Системы линейных алгебраических уравнений

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

<u>Определение.</u> Системой линейных алгебраических уравнений называется следующая совокупность уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Введём следующие обозначения

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - называется матрицей системы

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{pmatrix}^T$ - столбец свободных членов

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$ - столбец неизвестных

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Систему уравнений (1) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \qquad (2)$$

Решениями системы являются n чисел $x_1, \ldots, x_n$, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

<u>Определение.</u> Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

<u>Определение.</u> Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Рассмотрим для начала случай, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Сделаем следующее преобразование в системе (2):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Так как $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, то $\mathbf{Ex} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, и соответственно

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (3)$$

Формула (3) даёт решение системы (1)

Для применения данного метода необходимо находить [обратную матрицу] и вычисление по ф-ле (3) связано с большими вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка. Таким образом, можно сказать следующее:

1. Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных и матрица такой системы не вырождена.
2. Метод удобен для решения систем невысокого порядка.
3. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\Delta=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}=5(4\text{-}9)+1(2-12)-1(3-8)=\text{-}25-10+5=\text{-}30.$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=-5,\qquad M_{21}=\begin{vmatrix}-1&-1\\3&2\end{vmatrix}=1;\qquad M_{31}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&3\end{vmatrix}=-1;$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}=-10;\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&2\end{vmatrix}=14;\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&3\end{vmatrix}=16;$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}=-5;\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&3\end{vmatrix}=19;\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&2\end{vmatrix}=11;$$

$$a_{11}^{-1}=\frac{5}{30};\quad a_{12}^{-1}=\frac{1}{30};\quad a_{13}^{-1}=\frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30};\quad a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30};\quad a_{23}^{-1}=\frac{16}{30};\qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

$$a_{31}^{-1}=\frac{5}{30};\quad a_{32}^{-1}=\frac{19}{30};\quad a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30};$$

Сделаем проверку:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{10}{30}&-\frac{14}{30}&\frac{16}{30}\\\frac{5}{30}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5&5+14-19&5-16+11\\5-20+15&1-28+57&1+32-33\\20-30+10&4-42+38&4+48-22\end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

Находим столбец $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1,\quad y=2,\quad z=3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений и все уравнения должны быть линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det\mathbf{A}\neq 0;$$

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема (Правило Крамера): *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение (будет показано в дальнейшем) и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta,$$

где $\Delta = \det \mathbf{A}$, *а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца* i *столбцом свободных членов* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30, \qquad x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60, \qquad x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90, \qquad x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений (Д-во далее).

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Ответ: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = -2$.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, **матричный метод** и **метод Крамера** применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений и матрица системы невырождена. Рассмотрим теперь произвольную систему линейных уравнений.

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица системы порядка $m\times n$, а $\mathbf{b}$ – m - мерный столбец свободных членов, $\mathbf{x}$ - n-мерный столбец неизвестных.

Определение. Если $b_1=\ldots=b_m=0$, то система называется **однородной**. Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как всегда существует нулевое решение.

Теорема Кронекера – Капелли. (условие совместности системы)
(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}.$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А

$$\mathbf{Ax}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\ldots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\ldots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\ldots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_m\end{pmatrix},$$

а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $\mathbf{A}\to\tilde{\mathbf{A}}$ не изменяют ранга, т.е. $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}$.

2) И обратно, если $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Тогда, столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1\\x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2\\2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\1&-2&3&-4&5\\2&11&12&25&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\3&9&15&21&27\\2&11&12&25&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\1&3&5&7&9\\2&11&12&25&22\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\2&11&12&25&22\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&11\end{vmatrix}=1-6=5\neq0\;\Rightarrow\;\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2\,.$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\1&-2&3&-4&5&2\\2&11&12&25&22&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\0&0&0&0&0&1\\2&11&12&25&22&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\2&11&12&25&22&4\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}=3$. Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases} \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+12=14\neq 0; \quad \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2;$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\neq 0. \qquad \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}=2.$$

Система совместна. Решения: $x_1=1, \quad x_2=1/2$.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от **матричного метода** и **метода Крамера**, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad (1)$$

Для решения системы (1) воспользуемся элементарными преобразованиями, к которым как известно относятся:

1) Умножение левой и правой части любого из уравнений на число, не равное нулю

2) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

3) Перестановка уравнений местами.

4) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x_j.

Определение. Две системы являются **эквивалентными**, если они имеют общее решение, т.е. всякое решение одной системы удовлетворяет другой и наоборот.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Системы уравнений, получающиеся одна из другой с помощью элементарных преобразований являются эквивалентными системами.*

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить каждое из элементарных преобразований. При этом **п. 1, 3 и 4 –** очевидны. Проверим **п. 2**. Выберем строку с номером s домножим на число α и прибавим к строке с номером k получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n+\alpha\left(a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n\right)=b_k+\alpha b_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Все уравнения кроме k-го автоматически удовлетворяются по условию теоремы. Но k-е уравнение тоже удовлетворяется так как

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \qquad (2)$$

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \qquad (3)$$

Следовательно

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha\left(a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n\right) = b_k + \alpha b_s \qquad (4)$$

Нетрудно проверить утверждение и в обратную сторону, а именно, что из (3) и (4) следует (2) или из (2) и (4) следует (3).

Теорема доказана.

Изложим теперь метод Гаусса, суть которого заключается в последовательном исключении неизвестных. Приведём расширенную матрицу системы $\tilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)$ к главному ступенчатому виду $\tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = \left(\mathbf{S}^{(2)}\middle|\mathbf{d}\right)$. При этом:

1. $\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(1)} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(2)}$

2. Системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ - эквивалентны.

Поэтому, если система $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ совместна (несовместна), то исходная система также совместна (несовместна). В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли для совместности необходимо выполнение условия

$$\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathrm{Rg}\,\mathbf{S}^{(2)} = r \le n.$$

что может быть только при условии $r \le n$.

Первые r столбцов называются **базисными столбцами**, столбцы с номерами $r+1,\ldots,n$ - **свободные**. Соответственно переменные $x_1,\ldots,x_r$ - **базисны**е; $x_{r+1},\ldots,x_n$ - **свободные.**

Таким образом, если $r < n$ система (1) имеет бесконечное множество решений, которые находятся из системы

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & s^{(2)}_{1,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{1n} \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & s^{(2)}_{2,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{2n} \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & s^{(2)}_{3,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{3n} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & s^{(2)}_{4,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{4n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & s^{(2)}_{r-2,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{r-2,n} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & s^{(2)}_{r-1,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{r-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & s^{(2)}_{r,r+1} & \ldots & s^{(2)}_{rn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \ldots \\ x_{r-2} \\ x_{r-1} \\ x_r \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \ldots \\ d_{r-2} \\ d_{r-1} \\ d_r \end{pmatrix}$$

Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned}
& x_j = d_j - s^{(2)}_{j,r+1}x_{r+1} - \ldots - s^{(2)}_{jn}x_n, \quad j = \overline{1,r} \\
& x_{r+1},\ldots,x_n \in \Re
\end{aligned} \qquad (2)$$

В случае если $r = n$ система (1) имеет единственное решение определяемое формулой

$$x_j = d_j, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

<u>**Пример.**</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2,\quad x_2 = 5,\quad x_1 = 1$.

<u>Пример.</u> Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$, что и является решением.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

Приведённая система

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

где $\mathbf{0}$ - нулевой столбец, $\mathbf{A}$ - квадратная матрица порядка n.

Система (2) называется **приведённой системой** по отношению к (1). Она является однородной и, следовательно, всегда совместна. Кроме того, если $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A} = n$, то система (2) имеет только нулевое решение (ф-ла (3) пред. параграфа) и это решение называется **тривиальным решением**.

Пусть $\mathbf{x}_0$ - решение системы (1). Тогда, если $\mathbf{y}$ - решение приведённой системы (2), то столбец $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ - также будет решением (1), так как $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Ay} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$.

И обратно, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ решение системы (1), то для $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ имеем $\mathbf{Ay} = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Очевидно, что если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ решения системы (2), то любая их линейная комбинация также является решением системы (2). Поэтому, если система (2) имеет нетривиальные решения, то можно указать несколько линейно независимых решений, таких, что любое решение является их линейной комбинацией.

Таким образом, задачу описания множества решений системы (1), если она совместна, сводится к задаче описания множества решений приведённой системы (2).

<u>Определение.</u> Матрица $\mathbf{F}$, состоящая из столбцов высоты n, называется **фундаментальной матрицей** для приведённой системы (2), если:

1. $\mathbf{AF}=\mathbf{O}$
2. столбцы матрицы $\mathbf{F}$ - линейно независимы,
3. Ранг матрицы $\mathbf{F}$ максимален среди рангов матриц, удовлетворяющих условию (1)

Столбцы фундаментальной матрицы называются **фундаментальной системой решений**.

В силу данного определения, если фундаментальная матрица существует, то каждый её столбец есть решение системы (2). Если система не имеет нетривиальных решений, то фундаментальной матрицы нет. Это будет в том случае когда $\mathrm{Rg}\mathbf{A}=n$. Во всех остальных случаях она существует.

Прежде чем перейти к вопросу построения фундаментальной матрицы, проясним третье условия определения. Имеет место следующее утверждение

Пусть $\mathbf{A}$ *- матрица порядка* $m\times n$ *и* $\mathrm{Rg}\mathbf{A}=r$. *Тогда* $\mathrm{Rg}\mathbf{F}=n-r$

В самом деле. Приведём матрицу $\mathbf{A}$ к главному ступенчатому виду $\mathbf{S}^{(2)}$. Эта матрица имеет r столбцов вида $\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}^T$ и кроме того системы

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

эквивалентны.

Поэтому равенство $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{F}=\mathbf{O}$ возможно только в случае, если как минимум r строк в матрице $\mathbf{F}$ - нулевые (или приводятся к нулевым с помощью элементарных преобразований). А это означает, что $\mathrm{Rg}\mathbf{F}\le n-r$. А так как ранг фундаментальной матрицы максимален среди всех матриц, удовлетворяющих условию 1 определения фундаментальной матрицы, то получаем окончательно, что $\mathrm{Rg}\mathbf{F}=n-r$

Теперь рассмотрим алгоритм построения фундаментальной матрицы. Разложим небазисные столбцы матрицы $\mathbf{A}$ по базисным

$$\mathbf{A_j}=\alpha_j^1\mathbf{A_1}+\ldots+\alpha_j^r\mathbf{A_r},\quad j=r+1,\ldots,n$$

Отсюда следует, что столбец $\begin{pmatrix}-\alpha_j^1 & \dots & -\alpha_j^r & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}^T$ - является решением (единица стоит на j - м месте). Таких решений можно составить столько, сколько есть небазисных столбцов. Объединим их все в одну матрицу

$$\begin{pmatrix}-\alpha_{r+1}^1 & -\alpha_{r+2}^1 & \dots & -\alpha_n^1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\alpha_{r+1}^r & -\alpha_{r+2}^r & \dots & -\alpha_n^r\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

Подматрица в последних $n-r$ строках единичная, поэтому её ранг равен числу столбцов и они линейно независимы. Таким образом, если $\mathrm{Rg}\mathbf{A}=r<n$, то фундаментальная матрица $\mathbf{F}$ которую мы только что получили, состоит из $n-r$ столбцов

<u>Теорема</u> (об общем решении неоднородной системы). *Пусть* $\mathbf{x}_0$ *- некоторое решение системы (1), а* $\mathbf{F}$ *- фундаментальная матрица решений её приведённой системы. Тогда*

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{Fc}\qquad(3)$$

при любом $\mathbf{c}$ *- является решением системы* (1).

Верно и обратное **утверждение:** Для каждого решения $\mathbf{x}$ найдётся такой столбец $\mathbf{c}$, что оно будет представлено формулой (3). Выражение, стоящее в правой части формулы (3) называется **общим решением** системы (1).

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Это система состоящая из одного уравнения. Её ранг равен 1. Общее решение имеет вид:

$$x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}y-\frac{C}{A}z,\quad y,z\in\Re. \ (4)$$

Построим теперь фундаментальную матрицу решений. Её ранг равен $\mathrm{Rg}\mathbf{F}=3-1=2$. Положим $y=z=0$. Тогда, общее решение (4) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-D/A\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-B/A\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-C/A\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{x}_0+\mathbf{Fc}$$

где

$$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}-D/A\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}-B/A & -C/A\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\Re.$$

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\2x_1+4x_2+7x_3+10x_4&=13\\x_1+2x_2+4x_3+6x_4&=8\end{aligned}$$

<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&7&10&13\\1&2&4&6&8\end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований приведём её к виду

$$\tilde{\mathbf{S}}=\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&0&1&2&3\end{pmatrix}$$

и общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}x_1&=-2x_2+2x_4-4,\\x_3&=3-2x_4,\quad x_2,x_4\in\Re.\end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix},\quad x_2,x_4\in\Re.$$

Перепишем это равенство так

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\Re.$$

В полученном представлении

$$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Таким образом

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{F}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\1 & 0\\0 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Положим $c_1, c_2 = 0$, получим частное решение

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно удовлетворяет исходной системе уравнений.