В технической литературе для мнимой единицы используется также обозначение $j = \sqrt{-1}$.

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

(последняя операция имеет место при условии, что $z_2 \neq 0$). В результате получаем, вообще говоря, комплексные числа. Указанные операции над комплексными числами обладают всеми свойствами соответствующих операций над действительными числами, т.е. сложение и умножение коммутативны, ассоциативны, связаны отношением дистрибутивности и для них существуют обратные операции вычитания и деления (кроме деления на нуль).

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1+i$. Найти

$$z=\frac{z_1+z_1z_2+z_2^2}{z_1+z_3}.$$

▸ Последовательно вычисляем:

$$z_1+z_3=(2+3i)+(1+i)=3+4i,$$

$$z_1z_2=(2+3i)(3-4i)=(6+12)+i(9-8)=18+i,$$

$$z_2^2=(3-4i)^2=9-24i-16=-7-24i,$$

$$z_1+z_1z_2+z_2^2=2+3i+18+i-7-24i=13-20i.$$

Тогда

$$z=\frac{13-20i}{3+4i}=\frac{(13-20i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{(39-80)+i(-60-52)}{25}=\frac{41}{25}-i\frac{112}{25}.$$ ◂

Число $r=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{z\overline{z}}$ называется *модулем комплексного числа* z. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

Очевидно, что для всякого комплексного числа $z=x+iy$ (см. рис. 7.1) справедливы формулы:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = x/r, \quad \sin\varphi = y/r, \qquad (7.1)$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ или $0 \leqslant \arg z < 2\pi$; $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (7.2)$$

или в показательной форме

$$z = re^{i\varphi} \qquad (7.3)$$

(так как по формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$).

Формулы (7.2) и (7.3) целесообразно применять при умножении комплексных чисел, а также при возведении их в степень.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то справедливы формулы:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \ (z_2 \neq 0),$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \qquad (7.4)$$

Формула (7.4) называется *формулой Муавра*.

Для извлечения корня n-й степени $(n > 1, n \in \mathbf{Z})$ из комплексного числа в форме (7.2) используется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) =$$
$$= \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n} \ (k = \overline{0, n-1}) \qquad (7.5)$$

(под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень).

Пример 2. Вычислить $(1+i)^{12}$.

▸ Представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической или показательной форме, используя формулы (7.1)–(7.3):

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \varphi = \pi/4,$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\pi i/4}.$$

Тогда по формуле Муавра (7.4) получаем:

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2^{12}}e^{3\pi i} =$$

$$= 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти корни уравнения $z^6 + 1 = 0$.

$\blacktriangleright$ Данное уравнение можно переписать так: $z^6 = -1$ или $z = \sqrt[6]{-1}$. Согласно формулам (7.1) число -1 в тригонометрической форме имеет вид

$$-1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi).$$

С учетом формулы (7.5) корни исходного уравнения

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) = e^{i(\pi + 2\pi k)/6},$$

где $k = \overline{0, 5}$. Придавая k последовательно значения 0, 1, ..., 5, находим все шесть возможных корней данного уравнения $z^6 + 1 = 0$:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\pi i/6},$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = e^{\pi i/2},$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{5\pi i/6},$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{7\pi i/6} = e^{-5\pi i/6},$$

$$z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i = e^{-\pi i/2} = e^{3\pi i/2},$$

$$z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{11\pi i/6} = e^{-\pi i/6}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти корни уравнения $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

$\blacktriangleright$ Так как $z^3 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то по формуле (7.5)

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3} - i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3}\right) \quad (k = \overline{0, 2}).$$

Следовательно, корнями данного уравнения являются:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right),\; z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} - i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} - i\sin\frac{13\pi}{9}\right). \blacktriangleleft$$

7.2. Аудиторные занятия к гл. 7

АЗ–7.1

1. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2)z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$. (*Ответ*: $54 + 19i$.)

2. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = \dfrac{(z_1 + z_3)z_2}{z_3}$. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{38}{5} + \dfrac{41}{5}i.\right)$

3. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -4$.

4. Найти: а) $(2i)^{10}$; б) $(3 + 3i)^5$; в) $\left(\dfrac{5 - i}{2 - 3i}\right)^6$. (*Ответ*: а) -1024; б) $927(1 + i)$; в) $-8i$.)

5. Найти корни уравнения $z^8 - 1 = 0$. $\left(\textit{Ответ}: z_0 = 1,\ z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2 = i,\ z_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_4 = -1,\ z_5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_6 = -i,\ z_7 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i.\right)$

6. Найти область, которую заполняют точки z, удовлетворяющие условию: а) $2 \leqslant |z - 1| < 4$; б) $\operatorname{Re}(1/z) \leqslant 1/2$; в) $|\operatorname{Im} z| < 2$.

Самостоятельная работа

1. 1. Найти значение выражения $z_1(z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$. (*Ответ*: $40 - 32i$.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -1/2$.

2. 1. Найти значение выражения $(z_1 + z_2 z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$. (*Ответ*: $7 + 19i$.)

2. Решить уравнение $z^2 - i = 0$. (*Ответ*: $\pm(1 + i)/\sqrt{2}$.)

3. 1. Найти значение выражения $(z_1^2+z_2+z_3)/z_2$, если $z_1=2-i$, $z_2=-1+2i$, $z_3=8+12i$. (*Ответ*: 2 + 2*i*.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1=2/(1+i)$, $z_2=-\sqrt{3}-i$. (*Ответ*: $z_1=\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+$ $+i\sin(-\pi/4))=\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$, $z_2=2(\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6))=\sqrt{2}e^{-5\pi i/6}$.)

7.3. Индивидуальные домашние задания к гл. 7

ИДЗ–7.1

1. Выполнить указанные действия над комплексными числами z_i, $i=\overline{1,5}$, и найти модуль с точностью до целых чисел и главное значение аргумента с точностью до 1° полученного комплексного числа z, если $z_1=1+i$, $z_2=2-i$, $z_3=3+2i$, $z_4=4+3i$, $z_5=5-4i$. Записать z в тригонометрической и показательной формах.

1.1. $z=z_1+z_2-\dfrac{z_3z_4}{z_5}$.

1.2. $z=z_2-z_3-\dfrac{z_1z_4}{z_5}$.

1.3. $z=z_3+z_4-\dfrac{z_2z_5}{z_1}$.

1.4. $z=z_4-z_5+\dfrac{z_1z_2}{z_3}$.

1.5. $z=z_2+z_3-\dfrac{z_4z_5}{z_1}$.

1.6. $z=z_3-z_4+\dfrac{z_1z_2}{z_5}$.

1.7. $z=z_1z_2+\dfrac{z_3z_4}{z_5}$.

1.8. $z=z_4z_5-\dfrac{z_2z_3}{z_1}$.

1.9. $z=\dfrac{z_1}{z_2}-\dfrac{z_4z_5}{z_3}$.

1.10. $z=\dfrac{z_4}{z_5}+\dfrac{z_1z_3}{z_2}$.

1.11. $z=z_3z_4z_5-\dfrac{z_1}{z_2}$.

1.12. $z=z_1z_2z_3+\dfrac{z_4}{z_5}$.

1.13. $z=\dfrac{z_1z_2}{z_3}-z_4z_5$.

1.14. $z=\dfrac{z_5}{z_4}+\dfrac{z_4}{z_3}-\dfrac{z_3z_2}{z_1}$.

1.15. $z=z_3z_4z_5+\dfrac{z_2z_3}{z_1}$.

1.16. $z=\dfrac{z_4}{z_3}-\dfrac{z_3}{z_2}+\dfrac{z_1}{z_5}$.

1.17. $z=z_1-z_2-\dfrac{z_3}{z_4z_5}$.

1.18. $z=\dfrac{z_3}{z_4}+\dfrac{z_1z_2}{z_3z_5}$.

1.19. $z=z_5-\dfrac{z_1}{z_2z_3z_4}$.

1.20. $z=z_4+\dfrac{z_2}{z_1z_3z_5}$.

1.21. $z=(2z_1-z_2)z_3+\dfrac{z_4}{z_5}.$

1.22. $z=(3z_3-z_2)z_1+\dfrac{z_5}{z_4}.$

1.23. $z=\dfrac{z_2}{z_1}-\dfrac{4z_3-z_4}{z_5}.$

1.24. $z=\dfrac{z_1z_2z_3}{4z_4+5z_5}.$

1.25. $z=z_5-\dfrac{1}{z_1z_2+3z_3z_4}.$

1.26. $z=\dfrac{6z_1-z_2}{3z_3z_4-z_5}.$

1.27. $z=\dfrac{z_3}{z_4}+\dfrac{z_1z_2}{z_1+2z_2-z_5}.$

1.28. $z=\dfrac{z_2z_3-z_4}{z_1+z_5}.$

1.29. $z=\dfrac{z_1z_2-z_2z_3}{3z_4+4z_5}.$

1.30. $z=\dfrac{(z_5-z_4)z_3}{z_1z_2}.$

2. Для данного числа z найти z^m и $\sqrt[n]{z}$. Вычисления вести с точностью до сотых.

2.1. $z=1+i,\ m=3,\ n=3.$

2.2. $z=1-i,\ m=4,\ n=5.$

2.3. $z=1+2i,\ m=4,\ n=3.$

2.4. $z=2-i,\ m=3,\ n=4.$

2.5. $z=1+3i,\ m=5,\ n=3.$

2.6. $z=1-2i,\ m=5,\ n=4.$

2.7. $z=2-3i,\ m=4,\ n=4.$

2.8. $z=2-3i,\ m=4,\ n=3.$

2.9. $z=1-3i,\ m=4,\ n=5.$

2.10. $z=3-2i,\ m=3,\ n=4.$

2.11. $z=4-i,\ m=5,\ n=4.$

2.12. $z=4+2i,\ m=4,\ n=3.$

2.13. $z=5+i,\ m=4,\ n=5.$

2.14. $z=1+4i,\ m=6,\ n=5.$

2.15. $z=2+3i,\ m=5,\ n=3.$

2.16. $z=1+5i,\ m=5,\ n=4.$

2.17. $z=i,\ m=5,\ n=5.$

2.18. $z=-1,\ m=6,\ n=7.$

2.19. $z=1,\ m=8,\ n=9.$

2.20. $z=-i,\ m=8,\ n=7.$

2.21. $z=\dfrac{1+i}{i},\ m=3,\ n=3.$

2.22. $z=\dfrac{1-i}{1+i},\ m=4,\ n=4.$

2.23. $z=\dfrac{2+i}{1-i},\ m=3,\ n=3.$

2.24. $z=\dfrac{i}{1-i},\ m=4,\ n=5.$

2.25. $z=\dfrac{i}{4+i},\ m=4,\ n=3.$

2.26. $z=\dfrac{2+3i}{1+i},\ m=5,\ n=3.$

2.27. $z=\dfrac{1+i}{2+3i},\ m=3,\ n=5.$

2.28. $z=\dfrac{1}{8-3i},\ m=8,\ n=5.$

2.29. $z=\dfrac{2}{3-2i},\ m=6,\ n=4.$

2.30. $z=(3+4i)(2-3i),\ m=4,\ n=4.$

3. Найти и построить на комплексной плоскости (z) множество точек, которому принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие указанным условиям.

3.1. $|z| > 1 + \operatorname{Im} z$.

3.2. $|z| > 1 + \operatorname{Re} z$.

3.3. $\dfrac{1}{|z|} \geqslant 2,\ z \neq 0$.

3.4. $1 < |z - i| < 2,\ \dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$.

3.5. $|(z-1)/(z+1)| \leqslant 1$.

3.6. $|z-1| < |z-i|$.

3.7. $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$.

3.8. $4 \leqslant |z-1| + |z+1| \leqslant 8$.

3.9. $1 < |z| \leqslant 2,\ \dfrac{\pi}{3} \leqslant \arg z < \dfrac{\pi}{2}$.

3.10. $\operatorname{Im} z^2 > 3$.

3.11. $\dfrac{1}{|z|} \leqslant 3,\ z \neq 0$.

3.12. $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2}$.

3.13. $\operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) = 1 - \operatorname{Im} z$.

3.14. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 2$.

3.15. $z^2 + \bar{z}^2 \geqslant 1$.

3.16. $3|z| - \operatorname{Re} z \geqslant 0$.

3.17. $|z-i| + |z+i| \leqslant 4$.

3.18. $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) \geqslant 0$.

3.19. $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

3.20. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3.21. $|z| \leqslant 2,\ \dfrac{1}{|z|} \geqslant 0{,}8,\ z \neq 0$.

3.22. $|z - 3i| \leqslant 4,\ |z| \leqslant 2$.

3.23. $-1 < \operatorname{Re}(z+i) \leqslant 2, |z-3| \leqslant 1$.

3.24. $|z| \geqslant 1, |\operatorname{Im} z| \geqslant 1$.

3.25. $z\bar{z} + 2i(z - \bar{z}) - 12 \leqslant 0$.

3.26. $|z| = \operatorname{Re}(z+i)$.

3.27. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 4 \geqslant 0$.

3.28. $|z+i| - |z-i| \leqslant 2$.

3.29. $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z - 1 - 2i) \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$.

3.30. $|z-3| = |1 - 2\bar{z}|$.

Решение типового варианта

1. Найти $z = z_1 z_2 - z_3(z_4 - z_5)/(2z_1 + z_2)$, если $z_1 = i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 2 + 3i$, $z_4 = -1 + i$, $z_5 = 6 - 5i$. Вычислить $|z|$ и $\arg z$ с точностью до целого числа и 1° соответственно. Записать z в тригонометрической и показательной формах.

▸ Подставляем указанные z_i, $i = \overline{1,5}$, в выражение для z. Имеем: $z = i(1-i) - (2+3i)(-1+i-6+5i)/(2i+1-i) = 1 + i - (2+3i)(-7+6i)/(1+i) = 1 + i + (32+9i)(1-i)/((1+i)(1-i)) = 1 + i + (41-23i)/2 = 21{,}5 - 10{,}5i$.

Далее находим: $|z|=\sqrt{21{,}5^2+10{,}5^2}\approx 23{,}93$. Округляя до целого числа, получаем $|z|=24$. Наконец, согласно формулам (7.1), находим:

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}(-10{,}5/21{,}5)=-\operatorname{arctg}0{,}4884=-26^\circ 02'\approx -26^\circ. \blacktriangleleft$$

2. Дано $z=2-7i$. Найти z^5 и $\sqrt[4]{z}$. Ответ дать с точностью до сотых.

▶ Представим данное z в тригонометрической форме (7.2). Для этого находим $r=|z|$ и $\arg z$. Имеем:

$$|z|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}\approx 7{,}28,\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=-\operatorname{arctg}\frac{7}{2}\approx -74^\circ 04'\approx -74^\circ,$$

$$z=7{,}28(\cos(-74^\circ 04')+i\sin(-74^\circ 04')).$$

По формуле Муавра (7.4) получаем:

$$z^5=(7{,}28)^5(\cos(-5\cdot 74^\circ 04')+i\sin(-5\cdot 74^\circ 04'))=20449{,}71(\cos(-10^\circ 20')+$$

$$+i\sin(-10^\circ 20'))\approx 20449{,}71(0{,}9840-0{,}1784i)=20122{,}51-3648{,}22i.$$

Округляя до целых, имеем $z^5\approx 20\,123-3648i$.

По формуле (7.5) находим:

$$z_k=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{7{,}28}\left(\cos\frac{-74^\circ+360^\circ k}{4}+i\sin\frac{-74^\circ+360^\circ k}{4}\right),$$

где $k=0,1,2,3$. Последовательно вычисляем z_0, z_1, z_2, z_3:

$$z_0=\sqrt[4]{7{,}28}\left(\cos\left(-\frac{74^\circ}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{74^\circ}{4}\right)\right)\approx 1{,}64(\cos 18{,}5^\circ-i\sin 18{,}5^\circ)\approx$$

$$\approx 1{,}64(0{,}95-0{,}32i)\approx 1{,}56-0{,}52i,$$

$$z_1=1{,}64\left(\cos\left(\frac{-74^\circ+360^\circ}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-74^\circ+360^\circ}{4}\right)\right)=$$

$$=1{,}64(\cos(90^\circ-18{,}5^\circ)+i\sin(90^\circ-18{,}5^\circ))=1{,}64(\sin 18{,}5^\circ+i\cos 18{,}5^\circ)=$$

$$=1{,}64(0{,}32+0{,}95i)\approx 0{,}52+1{,}56i,$$

$$z_2=1{,}64(\cos(180^\circ-18{,}5^\circ)+i\sin(180^\circ-18{,}5^\circ))=$$

$$=1{,}64(-\cos 18{,}5^\circ+i\sin 18{,}5^\circ)=-1{,}56+0{,}52i,$$

$$z_3=1{,}64(\cos(270^\circ-18{,}5^\circ)+i\sin(270^\circ-18{,}5^\circ))=$$

$$=1{,}64(-\sin 18{,}5^\circ-i\cos 18{,}5^\circ)=-0{,}52-1{,}56i. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. Если степень m невелика, то z^m можно находить, не переходя к тригонометрической форме числа z. В рассмотренном выше примере $m=5$, а $z=2-7i$. Тогда по формуле Ньютона для бинома имеем:

$$(2-7i)^5 = 2^5 + 5\cdot 2^4(-7i) + 10\cdot 2^3(-7i)^2 + 10\cdot 2^2(-7i)^3 + 5\cdot 2(-7i)^4 + (-7i)^5 =$$
$$= 32 - 560i - 3920 + 13\,720i + 24\,010 - 16\,807i = 20\,122 - 3647i.$$

К нахождению корней из z формула Ньютона неприменима, поэтому необходим переход к тригонометрической форме числа z.

3. Найти и изобразить на комплексной плоскости (z) множество точек, которому принадлежат точки $z = x + iy$, подчиненные указанным условиям:

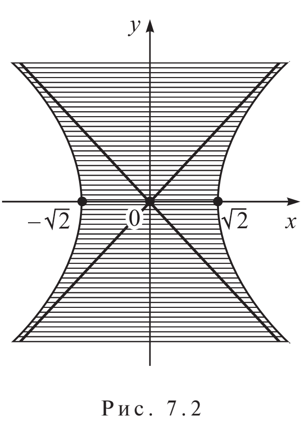
а) $\operatorname{Re}\bar{z}^2 \leqslant 2$; б) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geqslant \dfrac{1}{6}$;

в) одновременно выполняются «а» и «б».

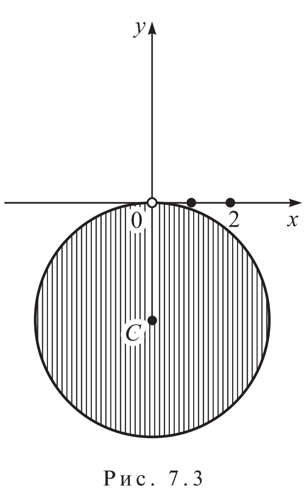
▸ а) $\operatorname{Re}\bar{z}^2 \leqslant 2$, $\operatorname{Re}(x-iy)^2 \leqslant 2$, $x^2 - y^2 \leqslant 2$ – множество точек, заполняющих ветви гиперболы и область между ними (рис. 7.2);

б) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \geqslant \dfrac{1}{6}$, $x^2 + y^2 + 6y \leqslant 0$, $x^2 + (y+3)^2 \leqslant 9$ – множество точек на окружности с центром в точке $C(0,-3)$ и радиусом 3 и все точки внутри нее (рис. 7.3);

в) $\begin{cases} \operatorname{Re}\bar{z}^2 \leqslant 2, \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geqslant \dfrac{1}{6}. \end{cases}$



Р и с . 7 . 2



Р и с . 7 . 3

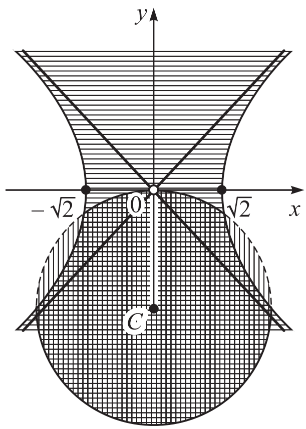


Рис. 7.4

Совмещаем рис. 7.2 и рис. 7.3 так, чтобы совпали оси координат *xOy*. Тогда общая часть множеств для «а» и «б» дает ответ – «щербатый круг» (рис. 7.4). ◀

7.4. Дополнительные задачи к гл. 7

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{12} - 2i$; б) $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

(*Ответ*: а) $4e^{7\pi i/6}$; б) $e^{6\pi i/7}$.)

2. Доказать формулу

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha},\ n \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

3. Найти сумму $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}.\right)$

4. При каких целых значениях n справедливо равенство $(1+i)^n = (1-i)^n$? (*Ответ*: $n = 4k,\ k \in \mathbf{Z}$.)

5. Используя формулу Эйлера, найти сумму

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$

$\left(\textit{Ответ}: \left(\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x \right) \Big/ \sin\frac{x}{2}. \right)$

6. Доказать тождество

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1)(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1).$$

Найти и построить на комплексной плоскости (z) области, которым принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие указанным условиям.

7. $|z - z_1| < 4$, где $z_1 = 3 - 5i$. (*Ответ*: внутренность круга радиусом $R = 4$ с центром в точке z_1.)

8. $|z + z_1| > 6$, где $z_1 = 1 - i$. (*Ответ*: множество точек вне круга радиусом $R = 6$ с центром в точке $-z_1$.)

9. $1 < |z - i| < 3$. (*Ответ*: кольцо между окружностями с центром в точке $z = i$, радиусы которых $r_1 = 1, r_2 = 3$.)

10. $0 < |z + i| < 1$. (*Ответ*: внутренность круга радиусом $R = 1$ с выколотым центром в точке $z = -i$.)

11. $0 < \mathrm{Re}(3iz) < 2$. (*Ответ*: горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y = 0, y = -2/3$.)

12. $\mathrm{Re}(1/z) > a$, где $a = \mathrm{const}, a \in \mathbf{R}$. (*Ответ*: если $a = 0$, то $x > 0$ – правая полуплоскость без границы; если $a > 0$ или $a < 0$, то получаем точки, лежащие соответственно внутри или вне окружности $(x - 1/(2a))^2 + y^2 = 1/(4a^2)$.)

13. $\mathrm{Re}((z - ai)/(z + ai)) = 0$, где $a = \mathrm{const}, a \in \mathbf{R}$. (*Ответ*: точка $z = ai$.)

14. $\mathrm{Im}(iz) < 2$. (*Ответ*: полуплоскость, лежащая левее прямой $x = 2$.)