1. Двойной интеграл в декартовых координатах и методы его вычисления.

Пусть *D* - плоская область. Назовем ее <u>правильной</u> в направлении *ОХ (ОУ),* если любая прямая параллельная оси *ОХ(ОУ)* пересекает границы области *D* не более двух раз.

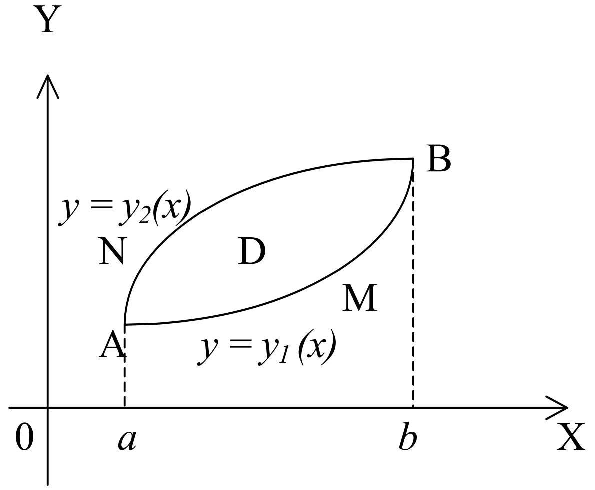


Рис.1

Пусть D – область правильная в направлении *OY* (см.рис.1), $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – уравнения нижней (AMB) и верхней (ANB) линии границы области D, $x \in [a,b]$. В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

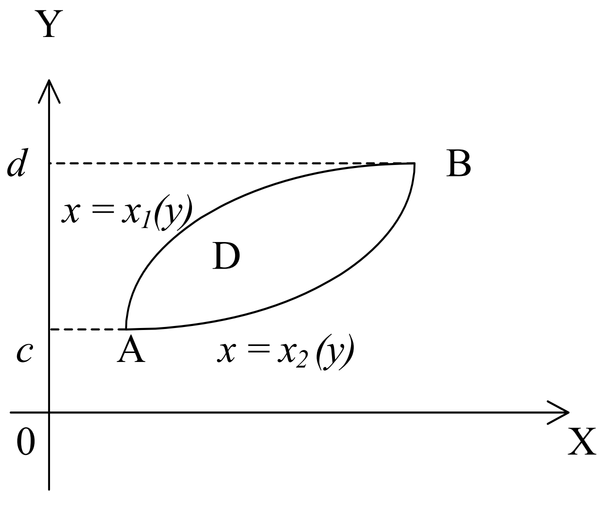


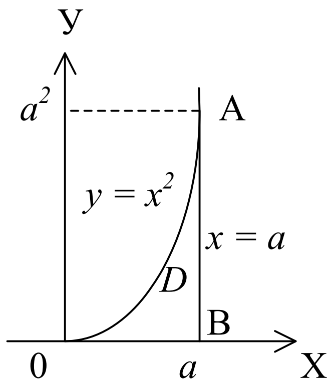
Рис.2

Аналогично, если область *D* – правильная в направлении оси *OX* (см.рис.2), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Пример 1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$ если область D ограничена линиями $y=x^2, x=a, y=0 (a>0)$.

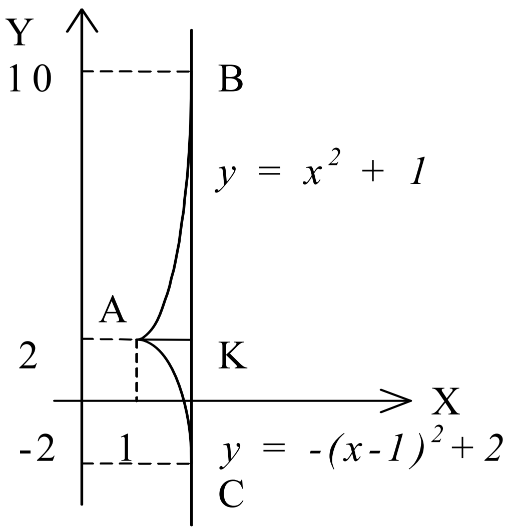
Решение. Построим область D.



Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^{a^2} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)dx$.

Пример 2. Изменить пределы интегрирования в интеграле $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{-(x-1)^2+2}^{x^2+1} f(x,y)dy.$

Решение. Проведем прямые $x = 1, x = 3$ и кривые $y_1 = -(x - 1)^2 + 2$ и $y_2 = x^2 + 1$, область D (см.рис.).



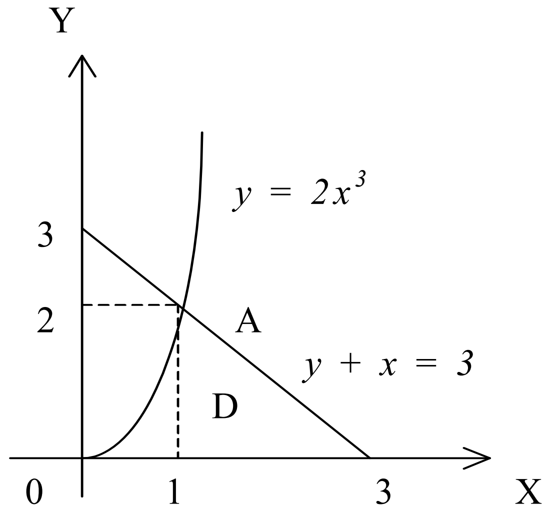
Граница области AB, заданная по условию как $y_2 = x^2 + 1$ может также описываться уравнением $x=\sqrt{y-1}.$ Граница области AC, заданная уравнением $y_1 = -(x-1)^2 + 2,$ может также описываться уравнением $x = 1+\sqrt{2-y}.$ Заметим, что область D ограничена слева двумя кривыми, поэтому для изменения порядка интегрирования следует её разбить прямой *AK*, параллельной оси *OX* на две области D_1 и D_2. Тогда

$$\int_1^3 dx \int_{-(x-1)^2+2}^{x^2+1} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dy \int_{1+\sqrt{2-y}}^{3} f(x,y)dx + \int_{2}^{10} dy \int_{\sqrt{y-1}}^{3} f(x,y)dx.$$

Пример3. Вычислить интеграл $\iint_D x^2 y dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 0,\ y = 2x^3,\ x + y = 3$.

Решение. Проведем указанные линии; определяем область D и пределы изменений переменных *x* и *y* (см.рис. ниже).



Область *D* правильная в направлении оси *OX*, поэтому вначале надо интегрировать по *x* , а потом по *y*. Тогда двойной интеграл по области *D* выражается одним двукратным интегралом

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} x^2 y dx = \int_0^2 y dy \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} x^2 dx = \int_0^2 y dy \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} \right) = \int_0^2 y \left(\frac{(3-y)^3}{3} - \frac{y}{6} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 (9y - 9y^2 + 3y^3 - \frac{y^4}{3} - \frac{y^2}{6}) dy = \left. \left(\frac{9y^2}{2} - \frac{9y^3}{3} + \frac{3y^4}{4} - \frac{y^5}{15} - \frac{y^3}{18} \right) \right|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 - 6 расставьте пределы интегрирования в интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, если :

Задача 1. D – прямоугольник *ABCD* с вершинами *A(-2, -1), B(-2, 3), C(5, 3), D(5, -1).*

Задача 2. D – треугольник ABC с вершинами $A(-3,1)$, $B(3, 4)$, $C(3,1)$.

Задача 3. D – треугольник, ограниченный прямыми $2y - x = 0$; $3y + 2x - 7 = 0$; $5y + x - 14 = 0$.

Задача 4. D – область, ограниченная линиями $xy = 4$; $x = 1$; $y = 1/2$.

Задача 5. D – область, ограниченная линиями $y = \dfrac{27}{x^2+9}; y = \dfrac{x^2}{2}; x \ge 0.$

Задача 6. D – область, ограниченная линиями $x = y^2 + 2y$; $x - y = 2$.

Задача 7. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \ln y dxdy,$ если область D ограничена линиями

$y = e^x; y = e; x \ge 0.$ (*Ответ:* e).

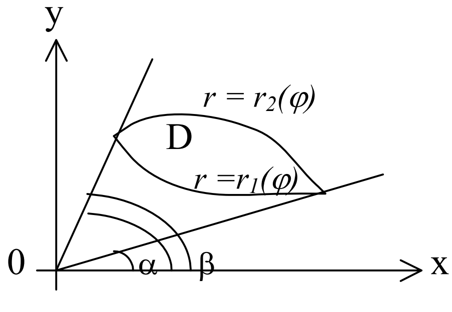
Задача 8. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (2x - y^2)dxdy,$ если D – трапеция $ABCD$ с вершинами $A(2; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 1)$, $D(0; 0)$. (*Ответ:* $1\dfrac{11}{12}$).

Задача 9. Вычислите интеграл $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy,$ где область D ограничена линиями $y = \dfrac{x^2}{2}; y = \sqrt{x}.$ (*Ответ*: $10\sqrt{2} - 1{,}6$).

2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Если область D ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривыми $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$ (см.рис.ниже), то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$

Полярные координаты r и φ связаны с прямоугольными координатами соотношениями $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, очевидно , что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



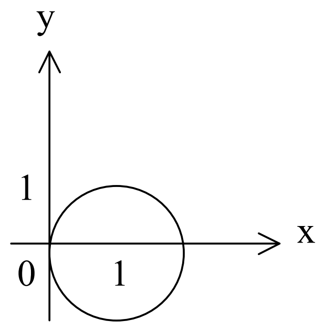
Задачи для решения в аудитории.

Пример1. Вычислить, перейдя к полярным координатам интеграл $\iint\limits_D x dx dy$, где область D ограничена линией $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Преобразуем к каноническому виду уравнение границы *D*

$$x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0; (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Таким образом, область *D* – окружность с центром в точке (1,0) и радиусом 1.



Выразим уравнение границы *D* в полярных координатах

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi; r^2 = 2r\cos\varphi; \text{ т.к. } r \neq 0\text{, то } r = 2\cos\varphi.$$

Для области D $\frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\varphi$.Поэтому

$$\iint\limits_D x dx dy = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi r dr = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{4}{3}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2}) d\varphi = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

*Пример 2.*Вычислить $\iint\limits_D (x+y) dx dy$,где область *D* – часть кольца, ограниченного окружностями $x^2 + y^2 = 1$ *и* $x^2 + y^2 = 9$ и лучами $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Решение . Так как уравнение границ области *D* в полярных координатах

$r_1 = 1, r_2 = 3, \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, то $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^3 (r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dr =$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int\limits_1^3 r^2 dr = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \left(\frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_1^3 = \frac{26}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{26}{3} (\sin\varphi - \cos\varphi) \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{26}{3} \sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1-5 требуется, перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы .

Задача 1. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} tg(x^2+y^2) dy$. (*Ответ*: $\frac{-\pi}{2} \ln|\cos\varphi|$).

Задача 2. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (1+x^2+y^2) dy$. (*Ответ*: $\frac{\pi}{8}(2a^2+a^4)$).

Задача 3. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy$. (*Ответ*: $\pi(1-e^{-3})$).

Задача 4. $\int\limits_{-5}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2(\sqrt{x^2+y^2})}$. (*Ответ*: $\frac{\pi}{2} tg5$).

Задача 5. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{xydy}{x^2+y^2}$. (*Ответ*: $\frac{R^2}{2}$).

Задача 6. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2 = \frac{\pi^2}{4}; x^2+y^2 = \pi^2$. (*Ответ*: -2π) .

Задача 7. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (1+xy) dxdy$, где область D ограничена линией $x^2+y^2 = 2x$. (*Ответ*: π).

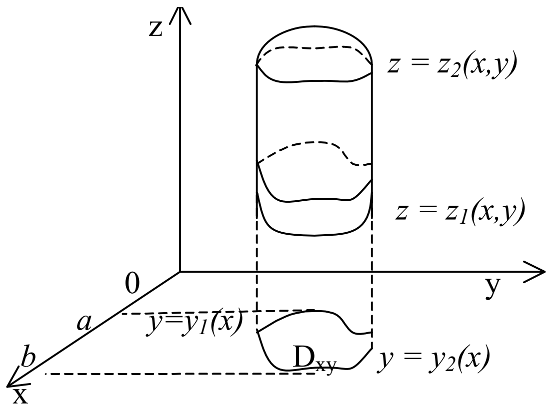
Задача 8. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, где область D ограничена кривыми $x^2+y^2=1; x^2+y^2=9$. (*Ответ*: $2\pi\ln 3$) .

Задача 9. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (4-x-y)dxdy$, где область D ограничена кривой $x^2+y^2=8; (x\geq 0; y\geq 0)$. (*Ответ*: $8\pi-\frac{32\sqrt{2}}{3}$) .

Задача 10. Вычислить интеграл $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где область D ограничена кривыми $x^2+y^2=4x; x^2+y^2=8x; x=y; y=\sqrt{3x}$.(*Ответ*: $\pi(\sqrt{3}-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}$).

3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть область интегрирования V ограничена снизу поверхностью $z=z_1(x,y)$, сверху поверхностью $z=z_2(x,y)$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. D_{xy} – проекция области V на плоскость Oxy. Область D_{xy} определена неравенствами $a\leq x\leq b, y_1(x)\leq y\leq y_2(x)$.



Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

Задачи для решения в аудитории

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y)dv$, где тело V, ограничено плоскостями $x=1; y=0; z=0; y=x; x+y+z-4=0$.

Решение. Для заданной области $0 \le z \le 4-x-y; 0 \le y \le x; 0 \le x \le 1$. Поэтому

$$\iiint\limits_V (x+y)dv = \iiint\limits_V (x+y)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{4-x-y} (x+y)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)dy \left(z\Big|_0^{4-x-y} \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)(4-x-y)dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (4x - x^2 - 2xy + 4y - y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx (4xy - x^2 y - xy^2 + 2y^2 - \frac{y^3}{3})\Bigg|_0^x = \int\limits_0^1 (4x^2 - x^3 - x^3 + 2x^2 - \frac{x^3}{3})dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (-\frac{7}{3}x^3 + 6x^2)dx = (-\frac{7}{12}x^4 + 2x^3)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{7}{12} = \frac{17}{12}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (xz - y^2)dxdydz$, где область V – параллелепипед: $-1 \le x \le 2; 0 \le y \le 1; 1 \le z \le 2$. (*Ответ*: $\frac{1}{4}$).

Задача 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, где область V ограничена плоскостью $x+y+z=a, (x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0)$. (*Ответ*: $\frac{a^4}{8}$).

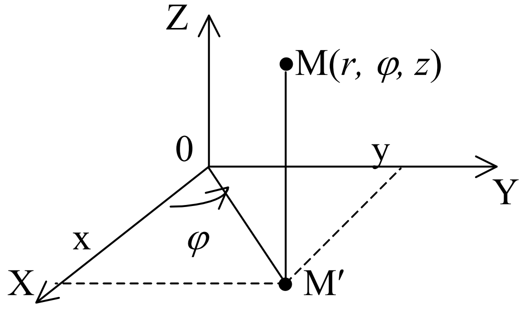
Задача 3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{y+3}$, где область V ограничена плоскостями $y+z=3; x=2; (x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0)$. (*Ответ*: 12ln2 - 6).

Задача 4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (2+z)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $y=x^2$ и плоскостями $y=1; z=0; z=2$. (*Ответ:*8).

Задача *5*. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{4-x}$, где область V ограничена поверхностью $x^2 = 4-y$ и плоскостями $x=0; z=0; 2z+x-4=0$. (*Ответ*: $\frac{16}{3}$).

4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах

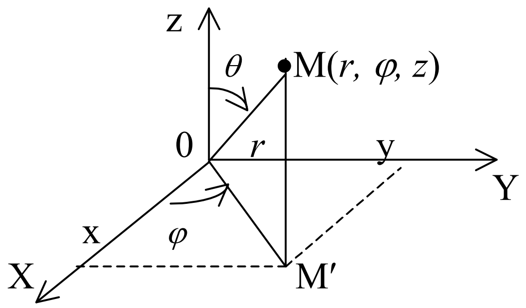
При переходе от декартовых координат *x, y, z* к цилиндрическим координатам



$r,\ \varphi,\ z$ (см.рис.), связанными с *x, y, z* соотношениями $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$ формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} rdr \int\limits_{z_1}^{z_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz$$

При переходе от декартовых координат *x, y, z* к сферическим координатам $r,\ \varphi,\ \theta$



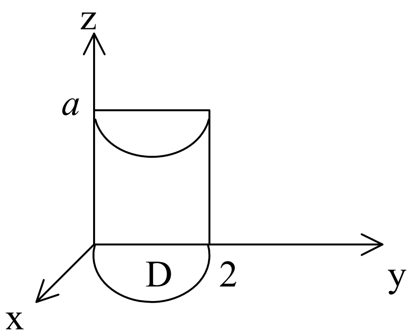
(см.рис.), связанными с *x,y,z* соотношениями $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,$ $z = z\cos\theta$ формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)dr$$

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V ydv$, где тело *V* ограничено поверхностями $y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}, z = 0, z = a.$

Решение. Тело *V* представляет собой половину кругового цилиндра



$(x-1)^2+y^2=1$, ограниченного сверху плоскостью $z=a$, а снизу плоскостью $z = 0$; его проекция D на плоскость OXY –это полуокружность с центром в точке (1; 0) и радиусом 1, имеющая в полярных координатах уравнение $r=2\cos\varphi$, причем φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.Следовательно, границы изменения переменных для области V: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};0\le r\le 2\cos\varphi;0\le z\le a.$ Тогда, переходя к цилиндрическим координатам,

$$\iiint\limits_V y dv=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr\int\limits_0^a dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr(z)\Bigg|_0^a=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr=$$

$$=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}=\frac{8}{3}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8a}{3}\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}a.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V(z+2)dv,$ где тело V ограничено поверхностями $x^2+y^2+z^2=R_1^2, x^2+y^2+z^2=R_2^2; R_2\rangle R_1; z\ge 0.$

Решение. Тело V ограничено двумя полусферами радиуса R_1 и R_2 и плоскостью $z = 0$. Проекция тела на плоскость OXY представляет собой окружность радиуса R_2. Таким образом пределы изменения переменных для тела V определяются неравенствами $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le 2\pi, R_1\le r\le R_2.$ Тогда, переходя к сферическим координатам

$$\iiint\limits_V(z+2)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_{R_1}^{R_2}(r\cos\theta+2)r^2dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\left(\frac{r^4\cos\theta}{4}+\frac{2r^3}{3}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{R_2^4-R_1^4}{4}\cos\theta\sin\theta+\frac{2(R_2^3-R_1^3)}{3}\sin\theta\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{(R_2^4-R_1^4)}{4}\frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2(R_2^3-R_1^3)}{3}(-\cos\theta)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{R_2^4-R_1^4}{8}+\frac{2(R_2^3-R_1^3)}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi\left(\frac{R_2^4-R_1^4}{8}+\frac{2}{3}(R_2^3-R_1^3)\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 - 5 требуется вычислить тройные интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам.

Задача 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z^2 dv,$ где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=4, z=2, z=0$.(*Ответ*: $\frac{32\pi}{3}$).

Задача 2. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv,$ где область V ограничена поверхностями $x^2+z^2=1, y=0, y=1$. (*Ответ*: $\frac{3\pi}{3}$).

Задача 3. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V zdv,$ где область V ограничена поверхностями $4-z=x^2+y^2, z=0$. (*Ответ*: $\frac{32\pi}{3}$).

Задача 4. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область V ограничена поверхностью $z=2(x^2+y^2)$,плоскостями $z=18, y=0, y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и отвечает условию $0\le y\le\frac{1}{\sqrt{3}}x$.(*Ответ*: 81).

Задача 5. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$ где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2=2x$, плоскостями $x+z=2, z=0$ и отвечает условию $z>0$. (*Ответ*: $\frac{128}{45}$).

В задачах 6 - 9 требуется вычислить тройной интеграл, перейдя к сферическим координатам.

Задача 6. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$ где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$ и отвечает условиям $x > 0, y > 0, z > 0$. (*Ответ*: $\frac{243\pi}{10}$).

Задача 7. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V ydxdydz,$ где область V ограничена поверхностью $y^2 = x^2 + z^2$, плоскостью $y = 2$ и отвечает условию $y > 0$. (*Ответ*: 4π).

Задача 8. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,$ где область V ограничена сферическими поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и удовлетворяющая условию $z > 0$.(*Ответ*: $\frac{31}{5}\pi$).

Задача 9. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xdxdydz,$ где область V ограничена поверхностью $x^2 = 2(y^2 + z^2)$, плоскостями $x = 0, x = 4$ и отвечает условию $0 < x < 4$. (*Ответ*: 32π).

5. Криволинейный интеграл I рода

1. Если плоская кривая L задана в декартовых координатах уравнением L: $y = \varphi(x);\ x \in [a, b]$, то $dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx$, а $f(P) = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$, тогда

$$\int\limits_L f(P)dl = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx$$

2. Если плоская кривая L задана уравнением L: $x = \psi(y), y \in [c, d]$, то

$$\int\limits_L f(P)dl = \int\limits_c^d f(\psi(y), y)\sqrt{1 + (\psi'(y))^2}dy$$

3.Если кривая L задана параметрически на плоскости, т.е. $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_0, t_1]$, то $\int\limits_L f(P)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$.

4. Если кривая L задана параметрически в пространстве , т.е.

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_0, t_1] \\ z = z(t) \end{cases}, \text{ то } \int\limits_L f(P)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

5. Если кривая L задана в полярных координатах L: $r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(P)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r,\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

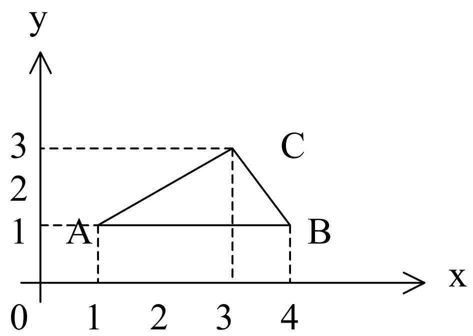
Задачи для решения в аудитории

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки O(0, 0*)* и A(1, 2).

Решение. Нарисуем отрезок *OA* и найдем уравнение *L:* y = 2x , x $\in$ [0, 1]. Тогда $y' = 2$ и $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$, $dl = \sqrt{1 + 2^2}\,dx$; $dl = \sqrt{5}dx$.

Ответ: $\ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x - y)dl$, где L – контур треугольника *ABC* с вершинами в точках A(1, 1) ,B(4, 1) ,C(3, 3) (см.рис.)



Решение. Разобьем контур треугольника *ABC* на отрезки *AB, BC* и *CA.* Тогда

$$\int\limits_L (x - y)dl = \int\limits_{(AB)} (x - y)dl + \int\limits_{(BC)} (x - y)dl + \int\limits_{(CA)} (x - y)dl.$$

Вычислим интеграл по отрезку *AB*. Так как уравнение прямой *AB:* $y = 1; x \in [1,4]$, *то* $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = dx$, тогда

$$\int\limits_{(AB)} (x - y)dl = \int\limits_1^4 (x - 1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

Вычислим интеграл по отрезку *BC*. Подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты точек B(4,1) и C(3,3), получим, что уравнение прямой *BC:* $y = -2x + 9$, при этом *x* меняется от 4 до 3 . Тогда $dl = \sqrt{1 + (-2)^2}dx = \sqrt{5}dx$ и

$$\int\limits_{(BC)} (x - y)dl = \int\limits_4^3 (x - (-2x + 9))\sqrt{5}dl = \sqrt{5}\int\limits_4^3 (3x - 9)dx = \sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2} - 9x\right)\Bigg|_4^3 =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{27}{2} - 27 - 24 + 36\right) = \frac{-3\sqrt{5}}{2}.$$

Вычислим интеграл по отрезку *CA*. Подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты точек C(3,3) и A(1,1) , получим, что уравнение прямой *CA: y = x; x* при этом меняется от 3 до 1. Тогда $dl = \sqrt{2}dx$ и $\int\limits_{CA} (x - y)dx = \int\limits_3^1 (x - x)\sqrt{2}dx = 0$.

Суммируя интегралы по отрезкам *AB, BC и CA* получим , что

$$\int\limits_{\mathrm{L}} (\mathrm{x} - \mathrm{y})\mathrm{dl} = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{9 - \sqrt{5}}{2}$.

*Пример 3.*Вычислить интеграл $\int\limits_L xydl$, где L – часть винтовой линии $x = a\cos t;\ \ y = a\sin t; z = bt; t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. Имеем $x'_t = -a\sin t; y'_t = a\cos t; z'_t = b$.Тогда

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt \text{ и}$$

$$\int\limits_L xydl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos t\, a\sin t\sqrt{a^2 + b^2}dt = \frac{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2tdt =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{4}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}dl$, где L – часть кривой

$r = 1 + \cos\varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение . Имеем

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда $\int\limits_L \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$. (*Ответ:* π *.)*

Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.*Вычислить интеграл $\int\limits_L (x-y)dl$, где L – отрезок прямой между точками O(0,0) и A(4,3).(Ответ: $\frac{5}{2}$).

Задача 2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2}$, где L – отрезок прямой, заключенный между точками A(1, 2) и B(2, 4) . (Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{10}$).

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_L xydl$,где L – контур прямоугольника $ABCD$ с вершинами в точках A(0, 0); B(4, 0); C(4, 2); D(0, 2*).* (Ответ: 24).

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{x}{y}dl,$ где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках A(0, 0); B(2, 3); C(3, 1). (Ответ: $\frac{2\sqrt{13}}{3} + 2\ln 2 + 2\sqrt{5}$).

Задача 5. Вычислить интеграл $\int\limits_L ydl$, где L – дуга $x = \sin y$, $y \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Ответ: $\pi + 4 - \frac{\pi}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$).

Задача 6. Вычислить интеграл $\int\limits_L xydl$, где L – часть окружности $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Ответ: $\frac{R^3}{2}$).

Задача 7. Вычислить интеграл $\int\limits_L ydl$, где L – арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

(Ответ: $10\frac{2}{3}$)

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\limits_L z^2 dl$, где L – первый виток винтовой линии

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi \\ z = t \end{cases}$. (Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$).

Задача 9. Вычислить интеграл $\int\limits_L rdl$, где L – кривая, заданная уравнением

$r = 2\sin\varphi; 0 \le \varphi \le \pi.$ (Ответ: 8).

Задача 10. Вычислить интеграл $\int\limits_L \sqrt{\varphi^2 + 1}dl$, где L – первый виток спирали Архимеда $r = 2\varphi$. (Ответ: $\frac{16}{33}\pi^3 + 2\pi$).

Задача 11. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^{-\varphi} dl$, где L – дуга логарифмической спирали

$r = 2e^{3\varphi}, \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. (Ответ: $\sqrt{10}(e^{2\pi} - e^{\frac{2\pi}{3}})$).

6.Криволинейные интегралы II рода

1. Если плоская кривая L задана в декартовых координатах уравнением $y = \varphi(x), x \in [a,b]$, то $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x))dx$
2. Если кривая L задана параметрическими уравнениями, т.е. L: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

   $t \in [t_1, t_2]$, то

   $$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt$$

Задачи для решения в аудитории

Пример1. Вычислить $\int\limits_L ydx - xdy$, где L – дуга линии $y = x^2$ от A(0, 0) до B(1, 1).

Решение. $\int\limits_L ydx - xdy = \int\limits_0^1 (x^2 - x \cdot 2x)dx = -\int\limits_0^1 x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$.

Пример2. Вычислить $\int\limits_L ydx - xdy$, где L – дуга циклоиды

$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. $\int\limits_L ydx - xdy = \int\limits_0^{2\pi} (2(1-\cos t)\cdot(2 - 2\cos t) - 2(t - \sin t)\cdot 2\sin t)dt =$

$= 4\int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t - t\sin t + \sin^2 t)dt = 4(2\int\limits_0^{2\pi} dt - 2\int\limits_0^{2\pi}\cos tdt - \int\limits_0^{2\pi} t\sin tdt).$

Интегрируя третий интеграл по частям, получим

$\int\limits_L ydx - xdy = 8t\Big|_0^{2\pi} - 8\sin t\Big|_0^{2\pi} + 4t\cos t\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\cos tdt = 24\pi.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача1. Вычислить $\int\limits_L y(x-y)dx - xdy$ где:

а) L – отрезок прямой $y = 2x$ от точки О(0, 0) до точки А(1, 2),

б) L – дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от точки О(0, 0) до точки А(1, 2).

(*Ответ:*а) $\frac{1}{3}$; б)-$\frac{8}{15}$).

Задача2. Вычислить $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ где L – ломаная линия $y = |x|$ от точки А(-1,1) до точки В(2,2). (*Ответ*: 6).

Задача3. Вычислить $\int\limits_L zdx + xdy + ydz$, где L – дуга кривой заданной параметрически $L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.(*Ответ:* $\frac{91}{60}$).

Задача4. Вычислить $\int\limits_L -yzdx + xzdy + xydz$, где L – дуга кривой

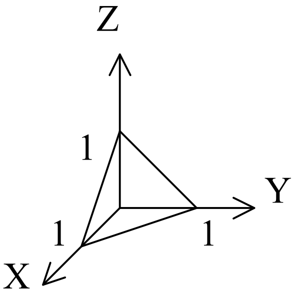
L: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.(*Ответ*: $2\pi^2 a^2 h$).

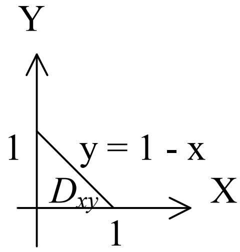
7. Вычисление поверхностного интеграла в декартовой системе координат

Если поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y)$, то
$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}\,dxdy$, где D_{xy} – проекция поверхности Q на плоскость Oxy.

Пример. Вычислить $\iint\limits_S \frac{ds}{(1 + x + z)^2}$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

Решение. Проекцией S на плоскость Oxy является область D_{xy} (см.рис) ограниченная линиями $x = 0, y = 0, y = 1 - x$.





Сама поверхность задана уравнением $z = 1 - x - y$, поэтому $\varphi'_x = -1, \varphi'_y = -1$;

$\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} = \sqrt{3}$. Тогда $\iint\limits_S \frac{ds}{(1 + x + z)^2} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(1 + x + (1 - x - y))^2} =$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(2 - y)^2} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(2 - y)^2} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\left(\frac{1}{2 - y}\right)\Bigg|_0^{1-x} = \sqrt{3}\int\left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \sqrt{3}\left(\ln|x + 1| - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S zds$, где S полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9; (z \geq 0)$.

(*Ответ*:27π).

Задача 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)ds$, где Q часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$. (*Ответ*: $4\sqrt{61}$).

Задача 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S xds$, где S поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенная в первом октанте. (*Ответ*:2π).

Задача 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, где S – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенная между плоскостями $z=0, z=1$. (*Ответ*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$).

Задача 5. Вычислить интеграл $\iint\limits_S ds$, где S – парболоид, вырезанный цилиндром $x^2+y^2=a^2$. (*Ответ*: $\frac{\pi}{6}((1+4a^2)^{\frac{3}{2}}-1)$).

8. Поверхностные интегралы II рода

Рассмотрим двухстороннюю поверхность и выберем на ней определенную сторону *S*. Если D_{xy} – проекция поверхности *S* заданной уравнением $z=f(x,y)$ на плоскость O_{xy} ,то

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,yf(x,y))dxdy,$$

где знак $''+''$ берется в том случае , когда на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma>0$, а знак $''\text{-}''$ берется в случае, когда $\cos\gamma<0$, где γ – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси *Oz*.

Аналогично , если D_{xy} – проекция поверхности S, заданной уравнением

$$y=\varphi(x,z)\text{, то } \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,\varphi(x,z),z)dxdz,$$

где знак в формуле определяется по знаку $\cos\beta$, где β – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси Oy.

Если D_{xy} – проекция поверхности *S*, заданной уравнением $x=\psi(y,z)$, то

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(\psi(y,z),y,z)dydz,$$

где знак определяется по знаку $\cos\alpha$, где α – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси *Ox*.

Для вычисления поверхностного интеграла II рода более общего вида

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

используются те же формулы.

Пример. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy$,

где S – нижняя сторона круга $x^2+y^2 \le a^2$.

Решение. Поверхность S совпадает со своей проекцией D_{xy} на плоскость O_{xy}. Поэтому

$$\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^{\frac{3}{2}} dr = -\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить $\iint\limits_Q yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где Q – верхняя сторона треугольника, образованного плоскостями $x+y+z=2; x=0; y=0; z=0$.
(*Ответ*: 2).

Задача 2. Вычислить $\iint\limits_Q x^2 dydz$, где Q – внешняя часть поверхности параболоида $z=\frac{5}{4}(x^2+y^2)$, ограниченного плоскостями $x>0, y=0, z=5$ и удовлетворяющего условиям $x>0, y>0<z<5$.(*Ответ*: $\frac{32}{3}$).

Задача 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_Q x^2 dydz$, где Q – внешняя часть сферической поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$,ограниченной плоскостями $x=0; y=0; z=0$ и удовлетворяющая условиям $x>0, y>0, z>0$.(*Ответ*: $\frac{\pi R^4}{8}$).

Геометрические приложения двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Площадь S плоской области D :	$S=\iint\limits_D dxdy$
в полярных координатах.	$S=\iint\limits_D rdrd\varphi$
Объем V:	$V=\iiint\limits_V dxdydz$
в сферических координатах	$V=\iiint\limits_V r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$
в цилиндрических координатах	$V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz$
Длина l дуги L	$l=\int\limits_L dl$
Площадь Q поверхности S	$Q=\iint\limits_S ds$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $y=\frac{x^2}{2}$, $y=4+x$. (*Ответ*: 18).

Задача 2. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $2x=y^2$, $x-y=0$. (*Ответ*: $\frac{2}{3}$).

Задача 3. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $xy=1$, $x=y^2$, $y=5$. (*Ответ*: $\frac{124}{3}-\ln 5$).

Задача 4. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $y^2=ax$, $x^2=ay,(a\rangle 0)$ (*Ответ*: $\frac{5a^2}{3}$).

Задача 5. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $x=y^2-1$, $x=5-\frac{y^2}{2},(y\geq 0)$. (*Ответ*:8).

В задачах 6-9 требуется вычислить площадь фигуры D, перейдя к полярным координатам.

Задача 6. Вычислить площадь фигуры *D*, ограниченной кривой $r = \cos 3\varphi$. (*Ответ*: $\pi/4$).

Задача 7. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной кривыми $r = a(1-\cos\varphi), r = a$ (вне кардиоиды).(*Ответ*: $a^2(2-\pi/4)$).

Задача 8. Вычислить площадь фигуры *D,* ограниченной кривыми $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x, y=x, y=0$.(*Ответ*: $\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{2}$).

Задача 9. Вычислить площадь фигуры *D*, ограниченной кривыми $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0, y=\sqrt{3}x$.(*Ответ*: $\frac{\pi ab}{6}$).

Задача 10. Вычислить объем тела *V*, ограниченного параболоидом $z=2a^2-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$. (*Ответ*: πa^4).

Задача 11. Вычислить объем тела V, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $2x-z=0$, $4x-z=0$.(*Ответ*: 2π).

Задача 12. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=z$, $z=0$.(*Ответ*: $\frac{\pi R^4}{2}$).

Задача 13. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z=x$, $y=4$, $x^2+y^2=25$, $x\geq 0, (y\geq 0, z\geq 0)$. (*Ответ*: $\frac{118}{3}$).

Задача 14. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x+y=2, z=x^2+y^2, (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.(*Ответ*: 8/3).

Задача 15. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x=y^2, x=2y^2+1, z=1-y^2, (z\geq 0)$.(*Ответ*: 8/5).

Задача 16. Вычислить длину дуги циклоиды $x=t-\sin t, y=1-\cos t$, если $0\leq t\leq \pi$. (*Ответ*: 4).

Задача 17. Вычислить длину витка винтовой линии $x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}t$, если $0\leq t\leq 2\pi$.(*Ответ*:8π).

Задача 18. Вычислить длину дуги кривой $x=\sin y$,если $0\leq y\leq \frac{\pi}{2}$. (*Ответ*: 2).

Задача 19. Найти площадь части конуса $z^2=2xy$,расположенного в первом октанте между плоскостями $x=2, y=4$.(*Ответ*: 16).

Задача 20. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$,расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=Rx$. (*Ответ*: $2R^2(\pi-2)$).

9. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

9.I. Скалярные и векторные поля

Область $W \subseteq R^n$ вместе с заданной в каждой ее точке M скалярной функцией U(M) называется скалярным полем (СП) U. Функцию $U(M)$ называют *потенциалом* поля.

При $n = 3$ СП задается функцией вида $U = U(x, y, z)$; при $n = 2$ $U = U(x, y)$ и поле U называется *плоским*.

Пространственные (плоские) поля графически изображаются поверхностями (линиями) уровня, уравнения которых имеют вид:

$$U(x, y, z) = C,\ C = const,\ (U(x, y) = C,\ C = const).$$

Пусть $n = 3$, $W \subseteq R^3$, точка $M(x_o, y_o, z_o) \in W, \bar{l} = l_1\bar{i} + l_2\bar{j} + l_3\bar{k}$ - некоторый вектор. Тогда единичный вектор по направлению $\bar{l}$:

$$\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k},$$

где $|\bar{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$, $\cos\alpha = \frac{l_1}{|\bar{l}|}$, $\cos\beta = \frac{l_2}{|\bar{l}|}$, $\cos\gamma = \frac{l_3}{|\bar{l}|}$.

Производная СП U в точке М по направлению $\bar{l}$, обозначаемая $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$, определяется соотношением:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \left(U(x_o + \tau\cos\alpha, y_o + \tau\cos\beta, z_o + \tau\cos\gamma\right)'_\tau \Big|_{\tau=0}$$

и характеризует скорость изменения функции U в направлении $\bar{l}$.

Производная $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиентом СП U в точке М называется вектор

$$grad\,U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\bar{k}.$$

Связь между производной по направлению и градиентом выражается формулой:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = (gradU(M), \bar{l}_o) = |gradU(M)| \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $grad\ U(M)$ и $\bar{l}$.

Из последней формулы следует, что $\max \frac{\partial U(M)}{\partial l} = |gradU(M)|$ и достигается при $\varphi = 0$, т.е. градиент направлен в сторону наибольшего возрастания потенциала U (по нормали к поверхности уровня в точке М), а модуль градиента равен максимальной скорости возрастания.

Область $W \subseteq R^n$ вместе с заданной в каждой ее точке M вектор-функцией $\bar{a}(M)$ называется векторным полем (ВП) $\bar{a}$.

При $n = 3$ ВП задается функцией вида:

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}.$$

При $n = 2$: $\bar{a}(M) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ и ВП называется *плоским.*

Векторной линией поля $\bar{a}$ называется ориентированная линия, в каждой точке M которой вектор касательной $\bar{l}(M)$ сонаправлен вектору поля $\bar{a}(M)$.

Уравнения семейства векторных линий пространственного поля $\bar{a}$ есть общее решение системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Уравнения векторных линий плоского поля $\bar{a}$ определяются общим решением дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Найти поверхности уровня СП $U = 2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z$ и записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $M(-1; 1; -1)$.

Решение. Уравнения поверхностей уровня имеют вид

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z = C,\ C = const$$

или $2(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = C + 15$.

Последнее уравнение при различных $C > -15$ определяет семейство эллипсоидов с центром в точке $(-1; 2; -3)$ и полуосями $a = \sqrt{\frac{C+15}{2}}, b = c = \sqrt{C+15}$.

Поверхность уровня, проходящая через точку $M(-1;1;-1)$, имеет уравнение

$U(x,y,z) = U(x_o, y_o, z_o)$, *т.е.* $2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z = 2 + 1 + 1 - 4 - 4 - 6 = -10$

или

$$2(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 5.$$

Пример 2. Для СП $U = x^2y + xz^2 - 2z$ в точке $M(1; 1; -1)$ определить: а) производную по направлению вектора $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$; б) производную по направлению, идущему от точки M к точке $N(2;-1;2)$; в) производную по направлению, образующему с осями координат острые углы α, β, γ, причем $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$; г) производную по направлению вектора $\bar{l}_1$, образующего с градиентом угол $\varphi = 120^o$; д) скорость и направление наибольшего возрастания.

Решение. Поле U определено и дифференциремо в любой точке пространства R^3.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + z^2 \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 3$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 1 \quad .$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2xz - 2 \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4$$

Таким образом, $grad\, U(M) = (3; 1; -4)$.

а) Имеем $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $|\bar{l}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = (gradU(M), \bar{l}_o) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

б) $\bar{l} = \overline{MN} = (2-1; -1-1; 2+1) = (1; -2; 3)$, $\quad |\bar{l}| = |\overline{MN}| = \sqrt{14}$,

$$\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right), \ \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = (gradU(M), \bar{l}_o) = \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{12}{\sqrt{14}} = -\frac{11}{\sqrt{14}}.$$

в) По условию $\cos\alpha = \cos 60^o = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma > 0$. Отсюда

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - 1/4 - 1/2} = 1/2.$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = 3\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

г) $\left.\frac{\partial U}{\partial l_1}\right|_M = |gradU(M)|\cos\varphi = \sqrt{9+1+16}\cdot\cos 120^o = \sqrt{26}\cdot(-1/2) = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}.$

д) $\max\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = |gradU(M)| = \sqrt{26}.$

Направление наибольшего возрастания поля U совпадает с направлением градиента, т.е.

$$\bar{l}_o = \frac{gradU(M)}{|gradU(M)|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3;1;-4) = \left(\frac{3}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}};-\frac{4}{\sqrt{26}}\right).$$

Пример 3. Найти векторную линию ВП $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + 3\bar{k}$, проходящую через точку *M(1; 0; 0).*

Решение. Уравнения семейства векторных линий определяются системой дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{3}$. Интегрируем: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, $xdx + ydy = 0,$ $x^2 + y^2 = C_1^2$; в параметрическом виде: $x = C_1 \cos t,\ y = C_1 \sin t.$ С учетом этого уравнение $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{3}$ примет вид: $\frac{C_1 \cos t dt}{C_1 \cos t} = \frac{dz}{3} \Rightarrow dz = 3dt \Rightarrow z = 3t + C_2$.

Таким образом, $x = C_1 \cos t,\ y = C_1 \sin t,\ z = 3t + C_2$ – параметрические уравнения векторных линий поля $\bar{a}$ (винтовые линии). Подставляем координаты точки M: $1 = C_1 \cos t,\ 0 = C_1 \sin t,\ 0 = 3t + C_2 \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 0 \Rightarrow x = \cos t,\ y= \sin t,\ z= 3t$ - уравнения искомой линии.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Найти поверхности уровня СП U и уравнение поверхности уровня, проходящей через точку М, если: а) $U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M(1;0;-1/2)$;

б) $U = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $M(1;1;\ 1)$; в) $U = \frac{z}{x^2+y^2}$, $M(1;\ 2;\ 3)$. (*Ответ*: а) конусы $z = \sin C \cdot \sqrt{x^2+y^2}$, $|C| \le \pi/2$; $z = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$; б) сферы $x^2+y^2+z^2 = e^c$, $c \in R$; $x^2+y^2+z^2 = 3$; в) параболоиды вращения $z = c(x^2+y^2)$; $z = \frac{3}{5}(x^2+y^2)$)).

Задача 2. Пусть заданы СП U, точки M и N, направление $\bar{l}$, угол φ. Определить в точке М: производную поля U по направлению $\bar{l}$; производную поля U по направлению $\overline{MN}$; производную по направлению вектора $\bar{l}_1$, образующего с $gradU(M)$ угол φ; скорость и направление наибольшего возрастания поля U в точке М, если:

а) $U = xy^2z + yz^2 - 3z,\ M(0;1;2), N(-2;3;-1), \bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k},\ \varphi = 30^0$;

б) $U = \frac{y}{xz} + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy},\ M(1;2;3), N(-2;1;-1), \bar{l} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k},\ \varphi = 225^0$;

в) $U = x^y - 3xyz,\ M(1;2;0), N(1;0;-3), \bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k},\ \varphi = 60^0$.

(*Ответ*: а) $\frac{\partial U}{\partial l}=0$; $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{1}{\sqrt{17}}$ *при* $\bar{l}=\overline{MN}$; $\frac{\partial U}{\partial l_1}=\frac{3}{2}\sqrt{7}$; $\max\frac{\partial U}{\partial l}=\sqrt{21}$;

б) $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{4}{3\sqrt{29}}$; $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{101}{18\sqrt{26}}$ *при* $\bar{l}=\overline{MN}$; $\frac{\partial U}{\partial l_1}=-\frac{\sqrt{2786}}{36}$; $\max\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\sqrt{1393}}{18}$;

в) $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{16}{3}$; $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{18}{\sqrt{13}}$ *при* $\bar{l}=\overline{MN}$; $\frac{\partial U}{\partial l_1}=\frac{\sqrt{38}}{2}$; $\max\frac{\partial U}{\partial l}=\sqrt{38}$).

Задача 3. Найти производную СП $U=x^2+y^2-\sqrt{x^2+z^2}$ в точке M(-3; 0; 4) в направлении нормали к поверхности $2x^2+12x+5y^2+z^2-3z-58=0$, образующей острый угол с осью Oz. (*Ответ*: -4/5)

Задача 4. Вычислить координаты единичного вектора $\overline{n_o}$, перпендикулярного к поверхностям уровня СП $U=2x-3y+6z-5$ и образующего с осью Oz тупой угол. (*Ответ*. $\overline{n_o}=\left(-\frac{2}{7};\frac{3}{7};-\frac{6}{7}\right)$)

Задача 5. Найти угол φ между градиентами полей $U_1=x+yz+2\sqrt{xz}$, $U_2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M(2; 3; 2). (*Ответ*. $\cos\varphi=\frac{9}{\sqrt{102}}$).

Задача 6. В каких точках плоскости *xOy* градиент поля $U=x^2+y^2-xy$: а) перпендикулярен к оси *Oy*; б) параллелен прямой *y = -x-1;* в) перпендикулярен к прямой *y =2x + 3*. (*Ответ:* а) в точках прямой *y = x/2;* б) в точках прямой *y = -x;* в) в точках оси *Ox).*

Задача 7. Найти уравнения векторных линий ВП:

а) $\bar{a}=(x+y)\bar{i}-x\bar{j}-x\bar{k}$; б) $\bar{a}=gradU$, если $U=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

(*Ответ*. а) $x^2+y^2+z^2=C_2^2$, $y-z=C_1$; б) $y=C_1x$, $z=C_2x$)).

Задача 8. Дано плоское ВП $\bar{a}$ и точка М. Найти уравнения семейства векторных линий и векторной линии, проходящей через точку М, если

а) $\bar{a}=(3x-y^2)\bar{i}+y\bar{j}$; $M(1;1)$; б) $\bar{a}=x\ln x\bar{i}+(2y+\ln x)\bar{j}$; $M(e;2)$.

(*Ответ*: а) $x=Cy^3+y^2$, $x=y^2$; б) $y=C\ln^2x-\ln x$, $y=3\ln^2x-\ln x$).

9.2. Поток ВП. Дивергенция ВП. Теорема Остроградского. Вычисление потока.

Пусть в области $W\subseteq R^3$ заданы ВП $\bar{a}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ с непрерывно-дифференцируемыми функциями *P, Q, R* и некоторая ориентированная поверхность σ с единичным вектором нормали

$$\overline{n_0}=\cos\alpha\,\bar{i}+\cos\beta\,\bar{j}+\cos\gamma\,\bar{k}.$$

Потоком ВП $\bar{a}$ через ориентированную поверхность σ называется поверхностный интеграл 2-го рода от вектор-функции $\bar{a}$ по поверхности σ:

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \iint_\sigma (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma .$$

Если σ – замкнутая поверхность, то ее считают положительно ориентированной при выборе внешней стороны этой поверхности, а поток записывают в виде:

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \oiint_\sigma (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma .$$

Поток ВП является его суммарной характеристикой, описывающей поле $\bar{a}$ посредством помещенной в него поверхности. Например, для поля скоростей текущей жидкости поток равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность σ.

Дивергенцией ВП $\bar{a}$ в точке $M \in W$, обозначаемой через $div\bar{a}(M)$, называется объемная плотность потока ВП $\bar{a}$ в этой точке:

$$div\bar{a}(M) = \lim_{\substack{v\to 0 \\ (Q\to M)}} \frac{\Pi_\sigma(\bar{a})}{v},$$

где v – объем, ограниченный замкнутой поверхностью σ, стягивающейся в пределе в точку M.

В декартовой системе координат дивергенция вычисляется по формуле:

$$div\bar{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Если $div\bar{a}(M) > 0$, то говорят, что в точке М находится источник; если $div\bar{a}(M) < 0$, то в точке М находится сток. В случае $div\bar{a}(M) = 0$ в точке М нет ни источника, ни стока. Величина $\left| div\bar{a}(M) \right|$ характеризует мощность источника или стока.

Теорема Остроградского. Поток ВП $\bar{a}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ равен тройному интегралу по области V, ограниченной поверхностью σ, от дивергенции ВП:

$$\oiint_\sigma (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma = \iiint_V div\bar{a}\, dv .$$

Теорема Остроградского позволяет свести задачу вычисления потока ВП через замкнутую поверхность σ к вычислению тройного интеграла по области V, заключенной внутри σ.

В случае незамкнутой поверхности σ способы вычисления потока сводятся к известным способам вычисления поверхностных интегралов (см. соответствующий раздел). В ряде случаев удобно использовать переход к поверхностному интегралу первого рода с последующим его вычислением.

Пусть, например, поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOy, и ее уравнение имеет вид: z = z(x, y). Тогда

$$dq = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \text{ где } \gamma = (\overline{n}_0, \widehat{\ } Oz), \ \overline{n}_0 = \pm\frac{-z'_x\overline{i} - z'_y\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \ |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

причем «+» соответствует выбору верхней стороны поверхности σ (cos γ > 0); «-» соответствует выбору нижней стороны σ (cos γ < 0). Отсюда

$$\Pi_\sigma(\overline{a}) = \iint_\sigma (\overline{a}, \overline{n}_0) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\overline{a}, \overline{n}_0)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость xOy. Окончательно получаем формулу, сводящую подсчет потока к вычислению двойного интеграла:

$$\Pi_\sigma(\overline{a}) = \pm\iint_{D_{xy}} (\overline{a}, \overline{n})\Big|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

где $\overline{n} = (-z'_x; -z'_y; 1) = grad(z - z(x, y))$, а выбор знака соответствует знаку

$\cos\gamma = \cos(\overline{n}_o, \widehat{\ } Oz)$.

Если поверхность σ однозначно проектируется на плоскость *yOz (xOz)* и задана уравнением *x = x(y, z) (y = y(x, z)),* то справедлива аналогичная формула:

$$\Pi_Q(\overline{a}) = \pm\iint_{D_{yz}} (\overline{a}, \overline{n})\Big|_{x=x(y,z)} dydz$$

где $D_{yz} = \Pi p_{yOz}\sigma, \ \overline{n} = grad(x - x(y, z)) = (1; -x'_y; -x'_z)$, выбор знака определяется знаком $\cos\alpha = \cos(\overline{n}_o, \widehat{\ } Ox)$;

$$(\Pi_\sigma(\overline{a}) = \pm\iint_{D_{xz}} (\overline{a}, \overline{n})\Big|_{y=y(x,z)} dxdz,$$

где $D_{xz} = \Pi p_{xOz}\sigma, \ \overline{n} = grad(y - y(x, z)) = (-y'_x; 1; -y'_z); \ \cos\beta = \cos(\overline{n}_o, \widehat{\ } Oy)$).

Замечание. В случае более сложной поверхности σ разбиваем ее на части σ_1, σ_2, …, σ_n и вычисляем $\Pi_\sigma(\overline{a}) = \Pi_{\sigma_1}(\overline{a}) + \Pi_{\sigma_2}(\overline{a}) + ... + \Pi_{\sigma_n}(\overline{a})$.

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Вычислить дивергенцию ВП
$\overline{a} = (x^2 + y^2)\overline{i} + (y^2 + z^2)\overline{j} + (z^2 + x^2)\overline{k}$ в точке M(1; -1; 2).

Решение. $div\overline{a} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 + y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + z^2)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$.

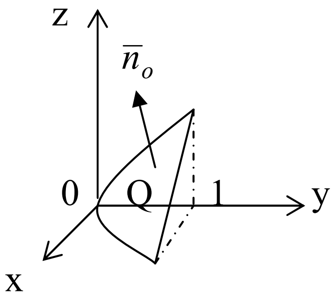
$div\overline{a}(M)$=2 – 2 + 4 = 4 > 0, т.е. точка M является источником поля.

Пример 2. Найти дивергенцию напряженности магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному линейному проводу.

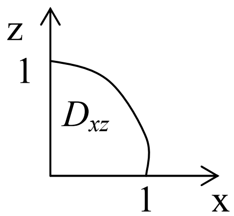
Решение. Примем за провод ось *Oz*. Тогда магнитное поле определится формулой: $\overline{H}(M) = 2I\dfrac{-y\bar{i} + x\bar{j}}{x^2 + y^2}$, где I – сила тока в проводнике.

$$div\overline{H}(M) = 2I\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0 .$$

Пример 3. Найти поток ВП $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через часть σ внешней поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, лежащую в первом октанте и ограниченную плоскостью $y=1$.



Решение. Поверхность задана уравнением вида $y = y(x, z) = x^2 + z^2$, $y'_x = 2x$, $y'_z = 2z$, $\bar{n} = (-y'_x;\, 1;\, -y'_z) = (-2x;\, 1;\, -2z)$, $\cos\beta = \cos(\bar{n}_o, \hat{O}y) < 0.$



Согласно приведенной выше формуле:

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = -\iint\limits_{D_{xz}} (\bar{a}, \bar{n})\Big|_{y=y(x,z)} dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} (-2x^3 + x - 2xz^2)\Big|_{y=x^2+z^2} dxdz =$$
$$= \iint\limits_{D_{xz}} x\left[2(x^2+z^2) - 1\right] dxdz$$

Так как $D_{xz} = \Pi p_{xOz}\sigma$ представляет собой четверть круга, удобно перейти к полярным координатам на плоскости xOz: $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^2(2r^2 - 1)dr = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(2\frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{15}.$$

Пример 4. Найти поток электростатического поля точечного заряда q, помещенного в начале координат, через внешнюю сторону сферы σ: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. Поле точечного заряда задается вектором напряженности

$$\overline{E}(M) = \frac{q\overline{r}}{|\overline{r}|^3} = \frac{q \cdot \overline{r}_o}{r^2},$$

где r – расстояние от точки M до начала координат, $\overline{r}_o$ - единичный вектор, направленный по радиус-вектору $\overline{r}$ точки M.

$$П_\sigma(\overline{E}) = \iint\limits_\sigma (\overline{E}, \overline{n}_o) d\sigma = q \iint\limits_\sigma \frac{1}{r^2} (\overline{r}_o, \overline{n}_o) d\sigma .$$

Так как всюду на σ $r = R = const$, $(\overline{r}_o, \overline{n}_o) = |\overline{r}_o| \cdot |\overline{n}_o| \cdot \cos 0 = 1$, то

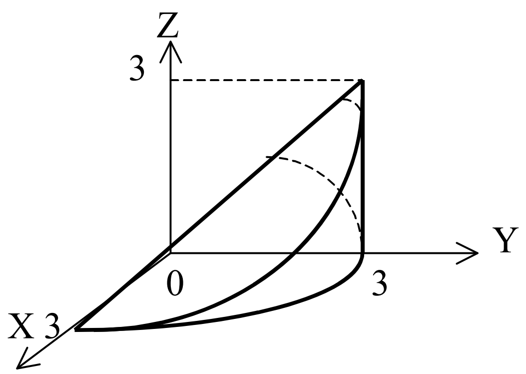
$$П = \frac{q}{R^2} \iint\limits_Q dq = \frac{q}{R^2} S_{сферы} = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q .$$

Пример 5. Найти поток ВП $\overline{a} = (x + z)\overline{i} + (z + y)\overline{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $\sigma : \left\{ x^2 + y^2 = 9, z = 0, z = y \;\; (z \geq 0) \right\}$.

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского:

$$div\overline{a} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial(z+y)}{\partial z} = 2, \;\; П_\sigma(\overline{a}) = 2\iiint\limits_V dv,$$

где V – тело, ограниченное поверхностью Q.



Переходим к цилиндрической системе координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. x

$$П_\sigma(\overline{a}) = 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^3 rdr \int\limits_0^{r\sin\varphi} dz = 2\int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^3 r^2 dr = -2\cos\varphi\Big|_0^\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^3 = 4 \cdot \frac{27}{3} = 36.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Вычислить дивергенцию ВП $\bar{a} = (xy + z^2)\bar{i} + (yz + x^2)\bar{j} + (zx + y^2)\bar{k}$ в точках $M_1(1;\ 3;\ -5)$, $M_2(-3;\ 4;\ -1)$, $M_3(1;\ 4;\ 0)$ и определить, являются ли они источником либо стоком. (*Ответ.* $div\bar{a}$ (M_1) = -1 – сток; $div\bar{a}$ (M_2) = 0 – ни источник, ни сток; $div\bar{a}$ (M_3) = 5 – источник).

Задача 2. Вычислить дивергенцию градиента СП $U = ln(x^2 + y^2 + z^2)$. (*Ответ.* $div(gradU) = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$).

Задача 3. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} + z\bar{k}$ через нижнюю сторону части плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$, расположенной в первом октанте. (*Ответ. П = -36*).

Задача 4. Вычислить поток ВП $\bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$. (*Ответ. П = 2π).*

Задача 5. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}$ через верхнюю сторону части поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, лежащей в первом октанте. (*Ответ.*

П = 24π).

Задача 6. Вычислить поток ВП $\bar{a} = 2x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через нижнюю сторону части боковой поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $z = 1$. (*Ответ*: *П = -π/10*).

В следующих заданиях вычислить поток ВП с помощью теоремы Остроградского:

Задача 7. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + +z^2=R^2$ в направлении внешней нормали. (*Ответ*: *П =* $\dfrac{12}{5}\pi R^5$).

Задача 8. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности $\sigma : \{x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0\}$. (*Ответ*: *П = -$\pi$*).

Задача 9. Вычислить поток ВП $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xz\bar{k}$ через внешнюю сторону пирамиды с вершинами *0(0; 0; 0), A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 2).* (*Ответ*: *П = 1/3).*

Задача 10. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + (1 - z)\bar{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $Q : \{x^2 + y^2 = z^2, z = H\ \ (z \ge 0)\}$. (*Ответ*: *П =* $\dfrac{1}{3}\pi H^3$).

Задача 11. Вычислить поток ВП $\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j} + z^2\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности $Q : \{x^2 + y^2 = 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. (*Ответ*: *П = 6,5$\pi$*).

9.3. Циркуляция и ротор ВП. Теорема Стокса.

Пусть в области $W \in R^3$ заданы ВП $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ с непрерывно-дифференцируемыми функциями *P, Q, R* и некоторая ориентированная гладкая линия *L* с единичным вектором касательной $\bar{l}_o$.

Линейным интегралом ВП $\bar{a}$ вдоль ориентированной линии *L* называется криволинейный интеграл 2-го рода от вектор-функции $\bar{a}$:

$$\int_L (\bar{a}, \bar{l}_o)dl = \int_L Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Если $\bar{a}$ - силовое поле, то линейный интеграл равен работе, которую совершает поле по перемещению материальной точки вдоль линии *L*.

Вычисление линейного интеграла сводится к известным способам вычисления криволинейного интеграла 2-го рода (см. соответствующий раздел).

Линейный интеграл ВП $\bar{a}$ вдоль замкнутого ориентированного контура *L* называется циркуляцией ВП $\bar{a}$ вдоль этого контура и обозначается

$$Ц_L(\bar{a}) = \oint_L (\bar{a}, \bar{l}_o)dl\,.$$

Циркуляция характеризует вращательную способность ВП $\bar{a}$ вдоль контура *L*.

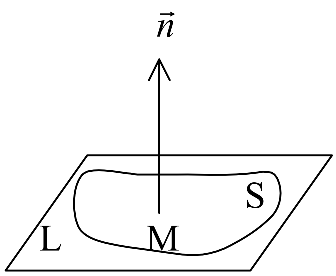
Если $Ц_l(\bar{a}) > 0$ ($Ц_l(\bar{a}) < 0$), то контур *L* , расположенный в силовом поле $\bar{a}$ и свободно закрепленный в своем центре тяжести, будет вращаться в положительном (отрицательном) направлении относительно своей ориентации.

Если $Ц_l(\bar{a}) = 0$, то контур L не вращается.

Плотность циркуляции ВП $\bar{a}$ в точке M по направлению $\bar{n}$ есть число, определяемое соотношением

$$ПЦ_{\bar{n}}(M) = \lim_{\substack{S \to 0 \\ (L \to M)}} \frac{Ц_L(\bar{a})}{S},$$

где *S* - площадь, ограниченная замкнутым контуром *L* лежащим в плоскости с нормалью $\bar{n}$, содержащей точку *M*, и стягивающимся в пределе к этой точке.



Плотность циркуляции характеризует вращательную мощность ВП по выбранному направлению в каждой его точке.

Вектор, направленный в сторону максимальной плотности циркуляции ВП $\bar{a}$ в точке М и равный ей по модулю, называется *ротором* ВП $\bar{a}$ и обозначается rot$\bar{a}$ (M). Связь между плотностью циркуляции и ротором выражается формулой:

$$ПЦ_{\bar{n}}(M) = (\,\mathrm{rot}\,\bar{a}\,(\mathrm{M}),\ \bar{n}_{\mathrm{o}}),$$

где $\bar{n}_{\mathrm{o}}$ – единичный вектор направления $\bar{n}$.

В декартовой системе координат rot$\bar{a}$ (M) вычисляется по формуле:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}\,.$$

Теорема Стокса. Циркуляция ВП $\bar{a}$ вдоль замкнутого ориентированного контура *L* равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность *Q,* натянутую на этот контур и положительно ориентированную относительно его:

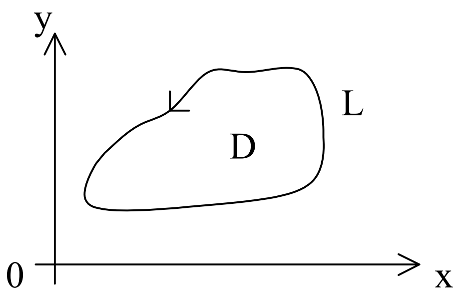
$$Ц_L(\bar{a}) = \oint_L (\bar{a}, \bar{l}_o)dl = \iint_{\sigma} (rot\bar{a}, \bar{n}_o)d\sigma = П_{\sigma}(rot\bar{a})\,.$$

Отметим, что поверхность σ считается положительно ориентированной относительно контура *L*, если на σ выбрана сторона, в точках которой вектор нормали $\bar{n}$ направлен так, чтобы видимый с его конца обход контура *L* совершался против часовой стрелки (см.рисунок).

Для плоского ВП $\bar{a} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ выражение для ротора принимает вид $rot\bar{a} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$, и из формулы Стокса следует *формула Грина*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Формула Стокса позволяет свести вычисление циркуляции ВП $\bar{a}$ по замкнутому контуру *L* к вычисление потока поля rot$\bar{a}$ через любую незамкнутую поверхность σ, натянутую на контур *L*. На практике следует выбирать σ наиболее простой формы (например, плоскость).



Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Для ВП $\bar{a}=(1+2xy)\bar{i}-zy^2\bar{j}+(yz^2-2yz+1)\bar{k}$ найти: а) ротор; б) плотность циркуляции в точке M(2; -1; 2) по направлению $\bar{n}=\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$; в) наибольшую плотность циркуляции в точке M.

Решение. ВП $\bar{a}$ определено и дифференцируемо всюду в R^3:

$$rot\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 1+2xy & -zy^2 & yz^2-2yz+1\end{vmatrix}=\left(z^2-2z+y^2\right)\bar{i}-2x\bar{k}\ ;$$

$rot\bar{a}(M)=\bar{i}-4\bar{k}$.

Для вычисления $ПЦ_{\bar{n}}(M)$ находим $\bar{n}_o=\dfrac{\bar{n}}{|\bar{n}|}=\dfrac{1}{3}(1;-2;-2)=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ и далее по формуле $ПЦ_{\bar{n}}(M)=(\,\mathrm{rot}\,\bar{a}\,(M),\ \bar{n}_{o})=1\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+(-4)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=3$.

Наибольшая плотность циркуляции поля в точке M равна длине ротора в этой точке, т.е. $\max\limits_{\bar{n}} ПЦ_{\bar{n}}(M)=\left|rot\bar{a}(M)\right|=\sqrt{1+4^2}=\sqrt{17}$.

Пример 2. Найти ротор поля линейных скоростей точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси проходящей через начало координат.

Решение. Поле линейных скоростей точек тела определится вектором $\bar{\upsilon}(M)=\bar{\omega}\times\bar{r}(M)$, где $\bar{\omega}=\left(\omega_x,\omega_y,\omega_z\right)$- вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения, $\bar{r}(M)=(x,y,z)$- радиус-вектор точки M. Отсюда следует, что

$$\bar{\upsilon}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\left(z\omega_y-y\omega_z\right)\bar{i}+(x\omega_z-z\omega_x)\bar{j}+(y\omega_x-x\omega_y)\bar{k}.$$

Далее,

$$rot\bar{\upsilon} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x\bar{i} + 2\omega_y\bar{j} + 2\omega_z\bar{k} = 2\bar{\omega}.$$

Пример 3. Вычислить работу силового поля $\bar{F} = -\left(a\cos t\bar{i} + b\sin t\bar{j}\right)$ вдоль дуги L эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от точки $A(a;\ 0)$ до точки $B(0;\ b)$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, причем точкам A и B соответствуют значения параметра $t_A = 0,\ t_B = \pi/2$.

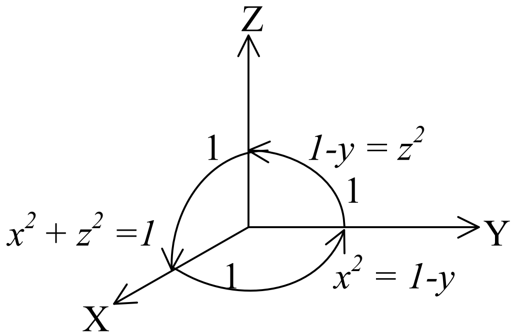
Работа есть линейный интеграл ВП $\bar{F}$ вдоль дуги L:

$$A = \int_L Pdx + Qdy = \begin{vmatrix} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{vmatrix} = -\int_0^{\pi/2}\left(a\cos t(-a\sin t) + b\sin t\cdot b\cos t\right)dt = -(b^2 - a^2).$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt = (a^2 - b^2)\int_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t) = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Пример 4. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ по контуру L, получаемому при пересечении параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями: а) непосредственно; б) с помощью теоремы Стокса.

Решение. а) Ц = $\oint\limits_{ABCA}(\bar{a},\bar{l}_o)dl = \int\limits_{AB}(\bar{a},\bar{l}_o)dl + \int\limits_{BC}(\bar{a},\bar{l}_o)dl + \int\limits_{CA}(\bar{a},\bar{l}_o)dl$.



На AB: $z = 0,\ x^2 = 1 - y$.

$$\int\limits_{AB}(\bar{a},\bar{l}_o)dl = \int\limits_{AB}Pdx + Qdy + Rdz = \begin{vmatrix} \bar{a} = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} \\ y = 1 - x^2 \\ dy = -2xdx \end{vmatrix} = \int_1^0\left[(1 - x^2)^2 - x^2(-2x)\right]dx =$$

$$= \int_1^0(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{31}{30}.$$

На BC: $x = 0, z^2 = 1 - y$.

$$\int\limits_{BC}(\bar{a},\bar{l}_o)dl = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = \begin{vmatrix} \bar{a} = y^2\bar{i} + z^2\bar{k} \\ dx = 0 \\ y = 1 - z^2 \\ dy = -2zdz \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 (0\cdot(-2z) + z^2)dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

На CA: $y = 0, x^2 + z^2 = 1$.

$$\int\limits_{CA}(\bar{a},\bar{l}_o)dl = \int\limits_{CA} Pdx + Qdy + Rdz = \begin{vmatrix} \bar{a} = -x^2\bar{j} + z^2\bar{k} \\ dy = 0 \end{vmatrix} = \int\limits_1^0 z^2 dz = -\frac{1}{3}.$$

$$Ц = -\frac{31}{30} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{31}{30}.$$

б) Используем теорему Стокса. В качестве поверхности σ, натянутой на контур L, возьмем поверхность параболоида в виде $y = y(x, z) = 1 - x^2 - z^2$. Ее проекция D_{xz} на плоскость xOy есть четверть круга $x^2 + z^2 = 1$. Вектор нормали $\bar{n}_o$ к верхней стороне этой поверхности обеспечивает требуемое теоремой Стокса направление обхода контура L.

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y)\bar{k}.$$

Применяя теорему Стокса и полагая далее $\bar{n} = (-y'_x; 1; -y'_z) = (2x, 1, 2z)$ имеем:

$$Ц_L(\bar{a}) = П_Q(rot\bar{a}) = \iint\limits_Q (rot\bar{a}, \bar{n}_o)dq = \left|\cos(\bar{n}_o, Oy) > 0\right| = \iint\limits_{D_{xz}} \left.(rot\bar{a}, \bar{n})\right|_{y=1-z^2-x^2} dxdz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} \left.-2(x+y)\cdot 2z\right|_{y=1-z^2-x^2} dxdz = -4\iint\limits_{D_{xz}} z(x + 1 - z^2 - x^2)dxdz = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -4\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^2(r\cos\varphi + 1 - r^2)dr = -4\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 +$$

$$+ 4\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \int\limits_0^1 (r^2 - r^4)dr = -4\cdot\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} - 4\cdot\left.\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\right|_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{8}{15} = -\frac{31}{30}.$$

Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.*Для ВП $\bar{a} = (2y - 3xz^2)\bar{i} - (2xz - 3y^2)\bar{j} + (y^2 - 3x^2)\bar{k}$ найти: а) ротор; б) плотность циркуляции в точке *M(1; -2; -3)* по направлению $\bar{n} = 2\bar{i} + \bar{j}$; в) наибольшую плотность циркуляции в точке М. (*Ответ. а)* $rot\bar{a} = (2x + 2y, 6x - 6xz, -2z - 2)$*; б)* $ПЦ_{\bar{n}}(M) = 20/\sqrt{5}$; *в)* $max\, ПЦ_{\bar{n}}(M) = 2\sqrt{149}$).

Задача 2. Найти ротор напряженности магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному линейному проводу. (*Ответ*. $rot\bar{H}\,(M)=0$).

Задача 3. Вычислить линейный интеграл ВП $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + (x + y - 1)\bar{k}$ вдоль отрезка прямой AB, где A(1; 1; 1), B(2; 3; 4). *(Ответ.* 13).

Задача 4. Найти работу силового поля $\bar{F} = x^2\bar{i} + y\bar{j} + \cos z\bar{k}$ по дуге винтовой линии $x = cost, y = sint, z = 2t$ при $0 \le t \le \frac{3}{2}\pi$. (*Ответ*. А = 1/6).

Задача 5. Показать, что работа поля магнитной напряженности бесконечного линейного проводника $\bar{H} = \dfrac{2I(-y\bar{i} + x\bar{j})}{x^2 + y^2}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = H_o$ не зависит от радиуса окружности.

Задача 6. Вычислить линейный интеграл ВП $\bar{a} = y^2\bar{i} + (x^2 + 1)\bar{j} + z\bar{k}$ вдоль кривой $L=AB$, соединяющей точки *A(1; 0; 0), B(0; 1; -1)* по линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x^2 + 2y + z = 1$. (*Ответ*. 3/2).

Задача 7. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = (x + 3y + 2z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$ по контуру ΔABC, где *A(2; 0; 0), B(0; 3;0), C(0; 0; 1).* (*Ответ*. Ц = -5).

Задача 8. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = x^2y^3\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ (в положительном направлении относительно орта $\bar{k}$). (*Ответ*. Ц = $= -\dfrac{\pi R^6}{8}$).

Задача 9. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ вдоль контура L, вырезаемого из цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 1$ (в положительном направлении относительно орта $\bar{k}$). (*Ответ*. Ц = -π).

Задача 10. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = (z^2 - x^2)\bar{i} + (x^2 - y^2)\bar{j} + (y^2 - z^2)\bar{k}$ вдоль контура L, вырезаемого конусом $x^2 + y^2 = z^2$ в полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$ (в положительном направлении относительно орта $\bar{k}$). (*Ответ*. Ц = 0).

Задача 11. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = y^2\bar{i} + xy\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$ по контуру L, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = z$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ (в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида). (*Ответ*. Ц = 1/3).

Задача 12. Найти циркуляцию ВП $\bar{a} = y\bar{i} - 2z\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением однополостного гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$ (в положительном направлении относительно орта $\bar{i}$). (*Ответ*. Ц = $3\pi R^2$).

9.4. Специальные виды векторных полей

Векторное поле $\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ заданное в области V, называется *потенциальным*, если в области V существует непрерывно-дифференцируемая скалярная функция U, что вектор $\bar{a}$ можно представить в виде градиента этой функции

$$\bar{a} = grad u \qquad (1)$$

Функция u называется потенциальной функцией или потенциалом векторного поля. (Для силовых полей функция U называется *силовой функцией*, а функция u – *потенциалом*).

Если векторное поле $\bar{a}$ потенциально в области V, то для его задания достаточно одной скалярной функции – потенциала этого поля, так как из формулы (1) следует, что в этом случае $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}$, откуда $Pdx+Qdy+Rdz=du$.

Если векторное поле $\bar{a}$ потенциально, выражение $Pdx+Qdy+Rdz=du$ есть полный дифференциал потенциала этого поля.

Теорема 1. Для того, чтобы дифференцируемое векторное поле $\bar{a}$, заданное в области V, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$rot\bar{a} = 0 \qquad (2)$$

Для того, чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Выполнение условия (2) в области V приводит не только к потенциальности векторного поля, но и к следующим результатам.

1. В области V существует потенциал $U = u(x, y, z)$, который может быть определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого по формуле:

$$U(x,y,z) = \int_{x_o}^{x} P(x,y,z)\Big|_{\substack{y=y_o\\ z=z_o}} dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y,z)\Big|_{z=z_o} dy + \int_{z_o}^{z} R(x,y,z)dz + C, \qquad (3)$$

где $(x_o, y_o, z_o) \in V$ – любая фиксированная точка; (x, y, z) – переменная точка в области V, C – произвольная постоянная. Во втором интеграле формулы (3) постоянно x, а в третьем x и y.

2. Циркуляция векторного поля $\overline{a}$ по произвольному замкнутому контуру $L \in V$ равно нулю: $Ц_l(\overline{a}) = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = 0$.

Если же хотя бы в одной точке, внутренней по отношению к контуру L, поле $\overline{a}$ не определено, циркуляция по этому контуру может и не обращаться в нуль, хотя поле потенциально.

3. Для любых двух точек A и B в области V значение линейного интеграла векторного поля $\overline{a}$, т.е. $W = \int\limits_{AB} (\overline{a}, d\overline{r})$, не зависит от вида контуру интегрирования AB, соединяющего точки A и B и расположенного в области V, а зависит только от положения этих точек в области.

4. Если $U(x, y, z)$ – потенциал векторного поля $\overline{a}$, то линейный интеграл этого поля вдоль любого контура $AB \subset V$, соединяющего точки $A(x_o, y_o, z_o)$ и $B\ (x_1, y_1, z_1)$ равен разности значений потенциала в конечной и начальной точек контура интегрирования:

$$W = \int\limits_{AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_o, y_o, z_o) \tag{4}$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что если $\overline{a}$ - силовое поле, то разность потенциалов между точками B и A равна работе, которую поле совершает по перемещению материальной точки из A в B.

Векторное поле $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$, заданное в области V, называется *соленоидальным (трубчатым),* если

$$div\overline{a} = 0. \tag{5}$$

Соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков.

Векторное поле $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$, заданное в области V, называется *гармоническим (лапласовым),* если оно является как потенциальным, так и соленоидальным, т.е.

$$\begin{cases} rot\overline{a} = 0 \\ div\overline{a} = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Установить потенциальность поля

$$\overline{a} = (3x^2y^2z^{-1} - 2x^3)\overline{i} + (2x^3yz^{-1})\overline{j} + (z^3 - x^3y^2)\overline{k},$$

найти его потенциал и вычислить линейный интеграл W поля вдоль контура $L = AB$, где $A(1, 2, 2)$, $B(1, 3, 1)$.

Решение. Данное векторное поле определено и дифференцируемо во всех точках пространства, за исключением точек плоскости $z = 0$, так как в этих точках координаты вектора $\overline{a}$ не определены. Исключив эти точки, получим неодносвязную область, в которой проекции вектора $\bar{a}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Найдем

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2z^{-1} - 2x^3 & 2x^3yz^{-1} + 3y^3 & z^3 - x^3y^2z^{-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-2yx^3z^{-2} + 2yx^3z^{-2})\bar{i} - (-3x^2y^2z^{-2} + 3x^2y^2z^{-2})\bar{j} + (6x^2yz^{-1} - 6x^2yz^{-1})\bar{k} = 0.$$

Данное поле является потенциальным там, где $z \neq 0$.

Найдем потенциал поля $\bar{a}$, выбрав в качестве точки (x_o, y_o, z_o) точку (0, 0, 1) (начало координат брать нельзя, т.к. при z = 0 поле не является потенциальным).

$$U(x,y,z) = \int_0^x (3x^2y^2z^{-1} - 2x^3)\Big|_{\substack{y=0\\z=1}} dx + \int_0^y (2x^3yz^{-1} + 3y^3)\Big|_{z=1} dy +$$

$$+ \int_1^z (x^3 - x^3y^2z^{-2})dz + C = -2\int_0^x x^3dx + \int_0^y (2x^3y + 3y^3)dy +$$

$$+ \int_1^z (z^3 - x^3y^2z^{-2})dz + C = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + x^3y^2z^{-1} + C_1,$$

где $C_1 = C - \dfrac{1}{4}$ – *произвольная постоянная.*

Вычислим линейный интеграл W поля $\bar{a}$ вдоль линии AB.

$$W = \int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + x^3y^2z^{-1} + C_1 \right)\Bigg|_{A(1,2,2)}^{B(1,3,1)} = 52.$$

Пример 2. Установить, является ли соленоидальным векторное поле $\bar{a} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$.

Решение. $div\bar{a} = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 = 0$ - поле соленоидально.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Доказать, что плоское векторное поле $\bar{a} = x\ln(1 + y^2)\bar{i} + yx^2(1 + y^2)^{-1}\bar{j}$ является потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл

W поля $\bar{a}$ от точки А(2, 3) до точки В(-4, 7).(*Ответ*. $U(x,y)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+y^2)+C$, $W=2(4\ln 50-\ln 10)$).

Задача 2. Убедившись в том, что заданное векторное поле $\bar{a}$ является потенциальным, найти потенциал поля и вычислить для точек A и B линейный интеграл $\int\limits_{AB}(\bar{a},d\bar{r})$,если: а) $\bar{a}=(x^2-2yz)\bar{i}+(y^2-2xz)\bar{j}+(z^2-2xy)\bar{k}$, А(1; 1; 1), В(-1; 2; -2); б) $\bar{a}=(2xz+y^{-1})\bar{i}-(x+z)y^{-2}\bar{j}+(x^2+y^{-1})\bar{k}$, А(-1; 3; -2), В(1; 2; 3). (*Ответ*. а) $U(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz+C$, $W=-\frac{22}{3}$;б)$U(x,y)=x^2z+$ $+(x+z)y^{-1}+C$, $W=8$.)

9.5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа

Основные характеристики векторного анализа – градиент, дивергенция, ротор (называемые дифференциальными операциями первого порядка) – и операции над ними удобно представить с помощью оператора Гамильтона (*оператора «набла»*):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

Имеют место следующие *правила действий с помощью набла*:

1. произведение оператора ∇ на скалярную функцию *u(x, y, z)* дает градиент этой функции: ∇u = *grad u;*
2. скалярное произведение оператора ∇ на векторную функцию $\bar{a}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ дает дивергенцию этой функции: $(\nabla,\bar{a})=div\,\bar{a}$;
3. векторное произведение оператора ∇ на векторную функцию $\bar{a}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ дает ротор этой функции: $[\nabla,\bar{a}]=rot\,\bar{a}$.

Если в области *V* заданы скалярное поле и векторное поле $\bar{a}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$, причем функции *P, Q, R* дважды дифференцируемы в области *V*, то в этой области *grad u* и *rot*$\bar{a}$ представляют собой дифференцируемые векторные поля, а *div*$\bar{a}$ - дифференцируемое скалярное поле. В этом случае возможны следующие операции второго порядка в векторном анализе: *grad div*$\bar{a}$; *div grad u; divrot*$\bar{a}$, *rot grad u; rot rot*$\bar{a}$. С помощью оператора ∇ можно показать, что *divrot*$\bar{a}$ = 0, *rot grad u = 0.* Одной из основных операций второго порядка является *div grad u.* Кратко эту операцию обозначают Δu, причем символ $\Delta=(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называют *оператором Лапласа*.

$$div\,grad\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Уравнение $\Delta\ u = 0$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ называется *уравнением Лапласа*, а его решение – *гармоническими функциями*.

Скалярное поле $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющее уравнению Лапласа, называется *гармоническим полем*.

Операции $grad\ div\bar{a}$ и $rot\ rot\bar{a}$ связаны между собой соотношением:
$rot\ rot\bar{a} = grad\ div\bar{a} = \Delta\ a$, где $\Delta\ a = \Delta P\bar{i} + \Delta Q\bar{j} + \Delta R\bar{k}$ представляет собой вектор, проекции которого равны ΔP, ΔQ, ΔR (P, Q, R – проекции векторной функции $\bar{a}$).

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Для поля вектора $\bar{a} = x(y^2+z^2)\bar{i} + y(x^2+z^2)\bar{j} + z(x^2+y^2)\bar{k}$ вычислить: а) $\nabla\bar{a}$; б) $[\nabla, \bar{a}]$; в) $\nabla(\nabla\bar{a})$.

Решение. а) $\nabla\bar{a} = div\bar{a} = y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2);$

б)

$$[\nabla,\bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x(y^2+z^2) & y(x^2+z^2) & z(x^2+y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (2zy - 2yz)\bar{i} - (2xz - 2xz)\bar{j} + (2xy - 2xy)\bar{k} = 0.$$

в) $\nabla(\nabla\bar{a}) = grad\ div\bar{a} = grad(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = 4x\bar{i} + 4y\bar{j} + 4z\bar{k} = 4\bar{r}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Пусть $\bar{r} = x\bar{r} + y\bar{j} + z\bar{k}, \bar{r} = |\bar{r}|$, C – постоянный вектор, u – дифференцируемая скалярная функция. С помощью оператора набла определить: а) $div(r^2c)$, б) $rot((c,r)r)$, в) $div\ grad u(r)$. (*Ответ*. а) $2r(r;c)$, б) $[c, r]$; в) $u''(r)+(2u'(r))/r$.

Задача 2. Вычислить $\Delta\ u$ в точке M, если а) $u = 3x^2 z^2 - (x + y - 2z^2)^2 + 2z^2$, $M(2;1;-1)$; б) $u = \sin^2(2x - 3y + z) - 2x^2 + y^2 + z^2$, $M(-1; -1; -1)$.

9.6. Ряды Фурье

1. *Рядом Фурье* для периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной в интервале (-π,π), называется ряд

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad , \qquad (7)$$

если его коэффициенты вычислены по формулам Фурье:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 1,2,...),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx \quad (n = 1,2,...). \tag{8}$$

Если ряд (7) сходится, то его сумма *S(x)* есть периодическая функция с периодом 2π.

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье сформулированы в следующей

Теореме Дирихле: Если на интервале $(-\pi,\pi)$ функция *f(x)* имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке интервала $(-\pi,\pi)$, и сумма *S(x)* этого ряда:

1) *S(x)* = *f(x)* во всех точках непрерывности функции *f(x)*, лежащих внутри $[-\pi,\pi]$;

2) $S(x_o) = \frac{1}{2}\left[f(x_o - 0) + f(x_o + 0)\right]$, где x_0 – точка разрыва I рода;

3) $S(x) = \frac{1}{2}\left[f(-\pi + 0) + f(+\pi - 0)\right]$ на концах отрезка.

Для четной функции (т.е. если *f(x) = f(-x))* ряд Фурье (7) принимает вид:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad , \tag{8}$$

где
$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 1, 2, ...). \tag{9}$$

Для нечетной функции (т.е. если *f(x) = -f(-x))* ряд Фурье (7) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \tag{10}$$

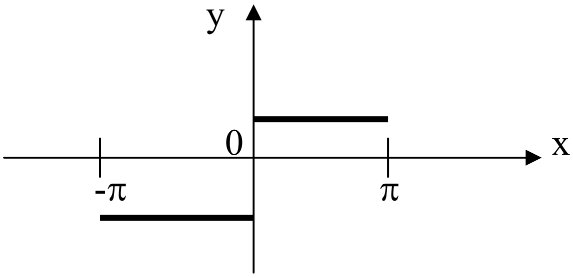
где
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad (n = 1, 2, ...). \tag{11}$$

Рассмотрим примеры разложения функций в ряд Фурье.

Задачи для решения в аудитории

Пример 1. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{\textit{при}} \quad 0 \le x < \pi, \\ -1 & \text{\textit{при}} \quad -\pi \le x < 0. \end{cases}$

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, ее график приведен на рисунке.



f(-x) = f(x), т.е. *f(x)* – нечетная,

$a_o = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin nxdx = -\dfrac{2}{\pi n}\left(\cos n\pi - 1\right) = \dfrac{2}{\pi n}(1-(-1)^n,$

Итак,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad n - \text{\textit{четном}}, \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{\textit{при}} \quad n - \text{\textit{нечетном.}} \end{cases}.$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

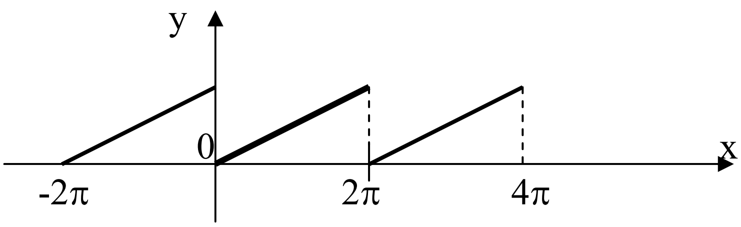
Обозначим сумму ряда *S(x),* тогда очевидно *S(0) = 0, S(π) = 0, S(-π) = 0 (f(0) = 1; f(π)* неопределена*, f(-π) = -1).*

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию *f(x)*, заданную на интервале (0, 2π) формулой *f(x) = x*.

Решение. На рисунке показан график заданной функции с ее периодическим продолжением:



$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}, \quad f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right), x \in (0, 2\pi).$$

Так как в интервале (0, 2π) функция *f(x)* = *x* непрерывна, то полученный ряд сходится к *x* во всех точках этого интервала. В точках $x = 2\pi n$ *(n = 0, 1, 2, ...),* которые являются точками разрыва функции, ряд сходится и имеет своей суммой

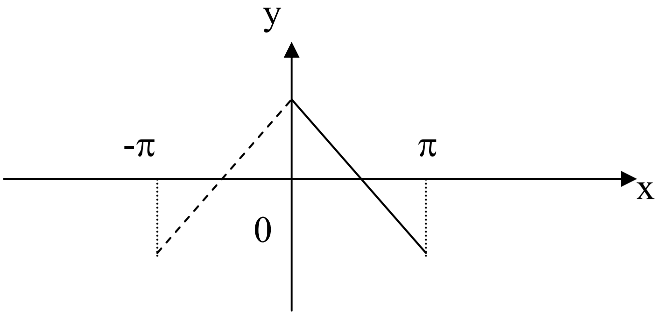
$$\frac{f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)}{2} = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi.$$

Замечание. Если f(x) задана в интервале (0, +π), то в соседний интервал (-π, 0) можно осуществить как ее четное, так и ее нечетное продолжение.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию *f(x)*, заданную на интервале

0 < x < π формулой $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

Решение. Продолжим эту функцию на *(-π, 0)*, например, четным образом.



$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = 0; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx dx = \begin{cases} 0 & при \quad n - четном, \\ \frac{2}{\pi n^2} & при \quad n - нечетном \end{cases}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $(-\pi,\pi)$ формулой $f(x) = |x|$, имеющую период 2π.

(*Ответ*. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\left(cosx + \dfrac{\cos 3x}{9} + ... + \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + ...\right),\ \ x \in (-\pi,\pi).$)

Задача 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $(0< x <2\pi)$ формулой $f(x) = x^2$.

(Ответ.

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\left(cosx - \pi\sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi\sin 2x}{2} + ... + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} + ...\right),$$

$x \in (-\pi,\pi).$

в компактном виде: $x^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}.$

Задача 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi)$ формулой $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}.$

(*Ответ.*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x + \frac{2}{\pi \cdot 5^2}\cos 5x + ...\right) +$$
$$+\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + ...\right).$$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi)$ формулой $f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}.$

(*Ответ*. $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1} + \dfrac{2\sin 2x}{2} + \dfrac{2\sin 3x}{3} + \dfrac{2\sin 4x}{4} + ...$).

2. Если период функции равен не 2π, а $2l$, т.е. функция задана на интервале ($-l$, l), то ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right). \qquad (12)$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_o = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \qquad (13)$$

Если функция *f(x)* на интервале (*-l, l*) четная, то все коэффициенты $b_n = 0$ и ряд Фурье (12) имеет вид:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}. \qquad (14)$$

Здесь

$$a_o = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n = (1, 2, \ldots). \qquad (15)$$

Для нечетной на интервале (*-l, l*) функции *f(x)* ряд (12) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad (16)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \qquad (n = 1,\ 2, \ldots). \qquad (17)$$

3. Любую непериодическую функцию *f(x),* заданную на отрезке *(0,l)* можно разложить в ряд Фурье, построив вспомогательную функцию *φ(x)* такую, что :

1) *φ (x)* периодическая с периодом *2l*;
2) *φ (x)* на отрезке *(0, l)* совпадает с функцией *f(x).*

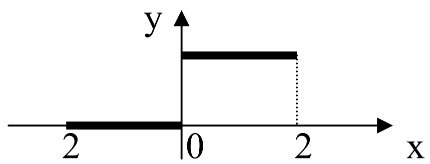
Если *φ (x)* дополнить так, что на отрезке *(–l, l)* она будет нечетной, то в разложение этой функции в ряд Фурье $a_o = a_1 = \ldots = 0$. Такое разложение называется *разложением по синусам*.

Если *φ (x)* дополнить так, что на отрезке *(–l, l)* она будет четной, то в разложение этой функции в ряд Фурье $b_o = b_1 = \ldots = 0$. Такое разложение называется *разложением по косинусам*.

Задачи для решения в аудитории.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию *f(x)*, заданную на отрезке (-2,2) формулой $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при} \quad 0 < x < 2. \end{cases}$

Решение.



$$a_o = \frac{1}{2}\int_0^2 2dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \int_0^2 \cos\frac{\pi nx}{2} = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n}\cdot 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx = \int_0^2 \sin\frac{\pi nx}{2} = \frac{2}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n}\cdot\left(-(-1)^4+1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases};$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

Пример 2. Разложить функцию, заданную на отрезке [0, 1] формулой *–(x)=2 - x*: а) по синусам; б) по косинусам; в) по синусам и косинусам.

Решение. а) Дополним функцию $f^*(x)$ на отрезке [-1,1] как нечентую. Период функции равен $2l = 2 \Rightarrow l = 1$. В этом случае $a_o = a_1 = \ldots = 0.$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{1}\int_0^1 (2-x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 2\left(2\int_0^1 \sin\pi nx dx - \int_0^1 x\sin\pi nx dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 0\right) - 0 = \frac{5}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{n\pi};$$

$$b_1 = -\frac{9}{\pi};\ b_2 = \frac{1}{2\pi};\ b_3 = -\frac{9}{3\pi};\ b_4 = \frac{1}{4\pi}.$$

$$f(x) = -\frac{9}{\pi}\sin\pi x + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{9}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x - \ldots$$

б) Дополним функцию $f^*(x)$ на отрезке [-1,1] как четную. В этом случае период функции равен $2l = 2 \Rightarrow l = 1$. В этом случае $b_o = b_1 = \ldots = 0.$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{1}dx = \frac{2}{1}\int_0^1 (2-x)\cos\frac{\pi nx}{1}dx = 2\left(2\int_0^1 \cos\pi nx dx - \int_0^1 x\cos\pi nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\cos\pi nx\Big|_0^1 = \frac{1}{(n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$a_0 = \int_0^1 (2-x)dx = \frac{3}{2};\quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$f(x) = -\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{2}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{2}{\pi^2 5^2}\cos 5\pi x - \ldots$$

в) В данном случае отрезок [0,1] представляет собой период функции, следовательно $l = 1/2$. Дополним функцию $f(x)$ на отрезке как не четную и не нечетную. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 (2-x)dx = 3; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = 2\int_0^1 (2-x)\cos\frac{\pi nx}{\frac{1}{2}}dx = 2\int_0^1 (2-x)\cos 2\pi nx dx = 0.$$

$$b_n = 2\int_0^1 (2-x)\sin\frac{\pi nx}{\frac{1}{2}}dx = 2\int_0^1 (2-x)\sin 2\pi nx dx = \frac{1}{\pi n};$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x + \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x + \ldots$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке [-1, 1] формулой $f(x) = \begin{cases} 1 & при \quad -1 \le x < 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

(*Ответ*. $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)x + \sin\pi nx).$).

Задача 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале [-2,2] формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad -2 \le x < 0, \\ x & при \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

(*Ответ*. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi nx}{2}}{n}$).

Задача 3. Функцию, заданную на интервале *(0, l)* формулой *f(x) = x(l – x),* разложить в ряд по синусам.

(*Ответ*. $f(x) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}$).

Задача 4. Разложить функцию *f(x)* заданную на отрезке (0;1) формулой *f(x) = 2x* в ряд Фурье: а) по синусам; б) по косинусам; в) по синусам и косинусам. *(Ответ.*

$$a)\quad f(x) = \frac{4}{\pi}\sin \pi x - \frac{4}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x - \ldots;$$

$$б)\quad f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{8}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{8}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \ldots)$$

$$в)\quad f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{2}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{2}{3\pi}\sin 6\pi x - \ldots$$