К У Р С

ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть 1

2022

Оглавление

Матрицы

Основные определения. Виды матриц.

<u>Определение.</u> Матрицей A размера $m \times n$, где - число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j - номер столбца.

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Матрицы можно задавать либо в виде совокупности строк, либо в виде совокупности столбцов

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^n\right), \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{A}^j$ - j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_i$- i-я строка матрицы $\mathbf{A}$

<u>Определение.</u> Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица называется **квадратной**. В этом случае элементы $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ матрицы**.

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется **единичной матрицей**.

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **диагональной** матрицей.

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется **нулевой** матрицей.

<u>Определение.</u> Квадратные матрицы вида

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & 0 & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}'=\begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

называются соответственно **верхней и нижней треугольными матрицами**.

Определение. Если $a_{ij}=a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**. ($a_{ij}=-a_{ji}$ - **кососимметрическая**)

Замечание. Для кососимметрической матрицы, очевидно $a_{ii}=0$

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Матрица $\mathbf{B}$, полученная из исходной матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$ путём замены местами строк и столбцов, называется транспонированной матрицей. Обозначается $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\left(a_{ij}\right)^T=\left(a_{ji}\right)$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Очевидно, что для симметрической и кососимметрической матриц имеют место равенства

$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ - для симметрической матрицы,

$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ - для кососимметрической матрицы.

Определение. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются:

1. **комплексно сопряжёнными**, если $b_{ij}=\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{B}=\overline{\mathbf{A}}$)
2. **эрмитово сопряжёнными**, если $b_{ij}=\overline{a}_{ji}$ (обозн. $\mathbf{B}=\mathbf{A}^*$). В этом случае, очевидно $\mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}=\overline{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}$

Определение. Матрица $\mathbf{A}$ называется

1. **самосопряжённой (эрмитовой)**, если $a_{ij}=\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$)
2. **альтернирующей**, если $a_{ij}=-\overline{a}_{ij}$ (обозн. $\mathbf{A}^*=-\mathbf{A}$)

В этом случае имеют место равенства

$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}}$ - для самосопряжённой матрицы

$\mathbf{A}^*=-\mathbf{A}=-\overline{\mathbf{A}}$ - для альтернирующей матрицы

Основные действия над матрицами

Основными действиями над матрицами, являются;

1. **Сложение матриц**
2. **Умножение матрицы на число**
3. **Перемножение матриц**

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Так как данная операция сводится к поэлементному сложению чисел, она обладает всеми свойствами, характерными для операции сложения чисел

1. Коммутативность $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.
2. ассоциативность $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
3. и т.д.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$$

При этом справедливы следующие свойства

1. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

2. . $\mathbf{A}(\alpha+\beta)=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A},\quad \alpha,\beta\in\Re$.

<u>Пример 1.</u> Даны матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&8\\1&2&4\end{pmatrix}$, найти $2\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

$$2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&8\\6&4&6\end{pmatrix},\qquad 2\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&7&10\\9&9&16\\7&6&10\end{pmatrix}.$$

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Отметим здесь основные свойства, касающиеся операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.** Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

$$\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$\mathbf{AO}=\mathbf{OA}=\mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ – **нулевая** матрица.

Замечание. <u>Очень интересно</u>, что в отличие от чисел, если $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, то это вовсе не означает, что либо $\mathbf{A}$, либо $\mathbf{B}$ - нулевые матрицы.

Пример.

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Однако же, для матриц $\mathbf{A}$ размера $m\times l$ и $\mathbf{B}$ размера $l\times n$ при $l=\{0,1\}$ из равенства $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ следует, что либо $\mathbf{A}$, либо $\mathbf{B}$ являются нулевой матрицей (без доказательства). При $l\geq 2$ это свойство, как видно из приведенного примера, не выполняется.

Если выполняется условие $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$, то матрица $\mathbf{B}$ называется **обратной** к матрице $\mathbf{A}$. Обозначается $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. При этом точно также можно считать матрицу $\mathbf{A}$ обратной к матрице $\mathbf{B}$.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения $\mathbf{AB}$ и $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$, то определены $\mathbf{BC}$ и $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, и выполняется равенство:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC}) .$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ и $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$, то соответственно:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$

4) Если произведение $\mathbf{AB}$ определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}).$$

5) Если определено произведение $\mathbf{AB}$, то определено произведение $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ и выполняется равенство:

$$(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \text{ где}$$

В качестве следствия из данного свойства можно записать, что:

$$(\mathbf{ABC})^{\mathbf{T}}=\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} ,$$

при условии, что определено произведение матриц $\mathbf{ABC}$.

__**Пример 2.**__ Даны матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ и число $\alpha=2$. Найти $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\alpha\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix};$$

$$\alpha\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\alpha\mathbf{C}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 12\end{pmatrix}.$$

__**Пример 3.**__ Найти произведение матриц $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1\\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1\\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 8 & 16 & 4\\ 6 & 12 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3=2+16+3=21.$$

__**Пример 4.**__ Найти произведение матриц $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & 4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 16\end{pmatrix}.$$

__**Пример 5**__. Дана матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^3$.

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}^3=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47&78\\39&86\end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Упражнение 1. Для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 найти перестановочную матрицу $\mathbf{B}$.

Элементарные преобразования. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на действительное число;
3) перестановка строк;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

Определение. Матрицы, полученные одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Определение. Матрица, полученная из единичной с помощью одного элементарного преобразования, называется **элементарной.**

Пример 1. Рассмотрим единичную матрицу 2-го порядка

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Элементарными матрицами будут

$$\mathbf{E}^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\alpha\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(4)}=\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix},\ \mathbf{E}^{(5)}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь матрицы $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ соответствуют 1-му элементарному преобразованию, $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ - второму, а $\mathbf{E}^{(5)}$ - третьему.

Упражнение 1. Показать, что элементарное преобразование матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентно умножению её слева на соответствующую элементарную матрицу.

Элементарные преобразования обратимы в том смысле, что обратное действие приводит к исходной матрице. Обратное действие также является элементарным преобразованием.

Упражнение 2. Проверить, что для введенных в примере 1 матриц $\mathbf{E}^{(\mathbf{i_j})}$, матрицы обратных элементарных преобразований будут определяться так:

$$\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(2)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\alpha^{-1}\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(3)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\alpha\\0&1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(4)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\alpha&1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{E}^{(5)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Показать на примере матриц 2x2, что $\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{E}^{(i)}\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}=\mathbf{E}$

Определение. Линейной комбинацией строк (столбцов) $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n$ матрицы $\mathbf{A}$ называется выражение вида

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{A}_n,\quad \alpha_k\in\Re,$$

где числа α_k называются **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение. Строки (столбцы) $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n$ матрицы $\mathbf{A}$ называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю и имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения, т.е.

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{A}_n=0 \text{ при условии, что } \exists\alpha_i\neq 0$$

В противном случае, если

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{A}_n=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_i=0,\forall i$$

то строки (столбцы) $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n$ называются **линейно независимыми**.

Упражнение 4. Показать, что элементарные преобразования не влияют на линейную зависимость (независимость) строк (столбцов).

Рассмотрим теперь произвольную матрицу. Разделим её первую строчку на $a_{11}\neq 0$, затем:

1) умножим 1-ю строчку на a_{21} и вычтем из второй строки

2) умножим 1-ю строчку на a_{31} и вычтем из третьей строки

и т.д.

Получим матрицу:

$$\mathbf{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

где

$$a_{ij}^{(1)}=a_{1j}/a_{11},\quad j=2,3,\ldots,n,$$

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{1j}d_{1j},\quad j=2,3,\ldots,n,\quad i=2,\ldots,m,$$

Далее повторяем эти же действия для второй строки матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$, потом – для третьей и т.д. Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ приводится к виду

$$\mathbf{S}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & \ldots & s_{1,r-1}^{(1)} & s_{1r}^{(1)} & \ldots & s_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & s_{23}^{(1)} & \ldots & s_{2,r-1}^{(1)} & s_{2r}^{(1)} & \ldots & s_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & s_{3,r-1}^{(1)} & s_{3r}^{(1)} & \ldots & s_{3n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{4,r-1}^{(1)} & s_{4r}^{(1)} & \ldots & s_{4n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & s_{r-1,r}^{(1)} & \ldots & s_{r-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & s_{rn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}^{(1)}$ - называется ступенчатой матрицей. Число r равно, очевидно, количеству линейно независимых столбцов.

Повторяя те же действия обратным ходом, т.е. двигаясь от нижней строки приводим матрицу $\mathbf{S}^{(1)}$ к виду

$$\mathbf{S}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & s_{3,r+1}^{(2)} & \dots & s_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{4,r+1}^{(2)} & \dots & s_{4n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{r-2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & s_{r-1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-1,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{r,r+1}^{(2)} & \dots & s_{rn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}^{(2)}$ - называется **главной ступенчатой.** Так как каждое элементарное преобразование эквивалентно умножению слева на элементарную, то матрицу $\mathbf{S}^{(2)}$ можно представить в виде произведения

$$\mathbf{S}^{(2)}=\mathbf{E}^{(i_k)}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}^{(i_1)}\mathbf{A}$$

Так как элементарные преобразования обратимы, поэтому можно написать, что

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\mathbf{S}^{(2)}$$

где $\left(\mathbf{E}^{(\mathbf{i_j})}\right)^{-1}$ - элементарная матрица, соответствующая обратному элементарному преобразованию.

Если матрица $\mathbf{A}$ приводится к единичному виду, то

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}.$$

Определители (детерминанты)

Определение. **Определителем** квадратной матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$ называется число, которое может быть вычислено по следующим правилам:

1. Для квадратной матрицы первого порядка $\det\mathbf{A}=a_{11}$
2. Для матрицы порядка n

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{1+j}a_{1j}M_{1j}\,, \qquad (1)$$

где величина M_{1j} является детерминантом матрицы, полученной из исходной вычеркиванием 1-ой строки и j – го столбца.

Очевидно, что для квадратной матрицы второго порядка имеем

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (1^*)$$

Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Определение. Если в матрице $\mathbf{A}$ выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы $\mathbf{A}$. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s. Обозначается $M_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_s}$ (верхние индексы – индексы строк, нижние - столбцов).

Заметим, что данное определение применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Определение. Определитель квадратной матрицы, полученный вычёркиванием s строк и s столбцов, называется **дополнением к минору** $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ и обозначается $\bar{M}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$.

Определение. **Алгебраическим дополнением** минора $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ называется число, определяемое по формуле

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} = (-1)^{i_1 + \dots + i_s + j_1 + \dots + j_s} \bar{M}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$$

Пример. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ размера 4×4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Выпишем для нее M_{13}^{13}, $\overline{M}_{13}^{13}$ и A_{13}^{13}. Имеем

$$M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \overline{M}_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad A_{13}^{13} = (-1)^{1+3+1+3} M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Для дополнительного минора $\bar{M}_j^i$ и алгебраического дополнения A_j^i используются отдельные обозначения

$$\bar{M}_j^i = M_{ij} \text{ и } A_j^i = A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Таким образом, в частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Замечание 1. С учетом данных определений, формулу (1) можно записать так:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_j^1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}. \qquad (2)$$

Замечание 2. *Формулы (1) и (2) позволяют вычислить определитель матрицы по первой строке. Также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \bar{M}_1^i = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_1^i. \qquad (3)$$

Доказательство. Эквивалентность формул (2) и (3) устанавливается с помощью метода математической индукции. Для $n = 2$ - очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо при $n = k$. Тогда, при $n = k + 1$ для формулы (2) имеем

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_1^j = a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1 \overset{(3)}{=} a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i a_{i1} \bar{M}_{j1}^{1i} =$$

$$= a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{1+i+j} a_{1j} a_{i1} \bar{M}_{j1}^{1i}.$$

Для формулы (3) соответственно

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{i1} \bar{M}_i^1 = a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{i1} \bar{M}_1^i \overset{(2)}{=} a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{i1} \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j a_{1j} \bar{M}_{1j}^{i1} =$$

$$= a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{k+1} \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{1+i+j} a_{1j} a_{i1} \bar{M}_{1j}^{i1}.$$

Здесь $\bar{M}_{j1}^{1i} = \bar{M}_{1j}^{i1}$ так как неважно в каком порядке вычеркивать строки и столбцы. Из равенства полученных результатов вытекает эквивалентность формул (2) и (3).

Предложение 1. *Важным свойством определителей является следующее соотношение:*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathbf{T}}.$$

Это свойство является следствием **замечания 2**.

Выясним, как изменяется определитель при элементарных преобразованиях. Начнём с третьего элементарного преобразования, которое заключается в перестановке строк

<u>Предложение 2.</u> *Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки или два столбца* ***(третье элементарное преобразование)****, то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.*

<u>Доказательство.</u> При $n=2$ имеем

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \det\mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$\mathbf{A}^{(3)}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix},\ \det\mathbf{A}^{(3)}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-\det\mathbf{A}.$$

Пусть утверждение справедливо при $n=k$. Проверим его истинность при $n=k+1$. Предположим, что поменялись местами строки с номерами t и s. Вычислим определитель полученной матрицы $\mathbf{A}^{(3)}$, используя разложение по формуле (2), т.е. по первому столбцу. Имеем

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1},$$

$$\det\mathbf{A}^{(3)}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}^{(3)}.$$

где матрицы соответствующие минорам $M_{i1}^{(3)}$ и M_{i1} отличаются друг от друга перестановкой двух строк, и поэтому по предположению индукции связаны соотношением $M_{i1}^{(3)}=-M_{i1}$.

Отсюда получаем

$$\det\mathbf{A}^{(3)}=-\det\mathbf{A}.$$

что и требовалось доказать.

Из **предложения 2** следует единственность определителя при разложении по произвольной строке (столбцу). Таким образом, справедлива теорема.

<u>Теорема.</u> *Определитель не зависит от того по какой строке или столбцу ведётся разложение. Таким образом, справедливы следующие формулы вычисления определителя*

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}; \qquad (2^*)$$

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \qquad (3^*)$$

<u>Доказательство</u>. Доказательство основывается на возможности перестановки строк (или столбцов), при которой определитель сохраняет значение по абсолютной величине и меняет знак на противоположный. При этом очевидно, что для того, чтобы поднять i - ю строчку на первое место нужно совершить $i-1$ перестановку. Получим

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & a_{i-2,3} & \dots & \dots & a_{i-2,n} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}=\mathbf{A}'.$$

При этом, в силу предложения 2

$$\det\mathbf{A}=(-1)^{i-1}\det\mathbf{A}'.$$

Кроме того, дополнительный минор, полученный вычеркиванием i - ой строки и j - го столбца в матрице $\mathbf{A}$ совпадает с дополнительным минором, полученным вычеркиванием 1 - ой строки и j - го столбца в матрице $\mathbf{A}'$, Этот минор будем обозначать $\mathbf{M}_{ij}$. Тогда, применяя формулу разложения по первой строке, получим:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{A}' = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Это формула (2*). Справедливость формулы (3*) теперь устанавливается с помощью предложения 2.

Предложение 3. *Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.* (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Определение. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется **вырожденной матрицей.** В противном случае квадратная матрица называется **невырожденной.**

Предложение 4. *При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число* ***(первое элементарное преобразование)****.*

Доказательство. Пусть к примеру, строка с номером i домножена на число α. Полученную таким образом матрицу обозначим через $\mathbf{A}^{(1)}$. Её определитель в силу (2*) равен

$$\det \mathbf{A}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha a_{ij} M_{ij} = \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \alpha \det \mathbf{A}.$$

Предложение 5. *Определитель матрицы у которой i - я строка является суммой двух строк равен сумме определителей матриц, полученных из исходной заменой i - ой строки на каждое из слагаемых.*

Доказательство. Пусть элементы i - ой строки матрицы $\mathbf{A}$ представлены в виде $a_{ij} = b_{ij} \pm c_{ij}$. Тогда вычисляя определитель по i - ой строке имеем

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (b_{ij} \pm c_{ij}) M_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} M_{ij} \pm \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} M_{ij} = \det \mathbf{B} \pm \det \mathbf{C}.$$

Что и требовалось доказать.

Предложение 6. *Если в матрице $\mathbf{A}$ любые две строки или столбца линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. При $n = 2$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 0.$$

Пусть утверждение верно при $n = k$, проверим справедливость утверждения при $n = k + 1$. Предположим, что строки с номерами s и t - ЛЗ. Найдём определитель разложением по строке с номером $j \neq s, t$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = 0.$$

так как M_{ij} - определители матрицы k - го порядка с двумя линейно зависимыми строками и для них по предположению индукции $M_{ij} = 0$.

Замечание. Имеет место и более общее **утверждение:** *Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы линейно зависимы.*

<u>Предложение 7.</u> *Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю* ***(второе элементарное преобразование)****.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ выберем строку с номером k, домножим её на число α и прибавим к строке с номером i. Полученную таким образом матрицу обозначим через $\mathbf{A}^{(2)}$. Её определитель в соответствии с предложениями 4 и 5:

$$\det\mathbf{A}^{(2)} = \det\mathbf{A} + \alpha\det\mathbf{A}'. \qquad (4)$$

где $\mathbf{A}'$ получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой i - й строки на k - ю строку.

Второе же слагаемое в силу **св-ва 6** равно нулю, так как представляет собой определитель матрицы с двумя линейно зависимыми строками с номерами i и k. Таким образом

$$\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}.$$

<u>Упражнение.</u> Показать, что

$$\det\mathbf{E}^{(1)} = \det\mathbf{E}^{(2)} = \alpha, \quad \det\mathbf{E}^{(3)} = \det\mathbf{E}^{(4)} = 1, \quad \det\mathbf{E}^{(5)} = -1,$$

$$\det\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)^{-1} = \det\left(\mathbf{E}^{(2)}\right)^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \det\left(\mathbf{E}^{(3)}\right)^{-1} = \det\left(\mathbf{E}^{(4)}\right)^{-1} = 1, \quad \det\left(\mathbf{E}^{(5)}\right)^{-1} = -1.$$

<u>Предложение 8.</u> $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

<u>Доказательство.</u> В случае если матрица $\mathbf{A}$ (или $\mathbf{B}$) имеет ЛЗ строки (столбцы), то и матрица $\mathbf{AB}$ тоже имеет ЛЗ строки (столбцы), поэтому

$$\det(\mathbf{AB}) = 0 = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

Пусть теперь матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ невырождены. На основании **свойств 2, 4 и 7** и предыдущего упражнения

$$\det\left(\mathbf{E}^{(i)}\mathbf{A}\right) = \det\mathbf{E}^{(i)}\det\mathbf{A}, \quad \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{A}\right) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i)}\right)^{-1}\right)\det\mathbf{A}. \qquad (5)$$

где $\mathbf{E}^{(i)}$ - любая из элементарных матриц. Ранее было показано, что любая матрица приводится к так называемому ступенчатому виду, частным случаем которого является единичная матрица $\mathbf{E}$, т.е. матрица $\mathbf{A}$ (с линейно независимыми строками) может быть разложена в произведение элементарных матриц. Тогда, применяя последовательно формулу (5) получим

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\mathbf{B}\right) = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_2)}\right)^{-1}\ldots\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\mathbf{B}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right)\cdot\det\mathbf{B} = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right)\cdot\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

Свойство доказано.

<u>Замечание.</u> Очевидно, что вычисление определителя по формулам (2*) и (3*) становится затруднительно при больших размерах матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому, используя элементарные преобразования можно привести матрицу $\mathbf{A}$ к единичной, т.е. $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\cdot\mathbf{E}$. Тогда в силу только что доказанного свойства

$$\det\mathbf{A} = \det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_1)}\right)^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(\left(\mathbf{E}^{(i_k)}\right)^{-1}\right),$$

где каждый определитель в правой части находится по ф-лам (2*) и (3*)

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2\cdot1 - 1\cdot3) - 2(0\cdot1 - 3\cdot3) + (0\cdot1 + 3\cdot2) = 19$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Пример. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(\mathbf{AB})$.

1-й способ: $\det\mathbf{A} = 4-6 = -2$; $\det\mathbf{B} = 15-2 = 13$; $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} = -26$.

2- й способ: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{AB}) = 7\cdot18 - 8\cdot19 = -26$.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами* $i_1,\ldots i_s$, *то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $\mathrm{rk}\mathbf{A}$ или $\mathrm{Rg}\mathbf{A}$. Методика определения ранга матрицы посредством нахождения базисного минора называется **методом окаймляющих миноров.**

Теорема. (теорема о базисном миноре). *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк и равно рангу матрицы, т.е. в* *произвольной матрице* $\mathbf{A}$ *каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Доказательство. Доказательство основывается на теореме об эквивалентности разложения определителя по строке или столбцу (**замечание 1 и св-ва 1** предыдущего параграфа). Поэтому, если утверждение теоремы не верно (например, число ЛН строк больше чем число ЛН столбцов), то можно было бы найти минор который равнялся бы нулю при разложении по столбцу и не равнялся бы нулю при разложении по строкам, чего быть не может в силу вышеназванной теоремы.

С другой стороны, определитель матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда все строки матрицы линейно независимы, поэтому порядок базисного минора будет равен максимальному числу линейно независимых строк. Следовательно, ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов).

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы, так как не влияют на линейную зависимость строк (столбцов). Поэтому можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример 1. Определить ранг матрицы.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix},\qquad\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow\ \operatorname{Rg}\mathbf{A}=2.$$

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow\ \operatorname{Rg}\mathbf{A}=2.$$

Пример 3. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0.\Rightarrow\ \operatorname{Rg}\mathbf{A}=2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то $\operatorname{Rg}\mathbf{A}=\min\{m,n\}$.

Обратная матрица.

Напомним определение обратной матрицы, данное ранее.

Определение. Если существуют квадратные матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{A}$, удовлетворяющие условию:

$$\mathbf{XA}=\mathbf{AX}=\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица того же самого порядка, то матрица $\mathbf{X}$ называется **обратной** к матрице $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы. Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{E}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot x_{kj}=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n},$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\text{ - символ Кронекера.}$$

Таким образом, получаем n систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j}+a_{12}x_{2j}+...+a_{1n}x_{nj}=0 \\ .... \\ a_{j1}x_{1j}+a_{j2}x_{2j}+...+a_{jn}x_{nj}=1 \\ .... \\ a_{n1}x_{1j}+a_{n2}x_{2j}+...+a_{nn}x_{nj}=0 \end{cases}, \qquad (1)$$

Решив эти системы, находим элементы матрицы $\mathbf{X}$. Далее будет показано (раздел «Системы линейных алгебраических уравнений»), что эти системы имеют решение, и при том единственное, тогда и только тогда, когда $\det\mathbf{A}\neq 0$. Поэтому *каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну*.

<u>Пример.</u> Дана матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}=e_{11}=1 \\ a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}=e_{12}=0 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}=e_{21}=0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}=e_{22}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11}+2x_{21}=1 \\ x_{12}+2x_{22}=0 \\ 3x_{11}+4x_{21}=0 \\ 3x_{12}+4x_{22}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11}=-2 \\ x_{12}=1 \\ x_{21}=3/2 \\ x_{22}=-1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу (**формула Крамера**):

$$x_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{\det\mathbf{A}}=\frac{A_{ji}}{\det\mathbf{A}}.$$

где M_{ji} – главный дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы $\mathbf{A}$.

<u>Пример.</u> Дана матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, найти $\mathbf{A}^{-1}$. Имеем $\det\mathbf{A}=4-6=-2$.

$$M_{11}=4,\quad M_{12}=4,\quad M_{21}=2,\quad M_{22}=1$$

Таким образом, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$;

2) $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

3) $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$.

<u>Метод Гаусса.</u> Присоединим с права к матрице $\mathbf{A}$ единичную матрицу $\mathbf{E}$. С помощью элементарных преобразований приведём полученную таким образом матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\mathbf{A}|\mathbf{E}\right)\sim\left(\mathbf{E}|\mathbf{B}\right)=\mathbf{S}^{(2)}.$$

При использовании метода Гаусса первая матрица будет умножаться слева на одну из элементарных матриц $\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_1)}$, …, $\mathbf{E}^{(\mathbf{i}_k)}$. Таким образом для преобразования $\mathbf{A}\sim\mathbf{E}$ имеем

$$\mathbf{E}^{(i_k)}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}^{(i_1)}\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Для преобразования $\mathbf{E}\sim\mathbf{B}$

$$\mathbf{E}^{(i_k)} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}^{(i_1)} = \mathbf{B}.$$

В результате приходим к двойному равенству

$$\mathbf{E}^{(i_k)} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}^{(i_1)} \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Используя обратную матрицу можно решать матричные уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{XA} = \mathbf{C}$, где $\mathbf{X}$ - неизвестная матрица. Эти уравнения решаются с помощью домножения слева и справа на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Для первого уравнения имеем

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{EX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Соответственно, для второго уравнения

$$\mathbf{XAA}^{-1} = \mathbf{CA}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{XE} = \mathbf{CA}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{CA}^{-1}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Определение. Системой линейных алгебраических уравнений называется следующая совокупность уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Введём следующие обозначения

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ - называется матрицей системы

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T$ - столбец свободных членов

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ - столбец неизвестных

$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы

Систему уравнений (1) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \qquad (2)$$

Решениями системы являются n чисел $x_1, \dots, x_n$, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Рассмотрим для начала случай, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Сделаем следующее преобразование в системе (2):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Так как $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, то $\mathbf{Ex} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, и соответственно

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (3)$$

Формула (3) даёт решение системы (1)

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу и вычисление по ф-ле (3) связано с большими вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка. Таким образом, можно сказать следующее:

1. Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных и матрица такой системы невырождена.
2. Метод удобен для решения систем невысокого порядка.
3. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\Delta=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}=5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = \text{-}25 - 10 + 5 = \text{-}30.$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=-5,\qquad M_{21}=\begin{vmatrix}-1&-1\\3&2\end{vmatrix}=1;\qquad M_{31}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&3\end{vmatrix}=-1;$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}=-10;\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&2\end{vmatrix}=14;\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&3\end{vmatrix}=16;$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}=-5;\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&3\end{vmatrix}=19;\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&2\end{vmatrix}=11;$$

$$\begin{matrix}a_{11}^{-1}=\frac{5}{30}; & a_{12}^{-1}=\frac{1}{30}; & a_{13}^{-1}=\frac{1}{30};\\ a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1}=\frac{16}{30};\\ a_{31}^{-1}=\frac{5}{30}; & a_{32}^{-1}=\frac{19}{30}; & a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30};\end{matrix}\qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{10}{30}&-\frac{14}{30}&\frac{16}{30}\\\frac{5}{30}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5&5+14-19&5-16+11\\5-20+15&1-28+57&1+32-33\\20-30+10&4-42+38&4+48-22\end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

Находим столбец $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1,\quad y=2,\quad z=3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений и все уравнения должны быть линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det \mathbf{A} \neq 0;$$

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема (Правило Крамера): *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение (будет показано в дальнейшем) и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta,$$

где $\Delta = \det \mathbf{A}$, *а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца* i *столбцом свободных членов* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30, \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60, \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90, \qquad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений (Д-во далее).

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Ответ: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = -2$.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, **матричный метод** и **метод Крамера** применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений и матрица системы невырождена. Рассмотрим теперь произвольную систему линейных уравнений.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица системы порядка $m \times n$, а $\mathbf{b}$ – m - мерный столбец свободных членов, $\mathbf{x}$ - n-мерный столбец неизвестных.

<u>Определение.</u> Если $b_1 = \ldots = b_m = 0$, то система называется **однородной**. Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как всегда существует нулевое решение.

<u>Теорема Кронекера – Капелли.</u> (условие совместности системы)
(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

<u>Теорема:</u> *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$\mathrm{Rg}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}.$$

<u>Доказательство.</u>

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А

$$\mathbf{Ax} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}}$ не изменяют ранга, т.е. $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}$.

2) И обратно, если $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Тогда, столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верна запись, приведенная выше.

<u>Пример.</u> Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Rg}\,\mathbf{A} = 2.$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}} = 3$. Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases} \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \ \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=2;$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}}=2.$$

Система совместна. Решения: $x_1=1, \quad x_2=1/2$.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от **матричного метода** и **метода Крамера**, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad (1)$$

Для решения системы (1) воспользуемся элементарными преобразованиями, к которым как известно относятся:

1) Умножение левой и правой части любого из уравнений на число, не равное нулю

2) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

3) Перестановка уравнений местами.

4) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x_j.

Определение. Две системы являются **эквивалентными**, если они имеют общее решение, т.е. всякое решение одной системы удовлетворяет другой и наоборот.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Системы уравнений, получающиеся одна из другой с помощью элементарных преобразований являются эквивалентными системами.*

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить каждое из элементарных преобразований. При этом **п. 1, 3 и 4** – очевидны. Проверим **п. 2**. Выберем строку с номером s домножим на число α и прибавим к строке с номером k получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n+\alpha\left(a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n\right)=b_k+\alpha b_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Все уравнения кроме k-го автоматически удовлетворяются по условию теоремы. Но k-е уравнение тоже удовлетворяется так как

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k \quad (2)$$

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s \quad (3)$$

Следовательно

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n + \alpha\left(a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n\right) = b_k + \alpha b_s \qquad (4)$$

Нетрудно проверить утверждение и в обратную сторону, а именно, что из (3) и (4) следует (2) или из (2) и (4) следует (3).

Теорема доказана.

Изложим теперь метод Гаусса, суть которого заключается в последовательном исключении неизвестных. Приведём расширенную матрицу системы $\tilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)$ к главному ступенчатому виду $\tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = \left(\mathbf{S}^{(2)}\middle|\mathbf{d}\right)$. При этом:

1. $\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(1)} = \mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(2)}$

2. Системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ - эквивалентны.

Поэтому, если система $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ совместна (несовместна), то исходная система также совместна (несовместна). В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли для совместности необходимо выполнение условия

$$\mathrm{Rg}\,\tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathrm{Rg}\,\mathbf{S}^{(2)} = r \le n.$$

что может быть только при условии $r \le n$.

Первые r столбцов называются **базисными столбцами**, столбцы с номерами $r+1,\dots,n$ - **свободные**. Соответственно переменные $x_1,\dots,x_r$ - **базисны**е; $x_{r+1},\dots,x_n$ - **свободные.**

Таким образом, если $r < n$ система (1) имеет бесконечное множество решений, которые находятся из системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & s_{3,r+1}^{(2)} & \dots & s_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{4,r+1}^{(2)} & \dots & s_{4n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{r-2,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & s_{r-1,r+1}^{(2)} & \dots & s_{r-1,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{r,r+1}^{(2)} & \dots & s_{rn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_{r-2} \\ x_{r-1} \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_{r-2} \\ d_{r-1} \\ d_r \end{pmatrix}$$

Эти решения имеют вид

$$\begin{array}{l} x_j = d_j - s_{j,r+1}^{(2)}x_{r+1} - \dots - s_{jn}^{(2)}x_n, \quad j = \overline{1,r} \\ x_{r+1},\dots,x_n \in \Re \end{array} \qquad (2)$$

В случае если $r = n$ система (1) имеет единственное решение определяемое формулой

$$x_j = d_j, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}2&1&-1&5\\1&-2&3&-3\\7&1&-1&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\2&1&-1&5\\7&1&-1&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\0&5&-7&11\\0&15&-22&31\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\0&5&-7&11\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-3\\5x_2-7x_3=11\\-x_3=-2\end{cases}$$, откуда получаем: $x_3=2,\quad x_2=5,\quad x_1=1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases}5x-y-z=0\\x+2y+3z=14\\4x+3y+2z=16\end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix}5&-1&-1&0\\1&2&3&14\\4&3&2&16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\4&3&2&16\\5&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&-5&-10&-40\\0&-11&-16&-70\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&1&2&8\\0&-11&-16&-70\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&1&2&8\\0&0&6&18\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&5\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$$, что и является решением.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1\\x_1-x_3+2x_4=6\\3x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

Приведённая система

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad (1)$$

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

где $\mathbf{0}$ - нулевой столбец, $\mathbf{A}$ - квадратная матрица порядка n.

Система (2) называется **приведённой системой** по отношению к (1). Она является однородной и, следовательно, всегда совместна. Кроме того, если $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=n$, то система (2) имеет только нулевое решение (ф-ла (3) пред. параграфа) и это решение называется **тривиальным решением**.

Пусть $\mathbf{x}_0$ - решение системы (1). Тогда, если $\mathbf{y}$ - решение приведённой системы (2), то столбец $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{y}$ - также будет решением (1), так как $\mathbf{Ax}=\mathbf{Ax}_0+\mathbf{Ay}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$.

И обратно, если $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{y}$ решение системы (1), то для $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ имеем $\mathbf{Ay}=\mathbf{Ax}-\mathbf{Ax}_0=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Очевидно, что если $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ решения системы (2), то любая их линейная комбинация также является решением системы (2). Поэтому, если система (2) имеет нетривиальные решения, то можно указать несколько линейно независимых решений, таких, что любое решение является их линейной комбинацией.

Таким образом, задачу описания множества решений системы (1), если она совместна, сводится к задаче описания множества решений приведённой системы (2).

Определение. Матрица $\mathbf{F}$, состоящая из столбцов высоты n, называется **фундаментальной матрицей** для приведённой системы (2), если:

1. $\mathbf{AF} = \mathbf{O}$
2. столбцы матрицы $\mathbf{F}$ - линейно независимы,
3. Ранг матрицы $\mathbf{F}$ максимален среди рангов матриц, удовлетворяющих условию (1)

Столбцы фундаментальной матрицы называются **фундаментальной системой решений**.

В силу данного определения, если фундаментальная матрица существует, то каждый её столбец есть решение системы (2). Если система не имеет нетривиальных решений, то фундаментальной матрицы нет. Это будет в том случае когда $\mathrm{Rg}\mathbf{A} = n$. Во всех остальных случаях она существует.

Прежде чем перейти к вопросу построения фундаментальной матрицы, проясним третье условия определения. Имеет место следующее утверждение

Пусть $\mathbf{A}$ *- матрица порядка* $m \times n$ *и* $\mathrm{Rg}\mathbf{A} = r$. *Тогда* $\mathrm{Rg}\mathbf{F} = n - r$

В самом деле. Приведём матрицу $\mathbf{A}$ к главному ступенчатому виду $\mathbf{S}^{(2)}$. Эта матрица имеет r столбцов вида $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ и кроме того системы

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

эквивалентны.

Поэтому равенство $\mathbf{S}^{(2)}\mathbf{F} = \mathbf{O}$ возможно только в случае, если как минимум r строк в матрице $\mathbf{F}$ - нулевые (или приводятся к нулевым с помощью элементарных преобразований). А это означает, что $\mathrm{Rg}\mathbf{F} \le n - r$. А так как ранг фундаментальной матрицы максимален среди всех матриц, удовлетворяющих условию 1 определения фундаментальной матрицы, то получаем окончательно, что $\mathrm{Rg}\mathbf{F} = n - r$

Теперь рассмотрим алгоритм построения фундаментальной матрицы. Разложим небазисные столбцы матрицы $\mathbf{A}$ по базисным

$$\mathbf{A_j} = \alpha_j^1 \mathbf{A_1} + \ldots + \alpha_j^r \mathbf{A_r}, \quad j = r+1, \ldots, n$$

Отсюда следует, что столбец $\begin{pmatrix} -\alpha_j^1 & \dots & -\alpha_j^r & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ - является решением (единица стоит на j - м месте). Таких решений можно составить столько, сколько есть небазисных столбцов. Объединим их все в одну матрицу

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{r+1}^1 & -\alpha_{r+2}^1 & \dots & -\alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{r+1}^r & -\alpha_{r+2}^r & \dots & -\alpha_n^r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Подматрица в последних $n - r$ строках единичная, поэтому её ранг равен числу столбцов и они линейно независимы. Таким образом, если $\mathrm{Rg}\mathbf{A} = r < n$, то фундаментальная матрица $\mathbf{F}$ которую мы только что получили, состоит из $n - r$ столбцов

<u>Теорема</u> (об общем решении неоднородной системы). *Пусть* $\mathbf{x}_0$ *- некоторое решение системы (1), а* $\mathbf{F}$ *- фундаментальная матрица решений её приведённой системы. Тогда*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{Fc} \qquad (3)$$

при любом $\mathbf{c}$ *- является решением системы* (1).

Верно и обратное **утверждение:** Для каждого решения $\mathbf{x}$ найдётся такой столбец $\mathbf{c}$, что оно будет представлено формулой (3). Выражение, стоящее в правой части формулы (3) называется **общим решением** системы (1).

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Это система состоящая из одного уравнения. Её ранг равен 1. Общее решение имеет вид:

$$x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z, \quad y, z \in \Re. \ (4)$$

Построим теперь фундаментальную матрицу решений. Её ранг равен $\mathrm{Rg}\mathbf{F} = 3 - 1 = 2$. Положим $y = z = 0$. Тогда, общее решение (4) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{Fc}$$

где

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -D/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -B/A & -C/A \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \Re.$$

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 8 \end{aligned}$$

<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований приведём её к виду

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1 = -2x_2 + 2x_4 - 4, \\ &x_3 = 3 - 2x_4, \quad x_2, x_4 \in \Re. \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \Re.$$

Перепишем это равенство так

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \Re.$$

В полученном представлении

$$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Таким образом

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{F}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Положим $c_1,c_2=0$, получим частное решение

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно удовлетворяет исходной системе уравнений.

Линейные и евклидовы пространства.

Линейное пространство и его свойства

Как известно, линейные операции (сложение, вычитание, умножение на число) определены по-своему для каждого множества (числа, многочлены, направленные отрезки, матрицы). Сами операции различны, но их свойства одинаковы.

Эта схожесть свойств позволяет обобщить понятие линейных операций для любых множеств вне зависимости от того, что это за множества (числа, матрицы и т.д.).

Для того, чтобы дать определение линейного (векторного) пространства рассмотрим некоторое множество L состоящее из элементов $\mathbf{x}$, для которых определены операции сложения и умножения на число. При этом предполагается, что результирующий элемент также принадлежит множеству L.

Пусть эти операции обладают свойствами:

1) Коммутативность $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$

2) Ассоциативность $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$

3) Существует такой нулевой вектор $\mathbf{o}$, что $\mathbf{x}=\mathbf{o}+\mathbf{x}$ для $\forall\mathbf{x}\in L$

4) Для $\forall\mathbf{x}\in L$ существует вектор $\mathbf{y}=-\mathbf{x}$, такой, что $\mathbf{y}+\mathbf{x}=\mathbf{o}$

5) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$

6) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$

7) Распределительный закон $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

8) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

Определение: Множество L называется **линейным** (векторным) пространством, а его элементы называются **векторами**.

Важно не путать понятие вектора, приведенное выше с понятием вектора как направленного отрезка на плоскости или в пространстве. Направленные отрезки являются всего лишь частным случаем элементов линейного (векторного) пространства. Линейное (векторное) пространство – понятие более широкое. Примерами таких пространств могут служить ***множество действительных чисел, множество векторов на плоскости и в пространстве, матрицы, множество функций непрерывных на отрезке, множество монотонных функций, арифметические пространства*** и т.д.

Важный пример. Множество возрастающих функций не является линейным пространством, так как не выполняется например аксиома 4), потому что если $f(x)$ возрастает, то $-f(x)$ убывает и следовательно не принадлежит множеству возрастающих функций.

Замечание. Если операции сложения и умножения на число определены для действительных элементов, то линейное (векторное) пространство является вещественным пространством, если для комплексных элементов – комплексным пространством.

Свойства линейных пространств.

1. Существует линейное пространство, состоящее только из одного элемента. Его элемент называется нулём. Соответствующее пространство называется **нулевым**.
2. В каждом линейном пространстве существует только один нулевой элемент.
3. Для каждого элемента существует только один противоположный элемент.

   В самом деле, пусть существуют два нулевых вектора $\mathbf{o}_1$ и $\mathbf{o}_2$. Тогда их сумма равна каждому из них, т.е. $\mathbf{o}_1+\mathbf{o}_2=\mathbf{o}_1=\mathbf{o}_2$. Аналогично, если вектор $\mathbf{x}$ имеет два противоположных $-\mathbf{x}_1$ и $-\mathbf{x}_2$, то тогда

$$-\mathbf{x}_1+\mathbf{x}-\mathbf{x}_2=-\mathbf{x}_1=-\mathbf{x}_2$$

4. Для каждого $\mathbf{x}\in L$ верно $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{o}$. В самом деле $0\cdot\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{x}=(0+1)\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{o}$
5. $(-1)\cdot\mathbf{x}=-\mathbf{x}$. Это свойство является следствием предыдущего, так как
$$(-1)\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}=(-1+1)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{o}\;\Rightarrow\;(-1)\cdot\mathbf{x}=-\mathbf{x}$$
6. Для каждого $\alpha\in\Re$ и $\mathbf{o}\in L$ верно $\alpha\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}$. ($\alpha\cdot\mathbf{o}=\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{x})=\mathbf{o}$)
7. Если $\alpha\mathbf{x}=\mathbf{o}$, то $\alpha=0$ или $\mathbf{x}=\mathbf{o}$. В самом деле, если $\alpha\neq 0$, то умножая равенство $\alpha\mathbf{x}=\mathbf{o}$ на α^{-1} получим $1\mathbf{x}=\mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{x}=\mathbf{o}$

Базис линейного пространства

Определение: Если в пространстве L имеются векторы $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n$, то вектор $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+...+\alpha_n\mathbf{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{a}_i$.

Определение: Если $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+...+\alpha_n\mathbf{a}_n=\mathbf{o}$ только при $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, то векторы $\mathbf{a}_i$ называются **линейно независимыми**.

Определение: Размерностью линейного пространства называется максимальное количество линейно независимых векторов в нём. Если в линейном пространстве L есть n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы, то пространство L называется n**-мерным (обозначается** $\dim L=n$**)**, а совокупность линейно независимых векторов, таких что любой вектор из L представим в виде линейной комбинации этих векторов называется **базисом** линейного пространства L.

Из данного определения в частности следует, что *в n-мерном пространстве любая система из n линейно независимых векторов является базисом*. В самом деле рассмотрим систему линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ и произвольный вектор $\mathbf{x}$. Составим линейную комбинацию
$$-\mathbf{x}+x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_n\mathbf{e}_n=\mathbf{o}$$
Такая комбинация возможна так как любые $n+1$ векторов в n**-мерном** пространстве линейно зависимы. Тогда
$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_n\mathbf{e}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i \qquad (1)$$
т.е. любой произвольный вектор выразился через линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

Покажем теперь, что любая система из $m<n$ линейно независимых векторов не может быть базисом в n**-мерном** пространстве. Предположим, что это не так, т.е. существует система линейно независимых векторов $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m$ которая является базисом. Тогда для векторов $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ справедливы разложения
$$\mathbf{e}_j=\alpha_{1j}\mathbf{f}_1+\alpha_{2j}\mathbf{f}_2+...+\alpha_{mj}\mathbf{f}_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\mathbf{f}_i$$
Но векторы $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ линейно независимы, поэтому
$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mathbf{e}_j=\mathbf{o}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\beta_j\alpha_{ij}\mathbf{f}_i\;\Rightarrow\;\sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_{ij}=0$$
Последнее равенство есть однородная система линейных алгебраических уравнений с матрицей
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$
Такая система имеет нетривиальное решение, т.е. существует число $\beta_k\neq 0$ такое что

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j = \mathbf{o}$$

т.е. система векторов $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ линейна зависима, что противоречит предположению. Итак: *никакая система из $m<n$ линейно независимых векторов не может быть базисом в n**-мерном** пространстве.*

Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ базис в n-мерном пространстве L, тогда для любого вектора $\mathbf{x}$ имеет место разложение (1)

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

при этом, числа $x_1,\dots,x_n$ называются **координатами вектора $\mathbf{x}$** в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Обозначается $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$. Следует отметить, что указанное разложение единственно. В самом деле, пусть вектор $\mathbf{x}$ имеет два различных представления в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i'\mathbf{e}_i.$$

Тогда, вычитая из первого равенства второе получим

$$\mathbf{o} = (x_1 - x_1')\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_2')\mathbf{e}_2 + \dots + (x_n - x_n')\mathbf{e}_n$$

Так как $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ - линейно независимы, то все $x_i - x_i' = 0$, то есть $x_i = x_i'$ что и требовалось доказать.

Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ базис в n-мерном пространстве L. Так как любой вектор линейного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, то в частности для базисного вектора $\mathbf{e}_i$ имеем

$$\mathbf{e}_i = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \dots + 0\cdot\mathbf{e}_{i-1} + 1\cdot\mathbf{e}_i + 0\cdot\mathbf{e}_{i+1} + \dots + 0\cdot\mathbf{e}_n$$

Тогда координаты вектора $\mathbf{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots0)^T$ где единица стоит на i-м месте.

Линейные подпространства

Определение. Непустое множество L' векторов линейного пространства L. (Обозначается $L' \subset L$) называется **линейным подпространством**, если:

1) сумма любых векторов из L' принадлежит L'
2) произведение каждого вектора из L' на любое число также принадлежит L'

Иными словами множество L' должно быть **замкнуто** относительно операций сложения и умножения на действительное число. В силу данного определения:

1) любая линейная комбинация векторов из L' принадлежит L'
2) нулевой вектор как произведение $0\mathbf{x} = \mathbf{o}$ также принадлежит L'
3) противоположный вектор как произведение $-1\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ также принадлежит L'
4) Пусть L' подпространство n - мерного пространства L. Тогда $\dim L' \le n$. Если $\dim L' = n$, то $L' = L$.

Доказательство. То что $\dim L' \le n$ следует из того, что L' является всего лишь подмножеством множества L. Рассмотрим вторую часть утверждения. Пусть базис в L' содержит n векторов. Тогда, любая система из $m>n$ из векторов в L' линейно зависима и лежит также в L (так как $L' \subset L$). Но любой вектор из L раскладывается по этому базису и, поэтому принадлежит L'. Значит $L' = L$

Пусть дано некоторое множество M векторов в линейном пространстве L. Обозначим через L' совокупность всевозможных линейных комбинаций, каждая из которых составлена из конечного числа векторов из M. Построенное таким образом множество L' является подпространством в L и называется **линейной оболочкой множества** M. Очевидно, размерность линейной оболочки из m векторов не превосходит m так как размерность линейной оболочки равна максимальному количеству линейно независимых векторов, которых исходя из условия не больше m.

Сформулируем и докажем ещё несколько свойств касающихся линейных подпространств.

1) *Пусть* L' - k *- мерное подпространство* n *- мерного линейного пространства* L. *Если базис* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ *в* L' *дополнить до базиса* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ *в* L *то все векторы из* L' *и только они будут иметь компоненты (координаты)* $x_{k+1}=0,\ldots,x_n=0$.
2) *Пусть в* n *- мерном линейном пространстве* L *выбран базис. Тогда, координатные столбцы векторов, принадлежащих* k *- мерному подпространству* L' *удовлетворяют однородной системе уравнений ранга* $n-k$

Доказательство. Если для вектора $\mathbf{x}\in L$ имеем $x_{k+1}=0,\ldots,x_n=0$, то тогда

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_k\mathbf{e}_k \qquad (1)$$

и следовательно, $\mathbf{x}\in L'$.

Обратно, любой вектор $\mathbf{x}\in L'$ раскладывается в линейную комбинацию (1) Она же является разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ при $x_{k+1}=0,\ldots,x_n=0$. Таким образом, первое утверждение доказано.

Заметим теперь, что равенства $x_{k+1}=0,\ldots,x_n=0$ можно рассматривать как систему уравнений, связывающую координаты вектора $\mathbf{x}$ в некотором произвольном базисе $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Т.е.

$$x_{k+1}=0,\ldots,x_n=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}=\mathbf{o} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n\mathbf{e}_n=\mathbf{o} \end{cases} \Leftrightarrow\; \mathbf{E}'\mathbf{x}'=\mathbf{o}$$

где, $\mathbf{x}'=\left(x_{k+1},\ldots x_n\right)^T$ - столбец координат $x_{k+1},\ldots x_n$, $\mathbf{E}'$ - матрица вида

$$\mathbf{E}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эта система имеет ранг $n-k$, что и доказывает второе утверждение.

Определение. Суммой линейных подпространств L' и L'' называется линейная оболочка их объединения. Обозначается $L'+L''$ (иногда $L'\bigcup L''$).

Таким образом, если $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_k$ базис в L', а $\mathbf{e}''_1,\ldots,\mathbf{e}''_m$ базис в L'', то любой вектор $\mathbf{x}\in L'+L''$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}x'_i\mathbf{e}'_i+\sum_{j=1}^{m}x''_j\mathbf{e}''_j \qquad (2)$$

При этом, если L' и L'' подпространства некоторого линейного пространства L, то среди базисных векторов $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_k$ и $\mathbf{e}''_1,\ldots,\mathbf{e}''_m$ могут встретиться одинаковые (т.е. в формуле (2) можно привести подобные члены), поэтому

$$\dim\left(L'+L''\right)\le\dim L'+\dim L''$$

С другой стороны, операция сложения множеств в соответствии с формулой (2) сводится к операции сложения векторов, которая как известно обладает свойством ассоциативности. Следовательно

$$L'+L''+L'''=\left(L'+L''\right)+L'''=L'+\left(L''+L'''\right) \quad (3)$$

При сложении большого числа подпространств $L_1,\ldots,L_n$ используется символическая запись $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$

Сумма линейных подпространств L' и L'' называется **прямой суммой**, если её размерность равна сумме размерностей этих подпространств. Обозначается $L' \oplus L''$. Тогда в силу определения

$$\dim\left(L' \oplus L''\right) = \dim L' + \dim L''$$

Это означает, что среди базисных векторов $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_k$ и $\mathbf{e}''_1,\ldots,\mathbf{e}''_m$ в формуле (2) нет одинаковых.

При этом справедливы также следующие свойства (получаются по аналогии с формулой (3) исходя из формулы (2) и определений суммы и прямой суммы)

1) $L' \oplus L'' \oplus L''' = \left(L' \oplus L''\right) \oplus L''' = L' \oplus \left(L'' \oplus L'''\right)$

2) $L' + L'' \oplus L''' = \left(L' + L''\right) \oplus L''' = L' + \left(L'' \oplus L'''\right)$

Предложение 1. *Для любого подпространства L' из L найдётся подпространство $L'' \subset L$, такое, что $L = L' \oplus L''$.*

В самом деле рассмотрим пространство L с базисом $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Пусть базисом подпространства L' являются вектора $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$. Тогда линейную оболочку из оставшихся базисов $\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ обозначим через L''. Это подпространство пространства L. При этом

$$\begin{cases} L = L' + L'' \\ \dim L' = k \\ \dim L'' = n - k \\ \dim L = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = L' + L'' \\ \dim L' + \dim L'' = k + n - k = n = \dim L \end{cases} \Rightarrow L = L' \oplus L''$$

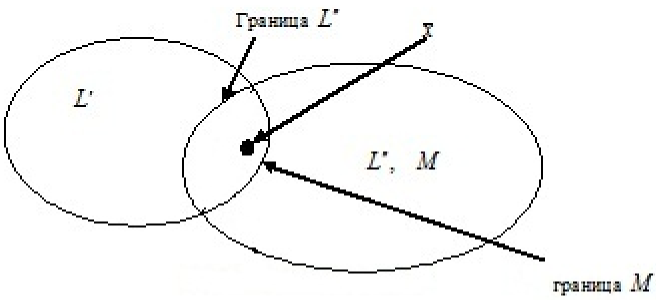
Определение. **Пересечением** линейных подпространств L' и L'' называется множество векторов, которые принадлежат обоим подпространствам. Обозначается $L' \cap L''$.

Теорема. *Размерность суммы двух пространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

$$\dim\left(L' + L''\right) = \dim L' + \dim L'' - \dim\left(L' \cap L''\right)$$

Доказательство. Если сумма прямая, то утверждение очевидно, так как размерность суммы равна сумме размерностей и пересечение нулевое.

Пусть теперь $L' \cap L'' \neq 0$. Тогда, в силу предложения 1 найдётся множество M такое что: $L'' = M \oplus \left(L' \cap L''\right)$.



Следовательно

$$L' + L'' = L' + \left(L' \cap L''\right) \oplus M = \left(L' + \left(L' \cap L''\right)\right) \oplus M = \left\{L' \cap L'' \subseteq L',\ \ L' + L' = L'\right\} = L' \oplus M$$

По определению прямой суммы

$$\begin{cases} \dim\left(L' + L''\right) = \dim\left(L' + M\right) = \dim L' + \dim M \\ \dim L'' = \dim\left(L' \cap L''\right) + \dim M \end{cases} \Rightarrow \dim\left(L' + L''\right) = \dim L' + \dim L'' - \dim\left(L' \cap L''\right)$$

Евклидовы пространства. Длина и угол

Определение. Действительное линейное пространство E называется **евклидовым**, если в нём определена операция **скалярного произведения**, т.е. любым векторам $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$ поставлено в соответствие действительное число (обозначаемое $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Re$) и это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

1) $(\mathbf{x},\mathbf{x})>0 \quad \forall\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\ \ (\mathbf{x},\mathbf{x})=0\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{o}$
2) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$;
4) $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$;
5) $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$

при этом указанные свойства должны выполняться $\forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in E$ и $\alpha\in\Re$.

Замечание 1. Отметим сразу же, что любое подпространство евклидова пространства также является евклидовым пространством, так как для любых его векторов также определено скалярное произведение.

Пример 1. Для векторов геометрического векторного пространства скалярное произведение определено, как произведение длин векторов на косинус угла между ними. Эта операция обладает свойствами 1) - 5), но зависит от выбора единиц длины. Если единица длины определена, то геометрическое векторное пространство является евклидовым пространством.

Пример 2. В n-мерном арифметическом пространстве можно ввести скалярное произведение, сопоставив столбцам $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ и $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T$ число

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Используя свойства умножения матриц можно убедится в выполнении свойств 1) - 5).

Пример 3. В пространстве функций непрерывных на отрезке $[a,b]$ скалярное произведение можно определить по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Используя свойства определённого интеграла можно убедится в выполнении свойств 1) - 5).

Рассмотрим теперь вопрос о выражении скалярного произведения через координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в произвольном евклидовом пространстве. Пусть в евклидовом пространстве задан некоторый базис $\mathbf{e}$. Тогда скалярное произведение может быть представлено в виде

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$$

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T,\quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T,$$

$$\mathbf{G}=(g_{ij})=\begin{pmatrix}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n)\\ (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме скалярное произведение запишется так.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{y}$$

Матрица $\mathbf{G}$ называется **матрицей Грама** базиса $\mathbf{e}$. Она симметрична. Кроме того, на нее накладывается следующее ограничение: *все её главные миноры (миноры, стоящие на главной диагонале), включая определитель, должны быть положительны*. Такие матрицы называются **положительно определенными**. Это следует из п. 1 определения.

<u>Пример 4.</u> Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{G} = -3$$

Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2 x_1 + x_2^2$$

В этом случае для вектора $\mathbf{x} = (1, -1)^T$ получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1^2 - 4 + (-1)^2 = -2$$

что противоречит п. 1 определения.

Условие положительной определенности легко проверить на примере матриц второго порядка. Пусть, как в предыдущем примере $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} g_{11} x_1 + g_{12} x_2 \\ g_{12} x_1 + g_{22} x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_2 x_1 + g_{22} x_2^2 = x_2^2 \left(g_{11} t^2 + 2 g_{12} t + g_{22} \right) > 0, \quad t = x_1 / x_2.$$

Выражение а скобах будет положительным, если

$$g_{11} > 0, \quad (g_{12})^2 - g_{11} g_{22} > 0 \;\Rightarrow\; \det \mathbf{G} > 0.$$

Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема.</u> *Пусть* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *- произвольная система векторов из евклидова пространства* E. *Тогда определитель матрицы, составленный из скалярных произведений этих вектров положителен, тогда и только тогда, когда векторы* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *линейно независимы и равен нулю только в том случае, если они линейно зависимы.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{o}$$

Умножая это равенство скалярно на каждый из векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + \alpha_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) = 0 \\ \alpha_1 (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \alpha_2 (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) + \alpha_2 (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. В этом случае векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ - линейно зависимы. И наоборот система (1) имеет нулевое решение, только тогда, когда определитель отличен от нуля. В этом случае, векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы и следовательно образуют базис (так как пространство линейное n- мерное). Тогда матрица системы (1) является матрицей Грама и её определитель положителен. Тем самым теорема доказана.

Важным следствием из этой теоремы является **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**.

<u>Следствие</u>. Для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евлидового пространства справедливо неравенство

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \qquad (2)$$

Это неравенство называется **неравенством Коши-Буняковского-Шварца** и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

В самом деле, матрица

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}(\mathbf{x},\mathbf{x}) & (\mathbf{x},\mathbf{y})\\ (\mathbf{y},\mathbf{x}) & (\mathbf{y},\mathbf{y})\end{pmatrix}$$

является матрицей Грама векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Её определитель согласно предыдущей теоремы неотрицателен, поэтому

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \ge 0$$

откуда следует неравенство (2).

Введём теперь понятие длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

Определение. Назовём **длиной вектора** $\mathbf{x}$ и обозначим $|\mathbf{x}|$ число $\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.

Определение. Углом между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ назовём число α, удовлетворяющее условию

$$\cos\alpha=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \qquad (3)$$

В силу свойства 1) – длина вектора вещественное неотрицательное число, причём она равна нулю тогда и только, когда вектор нулевой. Таким образом, данное определение длины корректно. Определение угла тоже корректно, так как правая часть равенства (3) по модулю не превосходит единицы. Это следует из неравенства Коши-Буняковского-Шварца. Из этого неравенства также следует, что

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}| \qquad (4)$$

Это неравенство называется неравенством треугольника. Докажем его. Имеем

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})=|\mathbf{x}|^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+|\mathbf{y}|^2\le$$
$$\le|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2=(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2$$

откуда следует неравенство (4).

Отсюда следует, что евклидово пространство является метрическим с метрикой $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y})}$

Ортогональные базисы и ортогональные матрицы

Определение. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются **ортогональными**, если $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$.

Это условие помимо всего прочего может быть выполнено при условии, что хотя бы один из векторов $\mathbf{x}$ или $\mathbf{y}$ нулевой. Таким образом, *нулевой вектор и только он ортогонален каждому вектору подпространства*.

Определение. Базис из ортогональных векторов называется **ортогональным базисом**.

Определение. Базис, в котором скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

называется **ортонормированным базисом**. Таким образом, матрица Грама ортонормированного базиса единичная

$$g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases} \text{ или } \mathbf{G}=\mathbf{E}$$

Это значит, что векторы ортонормированного базиса попарно ортогональны и по длине равны единицы.

Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема.</u> n попарно ортогональных ненулевых векторов $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$ в n-мерном евклидовом пространстве составляют базис. Разложение вектора $\mathbf{x}$ по этому базису задаётся формулой

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i \qquad (1)$$

<u>Доказательство.</u> Так как векторы $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$ ортогональны, то $(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)=0,\ i\neq j$, следовательно матрица, составленная из произведений $(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)$ - диогональная и её определитель положителен. Следовательно, они линейно независимы и потому образуют базис.

Далее, рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{f}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{f}_n$. Домножим это равенство скалярно на $\mathbf{f}_i$. Получим

$$(\mathbf{x},\overline{h}_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_i)=\alpha_i|\mathbf{f}_i|^2$$

Тогда

$$\alpha_i=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}$$

что и доказывает равенство (1).

Умножим скалярно равенство (1) на $\mathbf{x}$, получим

$$|\mathbf{x}|^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)^2}{|\mathbf{f}_i|^2} \qquad (2)$$

Полученное равенство называется **равенством Парсеваля**.

Рассмотрим теперь два ортонормированных базиса $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ связанных между собой с помощью матрицы перехода $\mathbf{\Gamma}$. Пусть $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$ - матрицы Грама для базисов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$. Тогда, как известно

$$\mathbf{e}'=\mathbf{e\Gamma} \text{ и } \mathbf{G}'=\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{G\Gamma}$$

В ортонормированном базисе $\mathbf{G}=\mathbf{G}'=\mathbf{E}$ и поэтому из второй формулы находим, что

$$\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{\Gamma}=\mathbf{E} \qquad (3)$$

Матрицы, удовлетворяющие условию (3) называются **ортогональными**. Обычно, ортогональные матрицы обозначаются буквой $\mathbf{Q}$. Очевидно, что равенство (3) равносильно следующим двум равенствам

$$\mathbf{\Gamma\Gamma}^T=\mathbf{E},\quad \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{T}}=\mathbf{\Gamma}^{-1}$$

В качестве основных свойств ортогональных матриц можно отметить следующие:

1) Произведение двух ортогональных матриц $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ есть ортогональная матрица

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^T=\mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1^T=\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1}=(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}$$

2) Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1. В самом деле, из (3) имеем

$$\det\mathbf{E}=1=\det(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})=\det\mathbf{Q}^T\det\mathbf{Q}=(\det\mathbf{Q})^2\Rightarrow\det\mathbf{Q}=\pm1$$

Ортогональное дополнение пространства. Ортогональные проекции. Метод ортогонолизации. QR - разложение

Пусть E' - k-мерное подпространство в n-мерном евклидовом пространстве E. Дадим следующее определение.

<u>Определение.</u> Ортогональным дополнением подпространства E' называется множество всех векторов, ортогональных каждому вектору из E'. Это множество обозначается $E'^{\perp}$.

Очевидно, что *ортогональное дополнение* k*-мерного подпространства в* n*-мерном евклидовом пространстве есть* $n-k$*-мерное подпространство*. Таким образом, евклидово пространство *есть прямая сумма любого своего подпространства и его ортогонального дополнения* $E = E' \oplus E'^{\perp}$*, т.е.*

$$\dim E = \dim E' + \dim E'^{\perp}$$

Действительно, пусть $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k$ - базис в E'. Вектор $\mathbf{x} \in E'^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{x},\mathbf{f}_1) = \ldots = (\mathbf{x},\mathbf{f}_k) = 0 \quad (1)$$

Выберем в E ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ и обозначим через $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}$ компоненты вектора $\mathbf{f}_i$ $(i=1,\ldots,k)$ в этом базисе, а через $x_i,\ldots,x_n$ компоненты вектора $\mathbf{x}$. Тогда условия (1) запишутся в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}x_1 + \ldots + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен k, поскольку её строки линейно независимы. Тогда ранг фундаментальной матрицы решений этой системы равен $n-k$. Так как решение этой системы и определяет $E'^{\perp}$, то его размерность равна $n-k$.

Итак доказано, что $E = E' \oplus E'^{\perp}$. Это означает, что любой вектор $\mathbf{x} \in E$ раскладывается в сумму векторов $\mathbf{x}_1 \in E'$ и $\mathbf{x}_2 \in E'^{\perp}$. Вектор $\mathbf{x}_1$ при этом называется **ортогональной проекцией** вектора $\mathbf{x}$ на E', а вектор $\mathbf{x}_2$ - **ортогональной проекцией** вектора $\mathbf{x}$ на ортогональной дополнение к E'.

Найдём ортогональную проекцию произвольного вектора $\mathbf{x} \in E$ на пространство E'. Будем предполагать, что в E' задан ортогональный базис $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k$ дополним этот базис, присоединив к нему произвольный ортогональный базис $\mathbf{f}_{k+1},\ldots,\mathbf{f}_n$ из $E'^{\perp}$. Так как сумма подпространств E' и $E'^{\perp}$ прямая, то искомое разложение вектора $\mathbf{x}$ единственно и оно имеет вид (1) из предыдущего параграфа

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

Таким образом, искомая проекция равна

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i \qquad (2)$$

При $k=1$ проекция имеет вид $\mathbf{x}_1 = \left((\mathbf{x},\mathbf{f}_i)\big/|\mathbf{f}_1|^2\right)\mathbf{f}_1$ следовательно, правая часть формулы (2) – есть сумма проекций на ортогональные одномерные подпространства натянутые на $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k$. Поэтому, полученное ранее равенство Парсеваля является обобщением теоремы Пифагора.

Формула (2) служит основой метода, позволяющего произвольный базис евклидова пространства преобразовать в ортогональный и затем в ортонормированный. Этот метод называется **методом ортогонализации Грама-Шмидта**.

Итак, пусть в евклидовом простанстве E задан некоторый базис $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$. Положим $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$, затем вычтем из $\mathbf{f}_2$ его ортогональную проекцию на линейную оболочку $\mathbf{h}_1$ и положим

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2,\mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1$$

при этом вектор $\mathbf{h}_2$ раскладывается по векторам $\mathbf{f}_1=\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{f}_2$, причём $\mathbf{h}_2\neq\mathbf{o}$, так как в противном случае вектора $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ были бы пропорциональными.

Будем продолжать далее таким же образом. Предположим, что построены попарно ортогональные ненулевые векторы $\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_k$ и для любого $i\le k$ вектор $\mathbf{h}_i$ раскладывается по векторам $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_i$. Положим

$$\mathbf{h}_{k+1}=\mathbf{f}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{(\mathbf{f}_{k+1},\mathbf{h}_i)}{|\mathbf{h}_i|^2}\mathbf{h}_i \qquad (3)$$

Здесь вектор $\mathbf{h}_{k+1}$ - проекция вектора $\mathbf{f}_{k+1}$ на ортогональное дополнение оболочки $\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_k$ и поэтому он ортогонален ко всем $\mathbf{h}_i$ при $i\le k$, причём $\mathbf{h}_{k+1}\neq\mathbf{o}$, так как в противном случае векторы $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k$ были бы линейно зависимы.

Таким образом, после того как будет преобразован последний вектор $\mathbf{f}_n$ мы получим систему из n ненулевых ортогональны векторов $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_n)$. Они будут образовывать ортогональный базис в E. От него можно перейти к ортонормированному положив

$$\mathbf{e}_i=\frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|} \qquad (4)$$

Пусть базисы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{f}$ связаны с помощью матрицы $\mathbf{\Gamma}$, т.е. $\mathbf{f}=\mathbf{h\Gamma}$. Определим вид этой матрицы. Из равенства $\mathbf{h}_1=\mathbf{f}_1$ и формулы (3) видно, что любой вектор $\mathbf{f}_j$ раскладывается по системе векторов $\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_j$, причём коэффициент при $\mathbf{h}_j$ равен единице. Поэтому матрица $\mathbf{\Gamma}$ будет верхней треугольной с единицами на главной диогонали. Такие матрицы обозначаются буквой $\mathbf{R}$

Упражнение. Показать что матрица перехода от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{e}$ является диогональной с положительными диогональными элементами.

По сути дела, метод ортогонализации эквивалентен методу приведения положительно определённой квадратичной формы к диогональному виду.

Сформулируем теперь теорему, которая часто используется в приложениях, например, при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Теорема (*QR*- разложение). Если матрица $\mathbf{A}$ - невырождена, то она может быть представлена в виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{QR} \qquad (5)$$

где $\mathbf{Q}$ - ортогональная матрица, $\mathbf{R}$ - верхняя треугольная с положительными диогональными элементами.

Данное разложение называется QR **- разложением.**

Доказательство. Будем рассматривать столбцы матрицы $\mathbf{A}$ как координатные столбцы векторов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}$. Так как $\mathbf{A}$ невырождена, то эти векторы составляют некий базис $\mathbf{a}$. И кроме того, матрица $\mathbf{A}$ является матрицей перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{a}$, т.е.

$$\mathbf{a}=\mathbf{eA} \ (6)$$

Пусть теперь $\mathbf{e}'$ какой нибудь другой ортонормированный базис, полученный ортогонализацией и нормировкой базиса $\mathbf{a}$. Тогда

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}'\mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}$ - верхняя треугольная матрица с положительными элементами на диогонали.

И наконец, так как оба базиса $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ ортонормированные, то

$$\mathbf{e}'=\mathbf{eQ},$$

где $\mathbf{Q}$ - ортогональная матрица.

Тогда из последних двух равенств следует, что

$$\mathbf{a}=\mathbf{eQR}$$

Сравнивая полученное равенство с формулой (6) получаем разложение (5).

Линейные преобразования и отображения.

Линейные преобразования и отображения

Определение. Пусть L и $\overline{L}$ два линейных пространства (оба вещественные или оба комплексные). Под **отображением** A понимается закон, по которому каждому элементу (вектору) $\mathbf{x} \in L$ ставится в соответствие единственный элемент (вектор) $\mathbf{y} \in \overline{L}$. Обозначается $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ или $\mathbf{y} = \mathrm{A}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x}$. Вектор $\mathbf{y}$ принято называть **образом линейного отображения**, а вектор $\mathbf{x}$ - **прообразом.**

Замечание. Если пространства L и $\overline{L}$ - действительные, то отображение называется **действительным отображением** или просто **отображением**. Для комплексных пространств соответствующее отображение называется **комплексным**. В рамках курса будут рассматриваться только действительные отображения.

Определение. Отображение в котором $L = \overline{L}$ называется **преобразованием**. Если $\overline{L} \subset L$ и $\dim \overline{L} < \dim L$, то такое преобразование называется **выроженным**.

Определение. 1) Отображение пространства $\mathfrak{R}^n$ на действительную ось $\mathfrak{R}$ называется **скалярной функцией**.

2) Отображение пространства $\mathfrak{R}^n$ в $\mathfrak{R}^m$ называется **векторной функцией.**
3) Пусть M - некоторое функциональное пространство. Тогда, отображение пространства M на действительную ось $\mathfrak{R}$ называется **функционалом**.
4) Пусть M_1 и M_2 - некоторые функциональные пространства. Тогда, отображение пространства M_1 в M_2 называется **оператором**.

Отображение (преобразование) называется **линейным** если выполняются условия линейности:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in L \\ &\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\,\mathrm{A}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in L, \forall \alpha \in \mathfrak{R} \end{aligned} \qquad (1)$$

Замечание 1. Заметим, что в общем случае знак «+», стоящий в левой и правой частях первой формулы (1) обозначает две различные операции: сложение в пространстве L и сложение в пространстве $\overline{L}$. Для линейных преобразований это одинаковые операции.

Рассмотрим некоторые примеры линейных преобразований.

Пример 1: **Тождественное преобразование** (преобразует элемент линейного пространства сам в себя).

$$\mathrm{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Это преобразование является линейным (Д-во далее).

Пример 2. **Преобразованием подобия (гомотетия).** Это преобразование, которое ставит в соответствие вектору $\mathbf{x}$ вектор $\mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathfrak{R}$. Оно является линейным**.** В самом деле

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y}, \\ &\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \alpha\,\mathrm{A}\mathbf{x} \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ каждому вектору $\mathbf{x}$ ставится в соответствие нулевой вектор $\mathbf{o}$. Такое преобразование называется **нулевым преобразованием** и обозначается O. При $\lambda = 1$ получаем тождественное преобразование.

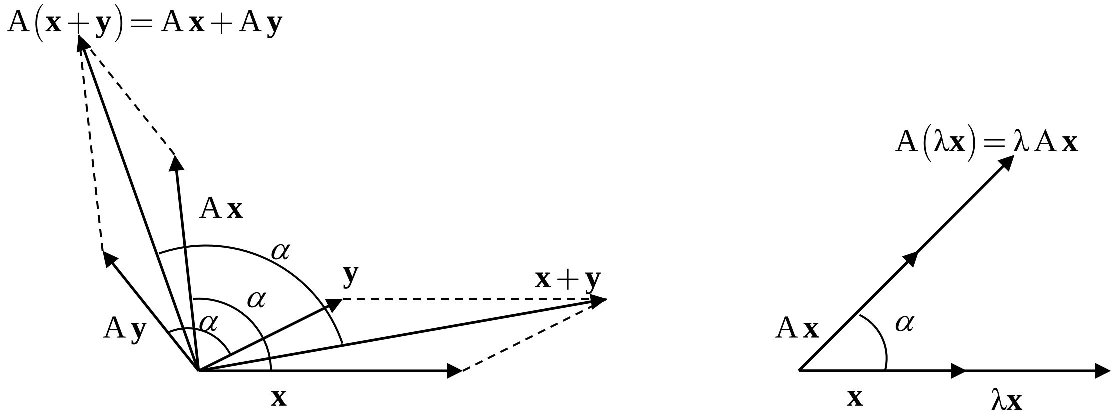
Пример 3. Преобразование, ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, вектор $\mathrm{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2$, $\lambda \in \mathfrak{R}$ является линейным преобразованием и представляет собой **растяжение плоскости L_2 в направлении вектора $\mathbf{e}_2$**.

Проверим свойства линейности

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_1+y_1)\mathbf{e}_1 + \lambda(x_2+y_2)\mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2 + y_1\mathbf{e}_1 + \lambda y_2\mathbf{e}_2 = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y}, \\ &\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = (\alpha x_1)\mathbf{e}_1 + \lambda(\alpha x_2)\mathbf{e}_2 = \alpha(x_1)\mathbf{e}_1 + \alpha(\lambda x_2)\mathbf{e}_2 = \alpha(x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2) = \alpha\,\mathrm{A}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ рассмотренное преобразование переходит в $\mathrm{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{e}_1$. Данное преобразование называется **проекцией плоскости на направление** $\mathbf{e}_1$, т.е. оно проектирует любой вектор $\mathbf{x}$ на ось Ox_1. Это пример вырожденного линейного преобразования.

<u>Пример 4.</u> Преобразование, ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x}$ на плоскости, вектор получающийся из $\mathbf{x}$ поворотом на угол α является линейным преобразованием и называется преобразованием поворота.



<u>Пример 5.</u> Преобразование, ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ вектор $\mathrm{A}\mathbf{x} = (x_1 + kx_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $\lambda \in \Re$ является линейным преобразованием и носит название **преобразования сдвига плоскости L_2 в направлении вектора $\mathbf{e}_1$.**

<u>Пример 6.</u> Является ли преобразование A, заданное равенством $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$; $\mathbf{x}_0 \neq 0$, линейным преобразованием?

Запишем преобразование A для какого-либо элемента $\mathbf{y}$: $\mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}_0$. Проверим, выполняется ли правило операции сложения для этого преобразования

$$\mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0;$$

$$\mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0 \neq \mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$$

т.е. данное преобразование A нелинейное.

Свойства линейных отображений

Отметим несколько основных свойств линейных отображений:

1. Очевидно, что *любая линейная комбинация векторов при линейном отображении переходит в линейную комбинацию их образов.* В самом деле

$$\mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}(\alpha_i\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mathrm{A}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{y}_i$$

2. *Линейно зависимые векторы при ЛО переходят в линейно зависимые векторы. Докажем вначале, что нулевой вектор при ЛО переходит в нулевой вектор.* В самом деле

$$\mathrm{A}(\mathbf{o}) = \mathrm{A}(0\mathbf{x}) = 0\,\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Пусть теперь $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ - линейно зависимые вектора. Тогда существуют числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не обращающиеся одновременно в нуль такие, что $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{o}$ и поэтому

$$\mathrm{A}\mathbf{o} = \mathrm{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1\,\mathrm{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\,\mathrm{A}\mathbf{x}_n = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n = \mathbf{o}$$

Следовательно, система векторов $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n$ тоже линейно зависима. Обратное утверждение не верно. Здесь в качестве примера можно рассмотреть линейное отображение, которое каждому вектору из L ставит нулевой вектор из $\overline{L}$. Такое отображение называется **нулевым отображением**.

3. *При линейном отображении* $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ *линейное подпространство* $L' \subset L$ *переходит в линейное подпространство* $\overline{L}' = \mathrm{A}(L') \subset \overline{L}$ *причём* $\dim \overline{L}' = \dim \mathrm{A}(L') \le \dim L'$.

Доказательство. Для нулевого подпространства утверждение очевидно. Рассмотрим подпространство L': $\dim L' = k > 0$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ базис в этом подпространстве. Для любого вектора $\mathbf{x} \in L'$ имеем $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k$ и

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathrm{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{y}$$

т.е. произвольный элемент $\bar{y}$ есть линейная комбинация векторов $\mathrm{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathrm{A}\mathbf{e}_k$. И наоборот, каждая такая линейная комбинация является образом вектора из L'. Следовательно, множество $\mathrm{A}(L')$ - линейная оболочка векторов $\mathrm{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathrm{A}\mathbf{e}_k$ и следовательно, является подпространством. Поэтому его размерность не превосходит k.

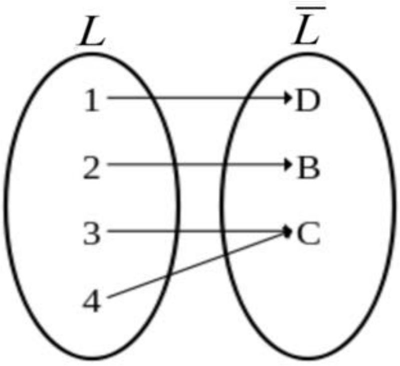
<u>Следствие.</u> *Из доказанного свойства следует, что множество образов всех векторов из* L *является подпространством в* $\overline{L}$. *Оно называется* ***множеством значений*** *отображения и обозначается* $\mathrm{Im}\mathrm{A}$

Изоморфизм линейных пространств

Пусть L и $\overline{L}$ два линейных пространства, $\dim L = n$, $\dim \overline{L} = m$.

<u>Определение.</u> Размерность множества значений отображения называется **рангом** отображения. Если $\mathrm{A}(L) = \overline{L}$, то ранг линейного отображения A равен m.

<u>Определение.</u> Отображение $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ называется **сюрьекцией,** если каждый элемент $\mathbf{y} \in \overline{L}$ является образом какого либо элемента $\mathbf{x} \in L$.



<u>Примеры.</u> 1) $\mathrm{A}: \Re \to [-1,1]$, $\mathrm{A}(x) = \sin x$ - сюрьекция

2) $\mathrm{A}: \Re \to \Re^+ = [0, +\infty)$, $\mathrm{A}(x) = x^2$ - сюрьекция

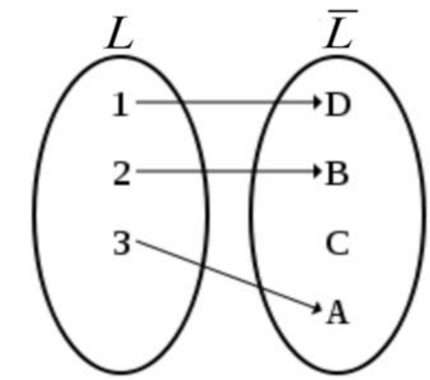
3) $\mathrm{A}: \Re \to \Re$, $\mathrm{A}(x) = x^2$ - не является сюрьекцией, так как ни для какого отрицательного элемента из $\overline{L}$ не существует прообраза из L

<u>Определение.</u> Множество векторов, отображающихся в нулевой вектор при отображении A, называется **ядром** отображения A и обозначается $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$.

<u>Замечание.</u> Очевидно, что ядро является линейным подпространством в L. Это следует из того, что ядро не пусто, так как содержит нулевой элемент и кроме того, если $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ и $\mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{o}$, то

$$\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha \mathrm{A}\mathbf{x} + \beta \mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{o}$$

<u>Определение.</u> Отображение, при котором различные векторы имеют различные образы называется **инъективным отображением** или **инъекцией**.



Примеры. 1) $A:(0,+\infty)\to\Re$, $A(x)=\ln x$ - инъекция

2) $A:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $A(x)=x^2$ - инъекция

3) $A:\Re\to\Re$, $A(x)=e^x$ - инъекция, но не сюрьекция, так как ни для какого отрицательного элемента из $\overline{L}$ не существует прообраза из L.

4) $A:\Re\to\Re^+=[0,+\infty)$, $A(x)=x^2$ - не является инъекцией так как, например $A(-1)=A(1)=1$

Рассмотрим основные свойства инъективных отображений:

Свойство 1. *Отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро – нулевое пространство.*

Доказательство. Предположим, что ядро отображения A ненулевое, т.е. $\dim \operatorname{Ker} A\geq 1$. Тогда, каждый вектор из $A(L)$ имеет бесконечно много прообразов, потому что если $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ и $(\mathbf{x}_0\neq 0)\in \operatorname{Ker} A$, то $A(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}$.

Верно и **обратное утверждение**: *если какой-нибудь вектор* $\mathbf{y}\in\overline{L}$ *имеет хотя бы два различных прообраза, то ядро отображения* A *содержит ненулевой вектор.*

В самом деле, пусть $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in L, \mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2$. Положим далее $A\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_2=\mathbf{y}$, тогда

$$A(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1-A\mathbf{x}_2=\mathbf{y}-\mathbf{y}=\mathbf{o}$$

и следовательно $\mathbf{z}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\neq\mathbf{o}$ ненулевой вектор в ядре.

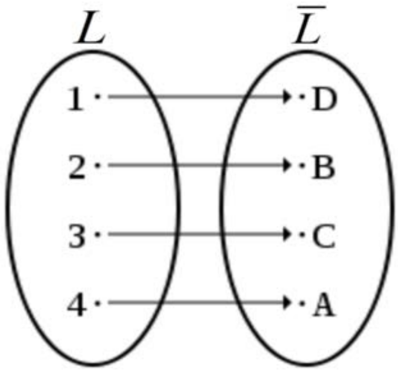
Таким образом, мы доказали, что инъективное отображение не может иметь ненулевое ядро. А в силу предыдущего замечания получаем что инъекция может иметь только нулевое ядро. Свойство доказано.

Свойство 2. *Если отображение инъективно, то линейно независимые векторы переходят в линейно независимые векторы*

Доказательство. От противного. Предположим, что утверждение неверно и образы линейно независимых векторов $\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_n$ линейно зависимы, т.е. $\alpha_1 A\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_n A\mathbf{x}_n=\mathbf{o}, \exists\alpha_i\neq 0$. Тогда $A(\alpha_1\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{x}_n)=\mathbf{o}$ и следовательно для инъективного отображения имеем $\alpha_1\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{x}_n=\mathbf{o}$ (так как ядро содержит только нулевой вектор) и следовательно $\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_n$ линейно зависимы.

Следствие. *Ранг инъективного отображения равен* n.

Определение. **Биективным отображением** или **биекцией** называется отображение, которое является одновременно и сюрьективным и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом, определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение называют ещё **взаимно-однозначным отображением**.



Пусть размерности линейных пространств L и $\overline{L}$, равны n и m соответственно ($\dim L = n$, $\dim \overline{L} = m$). Очевидно, ранг сюрьективного отображения равен m, а ранг инъективного равен n. Тогда, имеет место следующая теорема

<u>Теорема.</u> *Для того чтобы отображение было биективным необходимо и достаточно, чтобы размерности линейных пространств совпадали, т.е.* $n = m$.

Взаимно-однозначное линейное отображение называется **изоморфизмом.**

Если существует изоморфизм $L \to \overline{L}$, то линейные пространства L и $\overline{L}$ называются **изоморфными.**

<u>Примеры.</u> 1) Невырожденное линейное преобразование является биекцией и изоморфизмом.

2) $\mathrm{A}:\Re \to (0,+\infty)$, $\mathrm{A}(x) = e^x$ - биекция, но не изоморфизм, так как $\mathrm{A}(x) = e^x$ не является линейной функцией.

3) $\mathrm{A}:\Re \to \Re$, $\mathrm{A}(x) = x$ - биекция и изоморфизм, так как функция $\mathrm{A}(x) = x$ является линейной

4) $\mathrm{A}:\Re \to [-1,1]$, $\mathrm{A}(x) = \sin x$ - не является биекцией.

<u>Теорема (об изоморфизме линейных пространств).</u> *Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.* Это следует из теоремы о необходимом и достаточном условии биективности отображения.

Значение теоремы об изоморфизме линейных пространств в следующем. Линейные пространства могут состоять из чего угодно (векторов, столбцов, многочленов, функций, матриц и т.д.). Природа этих элементов роли не играет, когда изучаются свойства, связанные с линейными операциями. Все эти свойства у изоморфных пространств будут одинаковыми. Если мы условимся не различать между собой линейные пространства, то для каждой размерности найдётся только одно линейное пространство.

Матрицы линейных преобразований

Пусть в n-мерном линейном пространстве с базисом $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ задано линейное преобразование A. Тогда векторы $\mathrm{A}\mathbf{e}_1, \mathrm{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathrm{A}\mathbf{e}_n$ - также векторы этого пространства и их можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j \quad (1)$$

Тогда матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей линейного преобразования** A.

Если в пространстве L взять вектор $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$, то $\mathrm{A}\mathbf{x}\in L$, и кроме того

$$\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{A}\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij}\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{n} x_i'\mathbf{e}_i=\mathbf{x}',$$

где $x_i'=\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij}$

Эти равенства можно назвать линейным преобразованием в базисе $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}'$$

Итак, *любому линейному преобразованию определённому в пространстве* L *с базисом* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ *можно по правилу, определённому формулой* (1), *поставить в соответствие единственным образом некоторую матрицу*. Эта матрица определяется из условия преобразования базисных векторов (формула (1)). На самом деле верно и обратное утверждение: *каждой матрице* $\mathbf{A}$ *можно поставить в соответствие единственным образом некоторое линейное преобразование, определённое в пространстве* L *с базисом* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

Таким образом, *между линейными преобразованиями и квадратными матрицами существует взаимно однозначное соответствие.* Поэтому, на практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Пример. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+x_2, \\ x_2' &= x_2+x_3, \\ x_3' &= x_1+x_3 \end{aligned} \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим также матрицы линейных преобразований, рассмотренных ранее.

Пример. Рассмотрим преобразование подобия $\mathrm{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}=\mathbf{x}',\ \ \lambda\in\Re$, т.е.

$$\begin{cases} x_1'=\lambda x_1, \\ x_2'=\lambda x_2, \\ x_3'=\lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow \ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Пример. Растяжение плоскости L_2 в направлении вектора $\mathbf{e}_2$: $\mathrm{A}\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\lambda x_2\mathbf{e}_2=\mathbf{x}',\ \ \lambda\in\Re$. Имеем

$$\begin{cases} x_1'=x_1, \\ x_2'=\lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Данное преобразование является частным случаем преобразования, задаваемого матрицей

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

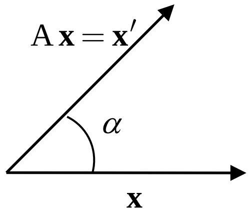
которое представляет собой совокупность двух растяжений (сжатий) плоскости в направлениях $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$

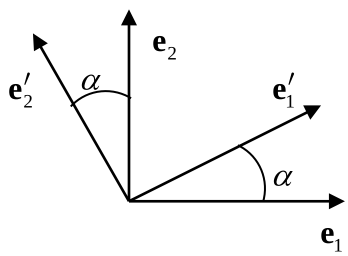
Преобразование, задаваемое матрицей

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

представляет собой совокупность трёх растяжений (сжатий) пространства отностительно направлений $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$.

Пример. Рассмотрим преобразование поворота.





$$\mathrm{A}\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1\cos\alpha+\mathbf{e}_2\sin\alpha,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2'=-\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\cos\alpha.$$

Тогда

$$\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathrm{A}\left(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2\right)=\mathrm{A}\left(x_1\mathbf{e}_1\right)+\mathrm{A}\left(x_2\mathbf{e}_2\right)=x_1\,\mathrm{A}\left(\mathbf{e}_1\right)+x_2\,\mathrm{A}\left(\mathbf{e}_2\right)=x_1\left(\mathbf{e}_1\cos\alpha+\mathbf{e}_2\sin\alpha\right)+$$
$$+x_2\left(-\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\cos\alpha\right)=\left(x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha\right)\mathbf{e}_1+\left(x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha\right)\mathbf{e}_2.$$

Следовательно

$$\begin{cases}x_1'=x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha,\\ x_2'=x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Пример. В качестве ещё одного примера рассмотрим сдвиг плоскости L_2 в направлении вектора $\mathbf{e}_1$: $\mathrm{A}\mathbf{x}=\left(x_1+kx_2\right)\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2,\ \ \lambda\in\Re$.

$$\begin{cases}x_1'=x_1+kx_2,\\ x_2'=x_2\end{cases}\Rightarrow\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Пусть в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $x_1,\ldots,x_n$, т.е.

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\mathbf{e}_j \qquad (1)$$

Рассмотрим вопрос о преобразовании координат вектора $\mathbf{x}$ при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$. Для этого вначале надо задать правило перехода от старого базиса к новому. Разложим вектора нового базиса по старому базису.

$$\mathbf{e}_i'=\sum_{k=1}^{3}\gamma_{ki}\mathbf{e}_k \qquad (2)$$

где γ_{ik} координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Совокупность чисел γ_{ik} образуют квадратную матрицу порядка $n\times n$, которая называется **матрицей перехода от старого базиса к новому** и обозначается $\mathbf{\Gamma}=\left(\gamma_{ij}\right)$. Для обратного перехода имеем

$$\mathbf{e}_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{kj}'\mathbf{e}_k'=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{kj}'\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\gamma_{kj}'\mathbf{e}_i\ \Rightarrow\ \mathbf{\Gamma\Gamma}'=\mathbf{E}\ \Rightarrow\ \mathbf{\Gamma}'=\mathbf{\Gamma}^{-1}. \qquad (3)$$

Матрица $\mathbf{\Gamma}'$ называется **матрицей перехода от нового базиса к старому.**

Выясним как связаны эти матрицы с векторами старого и нового базиса. Имеем

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{k=1}^{n}\gamma'_{kj}\mathbf{e}'_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\gamma'_{kj}\mathbf{e}'_k=\sum_{k=1}^{n}x'_k\mathbf{e}'_k \;\;\Rightarrow\;\; x'_k=\gamma'_{kj}x_j. \qquad (4)$$

Соответственно, в обратную сторону получим

$$x_k=\gamma_{kj}x'_j \qquad (5)$$

Вывод: координаты векторов и базисные векторы преобразуются по взаимно обратным законам.

Формулы (2) - (7) удобно записывать в матричной форме. Для этого совокупности базисных векторов надо представить в виде строк $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$, $\mathbf{e}'=(\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n)$, а координаты вектора в этих базисах в виде столбцов $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$ и $\mathbf{x}'=(x'_1,\dots,x'_n)^T$. Тогда имеем соответственно

$$\mathbf{e}'=\mathbf{e}\boldsymbol{\Gamma},\quad \mathbf{e}=\mathbf{e}'\boldsymbol{\Gamma}^{-1},\quad \mathbf{x}=\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}',\quad \mathbf{x}'=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{x}. \qquad (6)$$

В ортонормированном базисе эти формулы имеют более простой вид. Домножим скалярно каждое из равенств (2) на $\mathbf{e}_j$

$$(\mathbf{e}'_i,\mathbf{e}_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ki}\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j\right)=\sum_{k=1}^{3}\gamma_{ki}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=\sum_{k=1}^{3}\delta_{jk}\gamma_{ki}=\gamma_{ji} \quad (7)$$

Домножив скалярно каждое из равенств (3) на $\mathbf{e}'_i$, получим

$$(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}'_i)=\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma'_{kj}\mathbf{e}'_k,\mathbf{e}'_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\gamma'_{kj}(\mathbf{e}'_k,\mathbf{e}'_i)=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\gamma'_{kj}=\gamma'_{ij} \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8) находим, что для ортонормированного базиса

$$\gamma_{ji}=\gamma'_{ij} \;\text{ или }\; \boldsymbol{\Gamma}'=\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{T}}$$

Кроме того, $\boldsymbol{\Gamma}'=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$, поэтому матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\Gamma}'$ являются ортогональными (Ортогональные матрицы обычно обозначаются буквой $\mathbf{Q}$).

Формулы (6) в ортонормированном базисе запишутся так

$$\mathbf{e}'=\mathbf{e}\boldsymbol{\Gamma},\quad \mathbf{e}=\mathbf{e}'\boldsymbol{\Gamma}^{T},\quad \mathbf{x}=\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}',\quad \mathbf{x}'=\boldsymbol{\Gamma}^{T}\mathbf{x}.$$

Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису

Рассмотрим линейное преобразование A и два базиса в линейном пространстве: $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ и $\mathbf{e}'=(\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n)$. Пусть матрица $\boldsymbol{\Gamma}=(\gamma_{ij})$ задает формулы перехода от старого базиса $\mathbf{e}$ к новому базису $\mathbf{e}'$. Если в первом из этих базисов выбранное линейное преобразование задается матрицей $\mathbf{A}$, а во втором – матрицей $\mathbf{A}'$, то можно найти связь между этими матрицами, а именно:

$$\mathbf{A}'=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma} \qquad (1)$$

Действительно, компоненты любого вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах связаны соотношенем $\mathbf{x}=\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}'$, где $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$ столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$, $\mathbf{x}'=(x'_1,\dots,x'_n)^T$ столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}'$$

С другой стороны, векторы $\mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}'\mathbf{x}'$ тоже связаны матрицей $\boldsymbol{\Gamma}=(\gamma_{ij})$ как результаты применения одного и того же линейного преобразования к одному и тому же вектору в разных базисах, т.е.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}'\mathbf{x}'$$

откуда следует, что $\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}'=\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}$. Умножая обе части этого равенства слева на $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$, получим формулу (1).

Действия с линейными преобразованиями

<u>Определение.</u> Суммой линейных преобразований A и B определённых на некотором линейном пространстве L называется преобразование $\mathrm{C}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ определяемое равенством

$$\mathrm{C}\mathbf{x}=\mathrm{A}\mathbf{x}+\mathrm{B}\mathbf{x}\quad\forall\mathbf{x}\in L$$

при этом нетрудно убедится, что матрица преобразования C определяется по формуле

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Например, тождественное преобрзование E плоскости L_2 можно представить как сумму двух проекций

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$

где A - проекция на ось Ox, B - проекция на ось Oy

<u>Определение.</u> Произведением линейного преобразования A **на действительное число** λ называется линейное преобразование B сопоставляющее вектору $\mathbf{x}\in L$ вектор $\alpha\mathrm{A}\mathbf{x}\in L$

Соответственно, матрица этого преобразования определяется равенством

$$b_{ij}=\lambda a_{ij}$$

<u>Замечание.</u> Введённые таким образом операции сложения линейных преобразований и умножения их на действительное число удовлетворяют аксиомам линейности (так как действия с линейными преобразованиями сводятся к действиям с векторами для которых эти свойства справедливы). Поэтому, *множество линейных преобразований определённых на линейном пространстве* L *само является линейным пространством.*

<u>Определение:</u> Если вектор $\mathbf{x}$ переводится в вектор $\mathbf{y}$ линейным преобразованием с матрицей $\mathbf{A}$, а вектор $\mathbf{y}$ в вектор $\mathbf{z}$ линейным преобразованием с матрицей $\mathbf{B}$, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{z}$ (оно называется **произведением составляющих преобразований**).

$$\mathbf{z}=\mathrm{C}\mathbf{x}=\mathrm{B}(\mathrm{A}\mathbf{x}),\quad \mathrm{C}=\mathrm{BA}$$

при этом матрица данного линейного преобразования находится по формуле $\mathbf{C}=\mathbf{BA}$

<u>Пример.</u> Задано линейное преобразование A, переводящее вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$ и линейное преобразование B, переводящее вектор $\mathbf{y}$ в вектор $\mathbf{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\mathbf{x}$ в вектор .

$$\begin{cases}y_1=2x_1-x_2+5x_3\\y_2=x_1+4x_2-x_3\\y_3=3x_1-5x_2+2x_3\end{cases}\quad\begin{cases}z_1=y_1+4y_2+3y_3\\z_2=5y_1-y_2-y_3\\z_3=3y_1+6y_2+7y_3\end{cases}$$

$$\mathbf{x}\xrightarrow{A}\mathbf{y}\xrightarrow{B}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}\xrightarrow{C}\mathbf{z}$$

$$\mathrm{C}=\mathrm{B}A$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&4&-1\\3&-5&2\end{pmatrix}\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&4&3\\5&-1&-1\\3&6&7\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2+4+9&-1+16-15&5-4+6\\10-1-3&-5-4+5&25+1-2\\6+6+21&-3+24-35&15-6+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&0&7\\6&-4&24\\33&-14&23\end{pmatrix}.$$

$$\text{Т.е. } \begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$$

Произведение преобразований обладает следующими основными свойствами:

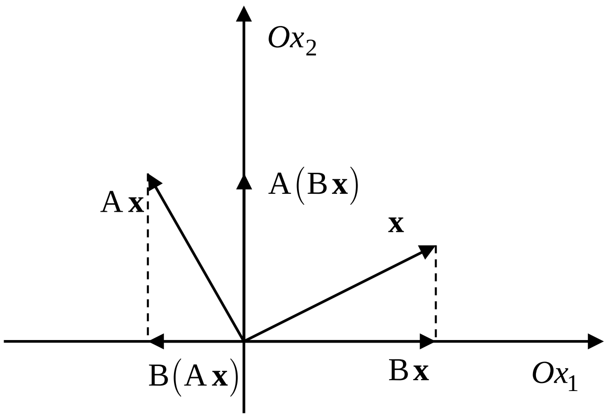
1) $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$

2) $\mathrm{AE} = \mathrm{EA}$, где E - тождественное преобразование

3) $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

Все эти свойства основаны на свойствах матриц. Последнее свойство проиллюстрируем следующим примером:

Пусть A - поворот плоскости на угол 90°, B - проектирование векторов на ось Ox_1. Лпегко видеть, что вектор $\mathrm{BA}\mathbf{x}$ напрвлен по оси Ox_1, а вектор $\mathrm{AB}\mathbf{x}$ по оси Ox_2



<u>Определение.</u> Если $\det \mathbf{A} = 0$, то **преобразование называется вырожденным**, т.е., например, плоскость преобразуется не в целую плоскость, а в прямую. Если $\det \mathbf{A} \neq 0$ то **преобразование невырожденное.** Для невырожденного перобразования можно найти обратное. (обозначается A^{-1}), удовлетворяющее условию

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$$

где E - тождественное преобразование.

Например, пусть A - поворот плоскости на угол α, тогда обратным преобразование будет поворот на угол $-\alpha$. Матрица ткакого преобразования будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Упражнение.</u> Рассуждая аналогичным образом, постройте обратные матрицы для следующих преобразований:

1) Преобразование подобия
2) Растяжение плоскости в направлении $\mathbf{e}_2$
3) Сдвиг плоскости в направлении $\mathbf{e}_1$

В общем случае матрица обратно преобразования может быть найдена по формуле Крамера

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det \mathbf{A}} M_{ji}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если* A *невырожденное преобразование, то оно имеет обратное преобразование и притом только одно.*

Доказательство теоремы следует из теоремы о существовании и единственности обратной матрицы.

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования

<u>Определение:</u> Пусть L – заданное n - мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\mathbf{x}\in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования A, если существует такое действительное число λ, что выполняется равенство:

$$\mathrm{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}. \qquad (1)$$

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования A, соответствующего вектору $\mathbf{x}$.

Следует отметить, что если $\mathbf{x}$ - собственный вектор преобразования A, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно,

$$\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathrm{A}\mathbf{x}=\alpha\lambda\mathbf{x}=\lambda(\alpha\mathbf{x}).$$

Если учесть, что векторы имеют одно начало, то все коллинеарные векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Рассмотрим следующие **примеры**:

1) Преобразование подобия $\mathrm{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Здесь любой вектор $\mathbf{x}$ будет собственным с собственным значением λ

2) Для преобразования растядения-сжатия плоскости в направлении вектора $\mathbf{e}_2$ собственными вектора будут векторы лежащие в направлении осей Ox_1 и Ox_2

3) Поворот плоскости на угол α собственных векторов не имеет, за исключением случая, когда $\alpha=\pi n$. В этом случае, каждый вектор является собственным с собственным значением $\lambda=(-1)^n$.

4) Для преобразования сдвига плоскости в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ собственными векторами будут вектора направленные вдоль осей Ox_1 и Ox_2

5) Собственными векторами преобразования $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}'=\lambda_1x_1\mathbf{e}_1+\lambda_2x_2\mathbf{e}_2+\lambda_3x_3\mathbf{e}_3$ служат вектора направленные вдоль осей Ox_1, Ox_2 и Ox_3.

Пусть линейное преобразование A в некотором базисе $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ имеет матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x}=0 \ (2)$$

где $\mathbf{E}$ - матрица тождественного преобразования, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ - столбец координат вектора $\mathbf{x}$.

Уравнение (2) является системой линейных алгебраических уравнений и в подробной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=0 \qquad (2)$$

Так как (2) линейная однородная система, то она имеет нетривиальные решения, если определитель равен нулю. Поэтому собственные значения линейного преобразования $\mathbf{A}$ можно найти как корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = 0 \qquad (3)$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть- **характеристическим многочленом** линейного преобразования A. Если раскрыть определитель получим уравнение n-й степени относительно λ

$$\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} I_{n-1}\lambda + (-1)^n I_n = 0$$

Коэффициенты этого уравнения $I_1,\ldots,I_n$ называются **инвариантами**, потому что как будет показано далее они не зависят от выбора базиса. Докажем следующее предложение.

Предложение. *Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть дано линейное преобразование A, которое имеет матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$. Тогда

$$\mathbf{A}' = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} \Rightarrow \det\mathbf{A}' = \det\mathbf{\Gamma}^{-1}\det\mathbf{A}\det\mathbf{\Gamma},$$

Но $\det\mathbf{\Gamma}^{-1}\det\mathbf{\Gamma} = \det\mathbf{E} = 1$ следовательно, $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}'$. Таким образом, $\det\mathbf{A}$ не зависит от выбора базиса. Значит, и $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ не изменяется при переходе к новому базису.

Свойства собственных чисел и собственных векторов:

1) *Если матрица* A *линейного преобразования является* ***симметрической*** *(т.е.* $a_{ij} = a_{ji}$*), то все корни характеристического уравнения* (3) *– действительные числа.*
2) *Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование* A *не имеет собственных векторов.* (**Следует из определения**)
3) *Матрица преобразования* A *в базисе* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ *является диогональной тогда и только тогда, когда, все базисные векторы собственные. В этом случае диогональные элементы матрицы* $\mathbf{A}$ *- собственные значения*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть произвольный вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ из собственных векторов имеет разложение

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

а его образ $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ соответственно

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i$$

Тогда, в базисе состоящем из собственных векторов

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i = \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i\ ,$$

а это означает, что матрица линейного преобразования имеет вид (4).

И обратно, если в некотором базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ преобразование имеет матрицу вида (4) тогда

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\lambda_j\mathbf{e}_j = \lambda_i\mathbf{e}_i$$

Следовательно, вектор $\mathbf{e}_i$ собственный.

4) *Если собственные значения преобразования* A *различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.*

Докажем это утверждение по индукции. В самом деле, пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - различные собственные значения. По предположению индукции соответствующие им собственные вектора $\mathbf{x}'_i$ линейно независимы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}'_i=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_i=0,\forall i$$

Пусть теперь $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$ - различные собственные значения и $\mathbf{x}'_i, i=\overline{1,n}$ - собственные вектора. Надо доказать, что они линейно независимы. Предположим, что это неверно, т.е. эти вектора линейно зависимы, тогда

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\mathbf{x}'_i=0,\;\; \exists\alpha_i\neq 0 \qquad (5)$$

Пусть для определённости $\alpha_{n+1}\neq 0$, тогда

$$\mathbf{x}'_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}\mathbf{x}'_i \qquad (6)$$

Подействуем на (5) оператором A, После чего подставим в полученное выражение (6) получим

$$\mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\mathbf{x}'_i\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i A\left(\mathbf{x}'_i\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\lambda_i\mathbf{x}'_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\lambda_i-\lambda_{n+1}\right)\mathbf{x}'_i=0.$$

По предположению индукции $\mathbf{x}'_1,\ldots,\mathbf{x}'_n$ линейно независимы, а все собственные значения различны, т.е. $\lambda_i-\lambda_{n+1}\neq 0\;\forall i=\overline{1,n}$. Следовательно все $\alpha_i=0$ и в силу (6) вектор $\mathbf{x}'_{n+1}=\mathbf{o}$, т.е. не является собственным. Мы пришли к противоречию следовательно система собственных векторов $\mathbf{x}'_1,\ldots,\mathbf{x}'_{n+1}$ линейно независима, что и требовалось доказать.

Рассмотрим **частный случай**. Пусть A – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}; \qquad \begin{cases}x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$$

в некотором базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$.

Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $\mathrm{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$.

$$\begin{cases}x'_1=\lambda x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ x'_2=\lambda x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0\end{cases} \quad (4)$$

Т.к. собственный вектор $\mathbf{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}= \qquad (5)$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

Полученное квадратное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования** A. Как видно, инварианты этого уравнения равны

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Первый инвариант I_1 называется следом матрицы $\mathbf{A}$ (обозначается $\mathrm{Sp}\mathbf{A}$), а I_2 есть определитель матрицы $\mathbf{A}$.

Используя терему Виета для квадратного уравнения, получим

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2$$

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений (4) получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем линейное преобразование в виде:

$$x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2$$
$$x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 1;$

Для корня $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: $\left(C, \frac{C}{2}\right)$ где C - параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: $(C, -C)$ где C - параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\mathbf{u}_1 = C(\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2); \quad \mathbf{u}_2 = C(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2).$$

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде:

$$x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \qquad \begin{cases}(6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0\\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0\end{cases}$$
$$x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda)+16 = -12-6\lambda+2\lambda+\lambda^2+16=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1=\lambda_2=2$;

Получаем: $\begin{cases}(6-2)x_1-4x_2=0\\ 4x_1-4x_2=0\end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1-x_2=0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: (C,C) где C - параметр.

Собственный вектор можно записать: $\mathbf{u}=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)C$.

Рассмотрим другой **<u>частный случай</u>**. Если $\mathbf{x}$ - собственный вектор линейного преобразования A, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то

$$x_1'=\lambda x_1; \quad x_2'=\lambda x_2; \quad x_3'=\lambda x_3,$$

где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования A.

Если матрица линейного преобразования A имеет вид:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases}\lambda x_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \lambda x_2 = a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \lambda x_3 = a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ, которое имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0$$

где инварианты I_1, I_2 и I_3 равны

$$I_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}, \quad I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \quad I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Если λ_1, λ_2 и λ_1 - корни характеристического уравнения, то

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \quad I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3, \quad I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, матрица линейного преобразования $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases}x_1'=\lambda x_1=1\cdot x_1+1\cdot x_2+3\cdot x_3\\x_2'=\lambda x_2=1\cdot x_1+5\cdot x_2+1\cdot x_3\\x_3'=\lambda x_3=3\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\big((5-\lambda)(1-\lambda)-1\big)-(1-\lambda-3)+3(1-15+3\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right)+2+\lambda-42+9\lambda=0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right)+10\lambda-40=0$$

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

$$-\lambda^3+9\lambda^2-2\lambda^2-36=0$$

$$-\lambda^2(\lambda+2)+9\left(\lambda^2-4\right)=0$$

$$(\lambda+2)\left(\lambda^2-9\lambda+18\right)=0$$

Собственные значения: $\lambda_1=-2, \lambda_2=3, \lambda_3=6$;

1) Для $\lambda_1=-2$: $\begin{cases}(1+2)x_1+x_2+3x_3=0\\x_1+7x_2+x_3=0\\3x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+7x_2+x_3=0\\3x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$

Если принять $x_1=1$, то $\begin{cases}7x_2+x_3=-1\\x_2+3x_3=-3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2=0, x_3=-1$;

Собственные векторы: $\mathbf{u}_1=(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)C$.

2) Для $\lambda_2=3$: $\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\3x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\3x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$

Если принять $x_1=1$, то $\begin{cases}2x_2+x_3=-1\\x_2-2x_3=-3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2=-1, x_3=1$;

Собственные векторы: $\mathbf{u}_2=(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)C$

3) Для $\lambda_3=6$: $\begin{cases}-5x_1+x_2+3x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\3x_1+x_2-5x_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\3x_1+x_2-5x_3=0\end{cases}$

Если принять $x_1=1$, то $\begin{cases}-x_2+x_3=-1\\x_2-5x_3=-3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2=2, x_3=1$;

Собственные векторы: $\mathbf{u}_3=(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)C$

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, матрица линейного преобразования $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$-(3+\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-2\big)+2(4-2\lambda-2)-4(2-1+\lambda)=0$$

$$-(3+\lambda)\left(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-2\right)+2(2-2\lambda)-4(1+\lambda)=0$$

$$-(3+\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right)+4-4\lambda-4-4\lambda=0$$

$$-3\lambda^2+9\lambda-\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda=0$$

$$-\lambda^3+\lambda=0$$

$$\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-1$$

Для $\lambda_1=0$: $\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x_1+x_2=-2x_3 \\ x_1+x_2=-2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3=1$, получаем $x_1=0, x_2=-2$

Собственные векторы: $\mathbf{u}_1=(-2\cdot\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)C$, где C – параметр.

Для самостоятельного решения: Аналогично найти $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$ для λ_2 и λ_3.

Матрица линейного отображения

Рассмотрим линейные пространства L и $\overline{L}$, размерности n и m соответственно ($\dim L=n$, $\dim\overline{L}=m$) и линейное отображение $\mathrm{A}: L\to\overline{L}$.

Пусть $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ базис в L, а $\mathbf{f}=(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$ базис в $\overline{L}$, тогда каждый из образов базисных векторов $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ можно разложить по базису $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m$

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\mathbf{f}_i$$

Совокупность чисел a_{ij} называется **матрицей линейного отображения** A.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}$. Обозначим его координаты в пространстве L через $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$, тогда $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\mathbf{e}_j$. Его образ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m$

$$\mathrm{A}\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\,\mathrm{A}\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ja_{ij}\mathbf{f}_i=\sum_{i=1}^{m}y_i\mathbf{f}_i$$

где введено обозначение

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \text{ или, в матричной форме } \mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)^T$ - координаты образа вектора $\mathbf{x}$.

<u>Замечание.</u> Матрица линейного отображения однозначно определена, т.е., если для любого вектора $\mathbf{x}$ координатный столбец образа в базисе $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m$ есть $\mathbf{y}=\mathbf{B}\mathbf{x}$, то тогда $\mathbf{B}=\mathbf{A}$. Действительно, умножим матрицу $\mathbf{B}$ на координатный столбец вектора $\mathbf{e}_j$, т.е. на j-й столбец единичной матрицы. Это произведение равно j- му столбцу матрицы $\mathbf{B}$, а это и есть координатный столбец $\mathrm{A}\mathbf{e}_j$.

Данное замечание означает, что при выбранных в пространствах L и $\overline{L}$ базисах каждая матрица размера $m\times n$ служит матрицей некоторого линейного отображения $\mathrm{A}: L\to\overline{L}$.

Имеет место следующие **утверждения:**

1) *Ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения* $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A}=\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}$.

2) *Сумма ранга отображения и размерности его ядра равна размерности отображаемого пространства* $\dim L=\mathrm{Rg}\,\mathrm{A}+\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$

В самом деле, пусть $j_1,\ldots j_r$ - номера базисных столбцов матрицы линейного отображения A. Тогда векторы $\mathrm{A}\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathrm{A}\mathbf{e}_{j_r}$ линейно независимы и каждый вектор $\mathrm{A}\mathbf{e}_k$, $k=1,\ldots,n$ по ним раскладывается. Следовательно, можно разложить образ $\mathrm{A}\mathbf{x}$ любого вектора только по $\mathrm{A}\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathrm{A}\mathbf{e}_{j_r}$. Таким образом, эти векторы образуют базис в $\mathrm{Im}\mathrm{A}$ и их число равно рангу A. **Утверждение 1 доказано.**

Далее, согласно формуле (1) ядро отображения определяется однородной системой линейных уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{o}$ с n неизвестными. В силу предыдущего утверждения ранг матрицы системы равен рангу отображения $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A}=r$. Тогда фундаментальная система решений этой системы состоит из $n-r$ решений, которые являются координатными столбцами векторов, составляющих базис в ядре. **Утверждение 2 доказано.**

<u>Следствие.</u> *Из доказанных утверждений следует, что равенство $r=n$ необходимо и достаточно, чтобы отображение имело нулевое ядро, т.е. было инъективным.*

Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов

Рассмотрим линейное отображение $\mathrm{A}: L\to\overline{L}$, которое в базисах $\{\mathbf{e}_j\}$ и $\{\mathbf{f}_i\}$ определяется матрицей $\mathbf{A}$. Пусть заданы матрица перехода $\mathbf{\Gamma}_1=\left(\gamma_{ij}^{(1)}\right)$ и $\mathbf{\Gamma}_2=\left(\gamma_{ij}^{(2)}\right)$ от старых базисов $\{\mathbf{e}_j\}$ и $\{\mathbf{f}_i\}$ к новым $\{\mathbf{e}'_j\}$ и $\{\mathbf{f}'_i\}$. В новых базисах отображение A определяется матрицей $\mathbf{A}'$. Найдём связь между матрицами линейного отображения в старом и новом базисах.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}\in L$ и его образ $\mathbf{y}\in\overline{L}$. Обозначим координатные столбцы вектора $\mathbf{x}$ в базисах $\{\mathbf{e}_j\}$ и $\{\mathbf{e}'_j\}$ через $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$, а координатные столбцы его образа через $\{y_j\}$ и $\{y'_j\}$ в базисах $\{\mathbf{f}'_i\}$ и $\{\mathbf{f}'_i\}$ соответственно. Тогда, как было получено ранее (см. линейные преобразования)

$$x_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}^{(1)}x'_k,\quad y_i=\sum_{l=1}^{m}\gamma_{il}^{(2)}y'_l$$

или в матричной форме $\mathbf{x}=\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}',\ \ \mathbf{y}=\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{y}'$

Подставив эти выражения в формулу (1) из предыдущего пункта получим

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}\ \Rightarrow\ \mathbf{\Gamma}_2\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}'\ \Rightarrow\ \mathbf{y}'=\mathbf{\Gamma}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}'=\mathbf{A}'\mathbf{x}'$$

Следовательно, матрицы линейного отображения в старом и новом базисе связаны соотношением

$$\mathbf{A}'=\mathbf{\Gamma}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_1$$

Канонический вид матрицы линейного отображения

Рассмотрим следующую задачу: построить базис таким образом, чтобы матрица линейного отображения имела наиболее простой вид. Имеет место следующая теорема

Теорема. *Для любого линейного отображения* $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ *ранга* r *можно выбрать базисы в* L *и* $\overline{L}$*, что оно будет иметь матрицу*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{E}_r$ *- единичная подматрица порядка* r*, остальные элементы, если они есть, равны нулю*

Доказательство. Поместим векторы $\mathbf{e}_{r+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ базиса пространства L в ядро отображения A. Это можно сделать так как $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = n-r$, а векторы $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r$ выберем произвольно. В силу такого выбора при любом базисе в $\overline{L}$ последние $n-r$ столбцов будут нулевые. Так как $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r$, первые r столбцов должны быть линейно независимыми, поэтому столбцы $\mathrm{A}\mathbf{e}_1,\ldots,\mathrm{A}\mathbf{e}_r$ линейно независимы. Тогда их можно принять за первые r базисных векторов в пространстве $\overline{L}$, а остальные $\mathbf{f}_{r+1},\ldots,\mathbf{f}_m$ выберем произвольно. При таком выборе первые r столбцов матрицы $\mathbf{A}$ будут первыми единичными столбцами единичной матрицы порядка m. Это и есть вид (1). **Теорема доказана.**

Действия с отображениями

Рассмотрим два линейных отображения $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ и $\mathrm{B}: L \to \overline{L}$. **Суммой этих двух отображений** называется отображение $\mathbf{C}: L \to \overline{L}$ определяемое равенством

$$\mathrm{C}\mathbf{x} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in L$$

Произведение линейного отображения $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ на число α определяется как отображение D, сопоставляющее вектору $\mathbf{x} \in L$ вектор $\alpha \mathrm{A}\mathbf{x} \in \overline{L}$

Нетрудно проверить, что сумма линейных отображений и произведение линейного отображения на число есть линейные отображения и их матрицы имеют вид

$$\mathbf{C} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \quad \mathbf{D} = \left(\alpha a_{ij}\right)$$

Нетрудно теперь проверить, что множество линейных отображений также является линейным пространством. Следовательно, так как существует взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями и прямоугольными матрицами, а также между линейными преобразованиями и квадратными матрицами.

1) *пространство линейных отображений* $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ *и пространство матриц размера* $m \times n$ *изоморфны*

2) *пространство линейных преобразований* $\mathrm{A}: L \to L, \dim L = n$ *и пространство квадратных матриц размера* $n \times n$ *изоморфны*

Рассмотрим теперь три линейных пространства L , $\overline{L}$ *и* $\tilde{L}$. Результат последовательного выполнения отображений $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ и $\mathrm{B}: \overline{L} \to \tilde{L}$ называется произведением отображений и обозначается $\mathrm{BA} = \mathrm{B}(\mathrm{A}x): L \to \tilde{L}$

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{f}_j\}$ и $\{\mathbf{g}_k\}$ базисы в пространствах L , $\overline{L}$ *и* $\tilde{L}$. Отображение $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ имеет матицу $\mathbf{A}$, а отображение $\mathrm{B}: \overline{L} \to \tilde{L}$ имеет матрицу $\mathbf{B}$. Тогда отображение $\mathrm{BA}: L \to \tilde{L}$ имеет матрицу $\mathbf{BA}$.

В самом деле, обозначим координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$, $\mathrm{A}\mathbf{x}$ и $\mathrm{B}(\mathrm{A}\mathbf{x})$ через $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m)^T$ и $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_l)^T$. Тогда

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{By} = \mathbf{BAx}$$

Пусть теперь дано отображение $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$. Линейное отображение $\mathrm{B}: \overline{L} \to L$ называется **обратным** к A (обозначается $\mathrm{A}^{-1}: \overline{L} \to L$) если

$$\mathrm{BA} = \mathrm{E} \quad \text{и} \quad \mathrm{AB} = \overline{\mathrm{E}}$$

где E и $\overline{\mathrm{E}}$ - тождественные преобразования пространств L и $\overline{L}$. Иначе говоря, $\forall \mathbf{x} \in L$ и $\forall \mathbf{y} \in \overline{L}$ должно быть

$$\mathrm{B}(\mathrm{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \mathrm{A}(\mathrm{B}\mathbf{y}) = \mathbf{y}. \qquad (1)$$

Предложение. *Линейное отображение имеет обратное тогда и только тогда, когда оно изоморфизм.*

В самом деле, если $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ - изоморфизм, то его матрица $\mathbf{A}$ является квадратной и невырожденной и поэтому существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, соответствующая отображению $\mathrm{B}: \overline{L} \to L$ удовлетворяющему условиям (1) и потому являющемуся обратным к A.

И обратно, если $\mathrm{A}: L \to \overline{L}$ - не изоморфизм, то либо $r < \mathrm{m}$, либо $r < n$, где r - это ранг отображения A. В первом случае в $\overline{L}$ найдётся вектор $\mathbf{u}$ не принадлежащий $\mathrm{A}(L)$. В случае, если существует обратное отображение, то мы приходим к противоречию с (1) так как

$$\mathbf{u} = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u}\right) \in A(L)$$

Во втором случае существует вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{o}$ принадлежащий ядру отображения A. Если существует обратное отображение A^{-1}, то мы опять приходим к противоречию:

$$\mathbf{z} = \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{A}\mathbf{z}) = \mathrm{A}^{-1}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}.$$

Предложение доказано.

Линейные преобразования евклидовых пространств

Всё сказанное ранее о линейных преобразованиях линейных пространств остаётся в силе и для евклидовых пространств. С введением скалярного произведения линейные преобразования приобретают новые свойства, подобно тому, как векторы приобретают длину.

Определение. Линейное преобразование A^* евклидова пространства называется **сопряжённым** к преобразованию A, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеет место равенство

$$(\mathrm{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{x}, \mathrm{A}^*\mathbf{y}\right) \qquad (1)$$

Допустим преобразование A имеет сопряжённое A^*. Обозначим матрицы этих преобразований через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ в некотором базисе $\mathbf{e}$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$(\mathbf{Ax})^T \mathbf{Gy} = \mathbf{x}^T \mathbf{GA}^* \mathbf{y}$$

где $\mathbf{G}$ - матрица Грама.

Выполнив транспонирование, получим

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Gy} = \mathbf{x}^T \mathbf{GA}^* \mathbf{y}$$

Тогда

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} = \mathbf{GA}^* \qquad (2)$$

Итак, матрицы преобразований A и A^* связаны соотношением (2). В частности если базис ортонормированный, то

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^* \qquad (3)$$

Так как каждую матрицу можно транспонировать и операция транспонирования осуществляется единственным образом, то из последнего равенства следует, что *каждое линейное преобразование евклидова пространства имеет единственное сопряжённое преобразование*.

Определение. Линейное преобразование A евклидового пространства называется **самосопряжённым**, если $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$. Это равносильно тому, что

$$(\mathrm{A}\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathrm{A}\mathbf{y}) \qquad (4)$$

Из формулы (3) следует, что $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$, т.е *матрица самосопряжённого преобразования в ортонормированном базисе симметрична*.

Собственные значения и собственные подпространства самосопряжённых преобразований обладают рядом свойств, которые мы приведём здесь в виде теорем.

Теорема 1. *Все корни характеристического многочлена самосопряжённого преобразования вещественны.*

Теорема 2. *Собственные подпространства самосопряжённого преобразования попарно ортогональны.*

Теорема 3. *Пусть* A *- самосопряжённое преобразование евклидова пространства* E. *Тогда в* E *существует ортонормированный базис из собственных векторов в* A.

Определение. Два евклидовых пространства E и $\overline{E}$ называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $\mathrm{A}:E\to\overline{E}$, при котором

$$(\mathrm{A}\mathbf{x},\mathrm{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (5)$$

для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E

Таким образом, термин «изоморфизм» имеет различные значения взависимости от контекста. Если речь идёт о евклидовых пространствах, то при изоморфизме помимо линейности требуется сохранение скалярного произведения.

Само собой разумеется, что *два евклидова пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны*.

Отсюда в частности следует, что *произвольное отображение евклидова пространства в евклидово пространство той же размерности является изоморфизмом, если оно сохраняет скалярное произведение*.

Определение. Преобразование A евклидового пространства E называется **ортогональным (автоморфизмом)**, если оно сохраняет скалярное произведение.

Замечание. Из определения изоморфизма следует, что ортогональное преобразование является изоморфизмом E на себя.

Рассмотрим основные свойства ортогональных преобразований:

1. *Преобразование ортогонально тогда и только тогда, когда сопряжённое преобразование является обратным к нему*

Доказательство. Исходя из предыдущего замечания и формулы (5) имеем

$$(\mathrm{A}\mathbf{x},\mathrm{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathrm{A}^*\mathrm{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\Rightarrow(\mathbf{x},\mathrm{A}^*\mathrm{A}\mathbf{y}-\mathbf{y})=0$$

Это значит, что вектор $\mathrm{A}^*\mathrm{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}$ ортогонален любому вектору из E и следовательно, является нулевым, т.е.

$$\mathrm{A}^*\mathrm{A}\mathbf{y}=\mathbf{y}$$

Так как последнее равенство выполнено для любых $\overline{y}$, то преобразование $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ является тождественным, и поэтому $\mathrm{A}^*=\mathrm{A}^{-1}$. Само собой, из последнего равенства также можно получить (5)

2. *Преобразование ортогонально тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является ортогональной.*

Доказательство. Следует из формулы (3) и предыдущего утверждения

3. *Для двух ортонормированных базисов* $\mathbf{e}$ *и* $\mathbf{f}$ *найдётся единственное ортогональное преобразование* A, *для которого* $\mathrm{A}\mathbf{e}_i=\mathbf{f}_i$

Доказательство. Преобразование переводящее $\mathbf{e}$ в $\mathbf{f}$ существует и единственно. Его матрица в базисе $\mathbf{e}$ состоит из координатных столбцов векторов $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$ в базисе $\mathbf{e}$. Преобразование является ортогональным, так как его матрица в ортонормированном базисе ортогональна (она является матрицей перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{f}$)

4. *Собственные значения ортогонального преобразования по абсолютной величине равны единице.*

Доказательство. Для любого собственного вектора $\overline{x}$ имеем

$$\begin{cases} (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \lambda^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$