Матрицы

Основные определения. Виды матриц.

Определение. **Матрицей A** размера $m \times n$, где - число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а ..- номер столбца.

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Матрицы можно задавать либо в виде совокупности строк, либо в виде совокупности столбцов

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^n\right), \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{A}^j$ - j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_i$- i-я строка матрицы $\mathbf{A}$

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Квадратная матрица вида:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Квадратная матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **диагональной** матрицей.

Определение. Квадратная матрица вида

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

называется **нулевой** матрицей.

Определение. Квадратные матрицы вида

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n}\\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n}\\ \dots & 0 & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & s_{nn}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}'=\begin{pmatrix}s_{11} & 0 & \dots & 0\\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn}\end{pmatrix}$$

называются соответственно **верхней и нижней треугольными матрицами**.

Определение. Если $a_{ij}=a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**. ($a_{ij}=-a_{ji}$ - **кососимметрическая**)

Замечание. Для кососимметрической матрицы, очевидно $a_{ii}=0$

Пример. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 6\\ 5 & 6 & 4\end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Матрица $\mathbf{B}$, полученная из исходной матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})$ путём замены местами строк и столбцов, называется транспонированной матрицей. Обозначается $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=(a_{ij})^T=(a_{ji})$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix};\qquad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix};$$

Очевидно, что для симметрической и кососимметрической матриц имеют место равенства

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A} \text{ - для симметрической матрицы,}$$

$$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A} \text{ - для кососимметрической матрицы.}$$

Определение. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются:

1. **комплексно сопряжёнными**, если $b_{ij}=\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{B}=\overline{\mathbf{A}}$)
2. **эрмитово сопряжёнными**, если $b_{ij}=\overline{a}_{ji}$ (обозн. $\mathbf{B}=\mathbf{A}^*$). В этом случае, очевидно $\mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}=\overline{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}$

Определение. Матрица $\mathbf{A}$ называется

1. **самосопряжённой (эрмитовой)**, если $a_{ij}=\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$)
2. **альтернирующей**, если $a_{ij}=-\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{A}^*=-\mathbf{A}$)

В этом случае имеют место равенства

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$$ - для самосопряжённой матрицы

$$\mathbf{A}^* = -\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}$$ - для альтернирующей матрицы

Основные действия над матрицами

Основными действиями над матрицами, являются;

1. **Сложение матриц**
2. **Умножение матрицы на число**
3. **Перемножение матриц**

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Определение. **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Так как данная операция сводится к поэлементному сложению чисел, она обладает всеми свойствами, характерными для операции сложения чисел

1. Коммутативность $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.
2. ассоциативность $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
3. и т.д.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$$

При этом справедливы следующие свойства

1. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

2. . $\mathbf{A}(\alpha+\beta) = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}, \quad \alpha,\beta \in \Re$.

Пример 1. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Определение: **Произведением** матриц называется матрица $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Отметим здесь основные свойства, касающиеся операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.** Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ – **нулевая** матрица.

Замечание. Очень интересно, что в отличие от чисел, если $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, то это вовсе не означает, что либо $\mathbf{A}$, либо $\mathbf{B}$ - нулевые матрицы.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако же, для матриц $\mathbf{A}$ размера $m \times l$ и $\mathbf{B}$ размера $l \times n$ при $l = \{0,1\}$ из равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ следует, что либо $\mathbf{A}$, либо $\mathbf{B}$ являются нулевой матрицей (без доказательства). При $l \geq 2$ это свойство, как видно из приведенного примера, не выполняется.

Если выполняется условие $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$, то матрица $\mathbf{B}$ называется **обратной** к матрице $\mathbf{A}$. Обозначается $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. При этом точно также можно считать матрицу $\mathbf{A}$ обратной к матрице $\mathbf{B}$.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения $\mathbf{AB}$ и $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$, то определены $\mathbf{BC}$ и $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, и выполняется равенство:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) .$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ и $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$, то соответственно:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

4) Если произведение $\mathbf{AB}$ определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}).$$

5) Если определено произведение $\mathbf{AB}$, то определено произведение $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ и выполняется равенство:

$$(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \text{ где}$$

В качестве следствия из данного свойства можно записать, что:

$$(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} ,$$

при условии, что определено произведение матриц $\mathbf{ABC}$.

<u>Пример 2.</u> Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} + \alpha\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} + \alpha\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 3.</u> Найти произведение матриц $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример 4.</u> Найти произведение матриц $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 5</u>. Дана матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^3$.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

<u>Упражнение 1.</u> Для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 найти перестановочную матрицу $\mathbf{B}$.

Элементарные преобразования. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на действительное число;

3) перестановка строк;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

Определение. Матрицы, полученные одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Определение. Матрица, полученная из единичной с помощью одного элементарного преобразования, называется **элементарной.**

Пример 1. Рассмотрим единичную матрицу 2-го порядка

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Элементарными матрицами будут

$$\mathbf{E}^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(4)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(5)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь матрицы $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ соответствуют 1-му элементарному преобразованию, $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ - второму, а $\mathbf{E}^{(5)}$ - третьему.

Упражнение 1. Показать, что элементарное преобразование матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентно умножению её слева на соответствующую элементарную матрицу.

Элементарные преобразования обратимы в том смысле, что обратное действие приводит к исходной матрице. Обратное действие также является элементарным преобразованием.

Упражнение 2. Проверить, что для введенных в примере 1 матриц $\mathbf{E}^{(\mathbf{i_j})}$, матрицы обратных элементарных преобразований будут определяться так:

$$\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(2)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(3)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(4)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\alpha & 1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(5)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Показать на примере матриц 2x2, что $\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{E}^{(i)}\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}=\mathbf{E}$

Определение. Линейной комбинацией строк (столбцов) $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n$ матрицы $\mathbf{A}$ называется выражение вида

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{A}_n,\quad \alpha_k\in\Re,$$

где числа α_k называются **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение. Строки (столбцы) $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ матрицы $\mathbf{A}$ называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю и имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения, т.е.

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{A}_n = 0 \text{ при условии, что } \exists\alpha_i \neq 0$$

В противном случае, если

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{A}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0, \forall i$$

то строки (столбцы) $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ называются **линейно независимыми**.

Упражнение 4. Показать, что элементарные преобразования не влияют на линейную зависимость (независимость) строк (столбцов).

Рассмотрим теперь произвольную матрицу. Разделим её первую строчку на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим 1-ю строчку на a_{21} и вычтем из второй строки

2) умножим 1-ю строчку на a_{31} и вычтем из третьей строки

и т.д.

Получим матрицу:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}, \quad j = 2,3,\ldots,n,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}d_{1j}, \quad j = 2,3,\ldots,n, \quad i = 2,\ldots,m,$$

Далее повторяем эти же действия для второй строки матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$, потом – для третьей и т.д. Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ приводится к виду

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & \ldots & s_{1,r-1}^{(1)} & s_{1r}^{(1)} & \ldots & s_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & s_{23}^{(1)} & \ldots & s_{2,r-1}^{(1)} & s_{2r}^{(1)} & \ldots & s_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & s_{3,r-1}^{(1)} & s_{3r}^{(1)} & \ldots & s_{3n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{4,r-1}^{(1)} & s_{4r}^{(1)} & \ldots & s_{4n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & s_{r-1,r}^{(1)} & \ldots & s_{r-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & s_{rn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}^{(1)}$ - называется ступенчатой матрицей. Число r равно, очевидно, количеству линейно независимых столбцов.

Повторяя те же действия обратным ходом, т.е. двигаясь от нижней строки приводим матрицу $\mathbf{S}^{(1)}$ к виду

$$\mathbf{S}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & s_{3,r+1}^{(2)} & \dots & s_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{4,r+1}^{(2)} & \dots & s_{4n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{r-2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & s_{r-1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-1,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{r,r+1}^{(2)} & \dots & s_{rn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}^{(2)}$ - называется **главной ступенчатой.** Так как каждое элементарное преобразование эквивалентно умножению слева на элементарную, то матрицу $\mathbf{S}^{(2)}$ можно представить в виде произведения

$$\mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{E}^{(\mathbf{i_1})} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}^{(\mathbf{i_k})} \mathbf{A}$$

Так как элементарные преобразования обратимы, поэтому можно написать, что

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_k})}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_1})}\right)^{-1} \mathbf{S}^{(2)}$$

где $\left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_j})}\right)^{-1}$ - элементарная матрица, соответствующая обратному элементарному преобразованию.

Если матрица $\mathbf{A}$ приводится к единичному виду, то

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_k})}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_1})}\right)^{-1}.$$

Определители (детерминанты)

Определение. **Определителем** квадратной матрицы $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ называется число, которое может быть вычислено по следующим правилам:

1. Для квадратной матрицы первого порядка $\det \mathbf{A} = a_{11}$
2. Для матрицы порядка n

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}, \qquad (1)$$

где величина M_{1j} является детерминантом матрицы, полученной из исходной вычеркиванием 1-ой строки и j – го столбца.

Очевидно, что для квадратной матрицы второго порядка имеем

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (1^*)$$

Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Определение. Если в матрице $\mathbf{A}$ выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы $\mathbf{A}$. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s. Обозначается $M^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}$ (верхние индексы – индексы строк, нижние - столбцов).

Заметим, что данное определение применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Определение. Определитель квадратной матрицы, полученный вычёркиванием s строк и s столбцов, называется дополнением к минору $M^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}$ и обозначается $\bar{M}^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}$.

Определение. Алгебраическим дополнением минора $M^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}$ квадратной матрица называется число, определяемое по формуле

$$A^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}=(-1)^{i_1+\ldots+i_s+j_1+\ldots+j_s}\,\bar{M}^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}$$

Для дополнительного минора $\bar{M}^{i}_{j}$ и алгебраического дополнения A^i_j используются отдельные обозначения

$$\bar{M}^{i}_{j}=M_{ij} \text{ и } A^i_j=A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Таким образом, в частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Замечание 1. С учетом данных определений, формулу (1) можно записать так:

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\bar{M}^{1}_{j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A^1_j=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \qquad (2)$$

Замечание 2. *Формулы (1) и (2) позволяют вычислить определитель матрицы по первой строке. Также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:*

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\bar{M}^{i}_{1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A^i_1 \qquad (3)$$

Доказательство. Эквивалентность формул (2) и (3) устанавливается с помощью метода математической индукции. Для $n=2$ - очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо при $n=k$. Тогда, при $n=k+1$ для формулы (2) имеем

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\bar{M}_1^j=a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\bar{M}_j^1\overset{(3)}{=}a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i}a_{i1}\bar{M}_{j1}^{1i}=$$

$$=a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{j=2}^{k+1}\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{1+i+j}a_{1j}a_{i1}\bar{M}_{j1}^{1i}$$

Для формулы (3) соответственно

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{1+i}a_{i1}\bar{M}_i^1=a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{1+i}a_{i1}\bar{M}_1^i\overset{(2)}{=}a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{1+i}a_{i1}\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j}a_{1j}\bar{M}_{1j}^{i1}=$$

$$=a_{11}\bar{M}_1^1+\sum_{i=2}^{k+1}\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{1+i+j}a_{1j}a_{i1}\bar{M}_{1j}^{i1}$$

Здесь $\bar{M}_{j1}^{1i}=\bar{M}_{1j}^{i1}$ так как неважно в каком порядке вычеркивать строки и столбцы. Из равенства полученных результатов вытекает эквивалентность формул (2) и (3).

<u>Предложение 1.</u> *Важным свойством определителей является следующее соотношение:*

$$\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\,;$$

Это свойство является следствием **замечания 2**.

Выясним, как изменяется определитель при элементарных преобразованиях. Начнём с третьего элементарного преобразования, которое заключается в перестановке строк

<u>Предложение 2.</u> *Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки или два столбца* ***(третье элементарное преобразование)****, то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.*

<u>Доказательство.</u> При $n=2$ имеем

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ \det\mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\mathbf{A}^{(3)}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{pmatrix},\ \det\mathbf{A}^{(3)}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-\det\mathbf{A}$$

Пусть утверждение справедливо при $n=k$. Проверим его истинность при $n=k+1$. Предположим, что поменялись местами строки с номерами t и s. Вычислим определитель полученной матрицы $\mathbf{A}^{(3)}$, используя разложение по формуле (2), т.е. по первому столбцу. Имеем

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$$

$$\det\mathbf{A}^{(3)}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}^{(3)}$$

где матрицы соответствующие минорам $M_{i1}^{(3)}$ и M_{i1} отличаются друг от друга перестановкой двух строк, и поэтому по предположению индукции связаны соотношением $M_{i1}^{(3)}=-M_{i1}$.

Отсюда получаем

$$\det\mathbf{A}^{(3)}=-\det\mathbf{A}$$

что и требовалось доказать.

Из **предложения 2** следует единственность определителя при разложении по произвольной строке (столбцу). Таким образом, справедлива теорема.

<u>Теорема.</u> *Определитель не зависит от того по какой строке или столбцу ведётся разложение. Таким образом, справедливы следующие формулы вычисления определителя*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \qquad (2^*)$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \qquad (3^*)$$

<u>Доказательство</u>. Доказательство основывается на возможности перестановки строк (или столбцов), при которой определитель сохраняет значение по абсолютной величине и меняет знак на противоположный. При этом очевидно, что для того, чтобы поднять i - ю строчку на первое место нужно совершить $i-1$ перестановку. Получим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & a_{i-2,3} & \dots & \dots & a_{i-2,n} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \mathbf{A}'$$

При этом, в силу предложения 2

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{A}'.$$

Кроме того, дополнительный минор, полученный вычеркиванием i - ой строки и j - го столбца в матрице $\mathbf{A}$ совпадает с дополнительным минором, полученным вычеркиванием 1 - ой строки и j - го столбца в матрице $\mathbf{A}'$, Этот минор будем обозначать $\mathbf{M}_{ij}$. Тогда, применяя формулу разложения по первой строке, получим:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{A}' = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Это формула (2*). Справедливость формулы (3*) теперь устанавливается с помощью предложения 2.

<u>Предложение 3.</u> *Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.* (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

<u>Определение.</u> Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется **вырожденной матрицей.** В противном случае квадратная матрица называется **невырожденной.**

<u>Предложение 4.</u> *При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число* ***(первое элементарное преобразование).***

<u>Доказательство.</u> Пусть к примеру, строка с номером i домножена на число α. Полученную таким образом матрицу обозначим через $\mathbf{A}^{(1)}$. Её определитель в силу (2*) равен

$$\det\mathbf{A}^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha a_{ij}M_{ij}=\alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\alpha\det\mathbf{A}$$

Предложение 5. *Определитель матрицы у которой i - я строка является суммой двух строк равен сумме определителей матриц, полученных из исходной заменой i - ой строки на каждое из слагаемых.*

Доказательство. Пусть элементы i - ой строки матрицы $\mathbf{A}$ представлены в виде $a_{ij}=b_{ij}\pm c_{ij}$. Тогда вычисляя определитель по i - ой строке имеем

$$\det\mathbf{A}=\det(\mathbf{B}\pm\mathbf{C})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(b_{ij}\pm c_{ij}\right)M_{ij}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}M_{ij}\pm\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}M_{ij}=\det\mathbf{B}\pm\det\mathbf{C}$$

Что и требовалось доказать.

Предложение 6. *Если в матрице $\mathbf{A}$ любые две строки или столбца линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. При $n=2$ имеем

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12}\end{pmatrix},\quad \det\mathbf{A}=0$$

Пусть утверждение верно при $n=k$, проверим справедливость утверждения при $n=k+1$. Предположим, что строки с номерами s и t - ЛЗ. Найдём определитель разложением по строке с номером $j\neq s,t$

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=0$$

так как M_{ij} - определители матрицы k - го порядка с двумя линейно зависимыми строками и для них по предположению индукции $M_{ij}=0$

Замечание. Имеет место и более общее **утверждение:** *Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы линейно зависимы.*

Предложение 7. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю* ***(второе элементарное преобразование)****.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ выберем строку с номером k, домножим её на число α и прибавим к строке с номером i. Полученную таким образом матрицу обозначим через $\mathbf{A}^{(2)}$. Её определитель в соответствии с предложениями 4 и 5:

$$\det\mathbf{A}^{(2)}=\det\mathbf{A}+\alpha\det\mathbf{A}'\qquad(4)$$

где $\mathbf{A}'$ получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой i - й строки на k - ю строку.

Второе же слагаемое в силу **св-ва 6** равно нулю, так как представляет собой определитель матрицы с двумя линейно зависимыми строками с номерами i и k. Таким образом

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$$

<u>Упражнение.</u> Показать, что

$$\det \mathbf{E}^{(1)} = \det \mathbf{E}^{(2)} = \alpha, \quad \det \mathbf{E}^{(3)} = \det \mathbf{E}^{(4)} = 1, \quad \det \mathbf{E}^{(5)} = -1,$$
$$\det\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)^{-1} = \det\left(\mathbf{E}^{(2)}\right)^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \det\left(\mathbf{E}^{(3)}\right)^{-1} = \det\left(\mathbf{E}^{(4)}\right)^{-1} = 1, \quad \det\left(\mathbf{E}^{(5)}\right)^{-1} = -1.$$

<u>Предложение 8.</u> $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$

<u>Доказательство.</u> В случае если матрица $\mathbf{A}$ (или $\mathbf{B}$) имеет ЛЗ строки (столбцы), то и матрица $\mathbf{AB}$ тоже имеет ЛЗ строки (столбцы), поэтому

$$\det(\mathbf{AB}) = 0 = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Пусть теперь матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ невырождены. На основании **свойств 2, 4 и 7** и предыдущего упражнения

$$\det\left(\mathbf{E}^{(i)}\mathbf{A}\right) = \det \mathbf{E}^{(i)} \det \mathbf{A}, \quad \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{A}\right) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\right)\det \mathbf{A} \qquad (5)$$

где $\mathbf{E}^{(i)}$ - любая из элементарных матриц. Ранее было показано, что любая матрица приводится к так называемому ступенчатому виду, частным случаем которого является единичная матрица $\mathbf{E}$, т.е. матрица $\mathbf{A}$ (с линейно независимыми строками) может быть разложена в произведение элементарных матриц. Тогда, применяя последовательно формулу (5) получим

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\ldots\left(\mathbf{E}^{(i_2)}\right)^{-1}\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\mathbf{B}\right) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right)\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_{k-1})}\right)^{-1}\ldots\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\mathbf{B}\right) = \ldots$$
$$\ldots = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)\cdot\det \mathbf{B} = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\ldots\left(\mathbf{E}^{(i_2)}\right)^{-1}\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)\cdot\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Свойство доказано.

<u>Замечание.</u> Очевидно, что вычисление определителя по формулам (2*) и (3*) становится затруднительно при больших размерах матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому, используя элементарные преобразования можно привести матрицу $\mathbf{A}$ к единичной, т.е. $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\ldots\left(\mathbf{E}^{(i_2)}\right)^{-1}\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\mathbf{E}$. Тогда в силу только что доказанного свойства

$$\det \mathbf{A} = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)$$

где каждый определитель в правой части находится по ф-лам (2*) и (3*)

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2\cdot1 - 1\cdot3) - 2(0\cdot1 - 3\cdot3) + (0\cdot1 + 3\cdot2) = 19$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 – 4) – 1(9 – 1) + 2(12 – 2) = -2 – 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 – 2) – 1(0 – 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) – 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Пример. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(\mathbf{AB})$.

1-й способ: $\det\mathbf{A} = 4 - 6 = -2$; $\det\mathbf{B} = 15 - 2 = 13$; $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} = -26$.

2- й способ: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{AB}) = 7\cdot18 - 8\cdot19 = -26$.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1,\ldots i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+l$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $\mathrm{rk}\,\mathbf{A}$ или $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}$. Методика определения ранга матрицы посредством нахождения базисного минора называется **методом окаймляющих миноров.**

Теорема. (теорема о базисном миноре). *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк и равно рангу матрицы, т.е. в произвольной матрице* $\mathbf{A}$ *каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Доказательство. Доказательство основывается на теореме об эквивалентности разложения определителя по строке или столбцу (**замечание 1 и св-ва 1** предыдущего параграфа). Поэтому, если утверждение теоремы не верно (например, число ЛН строк больше чем число ЛН столбцов), то можно было бы найти минор который равнялся бы нулю при разложении по столбцу и не равнялся бы нулю при разложении по строкам, чего быть не может в силу вышеназванной теоремы.

С другой стороны, определитель матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда все строки матрицы линейно независимы, поэтому порядок базисного минора будет равен максимальному числу линейно независимых строк. Следовательно, ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов)

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы, так как не влияют на линейную зависимость строк (столбцов). Поэтому можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример 1. Определить ранг матрицы.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq0\Rightarrow\ \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2.$$

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1\neq0\Rightarrow\ \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2.$$

Пример 3. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq0.\Rightarrow\ \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=\min\{m,n\}$.

Обратная матрица.

Напомним определение обратной матрицы, данное ранее.

Определение. Если существуют квадратные матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{A}$, удовлетворяющие условию:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{AX} = \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица того же самого порядка, то матрица $\mathbf{X}$ называется **обратной** к матрице $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы. Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ - символ Кронекера.}$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + ... + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ .... \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + ... + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ .... \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + ... + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы $\mathbf{X}$. Далее будет показано (раздел «Системы линейных алгебраических уравнений»), что эта система имеет решение, если $\det \mathbf{A} \neq 0$ (следствие из теоремы Кронекера-Капелли). В этом же разделе доказывается единственность решения этой системы (1) при условии, что $\det \mathbf{A} \neq 0$. Поэтому *каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну*.

Пример. Дана матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу (**формула Крамера**):

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det \mathbf{A}} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.,$$

где M_{ji} – главный дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы $\mathbf{A}$.

Пример. Дана матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^{-1}$. Имеем $\det\mathbf{A}=4-6=-2$.

$$M_{11}=4,\quad M_{12}=4,\quad M_{21}=2,\quad M_{22}=1$$

Таким образом, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$;

2) $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

3) $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$.

Метод Гаусса. Присоединим с права к матрице $\mathbf{A}$ единичную матрицу $\mathbf{E}$. С помощью элементарных преобразований приведём полученную таким образом матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\mathbf{A}|\mathbf{E}\right)\sim\left(\mathbf{E}|\mathbf{B}\right)=\mathbf{S}^{(2)}.$$

При использовании метода Гаусса первая матрица будет умножаться слева на одну из элементарных матриц $\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_1)}$, …, $\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_k)}$. Таким образом для преобразования $\mathbf{A}\sim\mathbf{E}$ имеем

$$\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_1)}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_k)}\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Для преобразования $\mathbf{E}\sim\mathbf{B}$

$$\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_1)}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_k)}=\mathbf{B}.$$

В результате приходим к двойному равенству

$$\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_1)}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_k)}\mathbf{A}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$.

Используя обратную матрицу можно решать матричные уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ и $\mathbf{XA}=\mathbf{C}$, где $\mathbf{X}$ - неизвестная матрица. Эти уравнения решаются с помощью домножения слева и справа на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Для первого уравнения имеем

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \Rightarrow\ \mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \Rightarrow\ \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Соответственно, для второго уравнения

$$\mathbf{XAA}^{-1}=\mathbf{CA}^{-1}\ \Rightarrow\ \mathbf{XE}=\mathbf{CA}^{-1}\ \Rightarrow\ \mathbf{X}=\mathbf{CA}^{-1}.$$