Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

Определение тригонометрического ряда и ряда Фурье.

<u>**Определение.**</u> **Тригонометрическим рядом** называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \qquad (1)$$

Действительные числа a_n, b_n называются **коэффициентами тригонометрического ряда**.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке $[-\pi,\pi]$, а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна $f(x)$.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

В силу равномерной сходимости $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$. Определим коэффициенты этого ряда. Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n, \quad m=0,1,2,..\\ \pi, & m=n, \quad m,n=1,2,...\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n, \quad m,n=1,2,...\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0, \quad m=0,1,2,..., \quad n=1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул.

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)dx=\pi a_0$$

Такой результат получается в результате того, что $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)dx=0$.

Получаем: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на $\cos nx$ и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_n\cos mx\cos nx+b_n\sin mx\cos nx\right)dx=\pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx; \quad n=1,2,...$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на $\sin nx$ и интегрируем в пределах от -π до π.

Получаем: $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, \quad n=1,2,...$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Замечание 1. Коэффициенты a_0, a_n и b_n могут быть получены для любой функции $f(x)$ определённой и интегрируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, если функция $f(x)$ – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции $f(x)$.

Определение. **Рядом Фурье** для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье, определяемыми по формулам (2). Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ **разлагается в ряд Фурье**.

Замечание 2. Условие равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье функции $f(x)$. Например, ранее было показано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

сходится на всей числовой оси, но не является равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тем не менее, он является рядом Фурье своей суммы.

По сути, условие равномерной сходимости было необходимо для того, чтобы обосновать почленное интегрирование при нахождении коэффициентов a_0, a_n и b_n. Между тем, известно, что любая ограниченная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$, имеющая конечное число точек разрыва первого рода, является интегрируемой на нём. Поэтому, весь промежуток $[-\pi, \pi]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ будет непрерывной, и ряд Фурье будет сходиться на них равномерно. С учётом аддитивности определённого интеграла получим возможность почленного интегрирования на всём промежутке $[-\pi, \pi]$.

Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & f(x) - \textit{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если $f(x)$ – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n = 1,2,...)$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin nxdx = \left\{\begin{matrix} u = x^3; & dv = \sin nxdx; \\ du = 3x^2dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos nxdx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right) = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \sin nxdx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} =$$

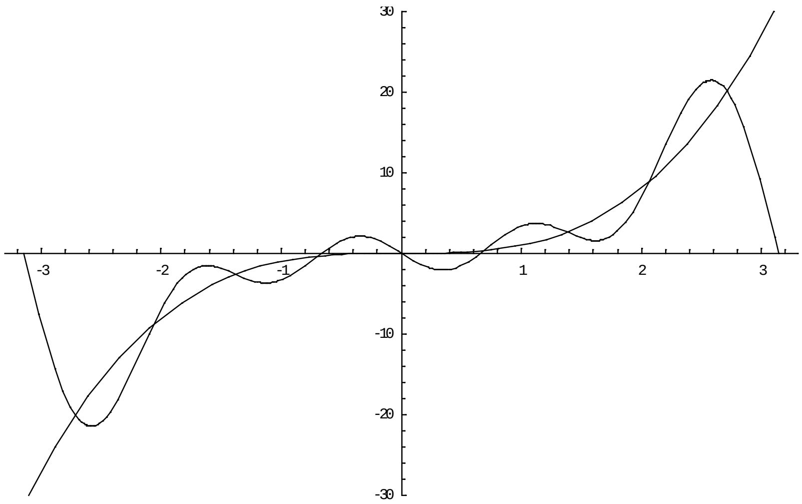
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{6\pi\cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right) = -\frac{2\pi^2\cos \pi n}{n} + \frac{12\cos \pi n}{n^3} = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx .$$

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



<u>Упражнение.</u> Показать, что

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

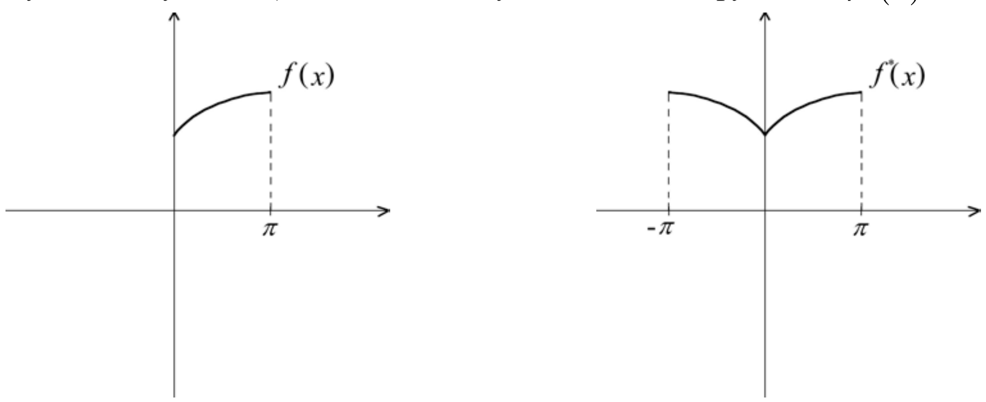
Используя данное упражнение, полагая $x = 0$, найдём, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

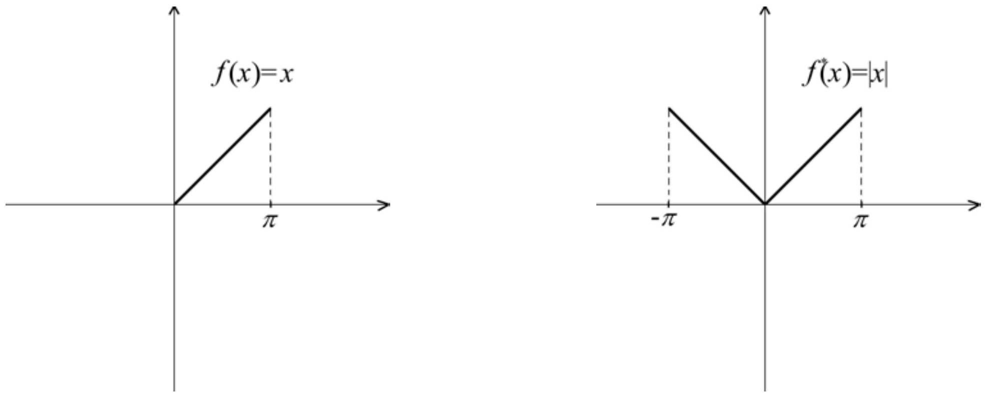
таким образом, ряды Фурье удобно применять к вычислению сумм некоторых числовых рядов.

Обратим внимание на еще один часто встречающийся тип задач. Иногда бывает необходимо разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x)$, заданную в промежутке $(0;\pi)$. Для этого необходимо продолжить функцию $f(x)$ на промежуток $(-\pi;0)$. Это обычно делается двумя способами: чётным и нечётным. В первом случае говорят о разложении функции $f(x)$ **по косинусам кратных дуг**, во втором **по синусам кратных дуг**.

<u>Пример.</u> Разложить функцию $f(x)$ на интервале $(0;\pi)$ по косинусам кратных дуг. В качестве $f(x)$ рассмотрим x. Эту задачу не следует путать с разложением в ряд Фурье функции x на интервале $(0;\pi)$. При таком разложении тригонометрическая система имела бы вид $1, \cos 2nx, \sin 2nx,\ n = 1, 2, \ldots$, и разложение содержало бы как функции $\cos 2nx$, так и функции $\sin 2nx$. Не следует также видеть в этой задаче противоречие с разобранным выше примером. Там ведь функция была задана на $(-\pi;\pi)$, и была нечетной на этом интервале. В рассматриваемом случае мы должны сначала доопределить $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$ (в нашем случае это будет $-x$) так, чтобы получилась <u>четная</u> функция $f^*(x)$.



Разложение $f^*(x)$ содержит только <u>косинусы</u>. Рассматривая это разложение <u>только</u> при $x > 0$, получаем решение исходной задачи. При $f(x) = x$ $f^*(x) = |x|$.



Разложим $|x|$ на $(-\pi;\pi)$. Это – четная функция. $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}xdx=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0,\ n=2k\\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2},n=2k+1\end{cases}.$$

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Поэтому, при $x>0$ получаем искомое разложение x по косинусам кратных дуг.

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},x>0.$$

Пусть $x=0$. Тогда

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Из последнего равенства имеем

$$\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Упражнения.

1) Используя соответствующие разложения в ряды Фурье найти следующие суммы

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ Г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$

2) Используя разложение для функций x^2 и $|x|$ найти разложение $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

3) Разложить функцию $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ в интервале $(0,\pi)$ по синусам кратных дуг.

4) Найти $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

Ряды Фурье для функций любого периода.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ периода $T=2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[-l,l]$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,...$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

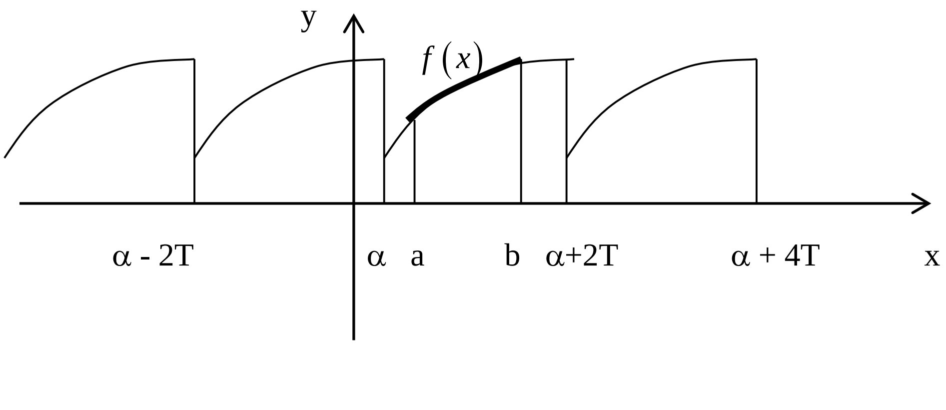
$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...$$

Все приведённые здесь формулы получаются из ранее полученных для отрезка $[-l,l]$, путём замены x на $\pi x/l$.

Разложение в ряд Фурье непериодической функции.

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье, в принципе, не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T\geq|b-a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.



Таким образом, функция $f(x)$ была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a,b]$ совпадает с функцией $f(x)$, т.е. можно считать, что функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[a,b]$.

Таким образом, если функция $f(x)$ задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал $(b, a+2\pi)$ так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Применяя формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

можно записать ряд Фурье данной функции **в комплексной форме**:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(e^{inx}+e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{i}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(e^{inx}+e^{-inx}\right) - ib_n\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\right],$$

Таким образом,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \dfrac{a_n - ib_n}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

Коэффициенты c_n называются **комплексными коэффициентами Фурье.** Они определяются формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если нужно построить разложение функции $f(x)$ определенной на отрезке $[-l, l]$, имеющей произвольный период $2l$, то соответствующее выражение в комплексной форме имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{i\pi nx}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Комплексная форма ряда Фурье алгебраически проще и более симметрична. Поэтому, она часто используется в физике и прикладных расчетах.

Экстремальные свойства коэффициентов ряда Фурье. Неравенство Бесселя.

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a,b]$, тогда величина

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx}$$

называется **средним квадратичным (среднеквадратичным) отклонением** функции $f(x)$ от функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Наряду со среднеквадратичным отклонением мы будем также рассматривать величину $\Delta=(b-a)\delta^2$.

Рассмотрим теперь следующую **задачу:** *Найдём среднеквадратичное отклонение произвольной функции $f(x)$ определённой и интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ от своего тригонометрического полинома на этом промежутке.*

Пусть

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\cos kx+B_k\sin kx\right).$$

тригонометрический полином функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-A_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-$$
$$-2\sum_{k=1}^{n}A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx-2\sum_{k=1}^{n}B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx+\frac{A_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{n}A_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2kxdx+\sum_{k=1}^{n}B_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2kxdx=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi A_0a_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}A_ka_k-2\pi\sum_{k=1}^{n}B_kb_k+\pi\frac{A_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}A_k^2+\pi\sum_{k=1}^{n}B_k^2$$

где a_k и b_k - коэффициенты ряда Фурье.

Выделив в последнем равенстве полные квадраты получим

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{\pi}{2}\left(A_0-a_0\right)^2-\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k-a_k\right)^2-\pi\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(B_k-b_k\right)^2-\pi\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

Перегруппируем слагаемы в последнем равенстве

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)+\frac{\pi}{2}\left(A_0-a_0\right)^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k-a_k\right)^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(B_k-b_k\right)^2$$

Из полученного равенства видно, что *оценка Δ_n достигает минимального значения, тогда и только тогда, когда $A_k=a_k$ и $B_k=b_k$, т.е. тригонометрический ряд является рядом Фурье для функции $f(x)$*. Доказанное таким образом утверждение носит название **теоремы об экстремальных свойствах коэффициентов ряда Фурье.** Итак

$$\overline{\Delta}_n=\min\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\geq 0 \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия, которые можно получить из доказанной теоремы.

<u>Следствие 1</u> (Предварительное неравенство Бесселя). *Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и a_k и b_k - коэффициенты ряда Фурье, Тогда*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\left(x\right)dx \qquad (2)$$

<u>**Следствие 2.**</u> *Ряд, составленный из квадратов коэффициентов ряда Фурье, сходится.*

<u>**Доказательство.**</u> Из неравенства (2) следует, что последовательность частичных сумм ограничена сверху. Кроме того, так как члены ряда неотрицательны, то последовательность частичных сумм монотонно возрастает и, следовательно, по теореме Вейерштрасса имеет предел. Таким образом, ряд сходится.

<u>**Замечание.**</u> Существуют сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье. Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси (по признаку Дирихле). Тем не менее, не существует функции определенной и интегрируемой на отрезке $\left[-\pi,\pi\right]$, для которой этот ряд был бы рядом Фурье. В самом деле, если бы такая функция существовала, то для неё

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Но тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

а этот ряд расходится, и поэтому в силу следствия 2 не может являться рядом Фурье.

<u>**Следствие 3**</u> **(Неравенство Бесселя)**. *Пусть функция* $f\left(x\right)$ *определена и интегрируема на отрезке* $\left[-\pi,\pi\right]$ *и* a_k *и* b_k *- коэффициенты ряда Фурье, Тогда*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\left(x\right)dx$$

<u>**Доказательство.**</u> Для доказательства надо воспользоваться неравенством (2) и перейти к пределу при $n\to\infty$. Возможность этого перехода даётся **следствием 2**.

<u>**Следствие 4.**</u> **(Лемма Римана)**. *Пусть функция* $f\left(x\right)$ *определена и интегрируема на отрезке* $\left[-\pi,\pi\right]$, *тогда её коэффициенты Фурье стремятся к нулю при* $n\to\infty$

<u>**Доказательство.**</u> С учётом **следствия 2** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

сходится. Поэтому $a_n^2+b_n^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. С учётом неравенств

$$0\le a_n\le a_n^2+b_n^2,\quad 0\le b_n\le a_n^2+b_n^2$$

получаем, что $a_n,b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Интеграл Дирихле. Локальная сходимость рядов Фурье.

Рассмотрим последовательность частичных сумм

$$D_n\left(x\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx \qquad (1)$$

Домножим и поделим правую часть равенства на $2\sin x/2$ получим

$$D_n\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin x/2}{2\sin x/2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(2n+1\right)x/2-\sin x/2}{2\sin x/2}=\frac{\sin\left(n+1/2\right)x}{2\sin x/2}$$

Очевидно, что функции $D_n\left(x\right)$ обладают следующими свойствами:

1) $D_n(x)$ - чётные функции

2) 2π- периодичные

3) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}dx = \frac{1}{2}$ (Для получения этого результата надо проинтегрировать равенство (1) от 0 до π)

Пусть теперь функция $f(x)$ определена и интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$ и a_n и b_n - коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

Сопоставим этому ряду частичную сумму

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0)$$

где x_0 - некоторая точка отрезка $[-\pi,\pi]$.

Воспользовавшись формулами для коэффициентов a_k и b_k вычислим $S_n(x_0)$. Имеем

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx\cos kx_0 + \sin kx\sin kx_0)\,f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(x-x_0)\,f(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k(x-x_0)\right]f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)(x-x_0)]}{2\sin(x-x_0)/2}f(x)\,dx$$

Таким образом, получили

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)(x-x_0)]}{2\sin(x-x_0)/2}f(x)\,dx \qquad (3)$$

<u>Определение.</u> Интеграл, стоящий в правой части формулы (3) называется **интегралом Дирихле**.

Преобразуем теперь интеграл Дирихле для 2π - периодичной функции $f(x)$. В этом случае

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)(x-x_0)]}{2\sin(x-x_0)/2}f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0}\frac{\sin[(n+1/2)(x-x_0)]}{2\sin(x-x_0)/2}f(x)\,dx = \{t = x-x_0\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}f(x_0+t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}f(x_0+t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}f(x_0+t)\,dt =$$
$$= \{t=-y\} = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\frac{\sin[(n+1/2)y]}{2\sin y/2}f(x_0-y)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}f(x_0+t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}\left[f(x_0-t) + f(x_0+t)\right]dt$$

Таким образом, в случае 2π - периодичной функции $f(x)$ интеграл Дирихле имеет вид

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\sin t/2}\left[f(x_0-t) + f(x_0+t)\right]dt$$

<u>Лемма Римана.</u> *Если функция $g(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[0,a]$, то*

$$\int_0^a g(x)\sin\omega x\,dx \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^a \sin\omega x dx = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^a = \frac{1}{\omega}\xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$

Далее, если функция $g(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[0,a]$, то она ограничена на отрезке $[0,a]$, следовательно, достигает на нём наибольшего и наименьшего значения, поэтому

$$\left|\int_0^a g(x)\sin\omega x dx\right| \le \left|\max_{[0,a]}\{g(x)\}\right|\left|\int_0^a \sin\omega x dx\right| = \frac{C}{\omega}\xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$

где $C = \left|\max_{[0,a]}\{g(x)\}\right|$.

Теорема. (Теорема Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *имеет период* 2π,

2) кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$,

3) $\exists f'_-(x_0),\ f'_+(x_0)$

Тогда, ряд Фурье для функции $f(x)$ *сходится при всех значениях* x_0, *причем его сумма в точке* x_0 *равна* $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, *т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа.*

Замечание. Условия 2) и 3) иногда формулируют в виде **условий Дирихле** или **условий Гельдера** (см. тему «Интеграл Фурье»), а именно: говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет **условию Гельдера** если существуют односторонние конечные пределы $f(x_0\pm 0)$ и числа $\delta>0$ и $\alpha\in(0,1]$ и $c_0>0$, что для всех $\theta\in(0,\delta)$ выполнены неравенства

$$\left|f(x_0\pm\theta)-f(x_0\pm 0)\right|\le c_0\theta^\alpha$$

где число α называется **показателем Гельдера**.

Функция удовлетворяет **условиям Дирихле** на отрезке $[-\pi,\pi]$, если она кусочно-непрерывна на этом отрезке и отрезок $[-\pi,\pi]$ можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых она монотонна.

Доказательство теоремы. Пусть

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n\left(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0\right)$$

Оценим разность

$$S_n(x_0)-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[(n+1/2)t\right]}{2\sin t/2}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[(n+1/2)t\right]}{2\sin t/2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]dt =$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[(n+1/2)t\right]}{2\sin t/2}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[(n+1/2)t\right]}{2\sin t/2}\left[f(x_0-t)-f(x_0-0)\right]dt =$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{2\sin t/2}$$

Найдём её предел при $t\to 0$. Имеем

$$\lim_{t\to 0}\phi(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{2\sin t/2}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]t}{t\cdot 2\sin t/2}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]}{t}=f'_+(x_0)$$

Тогда $\phi(t)$ является кусочно-непрерывной на $[0,\pi]$ и поэтому интегрируемой. Следовательно, по лемме Римана

$$\int_0^{\pi}\sin\left[(n+1/2)t\right]\phi(t)\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Точно также второй интеграл стремится к нулю. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *кусочно-непрерывна на отрезке* $[-\pi,\pi]$,
2) $\tilde{f}(x)$ - 2π- *периодическое продолжение функции* $f(x)$
3) $\exists\tilde{f}'_-(x_0),\ \tilde{f}'_+(x_0)\ \ \forall x_0\in(-\infty,\infty)$

Тогда, ряд Фурье для функции $f(x)$ *на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *сходится при всех значениях* x_0*, причем его сумма в точке* x_0 *равна* $\dfrac{\tilde{f}(x_0-0)+\tilde{f}(x_0+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа.*

<u>Замечание</u>. *Если дополнительно потребовать, чтобы функция* $f(-\pi)=f(\pi)$*, то ряд Фурье функции* $f(x)$ *будет сходиться на всей числовой оси и при этом*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\tilde{f}(x)\quad\forall x\in(-\infty,\infty):$$
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)\quad\forall x\in[-\pi,\pi]$$

Почленное дифференцирование рядов Фурье. Равномерная сходимость рядов Фурье.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется **кусочно-непрерывной** на отрезке $[a,b]$, если существует конечное разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ для которого выполнены следующие условия:

1) $f(x)\in C_{(x_i,x_{i+1})},\quad i=\overline{0,n-1}$
2) Существуют соответствующие односторонние пределы
$$f(x_i+0)=\lim_{x\to x_i+0}f(x)$$
$$f(x_{i+1}-0)=\lim_{x\to x_{i+1}-0}f(x)$$
$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$
$$f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x)$$

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется **кусочно-непрерывно дифференцируемой (кусочно-гладкой)** на отрезке $[a,b]$, если её производная кусочно-непрерывна на $[a,b]$

<u>Теорема</u> (о почленном дифференцировании рядов Фурье). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$,

2) $f(-\pi) = f(\pi)$,

3) $f(x)$ *- кусочно-гладкая на отрезке* $[-\pi, \pi]$

Тогда, ряд Фурье для производной функции $f(x)$ *может быть получен путём почленного дифференцирования ряда Фурье самой функции* $f(x)$*, т.е., если в условиях теоремы*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

то

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx). \quad (1)$$

<u>Доказательство.</u> Из условия теоремы и определения кусочно-гладкой функции следует, что $f'(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть её ряд Фурье имеет вид

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Найдём коэффициенты этого ряда.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi} f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n$$

Таким образом, формула (1) доказана.

Рассмотрим несколько важных следствий из этой теоремы

<u>Следствие 1</u> (об оценки коэффициентов ряда Фурье для кусочно-гладкой функции). *Для коэффициентов ряда Фурье кусочно-гладкой функции удовлетворяющей условиям теоремы имеют место следующие неравенства*

$$|a_n| \le \frac{\gamma_n}{n}, \quad |b_n| \le \frac{\gamma_n}{n} \qquad (2)$$

где величины γ_n *удовлетворяют условию, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ *сходится.*

В частности, имеют место следующие порядковые оценки

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

<u>Доказательство.</u> Обозначим через α_n и β_n коэффициенты ряда Фурье для $f'(x)$. Тогда из **следствия 2** предыдущего параграфа следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)$$

сходится. Обозначим через $\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ сходится. С другой стороны из доказанной теоремы следует, что

$$|a_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \le \frac{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}{n} = \frac{\gamma_n}{n},$$
$$|b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \le \frac{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}{n} = \frac{\gamma_n}{n}.$$

Следствие 2 (Об абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Фурье). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда, числовой ряд, составленный из коэффициентов ряда Фурье для функции $f(x)$, сходится абсолютно.*

Доказательство. Из формул (2), а также из неравенства

$$2ab \le a^2 + b^2$$

имеем следующие оценки для коэффициентов ряда Фурье

$$|a_n| \le \frac{\gamma_n}{n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \gamma_n^2\right),$$
$$|b_n| \le \frac{\gamma_n}{n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \gamma_n^2\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \gamma_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2$$

является сходящимся, поэтому ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$$

тоже сходятся. Это означает, что в свою очередь сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big||a_n| + |b_n|\big|$$

Таким образом, доказано, что ряд, составленный из коэффициентов ряда Фурье, сходится абсолютно.

Следствие 3 (Лемма о равномерной сходимости ряда Фурье). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда, ряд Фурье сходится равномерно на всей числовой оси*

Доказательство. Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (3)$$

Тогда $|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|$. Согласно следствию 2 ряд из членов $|a_n| + |b_n|$ сходится, следовательно по признаку Вейерштрасса ряд (3) сходится равномерно.

Покажем теперь, что ряд Фурье сходится равномерно к самой функции $f(x)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда, ряд Фурье функции $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$ сходится равномерно к ней самой.*

Доказательство. Равномерная сходимость имеет место на основании следствия 3. Сходимость к $f(x)$ следует из теоремы Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье.

Почленное интегрирование рядов Фурье.

Теорема 1. (о почленном интегрировании рядов Фурье). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f(x)\in C_{[-\pi,\pi]}$,

2) $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

Тогда,

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n}{n}\left(1-\cos nx\right)\right] \qquad (1)$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int\limits_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt \qquad (2)$$

Она удовлетворяет условиям теоремы о почленном дифференцировании, т.е.:

1) $F(x)\in C^1_{[-\pi,\pi]}$ - как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции

2) $F(-\pi)=F(\pi)$. В самом деле

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int\limits_0^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt-\int\limits_0^{-\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)dt=0$$

Пусть теперь

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right) \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2) получим

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt-\frac{a_0x}{2}=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right)$$

Откуда следует, что

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{a_0x}{2}+\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right) \qquad (4)$$

Вычислим коэффициенты A_n и B_n.При $x=0$ имеем

$$F(0)=0=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \quad\Rightarrow\quad \frac{A_0}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n$$

Далее

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)\,d\sin nx=\frac{1}{n\pi}F(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n}$$

$$\frac{A_0}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)\,d\cos nx=-\frac{1}{n\pi}F(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[F(\pi)-F(-\pi)\right](-1)^n+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{a_n}{n}-\frac{a_0}{2n^2\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{a_n}{n}$$

Подставляя найденные коэффициенты в равенство (4) находим окончательно

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}(1-\cos nx) + \frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^x\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^x \frac{a_0}{2}\,dt\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0 x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]dx$$

Таким образом, *если* $f(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$, *и* a_n *и* b_n *- коэффициенты ряда Фурье функции* $f(x)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]dx \quad (5)$$

Замечание 2. Формула почленного интегрирования может применяться даже в случае, если ряд Фурье расходится.

Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Равенство Парсеваля.

Определение. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$, называются **ортогональными** на этом отрезке, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0$$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0; \qquad i \ne j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

Определение. Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases}0, & i \ne j\\ 1, & i = j\end{cases}$$

Определение. Рядом Фурье по ортогональной системе функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx},$$

где $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке $[a,b]$ ряда по ортогональной системе функций. $f(x)$ – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[a,b]$.

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются:

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

Тригонометрические ряды Фурье. Пусть отрезок имеет длину $2l$. Для определенности, пусть это отрезок $[-l;l]$. Рассмотрим следующую систему функций: $1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\dots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\dots$.

Теорема. Рассматриваемая система функций является ортогональной.

Доказательство. Требуется доказать, что при $n\neq m,\ n,m=0,1,\dots$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}dx=0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}=0$$

и что при всех n,m: $n=0,1,\dots;\ m=1,2,\dots$ $\int_{-l}^{l}\frac{\cos n\pi x}{l}\cdot\frac{\sin m\pi x}{l}dx=0$

Проверим первое из этих равенств. Остальные получаются совершенно аналогично.

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{l}(m+n)\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{l}(m-n)\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{\pi(m+n)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}(m+n)\right)\right)\Bigg|_{-l}^{l}+\left(\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}(m-n)\right)\right)\Bigg|_{-l}^{l}\right)=0$$

т.к. $\sin\pi k=0$ при $k\in\mathbf{Z}$. Теорема доказана.

Определение. Система функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ является **полной** на отрезке $[a,b]$ если она является ортогональной и не существует ненулевой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ такой, что

$$(\varphi_j,f)=\int_a^b\varphi_j(x)f(x)\,dx=0$$

Теорема (о полноте тригонометрической системы). *Пусть*

1) $f(x)\in C_{[-\pi,\pi]}$, *и* a_n *и* b_n *- коэффициенты ряда Фурье функции* $f(x)$

2) $a_n=b_n=0$

Тогда $f(x)\equiv 0\quad\forall x\in[-\pi,\pi]$, *т.е. кроме тождественного нуля не существует функций непрерывных на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *ортогональных ко всем функциям тригонометрической системы. Т.е. тригонометрическая система является полной*

Доказательство. Воспользуемся теоремой о почленном интегрировании рядов Фурье.

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}(1-\cos nx)+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)\equiv 0\quad\forall x\in[-\pi,\pi].$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, следовательно $f(x)\equiv 0$.

Замечание. В классе разрывных функций это свойство не выполняется. В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

Можно показать, что все коэффициенты Фурье в её разложении равны нулю.

Рассмотрим теперь основные свойства, следующие из полноты тригонометрической системы

Теорема 1. *Пусть*

1) $f(x), g(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$

2) Соответствующие коэффициенты в разложении этих функций равны между собой

Тогда $f(x) \equiv g(x)$ *на отрезке* $[-\pi,\pi]$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и её коэффициенты Фурье равны нулю. Следовательно, $\phi(x) \equiv 0$ откуда $f(x) \equiv g(x)$, что и требовалось доказать.

Как было ранее показано, если $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и a_n и b_n - коэффициенты её ряда Фурье, то имеет место неравенство Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Оказывается, при тех же условиях имеет место точное равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \qquad (1)$$

которое называется **равенством Парсеваля**.

Для упрощения доказательства наложим на функцию $f(x)$ некоторые дополнительные условия.

Теорема 2 (Равенство Парсеваля). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$,

2) $f(-\pi) = f(\pi)$,

3) $f(x)$ *- кусочно-гладкая на отрезке* $[-\pi,\pi]$

Тогда справедливо равенство Парсеваля (1).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что ряд Фурье сходится равномерно к функции $f(x)$ (см. теорему о равномерной сходимости ряда Фурье). Таким образом, любая частичная сумма

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

сходится равномерно к функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Но тогда $S_n^2(x) \overset{\to}{\underset{\to}{}} f^2(x)$ и по теореме о почленном интегрировании функциональной последовательности

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \text{ на отрезке } [-\pi,\pi]. \qquad (2)$$

Рассмотрим интеграл стоящий слева

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)\right]^2 dx = \left\{\begin{matrix}\textit{в силу ортогональности}\\ \textit{тригонометрической системы}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx\right] = \frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) =$$

$$= \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

Из формулы (2) следует, что

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]\xrightarrow{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Следовательно, имеет место равенство (1), что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим разложение в ряд Фурье для функции $f(x)=x^2$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}\cos nx \quad \forall x\in[-\pi,\pi]$$

Здесь

$$a_0=\frac{2\pi^4}{3},\quad a_n=\frac{4(-1)^2}{n^2},\quad b_n=0$$

В соответствии с равенством Парсеваля имеем

$$\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left.\frac{x^5}{40\pi}\right|_0^{\pi}-\frac{\pi^4}{72}=\frac{\pi^4}{90}$$

Итак, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Упражнение. Найти $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$

Интеграл Фурье

Определение интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$, где l – любое число, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье (т.е. функция $f(x)$ кусочно-непрерывная, периодическая и т.д.) и кроме того, $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty \quad (1)$$

Тогда функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,...$$

Если подставить коэффициенты в формулу для $f(x)$, получим:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi nx}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt+\sin\frac{\pi nx}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt\right)=$$
$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n(t-x)}{l}dt$$

Переходя к пределу при $l\to\infty$, в силу формулы (1) получаем, что $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt=0$ и

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n(t-x)}{l}dt$$

Обозначим $\omega_n=\frac{\pi n}{l}$; $\Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}$; $\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega_n}{\pi}$;

При $l\to\infty,\Delta u_n\to 0$.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\omega_n(t-x)\right]dt$$

Сумма, стоящая в правой части, является интегральной суммой для функции

$$\varphi(\omega)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt$$

Поэтому, если предел суммы, стоящий в правой части, существует, то он равен интегралу

$$\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt \quad (2)$$

Тогда $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt$ - **двойной интеграл Фурье.**

Окончательно получаем:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[a(\omega)\cos(\omega x)+b(\omega)\sin(\omega x)\right]du,$$
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt. \tag{3}$$

- представление функции $f(x)$ **интегралом Фурье**.

Приведённые выкладки дают лишь формальное представление функции в виде интеграла Фурье. Очевидно, что для интеграла Фурье так же, как и для ряда Фурье необходимо знать ответы на следующие вопросы:

1) При каких условиях интеграл (2) (или (3)) сходится,
2) Если интеграл (2) сходится, то как его величина связана с функцией $f(x)$.

Этим вопросам и будут посвящены последующие параграфы.

Условия Гельдера. Представление функции интегралом Фурье.*

Определение. Функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет **условию Гельдера** если существуют односторонние конечные пределы $f(x_0 \pm 0)$ и числа $\delta>0$ и $\alpha\in(0,1]$ и $c_0>0$, что для всех $\theta\in(0,\delta)$ выполнены неравенства

$$\left|f(x_0\pm\theta)-f(x_0\pm 0)\right|\le c_0\theta^{\alpha} \tag{1}$$

где число α называется **показателем Гельдера**.

Замечание. Из данного определения следует, что функция $f(x)$, удовлетворяющая в точке x_0 условию Гельдера, может иметь в этой точке разрыв первого рода.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то она удовлетворяет условию Гельдера в этой точке с показателем $\alpha=1$.*

Доказательство. Очевидно, что односторонние производные можно записать в виде

$$f'_+(x)=\lim_{\theta\to 0}\varphi(\theta)=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(x_0+\theta)-f(x_0+0)}{\theta},$$
$$f'_-(x)=\lim_{\theta\to 0}\psi(\theta)=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(x_0-\theta)-f(x_0-0)}{-\theta}.$$

В силу условий теоремы эти пределы существуют, следовательно, на некотором интервале $(0,\delta)$ функции φ и ψ ограничены, т.е. существует число $c_0>0$ такое, что

$$\frac{f(x_0+\theta)-f(x_0+0)}{\theta}\le c_0,\quad \frac{f(x_0-\theta)-f(x_0-0)}{-\theta}\le c_0$$

А это и означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гельдера с показателем $\alpha=1$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную. То она в этой точке удовлетворяет условию Гельдера.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $y=|x|^{\alpha}$ при $0<\alpha<1$ удовлетворяет условию Гельдера в точке $x_0=0$, но не является дифференцируемой в этой точке

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(0,a)$ и удовлетворяет условию Гельдера в точке $x=0$, то справедливо равенство*

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(+0) \tag{2}$$

Доказательство. Так как функция удовлетворяет в точке $x=0$ условиям Гельдера, то существуют числа $\delta>0$ и $\alpha\in(0,1]$ и $c_0>0$, что для всех $x\in(0,\delta)$ выполнены неравенства

$$\left|f(x)-f(+0)\right|\le c_0x^\alpha \qquad (3)$$

Разобьём интервал $(0,a)$ на интервалы $(0,\delta)$ и (δ,a). Тогда

$$\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=\int_0^\delta\left(f(x)-f(+0)\right)\frac{\sin\omega x}{x}dx+f(+0)\int_0^\delta\frac{\sin\omega x}{x}dx+\int_\delta^a f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx$$

Функция $\left(f(x)-f(+0)\right)/x$ в силу (3) является абсолютно интегрируемой на интервале $(0,\delta)$, а функция $f(x)/x$ абсолютно интегрируема на интервале (δ,a). На основании леммы Римана 1-й и 3-й интегралы стремятся к нулю при $\omega\to+\infty$. Второй интеграл стремиться к $f(+0)\pi/2$. (См. следствие из примера вычисления интеграла Эйлера-Дирихле). Таким образом формула (2) доказана.

Лемма 3. *Если функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на интервале* $(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию Гельдера в точке* x_0*, то справедливо равенство*

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\omega(x_0-t)}{x_0-t}dt=\frac{\pi}{2}\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right] \quad (4)$$

Доказательство. Разобьём промежуток интегрирования $(-\infty,\infty)$ на интервалы $(-\infty,x_0)$ и (x_0,∞). В первом интеграле сделаем замену $x_0-t=\tau$, а во втором $t-x_0=\phi$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\omega(x_0-t)}{x_0-t}dt=\int_{-\infty}^{x_0} f(t)\frac{\sin\omega(x_0-t)}{x_0-t}dt+\int_{x_0}^{\infty} f(t)\frac{\sin\omega(x_0-t)}{x_0-t}dt=$$

$$=-\int_{\infty}^{0} f(x_0-\tau)\frac{\sin\omega\tau}{\tau}dt+\int_0^{\infty} f(x_0+\varphi)\frac{\sin\omega\varphi}{\varphi}dt=\int_0^{\infty}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\frac{\sin\omega t}{t}dt$$

Применяя теперь к последнему интегралу Лемму 2, получим формулу (4).

Теперь перейдём к доказательству основных теорем о представлении функции интегралом Фурье.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на интервале* $(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию Гельдера в точке* x_0*, то справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt \qquad (5)$$

Если же функция $f(x)$ *ещё и непрерывна в точке* x_0*, то*

$$f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt \qquad (6)$$

Доказательство. Интеграл, стоящий в левой части формулы (4) можно записать так

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\omega(x_0-t)}{x_0-t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_0^{\omega}f(t)\cos\left[u(x_0-t)\right]du=\int_0^{\omega}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[u(x_0-t)\right]dt$$

Переходя теперь к пределу при $\omega\to+\infty$ с учётом Леммы 3 получим

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[u(t-x)\right]dt$$

Учитывая также чётность подынтегральной функции по переменной u, получаем после замены переменной u на ω формулу (5).

Очевидно, что если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]=f(x)$$

и таким образом, верна формула (6).

Замечание 1. При доказательстве теоремы не обоснована законность перестановки порядка интегрирования. Отметим, однако, что для непрерывных функций такая возможность даётся теоремой об интегрировании по параметру интеграла, зависящего от параметра.

Замечание 2. Так как непрерывная, абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, имеющая в каждой точке или конечную производную или односторонние производные, удовлетворяет условию Гельдера, то она представима на всей числовой оси интегралом Фурье

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[a(\omega)\cos(\omega x)+b(\omega)\sin(\omega x)\right]d\omega \qquad (7)$$

где

$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)dt,\ \ b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)dt \qquad (8)$$

Пример. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=e^{-|x|}$.

Решение. Эта функция непрерывна, абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$ имеет непрерывные производные всюду кроме $x=0$, а в точке $x=0$ имеет конечные односторонние производные. Таким образом условия Замечания 2 выполнены. Имеем

$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\cos(\omega t)dt=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2},\ \ b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\sin(\omega t)dt=0.$$

$$e^{-|x|}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}d\omega.$$

Комплексная форма интеграла Фурье

Как было установлено в предыдущем параграфе если $f(x)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, имеющая в каждой точке или конечную производную или односторонние производные, удовлетворяет условию Гельдера, то она представима на всей числовой оси интегралом Фурье

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left[\omega(t-x)\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[a(\omega)\cos(\omega x)+b(\omega)\sin(\omega x)\right]d\omega \qquad (1)$$

где

$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)dt,\ \ b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)dt \qquad (2)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. Если $f(x)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, то функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ определённые равенствами (2) являются непрерывными на $(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Докажем непрерывность $a(\omega)$. Непрерывность $b(\omega)$ доказывается аналогично. Из формул (2) следует, что

$$\Delta a(\omega)=\left|a(\omega+\Delta\omega)-a(\omega)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\cos(\omega+\Delta\omega)t-\cos(\omega)t\right]dt\le\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt$$

В силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ разобьём интервал $(-\infty,\infty)$ на три части $(-\infty,-\delta)$, $(-\delta,\delta)$ и (δ,∞) так чтобы на бесконечных интервалах интегралы от функции $\left|f(x)\right|$ не превышали $\varepsilon/3$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt=\int\limits_{-\infty}^{\delta}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt+\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt+\int\limits_{\delta}^{\infty}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt\le$$
$$\le\frac{2\varepsilon}{3}+\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt.$$

Для оставшегося интеграла справедлива оценка

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|f(t)\right|\sin\frac{t\Delta\omega}{2}dt\le 2\delta\left|\Delta\omega\right|\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|f(t)\right|dt$$

Тогда при $\left|\Delta\omega\right|<\delta$ второй интеграл также будет меньше $\varepsilon/3$. Таким образом $\Delta a(\omega)<\varepsilon/\pi<\varepsilon$, что и означает непрерывность $a(\omega)$.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл

$$K(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\left[\omega(x-t)\right]dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\sin(\omega x)\cos(\omega t)-\cos(\omega x)\sin(\omega t)\right]dt=$$
$$=2\pi\left[a(\omega)\sin(\omega x)-b(\omega)\cos(\omega x)\right].$$

В силу только что доказанной леммы эта функция непрерывна на $(-\infty,\infty)$. С учётом формул (2) можно сказать, что эта функция нечётна, поэтому

$$v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\omega)d\omega=v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\left[\omega(x-t)\right]dt=0. \qquad (3)$$

<u>Теорема.</u> *Если для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ справедливо представление (1), то справедливы и следующие представления*

$$f(x)=v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \quad (4)$$

$$f(x)=v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt \quad (5)$$

$$f(x)=v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt=v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(x-t)}dt \qquad (6)$$

<u>Доказательство.</u> Формулу (4) можно получить если умножить равенство (3) на мнимую единицу и сложить с равенством (1). В этом случае

$$\cos\left[\omega(x-t)\right]+i\sin\left[\omega(x-t)\right]=e^{i\omega(x-t)}=e^{i\omega x}e^{-i\omega t}$$

Для получения равенства (5) необходимо равенство (3) умножить на $-i$ и сложить с (1). Равенства (6) являются одной из форм записи равенств (4) и (5).

Интеграл, стоящий в правой части формулы (4) называется **интегралом Фурье для функции $f(x)$ в комплексной форме**.

Преобразование Фурье.

<u>Определение.</u> Если $f(x)$ – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(\omega)=v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (1)$$

называется **преобразованием Фурье** функции $f(x)$ или **образом Фурье** функции $f(x)$**.** В этом смысле сама функция $f(x)$ называется **прообразом или оригиналом**.

Функция $F(\omega)$ называется также **спектральной характеристикой функции $f(x)$.**

Если $f(x)$ – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad (2)$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье.**

Примечание. В дальнейшем будем знак главного значения при записи опускать, а сами интегралы в прямом и обратном преобразованиях Фурье будем понимать в смысле главного значения.

Интегралы

$$F^{c}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx \quad \text{и} \quad F^{s}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin(\omega x)dx$$

называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.

Пример. Найдём синус и косину преобразования функции e^{-ax}

Решение.

$$F^{c}(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos(\omega x)dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+\omega^2}\left(\omega\sin(\omega x)-a\cos(\omega x)\right)\Big|_{0}^{\infty}=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$F^{s}(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\sin(\omega x)dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+\omega^2}\left(-a\sin(\omega x)-\omega\cos(\omega x)\right)\Big|_{0}^{\infty}=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Пример. Найдём преобразование Фурье функции $e^{-|ax|}$.

Решение.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|ax|}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{|a|x}e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-|a|x}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{(|a|-i\omega)x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-(|a|+i\omega)x}dx=$$

$$=\frac{1}{|a|-i\omega}e^{(|a|-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{|a|+i\omega}e^{-(|a|+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{|a|-i\omega}+\frac{1}{|a|+i\omega}=\frac{2|a|}{a^2+\omega^2}.$$

Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье

1) **Лемма.** *Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции есть ограниченная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$F(\omega)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left|e^{-i\omega x}\right|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=C_0$$

Таким образом, ограниченность доказана. Докажем теперь непрерывность. С этой целью запишем $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx-i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\omega x)dx=a(\omega)-ib(\omega).$$

В силу непрерывности функций $a(\omega)$ и $b(\omega)$ получаем непрерывность функции $F(\omega)$. Что и требовалось доказать.

Примечание. Выражения, стоящие в правых частях равенств

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

являются **линейными операторами**, т.е. отображениями некоторого пространства непрерывных функций на пространство непрерывных функций. Линейность отображения следует из линейности интегралов, а непрерывность $F(\omega)$ из доказанной леммы. В дальнейшем пригодится операторная форма записи преобразований Фурье

$$F(\omega)=\Phi[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$f(x)=\Phi^{-1}[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

где Φ и Φ^{-1} вышеназванные операторы прямого и обратного преобразования Фурье.

2) **Теорема 1.** *Если функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$ *и в каждой точке имеет производную, то справедливы формулы обращения*

$$\Phi^{-1}\left[\Phi[f]\right]=f,\quad \Phi\left[\Phi^{-1}[f]\right]=f \qquad (1)$$

Доказательство. Формулы (1) есть не что иное, как операторная форма записи формул (4) и (5) из параграфа «комплексная форма записи интеграла Фурье».

3) **Теорема 2. (Преобразование Фурье производной).** *Пусть выполнены следующие условия:*

А) Функция $f(x)$ *непрерывна и абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$*, а также является кусочно-гладкой на любом отрезке* $[a,b]$

Б) Функция $f'(x)$ *абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$

Тогда

$$\Phi[f']=i\omega\Phi[f] \qquad (2)$$

Доказательство. Для функции $f(x)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница.

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$$

В силу абсолютной интегрируемости производной имеем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(0)+\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)dt=A$$

Если $A>0$, то найдётся число $a\in\Re$, такое, что при $x>a$ будет справедливо неравенство $f(x)>A/2$. Откуда следует, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

является расходящимся (по первой теореме сравнения).

К аналогичным выводам приходим, если $A<0$. Таким образом $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Теперь, применяя интегрирование по частям, получаем

$$\Phi[f']=\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx=f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=i\omega\Phi[f].$$

Применяя метод математической индукции можно доказать следующее следствие

<u>Следствие.</u> *Если функция* $f(x) \in C^n(\mathbb{R})$ *и все производные* $f^{(k)}(x)$, $k = \overline{1,n}$ *включая саму функцию* $f(x)$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то*

$$\Phi\left[f^{(k)}\right] = (i\omega)^k \Phi[f] \quad (3)$$

4) **<u>Теорема 3.</u> (Дифференцирование преобразования Фурье).** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$, *а функции* $f(x)$ *и* $xf(x)$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то функция* $F(\omega) = \Phi[f]$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *непрерывную производную, причём*

$$F'(\omega) = \frac{d}{d\omega}(\Phi[f]) = \Phi[(-ix) f(x)] \quad (4)$$

<u>Доказательство.</u> Без доказательства

5) **<u>Следствие.</u>** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$, *а функции* $f(x)$, $xf(x), \ldots, x^n f(x)$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то функция* $F(\omega) = \Phi[f]$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *непрерывную* n *- ю производную, причём*

$$F^{(k)}(\omega) = \Phi\left[(-ix)^n f(x)\right] \quad (5)$$

Рассмотрим в заключение несколько примеров.

<u>Пример 1.</u> Найдём преобразование Фурье функции $e^{-x^2/2}$.

<u>Решение.</u> Имеем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} dx$$

Действуя также, как и при вычислении Эйлера-Пуассона, продифференцируем по параметру данное равенство

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} dx = i\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega - x + i\omega) e^{-\left(x^2/2 + i\omega x\right)} dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-\left(x^2/2 + i\omega x\right)} dx -$$

$$-\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2/2 + i\omega x\right)} dx = ie^{-\left(x^2/2 + i\omega x\right)}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \omega F(\omega) = -\omega F(\omega).$$

В результате, получили дифференциальное уравнение

$$F'(\omega) = -\omega F(\omega)$$

Это уравнение решается с помощью разделения переменных

$$\frac{dF}{F} = -\omega d\omega \;\Rightarrow\; \ln F = -\frac{\omega^2}{2} + \ln C \;\Rightarrow\; F = Ce^{-\omega^2/2}$$

Для нахождения константы C воспользуемся интегралом Эйлера-Пуассона

$$C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Phi\left[e^{-x^2/2}\right] = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$