Несобственные интегралы.

Определение несобственного интеграла 1-го рода.

<u>Определение.</u> Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a,+\infty)$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, $b>a$. **Несобственным интегралом 1-го рода** от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ называется предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists B>0$: $\forall b>B$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^B f(x)dx-\int\limits_a^b f(x)dx\right|=\left|\int\limits_b^B f(x)dx\right|<\varepsilon \quad (1)$$

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл **расходится**.

Аналогичным образом определяются следующие интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx+\int\limits_c^\infty f(x)dx$$

Конечно, эти равенства справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

<u>Теорема</u> (необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла 1-го рода). *Для сходимости несобственного интеграла 1-го рода необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\varepsilon>0$ $\exists A>0$ *такое, что неравенство*

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x)dx\right|<\varepsilon \qquad (2)$$

было справедливо всякий раз, когда $x''>x'>A$

<u>Доказательство.</u> Необходимость следует из неравенства (1). Для доказательства достаточности рассмотрим $S_n=\int\limits_a^{a+n} f(x)dx$, где $n\ge a+A$. Тогда, в силу условия (2)

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon$$

Согласно критерию Коши, эта последовательность имеет предел, который обозначим через S. Тогда, если $x\ge a+n$ получим

$$\left|S-\int\limits_a^x f(t)dt\right|\le\left|S-\int\limits_a^{a+n} f(t)dt\right|+\left|\int\limits_{a+n}^x f(t)dt\right|<2\varepsilon$$

Следовательно, $S=\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^x f(t)dt$. Теорема доказана.

<u>Пример.</u>

$\int\limits_0^\infty\cos xdx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b\cos xdx=\lim\limits_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}(\sin b-\sin 0)=\lim\limits_{b\to\infty}\sin b$ - не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Пример. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_{b}^{-1}=\lim\limits_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right)=1$ - интеграл сходится

Пример. $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{a}^{A}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_{a}^{A}=\begin{cases}\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1\end{cases}$

Таким образом $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\text{сходится}, & \alpha>1\\ \textit{расходится}, & \alpha\le1\end{cases}$

Случай $\alpha=1$ рассмотреть самостоятельно.

Несобственные интегралы 1-го рода от знакопостоянных функций.

Теорема (первая теорема сравнения). *Если для всех* x ($x\ge a$) *выполняется условие* $0\le f(x)\le g(x)$ *и интеграл* $\int\limits_{a}^{\infty}g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ *тоже сходится и приэтом*

$$\int\limits_{a}^{\infty}g(x)dx\ge\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx\ge0.$$

Если же интеграл $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ *расходится, то* $\int\limits_{a}^{\infty}g(x)dx$ *тоже расходится.*

Доказательство основано на интегрировании неравенства $0\le f(x)\le g(x)$ в промежутке $[a,A]$ с последующим переходом к пределу при $A\to\infty$

Замечание. В условиях теоремы можно считать, что неравенство $0\le f(x)\le g(x)$ выполняется не на всём промежутке $[a,+\infty)$, а лишь начиная с некоторого значения $A>a$. Это соображение связано с тем фактом, что интеграл по любому конечному промежутку $[a,A]$ существует и конечен и потому не влияет на сходимость интеграла первого рода.

Теорема (вторая теорема сравнения). *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ *, то интегралы* $\int\limits_{a}^{\infty}g(x)dx$ *и* $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $\frac{e^{-x}}{x}\le e^{-x},\quad x\ge1$.

Интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}e^{-x}dx$ сходится (докажите)

Следовательно, искомый интеграл также сходится.

Пример. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$

Подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\ln x}\ge\frac{1}{x},\quad x\ge2$.

Интеграл $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. Следовательно, искомый интеграл также расходится.

С учётом замечания к первой теореме сравнения полученные результаты можно распространить на интегралы

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\ln x},\quad a>1 \text{ и } \int_b^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx,\quad b>0$$

Абсолютная и условная сходимость интегралов 1-го рода

__Теорема.__ *Если* $\int_a^\infty |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$.

Доказательство. Так как интеграл от модуля сходится, то

$$\left|\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon\ ,\ \forall A', A'' > A$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \le \left|\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon,\ \forall A', A'' > A$$

что и означает сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, но если наряду с интегралом от функции $f(x)$ сходится и интеграл от $|f(x)|$, то в этом случае интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**. В противном случае, если интеграл от функции $f(x)$ сходится, а интеграл от $|f(x)|$ расходится, то интеграл первого рода называется **условно (неабсолютно) сходящимся**.

__Пример.__ $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ второй интеграл сходится, следовательно, первый сходится абсолютно

__Теорема.__ **(Признак Абеля)** *Пусть*

1) $\left|\int_a^\infty \varphi(t)dt\right|$ *сходится (хотя бы и неабсолютно)*

2) Функция $f(x)$ *монотонна и ограничена, т.е.* $|f(x)| \le C\ \forall x \in [a,\infty)$

Тогда, интеграл $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ *сходится*

__Доказательство.__ По второй теореме о среднем значении, при любых значениях A' и A'' таких что, $A'' > A' > A > a$ существует точка $\xi \in [A', A'']$

$$\int_{A'}^{A''} f(x)\varphi(x)dx = f(A)\int_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx + f(A')\int_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx$$

где $A' \le \xi \le A''$

Ввиду условия 1) и по теореме о необходимом и достаточном условии сходимости интеграла первого рода будет выполнено

$$\left|\int_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2C},\quad \left|\int_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

Так как функция $f(x)$ монотонно и ограничена при $A'' > \xi > A'$ находим

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left| f(A')\int\limits_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx + f(A'')\int\limits_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx\right| \le$$

$$\le \left| f(A')\right|\left|\int\limits_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx\right| + \left| f(A'')\right|\left|\int\limits_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx\right| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

что влечёт за собой сходимость интеграла

<u>Теорема.</u> (Признак Дирихле) *Пусть:*

1) $f(x)\to 0$ *монотонно при* $x\to\infty$,

2) $\left|\int\limits_a^x \varphi(t)dt\right| \le C = const$ *при* $x\to\infty$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ *сходится.*

<u>Доказательство.</u> Так как функция $f(x)\to 0$ монотонно при $x\to\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ существует число A, такое, что $f(x)<\dfrac{\varepsilon}{2C}$ при $x>A$.

Следовательно, по второй теореме о среднем значении, при любых значениях A' и A'' таких что, $A''>A'>A>a$ существует точка $\xi\in[A',A'']$ для которой

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left| f(A')\int\limits_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx + f(A'')\int\limits_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx\right| \le$$

$$\le \left| f(A')\right|\left|\int\limits_{A'}^{\xi}\varphi(x)dx\right| + \left| f(A'')\right|\left|\int\limits_{\xi}^{A''}\varphi(x)dx\right| < 2Cf(\xi) < \varepsilon$$

что и является условие сходимости

<u>Пример.</u> Докажем, что интегралы $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ и $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ сходятся.

В самом деле, $f(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ монотонно и кроме того

$$\left|\int\limits_1^x \sin t dt\right| = \left|\cos 1 - \cos x\right| \le 2$$

Следовательно, по признаку Дирихле этот интеграл сходится. Для того, чтобы доказать, что этот интеграл сходится условно, надо доказать расходимость

$$\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

В самом деле, в силу неравенства $\left|\sin x\right|\ge \sin^2 x$ имеем

$$\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \ge \int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx - \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx\right)$$

где первый интеграл расходится, а второй аналогичен $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ расходится, а значит, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно.

Аналогичный результат получается и для интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$

Упражнение. Доказать, что $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \begin{cases} \alpha > 1, & \textit{сходится абсолютно} \\ 0 < \alpha \le 1, & \textit{сходится условно} \\ \alpha \le 0, & \textit{расходится} \end{cases}$

Несобственные интегралы 2-го рода.

Определение. Если подынтегральная функция неограниченна на промежутке интегрирования $[a,b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется **несобственным интегралом второго рода**.

Если в точке $x=b$ функция либо не определена, либо разрывна, то указанный интеграл понимается в виде предела

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если указанный предел существует и конечен, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ - называется **сходящимся**, если предел равен бесконечен или не существует - **расходящимся**.

Аналогично, если в точке $x=a$ функция терпит разрыв, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=c$ на промежутке $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько. Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$. Имеем, при $\alpha \ne 1$

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\right)_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

При $\alpha = 1$, получим

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x-a|\right)_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|b-a| - \ln\varepsilon\right) = \infty$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Применение основной формулы интегрального исчисления.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема в собственном смысле в любом промежутке $[a,b-\eta]$, в то время как b, служит для неё особой точкой. Тогда в промежутке $[a,b-\eta]$ существует первообразная $F(x)$

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta}$$

и существование несобственного интеграла (с несобственностью в точке b) равносильно существованию предела

$$\lim_{\eta\to 0} F(b-\eta)$$

Если этот предел существует, то его естественно принять за значение $F(b)$ первообразной функции при $x=b$. Таким образом, для вычисления несобственного интеграла имеем формулу обычного вида

$$\int_a^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b}$$

Та же формула имеет место и в случае, если особая точка лежит внутри промежутка или при наличии нескольких особых точек при непременном условии, что первообразная $F(x)$ является непрерывной на всём промежутке $[a,b]$

Пример. Исследуем на сходимость интеграл $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

Особая точка $x=0$, но первообразная $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ - непрерывна в этой точке, следовательно

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}$$

Пример. $\int_{-2}^{2} \frac{2xdx}{x^2-1}$ не существует, так как первообразная $\ln\left|x^2-1\right|$ обращается в бесконечность в особых точках $x=\pm 1$

Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы такие же признаки сходимости, как и для несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим несколько примеров

Пример. $\int_0^{a} \frac{\sin x dx}{x}$

Особая точка $x=0$, в окрестности этой точки $\frac{\sin x}{x} \sim 1$ и интеграл $\int_0^a dx = a$ сходится.

Таким образом, используя аналог второй теоремы сравнения, приходим к выводу, что и исходный интеграл тоже сходится.

Упражнение. Доказать, что данный интеграл сходится абсолютно.

Кроме того, ранее было установлено, что $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$, $a>0$ сходится

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ который является одновременно несобственным интегралом и 1-го и 2-го рода – тоже сходится.

Связь между несобственными интегралами 1-го и 2-го рода.

Между интегралами обоих типов существует связь. В самом деле, рассмотрим несобственный интеграл второго рода с несобственностью в точке b.

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

Сделаем замену переменной $t = \frac{1}{b-x}$, тогда $x = b - \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2}$

Нижний предел равен $\alpha = \frac{1}{b-a}$, верхний $\beta = +\infty$, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

<u>Упражнение.</u> Доказать обратную формулу

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^{1/a} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

Полученная формула показывает связь между интегралами 1-го и 2-го рода. Аналогичную формулу можно получить и в случае, если особая точка лежит внутри промежутка. Здесь несобственный интеграл 2-го рода сводится к сумме двух несобственных интегралов 1-го рода.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{c-a}}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}dt + \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{b-a}} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

где c - точка разрыва функции $f(x)$

Главные значения несобственных интегралов.

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = c$ на промежутке $[a,b]$. В этом случае, как известно, несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right].$$

где двойной предел должен, разумеется, существовать при независимом предельном переходе по ε_1 и ε_2. В ряде случаев, когда указанный предел не существует, бывает полезным рассмотреть его при условии, что ε_1 и ε_2 стремятся к нулю оставаясь равными, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right].$$

Если этот предел существует, то его называют **главным значением** несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и обозначается символом

$$V.p.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right].$$

В этом случае говорят, что интеграл **сходится в смысле главного значения** (или в смысле главного значения по Коши). Сокращение V.p. происходит от французского «Valeur principal», что в переводе на русский как раз и означает «Главное значение»

Очевидно, что если интеграл существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно.

<u>**Пример.**</u> Рассмотрим интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

Этот интеграл как несобственный не существует (особой точкой является $x=0$). Однако этот интеграл существует в смысле главного значения

$$V.p.\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\Big|_{-1}^{\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{2}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon-\ln1+\ln2-\ln\varepsilon\right]=\ln2.$$

<u>**Замечание к примеру.**</u> Аналогичным образом можно доказать в общем виде существование в смысле главного значения следующего интеграла

$$V.p.\int_a^b\frac{dx}{x-c},\quad c\in(a,b).$$

Понятие главного значения определено также для несобственного интеграла первого рода вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Сходимость такого интеграла понимается в виде существования двойного предела

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{A_1\to+\infty\\ A_2\to+\infty}}\left[\int_{-A_1}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{A_2} f(x)dx\right],$$

где a - произвольная точка числовой оси

Главное значение этого интеграла определяется как следующий предел

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\int_{-A}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{A} f(x)dx\right].$$

Иногда можно заранее установить существование главного значения. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$$

где функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и обращается в нуль в одной из точек интервала (a,b). Пусть для определённости $f(c)=0,\ c\in(a,b)$. Будем также предполагать, что $f'(c)\neq0$. Положим

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f'(c)(x-c)}+\varphi(x),\qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ - функция, подлежащая определению.

Подставим далее в левую часть вместо вункции $f(x)$ её разложение в ряд Тейлора, удерживая члены до второго порядка включительно. Получим

$$\frac{1}{f'(c)(x-c)+\left[f''(c)+\alpha(x)\right]\frac{(x-c)^2}{2}}=\frac{1}{f'(c)(x-c)}+\varphi(x),$$

где $\alpha(x)$ - б/м при $x\to c$.

Тогда

$$\varphi(x)=-\frac{f''(c)+\alpha(x)}{f'(c)\left(2f'(c)+\left[f''(c)+\alpha(x)\right](x-c)\right)}.$$

При $x\to c$ получаем

$$\varphi(x)=-\frac{f''(c)}{2f'^2(c)}. \qquad (2)$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ ограничена вблизи точки $x=c$. С другой стороны, для функции (при условии $f'(c)\neq 0$)

$$\frac{1}{f'(c)(x-c)},$$

как было показано ранее (см. замечание к примеру), существует интеграл в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, используя представления (1), (2) при условии, что $f'(c)\neq 0$, можно заранее установить факт существования интеграла в смысле главного значения.

Обобщённые значения расходящихся интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема в любом конечном промежутке от $[0,A]$, но не интегрируема в промежутке $[0,+\infty)$. Определим функцию

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

Определим среднее значение этой функции следующим образом

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x F(u)du.$$

В качестве обобщённого значения для несобственного интеграла от функции $f(x)$ положим

$$\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(u)du, \qquad (1)$$

или в более общем случае

$$\int_a^\infty f(t)dt=\int_0^\infty f(t+a)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x F(u+a)du. \quad (2)$$

Очевидно, что для существования обобщённого значения в смысле формулы (1) необходимо, чтобы функция $F(x)$ была ограниченной.

Понятие обобщённого значения можно также определить и для несобственного интеграла второго рода используя формулу связывающую несобственный интеграл второго рода с интегралом первого рода

Рассмотрим теперь вопрос о регулярности предложенного метода, т.е. будет сходящегемуся интегралу

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = I \qquad (3)$$

соответствовать обобщённое значение, полученное по формуле (1)

Пусть интеграл (3) сходится, тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся число $x' > 0$, такое, что $\forall x > x'$ будет справедливо неравенство

$$\left| F(x) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{x}\int_0^x F(u)du - I \right| = \left| \frac{1}{x}\int_0^x \left[F(u) - I \right] du \right| \leq \left| \frac{1}{x}\int_0^{x'} \left[F(u) - I \right] du \right| + \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\frac{1}{x - x'}\left| \int_{x'}^{x} \left[F(u) - I \right] du \right| <$$

$$< \left| \frac{1}{x}\int_0^{x'} \left[F(u) - I \right] du \right| + \frac{1}{x - x'}\left| \int_{x'}^{x} \left[F(u) - I \right] du \right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{x}\int_0^{x'} du + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{x - x'}\int_{x'}^{x} du = \frac{\varepsilon}{2}\frac{x'}{x} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x - x'}{x - x'} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для сходящегося интнграла (3) обобщённое значение совпадает с обычным значением, что и доказывает регулярность данного метода. Рассмотрим пример.

Пример. Найти обобщённое значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} \sin x dx.$$

Решение. Этот интеграл расходится в обычном смысле. В обобщённом смысле имеем

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (1 - \cos u) du = 1 + \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1.$$

Следовательно, в качестве обобщённого значения данного интеграла следует принять $I = 1$.