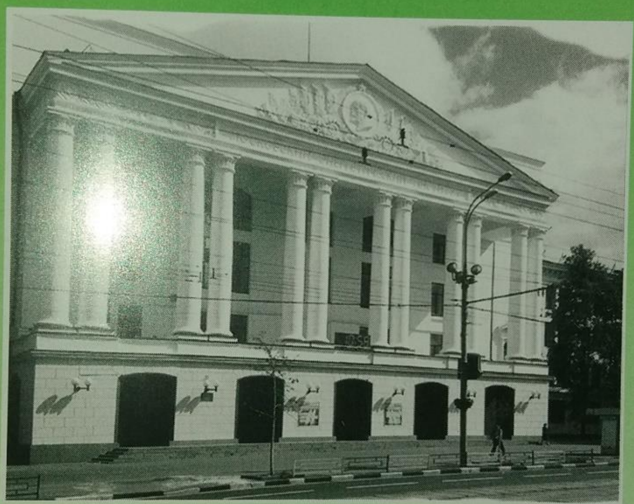
УДК
620.178.3
ББК 22.17
А 23

МЭИ



Л.В. Агамиров

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 620.178.3
ББК 22.17
А23

Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания

Подготовлено на кафедре инновационных технологий наукоемких отраслей

Рецензенты: И.В. Шевченко, докт. техн. наук,
профессор кафедры ИТНО НИУ «МЭИ»;
С.И. Мартыненко, докт. физ-мат. наук, научн. сотрудник
отдела «Двигатели и химмотология» ЦИАМ им. П.И. Баранова

Агамиров, Л.В.

А23 Статистические методы анализа результатов научных исследований: учеб. пособие / Л.В. Агамиров. — М.: Издательство МЭИ, 2018. — 72 с.

ISBN 978-5-7046-1822-5

Рассмотрены методы планирования и статистической обработки результатов научных исследований, связанных с анализом экспериментальных данных, которые предназначены для рационального выбора материала при проектировании, обоснования характеристик, выбора режимов технологии производства, организации контроля технических процессов и т. д.

Для студентов, обучающихся в магистратуре и изучающих курсы «Методы обработки и представления результатов научных исследований» и «Планирование проведения исследований».

УДК 620.178.3
ББК 22.17

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Агамиров Л.В.

Статистические методы анализа результатов научных исследований

г. Москва, 2018

**Учебно-методическое пособие
для научных работников, инженеров и студентов
технических вузов**

УДК 620.178.3, 620.173.2, 519.252, 519.257
ББК 22.17

Оглавление

1. Общие положения

В пособии рассматриваются методы планирования и статистической обработки результатов научных исследований, связанных с анализом экспериментальных данных. Эти методы обеспечивают при минимальных затратах надежное определение средних значений исследуемых характеристик и их дисперсий с требуемой точностью, обоснование функции распределения, оценки ее параметров и квантилей заданного уровня вероятности.

Рассматриваемые методы планирования испытаний и статистического анализа их результатов предназначены для решения вопросов, связанных с рациональным выбором материала при проектировании, обоснованием расчетных характеристик, установлением оптимальных режимов технологии производства полуфабрикатов и деталей, организацией статистического контроля технологических процессов и т. д.

В связи с вышеуказанными целями в работе не рассматриваются теоретические вопросы, связанные со свойствами оценок, выводом распределений, доказательством теорем и т.п., однако делаются ссылки на соответствующие литературные источники.

2. Статистическая обработка и планирование прямых наблюдений и результатов измерений

2.1. Основные положения

Под **прямыми** понимают испытания, в результате которых непосредственно измеряются исследуемые характеристики данного объекта (образца). К прямым испытаниям относят, например, испытания по определению характеристик механических свойств. Испытания, предусматривающие расчетное или графическое определение исследуемых характеристик (например, по регрессионным уравнениям), относят к **косвенным**.

Исследуемые характеристики рассматривают как случайные величины, статистическое рассеяние которых обуславливается случайными колебаниями изучаемых процессов, неоднородностью объекта испытаний, случайным различием структуры, химического состава и других свойств между объектами и т. д.

Правила отбора образцов для испытаний определяются целями испытаний. Совокупность значений, полученная в результате испытаний, рассматривается как выборка из генеральной совокупности. **Генеральная совокупность** есть воображаемая совокупность, состоящая из бесконечно большого числа значений исследуемой характеристики, каждое из которых отвечает установленным правилам отбора образцов для испытаний. Если задачей испытаний является определение характеристик данной партии объектов, то их отбор для испытаний ведут из данной партии (путем беспристрастного отбора) и совокупность значений характеристик образцов, которые могли бы быть произведены из данной партии и других партий, полностью с ней совпадающих, является генеральной.

Рассеяние значений случайных величин в пределах генеральной совокупности характеризуется законом распределения вероятностей. Распределение случайной величины полностью описывается функцией распределения вероятности. При решении ряда инженерных задач часто ограничиваются некоторыми числовыми характеристиками распределения: математическим ожиданием, дисперсией, средним квадратичным отклонением, коэффициентом вариации, медианой, квантилем заданного уровня вероятности и т. д.

Все характеристики генеральной совокупности являются неслучайными (детерминированными) величинами. Эти величины дают полное и точное описание свойств бесконечно большого числа образцов воображаемой генеральной совокупности.

Всякая конечная совокупность образцов и отвечающая ей конечная совокупность значений рассматривается как **выборка из генеральной совокупности**. Состав конечной совокупности (выборки) является случайным и лишь с некоторой точностью отображает характеристики генеральной совокупности.

Задачи планирования и статистической обработки результатов прямых наблюдений состоят в оценивании значений параметров распределения случайных величин в генеральной совокупности с заданной точностью. Оценивание проводят на основе конечной совокупности значений, измеренных при испытании конечного числа объектов.

Для получения достоверных оценок параметров распределения в генеральной совокупности совокупность измеренных значений должна быть представительной. Представительность значений измеренных означает, что в соответствии с целями испытаний осуществлен беспристрастный случайный отбор объектов испытаний, что число испытанных образцов отвечает требованиям точности оценивания.

Для оценивания параметров и числовых характеристик распределения используют стандартные **параметрические и непараметрические** статистические процедуры.

При использовании **непараметрических** процедур не делают никаких предположений о виде функции распределения случайной величины. Непараметрические процедуры позволяют получить достоверные оценки для ограниченного набора характеристик: математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации.

Для получения достоверных оценок функции распределения или квантилей низкого уровня вероятности используют **параметрические процедуры**. При этом делают предположение о виде распределения случайной величины. Вид распределения задают функцией распределения, содержащей ряд неизвестных постоянных параметров распределения, которые оцениваются по результатам измерений.

Полученные на основе параметрических процедур оценки существенно зависят от выбранного вида распределения (**гипотетического распределения**). Гипотетическое распределение должно по возможности более точно соответствовать истинному распределению случайной величины. При выборке гипотетического распределения учитывают природу рассеяния случайной величины, а также соответствие этого распределения результатам данных и других аналогичных испытаний.

Поскольку оценивание параметров распределения проводят на основе случайной выборки значений, полученные оценки являются также случайными величинами, имеющими рассеяние относительно истинного значения. Точность оценивания, т. е. близость оценки к истинному значению, характеризуется шириной **доверительного интервала**, чем уже доверительный интервал, тем точнее оценки.

Ширина доверительного интервала уменьшается с увеличением объема выборки, т. е. с увеличением числа объектов испытания. Задача планирования испытаний состоит в выборе минимального числа объектов испытания, обеспечивающего заданную точность оценивания соответствующих параметров распределения случайной величины (заданную ширину доверительных интервалов).

Планирование прямых испытаний и статистическая обработка результатов измерений включает:

-выбор гипотетического распределения случайной величины;

-определение минимального числа объектов испытаний;

-проверку согласия результатов измерений с выбранным гипотетическим распределением;

-оценивание параметров распределения;

-оценивание параметров и числовых характеристик распределения;

-оценивание доверительных интервалов числовых характеристик и параметров распределения.

Частные генеральные совокупности значений случайной величины; соответствующие отдельным партиям однотипных объектов, можно объединять в одну общую генеральную совокупность. На основе результатов измерения при испытании нескольких групп объектов из разных партий оценивают характеристики распределения в общей совокупности.

Выборку считают **полной**, если все запланированные для испытания объекты доведены до критического состояния.

При некоторых видах испытаний могут образовываться **цензурированные** справа выборки I и II типа [1].

Цензурированные выборки I типа образуются, если испытания ведутся с ограничением времени. Объекты, не достигшие критического состояния за заданное время (база испытаний), далее не испытывают. Число баз испытаний в одной выборке, а также число групп объектов, снятых с испытаний на каждой базе, могут отличаться от единицы. В этом случае выборку называют **многократно (прогрессивно) цензурированной** [3, 4].

Цензурированные справа выборки II типа образуются, когда испытания при необходимости их форсирования останавливаются в случайный момент времени при получении первых k достигших критического состояния объектов из n $(n>k)$ объектов, испытываемых одновременно. В этом случае фиксированной при испытаниях является доля k/n.

2.2. Распределения характеристик случайных величин

Значения случайной величина X получают случайным выбором из бесконечной генеральной совокупности значений исследуемой характеристики. Под распределением X понимают распределение значений случайной величины в генеральной совокупности.

Под вероятностью не превышения заданного уровня понимают долю значений случайной величины в генеральной совокупности, не превышающих этот уровень. Условие не превышения заданного уровня записывают как $X<x$, где X— обозначение характеристики как случайной величины; x— заданный уровень случайной величины.

Вероятность не превышения уровня x записывается как

$$P\{X \le x\} \tag{2.1}$$

и лежит в интервале от 0 до 1.

Функция распределения вероятностей определяется соотношением:

$$F(x) = P(X \le x). \tag{2.2}$$

Функция, распределения описывает зависимость вероятности не превышения случайной величиной значения *x*, то есть является функцией аргумента *x*. Функция распределения однозначно задает распределение вероятностей в генеральной совокупности. Все остальные характеристики распределения выражаются через функцию распределения. Соотношение $F(x) = 0{,}1$ означает, что 10% значений случайной величины в генеральной совокупности не превышают значения величины *x*.

Квантиль распределения определяется соотношением:

$$F(x_p) = P. \tag{2.3}$$

или в соответствии с (2.1)

$$P\{X \le x_p\} = P. \tag{2.4}$$

Квантиль x_p уровня *P* представляет собой значение случайной величины, вероятность не превышения которого равна *P*. Следовательно, доля значений случайной величины в генеральной совокупности, не превышающих x_p, равна *P*. Квантиль $x_{0,5}$ уровня *P*=0,5 называется медианой распределения.

Плотность вероятностей определяется соотношением:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{2.5}$$

Плотность вероятностей представляет собой производную функции распределения по параметру *x*.

Математическое ожидание определяется соотношением:

$$M\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)dx. \tag{2.6}$$

Математическое ожидание $M\{X\}$ представляет собой среднее арифметическое значение в генеральной совокупности.

Дисперсия определяется соотношением:

$$D\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{X\})^2 \cdot f_x(x)dx. \tag{2.7}$$

Дисперсия представляет собой среднее арифметическое значение квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания в генеральной совокупности.

Среднее квадратичное отклонение определяется соотношением:

$$\sigma\{X\} = \sqrt{D\{X\}}. \tag{2.8}$$

Среднее квадратичное отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии и характеризует отклонения значений в генеральной совокупности от математического ожидания.

Коэффициент вариации определяется соотношением:

$$\gamma\{X\} = \frac{\sigma\{X\}}{M\{X\}}. \tag{2.9}$$

Коэффициент вариации представляет собой отношение среднего квадратичного отклонения случайной величины к математическому ожиданию.

2.3. Законы распределения вероятностей

Ниже приведены характеристики ряда законов распределения вероятностей, используемых в качестве гипотетических при оценивании параметров распределения. Приведены рекомендации по их применению с краткими обоснованиями.

Гипотетическое распределение задается в виде функции распределения с рядом неизвестных постоянных - параметров распределения:

$$F(x) = F(x;, g_1, g_2, ..., g_k), \tag{2.10}$$

где g_k - параметры распределения;

k - число параметров распределения.

Точность оценок параметров распределения зависит от точности оценивания параметров гипотетического распределения и от близости гипотетического распределения истинному распределению. Точность оценок характеристик гипотетического распределения при фиксированном числе измеренных значений случайной величины зависит от числа параметров гипотетического распределения. Близость выбранного гипотетического распределения к истинному распределению оценивается на основе статистического сравнения гипотетического распределения с совокупностью значений, полученных в результате данных и предыдущих испытаний. Из гипотетических распределений, имеющих удовлетворительное согласие с результатами измерений, следует отдавать предпочтение распределениям, отвечающим некоторой математической модели, отражающей физическую природу рассеяния случайной величины.

2.3.1. Нормальное распределение

Плотность вероятностей:

$$f(t; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.11}$$

где a, $\sigma > 0$ – параметры распределения.

Функция нормального закона распределения имеет следующий вид:

$$F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \tag{2.12}$$

где x может принимать все действительные значения. Функция распределения (2.12) удовлетворяет равенству

$$F(x;a,\sigma)=F((x-a)/\sigma;\ 0,1)\,,$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь значения функции $F(z;0,1)$

$$F(z;\ 0,1)=\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,, \qquad (2.13)$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа, $z=(x-a)/\sigma$ - нормированная случайная величина.

Квантиль уровня P: x_p определяется соотношением:

$$x_p=a+z_p\cdot\sigma\,, \qquad (2.14)$$

где z_p - квантиль стандартного нормального распределения уровня *P*, определяемый соотношением:

$$\Phi(z_p)=P\,. \qquad (2.15)$$

Медиана, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение и коэффициент вариации определяются соотношениями:

$$M_e\{X\}=a,\, M\{X\}=a,\ \sigma\{X\}=\sigma,\ \gamma\{X\}=\frac{\sigma}{a}\,. \qquad (2.16)$$

Параметр a соответствует медиане и математическому ожиданию; параметр σ среднему квадратичному отклонению. Применение нормального распределения в качестве гипотетического для случайных величин ограничено тем, что оно предполагает ненулевую вероятность отрицательного значения, в то время как некоторые характеристики в задачах инженерного анализа не могут быть отрицательными. Нормальное распределение допускается применять только при значении коэффициента вариации, не превышающем 0,20, когда указанная вероятность пренебрежимо мала. Нормальное распределение рекомендуется применять для обработки результатов измерений только в том случае, если это регламентируется нормативной документацией, или, если имеется необходимость сопоставления с архивными данными, полученными на основе нормального распределения.

2.3.2. Логарифмически нормальное распределение

Функции плотности вероятностей и распределения имеют следующий вид:

$$f(x;a_l,\sigma_l,x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_l\cdot(x-x_0)}e^{-\frac{[\ln(x-x_0)-a_l]^2}{2\cdot\sigma_l^2}}\,, \qquad (2.17)$$

$$F(x;a_l,\sigma_l,x_0)=\Phi(z)\,, \qquad (2.18)$$

где $z=[\ln(x-x_0)-a_l]/\sigma_l$ - нормированная случайная величина,

$a_l, \sigma_l > 0,\ x_0 < x$ - параметры распределения.

Квантиль распределения уровня *P* определяется соотношением:

$$\ln(x_p - x_0) = a_l + z_p \cdot \sigma_l\,, \tag{2.19}$$

где z_p - квантиль нормированного нормального распределения уровня *P,* определяемый соотношением (2.15).

Медиана, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

$$M_e\{X\} = x_{0,5} = x_0 + e^{a_l}\,,\quad M\{X\} = x_0 + e^{a_l + \frac{\sigma_l^2}{2}}\,,\quad D\{X\} = e^{2\cdot a_l + \sigma_l^2}\cdot(e^{\sigma_l^2} - 1) \tag{2.20}$$

2.3.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

Трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко для случайной величины *X* имеет следующие выражения для функции плотности распределения и функции распределения:

$$f(x;b,c,x_0) = \frac{b}{c}\cdot\left(\frac{x - x_0}{c}\right)^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{c}\right)^b}\,, \tag{2.21}$$

$$F(x;b,c,x_0) = 1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{c}\right)^b}\,, \tag{2.22}$$

где $b > 0, c > 0, x_0 < x$ - параметры распределения.

Математическое ожидание и дисперсия определяются выражениями:

$$M\{X\} = c\cdot\Gamma(1 + 1/b) + x_0\,,\quad D\{X\} = c^2\cdot[\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)]\,, \tag{2.23}$$

где

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}\,dy \tag{2.24}$$

гамма-функция.

Квантиль уровня *P* случайной величины *X* определяется по уравнению:

$$x_p = x_0 + c\cdot\left[\ln\frac{1}{1 - P}\right]^{\frac{1}{b}}. \tag{2.25}$$

Квантиль уровня $P = 0{,}632,\ x_{0,632} = c + x_0$, медиана распределения определяется выражением:

$$x_{0,5} = x_0 + c\cdot\left[\ln\frac{1}{1 - 0{,}5}\right]^{\frac{1}{b}}. \tag{2.26}$$

При $x_0 = 0$ имеем двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко, при *b*=1 – экспоненциальное (показательное) распределение.

2.4. Непараметрические оценки характеристик распределения

При вычислении непараметрических оценок характеристик распределения случайно величины не делается никаких предположений о ее распределении.

Результаты измерений в процессе испытания ряда однотипных объектов представляют собой совокупность следующих значений:

$$x_1, x_2, ..., x_n, \tag{2.27}$$

где x_i - значение характеристики, измеренное при испытании i-го объекта;

n – число испытанных объектов (объем выборки).

Совокупность (2.27) рассматривается как случайная выборка из генеральной совокупности значений. В качестве оценок ряда числовых характеристик распределения в генеральной совокупности (генеральных характеристик) используются соответствующие числовые характеристики выборки (выборочные характеристики).

Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2.28}$$

используется в качестве оценки математического ожидания $M\{X\}$ (генерального среднего).

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{2.29}$$

используется в качестве оценки дисперсии $D\{X\}$ (генеральной дисперсии).

Выборочное среднее квадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{2.30}$$

используется в качестве оценки среднего квадратичного отклонения $\sigma\{X\}$ (генерального среднего квадратичного отклонения).

Выборочный коэффициент вариации:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \tag{2.31}$$

используется в качестве оценки коэффициента вариации $\gamma\{X\}$ (генерального коэффициента вариации).

Для проверки ряда статистических гипотез используют также следующие выборочные характеристики:

выборочный показатель асимметрии:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{n \cdot s^3} \quad , \tag{2.32}$$

выборочный показатель эксцесса:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^4}{n \cdot s^4} \quad . \tag{33}$$

Для полной выборки **непараметрическую оценку квантиля** уровня *P* случайной величины *X* вычисляют по следующей формуле [5]:

$$x_p = (1 - \alpha_p) \cdot x_i + \alpha_p \cdot x_{i+1} \quad , \tag{2.34}$$

где i – порядковый номер измеренного значения x_i случайной величины *X*, в **ранжированной** (расположенной в порядке возрастания значений) выборке объема n из произвольного непрерывного распределения. Значение i определяется из следующего уравнения:

$$i = \mathrm{int}\left[p \cdot (n+1)\right], \tag{2.35}$$

где $int(x)$ - целая часть числа x,

$$\alpha_p = p \cdot (n+1) - i \quad . \tag{2.36}$$

Для однократно **цензурированной** справа выборки I типа **непараметрическую оценку квантиля** уровня *P* случайной величины *X* вычисляют по формуле (2.34) [6,7], в которой:

$$i = \mathrm{int}\left[p \cdot \frac{k+1}{h}\right], \tag{2.37}$$

где k - число наблюдаемых членов выборки объема n;

$h = \dfrac{k}{n+1}$ - оценка степени цензурирования выборки;

$$\alpha_p = p \cdot \frac{k+1}{h} - i \quad . \tag{2.38}$$

2.5. Точечные оценки характеристик распределения. Метод максимального правдоподобия

В соответствии с методом максимального правдоподобия (ММП) [1-4] оценки параметров непрерывной, не менее двух раз дифференцируемой, функции распределения случайной величины, в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяются решением системы уравнений максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ММП-оценки) определяются в точках экстремума функции максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{k} f_x(x_i) \cdot \prod_{j=1}^{m} \left[1 - F_x(x_{бj})\right]^{r_j}, \qquad (2.39)$$

где

k - число наблюдений (число объектов достигших критического состояния);

m - число баз испытания, при достижении которых наблюдаются объекты, не достигшие критического состояния;

r_j - количество объектов, снятых с испытаний на данной базе;

$n = k + \sum_{j=1}^{m} r_j$ - общее число испытанных объектов испытания;

$x_{бj}$ - значения баз испытания, при которых наблюдаются не достигшие критического состояния объекты.

Оценки k_1 параметров $g_1, g_2, ..., g_{k_1}$ функции распределения $F_x(x)$ определяются решением следующей системы уравнений размерности k_1 относительно ММП-оценок $\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_{k_1}$ параметров распределения:

$$\left.\frac{d \ln L}{dg}\right|_{g=\bar{g}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f_x(x_i)} \cdot \frac{df_x(x_i)}{dg} - \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{r_j}{1 - F_x(x_{бj})} \cdot \frac{dF_x(x_{бj})}{dg}\right] = 0, \qquad (2.40)$$

где производные плотности распределения и функции распределения по параметрам определяют конкретный вид системы уравнений (2.40) для того или иного закона распределения.

Ковариационная матрица (ν) размерности $k_1 \cdot k_1$ оценок параметров распределений определяется обращением информационной матрицы (μ) вторых производных логарифма функции максимального правдоподобия по параметрам распределений:

$$\left(\nu\right)=\left(\mu\right)^{-1}=\left(-\frac{d^2\ln L}{dg^2_{l,s}}\right),\quad l,s=1....k_1, \tag{2.41}$$

$$\mu_{l,s}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{f_x(x_i)}\cdot\left[\frac{df_x(x_i)}{dg_l}\cdot\frac{df_x(x_i)}{dg_s}\cdot\frac{1}{f_x(x_i)}-\frac{d^2f_x(x_i)}{dg_l dg_s}\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{1-F_x(x_{бj})}\cdot\left[\frac{dF_x(x_{бj})}{dg_l}\cdot\frac{dF_x(x_{бj})}{dg_s}\cdot\frac{1}{1-F_x(x_{бj})}+\frac{d^2F_x(x_{бj})}{dg_l dg_s}\right]. \tag{2.42}$$

2.5.1. Логарифмически нормальное распределение

Оценки параметров $\bar{a}_l,\bar{\sigma}_l,\bar{x}_0$ логарифмически нормального распределения в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяют в соответствии с (2.40) как корни системы трех уравнений:

$$\left.\frac{d\ln L}{da_l}\right|_{a_l=\bar{a}_l}=\sum_{i=1}^{k}(y_i-\bar{a}_l)+\bar{\sigma}_l\cdot\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\psi(z_j)=0, \tag{2.43}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{d\sigma_l}\right|_{\sigma_l=\bar{\sigma}_l}=\sum_{i=1}^{k}\left(y_i-\bar{a}_l\right)^2+\bar{\sigma}_l^2\cdot\left[\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\psi(z_j)\cdot z_j-k\right]=0, \tag{2.44}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{dx_0}\right|_{x_0=\bar{x}_0}=\sum_{i=1}^{k}\frac{y_i-\bar{a}_l}{x_i-\bar{x}_0}+\bar{\sigma}_l^2\cdot\sum\left(x_i-\bar{x}_0\right)^{-1}+\bar{\sigma}_l\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\cdot\psi(z_j)}{x_{бj}-\bar{x}_0}=0, \tag{2.45}$$

где

$$y_i=\ln(x_i-\bar{x}_0),\ z_j=\frac{\ln(x_{бj}-\bar{x}_0)-\bar{a}_l}{\bar{\sigma}_l},\ \psi(z_j)=\frac{\varphi(z_j)}{1-\Phi(z_j)},$$
$$\varphi(z_j)=\frac{e^{-\frac{z_j^2}{2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}},\quad \Phi(z_j)=\int_{-\infty}^{z_j}\varphi(t)\cdot dt. \tag{2.46}$$

Оценки функции плотности распределения, функции распределения (вероятности не превышения уровня x), квантиля, медианы, математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации определяются по формулам (2.17)-(2.20) заменой параметров распределения их оценками.

В случае полной выборки $m=0,\ n=k,\ r_j=0$ для всех j оценки параметров $a_l,\ \sigma_l$ определяются по следующим формулам с учетом поправки на смещение для среднего квадратичного отклонения:

$$\bar{a}_l = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k} \ , \qquad (2.47)$$

$$\bar{\sigma}_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \left(y_i - \bar{a}_l\right)^2}{k-1}} \ , \qquad (2.48)$$

после чего оценку параметра $\bar{x}_0$ производят по формуле (2.45) без учета третьего слагаемого.

Поправка на смещение оценки (2.48) определяется по формуле [8]:

$$M\{\bar{\sigma}_l\} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sigma_l \approx (1 - \frac{1}{4 \cdot n}) \cdot \sigma_l .$$

Трехпараметрическое логарифмически нормальное распределение рекомендуется применять только при достаточно больших объемах испытаний ($n > 50$). В противном случае точность полученных оценок, особенно параметра x_0, невелика. В случае ограниченных объемов испытаний следует применять двухпараметрическое логарифмически нормальное распределение. Для получения оценок параметров и характеристик распределения в этом случае в уравнениях (2.17)-(2.20), (2.43)-(2.48) принимают $x_0 = 0$ и исключают из рассмотрения уравнение (2.45). При необходимости использования третьего параметра логарифмически нормального распределения в ограниченных по объему выборках (в случае заметного на графике отклонения эмпирической функции распределения случайной величины $\ln x$ от теоретического закона в нижней части распределения) рекомендуется пользоваться независимой (не ММП) оценкой параметра x_0. Для этого варьируют этим параметром, добиваясь наименьшего отклонения эмпирической функции распределения от теоретического закона, определяя на каждом шаге оценки параметров a_l, σ_l по уравнениям (2.43), (2.44) или (2.47), (2.48).

Элементы ковариационной матрицы определяются в соответствии с уравнениями (2.41), (2.42) (при $k_1 = 3$):

$$(\nu) = \frac{\sigma_l^2}{n} \cdot \left(\nu^*\right) = \frac{\sigma_l^2}{n} \cdot \left(\mu^*\right)^{-1}, \qquad (2.49)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{da_l^2} = \mu_{1,1}^* = k + \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \psi_j \cdot (\psi_j - z_j) \ , \qquad (2.50)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l^2} = \mu^*_{2,2} = 2 \cdot k + \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \psi_j \cdot z_j \cdot \left[z_j \cdot (\psi_j - z_j) - 1 \right], \tag{2.51}$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{dx_0^2} = \mu^*_{3,3} = -\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{\ln(x_i - x_0) - a_l - 1 + \sigma_l^2}{(x_i - x_0)^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot [\sigma_l - (\psi_j - z_j)]}{(x_{бj} - x_0)^2} \right\}, \tag{2.52}$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l da_l} = \mu^*_{1,2} = \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \psi_j \cdot \left[z_j \cdot (\psi_j - z_j) - 1 \right], \tag{2.53}$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{da_l dx_0} = \mu^*_{1,3} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(x_i - x_0)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot (\psi_j - z_j)}{(x_{бj} - x_0)}, \tag{2.54}$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l dx_o} = \mu^*_{2,3} = \frac{2}{\sigma_l} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\ln(x_i - x_0) - a_l}{(x_i - x_0)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot [1 + z_j \cdot (\psi_j - z_j)]}{(x_{бj} - x_0)}, \tag{2.55}$$

$$\psi_j = \frac{\varphi(z_j)}{1 - \Phi(z)}, \quad z_j = \frac{\ln(x_{бj} - x_0) - a_l}{\sigma_l}.$$

При планировании испытаний в формулы (2.49)-(2.54) подставляют ожидаемые значения параметров распределений, при статистической обработке результатов испытаний для приближенного расчета элементов ковариационной матрицы в указанные формулы подставляют ММП-оценки параметров распределения.

2.5.2. Нормальное распределение

Оценки параметров нормального закона распределения (2.11)-(2.13), элементы ковариационной матрицы и другие характеристики распределения рассчитываются точно также как и для логарифмически нормального закона распределения следующей формальной заменой обозначений в формулах (2.43)-(2.55) $k_1 = 2,\ y_i = x_i,\ a_l = a,\ \sigma_l = \sigma,\ x_0 = 0$. При этом уравнения (2.45), (2.52), (2.54), (2.55) в расчетах не учитываются.

2.5.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

ММП-оценки параметров b, x_0 распределения Вейбулла-Гнеденко (2.21), (2.22) в соответствии с уравнениями (2.40) рассчитывают как корни системы уравнений:

$$\begin{gathered} \left.\frac{d \ln L}{db}\right|_{b=\bar{b}} = \left[\frac{k}{\bar{b}} + \sum_{i=1}^{k} \ln(x_i - \bar{x}_0) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_0)^{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot (x_{бj} - \bar{x}_0)^{\bar{b}} \right] - \\ - k \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_0)^{\bar{b}} \cdot \ln(x_i - \bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot (x_{бj} - \bar{x}_0)^{\bar{b}} \cdot \ln(x_{бj} - \bar{x}_0) \right] = 0 \end{gathered}, \tag{2.56}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{dx_0}\right|_{x_0=\bar{x}_0}=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}-1}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\left(x_{бj}-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}-1}-$$

$$-\frac{1-\frac{1}{\bar{b}}}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_0\right)^{-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\left(x_{бj}-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}}\right]=0 \quad , \qquad (2.57)$$

после чего оценку параметра c определяют из уравнения:

$$\bar{c}^{\bar{b}}=\frac{1}{k}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\left(x_{бj}-\bar{x}_0\right)^{\bar{b}}\right]. \qquad (2.58)$$

Все замечания раздела 2.5.1. относительно применимости трехпараметрического распределения и перехода к двухпараметрическому распределению справедливы для распределения Вейбулла-Гнеденко в той же степени, как и для логарифмически нормального распределения. При переходе к двухпараметрическому распределению Вейбулла-Гнеденко следует в уравнениях (2.56), (2.58) положить $x_0=0$ и исключить из рассмотрения уравнение (2.57). В случае полной выборки в уравнениях (2.56)-(2.58) принимают $m=0,\ r_j=0$ для всех $j,\ n=k$. Элементы ковариационной матрицы определяются в соответствии с методикой, изложенной в разделе 2.5.1.

2.6. Точечные оценки характеристик распределения. Метод наименьших квадратов

Пусть имеется линейная модель [2,9]:

$$y=X\cdot b+\varepsilon, \qquad (2.59)$$

где y - вектор-столбец наблюдений размерности n, X - матрица размерности $n\times k_1$ известных коэффициентов ($n>k_1$), b - вектор столбец параметров размерности k_1 и ε - вектор-столбец случайных «ошибок» размерности n с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности $n\times n$:

$$D(\varepsilon)=\sigma^2\cdot V. \qquad (2.60)$$

Это означает, что случайные ошибки наблюдений не коррелированы, но имеют различные дисперсии. Метод наименьших квадратов состоит в минимизации скалярной суммы квадратов:

$$S=(y-X\cdot b)^T\cdot V^{-1}\cdot(y-X\cdot b) \qquad (2.61)$$

по компонентам вектора b. Необходимым условием обращения (2.61) в минимум является условие $\partial S/\partial b=0$. Выполняя дифференцирование, получаем:

$$2 \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot b) = 0\,, \tag{2.62}$$

откуда находим вектор МНК-оценок:

$$\bar{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y\,. \tag{2.63}$$

Матрица рассеяния оценок b [9] определяется из следующего уравнения:

$$D(\bar{b}) = (\,\nu\,) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\nu^*\right);\ \left(\nu^*\right) = n \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \quad , \tag{2.64}$$

где несмещенная оценка для остаточной дисперсии σ^2 определяется формулой:

$$\bar{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n - k_1} \cdot (y - X \cdot \bar{b})^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot \bar{b})\,. \tag{2.65}$$

Уравнения (2.63), (2.64) позволяют оценивать параметры расположения (сдвига) и масштаба, исходя из порядковых статистик, то есть выборочных наблюдений, упорядоченных по величине. Пусть y_i - порядковые статистики, a и σ параметры сдвига и масштаба (необязательно среднее и стандартное отклонение). Введем обозначение:

$$z_i = \frac{y_i - a}{\sigma}, \quad i = 1 \ldots n\ . \tag{2.66}$$

Пусть

$$M(z) = \alpha, \quad D(z) = V\,, \tag{2.67}$$

где α - вектор-столбец размерности n математических ожиданий, а V ковариационная матрица размерности $n \times n$ нормированных порядковых статистик.

Поскольку z нормировано соотношением (2.66), то α и V не зависят от параметров a, σ. На основании (2.66), (2.67)

$$M(y) = a \cdot E + \sigma \cdot \alpha\ , \tag{2.68}$$

где E - вектор из единиц размерности n. Следовательно, матрица X (2.59) размерности $n \times 2$ будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \\ 1 & . \\ . & . \\ . & . \\ 1_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{2.69}$$

Оценки параметров сдвига и масштаба на основании (2.63) равны:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y\,. \tag{2.70}$$

Матрица рассеяния оценок параметров сдвига и масштаба на основании (2.64) имеет следующий вид:

$$D(\bar{b}) = D\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix} = (\nu) = \frac{\sigma^2}{n}(\nu^*);\; \nu^* = n \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}\quad . \tag{2.71}$$

Элементы вектора математических ожиданий (α) и ковариационной матрицы (V) нормированных порядковых статистик определяются из следующих уравнений [9, В.П. Шуленин Математическая статистика, ч.2]:

$$\alpha_{n,r} = \frac{\int_0^1 F^{-1}(x,0,1) \cdot (1-x)^{n-r} \cdot x^{r-1} \cdot dx}{B(r, n-r+1)}, \tag{2.72}$$

$$V_{r,n} = \frac{\int_0^1 \left[F^{-1}(x,0,1)\right]^2 \cdot (1-x)^{n-r} \cdot x^{r-1} \cdot dx}{B(r, n-r+1)} - \alpha_{n,r}^2, \tag{2.73}$$

$$V_{r,s}(r<s) = \frac{\int_0^1 F^{-1}(v,0,1) \cdot (1-v)^{n-s} \cdot dv \cdot \int_0^v u^{r-1} \cdot F^{-1}(u,0,1) \cdot (v-u)^{s-r-1} \cdot du}{B(r, s-r) \cdot B(s, n-s+1)} - \alpha_{n.r} \cdot \alpha_{n.s}, \tag{2.74}$$

$$B(a,b) = \frac{(b-1)! \cdot (a-1)!}{(a+b-1)!}, \tag{2.75}$$

где $r, s = 1...n,$

$f(x,0,1), F(x,0,1), F^{-1}(x,0,1)$ - плотность, функция и обратная (квантильная) функция для нормированной функции распределения $F(x,0,1)$ с параметрами сдвига и масштаба.

Для двухпараметрического логарифмически нормального и нормального распределений $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$, $F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t) \cdot dt$. Для представления распределения Вейбулла-Гнеденко к виду с параметрами сдвига и масштаба осуществляют следующее нормирующее преобразование для последующей подстановки в уравнения (2.72)-(2.74):

$$\ln(x - x_0) = a + z \cdot \sigma, \quad \sigma = 1/b\,, \quad a = \ln\, c, \qquad F(z) = 1 - e^{-e^{z}}\,,\; f(z) = e^{z - e^{z}} \,. \tag{2.76}$$

В случае логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко в уравнения (2.70) вместо y следует подставлять величину $y = \ln(x - x_0)$, предварительно вычисляя независимую оценку порогового значения x_0 или считая $x_0 = 0$.

Для однократно цензурированной справа выборки II типа оценки параметров сдвига и масштаба, их ковариационную матрицу определяют по тем же формулам, но при этом матрица X (2.69), вектор наблюдений y, ковариационная матрица V составляются по первым k наблюдениям случайной величины из n объектов, подвергшихся испытанию. При этом в формулах (2.72)-(2.75) величина n остается неизменной.

2.7. Интервальные оценки характеристик распределения

Наиболее важной и сложной задачей интервального (доверительного) оценивания характеристик распределения является задача доверительного оценивания квантилей распределения.

Верхняя односторонняя доверительная граница x_{pu} для квантиля распределения x_p уровня P отвечает соотношению:

$$P\{\bar{x}_{pu} \geq x_p\} = \beta \,. \tag{2.77}$$

Соотношение (2.77) означает, что при статистической обработке каждых 100 совокупностей результатов измерений случайной величины в среднем для каждых $100 \cdot \beta$ совокупностей истинные значения x_p не будут превышать оценки $\bar{x}_{pu}$.

Нижняя односторонняя доверительная граница x_{pl} для квантиля распределения x_p уровня P отвечает соотношению:

$$P\{\bar{x}_{pl} \leq x_p\} = \beta \,, \tag{2.78}$$

где β - уровень доверительной вероятности. Обычно уровень доверительной вероятности принимают равным 0,9 или 0,95. Доверительные оценки рассчитывают на основе выбранного гипотетического распределения по оценкам его параметров. Аналогичный смысл имеют доверительные границы для параметров распределений.

Односторонние доверительные границы для квантилей нормального закона распределения в полной выборке определяют по формулам [11]:

$$\bar{x}_{pu} = \bar{a} + t_{\beta}\left[n - 1\,, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \,, \tag{2.79}$$

$$\bar{x}_{pl} = \bar{a} + t_{1-\beta}\left[n-1, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \;, \tag{2.80}$$

где $t_\gamma[f,\Delta]$ - квантиль уровня γ нецентрального распределения Стьюдента с $f = n-1$ степенями свободы и с параметром не центральности $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$, z_p - квантиль уровня P нормированного нормального распределения, $\bar{a}, \bar{\sigma}$ - оценки параметров нормального распределения. Формулы (2.79), (2.80) справедливы и для нормального распределения логарифма случайной величины.

Точное значение квантиля нецентрального распределения Стьюдента t уровня β определяется из сложных интегральных уравнений [11,12].

Для других непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба (например, Вейбулла-Гнеденко, после соответствующего преобразования (2.76)), оценки которых получены методами максимального правдоподобия или наименьших квадратов, а также в цензурированных выборках (в том числе нормальных) точных параметрических доверительных границ для квантилей не существует. Приближенные доверительные интервалы для квантилей распределения определены в работах [6,7].

Аппроксимация квантиля нецентрального распределения Стьюдента для случая полной выборки определяется из уравнения:

$$t_{\beta,1-\beta} = \frac{\left(1-1/4f\right)\cdot\Delta + z_{\beta,1-\beta}\cdot\sqrt{\left(1-1/4f\right)^2 - z_\beta^2/2f + \Delta^2/2f}}{\left(1-1/4f\right)^2 - z_\beta^2/2f} \,. \tag{2.81}$$

Доверительные границы для параметра сдвига a получают из (2.79), (2.80) как частный случай при $z_p = 0,\ \Delta = 0$. Для нормального закона эти границы совпадают с доверительными границами для медианы распределения. В этом случае нецентральное распределение Стьюдента вырождается в хорошо табулированное центральное t- распределение Стьюдента.

Для нормального распределения параметр не центральности определяется на основе квантиля z_p нормированного нормального распределения:

$$\Delta = z_p \cdot \sqrt{n} \;. \tag{2.82}$$

Двусторонние доверительные границы для генеральной дисперсии рассчитывают [12] по следующей формуле:

$$\overline{\sigma}^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}} < \sigma^2 < \overline{\sigma}^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}}, \qquad (2.83)$$

где β - двусторонняя доверительная вероятность;
χ^2_p - квантиль уровня p распределения Пирсона (хи-квадрат) с $f = n-1$ степенями свободы.

Границы доверительных интервалов для генерального среднего квадратичного отклонения σ рассчитывают путем извлечения квадратного корня из значений доверительных границ для генеральной дисперсии.

Свободные от распределения (непараметрические) двусторонние доверительные границы для квантиля уровня p произвольного непрерывного распределения (точечные оценки см. (2.34)-(2.38)) рассчитываются на основе порядковых статистик x_r, x_s, по следующей формуле [2]:

$$P\{x_r \le x_p < x_s\} = \beta = \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \qquad (2.84)$$

где β - доверительная вероятность, то есть вероятность накрыть квантиль x_p интервалом x_r, x_s. При использовании симметрично расположенных порядковых статистик $s = n - r + 1$. В частном случае медианы распределения $p = 0{,}5$:

$$\beta = (0{,}5)^n \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i, \qquad (2.85)$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}. \qquad (2.86)$$

Доверительные границы (2.84) могут быть определены и в цензурированной выборке II типа при фиксированной доле наблюдений k в выборке объема n. В цензурированной выборке I типа доверительную вероятность β рассчитывают по следующей формуле [6,7]:

$$\beta = \sum_{k=s}^{n} C_n^k \cdot h^k \cdot (1-h)^{n-k} \sum_{i=r}^{s-1} C_k^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{k-i}, \; r < s \le k < n, \qquad (2.87),$$

где k - число наблюдаемых членов выборки объема n;
$h = \frac{k}{n+1}$ - оценка степени цензурирования выборки.

2.8. Построение графика функции распределения на вероятностной сетке

При построении вероятностной сетки [13] для нормального распределения вдоль оси абсцисс в равномерном или логарифмическом масштабе наносят шкалу значений случайной величины X, а по оси ординат в равномерном масштабе шкалу значении нормированной величины $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$. Параллельно со шкалой z строят шкалу функции нормального распределения, значения которой определяют по формуле (2.12) для соответствующих значений z (рис. 2.1.).

При построении вероятностной сетки для трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе располагают шкалу значений величины $\ln(x-x_0)$ или в логарифмическом масштабе шкалу значений $x-x_0$. Вдоль оси ординат в равномерном масштабе строят шкалу величины $y = \ln\ln\dfrac{1}{1-F(x)}$, и шкалу соответствующих значений функции распределения $F(x)$. График функции распределения Вейбулла-Гнеденко на вероятностной сетке изображают прямой в соответствии с уравнением:

$$\ln(x-x_0) = \ln c + \frac{1}{b}\cdot y. \qquad (2.88)$$

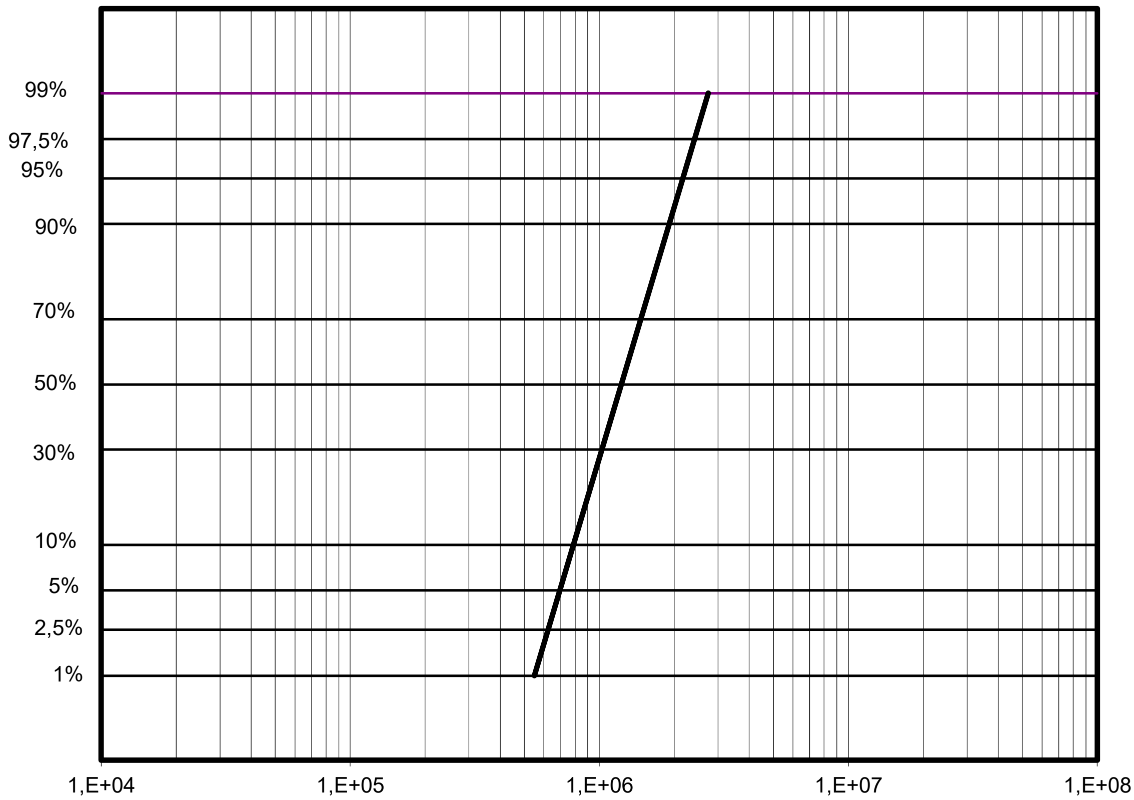


Рис. 2.1. Вероятностная сетка для логарифмически нормального распределения

Результаты испытаний представляют в виде эмпирической функции распределения на вероятностной сетке. С этой целью значения случайной величины располагают в вариационный ряд. Для каждого члена вариационного ряда по формуле $W(x) = \frac{i - 0{,}5}{n}$ рассчитывают оценку вероятности p, роль которой играет накопленная частость $W(x)$. Затем на вероятностную сетку наносят экспериментальные точки, абсциссами которых служат значения случайной величины, а ординатами накопленная частость.

2.9. Определение объема испытаний

При определении минимального необходимого объема выборки следует исходить из целей испытаний. Если цель планируемых испытаний – оценка среднего квадратичного отклонения, то объем выборки для построения интервальной оценки среднего квадратичного отклонения σ с заданной относительной погрешностью δ определяют по таблице 2.1. [12] для заданного значения доверительной вероятности β в соответствии с уравнением:

$$(1+\delta)^2 = \frac{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}}. \tag{2.89}$$

Если истинное значение математического ожидания известно, то $n = f$, если неизвестно, то $n = f + 1$.

Если целью испытаний является оценка квантильных значений, то объем испытаний определяют по формулам (2.79), (2.80) [7,13]:

$$\delta_p = \frac{\bar{x}_p - \bar{x}_{pl}}{\bar{\sigma}} = z_p - t_{1-\beta}\left[n-1\,, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \;, \quad \text{для } p < 0{,}5 \;, \tag{2.90}$$

$$\delta_p = \frac{\bar{x}_{pu} - \bar{x}_p}{\bar{\sigma}} = t_{\beta}\left[n-1\,, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - z_p \;, \quad \text{для } p \ge 0{,}5 \;, \tag{2.91}$$

где δ_p - максимальная ошибка оценки квантиля в долях выборочного параметра сдвига. Величину δ_p принимают равной 0,2-0,3 при высоких требованиях к точности, 0,4-0,6 при средних требованиях и 0,8-1,0 при низкой точности. Для планирования испытаний в полных нормальных выборках используют таблицу 2.2.

Таблица 2.1.

Необходимый объем выборки для оценки среднего квадратичного отклонения с заданной относительной погрешностью

f	Значения δ при β		f	Значения δ при β	
	0,95	0,9		0,95	0,9
1	70,52	30,26	28	0,70	0,56
2	11,07	6,64	29	0,69	0,55
3	5,58	3,71	30	0,67	0,54
4	3,80	2,54	40	0,568	0,450
5	2,93	2,11	50	0,486	0,393
6	2,42	1,77	60	0,434	0,353
7	2,08	1,55	70	0,396	0,383
8	1,84	1,38	80	0,366	0,299
9	1,65	1,26	90	0,341	0,279
10	1,61	1,16	100	0,321	0,263
11	1,40	1,07	120	0,289	0,238
12	1,30	1,01	140	1,265	0,218
13	1,22	0,95	160	0,240	0,202
14	1,15	0,90	170	0,230	0,190
15	1,10	0,86	200	0,217	0,179
16	1,04	0,82	220	0,206	0,170
17	1,00	0,78	240	0,196	0,162
18	0,96	0,75	260	0,188	0,155
19	0,92	0,73	280	0,181	0,149
20	0,89	0,70	300	0,174	0,144
21	0,86	0,68	400	0,149	0,123
22	0,83	0,66	500	0,132	0,110
23	0,80	0,64	600	0,120	0,100
24	0,78	0,62	700	0,110	0,092
25	0,76	0,61	800	0,103	0,086
26	0,74	0,59	900	0,097	0,081
27	0,72	0,58	1000	0,092	0,076

Таблица 2.2.

Минимально необходимый объем испытаний n для оценки квантиля уровня p с максимальной относительной ошибкой, не превышающей δ_p при доверительной вероятности β

β	p	Значения объема испытаний n при δ_p, равной									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,5	165	42	19	11	7	5	4	4	3	3
0,9	0,1;0,9	324	90	42	26	19	14	11	9	8	7
0,9	0.05; 0,95	420	113	55	34	24	18	14	12	10	9
0,9	0,01;0,99	663	170	86	52	35	26	21	17	14	12
0,9	0,005;0,995	755	200	92	60	43	28	23	20	16	13
0,9	0,001;0,999	1100	355	135	73	53	37	29	25	21	17
0,95	0,5	270	68	30	18	12	9	7	6	5	4
0,95	0,1;0,9	535	140	68	41	29	22	17	14	12	10
0,95	0,05;0,95	700	182	89	55	37	27	21	18	15	13
0,95	0,01;0,99	1055	254	135	82	56	41	32	26	22	19
0,95	0,005;0,995	1250	330	157	94	63	47	36	29	25	21
0,95	0,001;0,999	1595	421	207	122	83	60	47	37	31	26

Пример 2.1. Для выборки объемом $n = 30$ из произвольного непрерывного распределения определить непараметрическим методом вероятность накрытия квантиля уровня $p = 0{,}1$ интервалом между первым и шестым членами вариационного ряда.

Доверительная вероятность определяется по формуле (2.84) при $r = 1,\ s = 6, n = 30, p = 0{,}3$:

$$P\{x_1 \le x_{p=0,1} < x_6\} = \beta = \sum_{i=1}^{6-1} C_{30}^{i} \cdot 0{,}1^{i} \cdot (1-0{,}1)^{30-i} = 0{,}884 .$$

Пример 2.2. В результате испытаний на разрыв 20 образцов дюралюминиевого прессованного профиля измерены значения временных сопротивлений σ_B, МПа: 434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477. Произвести оценку квантилей временного сопротивления для уровней 0,01; 0,1; 0,5; 0,9;0,99. Для $\beta = 0{,}95$ определить нижнюю и верхнюю доверительные границы квантилей. Построить эмпирическую функцию распределения и доверительную область для функции распределения временного сопротивления на основе нормального закона.

Оценка параметров нормального закона распределения временного сопротивления производится по формулам (2.47), (2.48): $\bar{a} = 453 МПа, \bar{\sigma} = 11{,}26\ МПа$. Оценку квантилей производят по формулам (2.14) с соответствующей заменой параметров распределения их оценками. Доверительные границы рассчитываются по формулам (2.79), (2.80), квантили нецентрального распределения Стьюдента рассчитаны по приближенной формуле (2.81 для заданной доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$. Все расчеты сведены в таблицу 2.3. На рисунке 2.2. показаны эмпирическая функция распределения, верхние и нижние односторонние доверительные границы квантилей временного сопротивления, а область, заключенная между этими линиями, представляет собой 90% доверительную область функции распределения временного сопротивления.

Таблица 2.3.

Доверительные границы для функции распределения временного сопротивления

Характеристика						
Характери-стика	p	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99
	z_p	-2,326	-1,282	0	1,282	2,326
$t_{0,95}\left(19, z_p \cdot \sqrt{20}\right)$		14,734	8,616	1,731	-3,842	-7,824
σ_{Bpl}, МПа		416	431	449	463	473
σ_{Bp}, МПа		427	439	453	467	479
σ_{Bpu}, МПа		433	443	457	475	490

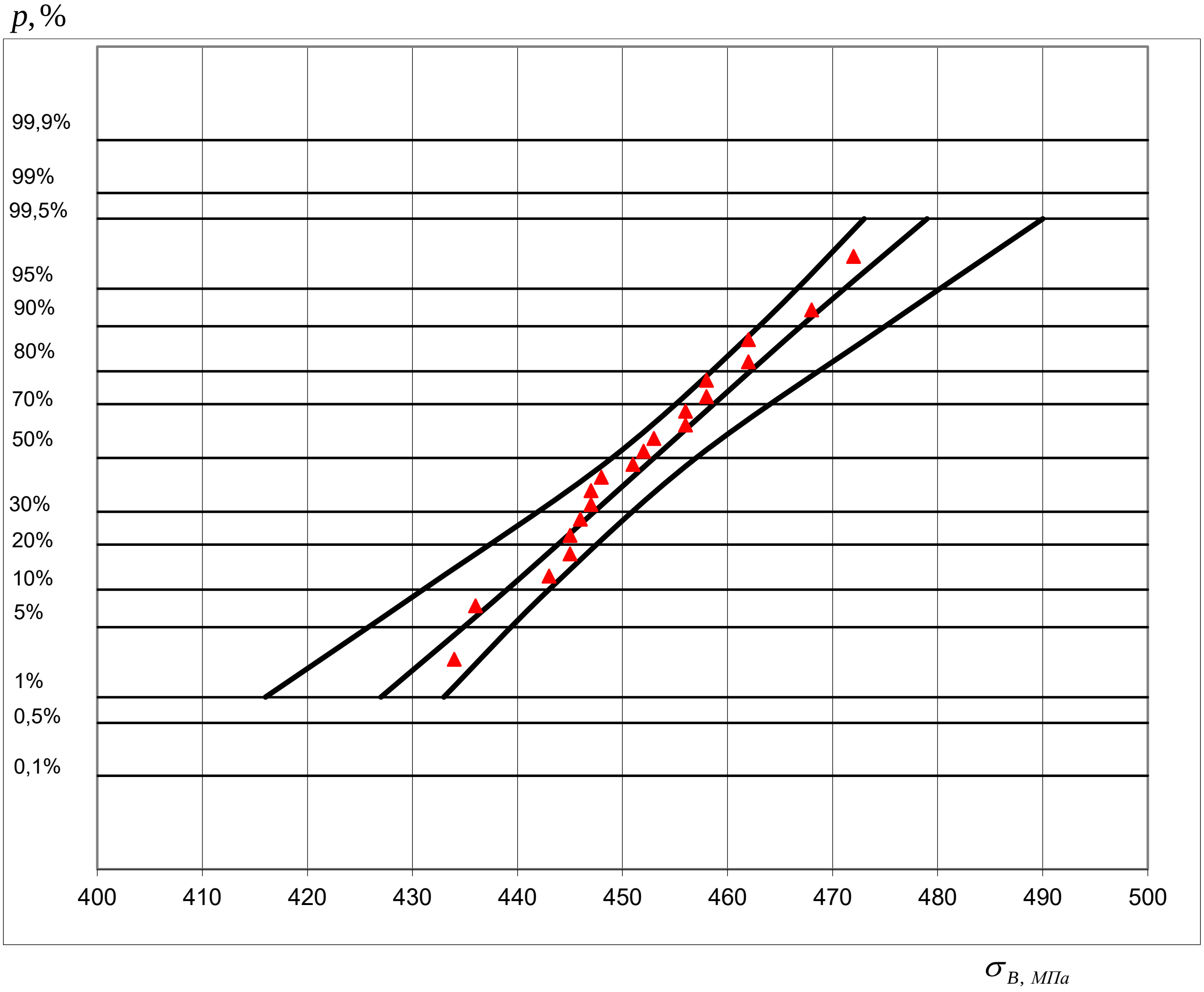


Рис. 2.2. 90%-я доверительная область распределения временного сопротивления образцов из дюралюминиевого профиля на нормальной вероятностной сетке

Контрольные вопросы

1. Определить верхнюю и нижнюю доверительные границы квантиля уровня $P = 0{,}01$ случайной величины с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}95$ на основе нормального закона распределения, если измерены следующие значения: 6.57, 6.83, 6,99, 7,05, 7,12, 7,33, 7,45.
2. Произвести оценку параметров распределения Вейбулла-Гнеденко методом максимального правдоподобия

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b},$$

если измерены следующие значения x: 5.07, 5.53, 5,89, 6,05, 6,15.
3. Произвести оценку параметра c распределения

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{x}{c}\right)},$$

методом максимального правдоподобия, если измерены следующие значения x: 15.07, 15.63, 15.79, 16.05, 16.17.

4. Произвести оценку квантиля уровня $P = 0{,}01$ распределения Вейбулла-Гнеденко, если параметры распределения составляют значения: $b = 1.1,\ c = 100,\ x_0 = 87$.

5. Произвести оценку параметров нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

методом максимального правдоподобия, если измерены значения случайной величины x: - достигшие критического состояния: 4.57, 4.89, 4,98, 5.14, 5,21; не достигшие критического состояния: 6.00, 6.00, 6.14.

6. Определить доверительную вероятность β, с которой можно оценить первым и последним членом вариационного ряда квантиль уровня $P = 0{,}1$ непараметрическим методом в выборке объема $n = 100$ из произвольного непрерывного распределения.

7. Определить доверительную вероятность β, с которой можно оценить первым и последним членом вариационного ряда квантиль уровня $P = 0{,}5$ непараметрическим методом в выборке объема $n = 10$ из произвольного непрерывного распределения.

8. Вычислить двусторонние доверительные границы для генеральной дисперсии в выборке из нормального распределения: 7.12, 6.76, 6.94, 7.23, 6.54, 6.25, 7.16, 6.87, 6.65, 7.20

9. Вычислить двусторонние доверительные границы для генерального среднего в выборке из нормального распределения: 7.12, 6.76, 6.94, 7.23, 6.54, 6.25, 7.16, 6.87, 6.65, 7.20

10. Вывести формулы для оценки параметров нормального закона распределения методом максимального правдоподобия в случае полной выборки:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов испытаний

3.1. Основные понятия

Нулевая гипотеза H_0 - основная гипотеза, состоящая, как правило, в предположении, что изучаемые явления не имеют существенных различий.

Альтернативная гипотеза H_A - гипотеза, противоположная по смыслу основной гипотезе.

Критическая область – значения выборочной статистики, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Ошибка 1-го рода - отклонение нулевой гипотезы, в то время как она верна (вероятность ошибки 1-го рода - α).

Ошибка 2-го рода - принятие нулевой гипотезы, в то время как она неверна (вероятность ошибки 2-го рода - β).

Мощность критерия - вероятность отклонить неверную нулевую гипотезу ($\beta_1 = 1 - \beta$).

Критерий значимости - статистика, устанавливающая с определенной вероятностью значимость отличия одного изучаемого явления от другого.

Уровень значимости критерия α - вероятность отклонения нулевой гипотезы в то время, как она верна (вероятность ошибки 1-го рода), обычно α=0,05, реже 0,01.

Двусторонний критерий значимости - критерий, оценивающий абсолютное расхождение между случайными величинами.

Односторонний критерий значимости - критерий, оценивающий расхождение между двумя случайными величинами, когда одна из них строго больше другой (или строго меньше другой**).**

3.2. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся (аномальных) результатов испытаний. Критерий Граббса

Описываемые в данном разделе критерии применяют для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний в том случае, когда причина резких отклонений не обнаруживается во время проведения эксперимента, но значение полученной характеристики отдельного образца вызывает сомнение. Критерии применяются для случая нормального (логарифмически нормального) распределения исследуемой величины. При выборках объемом больше 50 отбрасывание выделяющихся результатов наблюдений обычно не проводят, поскольку они не оказывают заметного влияния на точность оценки числовых характеристик и параметров распределения случайной величины.

Нулевой гипотезой при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее или наименьшее значение вариационного ряда принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные наблюдения.

Критерий Граббса применяют в тех случаях, когда имеются статистические данные по рассматриваемой выборке. Для этого рассчитывают статистики [12]:

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s},\ u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}\ , \tag{3.1}$$

где $\bar{x},\ s$ - выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение,

x_1, x_n - крайние члены вариационного ряда.

Рассчитанное значение u сопоставляют с критическим u_α для заданного уровня значимости α и объема выборки *n*. Критические значения определяются из уравнения [39]:

$$u_\alpha = (n-1)\cdot\sqrt{\frac{t^2_{\alpha/n,n-2}}{n\cdot\left(n-2+t^2_{\alpha/n,n-2}\right)}} \tag{3.2}$$

где $t^2_{\alpha/n,n-2}$ - квантиль распределения Стьюдента уровня α/n с числом степеней свободы $f = n-2$. Для двустороннего критерия α/n заменяют на $\alpha/2n$.

Нулевую гипотезу принимают, если $u \le u_\alpha$ и отвергают в противном случае.

При логарифмически нормальном распределении критерии для отбрасывания резко выделяющихся испытаний применяют к логарифмам случайной величины. В формуле (3.1) в этом случае x - логарифмы наблюденных значений; $\bar{x}$ и s - оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения логарифма случайной величины соответственно; σ - среднее квадратичное отклонение логарифма случайной величины.

3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей. Критерий Фишера (*F*-критерий)

Дисперсии двух совокупностей объемами n_1 и n_2, подчиняющихся нормальному (логарифмически нормальному) закону распределения, сравнивают с помощью двустороннего критерия *F*. Для этого рассчитывают дисперсионное отношение *F* по формуле [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}\ \text{- при}\ s_1^2 > s_2^2 \tag{3.3}$$

или

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}\ \text{- при}\ s_2^2 > s_1^2, \tag{3.4}$$

где s_1^2, s_2^2 - выборочные дисперсии.

Дисперсионное отношение F сопоставляют с критическим значением F_α для заданного уровня значимости α и чисел степеней свободы $f_1 = n_1 - 1,\ f_2 = n_2 - 1$, где f_1 - число степеней свободы для большей дисперсии. В случае соблюдения условия $F \le F_\alpha$, принимают нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

3.4. Проверка гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей. Критерий Стьюдента (*t*-критерий)

Критерий Стьюдента применяют для сравнения средних значений двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных, но равных дисперсиях $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Нулевая гипотеза заключается в предположении о равенстве средних $H_0: a_1 = a_2$. Для проверки этой гипотезы по выборочным средним $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ и выборочным дисперсиям s_1^2, s_2^2 рассчитывают статистику t [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}, \tag{3.5}$$

где

$$s^2 = \frac{f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2}{f_1 + f_2}. \tag{3.6}$$

При использовании критерия Стьюдента предварительно проверяют гипотезу о равенстве дисперсий согласно 3.3. Полученное значение t-критерия сравнивают с критическим для уровня значимости α и числа степеней свободы $f = f_1 + f_2$. Если $|t| \le t_{\frac{\alpha}{2}}$, то нулевую гипотезу о равенстве средних принимают. В противном случае $a_1 \ne a_2$.

3.5. Приближенный t - критерий.

С помощью приближенного t - критерия производят проверку равенства средних значений при неизвестных и неравных дисперсиях $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$, что обнаруживается при проверке по критерию Фишера. В этом случае вычисляют статистику [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}. \tag{3.7}$$

Для определения числа степеней свободы используют уравнение:

$$f = \frac{1}{\frac{c^2}{f_1} + \frac{(1-c)^2}{f_2}}, \tag{3.8}$$

где

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}. \tag{3.9}$$

Нулевая гипотеза принимается или отвергается при тех же условиях, что и в точном критерии Стьюдента.

3.6. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий ряда генеральных совокупностей. Критерий Бартлета

Однородность (равенство) дисперсий ряда выборок из нормально распределенных совокупностей оценивают с помощью критерия Бартлета. Для этого рассчитывают статистику критерия по формуле [2,7,13,14]:

$$\chi^2 = \frac{1}{c} \cdot \left[\ln(s^2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} n_i - m \right) - \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2 \right], \tag{3.10}$$

где m - количество выборок, s_i^2 - выборочная дисперсия,

$$c = 1 + \frac{1}{3 \cdot (m-1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m} \right], \tag{3.11}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}. \tag{3.12}$$

Если значения $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha, f=m-1}$, то нулевая гипотеза об однородности ряда дисперсий подтверждается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза о неравенстве дисперсий.

3.7. Проверка гипотезы о равенстве средних ряда генеральных совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ

Равенство (однородность) ряда средних значений оценивают с помощью однофакторного дисперсионного анализа. В основе его лежит предположение о нормальности закона распределения случайной величины в каждой выборке и однородности ряда дисперсий. Проверка нулевой гипотезы о равенстве всех средних производят с помощью F- критерия дисперсионного отношения [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \ , \tag{3.13}$$

где s_1^2 - дисперсия между m выборками объемом n_i, характеризующая рассеяние по факторам,
s_2^2 - внутренняя дисперсия, характеризующая внутреннее рассеяние, связанное со случайными колебаниями внутри каждой выборки.

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \left(\overline{x}_i - \overline{a}\right)^2}{f_1}, \quad f_1 = m - 1 \ , \tag{3.14}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{i,j} - \overline{x}_i\right)^2}{f_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(n_i - 1\right)\cdot s_i^2}{f_2}, \quad f_2 = \sum_{i=1}^{m} n_i - m \ , \tag{3.15}$$

$$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} \ . \tag{3.16}$$

В формулах (3.14)-(3.16) $\overline{x}_i$, s_i^2 - выборочные средние и дисперсии i - ой выборки, $x_{i,j}$ - j-е значение случайной величины (результат испытания) в i-ой выборке. Если дисперсионное отношение (3.13) окажется меньше критического значения F_α критерия Фишера, найденного для уровня значимости α и чисел степеней свободы f_1, f_2, то нулевая гипотеза о равенстве средних $a_1 = a_2 = ... = a_m = a$ подтверждается. В этом случае все рассматриваемые результаты испытаний принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами a, σ^2. Оценкой σ^2 служит выборочная полная (общая) дисперсия (3.6), а оценкой a - выборочное общее среднее (3.16). В противном случае гипотеза о равенстве средних отвергается. Это означает, что имеет место m нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией, но с разными средними. Оценкой генеральной дисперсии является величина s_2^2, а оценками генеральных средних – выборочные средние $\overline{x}_i$.

3.8. Критерии согласия

Проверка соответствия опытных данных выбранному виду гипотетического распределения целесообразна при объемах выборки не менее 50. В отдельных случаях проверка согласия возможна при меньшем числе образцов. Рекомендуется одновременное применение нескольких критериев в тех случаях, когда результаты проверки по одному критерию не позволяют сделать безусловный вывод о согласии опытного и теоретического распределений. Здесь рассматриваются только такие критерии согласия, которые предполагают неизвестной функцию распределения случайной величины, то есть параметры функции распределения оцениваются по данным выборочной совокупности, как это практически всегда бывает при инженерных расчетах. В данном разделе не рассматриваются критерии согласия, требующие больших объемов испытаний $(n > 100)$.

3.8.1. Критерий Шапиро-Уилка

Критерий Шапиро-Уилка (W-критерий) предназначен для проверки гипотезы о **нормальном** (логарифмически нормальном) распределении [7,13,15,16]. При ограниченном объеме опытных данных ($n \le 50$) критерий W является наиболее мощным. Результаты испытаний располагают в вариационный ряд и вычисляют статистику критерия:

$$W = \frac{b^2}{s^2} \ , \tag{3.17}$$

где s^2 вычисляется по формуле:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ , \tag{3.18}$$

а величина оценки b определяется по уравнению [15,16]:

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \ \ a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_{i,j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_{i,j} \right)^2}}, \tag{3.19}$$

где α_i - математическое ожидание i- ой порядковой статистики в выборке из нормированного нормального распределения, $v_{i,j}$ - ковариация i-ой и j-ой порядковых статистик, определяемые по уравнениям (2.72)-(2.75), при этом $(v) = (V)^{-1}$. Вычисленное значение W сравнивают с критическим, которое определяют в соответствии с Приложением П1. Если *W* больше критического значения W_α для объема выборки *n*, то нулевая гипотеза принимается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза.

3.8.2. Критерий Смирнова

Критерий Смирнова ω^2 рекомендуется использовать для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения **нормальному** закону, параметры которого оцениваются по данным выборки при объемах не менее 50 [7,13,17-19]. Для этого вычисляют статистику:

$$\omega^2 = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - W(x_i) \right]^2, \qquad (3.20)$$

где $W(x_i)$ - накопленная частость (см. раздел 2.8.) и составляют неравенство:

$$\omega^2 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot n) \le \Omega_\alpha . \qquad (3.21)$$

Если неравенство (3.21) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Критические значения критерия Ω_α составляют для уровней значимости: $\alpha = 0{,}15,\ \Omega_\alpha = 0{,}091;\ \alpha = 0{,}10,\ \Omega_\alpha = 0{,}104;\ \alpha = 0{,}05,\ \Omega_\alpha = 0{,}126;\ \alpha = 0{,}01,\ \Omega_\alpha = 0{,}178$.

3.8.3. Критерий Андерсона-Дарлинга

Критерий Андерсона-Дарлинга используют для проверки **нормальности** в тех случаях, когда больший интерес представляет соответствие эмпирической функции распределения теоретической в области крайних значений случайной величины (на «хвостах» распределения) при объемах испытаний не менее 50. С этой целью вычисляют статистику [17-19]:

$$A^2 = -n - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right) \ln\left[1 - F(x_i) \right] \right\}, \qquad (3.22)$$

и составляют неравенство:

$$\left(A^2 - \frac{0{,}7}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{3{,}6}{n} - \frac{8{,}0}{n^2} \right) \le A_\alpha . \qquad (3.23)$$

Если неравенство (3.23) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Критические значения критерия A_α составляют для уровней значимости: $\alpha = 0{,}15,\ A_\alpha = 0{,}576;\ \alpha = 0{,}10,\ A_\alpha = 0{,}656;\ \alpha = 0{,}05,\ A_\alpha = 0{,}787; \alpha = 0{,}01,\ A_\alpha = 1{,}092$.

3.8.4. Критерий χ^2

Критерий согласия χ^2 применяется для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения **произвольному** теоретическому распределению, параметры которого оцениваются по выборке. С этой целью рассчитывают статистику [2,7,13]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{e} \frac{\left(n_i - n \cdot P_i\right)^2}{n \cdot P_i}. \tag{3.24}$$

Для расчета статистики (3.24) размах варьирования случайной величины разбивают на интервалы и для каждого из них определяют число наблюдений n_i. Интервалы, содержащие менее 5 наблюдений объединяют с соседними. Пользуясь оценками параметров функции распределения $F(x)$, определяют оценку вероятности попадания случайной величины в интервал P_i. Расчетное значение критерия сопоставляют с критическим $\chi^2(\alpha, f)$, найденным для уровня значимости α и числа степеней свободы $f = e - d - 1$ (e - количество интервалов после их объединения, d - число параметров функции распределения, оцениваемых по данным выборки). Если значение статистики (3.24) меньше критического то нулевая гипотеза о соответствии опытных данных выбранному гипотетическому распределению принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается.

3.9. Непараметрические критерии для проверки статистических гипотез

3.9.1. Критерий знаков для медианы

При использовании критерия знаков [2,21] рассматривают последовательность, состоящую из n независимых испытаний, в каждом из которых могут осуществиться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равной вероятности положительного и отрицательного исходов. Пусть проведены испытания первой (X) и второй (Y) совокупностей и получены значения случайной величины, расположенные в порядке испытаний:

$$x_1, x_2, \ldots.., x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots.., y_n.$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в

n пар испытаний получены k положительных разностей, m - отрицательных и l нулевых; $n_1=n—l$. Нулевую гипотезу о равенстве медиан двух совокупностей не отвергают, если число k попадает в область допустимых значений $k_{\alpha l}, k_{\alpha u}$, с уровнем значимости α. Границы допустимых значений рассчитывают по формулам [21]:

$$\alpha = 0{,}5^{n_1} \cdot \sum_{i=0}^{k_{\alpha l}} \frac{n_1!}{i! \cdot (n_1 - i)!}, k_{\alpha u} = n_1 - k_{\alpha l} . \tag{3.25}$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0 *:* P=0,5 при альтернативной гипотезе H_A: P<0,5 должно выполняться неравенство $k \geq k_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе H_A:- P>0,5 должно выполняться неравенство $k \leq k_{\alpha u} = n_1 - k_{\alpha l}$. При двусторонней альтернативной гипотезе выполняется неравенство H_A: $P \neq 0{,}5;\ k_{\alpha l} \leq k \leq k_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов испытаний общей генеральной совокупности.

3.9.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона

В отличие от критерия знаков критерий знаковых рангов Уилкоксона учитывает расстояние наблюдений относительно нуля посредством рангов [2,21].

Пусть пары случайных величин *{X,Y}* представляют собой результаты испытаний двух совокупностей с совместной функцией распределения *F(X,Y)*. Одну из выборок подвергают некоторой обработке. Результаты испытаний другой выборки используют для контроля влияния обработки. Обработку и контроль назначают независимо и случайно. Критерий проверяет нулевую гипотезу об отсутствии различия между обработкой и контролем. Это означает, что при выполнении нулевой гипотезы случайная величина $Z=X—Y$ распределена симметрично относительно нуля. Критерий также используют для проверки гипотезы о симметрии непрерывного распределения *F(x)* относительно центра θ. Для этого вместо второй выборки задают n значений, равных θ. Результаты испытаний образцов первой X и второй Y совокупностей располагают в порядке испытаний:

$$x_1, x_2, \ldots.., x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots.., y_n;$$
$$z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \ldots.., z_n = x_n - y_n.$$

Абсолютные значения разностей $|z_i|$ располагают в порядке возрастания (ранжируют) и подсчитывают сумму рангов T (порядковых номеров) положительных значений z_i в этом ряду. Нулевые разности не учитывают, то есть $n_1 = n - l$. Для проверки нулевой гипотезы: H_0 : $\theta = 0$ где θ - медиана генеральной совокупности разностей, из которой извлекают выборку, при альтернативной гипотезе $H_A : \theta < 0$ должно выполняться неравенство $T > T_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе $H_A : \theta > 0$ должно выполняться следующее неравенство:

$$T \le T_{\alpha u} = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - T_{\alpha l}. \tag{3.26}$$

При двусторонней альтернативной гипотезе $H_A : \theta \ne 0$ должно выполняться неравенство $T_{\alpha l} \le T \le T_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Точные критические значения вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [21]:

$$M(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + x^i)}{2^n}. \tag{3.27}$$

Степень полинома (3.27) определяет все возможные наблюденные значения статистики T в выборке объема n, а коэффициенты полинома определяют распределение вероятностей этих значений.

Для приближенного расчета при больших n вычисляют статистики T_1, T_1^* по формулам [22-24]:

$$T_1 = \frac{T - \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{4}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot (n_1 + 1) \cdot (2 \cdot n_1 + 1)}{24}}};\ T_1^* = \frac{T_1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 - T_1^2}}\right). \tag{3.28}$$

Нулевую гипотезу принимают, если $T^*_{\frac{\alpha}{2}} < T_1^* < T^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где

$$T^*_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5 \cdot \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = -T^*_{\frac{\alpha}{2}}; \tag{3.29}$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $f = n_1 - 1$;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения.

3.9.3. Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий предназначен для проверки гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности [7,13]. Если рассматриваемая характеристика распределена нормально (логарифмически нормально), то проверка принадлежности двух выборок общей генеральной совокупности сводится к проверке однородности дисперсий и средних значений.

При произвольном распределении в качестве статистики критерия Колмогорова-Смирнова служит наибольшая разность между накопленными частостями, которые рассчитывают для каждого значения случайной величины X обеих выборочных совокупностей объемом n_1 и n_2:

$$k = \max\left|W_1(x) - W_2(x)\right| \ . \tag{3.30}$$

При больших n значения k рассчитывают на общих границах интервалов, которые должны быть одинаковой ширины для обеих выборок. Рассчитанное значение k сравнивают с критическим k_α. Если $k \le k_\alpha$, гипотеза о принадлежности двух независимых выборок одной генеральной совокупности подтверждается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Для средних и больших выборок ($n_1 + n_2$>35) значение k_α рассчитывают по формуле:

$$k_\alpha = D_\alpha \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}\ , \tag{3.31}$$

где $D_\alpha = 0{,}5 \cdot \sqrt{\ln \dfrac{2}{\alpha}}$, D_α =1,22 для α =0,10; D_α =1,36 для α =0,05; D_α = 1,63 для α =0,01.

3.9.4. Двухвыборочный критерий Уилкоксона

Критерий предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, то есть об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении [2,21,25]. Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ - случайная выборка из $F(x - \theta_x)$, $y_1, y_2, ..., y_n$ - случайная выборка из $F(y - \theta_y)$ ($m \le n$). Функцию распределения F не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности $H_0 : \Delta = \theta_y - \theta_x = 0$ против альтернативы $H_A : \Delta \ne 0$ строят вариационный ряд из $k = m + n$ наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду:

$$W = \sum_{i=1}^{m} R_i \ . \tag{3.32}$$

Для проверки нулевой гипотезы: $H_0 :\ \Delta = 0$ при альтернативной гипотезе $H_A : \Delta < 0$ должно выполняться неравенство $W > W_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе $H_A : \Delta > 0$ должно выполняться следующее неравенство $W \le W_{\alpha u}$. При двусторонней альтернативной гипотезе $H_A : \Delta \ne 0$ должно выполняться неравенство $W_{\alpha l} \le W \le W_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Точные критические значения статистики U, считающей сколько раз элемент первой выборки превосходит элемент второй выборки

$$[U = W - 0{,}5 \cdot m(m+1)]$$

вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [2]:

$$M(x) = \frac{m! \cdot n! \cdot \prod_{i=1}^{m+n} (x^i - 1)}{(n+m)! \cdot \prod_{i=1}^{m} (x^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1)} \quad . \tag{3.33}$$

Методика расчет точных критических значений суммы рангов такая же, как и описанная выше методика для критерия знаковых рангов.

Для приближенного расчета при больших m, n вычисляют статистики W_1, W_1^* по формулам [22-24]:

$$W_1 = \frac{W - \frac{n \cdot (m+n+1)}{2} + 0{,}5}{\sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (m+n+1)}{12}}}; \; W_1^* = \frac{W_1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{m+n-2}{m+n-1-W_1^2}}\right). \tag{3.34}$$

Нулевую гипотезу принимают, если для двустороннего критерия с уровнем значимости α выполняется неравенство $W^*_{\frac{\alpha}{2}} < W_1^* < W^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где

$$W^*_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5 \cdot \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = -W^*_{\frac{\alpha}{2}} \;; \tag{3.35}$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $f = m+n-2$;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения.

В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

3.9.5. Критерий Краскела-Уоллиса

Критерий Краскела-Уоллиса [2,21,26] обобщает задачу о двух выборках на случай k выборок: $x_{ij},\ i = \overline{1,k};\ j = \overline{1,n_j}$ с функциями распределения $F(x-\theta_j)$, где n_j - число наблюдений в j-ой выборке. Нулевая гипотеза утверждает, что k выборок из произвольных совокупностей можно рассматривать как одну (объединенную) выборку из общей совокупности, то есть утверждается равенство параметров сдвига θ_j, когда не задано значение общего параметра масштаба $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k$ против альтернативы $H_A : \theta_1, ..., \theta_k$ не все равны. Для проверки нулевой гипотезы строят общий вариационный ряд из $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ наблюдений и рассчитывают статистику:

$$H = \frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot N \cdot (N+1), \qquad (3.36)$$

где R_i - сумма рангов iой выборки в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают величину H_1:

$$H_1 = \frac{H}{2} \cdot \left(1 + \frac{N-k}{N-1-H}\right), \qquad (3.37)$$

которую сравнивают с критическим значение H_α:

$$H_\alpha = 0{,}5 \cdot \left[(k-1) \cdot F_{1-\alpha} + \chi^2_{1-\alpha}\right]; \qquad (3.38)$$

где $F_{1-\alpha}$ - квантиль уровня $1-\alpha$ F - распределения с числами степеней свободы $f_1 = k-1,\ f_2 = N-k$;

$\chi^2_{1-\alpha}$- квантиль уровня $1-\alpha$ распределения χ^2 с числом степеней свободы $f = k-1$.

Нулевую гипотезу принимают, если $H_1 \le H_\alpha$ с уровнем значимости α. В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Другим весьма эффективным способом проверки k- выборочной гипотезы является попарное сравнение выборок по критерию Уилкоксона с вычислением точных критических значений (см.3.9.4.).

Пример 3.1. В результате испытаний на разрыв 20 образцов дюралюминиевого прессованного профиля измерены значения временных сопротивлений σ_B, МПа: 434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477. Требуется проверить с помощью критерия Смирнова принадлежность результата испытания последнего образца той же генеральной совокупности, что и остальных 19 образцов.

Для рассматриваемой выборки $\bar{x} = 453$ МПа**,** $s = 11{,}26$ МПа. На основании формулы (3.1)

$$u_{20} = \frac{477-453}{11{,}26} = 2{,}12,$$

т. е. значительно меньше критического значения $u_{0,1}$=2,38 для n=20 и уровня значимости 0,10. Следовательно, результат испытания последнего в вариационном ряду образца не является резко выделяющимся, а оказывается принадлежащим той же генеральной совокупности, что и результаты испытаний остальных 19 образцов выборки.

Пример 3.2. В результате испытаний двух партий образцов (n_1=30 и n_2=20), вырезанных из разных мест прессованного профиля, найдены выборочные средние значения дисперсии временного сопротивления алюминиевого сплава, которые составили: $\bar{x}_1 = \bar{\sigma}_{B1}$= 401 МПа, s_1^2 =82 МПа и $\bar{x}_2 = \bar{\sigma}_{B2}$==409 МПа и s_2^2 =71 МПа соответственно. Требуется оценить значимость расхождения в выборочных дисперсиях.

В рассматриваемом примере $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}15$. Для f_1=29, f_2=19 находим $F_{0,05} = 2{,}07$, что говорит об отсутствии значимого различия в пределах прочности образцов, то есть можно принять, что зона профиля равноценна по однородности материала ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

Пример 3.3. По результатам статических испытаний на разрыв 20 образцов из сплава АВ измерены значения относительного сужения площади ψ_k: 0,275; 0,280; 0,285; 0,290; 0,292; 0,298; 0,299; 0,305; 0,308; 0,310; 0,313; 0,315; 0,320; 0,327; 0,340; 0,360; 0,390; 0,409; 0,420; 0,430. Проверить гипотезу о нормальном распределении относительного сужения.

Расчет по формуле (3.17) приводит к следующим результатам:

$$W = \frac{(0{,}1922)^2}{0{,}0436} = 0{,}848 < W_{0,01} = 0{,}868,$$

что свидетельствует о неприемлемости гипотезы о нормальном распределении величины относительного сужения для сплава АВ.

Пример 3.4. Построить точную функцию распределения статистики критерия знаковых рангов Уилкоксона при $n = 3$.

При $n = 3$ полином (3.27) после преобразования имеет следующий вид:

$$M(x) = \left(\frac{1 + x + x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{8} \right).$$

Степени полинома определяют значения статистики, коэффициенты полинома – частоты распределения, суммированием которых определяются значения точной дискретной функции распределения:

T	0	1	2	3	4	5	6
$G(T)$	1	1	1	2	1	1	1
$P(T) = 1 - \alpha$	1/8	2/8	3/8	5/8	6/8	7/8	8/8

Так, например, при проверке нулевой гипотезы о равенстве медиан при двусторонней альтернативной гипотезе, уровень значимости, соответствующий неравенству $1 < T \le 5$ по таблице равен 2/8, то есть 0,25.

Пример 3.5. Построить точную функцию распределения статистики критерия Уилкоксона при $m = 2, n = 3$.

Полином (3.33) после приведения членов имеет следующий вид:

$$M(x) = \left(\frac{1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6}{10} \right).$$

Степени полинома определяют критические значения статистики, коэффициенты полинома – частоты распределения, суммированием которых определяются значения точной дискретной функции распределения:

W	0	1	2	3	4	5	6
U	3	4	5	6	7	8	9
$G(W)$	1	1	2	2	2	1	1
$P(W) = 1 - \alpha$	1/10	2/10	4/10	6/10	8/10	9/10	10/10

Так, например, при проверке нулевой гипотезы об отсутствии сдвига в двух выборках при двусторонней альтернативной гипотезе, уровень значимости, соответствующий неравенству $1 < W \le 5$ по таблице равен 2/10, то есть 0,20.

Контрольные вопросы

1. Проверить по критерию Смирнова принадлежность первого члена вариационного ряда в выборке из нормального закона распределения общей генеральной совокупности:

   4.12, 4.99, 5.12, 5.32, 5.55, 5.76, 5.87, 5.98, 6.03, 6.10
2. Проверить по критерию Смирнова принадлежность последнего члена вариационного ряда в выборке из нормального закона распределения общей генеральной совокупности: 4.99, 5.12, 5.32, 5.55, 5.76, 5.87, 5.98, 6.03, 6.10, 7.05.
3. Проверить по критерию Фишера гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей:

   220, 223, 234, 245, 257 (МПа);

   234, 246, 259, 262, 278, 280, 285, 290 (МПа).
4. Проверить по критерию Стьюдента гипотезу о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей:

   220, 223, 234, 245, 257 (МПа);

   234, 246, 259, 262, 278, 280, 285, 290 (МПа)
5. Проверить по критерию Бартлета гипотезу о равенстве дисперсий пяти нормальных генеральных совокупностей, если значения выборочных средних квадратичных отклонений составляют 0.15, 0.17, 0.21, 0.25, 0.27, при объемах выборок 10, 12, 15, 9, 11 соответственно
6. Проверить по критерию Фишера гипотезу о равенстве средних пяти нормальных генеральных совокупностей, если значения выборочных средних значений и средних квадратичных отклонений составляют:

   $\bar{x}$: 7.12, 6.76, 6.94, 7.23, 6.54

   s : 0.15, 0.17, 0.21, 0.25, 0.27

при объемах выборок 10, 12, 15, 9, 11 соответственно

7. Проверить по критерию Смирнова ω^2 гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины: 7.12, 6.76, 6.94, 7.23, 6.54, 6.25, 7.16, 6.87, 6.65, 7.20

8. Проверить по критерию Андерсона-Дарлинга A^2 гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины: 7.12, 6.76, 6.94, 7.23, 6.54, 6.25, 7.16, 6.87, 6.65, 7.20

9. Проверить по критерию Уилкоксона гипотезу об отсутствии сдвига в двух независимых выборках. Измеренные значения случайных величин составляют:

720, 676, 695, 728, 654, 653, 718, 687, 665, 705 (МПа)

738, 621, 643, 628, 619, 724, 622 (МПа).

10. Рассчитать точное распределение значений суммы рангов двухвыборочного критерия Уилкоксона при объемах выборки $n_1 = 2$ и $n_2 = 2$

11. Проверить по критерию Уилкоксона гипотезу об отсутствии сдвига в двух независимых выборках. Измеренные значения случайных величин составляют:

220, 223, 234,245, 257 (МПа);

234, 246, 259, 262, 278, 280, 285, 290 (МПа)

4. Применение метода наименьших квадратов в линейных моделях

В ряде задач статистического анализа, связанных с необходимостью установления корреляционных и регрессионных зависимостей между случайными величинами применяется метод наименьших квадратов (см. раздел 2.6.). Для этого базовые физические уравнения, связывающие случайные величины между собой, необходимо привести к линейному виду в соответствии с общей линейной моделью (2.59) с целью дальнейшей оценки параметров этих уравнений. В соответствии с методом наименьших квадратов принимаем линейную модель (относительно параметров b) в следующем виде:

$$y = X \cdot b + \varepsilon \ , \tag{4.1}$$

где b - вектор столбец параметров размерности k_1, y - вектор-столбец наблюдений размерности m (зависимая случайная величина), соответствующий факторам эксперимента X (независимая случайная величина), представляющим собой матрицу размерности $m \times k_1$, ε - вектор-столбец случайных некоррелированных «ошибок» размерности n с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности $m \times m$:

$$D(\varepsilon) = \sigma_0^2 \cdot V \, . \tag{4.2}$$

Предполагается, что случайная величина y имеет нормальное распределение на каждом уровне X с параметрами $M\{y\}, D\{y\}$. Нормальность распределения y должна предварительно проверяться по одному из критериев согласия (см. раздел 3.8). Оценки параметров распределения y определяют методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов в соответствии с разделами 2.5, 2.6 [2]. Так, например, в полной выборке:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}}{n_i}, \ \bar{\sigma}_{y_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{i,j} - \bar{y}_i\right)^2}{n_i - 1} \ , \tag{4.3}$$

где n_i - объем испытаний на i - ом уровне фактора X, $y_{i,j}$ - j - е наблюдение i -го уровня.

Для уравнений со свободным членом первый столбец матрицы X должен состоять из единиц. Другие столбцы матрицы X определяются в соответствии с физическим уравнением, отражающим описываемую зависимость. Так, например, если линейная модель представлена в виде (k_1=3):

$$y = b_1 + b_2 \cdot \ln x + b_3 \cdot x^{0.5} \, ,$$

то матрица X будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \ln x_1 & x_1^{0,5} \\ 1 & \ln x_2 & x_2^{0,5} \\ . & . & \\ 1 & \ln x_m & x_m^{0,5} \end{pmatrix} . \qquad (4.4)$$

Матрица V в общем случае представляет собой матрицу размерности $m \times m$ дисперсий и ковариаций оценок случайной величины y - $D\{\bar{y}_i\}$ для каждого уровня X, то есть определяет вес данного уровня. В полной выборке эта дисперсия по теореме о дисперсии выборочного среднего равна:

$$V_{i,i} = D\{\bar{y}_i\} = \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i} , \quad i = 1,...,m , \qquad (4.5)$$

где $\sigma_{y_i}^2$ - генеральная дисперсия случайной величины y на данном уровне X.

Оценки параметров линейной модели (4.1) в соответствии с (2.63) будут равны:

$$\bar{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y \qquad (4.6)$$

Линейность модели (4.1) проверяется после расчета всех оценок на основании F-критерия вычислением дисперсионного отношения:

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} , \qquad (4.7)$$

где

$$s_2^2 = \frac{S}{m - k_1} \qquad (4.8)$$

дисперсия вокруг эмпирической линии,

$$s_1^2 = \frac{ss^T \cdot V^{-1} \cdot e}{n - m} \qquad (4.9)$$

внутрисистемная дисперсия, ss - вектор размерности m оценок условных дисперсий $\bar{\sigma}_{y_i}^2$ величины y на данном уровне X. Гипотеза о линейности модели принимается, если расчетное значение (4.7) не превышает критического, вычисленного для уровня значимости α и чисел степеней свободы $f_1 = n - m,\ f_2 = m - k_1$:

$$F \le F_\alpha(f_1, f_2) , \qquad (4.10)$$

где n - суммарный объем испытаний по всем уровням:

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i .$$

В этом случае дисперсии объединяются в общую оценку:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2} , \qquad (4.11)$$

которая является оценкой параметра σ_0^2 в уравнении (4.2).

Ковариационная матрица оценок параметров b линейной модели (4.1) вычисляется по уравнению (2.64):

$$D(\bar{b}) = \sigma_0^2 \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \quad . \tag{4.12}$$

Пример 4.1. Произвести статистическую обработку результатов измерений теплоемкости (***y*=*c*** *кДж/(кмоль·К)*) водорода в зависимости от температуры (***X*=*t***), представленных в Приложении П2. Линейную модель принять в виде:

$$y = b_1 + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3$$

По результатам статистической обработки с применением ЭВМ на рисунке 4.1 построены на нормальной вероятностной бумаге эмпирические функции распределения случайной величины y, а на рисунке 4.2 кривая зависимости $y(x)$, на которой отмечены экспериментальные точки. В таблице 4.1 представлены результаты первичной статистической обработки с расчетом выборочных средних и средних квадратичных отклонений значений теплоемкостей для каждой температуры и их нижних и верхних 95% – х доверительных границ.

Оценки параметров b, определенные методом наименьших квадратов с применением ЭВМ составили:

$$b_1=11{,}096;\ b_2=0{,}002127;\ b_3=8{,}39 \cdot 10^{-6}$$

Таблица 4.1.

Результаты первичной статистической обработки измерений

X *град С*	*n*	y_l	$\bar{y}$ *кДж/(кмоль·К)*	y_u	S_l	S_y *кДж/(кмоль·К)*	S_u
20	10	11,764	12,011	12,259	0,315	0,432	0,711
40	12	14,708	15,041	15,374	0,484	0,648	1,005
60	15	20,159	20,560	20,962	0,681	0,886	1,294
80	14	28,368	29,003	29,638	1,028	1,348	2,003

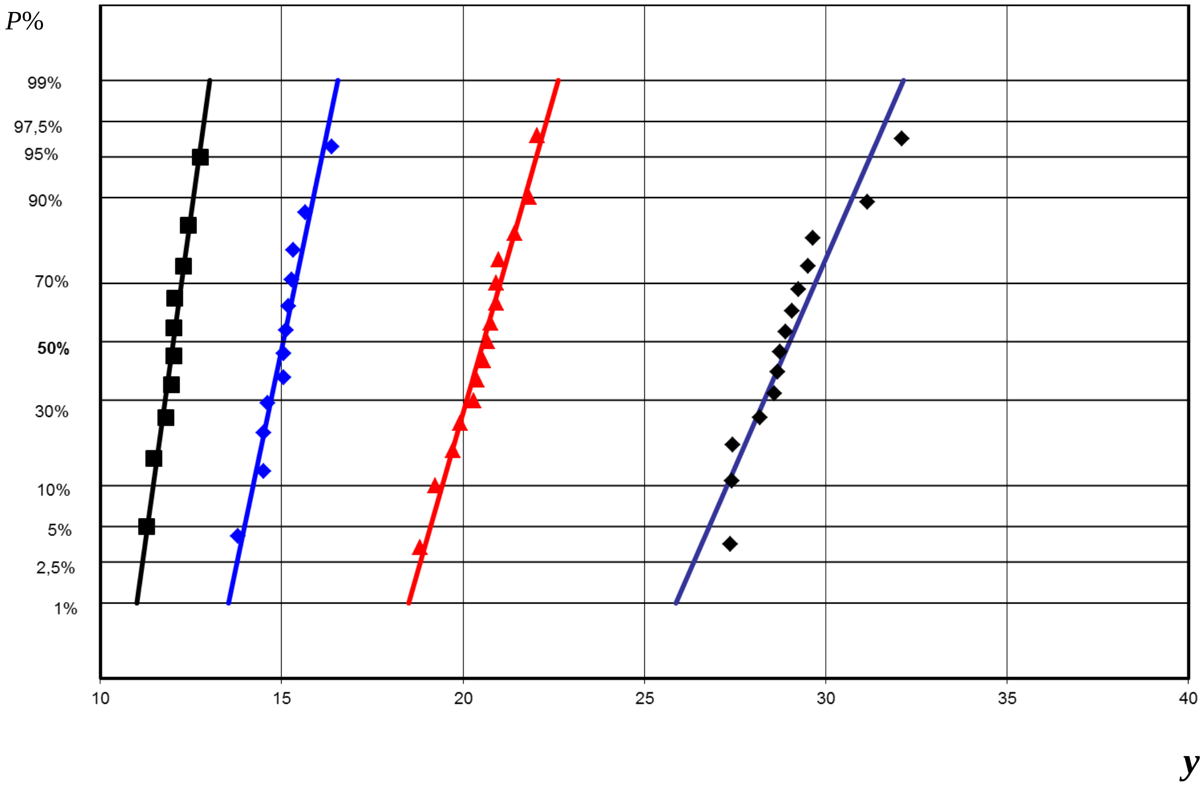


Рис. 4.1. Эмпирические функции распределения теплоемкости водорода при четырех уровнях температуры: 20, 40, 60 и 80 градусов *С*.

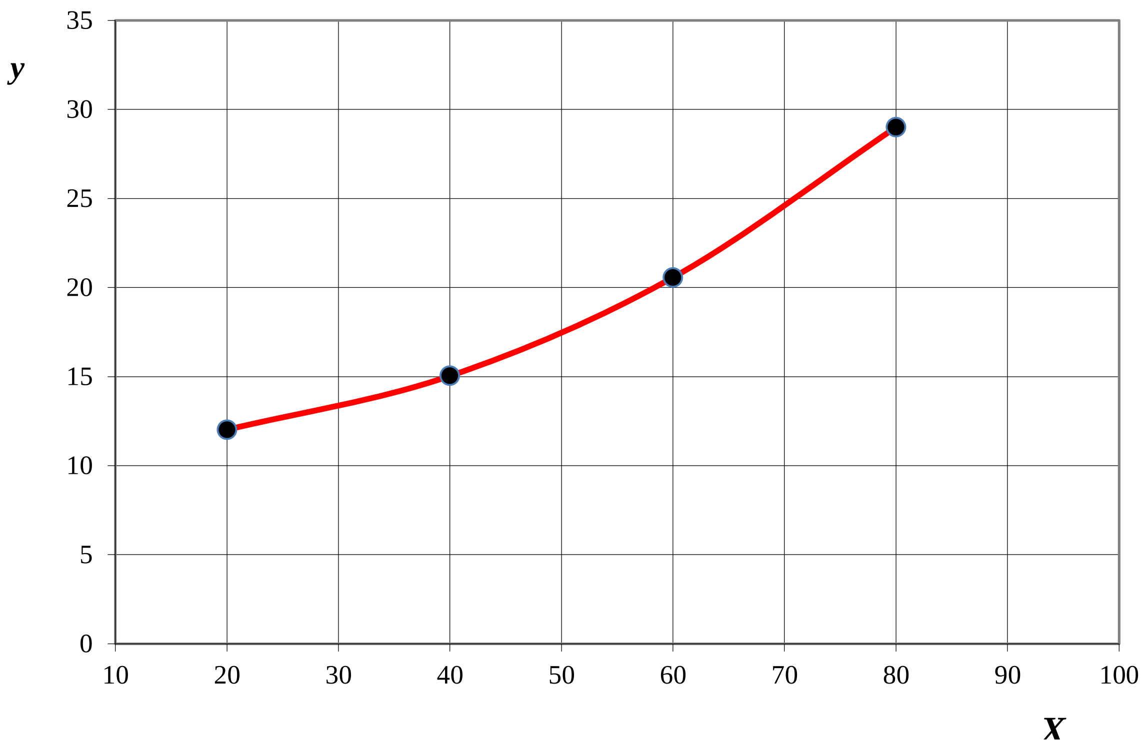


Рис. 4.2. Зависимость *y(x)*

Контрольные вопросы

1. Для линейной модели вида:

$$y = a + b \cdot \sin x + c \cdot e^{x}$$

определить методом наименьших квадратов параметры модели, если наблюдения y составляют: 12.1, 12.3, 12.5, 12.6, 12.8 при значениях факторов x: 100, 120, 140, 150,170. Значения весовой функции принять равной единице.

2. Для линейной модели вида:

$$y = a + b \cdot x^{3} + c \cdot \ln x$$

определить методом наименьших квадратов параметры модели, если наблюдения y составляют: 7.1, 7.4, 7.5, 7.6, 7.9 при значениях факторов x : 50, 30, 25, 20, 17. Значения весовой функции принять равной единице.

3. Для линейной модели вида:

$$y = a + b \cdot x^{3} + c \cdot \cos x$$

определить методом наименьших квадратов параметры модели, если наблюдения y составляют: 4.2, 4.4, 4.6, 5.1, 5.9 при значениях факторов x : 150, 130, 125, 120, 100. Значения весовой функции принять равной единице.

4. Произвести оценку параметров уравнения:

$$X^{m} \cdot y = C$$

методом наименьших квадратов, если при значениях фактора испытаний X измерены следующие значения y:

№	X=150	130	100
1	4.32	5.21	6.21
2	4.76	5.45	6.57
3	4.98	5.67	6.76
4		5.88	7.00
5		5.99	

В первом приближении считать элементы весовой матрицы V обратно пропорциональными оценкам дисперсий y для каждого уровня X.

5. Произвести оценку параметров уравнения:

$$X = A \cdot y^{-m}$$

методом наименьших квадратов, если при значениях фактора испытаний X измерены следующие значения y:

№	X =170	145	120
1	4.42	5.11	6.15
2	4.96	5.43	6.34
3	4.98	5.75	6.55
4		5.81	7.22
5		5.92	

В первом приближении считать элементы весовой матрицы V обратно пропорциональными оценкам дисперсий *y* для каждого уровня *X*.

6. Произвести оценку параметров уравнения:

$$X \cdot y^m = C$$

методом наименьших квадратов, если при значениях фактора испытаний *X* измерены следующие значения *y*:

№	X =270	250	200
1	4.42	5.11	6.15
2	4.96	5.43	6.34
3	4.98	5.75	6.55
4		5.81	7.22
5		5.92	

В первом приближении считать элементы весовой матрицы V обратно пропорциональными оценкам дисперсий *y*, а также нормальным закон распределения *y* для каждого уровня *X*.

5. Оценка параметров функции распределения независимой случайной величины

Одним из вариантов представления распределения случайных величин при **косвенных** испытаниях являются функции распределения этих случайных величин. Особенностью таких испытаний является то, что независимая случайная величина не измеряется в процессе эксперимента, а является установочным фактором (регрессором), хотя, с точки зрения физики процесса, также подвержена статистическому рассеянию. К таким случайным величинам относят предел выносливости при усталостных испытаниях, доза лекарственного препарата, обеспечивающего положительный эффект при медико-биологических исследованиях и другие характеристики, действие которых так или иначе связано с влиянием на продолжительность жизненного цикла механической, теплотехнической, энергетической или биологической системы. Статистическая оценка параметров функции распределения таких случайных величин производится специальными косвенными методами, один из которых, «вверх-вниз», рассмотрим ниже

5.1. Метод «вверх-вниз»

В соответствии с методом «вверх-вниз» [36-38] первый объект из серии объектов объемом *n* испытывают при значении исследуемого случайного фактора равном ожидаемому. Если первый образец не достигает критического состояния за заданное время, то второй объект испытывают при более высоком значении фактора, а если достигает, то испытание второго объекта проводят при более низком значении фактора. Уровень значения фактора для испытания третьего объекта выбирают в зависимости от результатов испытания второго. Функция максимального правдоподобия имеет следующий вид:

$$L = C \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} \cdot (1 - p_i)^{l_i}\,, \tag{5.1}$$

где m - количество уровней факторов, реализованных при испытаниях;
k_i - число достигших критического состояния объектов на i-ом уровне;
l_i - число не достигших критического состояния объектов на i-ом уровне;
$n_i = k_i + l_i$ - число испытаний на i-ом уровне;
$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ - общее число испытанных объектов;
$p_i = F(x_i)$ - вероятность достижения критического состояния на i-ом уровне x_i;
$F(x, g_1, g_2, ..., g_{k_1})$ - непрерывная дифференцируемая функция распределения исследуемого фактора с k_1 параметрами g, которые подлежат оценке в соответствии с принятым теоретическим законом распределения.

При испытаниях методом «вверх-вниз» k_i, l_i, n_i являются величинами случайными. ММП-оценки параметров распределения определяют решением системы k_1 (по числу параметров) уравнений с учетом (5.1):

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial g}\right|_{g=\bar{g}} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial g_j} \right) \cdot \left(\frac{k_i}{F(x_i)} - \frac{l_i}{1 - F(x_i)} \right) = 0\,, \quad j = 1...k_1\,. \tag{5.2}$$

Производные $\frac{\partial F(x_i)}{\partial g_j}$ определяют конкретный вид системы уравнений (5.2).

Для нормального распределения $g_1 = a, g_2 = \sigma$.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{\varphi(z)}{\sigma};\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\frac{z\cdot\varphi(z)}{\sigma};\ z = \frac{x-a}{\sigma};\ \varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}};\ F(x) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\varphi(x)dx. \quad (5.3)$$

Для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко, представленного в виде распределения с параметрами сдвига и масштаба (см. раздел 2 (2.76)) $g_1 = a, g_2 = \sigma, g_3 = \sigma_0$. Для логарифмически нормального распределения:

$$z = \frac{\ln(x-x_0)-a}{\sigma}\ . \quad (5.4)$$

Все остальные обозначения те же , что и в формуле (5.3). Для распределения Вейбулла-Гнеденко:

$$z = \frac{\ln(x-x_0)-a}{\sigma},\ a = \ln c,\ b = \frac{1}{\sigma},\ \varphi(z) = e^{z-e^z},\ F(z) = 1-e^{-e^z}\ . \quad (5.5)$$

Для нормального распределения линейная аппроксимация [36-38] системы уравнений (5.2) приводит при определенных ограничениях к простым оценкам параметров:

$$\bar{a} == x_0 + d\cdot\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} i\cdot k_i}{\sum_{i=0}^{m} k_i} \pm 0{,}5\right], \quad (5.6)$$

$$\bar{\sigma} = 1{,}62\cdot d\cdot\left[\frac{\left(\sum_{i=0}^{m} k_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m} i^2\cdot k_i\right)-\left(\sum_{i=0}^{m} i\cdot k_i\right)^2}{\left(\sum_{i=0}^{m} k_i\right)^2} + 0{,}029\right], \quad (5.7)$$

где d - интервал между уровнями фактора, который в продолжение испытаний выдерживается постоянным. После проведения испытаний перед расчетом по формулам (5.6), (5.7) устанавливают общее число критических и некритических значений. Если общее число объектов, достигших критического состояния $\sum_{i=1}^{m} k_i$ меньше числа не достигших $\sum_{i=1}^{m} l_i$ расчет ведут по критическому количеству объектов. В этом случае в формуле (5.6) ставят знак минус. В противном случае, расчет ведут по некритическому количеству объектов (т. е. в формулах (5.6), (5.7) вместо k_i подставляют

l_i и в формуле (5.6) ставят знак плюс. Формула (5.7) дает удовлетворительные результаты при значении первого слагаемого в квадратных скобках больше 0,3. В противном случае необходимо решать численными методами систему уравнений (5.2) с учетом соотношений (5.3)-(5.5).

Ковариационная матрица оценок параметров определяется из уравнений:

$$(\nu) = (\mu)^{-1}; \ \mu_{i,j} = \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial F(x_q)}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F(x_q)}{\partial g_j} \cdot \left[\frac{k_q}{F^2(x_q)} + \frac{l_q}{[1 - F(x_q)]^2} \right], i, j = 1 \ldots k_1. \quad (5.8)$$

При статистической обработке результатов испытаний в уравнение (5.8) подставляют ММП-оценки параметров и реальные значения *k, l*, получившиеся в результате эксперимента. При планировании испытаний методом «вверх-вниз» в уравнение (5.8) подставляют ожидаемые значения параметров распределения и чисел *l, k*, которые определяются из следующих уравнений [36]:

$$k_i = \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i} \ , \quad (5.9)$$

$$\omega_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{F_j}{1 - F_j} \text{ при } F_i < 1 - F_i \text{, то есть при } i < 0, \quad (5.10)$$

$$\omega_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1 - F_j}{F_j} \text{ при } F_i > 1 - F_i \text{, то есть при } i > 0, \quad (5.11)$$

$$\omega_0 = 1 \text{ при } F_i = 1 - F_i, \quad (5.12)$$

$$n = 2 \cdot k_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i \quad (5.13)$$

где n ожидаемое значение общего числа испытаний.

Ожидаемое значение l_i на i-ом уровне связано с числом k_i следующим соотношением:

$$l_i = k_{i+1} = k_i \cdot \frac{1 - F_i}{F_i} \ , \quad (5.14)$$

где F в целях сокращения записи обозначает $F(x)$. С учетом (5.9)-(5.14) уравнение (5.8) примет следующий вид:

$$\mu_{i,j} = \frac{n}{2 \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \omega_q} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_q}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F_q}{\partial g_j} \cdot \frac{\omega_q}{F_q^2 \cdot (1 - F_q)} \ , \ i, j = 1 \ldots k_1. \quad (5.15)$$

Для нормального распределения матрицы (μ) и (ν) являются приближенно диагональными:

$$\nu_{1,1} = D\{\bar{a}\} = \frac{2\cdot\sigma^2}{n}\cdot G^2;\ \nu_{2,2} = D\{\bar{\sigma}\} = \frac{2\cdot\sigma^2}{n}\cdot H^2;\ \nu_{1,2} \approx 0\ , \tag{5.16}$$

где $\nu_{1,1}$ - асимптотическая дисперсия выборочного среднего значения; $\nu_{2,2}$ - асимптотическая дисперсия выборочного среднего квадратичного отклонения.

Значения функций G и H даны в Приложении П3 в зависимости от отношения величины интервала между уровнями d к ожидаемому значению среднего квадратичного отклонения $\frac{d}{\sigma}$ и в зависимости от положения ожидаемого среднего значения относительно ближайшего к этому значению уровня фактора при испытаниях.

Приближенные доверительные границы для квантиля уровня p случайной величины исследуемого фактора с доверительной вероятностью β определяют по уравнениям (2.79), (2.80) с учетом уравнений (5.8)-(5.16) для ковариационных матриц.

Пример 5.1. В табл. 5.1 приведены результаты усталостных испытаний методом «вверх-вниз» 40 образцов из углеродистой стали с σ_B=600 МПа. Рассчитать оценки параметров функции распределения предела выносливости, точечные и доверительные оценки квантиля уровня p =0,1 с доверительной вероятностью β=0,9.

Для нормального распределения оценки параметров равны: $\bar{a}$ =295,5 МПа, $\bar{\sigma}$=6,18 МПа. Для логарифмически нормального распределения: $\bar{a}_l$=3,27, $\bar{\sigma}_l$=0,229, $\bar{\sigma}_0$=269 Мпа. Для распределения Вейбулла-Гнеденко:
$\bar{c}$ = 13,421, $\bar{b}$ = 2,085, $\bar{\sigma}_0$ = 284 МПа.

Таблица 5.1.
Результаты испытаний образцов

σ_a ,Мпа	Разрушения k	Не разрушения l	Общее n
285	0	1	1
290	1	8	9
295	9	6	15
300	7	4	11
305	4	0	4

Верхние и нижние доверительные границы квантили уровня p =0,1 предела выносливости с доверительной вероятностью 0,9 определены для нормального, логарифмически нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений предела выносливости соответственно:

$$\bar{\sigma}_{pu} = 292{,}3 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{p} = 287{,}6 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{pl} = 282{,}9 \text{ МПа};$$
$$\bar{\sigma}_{pu} = 294{,}2 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{p} = 288{,}5 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{pl} = 282{,}9 \text{ МПа};$$
$$\bar{\sigma}_{pu} = 294{,}4 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{p} = 288{,}6 \text{ МПа}; \; \bar{\sigma}_{pl} = 282{,}7 \text{ МПа}.$$

Значение статистики критерия согласия хи-квадрат, рассчитывается по формуле [7]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i - n_i \cdot F_i)^2}{n_i \cdot F \cdot (1 - F_i)} \le \chi^2_{\alpha,m-2} \qquad (5.22)$$

и составляет для нормального распределения - 2,747; для логарифмически нормального распределения - 2,422; для распределения Вейбулла-Гнеденко - 2,370. Критическое значение критерия для числа степеней свободы f =3 и уровня значимости 0,05 равно 7,8, что подтверждает гипотезу о соответствии опытных данных теоретическому закону для всех рассматриваемых распределений. Тем не менее, анализ результатов свидетельствует о лучшем соответствии опытных данных логарифмически нормальному распределению и распределению Вейбулла-Гнеденко по сравнению с нормальным законом распределения предела выносливости.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается методика испытаний методом «вверх-вниз»?
2. Вывести уравнения максимального правдоподобия для оценки параметров распределения Вейбулла при испытаниях методом «вверх-вниз».
3. Вывести уравнения максимального правдоподобия для оценки параметров логарифмически-нормального распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».
4. Вывести уравнения максимального правдоподобия для оценки параметров нормального распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».
5. Вывести уравнения для ковариационной матрицы параметров нормального распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».
6. Вывести уравнения для ковариационной матрицы параметров логарифмически-нормального распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».
7. Вывести уравнения для ковариационной матрицы параметров распределения Вейбулла при испытаниях методом «вверх-вниз».
8. Записать функцию максимального правдоподобия при испытаниях методом «вверх-вниз».

9. Записать критерий для проверки гипотезы о соответствии выбранной функции распределения теоретическому закону распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».
10. Записать доверительные границы для квантилей распределения при испытаниях методом «вверх-вниз».

Список литературы

1. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. М: «Наука»,1966.
2. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М: «Наука»,1973, с. 899.
3. A. C. Cohen. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. Technometrics, vol. 18, № 1, 1976, pp. 99-103.
4. A.C. Cohen. Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution. Technometrics, vol 17, № 3, 1975, pp. 347-350.
5. Скрипник В. М., Назин А. Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск, 1981, с. 143.
6. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей надежности элементов конструкций авиационной техники. Докторская диссертация. М.:МАТИ, 1996.
7. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость. Методические указания. РД 50-705-91. М.: Издательство стандартов, с. 167.
8. Гнеденко Б.В. Теория вероятностей. М.: 1961, с.406.
9. Введение в теорию порядковых статистик. Сборник под редакцией Сархан А., Гринберг Б.М.: Статистика, 1970, с.415.
10. David F. N., Johnson N. L. Statistical Treatment of Censored Data, 1954, Part 1. Biometrika, v. 41, pp. 228-240.
11. Pearson E. S., Hart1ey H.O. Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1, 1966, vol. 2, 1972. Cambridge University Press.
12. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: «Наука», 1983, с. 416.
13. Степнов М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. М.: Машиностроение, 1985, с. 231.
14. Bartlett M. S. Properties of Sufficiency and Statistical Test Proc. Roy. Soc. A., v. 160, 1937, p. 268.
15. Shapiro S.S., Wilk M. B. An Analysis of Variance Test for Normality (complete samples). Biometrika, v. 52, 1965, p. 591.
16. Shapiro S.S., Wi1k M.B., Chen H.J. A comparative study of variance test for Normality. J. Amer. Stat. Ass., 1968, № 324, v. 63, pp. 1343-1372.
17. Stephens M. A. Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises and Related statistics without Extensive Tables. J. R. Statist. Soc., B., 32, 1970, pp.

115-122.
18. Stephens M. A. Tests for Normality. Stanford Univ. Dept. of Statistics. Tech. Report, № 152, 1969.
19. Stephens M. A. Kolmogorov-type Tests for Exponentiality When the Scale Parameters is Unknown. Stanford Univ. Dept. of Statist. Tech Report № 154, 1970.
20. Mann N. R., Fertig K. W., Scheuer E. M. Tolerance Bounds and a New Goodness of Fit Test for Two-Parameter Weibull or Extreme Value Distribution. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio, ARL 71-0077, May 1971.
21. Т. Хеттманспергер. Статистические выводы, основанные на рангах. М.: Финансы и статистика, 1987, с. 334.
22. Iman R. L. An approximation to the Exact Distribution of the Wilcoxon signed rank Test Statistic. Commun. Statist. 1974, v. 3, pp. 795-806.
23. Iman R. L. An Approximation to the Wicloxon-Mann-Whitney rank sum Test Statistic. Commun. Statist., 1976, A5, pp. 587-598.
24. Iman R.L., Davenport J. New Approximation to the Exact Distribution at the Kruskal-Wallis Test statistic. Commun. Statist, 1976, A5, pp. 1335-1348.
25. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика: 1983, с. 518.
26. Kruskal W.H., Wa11es W. A. Use of Ranks in one-criterion Variance Analysis. J. Amer. Statist. Ass., v. 47, 1952, p. 583, v. 48, 1953, p. 907.
27. Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В. Усталость легких конструкционных сплавов, М: Машиностроение, 1973, с. 318.
28. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. О статистической обработке многократно цензурированной выборки при испытаниях на усталость. Зав.лаб. № 7, 1984, с. 145-148.
29. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Экономический аспект планирования усталостных испытаний образцов и элементов конструкций из легких сплавов. Зав. лаб, 1981, № 2, с. 73-75.
30. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности оценки квантили предела выносливости в связи с вариацией выборочных параметров уравнений кривых усталости. Зав. лаб., 1987, № 11, с. 73-76.
31. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности определения пределов ограниченной выносливости элементов конструкций из легких сплавов. Известия ВУЗов. Машиностроение, № 8, 1981, с. 21-24.
32. Агамиров Л.В., Сухова И.П. О закономерностях рассеяния долговечности в связи с формой кривой усталости. Вестник машиностроения, №5,1997,с.3-7.
33. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей наежности элементов конструкций авиационной техники. Докторская диссертация, М.: МАТИ, 1994 г.
34. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во

времени. М.: Машиностроение, 1977, с.232.
35. Степнов М. Н., Ковалев И. Е., Николаев А. В. и др. Косвенная оценка пределов выносливости титановых сплавов при переменном изгибе, растяжении-сжатии и кручении. Заводская лаборатория, № 3, 1999, с. 41-44.
36. Dixon W. T., Mood A. M. J. Amer. Statist. Ass., v. 43, 1948, p. 109.
37. Степнов М. Н., Агамиров Л.В., Иноземцева И. А. Планирование усталостных испытаний, проведенных методом «вверх-вниз». Зав. лаб. № 10, 1981, с. 74-77.
38. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях методами «вверх-вниз» и «пробитов». Зав. лаб. № l, 1990, с. 51-55.
39. Engineering Statistics Handbook.
http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/eda.htm, 5/1/2006.

Приложение

Приложение П1. Значения α -процентных пределов критерия *W* для *n*=3 – 50

N	Значения *W* при α , равном				
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927
7	0,73	0,760	0,803	0,838	0,928
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947
15	0.835	0,855	0,881	0,901	0,950
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960
22	0,878	0,982	0,911	0.926	0,961
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965
28	0,896	0,907	0,924	0,936	0,966
29	0,898	0,91	0,926	0,937	0,966
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,967
33	0,906	0,917	0,931	0.942	0,968
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974

Приложение П2. Результаты измерений теплоемкости водорода кДж/(кмоль·К) при четырех уровнях температуры

X(град С)=20	40	60	80
11,2685	13,80027	18,82243	27,3692
11,4842	14,49774	19,22371	27,42294
11,8125	14,50419	19,71913	27,43032
11,9684	14,62426	19,90892	28,18729
12,0305	15,04771	20,28874	28,58413
12,0339	15,06772	20,38832	28,66733
12,0417	15,12425	20,5613	28,74046
12,2864	15,19457	20,67158	28,90435
12,4315	15,27336	20,74982	29,06646
12,7566	15,33016	20,91391	29,24978
	15,65301	20,91782	29,51769
	16,37446	20,97065	29,64831
		21,42123	31,15185
		21,81006	32,10203
		22,03797	

Приложение П3. Зависимость коэффициентов G,H от d/σ и B

B	d/σ	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
0	G	0,9389	0,9963	1,0758	1,1522	1,2105	1,2400	1,2502	1,2527	1,2532	1,2533	1,2533
	H	1,7450	1,3709	1,2766	1,3805	1,7926	2,2625	4,9929	-	-	-	-
0,1	G	0,9411	1,0040	1,0754	1,1516	1,2142	1,2535	1,2752	1,2888	1,3002	1,3118	1,3247
	H	1,7520	1,3838	1,2745	1,3481	1,6300	2,1196	2,6694	2,9256	2,8296	2,6144	2,4073
0,2	G	0,9411	1,0040	1,0743	1,1502	1,2242	1,2909	1,3493	1,4018	1,4535	1,4878	1,5716
	H	1,7520	1,3843	1,2705	1,2729	1,3510	1,4643	1,5669	1,6045	1,5680	1,4761	1,4261
0,3	G	0,9411	1,0040	1,0743	1,1484	1,2367	1,3423	1,4639	1,5987	1,7478	1,9171	2,1160
	H	1,7520	1,3849	1,2655	1,1952	1,1461	1,1347	1,1571	1,1929	1,2242	1,2473	1,2707
0,4	G	0,9411	1,0040	1,0719	1,1469	1,2344	1,3888	1,5840	1,8442	2,1840	2,6244	3,1976
	H	1,7520	1,3854	1,2616	1,1417	1,0261	0,9830	0,9854	1,0080	1,1166	1,2385	1,4003
0,5	G	0,9411	1,0040	1,0715	1,1277	1,2510	1,4079	1,6390	1,9748	2,4630	3,1788	4,2446
	H	1,7520	1,3850	1,2601	1,1061	0,9991	0,9385	0,9366	0,9874	1,0946	1,2715	1,5435