

Интегральное исчисление функции одной переменной.

Первообразная функция. Неопределенный интеграл.

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Определение: **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением $F(x) + C$. Записывают:

$$\int f(x) dx = F(x) + C;$$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left[\int f(x) dx \right]' = [F(x) + C]' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x) dx \right) = d[F(x) + C] = dF(x) + dC = dF(x) = f(x) dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx;$ (проверяется дифференцированием с учётом 1.)

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Методы интегрирования.

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др. Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Пусть требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомым интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны

$$[\ln(-x)]' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	11	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$
2	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	12	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
4	$\int e^x dx$	$e^x + C$	14	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
5	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
6	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
7	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$	17	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$	18	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
9	$\int \frac{dx}{x^2 + 1}$	$\operatorname{arctg} x + C$	19	$\int e^{ax} \cos bxdx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$	20	$\int e^{ax} \sin bxdx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$

Рассуждая подобным образом, можно найти интегралы 1-10 приведённой таблицы. Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, то для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже. Ими мы и воспользуемся для вычисления интегралов 11-20 таблицы.

Способ подстановки (замены переменных).

Если сложно с помощью непосредственного интегрирования отыскать первообразную функции $f(x)$, то можно воспользоваться заменой переменных таким образом, чтобы полученный в результате интеграл, можно было бы найти используя табличные значения. Рассмотрим интеграл

$$\int f(x)dx$$

Сделаем в нём замену $x = \varphi(t)$, получим:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Данная формула носит название **формулы замены переменных в неопределённом интеграле**. При этом, как уже было сказано, замену надо делать таким образом, чтобы свести исходный интеграл к табличному. Рассмотрим несколько примеров

Пример. Найти неопределённый интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример. $\int \operatorname{tg} x dx$, $\int \operatorname{ctg} x dx$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Рассмотрим линейную замену переменных $t = ax + b$. Тогда

$$dt = a dx, dx = \frac{1}{a} dt.$$

Поэтому, если известно, что $F(x)$ первообразная к $f(x)$ т.е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

то первообразная к функции $f(ax + b)$ равна

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Пример. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

Пример. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x/a)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1/a} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

Аналогично доказывается, что $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Пример. Вычислить интегралы $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx =$$

$$= -\ln|\cos(x/2)| + \ln|\sin(x/2)| + C = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \pi/2)} = \{t = x + \pi/2\} = \int \frac{dx}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Приведём в конце ещё несколько примеров применения метода замены переменной

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx \right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int (2x+1)^{20} dx = \{2x+1=t; \quad dt=2dx\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2} dt =$$

$$= -2t^{-1/2} + C = -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

В ряде случаев метод интегрирования по частям приводит к так называемому «зацикливанию». В этом случае, возможно выразить интеграл алгебраически. Рассмотрим пример

Пример. Вычислить интегралы $\int e^{ax} \cos b x dx$, $\int e^{ax} \sin b x dx$

$$I = \int e^{ax} \cos b x dx = \frac{1}{b} \int e^{ax} d \sin b x = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = a e^{ax} dx; \\ dv = \cos b x dx; \quad v = \frac{1}{b} \sin b x \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int \sin bx \cdot e^{ax} dx &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax} d\cos bx = \\ \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} d\cos bx &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I \end{aligned}$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{b^2}I &= \frac{b}{b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx \\ \int e^{ax}\cos bxdx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов. Рассуждая, аналогично можно найти

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

Интегрирование с помощью рекуррентных соотношений

Иногда, подынтегральная функция зависит от натурального параметра n . В этом случае при вычислении неопределенных интегралов удобно пользоваться рекуррентными соотношениями.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^n dx}{a^2+x^2}, n \in \mathbb{N}$. Этот интеграл зависит от натурального параметра n . Обозначим этот интеграл через I_n . Тогда

$$I_0 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad I_1 = \int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C$$

Для вычисления интеграла I_n сделаем следующее преобразование.

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{a^2+x^2} = \int \frac{x^n + a^2 x^{n-2} - a^2 x^{n-2} dx}{a^2+x^2} = \int x^{n-2} dx - a^2 \int \frac{x^{n-2} dx}{a^2+x^2} = \frac{x^{n-1}}{n-1} - a^2 I_{n-2}$$

Таким образом,

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - a^2 I_{n-2}$$

Такие формулы называются **рекуррентными**. Зная значения I_0 и I_1 можно получить значения I_n при любом натуральном n .

Различные примеры

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx &= \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + \\ &+ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \frac{1}{5} e^{5x}; \end{cases} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx = \\ &= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right). \\ \int x^2 e^{5x} dx &= \begin{cases} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx; & v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{cases} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} dx &= \begin{cases} u = \ln x; & dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; & v = -\frac{1}{2x^2}; \end{cases} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \\ &-\frac{1}{4} x^{-2} + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \begin{cases} u = \ln x; & dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{cases} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = -\frac{1}{2x(a^2+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)} = \\ &= -\frac{1}{2x(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a^2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2+x^2} \right) dx = -\frac{1}{2x(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^2 x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^2} &= -\frac{1}{2} \int x d\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \\ &= -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \left(\frac{x-1}{1+x^2} \right)^2 dx$

$$\int \left(\frac{x-1}{1+x^2} \right)^2 dx = \int \frac{x^2+1-2x}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2} dx - 2 \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} + C$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \left(\frac{x-1}{1+x^2} \right)^2 e^x dx$

Используя предыдущий результат, имеем:

$$\int \left(\frac{x-1}{1+x^2} \right)^2 e^x dx = \int \frac{e^x dx}{1+x^2} + \int e^x d \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \int \frac{e^x dx}{1+x^2} + \frac{e^x}{1+x^2} - \int \frac{e^x dx}{1+x^2} + C =$$

$$= \frac{e^x}{1+x^2} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x+2})\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x+2})\sqrt{\sqrt{x+2}-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x+2}-1} = t, \quad \sqrt{x+2} = t^2 + 1 \\ x = (t^2 + 1)^2 - 2, \quad dx = 2t(t^2 + 1)dt \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int \frac{t(t^2 + 1)dt}{(2+t^2)[(t^2 + 1)^2 - 2]} = \{t^2 + 1 = z\} = \int \frac{zdt}{(1+z)(z^2 - 2)} =$$

$$= \int \frac{z-1}{z^2 - 2} dz - \int \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dz^2}{z^2 - 2} - \int \frac{dz}{z^2 - 2} - \int \frac{dz}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|z^2 - 2| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}} \right| - \ln|z+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} \right| - \ln|\sqrt{x+2}+1| + C$$

Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b};$	III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c};$
II. $\frac{1}{(ax+b)^m};$	IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\
&= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)} = \\
&= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C
\end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-2)dx}{x^2-6x+25} &= \int \frac{(x-3)dx}{(x-3)^2+16} + \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x-3)^2}{(x-3)^2+16} + \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1} = \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{4}\right) + C.
\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\
&= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.
\end{aligned}$$

Вообще говоря, если у трехчлена ax^2+bx+c выражение $b^2-4ac \geq 0$, то дробь по определению не является элементарной. Этот случай будет рассмотрен далее.

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа. Сначала рассмотрим частный случай при $M=0, N=1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s^2+t^2-t^2}{(t^2+s^2)^n} dt = \frac{1}{s^2} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{s^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+s^2)^n} = \\
&= \frac{1}{s^2} I_{n-1} - \frac{1}{s^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+s^2)^n}.
\end{aligned}$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям. Обозначим:

$$dv = \frac{t dt}{(t^2+s^2)^n}; \quad u=t; \quad du=dt; \quad v = \int \frac{t dt}{(t^2+s^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}}$$

Тогда

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+s^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^{n-1}} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} I_{n-1};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{s^2} I_{n-1} + \frac{t}{2s^2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2s^2(n-1)} I_{n-1} = \\ &= \frac{t}{2s^2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2s^2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее $n-1$ раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{dt}{t^2+s^2}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx &= (4a)^n \int \frac{Mx+N}{[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} t=2ax+b; \quad dt=2adx; \\ x=\frac{t-b}{2a}; \quad s^2=4ac-b^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{M(t-b)+N}{(t^2+s^2)^n} dt = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{tdt}{(t^2+s^2)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} \right] \end{aligned}$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $z=t^2+s^2$ приводится к табличному $\int \frac{dz}{z^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n , а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx &= \int \frac{3x+5}{[(x-2)^2+3]^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x-2; \quad du=dx; \\ x=u+2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du = \\ &= 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t=u^2+3; \\ dt=2udu; \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = \\ &= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций.

Разложение рациональных функций на элементарные дроби

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$

которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде):

$$P(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{\beta_r},$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}$$

или в подробной форме

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots \\ & + \frac{A_{k1}}{(x - a_k)} + \frac{A_{k2}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} + \\ & + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1\beta_1}x + N_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \dots \\ & + \frac{M_{r1}x + N_{r1}}{x^2 + p_rx + q_r} + \frac{M_{r2}x + N_{r2}}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \dots + \frac{M_{r\beta_r}x + N_{r\beta_r}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{\beta_r}} \end{aligned}$$

где A_{ij}, M_{ij}, N_{ij} - некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_{ij}, M_{ij}, N_{ij} применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример. (Высокий логарифм). Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} = \frac{A(x + a) + B(x - a)}{x^2 - a^2} = \frac{(A + B)x + Aa - Ba}{x^2 - a^2}$$

Приравняв многочлены в числителях, получим систему уравнений для нахождения постоянных A и B .

$$\begin{cases} (A + B) = 0 \\ Aa - Ba = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2a}, \quad B = -\frac{1}{2a}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a} \ln|x - a| - \frac{1}{2a} \ln|x + a| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C.$$

Пример. $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)} dx$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4) = (x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x-4) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) =$$

$$= 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx = 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx =$$

$$= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \arctg \frac{x}{2} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6} dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & \\ -9x^3+8x^2-76x-7 & \\ \underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ 20x^2-25x-25 & \end{array}$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при $x=3$ знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{3x^3 - 9x^2} \\ -5x^2 - 17x \\ \underline{5x^2 - 15x} \\ -2x + 6 \\ \underline{-2x + 6} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} x - 3 \\ 3x^2 + 5x - 2 \end{array} \end{array}$$

Таким образом $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x-3)(x+2)(3x-1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Для того, чтобы упростить алгоритм нахождения коэффициентов A , B и C вместо описанного выше подхода применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x . Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае: 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x-3| + \frac{5}{3} \ln|3x-1| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases} \quad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx &= 3 \int \frac{dx}{x+3} + 2 \int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3 \ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} + \\ &+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \int \frac{dx}{1+x^4+2x^2-2x^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2-2x^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x)}$$

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x)} &= \frac{Ax+B}{1+x^2+\sqrt{2}x} + \frac{Cx+D}{1+x^2-\sqrt{2}x} = \\ &= \frac{(Ax+B)(1+x^2-\sqrt{2}x) + (Cx+D)(1+x^2+\sqrt{2}x)}{(1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x)} \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в числителе, и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях x , получим следующую систему для определения коэффициентов A , B , C и D :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+\sqrt{2}C+1=0 \\ -\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x+\sqrt{2}}{1+x^2+\sqrt{2}x} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x-\sqrt{2}}{1+x^2-\sqrt{2}x} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2+\sqrt{2}x)}{1+x^2+\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2-\sqrt{2}x)}{1+x^2-\sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1+x^2+\sqrt{2}x}{1+x^2-\sqrt{2}x} + C \end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить интегралы: $\int \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ и $\int \frac{x^4 dx}{1+x^4}$

Указание. В первом интеграле сделать замену $x = \frac{1}{t}$.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^6} &= \int \frac{dx}{(1+x^2)(x^4-x^2+1)} = \int \frac{dx}{(1+x^2)(x^4+2x^2+1-3x^2)} = \\ &= \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2-\sqrt{3}x)(1+x^2+\sqrt{3}x)} \end{aligned}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2-\sqrt{3}x)(1+x^2+\sqrt{3}x)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2+\sqrt{3}x} + \frac{Ex+F}{1+x^2-\sqrt{3}x} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^4-x^2+1) + (Cx+D)(1+x^2)(1+x^2-\sqrt{3}x) + (Ex+F)(1+x^2)(1+x^2+\sqrt{3}x)}{(1+x^2)(1+x^2-\sqrt{3}x)(1+x^2+\sqrt{3}x)}$$

Для определения неизвестных постоянных имеем следующую систему:

$$\begin{cases} A+C+E=0 \\ B+D+F-\sqrt{3}C+\sqrt{3}E=0 \\ -A+2C+2E-\sqrt{3}D+\sqrt{3}F=0 \\ -B+2D+2F-\sqrt{3}C+\sqrt{3}E=0 \\ A+C+E-\sqrt{3}D+\sqrt{3}F=0 \\ B+D+F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C+E=0 \\ 1-\sqrt{3}C+\sqrt{3}E=0 \\ -3A-\sqrt{3}D+\sqrt{3}F=0 \\ 2-3B-\sqrt{3}C+\sqrt{3}E=0 \\ -\sqrt{3}D+\sqrt{3}F=0 \\ B+D+F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C+E=0 \\ C-E=1/\sqrt{3} \\ C-E=(2-3B)/\sqrt{3} \\ F-D=A/\sqrt{3} \\ F-D=0 \\ B+D+F=1 \end{cases}$$

Решением этой системы является:

$$A=0, \quad B=\frac{1}{3}, \quad C=-E=\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad D=F=\frac{1}{3}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^6} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x+4\sqrt{3}/3)dx}{1+x^2+\sqrt{3}x} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x-4\sqrt{3}/3)dx}{1+x^2-\sqrt{3}x} = \frac{1}{3} \arctg x + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x+\sqrt{3})dx}{1+x^2+\sqrt{3}x} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x-\sqrt{3})dx}{1+x^2-\sqrt{3}x} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{1+x^2+\sqrt{3}x} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{1+x^2-\sqrt{3}x} = \\ &= \frac{1}{3} \arctg x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x^2+\sqrt{3}x}{1+x^2-\sqrt{3}x} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{1/4+(x+\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{1/4+(x-\sqrt{3}/2)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \arctg x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x^2+\sqrt{3}x}{1+x^2-\sqrt{3}x} + \frac{1}{6} \arctg(2x+\sqrt{3}) + \frac{1}{6} \arctg(2x-\sqrt{3}) + C \end{aligned}$$

Метод Остроградского

Как известно, элементарная дробь II типа интегрируется и для неё ранее была получена формула

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C; \quad (1)$$

Дробь IV типа с помощью замены переменных $t = x + p/2$ приводится к виду

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{tdt}{(t^2+s^2)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} \right]$$

где первый интеграл с помощью подстановки $z = t^2 + s^2$ приводится к табличному $\int \frac{dz}{z^n}$, а ко второму интегралу применяется рекуррентная формула.

$$\int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^n} = \frac{t}{2s^2(n-1)(t^2 + s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2s^2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^{n-1}}. \quad (2)$$

Существует приём, предложенный М.В. Остроградским, позволяющий алгебраическим путём выделить рациональную часть интеграла. Используя те же соображения, что и при построении рекуррентной формулы (2), можно получить представление

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{M_1x + N_1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \lambda_1 \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (3)$$

Последний интеграл, соответственно приводится к виду

$$\lambda_1 \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} dx = \frac{M_2x + N_2}{(ax^2 + bx + c)^{n-2}} + \lambda_2 \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-2}}$$

и т.д. до тех пор пока в последнем интеграле степень не станет равной единице, т.е.

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_i x + N_i}{(ax^2 + bx + c)^{n-i}} + \lambda_{n-1} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)}$$

Выполняя суммирование в последнем равенстве получим

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \lambda_{n-1} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)}$$

где $P(x)$ - многочлен степени ниже чем степень знаменателя.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

где знаменатель $Q(x)$ разложен на простые множители.

Тогда подынтегральное выражение раскладывается в сумму дробей типа I-IV (см. пункт «разложение рациональных функций на элементарные дроби»). Интегралы от дробей типа II и IV преобразуются по формулам (1) и (3). Объединяя эти результаты получим

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (4)$$

Рациональная часть интеграла P_1/Q_1 получается от сложения выделенных ранее рациональных частей, т.е. является правильной дробью. Её знаменатель имеет разложение

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (x - a_k)^{\alpha_k-1} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1-1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\beta_r-1} \quad (5)$$

Дробь P_2/Q_2 получается от сложения дробей типа I и III, и поэтому тоже является правильной. Её знаменатель имеет разложение

$$Q_2(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k) \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_r x + q_r) \quad (6)$$

и при этом очевидно $Q = Q_1 \cdot Q_2$

Формула (4) называется **формулой Остроградского**. Если известно разложение знаменателя $Q(x)$ на элементарные множители, то многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ находятся по формулам (5) и (6). Для нахождения многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Обозначим через m степень многочлена $P(x)$, а через m_1 и m_2 степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Продифференцируем формулу Остроградского, получим

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'_1 Q_1 - P_1 Q'_1}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\frac{P'_1 Q_1 - P_1 Q'_1}{Q_1^2} = \frac{P'_1 Q_2 - P_1 \frac{Q'_1 Q_2}{Q_1}}{Q_1 Q_2} = \frac{P'_1 Q_2 - P_1 H}{Q}, \quad H = \frac{Q'_1 Q_2}{Q_1}$$

В силу построения многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ дробь $Q'_1 Q_2 / Q_1$ делится на цело. В самом деле, если, к примеру, $(x - a_i)^{\alpha_i - 1}$ входит в многочлен $Q_1(x)$, то $(x - a_i)$ входит в многочлен $Q_2(x)$, а многочлен $Q'_1(x)$ содержит $(x - a_i)^{\alpha_i - 2}$. Освобождаясь теперь от общего знаменателя, приходим к тождеству

$$P'_1 Q_2 - P_1 H + P_2 Q_1 = P \quad (7)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Пример. Вычислим интеграл

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} dx$$

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского. Здесь

$$Q_1(x) = Q_2(x) = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

Тогда

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$Q'_1(x) = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$H = \frac{Q'_1 Q_2}{Q_1} = \frac{(3x^2 + 2x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = 3x^2 + 2x + 1$$

Согласно формуле (7)

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 &= \\ &= (2Ax + B)(x^3 + x^2 + x + 1) - (Ax^2 + Bx + C)(3x^2 + 2x + 1) + (ax^2 + bx + c)(x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую систему для определения коэффициентов многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$

$$\begin{cases} a=0 \\ -A+b+a=4 \\ -2B+b+c+a=4 \\ A-B-3C+b+c+a=16 \\ 2A-2C+b+c=12 \\ B-C+c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ c=3 \\ A=-1 \\ B=1 \\ C=-4 \end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx = -\frac{x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \int \frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx =$$

$$= -\frac{x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \operatorname{arctg} x + C$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\text{Таким образом: } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Пример.

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x/2 + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с её помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(1+t^2) \left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right]} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x/2 + 1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если функция R является нечетной относительно косинуса или синуса.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$ если функция R является нечетной относительно косинуса.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать \cos только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\sin x) \cos x dx = \int r(t) dt.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} + \\ &+ 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если функция R является нечетной относительно синуса.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\cos x) \sin x dx = -\int r(t) dt.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2} dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2} \right] dt = \\ &= \int \left[t+2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int t dt + \int 2 dt - 4 \int \frac{t dt}{t+2} - 5 \int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| - 4 \int \frac{t}{t+2} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B, \quad A+Bt+2=t \\ B=1, \quad A=-2, \quad \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| + 8 \int \frac{dt}{t+2} - 4 \int dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| + 8 \ln|t+2| - 4t = \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Для преобразования подынтегральной функции в рациональную используется подстановка $t = \tan x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(t) dt$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 16} dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применяются одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

Пример. $\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$

Пример. Вычислим интеграл $\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx$

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x (\cos 7x \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin 21x dx - \frac{1}{4} \int \sin x dx + \frac{1}{4} \int \sin 13x dx + \frac{1}{4} \int \sin 7x dx = -\frac{1}{84} \cos 21x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{52} \cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28} \cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{d \operatorname{ctg} 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8} \left(\int dx + \int \cos 4x dx \right) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Интегралы вида $\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$

Если α и β - целые числа, то интеграл рационализуется с помощью подстановок $t = \sin x$, если β - нечётно; $t = \cos x$, если α - нечётно; $t = \operatorname{tg} x$, если $\alpha + \beta$ - чётно.

Рассмотрим случай, когда α и β - нецелые числа. Сделаем замену $t = \cos x$, получим

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = - \int (1 - t^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} t^\beta dt$$

Это интеграл от **биномиального дифференциала**. Способы его вычисления будут рассмотрены далее в теме **интегрирование некоторых иррациональных функций**.

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой как известно всегда может быть найден.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) dx$ где n – натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}} = t$ подынтегральное выражение рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+h} = t^n; \quad x = \frac{ht^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{ht^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

$$\text{Тогда } \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) dx = \int R\left(\frac{ht^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{ht^n - b}{a - ct^n} \right)' dt = \int r(t) dt.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} &= \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4(\sqrt[4]{1-2x})^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ &= -2 \int \left(t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2 \int t dt - 2 \int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = -t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C = \\ &= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2 \ln|\sqrt[4]{1-2x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx &= \left\{ \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \right. \\ &\quad \left. dx = 12t^{11} dt; \right\} = \int \frac{(t^4 + t^3) 12t^{11} dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = \\ &= 12 \left(\int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) = 12 \left[\int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right] = \\ &= 12 \int t dt - 12 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + 12 \int dt - 12 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2 + 1) - 12 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x-1} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Определение: Биномиальным дифференциалом называется выражение

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

где m , n и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биномиального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализуется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[\lambda]{x}, \text{ где } \lambda - \text{общий знаменатель } m \text{ и } n.$$

2) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то интеграл рационализуется подстановкой

$$t = \sqrt[s]{a+bx^n}, \text{ где } s - \text{знаменатель числа } p.$$

3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то используется подстановка $t = \sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p .

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

$$\text{Интегралы вида } \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$$

Метод выделения полного квадрата

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ. В наиболее простейших случаях можно выделить полный квадрат под знаком корня.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

$$1) \int R(u, \sqrt{m^2-u^2}) du;$$

$$2) \int R(u, \sqrt{m^2+u^2}) du;$$

$$3) \int R(u, \sqrt{u^2-m^2}) du;$$

Эти интегралы можно вычислять с помощью тригонометрических подстановок.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2-u^2}) du$ подстановкой $u = m \sin t$ или $u = m \cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

При этом, полезно иметь под рукой следующие формулы:

$$1. \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1], \quad 2. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$3. \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad 4. \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$5. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$6. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$7. \operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$8. \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

$$9. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

$$10. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$11. \operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$12. \operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$13. \operatorname{ctg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x},$$

$$14. \operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ и т.д.}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t; \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = a \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du$ подстановкой $u = m \operatorname{tg} t$ или $u = m \operatorname{ctg} t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$

Пример. (Длинный логарифм). Найдём значение интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

При решении нам понадобится вспомогательная формула из тригонометрии

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t; \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \end{array} \right\} = \int \frac{a \cos t dt}{a \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t + \pi/2}{2} \right) \right| = \ln \left| \frac{1 - \cos(t + \pi/2)}{\sin(t + \pi/2)} \right| = \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| = \ln \left| \frac{1 + \sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{\cos \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} \right| = \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \right| = \\ &= \ln \left| \sqrt{a^2 + x^2} + x \right| - \ln a + C = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C \end{aligned}$$

Здесь слагаемое $\ln a$ включается в константу C

Итак, окончательно получено, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t; dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}; \end{array} \right\} = \int \frac{a \cos t dt}{a^4 \cos^2 t \operatorname{tg}^4 t a} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4} \int \frac{(1 - \sin^2 t) d \sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4 \sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} = \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\} =$$

$$= -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4 x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} = \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2}{\cos t}; dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{x^2 - 4} &= 2 \operatorname{tg} t; \end{aligned} \right\} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 \operatorname{tg}^5 t} = \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^4 t dt =$$

$$= \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t d(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t dt = -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{32} \operatorname{ctg} t + \frac{t}{32} + C = \left\{ \operatorname{ctg} t = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} +$$

$$+ \frac{1}{32} \arccos \frac{2}{x} + C.$$

Подстановки Эйлера.

Леонард Эйлер (Русский математик, 1707-1783)

1) Если $a > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализируется подстановкой

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

2) Если $a < 0$ и $c > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если $a > 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

Пример.

$$\int \frac{3x + 4}{\sqrt{7 - x^2 + 6x}} dx = \int \frac{3x + 4}{\sqrt{16 - (x - 3)^2}} dx = \left\{ \begin{aligned} u &= x - 3; \quad du = dx; \\ x &= u + 3; \end{aligned} \right\} = \int \frac{3u + 9 + 4}{\sqrt{16 - u^2}} du = 3 \int \frac{u du}{\sqrt{16 - u^2}} +$$

$$+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = -3\sqrt{16 - u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7 - x^2 + 6x} + 13 \arcsin \frac{x - 3}{4} + C.$$

Пример. (Длинный логарифм). Этот пример был уже разобран ранее. Здесь приведём ещё один метод его вычисления.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+a^2} = t+x, \\ x = \frac{a^2-t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{a^2+t^2}{2t^2} dt \end{array} \right\} = -\int \frac{a^2+t^2}{\left(t+\frac{a^2-t^2}{2t}\right) \frac{a^2+t^2}{2t^2}} dt = -\ln t =$$

$$= \ln \frac{1}{t} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}-x} = \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a^2} + C = \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| - \ln a^2 + C$$

В силу произвольности константы C можем окончательно записать

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I. \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \quad II. \int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx; \quad III. \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n , n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа. Для вычисления интеграла I рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Обозначим $Y(x) = ax^2+bx+c$ и найдём производную произведения $x^{n-1}\sqrt{Y(x)}$.

Получим

$$\begin{aligned} \left(x^{n-1}\sqrt{Y(x)}\right)' &= (n-1)x^{n-2}\sqrt{Y(x)} + \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{Y(x)}}Y'(x) = \\ &= \frac{(n-1)x^{n-2}(ax^2+bx+c) + x^{n-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y(x)}} = an\frac{x^n}{\sqrt{Y(x)}} + b\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{n-1}}{\sqrt{Y(x)}} + c(n-1)\frac{x^{n-2}}{\sqrt{Y(x)}} \end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство, приходим к рекуррентному соотношению

$$x^{n-1}\sqrt{Y(x)} = anI_n + b\left(n-\frac{1}{2}\right)I_{n-1} + c(n-1)I_{n-2}$$

или, выразив I_n

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{an}\sqrt{Y(x)} - \frac{b}{an}\left(n-\frac{1}{2}\right)I_{n-1} - \frac{c(n-1)}{an}I_{n-2}$$

Чтобы пользоваться этой формулой, надо знать значения I_0 и I_1 . При $n=1$ имеем

$$I_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y(x)} - \frac{b}{2a}I_0$$

Соответственно, при $n=2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{x}{2a}\sqrt{Y(x)} - \frac{3b}{2^2a}I_1 - \frac{c}{2a}I_0 = \frac{x}{2a}\sqrt{Y(x)} - \frac{3b}{2^2a}\left(\frac{1}{a}\sqrt{Y(x)} - \frac{b}{2a}I_0\right) - \frac{c}{2a}I_0 = \\ &= \frac{1}{4a^2}\sqrt{Y(x)}(2ax-3b) + \frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)I_0 \end{aligned}$$

Продолжая индуктивно процесс далее, получим общую формулу

$$I_n = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda I_0 \quad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$, λ – некоторая постоянная величина.

Теперь вернёмся к интегралу I. Если $P_n(x)$ – многочлен степени n , то этот интеграл будет представлять собой линейную комбинацию интегралов I_0, I_1, \dots, I_n следовательно согласно общей формуле (1) имеет место следующее представление:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении, как и ранее $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$, а λ – некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределённых коэффициентов многочлена дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , определяют λ и коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$. Запишем равенство, получающееся при вышеуказанных операциях

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q'_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda$$

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена $P_n(x)$ больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример.

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x-1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$3Ax^3 - (5A - 2B)x^2 + (10A - 3B + C)x + 5B - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 5A-2B=7 \\ 10A-3B+C=0 \\ 5B-C+\lambda=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-13 \\ \lambda=-7 \end{cases}$$

$$\text{Итого } \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} =$$

$$= (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \ln(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C.$$

Пример.

$$\int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3} dx = \int \frac{(4x^2 - 6x)(x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2 + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\frac{4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x}{\sqrt{x^2 + 3}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2 + 3} + \frac{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2 + 3) + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = 3Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 9Ax^2 + 6Bx + 3C + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = 4Ax^4 + 3Bx^3 + (2C + 9A)x^2 + (6B + D)x + 3C + \lambda$$

$$A=1; B=-2; C=3/2; D=-6; \lambda=-9/2;$$

$$\int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3}dx = \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - 6\right)\sqrt{x^2 + 3} - \frac{9}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| + C.$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} &= \left\{x = \frac{1}{v}; dx = -\frac{dv}{v^2}\right\} = -\int \frac{v^3 dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}} = \\ &= -\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-v^2}} = (Av + B)\sqrt{1-v^2} + \lambda \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &\quad - \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} = A\sqrt{1-v^2} - \frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}} \\ &\quad -v^2 = A - Av^2 - Av^2 - Bv + \lambda \\ &\quad -v^2 = -2Av^2 - Bv + A + \lambda, \quad A=1/2; B=0; \lambda=-1/2; \\ &\quad -\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{v\sqrt{1-v^2}}{2} - \frac{1}{2}\arcsin v = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \arcsin \frac{1}{x}\right) + C\end{aligned}$$

Рассмотрим здесь второй способ решения того же самого примера.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} &= \left\{x = \frac{1}{\cos t}; dx = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt; \right. \\ &\quad \left. \sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t; \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\cos^3 t} \cdot \operatorname{tg} t \right\} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t} \cdot \operatorname{tg} t} dt = \int \frac{\sin t \cos^4 t}{\cos^2 t \sin t} dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \left\{\sin 2t = 2\sin t \cos t = \frac{2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\} = \frac{1}{2}\left(\arccos \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

С учетом того, что функции \arcsin и \arccos связаны соотношением $\arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования C – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций, возможно, применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример.
$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ dx = \cos t dt; \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Подстановки Абеля.

Рассмотрим здесь интегралы вида

$$I. \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} dx, \quad II. \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n \sqrt{ax^2+b}}$$

Оба этих интеграл удобно брать с помощью подстановки Абеля. Рассмотрим вначале интеграл I . представим его в виде суммы двух интегралов

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} =$$

$$= \frac{M}{2a} I_1 + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) I_2$$

Будем, как и прежде, для краткости использовать обозначение $Y(x) = ax^2 + bx + c$. Для интеграла I_2 воспользуемся **подстановкой Абеля**

$$t = \left(\sqrt{Y(x)}\right)' = \frac{Y'(x)}{2\sqrt{Y(x)}} = \frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Возведём полученное равенство в квадрат и умножим на $4Y$, получим

$$4t^2 Y(x) = (Y'(x))^2 = 4a^2 x^2 + 4abx + b^2$$

Вычтем полученное равенство из, умноженного на $4a$, равенства $Y(x) = ax^2 + bx + c$

$$4(a-t^2)Y(x) = 4ac - b^2$$

Возводя в степень n находим

$$Y^n(x) = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^n \frac{1}{(a-t^2)^n} \quad (1)$$

Далее, дифференцируя равенство $t\sqrt{Y(x)} = ax + b/2$ найдём

$$\sqrt{Y(x)} dt + t \frac{Y'(x)}{2\sqrt{Y(x)}} dx = \sqrt{Y(x)} dt + t^2 dx = adx$$

Из последнего равенства приходим к соотношению

$$\frac{dx}{\sqrt{Y(x)}} = \frac{dt}{(a-t^2)} \quad (2)$$

Подставляя теперь равенства в интеграл I_2 получим

$$I_2 = \int \frac{dx}{Y^{\frac{2n+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n \int (a-t^2)^{n-1} dt \quad (3)$$

Таким образом, интеграл I_2 сводится к интегралу от многочлена. Что касается интеграла I_1 , то он вычисляется элементарно

$$I_1 = \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}} dx = \int \frac{dY}{Y^{\frac{2n+1}{2}}} dx = -\frac{2}{2n+1} Y^{\frac{2n-1}{2}} + C$$

Пример. При $n=1$ получается

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right) \int dt = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right) t = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right) \frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

Для вычисления интеграла I_2 используем тот же принцип. Положим

$$t = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}$$

В силу равенства (2) получим

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{dt}{\lambda-t^2}$$

Кроме того

$$x^2 + \lambda = \frac{(b - a\lambda)t^2 + \lambda a^2}{a(a - t^2)}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda)^n \sqrt{ax^2 + b}} = a^n \int \frac{(a - t^2)^{n-1}}{[(b - a\lambda)t^2 + \lambda a^2]^n} dt$$

Т.е. интеграл II свёлся к интегралу от рациональной функции.

Упражнение. Рассмотреть интеграл

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + \lambda)^n \sqrt{ax^2 + b}}$$

Некоторые нестандартные примеры

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 + x^{2n}}$

Частные случаи при $n=1,2,3$ были ранее разобраны в теме «Интегрирование рациональных функций». В общем случае используется та же идеология разложения функции в сумму элементарных дробей. Для этого найдем вначале нули знаменателя. Они имеют вид

$$x_k = \sqrt[n]{-1} = e^{\frac{i\pi(1+2k)}{2n}}, \quad k = \overline{1, 2n-1}.$$

Среди этих корней выделим пары сопряженных

$$x_k = e^{\frac{i\pi(1+2k)}{2n}}, \quad \bar{x}_k = e^{i\pi\left[2n - \frac{2n-k}{2n}\right]} = e^{-\frac{i\pi(1+2k)}{2n}}.$$

Тогда знаменатель можно представить в виде произведения неприводимых над полем действительных чисел многочленов второй степени

$$1 + x^{2n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1 \right).$$

Следовательно, подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{1}{1 + x^{2n}} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1 \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k x + B_k}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A_k x + B_k) P_k(x)}{1 + x^{2n}}, \quad (1)$$

где

$$P_k(x) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2j)}{2n} + 1 \right).$$

Вместо решения СЛАУ порядка n для определения коэффициентов A_k и B_k можно воспользоваться следующим приемом. Если в равенство (1) по очереди подставлять сопряженные нули знаменателя x_k и \bar{x}_k , то так как все многочлены кроме $P_k(x)$ обращаются в нуль, будем получать независимые системы из двух уравнений относительно A_k и B_k . Представим многочлен $P_k(x)$ следующим образом

$$P_k(x) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2j)}{2n} + 1 \right) = \frac{1 + x^{2n}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1}.$$

Значения $P_k(x_k)$ и $P_k(\bar{x}_k)$ найдем с помощью правила Лопиталя

$$\begin{aligned}
P_k(x_k) &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{1+x^{2n}}{x^2 - 2x \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{nx^{2n-1}}{x - \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = \frac{ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{e^{\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} - \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = \\
&= \frac{ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}} \\
P_k(\bar{x}_k) &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}_k} \frac{1+x^{2n}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n} + 1} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}_k} \frac{nx^{2n-1}}{x - \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = \frac{ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{e^{-\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} - \cos \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = \\
&= -\frac{ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(A_k x_k + B_k) P_k(x_k) &= \left(A_k e^{\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} + B_k \right) \frac{ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = \frac{A_k ne^{i\pi(1+2k)} + B_k ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}} \\
(A_k \bar{x}_k + B_k) P_k(\bar{x}_k) &= - \left(A_k e^{-\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} + B_k \right) \frac{ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}} = - \frac{A_k ne^{-i\pi(1+2k)} + B_k ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}}}{i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}}
\end{aligned}$$

С учетом равенства (1) приходим к следующей системе относительно A_k и B_k

$$\begin{aligned}
A_k ne^{i\pi(1+2k)} + B_k ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} &= i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}, \\
A_k ne^{-i\pi(1+2k)} + B_k ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} &= -i \sin \frac{\pi(1+2k)}{2n}
\end{aligned}$$

Решение этой системы найдем по правилу Крамера

$$A_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_k}, \quad B_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_k}.$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \begin{vmatrix} ne^{i\pi(1+2k)} & ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \\ ne^{-i\pi(1+2k)} & ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \end{vmatrix} = n^2 \left[e^{i\pi(1+2k)} e^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} - e^{-i\pi(1+2k)} e^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \right] = \\
&= n^2 \left(e^{\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} - e^{-\frac{i\pi(1+2k)}{2n}} \right) = 2i \sin \pi \frac{1+2k}{2n}, \\
\Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} i \sin \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right) & ne^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \\ -i \sin \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right) & ne^{-\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \end{vmatrix} = i \sin \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right) \left[e^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} + e^{\frac{i\pi(1+2k)(2n-1)}{2n}} \right] = \\
&= 2i \sin \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right) \cos \left[\pi \frac{(1+2k)(2n-1)}{2n} \right] = -2i \sin \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right) \cos \left(\pi \frac{1+2k}{2n} \right),
\end{aligned}$$

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} ne^{i\pi(1+2k)} & i\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right) \\ ne^{-i\pi(1+2k)} & -i\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right) \end{vmatrix} = -i\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)(e^{i\pi(1+2k)} + e^{-i\pi(1+2k)}) =$$

$$= -2i\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)\cos\pi(1+2k) = 2i\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right).$$

Таким образом,

$$A_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_k} = -\frac{1}{n}\cos\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right), \quad B_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_k} = \frac{1}{n},$$

и искомое разложение имеет вид

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-x\cos\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)+1}{x^2 - 2x\cos\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)+1},$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int \frac{-x\cos\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)+1}{x^2 - 2x\cos\left(\pi\frac{1+2k}{2n}\right)+1} dx =$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \cos(\ln x) dx$

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx; \\ x = e^u; \quad dx = e^u du; \end{array} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{array}{l} p = \cos u; \quad dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u +$$

$$+ \int e^u \sin u du = \left\{ \begin{array}{l} p = \sin u; \quad dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итого $\int e^u \cos u du = e^u (\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2} (\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int e^{\arcsin x} dx$

$$\int e^{\arcsin x} dx = \{x = \sin t, dx = \cos t dt\} = \int e^t \cos t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t) = \frac{e^{\arcsin x}}{2} (x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{xdx}{1+\sin x} = \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dx}{1+t^2} \right\} = 4 \int \frac{\operatorname{arctg} t dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)} = 4 \int \frac{\operatorname{arctg} t dt}{(1+t)^2} =$$

$$= -4 \int \operatorname{arctg} t d \frac{1}{(1+t)} = -4 \frac{\operatorname{arctg} t}{(1+t)} + 4 \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = -4 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t} + 2 \int \frac{dt}{1+t} - 2 \int \frac{tdt}{1+t^2} +$$

$$\begin{aligned}
+2 \int \frac{dt}{1+t^2} &= -4 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t} + 2 \ln|1+t| - \ln|1+t^2| + 2 \operatorname{arctg} t = 2 \frac{t-1}{1+t} \operatorname{arctg} t + \ln \frac{(1+t)^2}{1+t^2} = \\
&= x \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + \ln \left(\cos^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2 \right) + C
\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x e^{5x^2/4} dx}{(1+e^{x^2})^2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x e^{5x^2/4} dx}{(1+e^{x^2})^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{e^{x^2} e^{x^2/4} dx^2}{(1+e^{x^2})^2} = \frac{1}{2} \int \frac{e^{x^2/4} de^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = \left\{ e^{x^2} = t \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{t^{1/4} dt}{(1+t)^2} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} t^{1/4} &= z, \\ t &= z^4, dt = 4z^3 dz \end{aligned} \right\} = 2 \int \frac{z^4 dz}{(1+z^4)^2} = -\frac{1}{2} \int z d \left(\frac{1}{1+z^4} \right) = -\frac{1}{2} \frac{z}{1+z^4} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^4} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{z}{1+z^4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+z^2+\sqrt{2}z}{1+z^2-\sqrt{2}z} = -\frac{1}{2} \frac{e^{x^2/4}}{1+e^{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+e^{x^2/2}+\sqrt{2}e^{x^2/4}}{1+e^{x^2/2}-\sqrt{2}e^{x^2/4}} + C
\end{aligned}$$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R[x, \sqrt{P(x)}] dx$, где $P(x)$ - многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими**.

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим**.

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим**.

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
- 2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм
- 4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ – приводится к интегральному логарифму
- 5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус
- 6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус