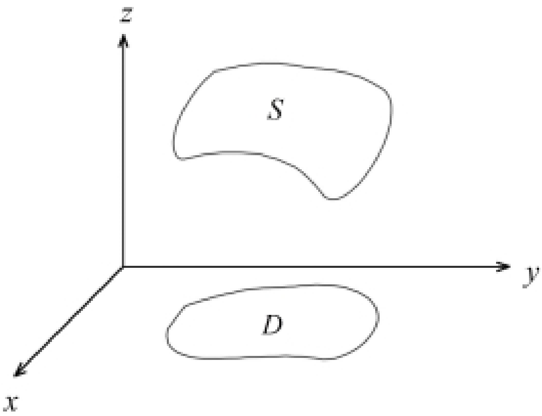
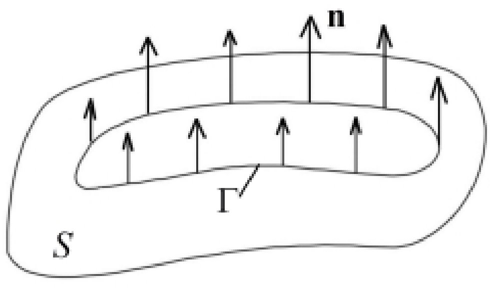
Поверхностные интегралы

Двусторонние поверхности

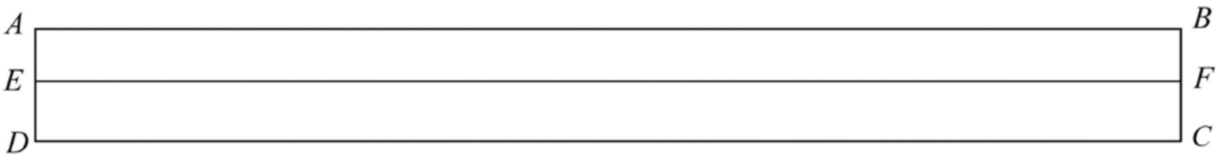
Рассмотрим сначала поверхность S, представляющую собой график функции $F(x, y, z) = 0$, имеющей непрерывные частные производные для всех $(x, y) \in D$, где D – область на плоскости.



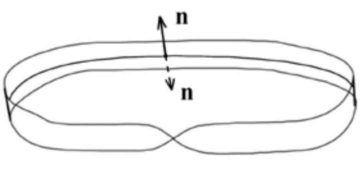
Пусть Г – произвольный замкнутый контур, лежащий на поверхности и не пересекающей ее край. Выберем в произвольной точке этого контура одно из двух возможных направлений нормали. Пусть при обходе этого контура нормаль меняется непрерывно. Тогда, если при обходе произвольного контура, лежащего на поверхности S, направление нормали при возвращении в исходную точку не меняется, такая поверхность называется **двухсторонней**.



Бывают поверхности, не являющиеся двусторонними или **односторонние поверхности**. Простейший пример – лист Мебиуса. Он получается так: рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и линию EF, соединяющую середины его сторон.



Склеим точку A с точкой C, B с точкой D.



Если обходить контур EF, то при возвращении в исходную точку направление нормали изменится на противоположное. Это доказывает <u>односторонность</u> листа Мебиуса.

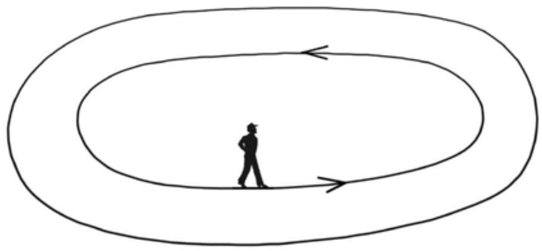
В дальнейшем мы рассматриваем <u>только двусторонние</u> поверхности.

Определение. Пусть $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутое ограниченное множество, а $f: \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ – взаимно однозначное отображение. Тогда множество $S = f\left(\overline{D}\right)$ называется **простой поверхностью. Границей поверхности** (краем) ∂S будем называть образ кусочно-гладкого контура ∂D, который ограничивает область $\overline{D}$, т.е. $\partial S = f\left(\partial D\right)$

<u>Определение.</u> Будем говорить, что гладкая поверхность **ориентируема,** если на ней можно построить непрерывное поле нормальных единичных векторов. Это поле определяет **ориентацию** (или сторону) поверхности. Смена направления всех нормалей на противоположное приводит к смене стороны поверхности. Таким образом, *ориентируемыми могут быть только двухсторонние поверхности*. Соответственно, речь в дальнейшем будет идти только об ориентируемых поверхностях.

У простых поверхностей можно выбрать **верхнюю** и **нижнюю** стороны. Верхняя сторона может быть охарактеризована тем, что направление нормали к этой поверхности в любой ее точке составляет с осью Oz острый угол (нижней стороне, соответственно, отвечает тупой угол между нормалью и осью Oz).

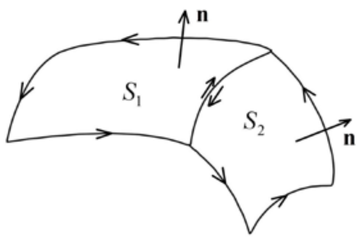
Выбор стороны поверхности задает ориентацию контуров, которые на ней лежат. Будем считать, что контур на поверхности обходится в **положительном направлении**, если при движении вдоль контура, поверхность, которую он ограничивает, остается слева.



Отрицательное направление противоположно положительному.

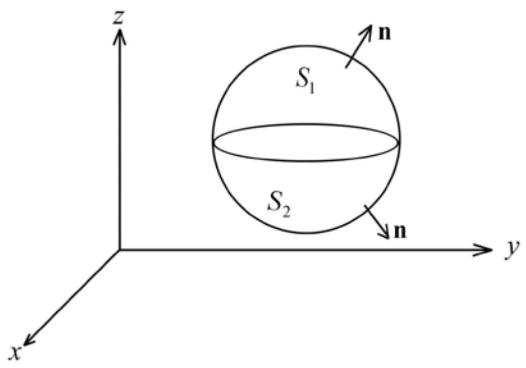
Обратно, выбор положительного направления обхода контуров на поверхности задает ориентацию поверхности или выбор стороны этой поверхности.

Если поверхность состоит из нескольких частей, каждая из которых – простая двусторонняя поверхность, то можно соединить эти части в одну двустороннюю поверхность, согласовав ориентацию общих границ.



Например, в случае двух частей ориентация будет согласованной, если положительное направление движения по общей границе происходит от A к B на поверхности S_1 и от B к A на S_2.

Это замечание позволяет говорить о **внешней и внутренней** сторонах замкнутой поверхности.



Например, для сферы:

S_1 – верхняя полусфера, внешняя нормаль составляет острый угол с осью Oz.

S_2 – нижняя полусфера. Внешняя нормаль составляет тупой угол с осью Oz.

S_1 и S_2 вместе составляют внешнюю сторону сферы. При этом положительные направления обхода «экватора» противоположны друг другу на S_1 и на S_2. Заметим, что сфера не является простой поверхностью, но ее нижняя и верхняя части – это простые поверхности.

Параметрическое уравнение поверхности

Пусть (x_0, y_0, z_0) – точка поверхности $z = z(x, y)$, т.е. $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (1).$$

Соответственно, нормальный вектор к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) определяется так:

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\}$$

Этот вектор, вообще говоря, не единичный. Умножая его на один из нормирующих множителей

$$\pm\frac{1}{|\mathbf{n}|}, \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}$$

получаем 2 единичных вектора

$$\mathbf{n}_1 = \left\{ -\frac{1}{|\mathbf{n}|}\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{1}{|\mathbf{n}|}\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{1}{|\mathbf{n}|} \right\}_{(x_0, y_0)} \qquad (2)$$

и $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.

Известно, что координаты единичного вектора (2) – это косинусы углов, составляемых этим вектором с осями Ox, Oy и Oz соответственно, т.е.

$$\mathbf{n}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1), \quad \mathbf{n}_2 = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2). \quad (3)$$

Т.к. $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, то $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi,\ \beta_2 = \beta_1 + \pi,\ \gamma_2 = \gamma_1 + \pi$.

Из (2) и (3) следует, что $\cos\gamma_1 = \dfrac{1}{|\mathbf{n}|}$, и соответственно

$$\cos\alpha = -\frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma, \ \cos\beta = -\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma.$$

Отметим, что $\cos\gamma_1 > 0$, т.е. угол между вектором $\mathbf{n}_1$ и осью Oz острый, поэтому верхней стороне соответствует вектор $\mathbf{n}_1$.

Так же, как и кривые в пространстве, поверхности можно задавать в параметрической форме.

<u>Теорема.</u> *Пусть:* 1) x, y, z *являются функциями от переменных* u, v

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (4),$$

где функции x, y, z *имеют непрерывные частные производные в некоторой области* $D \subset R^2$.

2) *матрица Якоби* $\mathbf{J}$ *имеет в этой области ранг 2.*

$$\mathrm{Rg}\,\mathbf{J} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

3) *минор*

$$C=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

Тогда в области D *систему* (4) *можно преобразовать к уравнению*

$$z=f(x,y)\ (5),$$

причем z *есть непрерывно дифференцируемая функция от* x, y *и при этом*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{A}{C},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{B}{C},\qquad (6).$$

где

$$A=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Замечание 1. Если $A\neq 0$, то имеем, по аналогии, $x=x(y,z)$, а если $B\neq 0$, то $y=y(x,z)$).

Замечание 2. Уравнения (4) представляют собой так называемое **параметрическое задание поверхности**. Уравнение (5) – это задание той же самой поверхности явным уравнением. Можно доказать (хотя мы этого не будем делать), что при сделанных выше предположениях уравнения (4) задают простую гладкую двустороннюю поверхность.

Пример. Пусть $\begin{cases}x=u+\ln v\\ y=v-\ln u\\ z=2u+v\end{cases}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке, соответствующей $u=1, v=1$.

Решение. Справедливы все условия теоремы, т.к.

$$\mathbf{J}=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{(1,1)}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \operatorname{Rg}\mathbf{J}=2$$

(производные вычислены в точке $u=1, v=1$ и ранг этой матрицы равен 2).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

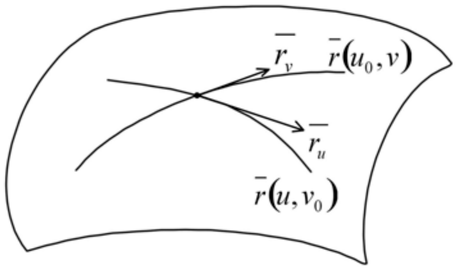
Пример 2. Преобразовать уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ к полярным координатам.

Решение. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. $dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi$, $dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$, и исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi}=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\ \text{или}\ dr=rd\varphi.$$

Параметрическое уравнение поверхности так же, как и параметрическое уравнение кривой можно записывать в векторной форме. Обозначим

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}=\{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}.$$



Рассмотрим произвольную точку $(u_0,v_0)\in D$. Зафиксируем сначала v_0 и рассмотрим функцию $\mathbf{r}(u,v_0)$, которая задает кривую на поверхности. Тогда

$$\mathbf{r}_u=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)=\left\{\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\quad \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),\quad \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right\}^T$$

–касательный вектор к этой кривой.

Аналогично, $\mathbf{r}_v=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ – касательный вектор к кривой $\mathbf{r}(u_0,v)$.

Нормаль к поверхности является нормалью к касательной плоскости и перпендикулярна $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Условие

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=2$$

означает, что $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не параллельны. Поэтому в качестве нормального вектора можно взять $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$ (векторное произведение) или

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{k}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}\,.$$

Тогда единичные векторы нормали равны

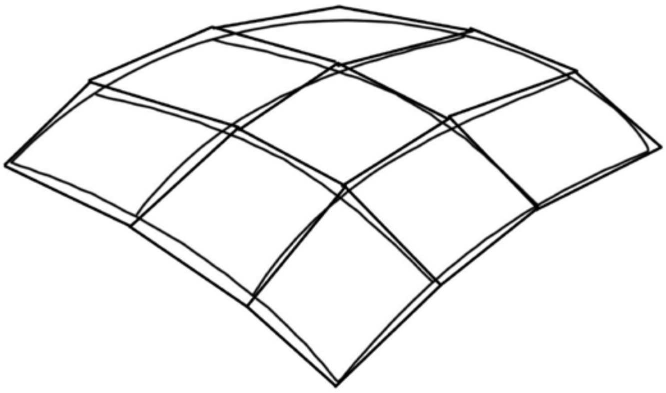
$$\mathbf{n}_i=\left\{\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\}\quad (i=1,2),\quad (7)$$

при этом выбору верхней нормали соответствует выбор того же знака, что и знак числа C, перед корнем (поскольку тогда $\cos\gamma>0$).

Площадь двусторонней поверхности

Определим понятие площади гладкой двухсторонней поверхности S, заданной взаимно однозначным отображением $z:\overline{D}\to\mathbb{R}^3$, где $z=z(x,y)$ – функция, обладающая непрерывными производными по x и y в некоторой измеримой по Жордану области D.

Построим рассматриваем разбиение T этой поверхности на части $\breve{S}_i$ непрерывными кривыми ($S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\breve{S}_i$). В каждой полученной части поверхности выберем точку (ξ_i,η_i,φ_i) и рассмотрим касательную плоскость к поверхности в этой точке. Пересечения касательных плоскостей образуют «панцирь» на поверхности. Этот «панцирь» состоит из плоских многоугольников S_i и, следовательно, имеет площадь, равную сумме площадей его многоугольников. Под **диаметром множества** $\breve{S}_i$ будем понимать диаметр соответствующей грани «панциря» S_i. **Шаг разбиения поверхности** – это наибольший из диаметров получившихся частей. Обозначают его $\lambda(T)$



Если при стремлении к нулю шага разбиения поверхности площади «панцирей» имеют конечный предел, не зависящий от способа разбиения, то он и называется **площадью** поверхности. Это определение позволяет найти формулу для вычисления площади поверхности.

Разобьем поверхность сетью кривых, проекции которых на плоскость Oxy параллельны координатным осям Ox и Oy. В этом случае грани «панциря» S_i будут проецироваться на плоскость Oxy в прямоугольники Π_i со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_i$. Если нормали выбирались в точках $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$, то пусть $(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ – их направляющие косинусы. Тогда площадь ΔS_i грани панциря S_i связана с площадью $\Delta\Pi_i$ своей проекции Π_i следующим образом

$$\Delta S_i = \frac{\Delta\Pi_i}{|\cos\gamma_i|} = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos\gamma_i|}.$$

Площадь «панциря» равна

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos\gamma_i|}.$$

Эта сумма, с одной стороны, является интегральной суммой для двойного интеграла $\iint\limits_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$. С другой стороны, её предел при стремлении шага разбиения к нулю равен площади самой поверхности S. Таким образом площадь поверхности равна

$$S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_n = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \qquad (1)$$

Если поверхность задана функциями $x = x(y,z)$ или $y = y(x,z)$, то получаем аналогичный результат в виде следующих интегралов:

$$S = \iint\limits_D \frac{dydz}{|\cos\alpha|}, \quad S = \iint\limits_D \frac{dxdz}{|\cos\beta|}.$$

Перейдем в этом интеграле к переменным u, v по формулам:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

При этом, как было получено ранее

$$|\cos\gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Пусть также области D соответствует область Δ на плоскости (u,v). Тогда по теореме о замене переменных (учитывая, что якобиан перехода – это определитель C) получаем

$$S=\iint_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\iint_\Delta \frac{|C|\,dudv}{|C|\big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\iint_\Delta \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \qquad (2)$$

Преобразуем выражение $A^2+B^2+C^2$ к более удобному для вычислений виду.

Числа (A,B,C) – это координаты $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$. Поэтому $A^2+B^2+C^2$ – квадрат модуля вектора $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$. Напомним, что модуль векторного произведения равен $|\mathbf{r}_u||\mathbf{r}_v|\sin\varphi$ (φ – угол между $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$). Значит,

$$A^2+B^2+C^2=\left|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]\right|^2=r_u^2\cdot r_v^2\sin^2\varphi=$$

$$=r_u^2r_v^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=r_u^2r_v^2-r_u^2r_v^2\cos^2\varphi=r_u^2r_v^2-\left(r_ur_v\cos\varphi\right)^2=r_u^2r_v^2-\left(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right)^2=EG-F^2.$$

Здесь

$$E=r_u^2=|\mathbf{r}_u|^2=\left|\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}\right|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$G=r_v^2=|\mathbf{r}_v|^2=\left|\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}\right|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F=\left(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k},\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Итак, $A^2+B^2+C^2=EG-F^2$ и формула для площади поверхности, заданной параметрически, равна

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv. \qquad (3)$$

Если поверхность задана явным уравнением $z=z(x,y)$, то $\mathbf{r}(x,y,z)=\{x,y,z(x,y)\}$, то

$$E=r_x^2=|\mathbf{r}_x|^2=|1\mathbf{i}+0\mathbf{j}+z'_x\mathbf{k}|^2=1+z_x'^2.\ G=r_y^2=|\mathbf{r}_y|^2=|0\mathbf{i}+1\mathbf{j}+f'_y\mathbf{k}|^2=1+z_y'^2,$$

$$F=\left(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y\right)=\left(1\mathbf{i}+0\mathbf{j}+z'_x\mathbf{k},0\mathbf{i}+1\mathbf{j}+z'_y\mathbf{k}\right)=z'_xz'_y,$$

$$EG-F^2=\left(1+z_x'^2\right)\left(1+z_y'^2\right)-z'_xz'_y=1+z_x'^2+z_y'^2$$

поэтому площадь поверхности равна

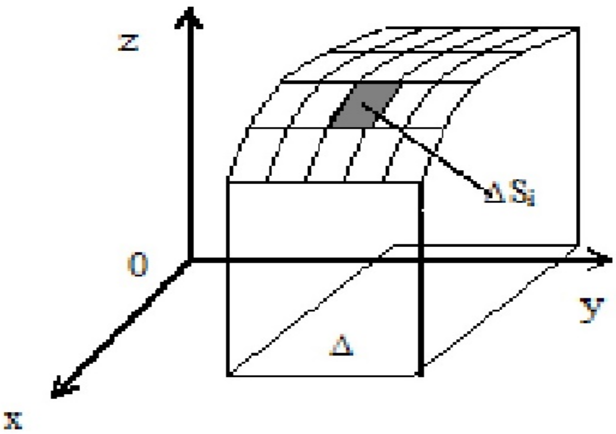
$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy. \qquad (4)$$

Соответственно, величина $dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$ называется э**лементом площади поверхности**.

Если поверхность задана функциями $x=x(y,z)$ или $y=y(x,z)$, то получаем аналогичный результат в виде следующих интегралов:

$$S=\iint_D \sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz,\quad S=\iint_D \sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz$$

Поверхностные интегралы первого рода.



Поверхностный интеграл является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Рассмотрим поверхность S в пространстве, которая произвольно разбита на n частей. Найдём произведение значения некоторой функции $F(x,y,z)$ в произвольной точке с координатами (ξ_i,η_i,φ_i) на площадь частичного участка ΔS_i, содержащего эту точку.

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения λ поверхности S существует конечный предел интегральных сумм, то этот предел называется **поверхностным интегралом первого рода** или **интегралом по площади поверхности.**

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\Delta S_i$$

Свойства поверхностного интеграла первого рода.

Поверхностные интегралы первого рода обладают следующими свойствами:

1) $\iint_S dS = S$, где S – площадь поверхности.

2) $\iint_S \sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(x,y,z)dS = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \iint_S F_i(x,y,z)\,dS$

3) Если поверхность разделена S на части S_1 и S_2, то

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} F(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} F(x,y,z)\,dS$$

4) Если $F_1(x,y,z)\le F_2(x,y,z)$, то $\iint_S F_1(x,y,z)\,dS \le \iint_S F_2(x,y,z)\,dS$

5) $\left|\iint_S F(x,y,z)\,dS\right| \le \iint_S \left|F(x,y,z)\right|dS$

6) **Теорема о среднем.** *Если функция* $F(x,y,z)$ *непрерывна в любой точке поверхности* S*, то существует точка* (α,β,γ) *такая, что*

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = F(\alpha,\beta,\gamma)S$$

где S – площадь поверхности.

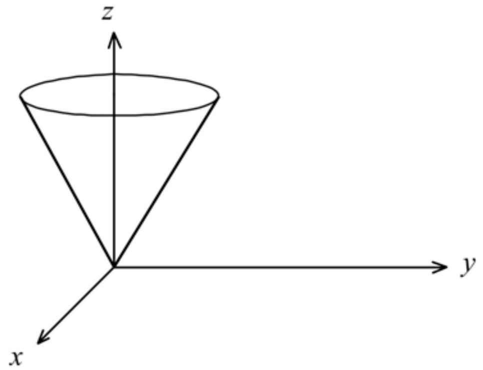
7) поверхностный интеграл 1-го рода не меняется при смене стороны поверхности

Проведя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при нахождении криволинейного интеграла, получим формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода через двойной интеграл по **площади проекции поверхности на плоскость** xOy .

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \iint_D F\left(x,y,f(x,y)\right)\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

Пример. Найти $\iint_S \left(x^2+y^2\right)dS$, где S – граница тела $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

Решение. Это тело представляет собой конус:



S состоит из боковой поверхности S_1 и основания S_2.

На боковой поверхности, уравнение которой $z=\sqrt{x^2+y^2}$ всюду, кроме точки $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Нарушение этой формулы в <u>единственной</u> точке $(x,y)=(0,0)$ не повлияет на результат, поэтому

$$\iint_{S_1}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy,$$

где D – проекция S_1 на плоскость $z=0$, т.е. D – круг $x^2+y^2\le 1$.

В интеграле, стоящем в правой части, перейдем к полярным координатам:

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{2}rdr=2\pi\sqrt{2}\int_0^1 r^3dr=\ 2\pi\sqrt{2}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1=\frac{2\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

(якобиан преобразования $J=r$).

Основание S_2 задано уравнением $z=1$, поэтому

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1=0+0+1=1 \text{ и } \iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{\pi}{2}$$

(этот интеграл отличается от вычисленного выше лишь множителем, поэтому подробное вычисление опущено).

Итак, весь интеграл

$$\iint_S\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{S_1}\left(x^2+y^2\right)dS+\iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)dS=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}.$$

Поверхностные интегралы второго рода.

Пусть дана в вектор-функция

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

которая определена на поверхности S (т.е. каждая из функций P, Q и R определена на этой поверхности).

На основе поверхностного интеграла 1-го рода рассмотрим следующий интеграл

$$\iint_S (\mathbf{F}, \mathbf{n})\, dS \qquad (1)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S.

Так как нормаль к поверхности в каждой точке можно провести двумя различными способами, то этот интеграл, очевидно, уже зависит от ориентации поверхности S и называется **поверхностным интегралом 2-го рода**. С геометрической точки зрения он выражает **поток вектора $\mathbf{F}$** через поверхность S.

Учитывая, что $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, также полученные ранее равенства

$$dxdy = dS\cos\gamma, \quad dxdz = dS\cos\beta, \quad dydz = dS\cos\alpha,$$

получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{F}, \mathbf{n})\, dS &= \iint_S \left[P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma \right] dS \\ &= \iint_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy. \end{aligned} \qquad (2)$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода аналогичны уже рассмотренным нами свойствам поверхностного интеграла первого рода, за исключение того, что, как было уже отмечено, он меняет знак при перемене стороны поверхности.

Кроме того, в дополнение к свойствам поверхностного интеграла 1-го рода можно отметить следующее. Если S – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, то

$$\iint_S R(x, y, z)\, dxdy = 0.$$

В случае, если образующие поверхности параллельны осям Ox и Oy, то равны нулю соответствующие составляющие поверхностного интеграла второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующих двойных интегралов. Например, для интеграла

$$\iint_S R(x, y, z)\, dxdy = 0$$

надо выполнить следующие действия:

1) Выразить z через x и y из уравнения поверхности S и подставит в функцию $R(x, y, z)$
2) Спроецировать поверхность S на координатную плоскость xOy.

Таким образом

$$\iint_S R(x, y, z)\, dxdy = \iint_D R(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

где D проекция поверхности S на координатную плоскость xOy.

Аналогично выполняется преобразование интегралов от функций P и Q

Рассмотрим сказанное на примере.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_S (z - R)^2\, dxdy$ по верхней стороне полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \quad R \le z \le 2R.$$

Преобразуем уравнение поверхности к виду: $x^2 + y^2 + (z - R)^2 - R^2 = 0$

$$z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Заданная поверхность проецируется на плоскость xOy в круг, уравнение которого:

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

$$\iint_S (z - R)^2 \, dxdy = \iint_D \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\iint_D \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_\Delta f(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi, \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

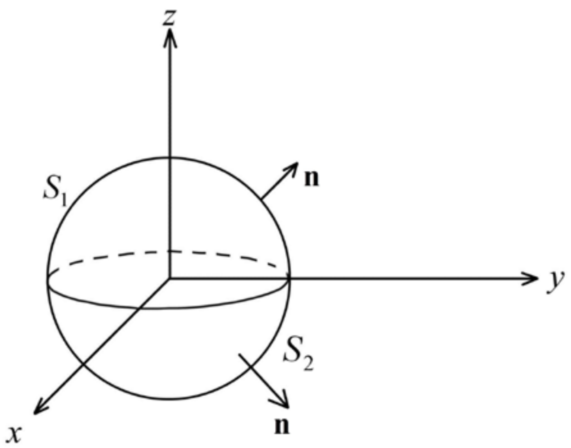
$$\iint_S (z - R)^2 \, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R d\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

<u>Пример.</u> $I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

.

Обозначим $I_1 = \iint_S zdxdy$. Из соображений симметрии очевидны равенства $\iint_S xdydz = \iint_S ydxdz = I_1$, так что $I = 3I_1$.

Поверхность S состоит из частей S_1 и S_2, задаваемых уравнениями $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (это S_1 – верхняя полусфера) и $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (это уравнение для нижней полусферы S_2). На S_1 внешняя нормаль составляет с осью z острый угол, на S_2 – тупой.



Поэтому положительный обход границы поверхности S_1 осуществляется против часовой стрелке от 0 до 2π

$$\iint_{S_1} zdxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,rdr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,d\left(r^2\right) = -\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,d\left(a^2 - r^2\right) = -\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3\Bigg|_0^a = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Аналогично, т.к. на S_2 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а нормаль составляет с осью z тупой угол, то положительный обход границы поверхности S_2 осуществляется по часовой стрелке от 2π до 0

$$\iint_{S_2} zdxdy = -\iint_D -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Значит, $I_1 = \iint_S zdxdy = \frac{2\pi a^3}{3} + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$. Поэтому $I = 3I_1 = 4\pi a^3$.

Формула Стокса

(Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903) – английский математик)

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода. Она является пространственным аналогом формулы Остроградского-Грина.

Теорема. *Пусть S – гладкая ориентированная двусторонняя поверхность (т.е. направление нормали выбрано) и L – кусочно-гладкая кривая, ограничивающая S, причем мы считаем направление обхода L положительным. Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые. Тогда*

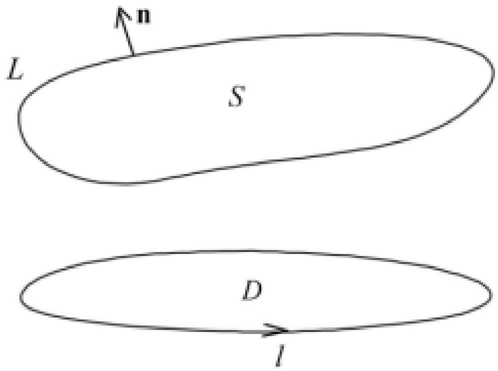
$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy .$$

Доказательство. Вычислим, например, $\oint_L Pdx$.

Пусть, для простоты, $z = z(x,y)$ – уравнение S. Тогда рассмотрим параметризацию проекции l кривой L на плоскость $z = 0$:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in [T_0; T_1]$$

(разумеется, $x(t),\ \ y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции).



Тогда $\oint_L Pdx = \int_{T_0}^{T_1} P\big(x(t), y(t), z(x(t), y(t))\big) x' dt = \oint_l P\big(x, y, z(x,y)\big) dx$.

К плоской кривой l применим формулу Грина:

$$\oint_l P\big(x, y, z(x,y)\big) dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} dxdy$$

где D – ограничиваемая кривой l область плоскости Oxy.

Далее, $dxdy = \cos\gamma dS$, $\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = -\cos\beta$ (см. тему «Двусторонние поверхности»), и, значит,

$$\frac{\partial z}{\partial y} dxdy = \frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma dS = -\cos\beta dS .$$

Поэтому

$$\oint_l Pdx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS .$$

Аналогично,

$$\oint_L Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS , \quad \oint_L Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS ,$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma \right) dS + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha \right) dS + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \right) dS =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right) dS =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Формула Стокса доказана.

Замечание 1. Равносильная формулировка формулы Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right) dS .$$

Замечание 2. В случае плоского контура L, лежащего на плоскости Oxy и ограничивающего поверхность $\mathbf{F} = P(x,y,0)\mathbf{i} + Q(x,y,0)\mathbf{j}$, эта формула совпадает с формулой Остроградского-Грина.

Замечание 3. Формулы в правой части запомнить непросто. Поэтому удобно записать подынтегральное выражение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Разумеется, это не совсем обычный определитель. Ведь во второй строке его стоят **операторы** дифференцирования. Поэтому условимся считать, что мы понимаем под этим определителем его формальное разложение по первой строке, причем произведение, например, оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию R есть $\frac{\partial R}{\partial x}$ и т.п.

С учетом последнего замечания формулу стокса удобно записывать в векторной форме

$$\oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \oint_L (\mathbf{F}, \mathbf{l}) ds = \iint_S (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{F}]) dS$$

где $\mathbf{l}$ – единичный касательный вектор к контуру L, $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к поверхности S, $[\bullet,\bullet]$ – векторное произведение.

На основании формулы Стокса можно сформулировать следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть функции* $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ *и* $R(x,y,z)$ *непрерывны на поверхности* S. *Тогда следующие условия эквивалентны*

1) *Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура* L, *лежащего на поверхности* S *справедливо равенство*
$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$
2) *Для любых двух точек* A *и* B *на поверхности* S *криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования расположенного на поверхности* S.
3) *Выражение* $Pdx + Qdy + Rdz$ *является полным дифференциалом на поверхности* S, *т.е. на поверхности* S *существует функция* $u = f(x,y,z)$ *такая, что*
$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

при этом, для любой кусочно-гладкой кривой на поверхности S *имеет место равенство*

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A)$$

Теорема 2. *Пусть поверхность* S *является поверхностно односвязной областью, а функции* $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ *и* $R(x,y,z)$ *имеют непрерывные частные производные первого порядка, тогда условия теоремы 1 эквивалентны следующему условию*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

на поверхности S

Замечание. *Функция* $u=f(x,y,z)$ *может быть найдена по формуле*

$$u=f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

где (x_0,y_0,z_0) *– координаты некоторой начальной точки. В качестве такой точки удобно брать начало координат.*

Формула Остроградского-Гаусса.

Формула Остроградского-Гаусса тоже является пространственным аналогом формулы Остроградского-Грина. Эта формула связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема. *Пусть* $G\subset\Re^3$ *– ограниченная область, граница которой* S *есть кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешними нормалями. Тогда справедлива формула* **Остроградского-Гаусса:**

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_G\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)dxdydz$$

Доказательство. Для вывода формулы Остроградского-Гаусса надо воспользоваться рассуждениями, подобными тем, которые использовались при нахождении формулы Остроградского-Грина. А именно, предположим, что область G элементарна относительно всех трёх координатных осей. Область элементарна относительно оси Oz, если найдутся такие непрерывные функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$

$$G=\{(x,y,z):\quad \varphi(x,y)<z<\psi(x,y),\quad (x,y)\in D\}$$

где D – проекция области G на плоскость xOy.

В этом случае поверхность S, ограничивающую область G можно представить в виде $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, где S_1 – график поверхности $\psi(x,y)$, S_2 – график поверхности $\varphi(x,y)$, а S_3 – боковая цилиндрическая поверхность

Тогда, применяя формулу сведения тройного интеграла к повторному будем иметь

$$\iiint_G\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz=\iint_D dxdy\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz=$$
$$=\iint_D R(x,y,\psi(x,y))dxdy-\iint_D R(x,y,\varphi(x,y))dxdy=\iint_{S_1}R(x,y,z)dxdy+\iint_{S_2}R(x,y,z)dxdy.$$

Здесь использованы формулы выражающие поверхностный интеграл через двойной, а также учтено, что нормаль к поверхности S_1 составляет острый угол с осью Oz, а к поверхности S_2 – тупой угол с осью Oz. Добавив теперь к двум поверхностным интегралам в предыдущей формуле ещё равный нулю интеграл по цилиндрической поверхности S_3 получим

$$\oiint_S Rdxdy=\iiint_G\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz$$

Аналогично, воспользовавшись элементарностью области G относительно осей Ox и Oy, получим

$$\oiint\limits_S Pdydz = \iiint\limits_G \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz,$$

$$\oiint\limits_S Qdzdx = \iiint\limits_G \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz$$

Складывая результаты, получим формулу Остроградского-Гаусса. Примерами областей, элементарных относительно трёх координатных осей являются эллипсоид, параллелепипед, симплекс.

Далее, результат теоремы обобщается на случай объёмно односвязной области G, которая кусочно-гладкой перегородкой S^* делится на две области G_1 и G_2 элементарные относительно трёх координатных осей. В этом случае

$$\iiint\limits_{G_1} \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz =$$
$$= \iint\limits_{S_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{S_+^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$\iiint\limits_{G_2} \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz =$$
$$= \iint\limits_{S_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{S_-^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

где S_+^* – одна сторона поверхности S^*, S_-^* – другая сторона поверхности S^*

При сложении вторые интегралы взаимно уничтожаются, и в результате опять приходим к формуле Остроградского-Гаусса. Далее, по индукции формула обобщается на случай односвязной области, которая при помощи n кусочно-гладких перегородок разбивается на подобласти элементарные относительно трёх координатных осей. Примерами таких областей являются выпуклые многогранники, которые можно представить, как объединение конечного числа симплексов. После этого, путём предельного перехода осуществляется обобщение формулы на случай произвольной односвязной области.

Так же, как и формулу Стокса, формулу Остроградского-Гаусса удобно записывать в векторной форме

$$\oiint\limits_S (\mathbf{F},\mathbf{n}) dS = \iiint\limits_G (\nabla, \mathbf{F}) dG$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности S.

На практике формулу можно применять для вычисления объема тел, если известна поверхность, ограничивающая это тело. Имеют место формулы:

$$V = \iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S ydxdz = \iint\limits_S zdxdy = \iiint\limits_G dxdydz$$

Эти формулы получаются из формулы Остроградского-Гаусса, если положить

$$P(x,y,z) = x$$
$$Q(x,y,z) = y$$
$$R(x,y,z) = z$$