

**Л.В. Агамиров**

**Статистический анализ результатов  
испытаний**

**Справочное пособие  
для научных работников, инженеров и студентов  
технических вузов**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Оглавление

1. Общие положения.....	5
2. Статистическая обработка и планирование прямых механических испытаний и результатов измерений .....	6
2.1. Основные положения .....	6
2.2. Распределения характеристик механических свойств.....	11
2.3. Законы распределения вероятностей ХМС.....	14
2.3.1. Нормальное распределение .....	15
2.3.2. Логарифмически нормальное распределение .....	17
2.3.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко .....	18
2.4. Непараметрические оценки характеристик .....	19
2.5. Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод максимального правдоподобия.....	22
2.5.1. Логарифмически нормальное распределение .....	24
2.5.2. Нормальное распределение .....	28
2.5.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко .....	29
2.6. Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод наименьших квадратов .....	31
2.7. Интервальные оценки характеристик.....	35
2.8. Построение графика функции распределения на вероятностной сетке .....	42
2.9. Определение объема испытаний .....	45
Таблица 2.1. ....	46
Таблица 2.2. ....	47
2.10. Методика вычислений.....	48
2.11. Примеры.....	50
3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов механических испытаний .....	56
3.1. Основные понятия .....	56
3.2. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся (аномальных) результатов испытаний.....	56
3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей. Критерий Фишера ( $F$ -критерий) .....	58
3.4. Проверка гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей. Критерий Стьюдента ( $t$ -критерий).....	59
3.5. Приближенный $t$ - критерий. ....	60
3.6. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий ряда генеральных совокупностей. Критерий Бартлета.....	63
3.7. Проверка гипотезы о равенстве средних ряда генеральных	

совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ.....	63
3.8. Критерии согласия.....	66
3.8.1. Критерий Шапиро-Уилка.....	67
3.8.2. Критерий Смирнова.....	68
3.8.3. Критерий Андерсона-Дарлинга.....	69
3.8.4. Критерий $\chi^2$ .....	70
3.8.5. S-Критерий.....	71
3.9. Непараметрические критерии для проверки статистических гипотез...	72
3.9.1. Критерий знаков для медианы.....	72
3.9.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона.....	73
3.9.3. Критерий Колмогорова-Смирнова.....	75
3.9.4. Двухвыборочный критерий Уилкоксона.....	76
3.9.5. Критерий Краскела-Уоллиса .....	78
3.10. Примеры.....	80
4. Статистическая обработка результатов.....	86
испытаний на усталость .....	86
4.1. Общие положения.....	86
4.2. Определение долговечности при испытаниях на усталость .....	86
4.3. Уравнения кривых усталости .....	90
4.4. Графическое построение кривых усталости .....	92
4.5. Оценка параметров кривых усталости .....	92
4.6. Доверительное оценивание квантилей .....	101
характеристик усталостных свойств при построении кривых усталости...	101
4.7. Планирование испытаний при построении.....	103
кривых усталости.....	103
4.7.1. Обоснование погрешности определения.....	103
предела выносливости.....	103
4.7.2. Определение себестоимости усталостных .....	107
испытаний при построении кривых усталости .....	107
4.7.3. Обоснование параметров априорных кривых усталости .....	110
4.8. Примеры.....	118
5. Оценка параметров функции распределения.....	123
вероятностей предела выносливости.....	123
5.1. Метод «вверх-вниз».....	124
5.2. Метод «пробитов» .....	129
5.3. Планирование испытаний методами .....	131
«вверх-вниз» и «пробитов».....	131
5.4. Модифицированный метод «пробитов».....	132
(графоаналитический метод) .....	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	135
Приложение .....	139



## 1. Общие положения

Настоящее пособие распространяется на основные виды прямых и косвенных механических испытаний при статическом и циклическом нагружении. В нем рассматриваются методы планирования исследований механических свойств конструкционных материалов, деталей машин и элементов конструкций, а также методы статистической обработки полученных результатов. Эти методы обеспечивают при минимальных затратах надежное определение средних значений характеристик механических свойств и их дисперсий с требуемой точностью, а также экспериментальное обоснование функции распределения, оценки ее параметров и квантилей заданного уровня вероятности.

Рассматриваемые методы планирования испытаний и статистического анализа их результатов предназначены для решения вопросов, связанных с рациональным выбором материала при проектировании, обоснованием расчетных характеристик, установлением оптимальных режимов технологии производства полуфабрикатов и деталей, организацией статистического контроля технологических процессов по механическим свойствам и т. д.

В связи с вышеуказанными целями работы в ней не рассматриваются теоретические вопросы, связанные со свойствами оценок, выводом распределений, доказательством теорем и т.п., однако делаются ссылки на соответствующие литературные источники.

## 2. Статистическая обработка и планирование прямых механических испытаний и результатов измерений

### 2.1. Основные положения

Под **прямыми** понимают механические испытания, в результате которых непосредственно измеряются характеристики механических свойств (ХМС) данного объекта (образца). К прямым испытаниям относят, например, испытания по определению временного сопротивления или времени до разрушения при заданной амплитуде напряжения. Испытания по определению предела выносливости, длительной статической прочности и другие испытания, предусматривающие расчетное или графическое определение ХМС по результатам прямых измерений, относят к **косвенным**.

Характеристики механических свойств подразделяют на **кратковременные и длительные**.

К **кратковременным** ХМС относят временное сопротивление, предел текучести, относительное удлинение и относительное сужение после разрушения, ударную вязкость, микротвердость.

К **длительным** ХМС относят число циклов или время до появления трещины или до разрушения при статическом или циклическом нагружении.

Все ХМС рассматривают как случайные величины, статистическое рассеяние которых обуславливается неоднородностью структуры каждого объекта испытаний, случайным различием структуры, химического состава и других свойств между объектами и т. д.

В дальнейшем рассматриваются методы планирования и статистической обработки результатов механических испытаний для всех ХМС, которые подчиняются указанным ниже законам распределения вероятностей случайных величин.

Правила отбора образцов для испытаний определяются целями испытаний. Совокупность значений ХМС, полученная в результате испытаний, рассматривается как выборка из генеральной совокупности. **Генеральная сово-**

**купность** есть воображаемая совокупность значений ХМС, состоящая из бесконечно большого числа значений ХМС, каждое из которых отвечает установленным правилам отбора образцов для испытаний. Если задачей испытаний является определение ХМС данной партии полуфабрикатов, то отбор образцов для испытаний ведут из данной партии (путем беспристрастного отбора) и совокупность значений ХМС образцов, которые могли бы быть произведены из данной партии и других партий, полностью с ней совпадающих, является генеральной. Если задача испытаний - определение ХМС некоторой марки металла, то отбор образцов (путем беспристрастного отбора) ведут из всех партий данной марки и совокупность значений ХМС образцов, которые могли быть выполнены из данной марки металла, является генеральной.

Рассеяние значений ХМС в пределах генеральной совокупности характеризуется законом распределения вероятностей (распределением ХМС). Распределение ХМС полностью описывается функцией распределения вероятности. При решении ряда инженерных задач часто ограничиваются некоторыми числовыми характеристиками распределения: математическим ожиданием, дисперсией, средним квадратическим отклонением, коэффициентом вариации, медианой, квантилем заданного уровня вероятности и т. д.

Все характеристики генеральной совокупности являются неслучайными (детерминированными) величинами. Эти величины дают полное и точное описание механических свойств бесконечно большого числа образцов воображаемой генеральной совокупности.

Всякая конечная совокупность образцов и отвечающая ей конечная совокупность значений ХМС рассматривается как **выборка из генеральной совокупности**. Состав конечной совокупности (выборки) является случайным и лишь с некоторой точностью отображает характеристики генеральной совокупности.

Задачи планирования и статистической обработки результатов прямых механических испытаний состоят в оценивании значений параметров распре-

деления ХМС в генеральной совокупности с заданной точностью. Оценивание проводят на основе конечной совокупности значений ХМС, измеренных при испытании конечного числа объектов.

Для получения достоверных оценок параметров распределения ХМС в генеральной совокупности совокупность измеренных ХМС должна быть представительной. Представительность значений измеренных ХМС означает, что в соответствии с целями испытаний осуществлен беспристрастный случайный отбор объектов испытаний, что число испытанных образцов отвечает требованиям точности оценивания.

Если объекты испытаний - образцы, вырезанные из краев ряда листов металла некоторой партии, то результаты измерений представляют собой случайную выборку, представительную для генеральной совокупности, соответствующей краям листов данной партии. На ее основе нельзя достоверно оценить параметры распределения ХМС в листах в целом.

Аналогично результаты измерений ХМС образцов из наиболее плохих по химическому составу партий металла некоторой марки образуют выборку, не представительную для марки в целом, а только для совокупности плохих по химическому составу партий данной марки.

Для оценивания параметров и числовых характеристик распределения ХМС используют стандартные **параметрические и непараметрические** статистические процедуры.

При использовании **непараметрических** процедур не делают никаких предположений о виде функции распределения ХМС. Непараметрические процедуры позволяют получить достоверные оценки для ограниченного набора характеристик: математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации.

Для получения достоверных оценок функции распределения или квантилей низкого уровня вероятности используют **параметрические процедуры**. При этом делают предположение о виде распределения ХМС. Вид распреде-



ления задают функцией распределения, содержащей ряд неизвестных постоянных параметров распределения, которые оцениваются по результатам измерений.

Полученные на основе параметрических процедур оценки существенно зависят от выбранного вида распределения ХМС (**гипотетического распределения**). Гипотетическое распределение должно по возможности более точно соответствовать истинному распределению ХМС. При выборке гипотетического распределения учитывают природу рассеяния ХМС, а также соответствие этого распределения результатам данных и других аналогичных испытаний.

Поскольку оценивание параметров распределения ХМС проводят на основе случайной выборки значений ХМС, полученные оценки являются случайными величинами, имеющими рассеяние относительно истинного значения. Точность оценивания, т. е. близость оценки к истинному значению, характеризуется шириной **доверительного интервала**, чем уже доверительный интервал, тем точнее оценки.

Ширина доверительного интервала уменьшается с увеличением объема выборки, т. е. с увеличением числа объектов испытания. Задача планирования испытаний состоит в выборе минимального числа объектов испытания, обеспечивающего заданную точность оценивания соответствующих параметров распределения ХМС (заданную ширину доверительных интервалов).

**Планирование** прямых механических испытаний и статистическая обработка результатов измерений включает:

- выбор гипотетического распределения ХМС;
- определение минимального числа объектов испытаний;
- проверку согласия результатов измерений с выбранным гипотетическим распределением;
- оценивание параметров распределения;
- оценивание параметров и числовых характеристик распределения

ХМС;

-оценивание доверительных интервалов числовых характеристик и параметров распределения ХМС.

Частные генеральные совокупности значений ХМС; соответствующие отдельным партиям однотипных объектов, можно объединять в одну общую генеральную совокупность. На основе результатов измерения ХМС при испытании нескольких групп объектов из разных партий оценивают характеристики распределения ХМС в общей совокупности.

Выборку считают **полной**, если все запланированные для испытания объекты доведены до критического состояния.

При усталостных испытаниях могут образовываться **цензурированные** справа выборки I и II типа [1].

**Цензурированные выборки I типа** образуются, если испытания ведутся на ограниченной базе. Объекты, не достигшие критического состояния после достижения базовой долговечности, далее не испытывают. Число баз испытаний в одной выборке, а также число групп объектов, снятых с испытаний на каждой базе, могут отличаться от единицы. В этом случае выборку называют **многократно (прогрессивно) цензурированной** [3, 4].

**Цензурированные справа выборки II типа** образуются, когда испытания при необходимости их форсирования останавливаются в случайный момент времени при получении первых  $k$  достигших критического состояния объектов из  $n$  ( $n > k$ ) объектов, испытываемых одновременно. В этом случае фиксированной при испытаниях является доля  $k/n$ .

## 2.2. Распределения характеристик механических свойств

Ниже приведены определения вероятностных понятий, используемых при описании рассеяния ХМС. Все вероятностные понятия даны в частотной трактовке.

Каждая ХМС рассматривается как неотрицательная случайная величина  $X$ , значения которой получают случайным выбором из бесконечной генеральной совокупности значений ХМС. Под распределением  $X$  понимают распределение значений ХМС в генеральной совокупности.

Под вероятностью непревышения ХМС заданного уровня понимают долю значений ХМС в генеральной совокупности, не превышающих этот уровень. Условие непревышения ХМС заданного уровня записывают как  $X \leq x$ , где  $X$  — обозначение ХМС как случайной величины;  $x$  — заданный уровень случайной величины.

**Вероятность непревышения ХМС уровня  $x$**  записывается как

$$P\{X \leq x\} \quad (2.1)$$

и лежит в интервале от 0 до 1.

**Функция распределения вероятностей ХМС** определяется соотношением:

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (2.2)$$

Функция, распределения описывает зависимость вероятности непревышения ХМС заданного уровня от величины  $x$  этого уровня, то есть является функцией аргумента  $x$ . Функция распределения однозначно задает распределение вероятностей ХМС в генеральной совокупности. Все остальные характеристики распределения выражаются через функцию распределения. Функция распределения вероятностей временного сопротивления  $\sigma_B$  записывается как  $F(\sigma_B)$ . Соотношение  $F(\sigma_B) = 0,1$  означает, что 10% значений временного сопротивления в генеральной совокупности не превышают значения величины  $\sigma_B$ .

**Квантиль распределения** ХМС определяется соотношением:

$$F(x_p) = P. \quad (2.3)$$

или в соответствии с (2.1)

$$P\{X \leq x_p\} = P. \quad (2.4)$$

Квантиль  $x_p$  уровня  $P$  представляет собой значение ХМС, вероятность непревышения которого равна  $P$ . Следовательно, доля значений ХМС в генеральной совокупности, не превышающих  $x_p$ , равна  $P$ . Квантиль  $x_{0,5}$  уровня  $P=0,5$  называется медианой распределения.

**Плотность вероятностей** ХМС определяется соотношением:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.5)$$

Плотность вероятностей представляет собой производную функции распределения по параметру  $x$ .

**Математическое ожидание** ХМС определяется соотношением:

$$M\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx. \quad (2.6)$$

Математическое ожидание  $M\{X\}$  представляет собой среднее арифметическое значение ХМС в генеральной совокупности.

**Дисперсия** ХМС определяется соотношением:

$$D\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{X\})^2 \cdot f_x(x) dx. \quad (2.7)$$

Дисперсия представляет собой среднее арифметическое значение квадрата отклонения ХМС от ее математического ожидания в генеральной совокупности.

**Среднее квадратическое отклонение** ХМС определяется соотношением:

$$\sigma\{X\} = \sqrt{D\{X\}}. \quad (2.8)$$

Среднее квадратическое отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии ХМС и характеризует отклонения значений ХМС в ге-

неральной совокупности от математического ожидания.

**Коэффициент вариации** ХМС определяется соотношением:

$$\gamma\{X\} = \frac{\sigma\{X\}}{M\{X\}}. \quad (2.9)$$

Коэффициент вариации представляет собой отношение среднего квадратического отклонения ХМС к математическому ожиданию ХМС и характеризует относительное отклонение значений ХМС в генеральной совокупности от математического ожидания.

Если рассматривается распределение временного сопротивления  $\sigma_B$ , то его математическое ожидание обозначается как  $M\{\sigma_B\}$ , дисперсия как  $D\{\sigma_B\}$ , среднее квадратическое отклонение как  $\sigma\{\sigma_B\}$  коэффициент вариации как  $\gamma\{\sigma_B\}$ .

### 2.3. Законы распределения вероятностей ХМС

Ниже приведены характеристики ряда законов распределения вероятностей, используемых в качестве гипотетических при оценивании параметров распределения ХМС. Приведены рекомендации по их применению с краткими обоснованиями.

Гипотетическое распределение задается в виде функции распределения с рядом неизвестных постоянных - параметров распределения:

$$F(x) = F(x; g_1, g_2, \dots, g_k), \quad (2.10)$$

где  $g_k$  - параметры распределения;

$k$  - число параметров распределения.

Точность оценок параметров распределения ХМС зависит от точности оценивания параметров гипотетического распределения и от близости гипотетического распределения истинному распределению ХМС. Точность оценок характеристик гипотетического распределения при фиксированном числе измеренных значений ХМС зависит от числа параметров гипотетического распределения. Близость выбранного гипотетического распределения ХМС к истинному распределению оценивается на основе статистического сравнения гипотетического распределения с совокупностью значений ХМС, полученных в результате данных и предыдущих испытаний. Из гипотетических распределений, имеющих удовлетворительное согласие с результатами измерений, следует отдавать предпочтение распределениям, отвечающим некоторой математической модели, отражающей физическую природу рассеяния ХМС.

### 2.3.1. Нормальное распределение

Плотность вероятностей:

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.11)$$

где

$a, \sigma > 0$ - параметры распределения.

Функция нормального закона распределения имеет следующий вид:

$$F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (2.12)$$

где  $x$  может принимать все действительные значения. Функция распределения (2.12) удовлетворяет равенству

$$F(x; a, \sigma) = F((x-a)/\sigma; 0, 1),$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь значения функции  $F(z; 0, 1)$

$$F(z; 0, 1) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.13)$$

где  $\Phi(z)$  - функция Лапласа,  $z = (x-a)/\sigma$  - нормированная случайная величина.

Квантиль уровня  $P$ :  $x_p$  определяется соотношением:

$$x_p = a + z_p \cdot \sigma, \quad (2.14)$$

где  $z_p$  - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $P$ , определяемый соотношением:

$$\Phi(z_p) = P. \quad (2.15)$$

Медиана, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации определяются соотношениями:

$$M_e\{X\}=a, M\{X\}=a, \sigma\{X\}=\sigma, \gamma\{X\}=\frac{\sigma}{a}. \quad (2.16)$$

Параметр  $a$  соответствует медиане и математическому ожиданию; параметр  $\sigma$  среднему квадратическому отклонению. Применение нормального распределения в качестве гипотетического для ХМС ограничено тем, что оно предполагает ненулевую вероятность отрицательного значения ХМС, в то время как все рассматриваемые ХМС неотрицательные. Нормальное распределение допускается применять только при значении коэффициента вариации, не превышающем 0,20, когда указанная вероятность пренебрежимо мала. Нормальное распределение рекомендуется применять для обработки результатов измерений кратковременных ХМС только в том случае, если это регламентируется нормативной документацией, или, если имеется необходимость сопоставления с архивными данными, полученными на основе нормального распределения. Нормальное распределение не рекомендуется применять для обработки результатов измерений длительных ХМС.



### 2.3.2. Логарифмически нормальное распределение

Функции плотности вероятностей и распределения имеют следующий вид:

$$f(x; a_l, \sigma_l, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l \cdot (x - x_0)} e^{-\frac{[\ln(x-x_0)-a_l]^2}{2\sigma_l^2}}, \quad (2.17)$$

$$F(x; a_l, \sigma_l, x_0) = \Phi(z), \quad (2.18)$$

где  $z = [\ln(x - x_0) - a_l] / \sigma_l$  - нормированная случайная величина,

$a_l, \sigma_l > 0, x_0 < x$  - параметры распределения.

Квантиль распределения уровня  $P$  определяется соотношением:

$$\ln(x_p - x_0) = a_l + z_p \cdot \sigma_l, \quad (2.19)$$

где  $z_p$  - квантиль нормированного нормального распределения уровня  $P$ , определяемый соотношением (2.15).

Медиана, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

$$M_e\{X\} = x_{0,5} = x_0 + e^{a_l}, \quad M\{X\} = x_0 + e^{a_l + \frac{\sigma_l^2}{2}}, \quad D\{X\} = e^{2a_l + \sigma_l^2} \cdot (e^{\sigma_l^2} - 1). \quad (2.20)$$

Логарифмически нормальное распределение рекомендуется применять при обработке результатов измерения кратковременных и длительных ХМС, кроме временного сопротивления при хрупком разрушении.

### 2.3.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

Трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко для случайной величины  $X$  имеет следующие выражения для функции плотности распределения и функции распределения:

$$f(x; b, c, x_0) = \frac{b}{c} \cdot \left( \frac{x - x_0}{c} \right)^{b-1} \cdot e^{-\left( \frac{x - x_0}{c} \right)^b}, \quad (2.21)$$

$$F(x; b, c, x_0) = 1 - e^{-\left( \frac{x - x_0}{c} \right)^b}, \quad (2.22)$$

где  $b > 0, c > 0, x_0 < x$  - параметры распределения.

Математическое ожидание и дисперсия определяются выражениями:

$$M\{X\} = c \cdot \Gamma(1 + 1/b) + x_0, \quad D\{X\} = c^2 \cdot [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)], \quad (2.23)$$

где

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad (2.24)$$

гамма-функция.

Квантиль уровня  $P$  случайной величины  $X$  определяется по уравнению:

$$x_p = x_0 + c \cdot \left[ \ln \frac{1}{1 - P} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (2.25)$$

Квантиль уровня  $P = 0,632$ ,  $x_{0,632} = c + x_0$ , медиана распределения определяется выражением:

$$x_{0,5} = x_0 + c \cdot \left[ \ln \frac{1}{1 - 0,5} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (2.26)$$

При  $x_0 = 0$  имеем двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко, при  $b=1$  – экспоненциальное (показательное) распределение.

## 2.4. Непараметрические оценки характеристик распределения ХМС

При вычислении непараметрических оценок характеристик распределения ХМС не делается никаких предположений о распределении ХМС.

Результаты измерений ХМС в процессе испытания ряда однотипных объектов представляют собой совокупность следующих значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (2.27)$$

где  $x_i$  - значение характеристики, измеренное при испытании  $i$ -го объекта;

$n$  – число испытанных объектов (объем выборки).

Совокупность (2.27) рассматривается как случайная выборка из генеральной совокупности значений характеристик механических свойств. В качестве оценок ряда числовых характеристик распределения в генеральной совокупности (генеральных характеристик) используются соответствующие числовые характеристики выборки (выборочные характеристики).

**Выборочное среднее:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.28)$$

используется в качестве оценки математического ожидания  $M\{X\}$  (генерального среднего).

**Выборочная дисперсия:**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (2.29)$$

используется в качестве оценки дисперсии  $D\{X\}$  (генеральной дисперсии).

**Выборочное среднее квадратическое отклонение:**

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.30)$$

используется в качестве оценки среднего квадратического отклонения  $\sigma\{X\}$  (генерального среднего квадратического отклонения).

**Выборочный коэффициент вариации:**

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \quad (2.31)$$

используется в качестве оценки коэффициента вариации  $\gamma\{X\}$  (генерального коэффициента вариации).

Для проверки ряда статистических гипотез используют также следующие выборочные характеристики:

выборочный показатель асимметрии:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot s^2} , \quad (2.32)$$

выборочный показатель эксцесса:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot s^4} . \quad (33)$$

Для полной выборки **непараметрическую оценку квантиля** уровня  $P$  случайной величины  $X$  вычисляют по следующей формуле [5]:

$$x_p = (1 - \alpha_p) \cdot x_i + \alpha_p \cdot x_{i+1} , \quad (2.34)$$

где  $i$  – порядковый номер измеренного значения  $x_i$  случайной величины  $X$ , в **ранжированной** (расположенной в порядке возрастания значений) выборке объема  $n$  из произвольного непрерывного распределения. Значение  $i$  определяется из следующего уравнения:

$$i = \text{int} [p \cdot (n + 1)], \quad (2.35)$$

где  $\text{int}(x)$  - целая часть числа  $x$ ,

$$\alpha_p = p \cdot (n + 1) - i . \quad (2.36)$$

Для однократно **цензурированной** справа выборки I типа **непараметрическую оценку квантиля** уровня  $P$  случайной величины  $X$  вычисляют по формуле (2.34) [6,7], в которой:

$$i = \text{int} \left[ p \cdot \frac{k + 1}{h} \right], \quad (2.37)$$

где  $k$  - число наблюдаемых членов выборки объема  $n$ ;

$h = \frac{k}{n + 1}$  - оценка степени цензурирования выборки;

$$\alpha_p = p \cdot \frac{k + 1}{h} - i . \quad (2.38)$$

## 2.5. Точечные оценки характеристик распределения

### ХМС. Метод максимального правдоподобия

В соответствии с методом максимального правдоподобия (ММП) [1-4] оценки параметров непрерывной не менее двух раз дифференцируемой функции распределения случайной величины в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяются решением системы уравнений максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ММП-оценки) определяются в точках экстремума функции максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^k f_x(x_i) \cdot \prod_{j=1}^m [1 - F_x(x_{\hat{\theta}j})]^{r_j}, \quad (2.39)$$

где

$k$  - число наблюдений (число объектов достигших критического состояния);

$m$  - число баз испытания, при достижении которых наблюдаются объекты не достигшие критического состояния;

$r_j$  - количество объектов, снятых с испытаний на данной базе;

$n = k + \sum_{j=1}^m r_j$  - общее число испытанных объектов испытания;

$x_{\hat{\theta}j}$  - значения баз испытания, при которых наблюдаются не достигшие критического состояния объекты.

Оценки  $k_1$  параметров  $g_1, g_2, \dots, g_{k_1}$  функции распределения  $F_x(x)$  определяются решением следующей системы уравнений размерности  $k_1$  относительно ММП-оценок  $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_{k_1}$  параметров распределения:

$$\left. \frac{d \ln L}{dg} \right|_{g=\hat{g}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_x(x_i)} \cdot \frac{df_x(x_i)}{dg} - \sum_{j=1}^m \left[ \frac{r_j}{1-F_x(x_{\hat{\theta}j})} \cdot \frac{dF_x(x_{\hat{\theta}j})}{dg} \right] = 0, \quad (2.40)$$

где производные плотности распределения и функции распределения по параметрам определяют конкретный вид системы уравнений (2.40) для того или иного закона распределения.

Ковариационная матрица  $(\nu)$  размерности  $k_1 \cdot k_1$  оценок параметров распределений определяется обращением информационной матрицы  $(\mu)$  вторых производных логарифма функции максимального правдоподобия по параметрам распределений:

$$(\nu) = (\mu)^{-1} = \left( -\frac{d^2 \ln L}{dg_{l,s}^2} \right), \quad l, s = 1 \dots k_1, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mu_{l,s} = & \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_x(x_i)} \cdot \left[ \frac{df_x(x_i)}{dg_l} \cdot \frac{df_x(x_i)}{dg_s} \cdot \frac{1}{f_x(x_i)} - \frac{d^2 f_x(x_i)}{dg_l dg_s} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{1-F_x(x_{\hat{\theta}j})} \cdot \left[ \frac{dF_x(x_{\hat{\theta}j})}{dg_l} \cdot \frac{dF_x(x_{\hat{\theta}j})}{dg_s} \cdot \frac{1}{1-F_x(x_{\hat{\theta}j})} + \frac{d^2 F_x(x_{\hat{\theta}j})}{dg_l dg_s} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

### 2.5.1. Логарифмически нормальное распределение

Оценки параметров  $\hat{a}_l, \hat{\sigma}_l, \hat{x}_0$  логарифмически нормального распределения в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяют в соответствии с (2.40) как корни системы трех уравнений:

$$\left. \frac{d \ln L}{da_l} \right|_{a_l=\hat{a}_l} = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{a}_l) + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi(z_j) = 0, \quad (2.43)$$

$$\left. \frac{d \ln L}{d\sigma_l} \right|_{\sigma_l=\hat{\sigma}_l} = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{a}_l)^2 + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi(z_j) \cdot z_j - k \right] = 0, \quad (2.44)$$

$$\left. \frac{d \ln L}{dx_0} \right|_{x_0=\hat{x}_0} = \sum_{i=1}^k \frac{y_i - \hat{a}_l}{x_i - \hat{x}_0} + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \sum (x_i - \hat{x}_0)^{-1} + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^m \frac{r_j \cdot \psi(z_j)}{x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0} = 0, \quad (2.45)$$

где

$$y_i = \ln(x_i - \hat{x}_0), \quad z_j = \frac{\ln(x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0) - \hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l}, \quad \psi(z_j) = \frac{\varphi(z_j)}{1 - \Phi(z_j)}, \quad (2.46)$$

$$\varphi(z_j) = \frac{e^{-\frac{z_j^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}, \quad \Phi(z_j) = \int_{-\infty}^{z_j} \varphi(t) \cdot dt.$$

Оценки функции плотности распределения, функции распределения (вероятности непревышения уровня  $x$ ), квантиля, медианы, математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации определяются по формулам (2.17)-(2.20) заменой параметров распределения их оценками.

В случае полной выборки  $m=0, n=k, r_j=0$  для всех  $j$  оценки параметров  $a_l, \sigma_l$  определяются по следующим формулам с учетом поправки на смещение для среднего квадратического отклонения:



$$\hat{a}_l = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k}, \quad (2.47)$$

$$\hat{\sigma}_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (y_i - \hat{a}_l)^2}{k-1}}, \quad (2.48)$$

после чего оценку параметра  $\hat{x}_0$  производят по формуле (2.45) без учета третьего слагаемого.

Поправка на смещение оценки (2.48) определяется по формуле [8]:

$$M\{\hat{\sigma}_l\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sigma_l \approx (1 - \frac{1}{4 \cdot n}) \cdot \sigma_l.$$

Трехпараметрическое логарифмически нормальное распределение рекомендуется применять только при достаточно больших объемах испытаний ( $n > 50$ ). В противном случае точность полученных оценок, особенно параметра  $x_0$ , невелика. В случае ограниченных объемов испытаний следует применять двухпараметрическое логарифмически нормальное распределение. Для получения оценок параметров и характеристик распределения в этом случае в уравнениях (2.17)-(2.20), (2.43)-(2.48) принимают  $x_0 = 0$  и исключают из рассмотрения уравнение (2.45). При необходимости использования третьего параметра логарифмически нормального распределения в ограниченных по объему выборках (в случае заметного на графике отклонения эмпирической функции распределения случайной величины  $\ln x$  от теоретического закона в нижней части распределения) рекомендуется пользоваться независимой (не ММП) оценкой параметра  $x_0$ . Для этого варьируют этим параметром, добиваясь наименьшего отклонения эмпирической функции распределения от теоре-

тического закона, определяя на каждом шаге оценки параметров  $a_l, \sigma_l$  по уравнениям (2.43), (2.44) или (2.47), (2.48). Независимая оценка порогового значения случайной величины  $x_0$  может быть получена из уравнения (2.19) для квантиля случайной величины, соответствующего первому члену вариационного ряда  $\hat{x}_0 = x_1 - e^{\hat{a}_l + z_1 \hat{\sigma}_l}$ , где оценка вероятности для первого члена ряда приближенно равна  $0,5/(n)$ , то есть неизвестная величина  $z_1$  легко определяется из соотношения  $\Phi(z_1) = 0,5/(n)$ .

Элементы ковариационной матрицы определяются в соответствии с уравнениями (2.41), (2.42) (при  $k_1 = 3$ ):

$$(\nu) = \frac{\sigma_l^2}{n} \cdot (\nu^*) = \frac{\sigma_l^2}{n} \cdot (\mu^*)^{-1}, \quad (2.49)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{da_l^2} = \mu_{1,1}^* = k + \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi_j \cdot (\psi_j - z_j), \quad (2.50)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l^2} = \mu_{2,2}^* = 2 \cdot k + \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi_j \cdot z_j \cdot [z_j \cdot (\psi_j - z_j) - 1], \quad (2.51)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{dx_0^2} = \mu_{3,3}^* = - \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\ln(x_i - x_0) - a_l - 1 + \sigma_l^2}{(x_i - x_0)^2} + \sum_{j=1}^m \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot [\sigma_l - (\psi_j - z_j)]}{(x_{\theta j} - x_0)^2} \right\}, \quad (2.52)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l da_l} = \mu_{1,2}^* = \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi_j \cdot [z_j \cdot (\psi_j - z_j) - 1], \quad (2.53)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{da_l dx_0} = \mu_{1,3}^* = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(x_i - x_0)} + \sum_{j=1}^m \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot (\psi_j - z_j)}{(x_{\theta j} - x_0)}, \quad (2.54)$$

$$-\frac{d^2 \ln L}{d\sigma_l dx_0} = \mu_{2,3}^* = \frac{2}{\sigma_l} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\ln(x_i - x_0) - a_l}{(x_i - x_0)} + \sum_{j=1}^m \frac{r_j \cdot \psi_j \cdot [1 + z_j \cdot (\psi_j - z_j)]}{(x_{\theta j} - x_0)}, \quad (2.55)$$

$$\psi_j = \frac{\varphi(z_j)}{1 - \Phi(z)}, \quad z_j = \frac{\ln(x_{\theta j} - x_0) - a_l}{\sigma_l}.$$

При планировании испытаний в формулы (2.49)-(2.54) подставляют ожидаемые значения параметров распределений, при статистической обра-

ботке результатов испытаний для приближенного расчета элементов ковариационной матрицы в указанные формулы подставляют ММП-оценки параметров распределения.

### 2.5.2. Нормальное распределение

Оценки параметров нормального закона распределения (2.11)-( 2.13), элементы ковариационной матрицы и другие характеристики распределения рассчитываются точно также как и для логарифмически нормального закона распределения следующей формальной заменой обозначений в формулах (2.43)-(2.55)  $k_1 = 2$ ,  $y_i = x_i$ ,  $a_l = a$ ,  $\sigma_l = \sigma$ ,  $x_0 = 0$ . При этом уравнения (2.45), (2.52), (2.54), (2.55) в расчетах не учитываются.

### 2.5.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

ММП-оценки параметров  $b, x_0$  распределения Вейбулла-Гнеденко (2.21), (2.22) в соответствии с уравнениями (2.40) рассчитывают как корни системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{db} \Big|_{b=\hat{b}} &= \left[ \frac{k}{\hat{b}} + \sum_{i=1}^k \ln(x_i - \hat{x}_0) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right] - \\ &- k \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \cdot \ln(x_i - \hat{x}_0) + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \cdot \ln(x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{dx_0} \Big|_{x_0=\hat{x}_0} &= \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} - \\ &- \frac{1 - \frac{1}{\hat{b}}}{k} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{-1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

после чего оценку параметра  $c$  определяют из уравнения:

$$\hat{c}^{\hat{b}} = \frac{1}{k} \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{\sigma}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right]. \quad (2.58)$$

Все замечания раздела 2.5.1. относительно применимости трехпараметрического распределения и перехода к двухпараметрическому распределению справедливы для распределения Вейбулла-Гнеденко в той же степени, как и для логарифмически нормального распределения. При переходе к двухпараметрическому распределению Вейбулла-Гнеденко следует в уравнениях (2.56), (2.58) положить  $x_0 = 0$  и исключить из рассмотрения уравнение (2.57). В случае полной выборки в уравнениях (2.56)-(2.58) принимают  $m = 0, r_j = 0$  для всех  $j, n = k$ . Элементы ковариационной матрицы определяются в соответствии с методикой, изложенной в разделе 2.5.1.

Независимая оценка порогового значения случайной величины  $x_0$  мо-

жет быть получена из уравнения (2.25) для квантиля случайной величины, со-

ответствующего первому члену вариационного ряда  $\hat{x}_0 = x_1 - c \cdot \left[ \ln \left( \frac{n}{n-0,5} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{b}}}$ ,

где оценка вероятности для первого члена ряда приближенно принимается равной  $0,5/(n)$ .

## 2.6. Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод наименьших квадратов

Пусть имеется линейная модель [2,9]:

$$y = X \cdot b + \varepsilon, \quad (2.59)$$

где  $y$  - вектор-столбец наблюдений размерности  $n$ ,  $X$  - матрица размерности  $n \times k_1$  известных коэффициентов ( $n > k_1$ ),  $b$  - вектор столбец параметров размерности  $k_1$  и  $\varepsilon$  - вектор-столбец случайных «ошибок» размерности  $n$  с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности  $n \times n$  :

$$D(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot V. \quad (2.60)$$

Это означает, что случайные ошибки наблюдений некоррелированы, но имеют различные дисперсии. Метод наименьших квадратов состоит в минимизации скалярной суммы квадратов:

$$S = (y - X \cdot b)^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot b) \quad (2.61)$$

по компонентам вектора  $b$ . Необходимым условием обращения (2.61) в минимум является условие  $\partial S / \partial b = 0$ . Выполняя дифференцирование, получаем:

$$2 \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot b) = 0, \quad (2.62)$$

откуда находим вектор МНК-оценок:

$$\hat{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \quad (2.63)$$

Матрица рассеяния оценок  $b$  [9] определяется из следующего уравнения:

$$D(\hat{b}) = (v) = \frac{\sigma^2}{n} (v^*); (v^*) = n \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}, \quad (2.64)$$

где несмещенная оценка для остаточной дисперсии  $\sigma^2$  определяется формулой:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n - k_1} \cdot (y - X \cdot \hat{b})^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot \hat{b}). \quad (2.65)$$

Уравнения (2.63), (2.64) позволяют оценивать параметры расположения (сдвига) и масштаба, исходя из порядковых статистик, то есть выборочных наблюдений, упорядоченных по величине. Пусть  $y_i$  - порядковые статистики,  $a$  и  $\sigma$  параметры сдвига и масштаба (необязательно среднее и стандартное отклонение). Введем обозначение:

$$z_i = \frac{y_i - a}{\sigma}, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.66)$$

Пусть

$$M(z) = \alpha, \quad D(z) = V, \quad (2.67)$$

где  $\alpha$  - вектор-столбец размерности  $n$  математических ожиданий, а  $V$  ковариационная матрица размерности  $n \times n$  нормированных порядковых статистик.

Поскольку  $z$  нормировано соотношением (2.66), то  $\alpha$  и  $V$  не зависят от параметров  $a, \sigma$ . На основании (2.66), (2.67)

$$M(y) = a \cdot E + \sigma \cdot \alpha, \quad (2.68)$$

где  $E$  - вектор из единиц размерности  $n$ . Следовательно, матрица  $X$  (2.59) размерности  $n \times 2$  будет иметь следующий вид:



$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \\ 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

Оценки параметров сдвига и масштаба на основании (2.63) равны:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \quad (2.70)$$

Матрица рассеяния оценок параметров сдвига и масштаба на основании (2.64) имеет следующий вид:

$$D(\hat{b}) = D \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = (v) = \frac{\sigma^2}{n} (v^*); \quad v^* = n \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}. \quad (2.71)$$

Элементы вектора математических ожиданий ( $\alpha$ ) и ковариационной матрицы ( $V$ ) нормированных порядковых статистик определяются из следующих уравнений [9]:

$$\alpha_l = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)}, \quad (2.72)$$

$$V_{l,l} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)} - \alpha_l^2, \quad (2.73)$$

$$V_{l,s} (l < s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-s} \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^x y \cdot f(y) \cdot [F(x) - F(y)]^{s-l-1} \cdot [F(y)]^{l-1} \cdot dy}{B(l, s-l+1) \cdot B(s, n-s+1)} - \alpha_l \cdot \alpha_s, \quad (2.74)$$

$$B(a, b) = \frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}, \quad (2.75)$$

где  $l, s = 1 \dots n$ ,  $f(z)$ ,  $F(z)$  - плотность и функция нормированного непрерывного распределения с параметрами сдвига и масштаба.

Как альтернативу оптимальным линейным оценкам (2.70) Гупта [9] предложил упрощенные линейные оценки в случае усеченных выборок из нормальной совокупности. В этих оценках не учитываются ковариации порядковых статистик, то есть в уравнениях (2.70), (2.71) отсутствует матрица  $V$ . Такой же результат получается минимизацией суммы квадратов:

$$S = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [y_i - \hat{a}^* - \hat{\sigma} \cdot (\alpha_i - \bar{\alpha})]^2, \quad (2.75)$$

где  $\hat{a}^* = a + \bar{\alpha} \cdot \sigma$ ,

$r_1$  - количество отсутствующих наименьших наблюдений,

$r_2$  - количество отсутствующих наибольших наблюдений,

$r_2$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \alpha_i}{n - r_1 - r_2}.$$

Производные (2.75) по параметрам  $\hat{a}^*$ ,  $\sigma$  приводят к следующим оценкам:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot y_i}{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}, \quad (2.76)$$

$$\hat{a} = \hat{a}^* - \bar{\alpha} \cdot \hat{\sigma}; \quad \hat{a}^* = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} y_i}{n - r_1 - r_2}. \quad (2.77)$$

Для двухпараметрического логарифмически нормального и нормально-го распределений  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$ ,  $F(z) = \int_{-\infty}^z f(t) \cdot dt$ . Для представления распределения Вейбулла-Гнеденко к виду с параметрами сдвига и масштаба осуществляют следующее нормирующее преобразование для последующей подстановки в уравнения (2.72)-(2.74):

$$\begin{aligned} \ln(x - x_0) &= a + z \cdot \sigma, \quad \sigma = 1/b, \quad a = \ln c, \\ F(z) &= 1 - e^{-e^z}, \quad f(z) = e^{z-e^z}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

В случае логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко в уравнения (2.70) вместо  $y$  следует подставлять величину  $y = \ln(x - x_0)$ , предварительно вычисляя независимую оценку порогового значения  $x_0$  или считая  $x_0 = 0$ .

Для однократно цензурированной справа выборки II типа оценки параметров сдвига и масштаба, их ковариационную матрицу определяют по тем же формулам, но при этом матрица  $X$  (2.69), вектор наблюдений  $y$ , ковариационная матрица  $V$  составляются по первым  $k$  наблюдениям случайной величины из  $n$  объектов, подвергшихся испытанию. При этом в формулах (2.72)-(2.75) величина  $n$  остается неизменной.

## 2.7. Интервальные оценки характеристик распределения ХМС

Наиболее важной и сложной задачей интервального (доверительного)

оценивания характеристик распределения механических свойств является задача доверительного оценивания квантилей распределения.

Верхняя односторонняя доверительная граница  $x_{pu}$  для квантиля распределения  $x_p$  уровня  $P$  отвечает соотношению:

$$P\{\hat{x}_{pu} \geq x_p\} = \beta. \quad (2.79)$$

Соотношение (2.79) означает, что при статистической обработке каждых 100 совокупностей результатов измерений ХМС в среднем для каждых  $100 \cdot \beta$  совокупностей истинные значения  $x_p$  не будут превышать оценки  $\hat{x}_{pu}$ .

Нижняя односторонняя доверительная граница  $x_{pl}$  для квантиля распределения  $x_p$  уровня  $P$  отвечает соотношению:

$$P\{\hat{x}_{pl} \leq x_p\} = \beta, \quad (2.80)$$

где  $\beta$  - уровень доверительной вероятности. Обычно уровень доверительной вероятности принимают равным 0,9 или 0,95. Доверительные оценки  $\hat{x}_{pu}, \hat{x}_{pl}$  рассчитывают на основе выбранного гипотетического распределения по оценкам его параметров. Аналогичный смысл имеют доверительные границы для параметров распределений.

Односторонние доверительные границы для квантилей нормального закона распределения в полной выборке определяют по формулам [11]:

$$\hat{x}_{pu} = \hat{a} + t_{\beta}[n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \quad (2.81)$$

$$\hat{x}_{pl} = \hat{a} + t_{1-\beta}[n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \quad (2.82)$$

где  $t_{\gamma}[f, \Delta]$  - квантиль уровня  $\gamma$  нецентрального распределения Стьюдента с  $f = n - 1$  степенями свободы и с параметром нецентральности  $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$ ,  $z_p$  - квантиль уровня  $P$  нормированного нормального распределе-

ния,  $\hat{a}, \hat{\sigma}$  - оценки параметров нормального распределения. Формулы (2.81), (2.82) справедливы и для нормального распределения логарифма случайной величины.

Точное значение квантиля нецентрального распределения Стьюдента  $t$  уровня  $\beta$  определяется из следующих уравнений [11,12]:

$$\beta = \int_{-\infty}^{\frac{t}{\sqrt{f}}} \frac{e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot (1+x^2)}}}{(1+x^2)^{\frac{f+1}{2}}} \cdot p(x) \cdot dx, \quad (2.83)$$

$$p(x) = \int_0^{\frac{\left(y - \frac{x \cdot \Delta}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}{2}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{2^{\frac{f-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot y^f \cdot dy, \quad (2.84)$$

Для других непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба (например Вейбулла-Гнеденко после соответствующего преобразования (2.78)), оценки которых получены методами максимального правдоподобия или наименьших квадратов, а также в цензурированных выборках (в том числе нормальных) точных параметрических доверительных границ для квантилей не существует. Приближенные доверительные интервалы для квантилей распределения [6,7] в этом случае определяются по уравнениям (2.81), (2.82) для больших выборок на основании нормальной аппроксимации. С этой целью рассматривают случайную величину  $\varphi = x_p - \hat{x}_{pu} = x_p - \hat{a} - t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ , как имеющую приближенное нормальное распределение с математическим ожиданием:

$$M\{\varphi\} \approx x_p - a - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.85)$$

и дисперсией:

$$D\{\varphi\} \approx D\{a\} + 2 \cdot t \cdot \frac{\sigma \cdot D\{a, \sigma\}}{\sqrt{n}} + t^2 \cdot \frac{D\{\sigma\}}{n}, \quad (2.86)$$

где  $x_p = a + z_p \cdot \sigma$ , квантиль распределения. Элементы ковариационной матрицы  $(v)$  оценок параметров вычисляются по формулам (2.49)-(2.55) для ММП-оценок и по формулам (2.71) для МНК-оценок:

$$(v) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (v^*) = \begin{pmatrix} D\{a\} & D\{a, \sigma\} \\ D\{\sigma, a\} & D\{\sigma\} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

$$D\{a\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{1,1}^*, \quad (2.88)$$

$$D\{\sigma\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{2,2}^*, \quad (2.89)$$

$$D\{a, \sigma\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{1,2}^*, \quad (2.90)$$

Вероятность  $\beta$  того, что  $P\{\varphi < 0\}$  приводит к следующему приближенному уравнению:

$$z_\beta \approx \frac{M\{\varphi\}}{\sqrt{D\{\varphi\}}} = \frac{z_p \cdot \sqrt{n} - t}{\sqrt{v_{1,1}^* + 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot v_{1,2}^* + \frac{t^2}{n} \cdot v_{2,2}^*}}, \quad (2.91)$$

из которого после преобразований можно определить приближенное значение  $t$ , соответствующее числу степеней свободы  $f = n - 1$ , параметру нецентральной

ности  $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$  и доверительной вероятности  $\beta$ :

$$t = t_{\beta, 1-\beta}[\Delta, f = n - 1] = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B \cdot C}}{B}, \quad (2.92)$$

$$A = \left[ 1 - \frac{v_{2,2}^*}{2 \cdot f} \right] \cdot \Delta - \frac{z_\beta^2 \cdot v_{1,2}^*}{\sqrt{n}}, \quad (2.93)$$

$$B = \left[ 1 - \frac{v_{2,2}^*}{2 \cdot f} \right]^2 - \frac{z_\beta^2 \cdot v_{2,2}^*}{f}, \quad (2.94)$$

$$C = \Delta^2 - z_\beta^2 \cdot v_{1,1}^*. \quad (2.95)$$

В формулах (2.93)-(2.95) учтены поправки на смещение оценок, имеющие место в полной выборке. По формулам (2.91)-(2.95) может быть получена аппроксимация нецентрального распределения Стьюдента (2.83). В полной выборке при независимости параметров сдвига и масштаба имеем:

$$v_{1,1}^* = 1, v_{2,2}^* = 0,5, v_{1,2}^* = 0, \quad (2.96)$$

$$t_{\beta, 1-\beta} = \frac{(1 - 1/4f) \cdot \Delta + z_{\beta, 1-\beta} \cdot \sqrt{(1 - 1/4f)^2 - z_\beta^2 / 2f + \Delta^2 / 2f}}{(1 - 1/4f)^2 - z_\beta^2 / 2f}. \quad (2.97)$$

Доверительные границы для параметра сдвига  $a$  получают из (2.81), (2.82) как частный случай при  $z_p = 0$ ,  $\Delta = 0$ . Для нормального закона эти границы совпадают с доверительными границами для медианы распределения. В этом случае нецентральное распределение Стьюдента вырождается в хорошо табулированное центральное  $t$ -распределение Стьюдента.

Для нормального распределения параметр нецентральности определяет-

ся на основе квантиля  $z_p$  нормированного нормального распределения:

$$\Delta = z_p \cdot \sqrt{n} . \quad (2.98)$$

Для распределения Вейбулла-Гнеденко, представленного в виде распределения с параметрами сдвига и масштаба, как показано выше, параметр нецентральности определяется с учетом (2.78) из следующих уравнений:

$$p = F(z_p) = 1 - e^{-e^{z_p}} , \quad (2.99)$$

$$\Delta = z_p \cdot \sqrt{n} = \ln \ln \frac{1}{1-p} \cdot \sqrt{n} . \quad (2.100)$$

Двусторонние доверительные границы для генеральной дисперсии рассчитывают [12] по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}} < \sigma^2 < \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}} , \quad (2.101)$$

где  $\beta$  - двусторонняя доверительная вероятность;

$\chi^2_p$  - квантиль уровня  $p$  распределения хи-квадрат с  $f = n - 1$  степенями свободы.

Границы доверительных интервалов для генерального среднего квадратического отклонения  $\sigma$  рассчитывают путем извлечения квадратного корня из значений доверительных границ для генеральной дисперсии.

**Свободные от распределения (непараметрические)** двусторонние доверительные границы для квантиля уровня  $p$  произвольного непрерывного распределения (точечные оценки см. (2.34)-(2.38)) рассчитываются на основе порядковых статистик  $x_r, x_s$ , по следующей формуле [2]:



$$P\{x_r \leq x_p < x_s\} = \beta = \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad (2.102)$$

где  $\beta$  - доверительная вероятность, то есть вероятность накрыть квантиль  $x_p$  интервалом  $x_r, x_s$ . При использовании симметрично расположенных порядковых статистик  $s = n - r + 1$ . В частном случае медианы распределения  $p = 0,5$ :

$$\beta = (0,5)^n \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i, \quad (2.103)$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (2.104)$$

Доверительные границы (2.102) могут быть определены и в цензурированной выборке II типа при фиксированной доле наблюдений  $k$  в выборке объема  $n$ . В цензурированной выборке I типа доверительную вероятность  $\beta$  рассчитывают по следующей формуле [6,7]:

$$\beta = \sum_{k=s}^n C_n^k \cdot h^k \cdot (1-h)^{n-k} \sum_{i=r}^{s-1} C_k^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{k-i}, \quad r < s \leq k < n, \quad (2.105),$$

где  $k$  - число наблюдаемых членов выборки объема  $n$ ;

$h = \frac{k}{n+1}$  - оценка степени цензурирования выборки.

## 2.8. Построение графика функции распределения на вероятностной сетке

При построении вероятностной сетки [13] для нормального распределения вдоль оси абсцисс в равномерном или логарифмическом масштабе наносят шкалу значений случайной величины  $X$ , а по оси ординат в равномерном масштабе шкалу значений нормированной величины  $z = \frac{x-a}{\sigma}$ . Параллельно со шкалой  $z$  строят шкалу функции нормального распределения, значения которой определяют по формуле (2.12) для соответствующих значений  $z$  (рис. 2.1.).

При построении вероятностной сетки для трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе располагают шкалу значений величины  $\ln(x - x_0)$  или в логарифмическом масштабе шкалу значений  $x - x_0$ . Вдоль оси ординат в равномерном масштабе строят шкалу величины  $y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(x)}$ , и шкалу соответствующих значений функции распределения  $F(x)$ . График функции распределения Вейбулла-Гнеденко на вероятностной сетке изображают прямой в соответствии с уравнением:

$$\ln(x - x_0) = \ln c + \frac{1}{b} \cdot y. \quad (2.106).$$

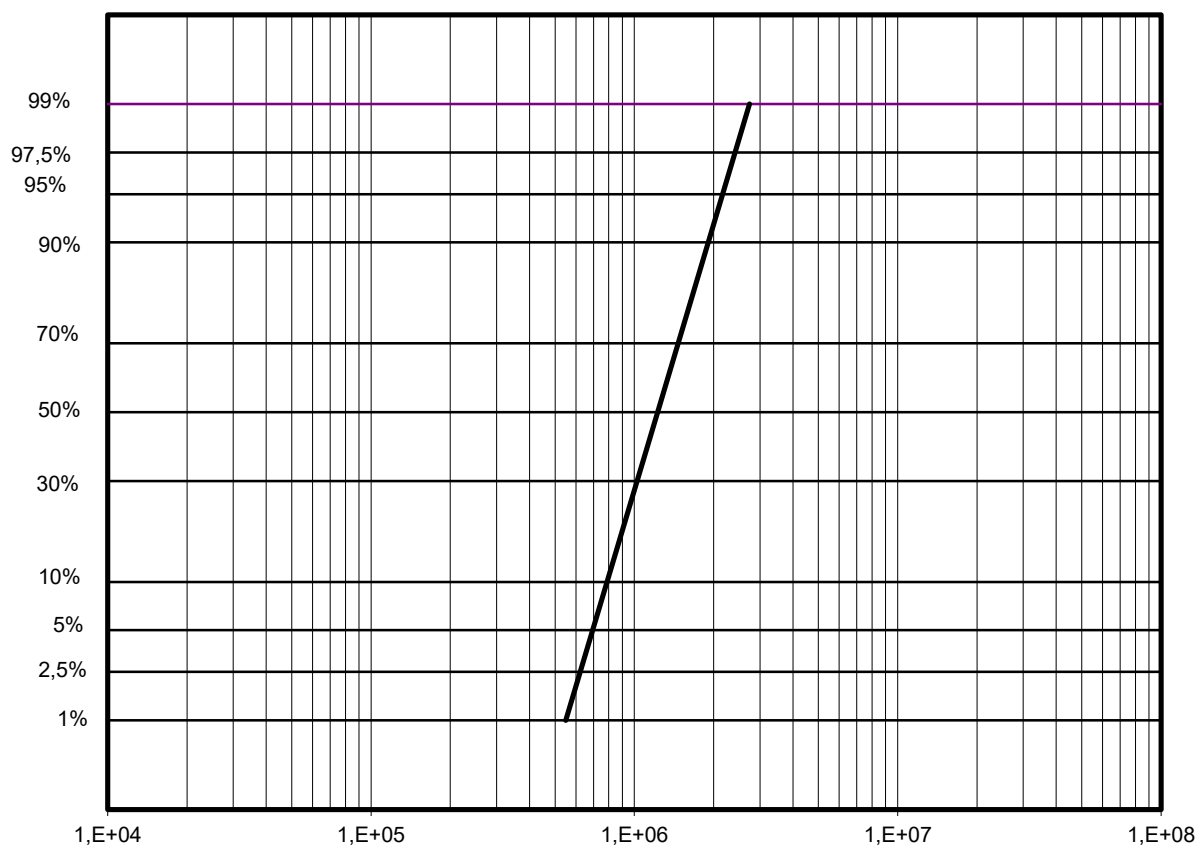


Рис. 2.1. Вероятностная сетка для логарифмически нормального распределения

Результаты механических испытаний представляют в виде эмпирической функции распределения на вероятностной сетке. С этой целью значения механических характеристик располагают в вариационный ряд. Для каждого члена вариационного ряда по формуле  $W(x) = \frac{i - 0,5}{n}$  рассчитывают оценку вероятности  $p$ , роль которой играет накопленная частота  $W(x)$ . Затем на вероятностную сетку наносят экспериментальные точки, абсциссами которых служат значения механических характеристик, а ординатами накопленная частота.

## 2.9. Определение объема испытаний

При определении минимального необходимого объема выборки следует исходить из целей испытаний. Если цель планируемых испытаний – оценка среднего квадратического отклонения ХМС, то объем выборки для построения интервальной оценки среднего квадратического отклонения  $\sigma$  с заданной относительной погрешностью  $\delta$  определяют по таблице 2.1. [12] для заданного значения доверительной вероятности  $\beta$  в соответствии с уравнением:

$$(1 + \delta)^2 = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_{1+\beta}^2} \cdot \frac{2}{2} . \quad (2.107)$$

Если истинное значение математического ожидания известно, то  $n = f$ , если неизвестно, то  $n = f + 1$ .

Если целью испытаний является оценка квантильных значений ХМС, то объем испытаний определяют по формулам (2.81), (2.82) [7,13]:

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{\sigma}} = z_p - t_{1-\beta} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{для } p < 0,5 , \quad (2.108)$$

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{\sigma}} = t_{\beta} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - z_p , \quad \text{для } p \geq 0,5 , \quad (2.109)$$

где  $\delta_p$  - максимальная ошибка оценки квантиля в долях выборочного среднего квадратического отклонения. Величину  $\delta_p$  принимают равной 0,2-0,3 при высоких требованиях к точности, 0,4-0,6 при средних требованиях и 0,8-1,0 при низкой точности. Для планирования испытаний в полных нормальных выборках используют таблицу 2.2.

**Таблица 2.1.**

Необходимый объем выборки для оценки среднего квадратического отклонения с заданной относительной погрешностью

$f$	Значения $\delta$ при $\beta$		$f$	Значения $\delta$ при $\beta$	
	0,95	0,9		0,95	0,9
1	70,52	30,26	28	0,70	0,56
2	11,07	6,64	29	0,69	0,55
3	5,58	3,71	30	0,67	0,54
4	3,80	2,54	40	0,568	0,450
5	2,93	2,11	50	0,486	0,393
6	2,42	1,77	60	0,434	0,353
7	2,08	1,55	70	0,396	0,383
8	1,84	1,38	80	0,366	0,299
9	1,65	1,26	90	0,341	0,279
10	1,61	1,16	100	0,321	0,263
11	1,40	1,07	120	0,289	0,238
12	1,30	1,01	140	1,265	0,218
13	1,22	0,95	160	0,240	0,202
14	1,15	0,90	170	0,230	0,190
15	1,10	0,86	200	0,217	0,179
16	1,04	0,82	220	0,206	0,170
17	1,00	0,78	240	0,196	0,162
18	0,96	0,75	260	0,188	0,155
19	0,92	0,73	280	0,181	0,149
20	0,89	0,70	300	0,174	0,144
21	0,86	0,68	400	0,149	0,123
22	0,83	0,66	500	0,132	0,110
23	0,80	0,64	600	0,120	0,100
24	0,78	0,62	700	0,110	0,092
25	0,76	0,61	800	0,103	0,086
26	0,74	0,59	900	0,097	0,081
27	0,72	0,58	1000	0,092	0,076

Таблица 2.2.

Минимально необходимый объем испытаний  $n$  для оценки квантили уровня  $p$  с максимальной относительной ошибкой, не превышающей  $\delta_p$  при доверительной вероятности  $\beta$

$\beta$	$P$	Значения объема испытаний $n$ при $\delta_p$ , равной									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,5	165	42	19	11	7	5	4	4	3	3
0,9	0,1;0,9	324	90	42	26	19	14	11	9	8	7
0,9	0,05; 0,95	420	113	55	34	24	18	14	12	10	9
0,9	0,01;0,99	663	170	86	52	35	26	21	17	14	12
0,9	0,005;0,995	755	200	92	60	43	28	23	20	16	13
0,9	0,001;0,999	1100	355	135	73	53	37	29	25	21	17
0,95	0,5	270	68	30	18	12	9	7	6	5	4
0,95	0,1;0,9	535	140	68	41	29	22	17	14	12	10
0,95	0,05;0,95	700	182	89	55	37	27	21	18	15	13
0,95	0,01;0,99	1055	254	135	82	56	41	32	26	22	19
0,95	0,005;0,995	1250	330	157	94	63	47	36	29	25	21
0,95	0,001;0,999	1595	421	207	122	83	60	47	37	31	26

## 2.10. Методика вычислений

Современный уровень развития прикладных методов численных математических расчетов с использованием персональных компьютеров позволяет пользователю решать соответствующие задачи без знания основ алгоритмических языков, доступных ранее лишь профессиональным программистам. Широко распространенные прикладные математические пакеты *Mathcad*, *Matlab*, *S-plus* и многие другие вполне адаптированы для этих целей. Обширные справочные статистические таблицы, сопровождающие учебные пособия по теории вероятностей и математической статистике, по всей видимости, становятся анахронизмом, так как вышеуказанные программные комплексы позволяют в течение секунд воссоздать достаточно большой объем табличных значений при наличии аналитического алгоритма.

Поэтому рассматриваемые в работе сложные алгоритмы и методы вычислений точечных и доверительных оценок характеристик механических свойств имеют обобщенный характер и могут быть легко реализованы для распределений и моделей, не рассмотренных в работе. Это, например, уравнения (2.40)-(2.42) для ММП-оценок, (2.63), (2.64) и (2.72)-(2.75) для МНК-оценок и их ковариационных матриц, требующие решения систем трансцендентных уравнений, матричных преобразований, численного расчета определенных интегралов в том числе с бесконечными пределами. С этими задачами легко справляются вышеуказанные стандартные математические пакеты, имеющие, как правило, большой выбор методов минимизации функций многих переменных, символьного и численного дифференцирования и интегрирования, стандартных статистических распределений и т.д. При этом в данной работе получены некоторые частные решения (см., например, уравнения (2.43)-(2.58)). В связи с вышеизложенным в работе приведены лишь некоторые таблицы, расчет которых пользователем представляется нецелесообразным.



Все расчеты в рассматриваемых ниже примерах выполнены с применением статистического комплекса в среде *Mathcad*. Приведенные ниже примеры взяты из работ [7,13].

## 2.11. Примеры

**Пример 2.1.** В результате усталостных испытаний 22 образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений  $\sigma_a = 210$  Мпа измерены значения долговечностей: 646000, 713000, 788000, 860000, 951000, 1060000, 1210000, 1250000, 1310000, 1590000, 1710000, 1960000, 2490000, 3020000, 3820000, 4820000, 5990000, 7830000, 9710000, 16300000, 27800000, 36700000. Произвести ММП-оценку параметров логарифмически нормального распределения долговечности.

Оценки параметров рассчитывают как корни системы уравнений (2.43)-(2.46):

$$\hat{x}_0 = 632110; \hat{a}_l = 14,104; \hat{\sigma}_l = 1,891,$$

или в десятичных логарифмах  $\hat{a}_l' = 6,13$  ;  $\hat{\sigma}_l' = 0,82$ ,

**Пример 2.2.** В результате усталостных испытаний 25 образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений  $\sigma_a = 210$  Мпа измерены значения долговечностей: 982000, 1970000, 2200000, 2350000, 3190000, 3660000, 4760000, 4980000, 5400000, 6530000, 8280000, 9040000. Испытания проводились при ограниченной базе  $10^7$  циклов. Число неразрушенных образцов на этой базе составляет  $r = 13$ . Произвести ММП-оценку параметров двухпараметрического логарифмически нормального распределения долговечности.

Оценки параметров рассчитывают как корни системы уравнений (2.43)-(2.46) при  $x_0 = 0, m = 1, r = 13, k = 12$  :

$$\hat{a}_l = 16,133(7,0079); \hat{\sigma}_l = 1,172 (0,5107).$$

В скобках указаны значения в десятичных логарифмах. Элементы ковариационной матрицы оценок параметров рассчитываются по уравнениям (2.49)-(2.55):

$$\nu_{1,1}^* = 1,581; \nu_{1,2}^* = 0,681; \nu_{2,2}^* = 1,329.$$

**Пример 2.3.** В результате усталостных испытаний 17 образцов из сплава АВ измерены значения долговечностей: 445000, 571000, 596000, 890000, 893000, 927000, 1213000, 1313000, 1408000, 1493000, 1782000, 2113000, 2225000, 2299000, 2332000, 3615000, 4583000. Произвести МНК-оценку параметров двухпараметрического логарифмически нормального распределения долговечности.

Оценки метода наименьших квадратов рассчитывают по уравнениям (2.70) при  $x_0 = 0$ ,  $k = 17$ :

$$\hat{a}_l = 14,146(6,143); \hat{\sigma}_l = 0,672(0,292).$$

В скобках указаны значения в десятичных логарифмах. Элементы ковариационной матрицы оценок параметров рассчитываются по уравнениям (2.71):

$$\nu_{1,1}^* = 1,0003; \nu_{1,2}^* = 0; \nu_{2,2}^* = 0,543.$$

Рассчитывая оценки по 14 первым значениям получаем:

$$\hat{a}_l = 14,146(6,1437); \hat{\sigma}_l = 0,6695(0,2908),$$

$$\nu_{1,1}^* = 1,0558; \nu_{1,2}^* = 0,1008; \nu_{2,2}^* = 0,727.$$

**Пример 2.4.** В результате усталостных испытаний 7 образцов из сплава 1420 измерены значения долговечностей: 26700, 58090, 72190, 74100, 95990, 122400, 136790. Произвести МНК-оценку параметров двухпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко.

Оценки параметров сдвига и масштаба методом наименьших квадратов рассчитывают по уравнениям (2.70), после чего по уравнениям (2.78) определяют оценки параметров  $b, c$  распределения Вейбулла-Гнеденко при  $x_0 = 0$ ,  $k = 7$ :

$$\hat{a} = 11,467; \hat{\sigma} = 0,4498; \hat{b} = 2,223; \hat{c} = 95607.$$

Элементы ковариационной матрицы оценок параметров рассчитываются по уравнениям (2.71):

$$\nu_{1,1}^* = 2,209; \nu_{1,2}^* = 0,677; \nu_{2,2}^* = 1,494 .$$

**Пример 2.5.** В условиях примера 2.1. произвести оценку квантиля уровня  $p = 0,1$  логарифмически нормального распределения долговечности.

Оценку квантиля производят по формуле (2.19):

$$\ln(\hat{N}_p - \hat{x}_0) = \hat{a}_l + z_p \cdot \hat{\sigma}_l = 14,104 - 1,282 \cdot 1,891 = 11,68; \hat{N}_p = e^{11,68} + 632110 = 750331 \text{ ц.}$$

**Пример 2.6.** В результате усталостных испытаний 20 образцов из сплава АВ измерены значения долговечностей: 177000, 182000, 210000, 211000, 228000, 247000, 264000, 273000, 285000, 291000, 297000, 305000, 313000, 404000, 410000, 415000, 467000, 473000, 524000. Вычислить нижнюю 90% ( $\beta = 0,9$ ) доверительную границу для квантилей уровней  $p = 0,5; 0,01$  долговечности на основе двухпараметрического логарифмически нормального закона.

Оценки параметров в полной выборке вычисляют по формулам (2.47), (2.48):

$$\hat{a}_l = \frac{\sum_{i=1}^n \ln N_i}{n} = \frac{251,9}{20} = 12,595 ,$$

$$\hat{\sigma}_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln N_i - \hat{a}_l)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,97}{19}} = 0,322 .$$

Оценки медианы и квантиля уровня  $p = 0,01$  вычисляют по уравнениям (2.19) с соответствующей заменой параметров распределения их оценками:

$$\ln \hat{N}_{0,5} = \hat{a}_l = 12,595, \hat{N}_{0,5} = e^{12,595} = 2,95 \cdot 10^5 \text{ циклов},$$

$$\ln \hat{N}_{0,01} = \hat{a}_l - z_p \cdot \hat{\sigma}_l = 12,595 - 2,326 \cdot 0,322 = 11,846; \hat{N}_{0,01} = e^{11,846} = 1,39 \cdot 10^5 \text{ циклов}.$$

Доверительные границы для квантилей рассчитывают по формулам (2.81), (2.82):

$$\ln \hat{N}_{0,5l} = 12,595 - \frac{1,33}{\sqrt{20}} \cdot 0,322 = 12,503; \hat{N}_{0,5l} = 2,68 \cdot 10^5 \text{ циклов},$$

$$\ln \hat{N}_{0,01l} = 12,595 - \frac{13,7}{\sqrt{20}} \cdot 0,322 = 11,605; \hat{N}_{0,01l} = 1,098 \cdot 10^5 \text{ циклов}.$$

Квантили нецентрального распределения Стьюдента рассчитываются по формулам (2.83), (2.84) для заданной доверительной вероятности  $\beta = 0,9$ .

**Пример 2.7.** Для выборки объемом  $n = 30$  из произвольного непрерывного распределения определить непараметрическим методом вероятность накрытия квантиля уровня  $p = 0,1$  интервалом между первым и шестым членами вариационного ряда.

Доверительная вероятность определяется по формуле (2.102) для  $r = 1, s = 6, n = 30, p = 0,3$ :

$$P\{x_1 \leq x_{p=0,1} < x_6\} = \beta = \sum_{i=1}^{6-1} C_{30}^i \cdot 0,1^i \cdot (1-0,1)^{30-i} = 0,884.$$

**Пример 2.8.** В результате испытаний на разрыв 20 образцов дюралюминиевого пресованного профиля измерены значения временных сопротивлений  $\sigma_B$ , МПа: 434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477. Произвести оценку квантилей временного сопротивления для уровней 0,01; 0,1; 0,5; 0,9; 0,99. Для  $\beta = 0,95$  определить нижние и верхние доверительные границы квантилей. Построить эмпирическую функ-

цию распределения и доверительную область для функции распределения временного сопротивления на основе нормального закона.

Оценка параметров нормального закона распределения временного сопротивления производится по формулам (2.47), (2.48):  $\hat{\sigma} = 453 \text{ МПа}$ ,  $\hat{\sigma} = 11,26 \text{ МПа}$ . Оценку квантилей производят по формулам (2.14) с соответствующей заменой параметров распределения их оценками. Доверительные границы рассчитываются по формулам (2.81), (2.82), квантили нецентрального распределения Стьюдента рассчитываются по формулам (2.83), (2.84) для заданной доверительной вероятности  $\beta = 0,95$ . Все расчеты сведены в таблицу 2.3. На рисунке 2.2. показаны эмпирическая функция распределения, верхние и нижние односторонние доверительные границы квантилей временного сопротивления, а область заключенная между этими линиями, представляет собой 90% доверительную область функции распределения временного сопротивления.

Таблица 2.3.

Доверительные границы для функции распределения временного сопротивления

Характеристика	$p$	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99
	$z_p$	-2,326	-1,282	0	1,282	2,326
$t_{0,95}(19, z_p \cdot \sqrt{20})$		14,734	8,616	1,731	-3,842	-7,824
$\sigma_{Bpl}$ , МПа		416	431	449	463	473
$\sigma_{Bp}$ , МПа		427	439	453	467	479
$\sigma_{Bpu}$ , МПа		433	443	457	475	490

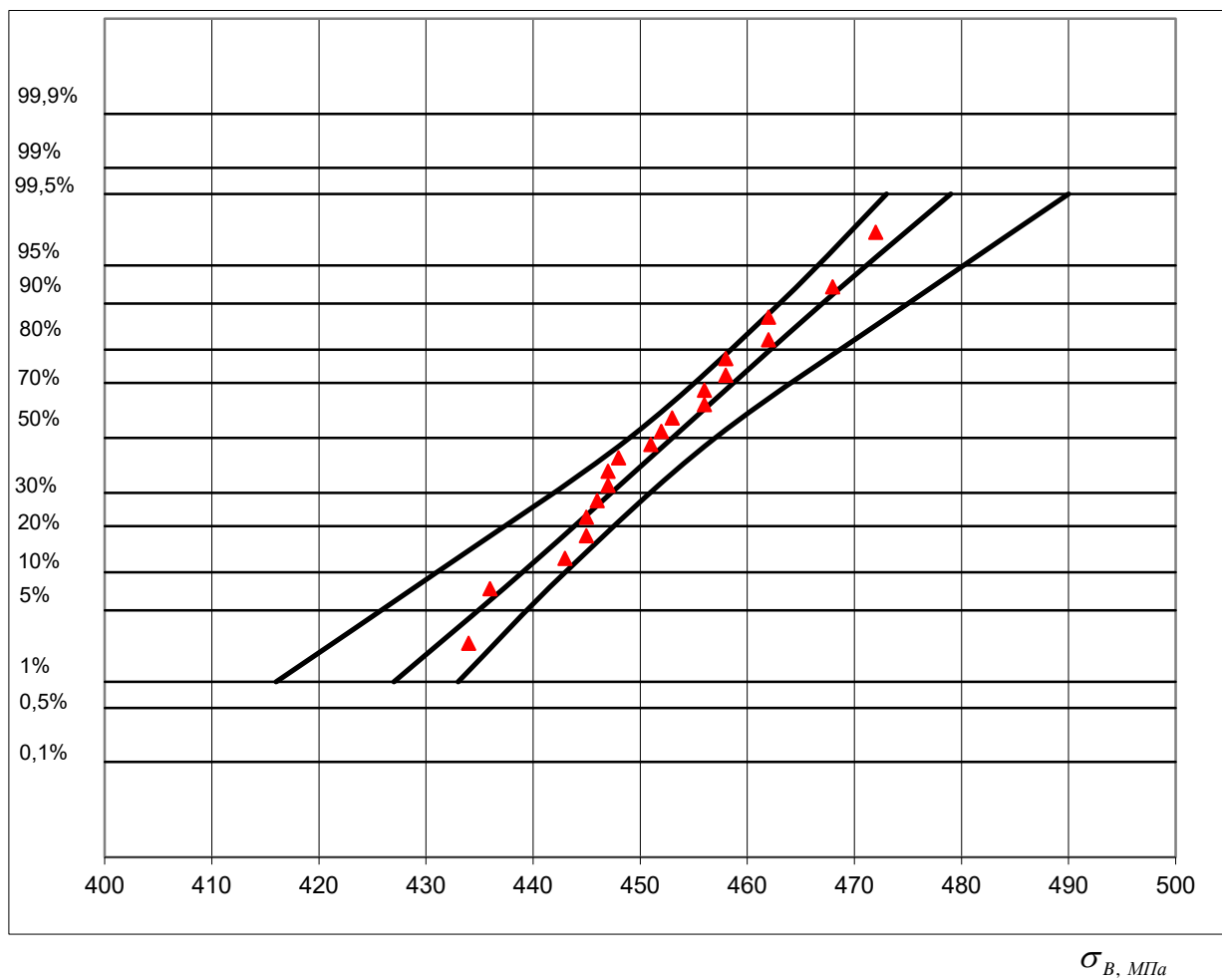
$p, \%$ 

Рис.2.2. 90%-ная доверительная область распределения предела прочности образцов из дюралюминиевого профиля на нормальной вероятностной сетке

### 3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов механических испытаний

#### 3.1. Основные понятия

**Нулевая гипотеза**  $H_0$  - основная гипотеза, состоящая, как правило, в предположении, что изучаемые явления не имеют существенных различий.

**Альтернативная гипотеза**  $H_A$  - гипотеза, противоположная по смыслу основной гипотезе.

**Критическая область** – значения выборочной статистики, при которых нулевая гипотеза отвергается.

**Ошибка 1-го рода** - отклонение нулевой гипотезы, в то время как она верна (вероятность ошибки 1-го рода -  $\alpha$ ).

**Ошибка 2-го рода** - принятие нулевой гипотезы, в то время как она неверна (вероятность ошибки 2-го рода -  $\beta$ ).

**Мощность критерия** - вероятность отклонить неверную нулевую гипотезу ( $\beta_1 = 1 - \beta$ ).

**Критерий значимости** - статистика, устанавливающая с определенной вероятностью значимость отличия одного изучаемого явления от другого.

**Уровень значимости критерия**  $\alpha$  - вероятность отклонения нулевой гипотезы в то время, как она верна (вероятность ошибки 1-го рода), обычно  $\alpha = 0,05$ , реже 0,01.

**Двусторонний критерий значимости** - критерий, оценивающий абсолютное расхождение между случайными величинами.

**Односторонний критерий значимости** - критерий, оценивающий расхождение между двумя случайными величинами, когда одна из них строго больше другой (или строго меньше другой).

#### 3.2. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся (аномальных) результатов испытаний

Описываемые в данном разделе критерии применяют для отбрасывания



резко выделяющихся результатов испытаний в том случае, когда причина резких отклонений не обнаруживается во время проведения эксперимента, но значение полученной механической характеристики отдельного образца вызывает сомнение. Критерии применяются для случая нормального (логарифмически нормального) распределения исследуемой величины. При выборках объемом больше 50 отбрасывание выделяющихся результатов наблюдений обычно не проводят, поскольку они не оказывают заметного влияния на точность оценки числовых характеристик и параметров распределения случайной величины.

Нулевой гипотезой при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее или наименьшее значение вариационного ряда принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные наблюдения.

**Критерий Граббса** применяют в тех случаях, когда имеются статистические данные по рассматриваемой выборке. Для этого рассчитывают статистики:

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s}, u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{x}$ ,  $s$  - выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение,

$x_1, x_n$  - крайние члены вариационного ряда.

Рассчитанное значение  $u$  сопоставляют с критическим  $u_\alpha$  для заданного уровня значимости  $\alpha$  и объема выборки  $n$ . Критические значения определяются из уравнения [40]:

$$u_\alpha = (n-1) \cdot \sqrt{\frac{t_{\alpha/n, n-2}^2}{n \cdot (n-2 + t_{\alpha/n, n-2}^2)}}, \quad (3.2)$$

где  $t_{\alpha/n, n-2}^2$  - квантиль распределения Стюдента уровня  $\alpha/n$  с числом степеней свободы  $f = n-2$ . Для двустороннего критерия  $\alpha/n$  заменяют на  $\alpha/2n$ .

Нулевую гипотезу принимают, если  $u \leq u_\alpha$  и отвергают в противном случае.

При логарифмически нормальном распределении критерии для отбра-  
сывания резко выделяющихся испытаний применяют к логарифмам случай-  
ной величины. В формуле (3.1) в этом случае  $x$  - логарифмы наблюдаемых  
значений;  $\bar{x}$  и  $s$  - оценки математического ожидания и среднего квадратично-  
го отклонения логарифма случайной величины соответственно;  $\sigma$  - среднее  
квадратичное отклонение логарифма случайной величины.

### 3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных сово- купностей. Критерий Фишера ( $F$ -критерий)

Дисперсии двух совокупностей объемами  $n_1$  и  $n_2$ , подчиняющихся нор-  
мальному (логарифмически нормальному) закону распределения, сравнивают  
с помощью двустороннего критерия  $F$ . Для этого рассчитывают дисперсион-  
ное отношение  $F$  по формуле [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} - \text{при } s_1^2 > s_2^2 \quad (3.3)$$

или

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} - \text{при } s_2^2 > s_1^2, \quad (3.4)$$

где  $s_1^2, s_2^2$  - выборочные дисперсии.

Дисперсионное отношение  $F$  сопоставляют с критическим значением  $F_\alpha$   
для заданного уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  
 $f_1 = n_1 - 1, f_2 = n_2 - 1$ , где  $f_1$  - число степеней свободы для большей дисперсии.  
В случае соблюдения условия  $F \leq F_\alpha$ , принимают нулевую гипотезу о равен-  
стве генеральных дисперсий. В противном случае нулевая гипотеза отвергает-  
ся.

### 3.4. Проверка гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей. Критерий Стьюдента ( $t$ -критерий)

Критерий Стьюдента применяют для сравнения средних значений двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных, но равных дисперсиях  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Нулевая гипотеза заключается в предположении о равенстве средних  $H_0: a_1 = a_2$ . Для проверки этой гипотезы по выборочным средним  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  и выборочным дисперсиям  $s_1^2, s_2^2$  рассчитывают статистику  $t$  [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (3.5)$$

где

$$s^2 = \frac{f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2}{f_1 + f_2}. \quad (3.6)$$

При использовании критерия Стьюдента предварительно проверяют гипотезу о равенстве дисперсий согласно 3.3. Полученное значение  $t$ -критерия сравнивают с критическим для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f = f_1 + f_2$ . Если  $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}$ , то нулевую гипотезу о равенстве средних принимают. В противном случае  $a_1 \neq a_2$ .

### 3.5. Приближенный $t$ - критерий.

С помощью приближенного  $t$  - критерия производят проверку равенства средних значений при неизвестных и неравных дисперсиях  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ , что обнаруживается при проверке по критерию Фишера. В этом случае вычисляют статистику [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} . \quad (3.7)$$

Для определения числа степеней свободы используют уравнение:

$$f = \frac{1}{c^2 / f_1 + (1-c)^2 / f_2} , \quad (3.8)$$

где

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} . \quad (3.9)$$

Нулевая гипотеза принимается или отвергается при тех же условиях, что и в точном критерии Стьюдента.

В случае цензурированных выборок из нормальных совокупностей для проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений вычисляют статистику (3.7), в которой оценки средних и дисперсий производят как ММП-оценки параметров (см. 2.5.). При двусторонней альтернативной гипотезе  $H_A : a_1 \neq a_2$ , для выполнения нулевой гипотезы должны выполняться неравенства [6,7]:

$$|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad |t| < -t_{\frac{\alpha}{2}} .$$

Вывод приближенных критических значений  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}}$  аналогичен выводу

доверительных интервалов для квантилей в цензурированных выборках (см.2.7.). С этой целью рассматривают случайную величину

$\varphi = a_1 - a_2 - (\hat{a}_{1u} - \hat{a}_{2u}) = a_1 - a_2 - (\hat{a}_1 - \hat{a}_2) + t \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}$ , математическое ожидание и дисперсия которой приближенно равны:

$$M\{\varphi\} \approx t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \quad (3.10)$$

$$D\{\varphi\} \approx \left( \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \right) \cdot \left\{ c \cdot (v_{11}^*)_1 + (1-c) \cdot (v_{11}^*)_2 + t^2 \cdot \left[ \frac{c^2 \cdot (v_{22}^*)_1}{n_1} + \frac{(1-c)^2 \cdot (v_{22}^*)_2}{n_2} \right] + \right. \\ \left. 2 \cdot t \cdot \left[ \sqrt{\frac{(1-c)^3}{n_2}} \cdot (v_{12}^*)_2 - \sqrt{\frac{c^3}{n_1}} \cdot (v_{12}^*)_1 \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Вероятность  $1 - \frac{\alpha}{2}$  того, что  $P\{\varphi < 0\}$  приводит к следующему приближенному уравнению:

$$z_\beta \approx \frac{M\{\varphi\}}{\sqrt{D\{\varphi\}}} = \frac{t}{\sqrt{v_{1,1}^* + 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot v_{1,2}^* + \frac{t^2}{n} \cdot v_{2,2}^*}}, \quad (3.12)$$

из которого после преобразований можно определить по уравнениям (2.89)-(2.92) приближенное значение  $t$  при  $\Delta = 0$ ,  $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . При этом с учетом (3.11) и поправок на смещение оценок:

$$v_{11}^* = c \cdot (v_{11}^*)_1 + (1-c) \cdot (v_{11}^*)_2, \quad \frac{v_{22}^*}{n-1} = \frac{c^2 \cdot (v_{22}^*)_1}{n_1} + \frac{(1-c)^2 \cdot (v_{22}^*)_2}{n_2}, \\ \frac{v_{12}^*}{\sqrt{n}} = \left[ \sqrt{\frac{(1-c)^3}{n_2}} \cdot (v_{12}^*)_2 - \sqrt{\frac{c^3}{n_1}} \cdot (v_{12}^*)_1 \right] \quad (3.13)$$

Элементы ковариационных матриц для первой и второй выборок имеют

соответствующие индексы и определяются по уравнениям (2.41), (2.42) для ММП-оценок и (2.64) для МНК-оценок. Для полных выборок  $\nu_{11}^*=1$ ,  $\nu_{22}^*=0,5$ ,  $\nu_{12}^*=0$  получаем приближенный  $t$ - критерий (3.7)-(3.9).

### 3.6. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий ряда генеральных совокупностей. Критерий Бартлета

Однородность (равенство) дисперсий ряда выборок из нормально распределенных совокупностей оценивают с помощью критерия Бартлета. Для этого рассчитывают статистику критерия по формуле [2,7,13,14]:

$$\chi^2 = \frac{1}{c} \cdot \left[ \ln(s^2) \cdot \left( \sum_{i=1}^m n_i - m \right) - \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2 \right], \quad (3.10)$$

где  $m$  - количество выборок,  $s_i^2$  - выборочная дисперсия,

$$c = 1 + \frac{1}{3 \cdot (m - 1)} \cdot \left[ \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right], \quad (3.11)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) \cdot s_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m}. \quad (3.12)$$

Если значения  $\chi^2 \leq \chi_{\alpha, f=m-1}^2$ , то нулевая гипотеза об однородности ряда дисперсий подтверждается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза о неравенстве дисперсий.

### 3.7. Проверка гипотезы о равенстве средних ряда генеральных совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ

Равенство (однородность) ряда средних значений оценивают с помощью однофакторного дисперсионного анализа. В основе его лежит предположение о нормальности закона распределения характеристик механических свойств в

каждой выборке и однородности ряда дисперсий. Проверка нулевой гипотезы о равенстве всех средних производят с помощью  $F$ - критерия дисперсионного отношения [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad (3.13)$$

где  $s_1^2$  - дисперсия между  $m$  выборками объемом  $n_i$ , характеризующая рассеяние по факторам,

$s_2^2$  - внутренняя дисперсия, характеризующая внутреннее рассеяние, связанное со случайными колебаниями внутри каждой выборки.

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \cdot (\bar{x}_i - \hat{a})^2}{f_1}, \quad f_1 = m - 1, \quad (3.14)$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{f_2} = \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) \cdot s_i^2}{f_2}, \quad f_2 = \sum_{i=1}^m n_i - m, \quad (3.15)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i}. \quad (3.16)$$

В формулах (3.14)-(3.16)  $\bar{x}_i$ ,  $s_i^2$  - выборочные средние и дисперсии  $i$  - ой выборки,  $x_{i,j}$  -  $j$  - ое значение случайной величины (результат испытания) в  $i$  - ой выборке. Если дисперсионное отношение (3.13) окажется меньше критического значения  $F_\alpha$  критерия Фишера, найденного для уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  $f_1, f_2$ , то нулевая гипотеза о равенстве средних  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$  подтверждается. В этом случае все рассматриваемые ре-



результаты испытаний принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами  $\mu, \sigma^2$ . Оценкой  $\sigma^2$  служит выборочная полная (общая) дисперсия (3.6), а оценкой  $\mu$  - выборочное общее среднее (3.16). В противном случае гипотеза о равенстве средних отвергается. Это означает, что имеет место  $m$  нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией, но с разными средними. Оценкой генеральной дисперсии является величина  $s_2^2$ , а оценками генеральных средних – выборочные средние  $\bar{x}_i$ .

### 3.8. Критерии согласия

Проверка соответствия опытных данных выбранному виду гипотетического распределения целесообразна при объемах выборки не менее 50. В отдельных случаях проверка согласия возможна при меньшем числе образцов. Рекомендуется одновременное применение нескольких критериев в тех случаях, когда результаты проверки по одному критерию не позволяют сделать безусловный вывод о согласии опытного и теоретического распределений. Здесь рассматриваются только такие критерии согласия, которые предполагают неизвестной функцию распределения характеристик механических свойств, то есть параметры функции распределения оцениваются по данным выборочной совокупности, как это практически всегда бывает при механических испытаниях материалов и элементов конструкций. Обычно объемы выборок при механических испытаниях ограничены. Поэтому в данном разделе не рассматриваются критерии согласия, требующие больших объемов испытаний ( $n > 100$ ).

### 3.8.1. Критерий Шапиро-Уилка

Критерий Шапиро-Уилка ( $W$ -критерий) предназначен для проверки гипотезы о **нормальном** (логарифмически нормальном) распределении [7,13,15,16]. При ограниченном объеме опытных данных ( $n \leq 50$ ) критерий  $W$  является наиболее мощным. Результаты механических испытаний располагают в вариационный ряд и вычисляют статистику критерия:

$$W = \frac{b^2}{s^2}, \quad (3.17)$$

где  $s^2$  вычисляется по формуле:

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (3.18)$$

а величина оценки  $b$  определяется по уравнению [15,16]:

$$b = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i, \quad a_i = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot v_{i,j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot v_{i,j} \right)^2}}, \quad (3.19)$$

где  $\alpha_i$  - математическое ожидание  $i$ -ой порядковой статистики в выборке из нормированного нормального распределения,  $v_{i,j}$  - ковариация  $i$ -ой и  $j$ -ой порядковых статистик, определяемые по уравнениям (2.72)-(2.75), при этом  $(v) = (V)^{-1}$ . Вычисленное значение  $W$  сравнивают с критическим в соответствии с Приложением П1. Если  $W$  больше критического значения  $W_\alpha$  для объема выборки  $n$ , то нулевая гипотеза принимается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза.

### 3.8.2. Критерий Смирнова

Критерий Смирнова  $\omega^2$  рекомендуется использовать для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения **нормальному** закону, параметры которого оцениваются по данным выборки при объемах не менее 50 [7,13,17-19]. Для этого вычисляют статистику:

$$\omega^2 = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_{i=1}^n [F(x_i) - W(x_i)]^2, \quad (3.20)$$

где  $W(x_i)$  - накопленная частость (см. раздел 2.8.) и составляют неравенство:

$$\omega^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot n) \leq \Omega_{\alpha}. \quad (3.21)$$

Если неравенство (3.21) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Критические значения критерия  $\Omega_{\alpha}$  составляют для уровней значимости:  $\alpha = 0,15, \Omega_{\alpha} = 0,091$ ;  $\alpha = 0,10, \Omega_{\alpha} = 0,104$ ;  $\alpha = 0,05, \Omega_{\alpha} = 0,126$ ;  $\alpha = 0,01, \Omega_{\alpha} = 0,178$ .

### 3.8.3. Критерий Андерсона-Дарлинга

Критерий Андерсона-Дарлинга используют для проверки **нормальности** в тех случаях, когда больший интерес представляет соответствие эмпирической функции распределения теоретической в области крайних значений случайной величины (на «хвостах» распределения) при объемах испытаний не менее 50. С этой целью вычисляют статистику [17-19]:

$$A^2 = -n - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \ln F(x_i) + \left( 1 - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right) \ln [1 - F(x_i)] \right\}, \quad (3.22)$$

и составляют неравенство:

$$\left( A^2 - \frac{0,7}{n} \right) \cdot \left( 1 + \frac{3,6}{n} - \frac{8,0}{n^2} \right) \leq A_\alpha. \quad (3.23)$$

Если неравенство (3.23) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Критические значения критерия  $A_\alpha$  составляют для уровней значимости:  $\alpha = 0,15$ ,  $A_\alpha = 0,576$ ;  $\alpha = 0,10$ ,  $A_\alpha = 0,656$ ;  $\alpha = 0,05$ ,  $A_\alpha = 0,787$ ;  $\alpha = 0,01$ ,  $A_\alpha = 1,092$ .

### 3.8.4. Критерий $\chi^2$

Критерий согласия  $\chi^2$  применяется для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения **произвольному** теоретическому распределению, параметры которого оцениваются по выборке. С этой целью рассчитывают статистику [2,7,13]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^e \frac{(n_i - n \cdot P_i)^2}{n \cdot P_i}. \quad (3.24)$$

Для расчета статистики (3.24) размах варьирования случайной величины разбивают на интервалы и для каждого из них определяют число наблюдений  $n_i$ . Интервалы, содержащие менее 5 наблюдений объединяют с соседними. Пользуясь оценками параметров функции распределения  $F(x)$ , определяют оценку вероятности попадания случайной величины в интервал  $P_i$ . Расчетное значение критерия сопоставляют с критическим  $\chi^2(\alpha, f)$ , найденным для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f = e - d - 1$  ( $e$  - количество интервалов после их объединения,  $d$  - число параметров функции распределения, оцениваемых по данным выборки). Если значение статистики (3.24) меньше критического то нулевая гипотеза о соответствии опытных данных выбранному гипотетическому распределению принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается.

### 3.8.5. S-Критерий

S-критерий применяют для проверки гипотезы о принадлежности результатов испытаний характеристик механических свойств двухпараметрическому распределению Вейбулла-Гнеденко или нормальному (логарифмически нормальному) закону распределения в случае полной выборки или цензурированной выборки II типа. С этой целью рассчитывают статистику [6,7,20]:

$$S = \frac{\sum_{i=\text{int}(r/2)+1}^{r-1} \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \right]}{\sum_{i=1}^{r-1} \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \right]} \leq S_{\alpha, n, r}, \quad (3.25)$$

где  $\alpha_i$  - математические ожидания члена вариационного ряда;

$y = \lg(N - N_0)$  - для распределения Вейбулла-Гнеденко или логарифмически нормального закона распределения;

$y = \lg N$  - для нормального распределения;

$r$  - число наблюдаемых значений случайной величины в выборке объема  $n$ .

Критические значения критерия рассчитывают методом Монте-Карло.

### 3.9. Непараметрические критерии для проверки статистических гипотез

#### 3.9.1. Критерий знаков для медианы

При использовании критерия знаков [2,21] рассматривают последовательность, состоящую из  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых могут осуществиться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равновероятности положительного и отрицательного исходов. Пусть проведены испытания первой ( $X$ ) и второй ( $Y$ ) совокупностей и получены значения ХМС, расположенные в порядке испытаний:

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в  $n$  пар испытаний получены  $k$  положительных разностей,  $m$  - отрицательных и  $l$  нулевых;  $n_1 = n - l$ . Нулевую гипотезу о равенстве медиан ХМС двух совокупностей не отвергают, если число  $k$  попадает в область допустимых значений  $k_{al}, k_{cu}$ , с уровнем значимости  $\alpha$ . Границы допустимых значений рассчитывают по формулам [21]:

$$\alpha = 0,5^{n_1} \cdot \sum_{i=0}^{k_{al}} \frac{n_1!}{i!(n_1-i)!}, k_{cu} = n_1 - k_{al}. \quad (3.26)$$

Для проверки нулевой гипотезы  $H_0: P=0,5$  при альтернативной гипотезе  $H_A: P<0,5$  должно выполняться неравенство  $k \geq k_{al}$ . При альтернативной гипотезе  $H_A: P>0,5$  должно выполняться неравенство  $k \leq k_{cu} = n_1 - k_{al}$ . При двусторонней альтернативной гипотезе выполняется неравенство  $H_A: P \neq 0,5; k_{al} \leq k \leq k_{cu}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов ис-



пытаний ХМС общей генеральной совокупности.

### 3.9.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона

В отличие от критерия знаков критерий знаковых рангов Уилкоксона учитывает расстояние наблюдений относительно нуля посредством рангов [2,21].

Пусть пары случайных величин  $\{X, Y\}$  представляют собой результаты механических испытаний двух совокупностей с совместной функцией распределения  $F(X, Y)$ . Одну из выборок подвергают некоторой обработке. Результаты механических испытаний другой выборки используют для контроля влияния обработки. Обработку и контроль назначают независимо и случайно. Критерий проверяет нулевую гипотезу об отсутствии различия между обработкой и контролем. Это означает, что при выполнении нулевой гипотезы случайная величина  $Z = X - Y$  распределена симметрично относительно нуля. Критерий также используют для проверки гипотезы о симметрии непрерывного распределения  $F(x)$  относительно центра  $\theta$ . Для этого вместо второй выборки задают  $n$  значений, равных  $\theta$ . Результаты испытаний образцов первой  $X$  и второй  $Y$  совокупностей располагают в порядке испытаний:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_n; \\ y_1, y_2, \dots, y_n; \\ z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \dots, z_n = x_n - y_n. \end{aligned}$$

Абсолютные значения разностей  $|z_i|$  располагают в порядке возрастания (ранжируют) и подсчитывают сумму рангов  $T$  (порядковых номеров) положительных значений  $z_i$  в этом ряду. Нулевые разности не учитывают, то есть  $n_1 = n - l$ . Для проверки нулевой гипотезы:  $H_0: \theta = 0$  где  $\theta$  - медиана генеральной совокупности разностей, из которой извлекают выборку, при альтернативной гипотезе  $H_A: \theta < 0$  должно выполняться неравенство  $T > T_{\alpha l}$ . При аль-

тернативной гипотезе  $H_A : \theta > 0$  должно выполняться следующее неравенство:

$$T \leq T_{\alpha\alpha} = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - T_{\alpha l}. \quad (3.27)$$

При двусторонней альтернативной гипотезе  $H_A : \theta \neq 0$  должно выполняться неравенство  $T_{\alpha l} \leq T \leq T_{\alpha\alpha}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Точные критические значения вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [21]:

$$M(x) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + x^i)}{2^n}. \quad (3.28)$$

Степень полинома (3.28) определяет все возможные наблюдаемые значения статистики  $T$  в выборке объема  $n$ , а коэффициенты полинома определяют распределение вероятностей этих значений.

Другим способом точного вычисления распределения статистики знаковых рангов Уилкоксона является использование следующей рекуррентной формулы [21]:

$$\bar{P}(i, k) = \bar{P}(i-1, k) + \bar{P}(i-1, k-i); P(n, x) = \frac{\bar{P}(n, x)}{2^n}; i = 1..n; k = 0..x, \quad (3.29)$$

при следующих начальных условиях:

$$P(a, b) = 0 \text{ при } a > 0, b < 0, P(a, b) = 0 \text{ при } a = 0, b < 0, P(a, b) = 1 \text{ при } a = 0, b = 0. \quad (3.30)$$

Для приближенного расчета при больших  $n$  вычисляют статистики  $T_1, T_1^*$  по формулам [22-24]:

$$T_1 = \frac{T - \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{4}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot (n_1 + 1) \cdot (2 \cdot n_1 + 1)}{24}}}; T_1^* = \frac{T_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 - T_1^2}} \right). \quad (3.31)$$

Нулевую гипотезу принимают, если  $T_{\frac{\alpha}{2}}^* < T_1^* < T_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$ , где

$$T_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 0,5 \cdot \left[ t_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = -T_{\frac{\alpha}{2}}^*; \quad (3.32)$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль уровня  $1-\frac{\alpha}{2}$  распределения Стьюдента с числом степеней

свободы  $f = n_1 - 1$ ;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль уровня  $1-\frac{\alpha}{2}$  нормированного нормального распределе-

ния.

### 3.9.3. Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий предназначен для проверки гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности [7,13]. Если рассматриваемая характеристика механических свойств распределена нормально (логарифмически нормально), то проверка принадлежности двух выборок общей генеральной совокупности сводится к проверке однородности дисперсий и средних значений.

При произвольном распределении в качестве статистики критерия Колмогорова-Смирнова служит наибольшая разность между накопленными частотами, которые рассчитывают для каждого значения случайной величины  $X$  обеих выборочных совокупностей объемом  $n_1$  и  $n_2$ :

$$k = \max |W_1(x) - W_2(x)|. \quad (3.32)$$

При больших  $n$  значения  $k$  рассчитывают на общих границах интервалов, которые должны быть одинаковой ширины для обеих выборок. Рассчитанное значение  $k$  сравнивают с критическим  $k_\alpha$ . Если  $k \leq k_\alpha$ , гипотеза о принадлежности двух независимых выборок одной генеральной совокупности подтверждается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Для средних и больших выборок ( $n_1 + n_2 > 35$ ) значение  $k_\alpha$  рассчитывают по формуле:

$$k_\alpha = D_\alpha \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}, \quad (3.33)$$

где  $D_\alpha = 0,5 \cdot \sqrt{\ln \frac{2}{\alpha}}$ ,  $D_\alpha = 1,22$  для  $\alpha = 0,10$ ;  $D_\alpha = 1,36$  для  $\alpha = 0,05$ ;  $D_\alpha = 1,63$

для  $\alpha = 0,01$ .

### 3.9.4. Двухвыборочный критерий Уилкоксона

Критерий предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, то есть об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении [2,21,25]. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - случайная выборка из  $F(x - \theta_x)$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - случайная выборка из  $F(y - \theta_y)$  ( $m \leq n$ ). Функцию распределения  $F$  не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности  $H_0 : \Delta = \theta_y - \theta_x = 0$  против альтернативы  $H_A : \Delta \neq 0$  строят вариационный ряд из  $k = m + n$  наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду:

$$W = \sum_{i=1}^m R_i . \quad (3.34)$$

Для проверки нулевой гипотезы:  $H_0 : \Delta = 0$  при альтернативной гипотезе  $H_A : \Delta < 0$  должно выполняться неравенство  $W > W_{al}$ . При альтернативной гипотезе  $H_A : \Delta > 0$  должно выполняться следующее неравенство  $W \leq W_{au}$ . При двусторонней альтернативной гипотезе  $H_A : \Delta \neq 0$  должно выполняться неравенство  $W_{al} \leq W \leq W_{au}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Точные критические значения статистики  $U$ , считающей сколько раз элемент первой выборки превосходит элемент второй выборки [  $U = W - 0,5 \cdot m(m+1)$  ] вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [2]:

$$M(x) = \frac{m! \cdot n! \cdot \prod_{i=1}^{m+n} (x^i - 1)}{(n+m)! \cdot \prod_{i=1}^m (x^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^n (x^i - 1)} . \quad (3.35)$$

Методика расчет точных критических значений суммы рангов такая же, как и описанная выше методика для критерия знаковых рангов. Другим способом точного вычисления распределения статистики Уилкоксона является использование следующей рекуррентной формулы [21]:

$$P(i, j, k) = \frac{j}{i+j} \cdot P(i, j-1, k-i) + \frac{i}{i+j} \cdot P(i-1, j, k); i = 1..m; j = 1..n; k = 0..x , \quad (3.36)$$

при следующих начальных условиях:

$$P(i, j, k) = 0, \text{ при } k < 0; P(i, 0, k) = 1 \text{ при } k = 0; P(i, 0, k) = 0 \text{ при } k \neq 0 . \quad (3.37)$$

Для приближенного расчета при больших  $m, n$  вычисляют статистики  $W_1, W_1^*$  по формулам [22-24]:

$$W_1 = \frac{W - \frac{n \cdot (m+n+1)}{2} + 0,5}{\sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (m+n+1)}{12}}}; W_1^* = \frac{W_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{m+n-2}{m+n-1-W_1^2}} \right). \quad (3.38)$$

Нулевую гипотезу принимают, если для двустороннего критерия с уровнем значимости  $\alpha$  выполняется неравенство  $W_{\frac{\alpha}{2}}^* < W_1^* < W_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$ , где

$$W_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 0,5 \cdot \left[ t_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = -W_{\frac{\alpha}{2}}^* ; \quad (3.39)$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль уровня  $1-\frac{\alpha}{2}$  распределения Стюдента с числом степеней

свободы  $f = m + n - 2$ ;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль уровня  $1-\frac{\alpha}{2}$  нормированного нормального распределе-

ния.

В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

### 3.9.5. Критерий Краскела-Уоллиса

Критерий Краскела-Уоллиса [2,21,26] обобщает задачу о двух выборках на случай  $k$  выборок:  $x_{ij}, i = 1, k; j = 1, n_j$  с функциями распределения  $F(x - \theta_j)$ , где  $n_j$  - число наблюдений в  $j$ -ой выборке. Нулевая гипотеза утверждает, что  $k$  выборок из произвольных совокупностей можно рассматривать как одну (объединенную) выборку из общей совокупности, то есть утверждается равенство параметров сдвига  $\theta_j$ , когда не задано значение общего параметра масштаба  $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$  против альтернативы  $H_A: \theta_1, \dots, \theta_k$  не все равны. Для проверки нулевой гипотезы строят общий вариационный ряд из  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  наблюдений и рассчитывают статистику:

$$H = \frac{12}{N \cdot (N + 1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot N \cdot (N + 1), \quad (3.40)$$

где  $R_i$  - сумма рангов  $i$  ой выборки в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают величину  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H}{2} \cdot \left( 1 + \frac{N - k}{N - 1 - H} \right), \quad (3.41)$$

которую сравнивают с критическим значением  $H_\alpha$ :

$$H_\alpha = 0,5 \cdot \left[ (k - 1) \cdot F_{1-\alpha} + \chi_{1-\alpha}^2 \right]; \quad (3.42)$$

где  $F_{1-\alpha}$  - квантиль уровня  $1 - \alpha$   $F$  - распределения с числами степеней свободы  $f_1 = k - 1, f_2 = N - k$ ;

$\chi_{1-\alpha}^2$  - квантиль уровня  $1 - \alpha$  распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $f = k - 1$ .

Нулевую гипотезу принимают, если  $H_1 \leq H_\alpha$  с уровнем значимости  $\alpha$ . В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Другим весьма эффективным способом проверки  $k$  - выборочной гипотезы является попарное сравнение выборок по критерию Уилкоксона с вычислением точных критических значений (см.3.9.4.).

### 3.10. Примеры

**Пример 3.1.** В результате испытаний на разрыв 20 образцов дюралюминиевого пресованного профиля измерены значения временных сопротивлений  $\sigma_B$ , МПа: 434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477. Требуется проверить с помощью критерия Смирнова принадлежность результата испытания последнего образца той же генеральной совокупности, что и остальных 19 образцов.

Для рассматриваемой выборки  $\bar{x} = 453$  МПа,  $s = 11,26$  МПа. На основании формулы (3.1)

$$u_{20} = \frac{477 - 453}{11,26} = 2,12,$$

т. е. значительно меньше критического значения  $u_{0,01} = 2,38$  для  $n = 20$  и уровня значимости 0,10. Следовательно, результат испытания последнего в вариационном ряду образца не является резко выделяющимся, а оказывается принадлежащим той же генеральной совокупности, что и результаты испытаний остальных 19 образцов выборки.

**Пример 3.2.** В результате испытаний двух партий образцов ( $n_1 = 30$  и  $n_2 = 20$ ), вырезанных из разных мест пресованного профиля, найдены выборочные средние значения дисперсии временного сопротивления алюминиевого сплава, которые составили:  $\bar{x}_1 = \bar{\sigma}_{B1} = 401$  МПа,  $s_1^2 = 82$  МПа и  $\bar{x}_2 = \bar{\sigma}_{B2} = 409$  МПа и  $s_2^2 = 71$  МПа соответственно. Требуется оценить значимость расхождения в выборочных дисперсиях.

В рассматриваемом примере  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1,15$ . Для  $f_1 = 29$ ,  $f_2 = 19$  находим  $F_{0,05} = 2,07$ , что говорит об отсутствии значимого различия в пределах прочности образцов, то есть можно принять, что зона профиля равноценна по однородности материала ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ).



**Пример 3.3.** В результате статических испытаний на разрыв образцов из 15 плавок алюминиевого сплава по 20 образцов в каждой партии ( $m=15$  и  $n_i=20$ ) вычислены значения выборочных средних и дисперсий временного сопротивления. Провести дисперсионный анализ с целью проверки равенства средних значений временного сопротивления алюминиевого сплава.

Хар-ка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\bar{x}_i$ , МПа	403,2	412,2	403,1	406,6	400,0	407,3	405,4	401,7	402,6	400,5	403,8	399,3	408,4	401,4	406,0
$s_i^2$ , МПа <sup>2</sup>	20,2	19,6	14,7	21,9	26,5	20,1	46,6	27,6	26,7	43,4	14,9	49,4	18,4	42,6	15,6

Предварительная проверка гипотезы о равенстве дисперсий для всех плавок по критерию Бартлетта подтвердила гипотезу о равенстве дисперсий:

$$s^2 = 27,21 \text{ МПа}^2; c=1,019; \chi^2 = 24,15; \chi_{0,05}^2 = 23,7.$$

Расчеты по формулам (3.13) - (3.16) приводят к следующим результатам:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{15} 20 \cdot \bar{x}_i}{300} = 404,06 \text{ МПа},$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} 20 \cdot (\bar{x}_i - 404,06)^2}{14} = 247,5 \text{ МПа}^2,$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} 19 \cdot s_i^2}{300 - 15} = 27,21 \text{ МПа}^2,$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{247,5}{27,21} = 9,1,$$

что при  $f_1=14$ ,  $f_2=285$  превышает  $F_{0,01}=2,5$ . Следовательно, гипотеза о равенстве средних значений отвергается, то есть колебания в режимах технологии производства полуфабрикатов оказывают значимое влияние на временное сопротивление алюминиевого сплава.

**Пример 3.4.** В условиях примера 3.1 провести проверку гипотезы о принадлежности результатов испытаний распределению Вейбулла-Гнеденко и логарифмически нормальному закону.

Параметр  $x_0$ , определенный в примере 2.1. составляет 632110 – независимая оценка порога чувствительности. Расчет по формуле (3.25) приводит к следующим результатам:

$$S = 0,6408; S_{0,05;22;22} = 0,6409 \text{ - для распределения Вейбулла-Гнеденко,}$$

$$S = 0,5213; S_{0,05;22;22} = 0,6399 \text{ - для логарифмически нормального закона,}$$

что свидетельствует о соответствии результатов испытаний обоим распределениям. При этом несколько лучшее соответствие имеет место для логарифмически нормального закона.

**Пример 3.5.** По результатам статических испытаний на разрыв 20 образцов из сплава АВ измерены значения относительного сужения площади  $\psi_k$ : 0,275; 0,280; 0,285; 0,290; 0,292; 0,298; 0,299; 0,305; 0,308; 0,310; 0,313; 0,315; 0,320; 0,327; 0,340; 0,360; 0,390; 0,409; 0,420; 0,430. Проверить гипотезу о нормальном распределении относительного сужения.

Расчет по формуле (3.17) приводит к следующим результатам:

$$W = \frac{(0,1922)^2}{0,0436} = 0,848 < W_{0,01} = 0,868,$$

что свидетельствует о неприемлемости гипотезы о нормальном распре-

делении величины относительного сужения для сплава АВ.

**Пример 3.6.** На двух машинах одной конструкции при одинаковых режимах было испытано на усталость по 10 идентичных образцов. Значения чисел циклов до разрушения в порядке их испытания и знаки разностей соответствующих пар долговечностей составляют ( $N \cdot 10^{-6}$ ):

машина № 1: 3,18; 2,53; 4,06; 7,92; 1,60; 1,38; 3,91; 2,74; 1,17; 4,47;

машина № 2: 3,92; 1,65; 5,22; 2,86; 1,60; 6,76; 3,99; 2,07; 3,85; 4,78.

Расчеты положительных, отрицательных и нулевых разностей составляют:  $k = 3, m = 6, l = 1, n_1 = 9$ . По формуле (3.26) для  $\alpha = 0,05$  находят, что  $k_{ad} = 2, k_{au} = 7$ , что не дает основания для отбрасывания нулевой гипотезы об отсутствии систематической ошибки в результатах испытаний на одной машине по отношению к другой, то есть о равенстве медиан двух совокупностей результатов испытаний.

**Пример 3.7.** Построить точную функцию распределения статистики критерия знаковых рангов Уилкоксона при  $n = 3$ .

При  $n = 3$  полином (3.28) после преобразования имеет следующий вид:

$$M(x) = \left( \frac{1 + x + x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{8} \right).$$

Степени полинома определяют значения статистики, коэффициенты полинома – частоты распределения, суммированием которых определяются значения точной дискретной функции распределения:

$T$	0	1	2	3	4	5	6
$G(T)$	1	1	1	2	1	1	1
$P(T) = 1 - \alpha$	1/8	2/8	3/8	5/8	6/8	7/8	8/8

Так, например, при проверке нулевой гипотезы о равенстве медиан при двусторонней альтернативной гипотезе, уровень значимости, соответствующий неравенству  $1 < T \leq 5$  по таблице равен  $2/8$ , то есть  $0,25$ .

Данный пример делает очевидной симметрию распределения статисти-

ки  $T$ .

**Пример 3.8.** В условиях примера 3.6. проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю медианы разностей значений долговечностей первой и второй выборок на основании критерия знаковых рангов Уилкоксона. Абсолютные значения разностей составляют: 0,08; 0,31; 0,67; 0,74; 0,88; 1,16; 2,68; 5,06; 5,37;  $n_1 = 9$ . Сумма рангов положительных разностей составляет  $T=3+5+8=16$ . Значения статистик рассчитывают по формуле (3.31):

$$T_1 = \frac{16 - 22,5}{8,44} = -0,77; T_1^* = -\frac{0,77}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{8}{9 - 0,77^2}}\right) = -0,76.$$

Критические значения критерия для уровня значимости  $\alpha=0,05$  рассчитывают по формуле (3.32):

$$T_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 2,133; T_{\frac{\alpha}{2}}^* = -2,133.$$

Таким образом, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Точный расчет критических значений по формуле (3.28) приводит к следующим критическим значениям  $T_{\alpha l} = 6$ ,  $T_{\alpha u} = 39$ . Расчетный уровень значимости при этом составляет  $\alpha=0,054$ . Так как  $T=16 > 6$ , двусторонняя нулевая гипотеза подтверждается.

**Пример 3.9.** Построить точную функцию распределения статистики критерия Уилкоксона при  $m=2, n=3$ .

Полином (3.35) после приведения членов имеет следующий вид:

$$M(x) = \left( \frac{1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6}{10} \right).$$

Степени полинома определяют критические значения статистики, коэффициенты полинома – частоты распределения, суммированием которых определяются значения точной дискретной функции распределения:

$W$	0	1	2	3	4	5	6
$U$	3	4	5	6	7	8	9
$G(W)$	1	1	2	2	2	1	1
$P(W) = 1 - \alpha$	1/10	2/10	4/10	6/10	8/10	9/10	10/10

Так, например, при проверке нулевой гипотезы об отсутствии сдвига в двух выборках при двусторонней альтернативной гипотезе, уровень значимости, соответствующий неравенству  $1 < W \leq 5$  по таблице равен  $2/10$ , то есть 0,20.

## **4. Статистическая обработка результатов**

### **испытаний на усталость**

#### **4.1. Общие положения**

Испытания на усталость относят к прямым испытаниям, если их конечной целью является определение долговечности. В случае построения кривой усталости и дальнейшего определения на ее основании предела выносливости эти испытания относят к **косвенным**. Испытаниям на усталость характерен повышенный разброс результатов, что обусловлено большим числом различных факторов, влияющих на сопротивление усталостному разрушению. Основными факторами, определяющими рассеяние результатов испытаний на усталость, являются макро- и микронеоднородность структуры конструкционных материалов, неоднородность качества поверхности образцов и элементов конструкций, колебания в условиях испытаний (среда, температура и т.п.). Разброс характеристик сопротивления усталостному разрушению зависит также от состояния испытательного оборудования и квалификации обслуживающего персонала, но при соблюдении основных требований к постановке и проведению испытаний влияние последних факторов на рассеяние результатов оказывается незначительным.

В связи с большой длительностью и высокой стоимостью испытаний на усталость вопросы планирования имеют большую актуальность. При косвенных испытаниях планирование предусматривает не только определение необходимого объема испытаний серии образцов или элементов конструкций для оценки усталостных свойств с заданной степенью точности, но и оптимальное распределение этой серии на отдельные группы, испытываемые при различных уровнях нагрузки, а также определение рационального числа групп. В качестве критериев при планировании испытаний на усталость, помимо точности оценки характеристик сопротивления усталости, принимают также стоимость и полное время испытаний [29].

#### **4.2. Определение долговечности при испытаниях на**

## усталость

Статистическая обработка по долговечности может иметь первичный характер при последующем построении кривых усталости и определении значений предела выносливости. При испытаниях на одном-двух уровнях напряжений для обоснования расчетных и нормативных характеристик по ресурсу, для оценки влияния технологических и других факторов обработка по долговечности носит окончательный характер. Исследования закономерностей рассеяния характеристик сопротивления усталостному разрушению легких сплавов показали, что долговечность при постоянном уровне максимального напряжения цикла и предел ограниченной выносливости на заданной базе испытания имеют как нижнюю, так и верхнюю границы [27]. Верхняя граница долговечности на несколько порядков превышает наблюдаемое при испытании число циклов до разрушения. Нижняя граница долговечности существенно отличается от нуля. Поэтому считают, что долговечность  $N$  при испытаниях на усталость имеет непрерывное распределение в интервале от нижней границы  $N_0$  до бесконечности (параметр  $N_0$  называют порогом чувствительности по циклам).

Для статистической обработки результатов испытаний на усталость используют нормальный закон распределения величины  $Y = \lg(N - N_0)$  и закон распределения Вейбулла – Гнеденко (см. раздел 2).

Основным затруднением при использовании нормального закона распределения величины  $Y = \lg(N - N_0)$  для оценки ресурса натуральных элементов конструкции является сложность определения порога чувствительности. Оценка  $N_0$  по результатам натуральных испытаний затруднена из-за большого требуемого объема испытаний и из-за большой длительности испытаний на низких уровнях напряжений, характерных для работы натуральных элементов конструкций. Аналогичные трудности возникают при использовании трехпараметрического распределения Вейбулла - Гнеденко.

В качестве более простого распределения используют нормальный закон для случайной величины  $Y = \lg N$  и двухпараметрический закон распределения Вейбулла-Гнеденко. Дисперсия величины  $Y = \lg N$  для образцов и элементов конструкций увеличивается с ростом средней долговечности или со снижением уровня максимального напряжения цикла.

Результаты испытаний серии из  $n$  образцов при уровне амплитуды напряжений  $\sigma_a$  располагают в вариационный ряд в порядке возрастания долговечности. Для уровней напряжений, на которых разрушились все образцы серии, рассчитывают непараметрические оценки характеристик логарифма долговечности (см. раздел 2.4.), где  $X = \lg N$ . Параметрические оценки характеристик распределения долговечности определяют в случае полной или цензурированной выборки в соответствии с разделом 2.5.

При определении ММП-оценок трехпараметрического логарифмически нормального распределения  $Y = \lg(N - N_0)$ ,  $X = N$ . При определении ММП-оценок двухпараметрического логарифмически нормального распределения  $Y = \lg N$ . При определении ММП-оценок распределения Вейбулла-Гнеденко  $X = N$ .

МНК-оценки параметров нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений определяют в соответствии с разделом 2.6. При этом в уравнения подставляют для нормального распределения и для распределения Вейбулла-Гнеденко  $X = \lg(N - \hat{N}_0)$ , где  $\hat{N}_0$  - независимая оценка порога чувствительности по циклам. Независимую оценку  $\hat{N}_0$  определяют либо графически на основании анализа эмпирической функции распределения долговечности либо аналитически в соответствии с разделами 2.5.1., 2.5.2., 2.5.3.

Оценки вероятности непревышения заданного уровня, квантилей распределения определяют, как указано в разделе 2.2. Интервальные оценки долговечности определяют в соответствии с разделом 2.7. Эмпирические функции распределения долговечности строят в соответствии с разделом 2.8. Не-



обходимый объем испытаний определяют по методике, изложенной в разделе 2.9.

### 4.3. Уравнения кривых усталости

В зависимости от назначения кривые усталости представляют в графическом или аналитическом виде. Графические кривые усталости изображают в полулогарифмических  $\sigma_a - \lg N$  или логарифмических  $\lg \sigma_a - \lg N$  координатах. При оценке прочности и ресурса элементов конструкций необходимо располагать уравнением кривой усталости. Применительно к сплавам на железной основе хорошее соответствие экспериментальным данным при симметричном цикле нагружения в широком диапазоне долговечности имеет следующее уравнение:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N + B)^{-\alpha} \quad (4.1)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N + B) , \quad (4.2)$$

где  $\sigma_{-1}, a, B, \alpha$  - параметры.

Значение параметра  $B$  для многих материалов лежит в пределах от 0 до  $5 \cdot 10^4$  циклов и его не учитывают, если минимальная долговечность образцов превышает  $10^5$  циклов. В этом случае

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N)^{-\alpha} \quad (4.3)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N) . \quad (4.4)$$

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости для указанных материалов используют степенное уравнение

$$\sigma_a^m \cdot N = d \quad (4.5)$$

или

$$\lg \sigma_a = \frac{\lg d - \lg N}{m}, \quad (4.6)$$

которое является частным случаем уравнения (4.4) для  $\sigma_{-1}=0$ .

Для описания сопротивления усталости деформируемых титановых, алюминиевых и магниевых сплавов, помимо вышеприведенных, используют также следующее уравнение кривой усталости [27]:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + c \cdot (\lg N)^{-\beta}. \quad (4.7)$$

Для гладких и надрезанных образцов различных типоразмеров из деформируемых алюминиевых сплавов, а также для натуральных элементов конструкций (лонжерон лопасти несущего винта вертолета, лопасть винта самолета, бурильные трубы) параметр  $\beta$  уравнения (4.7) считают постоянным и равным  $\beta = 2$ . Для аналитического описания левой ветви кривой усталости при отсутствии необходимости экстраполяции опытных данных в область малых и больших долговечностей  $10^5 < N \leq 10^8$  используют уравнение

$$\sigma_a = c \cdot (\lg N)^{-\beta}, \quad (4.8)$$

полученное из уравнения (4.7) для  $\sigma_{-1}=0$ , здесь  $\beta = 1, 2$ .

Если испытания на усталость проводят при асимметричном цикле напряжений с постоянным коэффициентом асимметрии  $R$  (при изменяющемся среднем значении напряжения цикла  $\sigma_m$ ), то в формулах (4.1-4.8) вместо  $\sigma_a$  подставляют максимальное напряжение цикла  $\sigma_{\max}$  и вместо предела неограниченной выносливости при симметричном цикле  $\sigma_{-1}$  подставляют предел неограниченной выносливости при асимметричном цикле  $\sigma_R$ . В случае испытаний при  $\sigma_m = \text{const}$  в указанных формулах вместо  $\sigma_{-1}$  подставляют предельную амплитуду цикла  $\sigma'_a$ , соответствующую неограниченной долговечности.

#### 4.4. Графическое построение кривых усталости

В тех случаях, когда не предусматривают оценку параметров уравнений кривых усталости, обработку результатов испытаний на усталость проводят графическим путем. По результатам испытаний на усталость на 4-6 уровнях амплитуды цикла напряжений строят семейство кривых эмпирической функции распределения долговечности на вероятностной сетке. Подобные кривые для образцов из сплава В95 по данным таблицы 4.1. приведены на рисунке 4.1. Задаваясь фиксированными значениями вероятности разрушения, по кривым распределения долговечности определяют разрушающие числа циклов для заданных уровней амплитуды напряжения и строят соответствующие квантильные кривые усталости для принятых уровней  $P$  в координатах  $\sigma_a - \lg N$  или  $\lg \sigma_a - \lg N$ . На рисунке 4.2 представлены квантильные кривые усталости образцов из сплава В95 для уровней вероятностей  $P = 0,5; 0,1; 0,01$ , построенные по данным рисунка 4.1. Экстраполяция кривой усталости, не имеющей горизонтального участка, в область больших долговечностей не должна превышать достигнутого числа циклов на нижнем уровне амплитуды напряжений для соответствующей вероятности разрушения более чем в 2-5 раз. В противном случае возможны значительные погрешности оценки предела выносливости при этих долговечностях. Экстраполяция кривых, имеющих горизонтальный участок (углеродистые стали), не должна превышать долговечность, соответствующую точке перелома кривой усталости.

#### 4.5. Оценка параметров кривых усталости

Оценку параметров уравнений кривых усталости производят на основании метода наименьших квадратов (см. раздел 2.6.). Для этого уравнения кривых усталости (4.1)-(4.8) необходимо привести к линейному виду в соответствии с общей линейной моделью (2.59). Условимся в дальнейшем оценивать только два параметра уравнения кривой усталости по уравнениям (2.63), а третий параметр  $\sigma_{-1}$  - предел неограниченной выносливости, если он существует, определять как независимую оценку минимизацией квадратичной формы (2.61), вычисляя на каждом шаге минимизации параметры (2.63). Как показывает практика, прямая оценка параметра  $\sigma_{-1}$  методом максимального правдоподобия [30,31] возможна лишь при весьма больших объемах усталостных испытаний. В соответствии с методом наименьших квадратов принимаем линейную модель в следующем виде:

$$y = X \cdot b + \varepsilon, \quad (4.9)$$

где  $b$  - вектор столбец параметров размерности 2,  $y$  - вектор-столбец наблюдений размерности  $m$  ( $m$  - число уровней амплитуд напряжений циклов при усталостных испытаниях), представляющий собой некоторую функцию долговечности  $y = f(N)$ , то есть зависимую случайную величину.  $X$  - матрица размерности  $m \times 2$  независимой случайной величины, представляющей собой некоторую функцию амплитуды напряжения цикла при усталостных испытаниях  $X = \varphi(\sigma_a)$ ,  $\varepsilon$  - вектор-столбец случайных некоррелированных «ошибок» размерности  $m$  с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности  $m \times m$ :

$$D(\varepsilon) = \sigma_0^2 \cdot V. \quad (4.10)$$

Предполагается, что случайная величина  $y$  имеет нормальное распределение на каждом уровне  $x$  с параметрами  $M\{y\}, D\{y\}$ . Нормальность распределения  $y$  должна предварительно проверяться по одному из критериев согла-

сия (см. раздел 3.8). Оценки параметров распределения  $y$  определяют методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов в соответствии с разделами 2.5, 2.6 [2]. Так, например, в полной выборке:

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}}{n_i}, \quad \hat{\sigma}_{y_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \hat{y}_i)^2}{n_i - 1}, \quad (4.11)$$

где  $n_i$  - объем испытаний на  $i$ -ом уровне амплитуды напряжения цикла,  $y_{i,j}$  -  $j$ -ое наблюдение  $i$ -го уровня. Для цензурированных выборок используется подход, описанный в разделах 2.5 и 2.6.

Как видно из анализа уравнений (4.1)-(4.8) первый столбец матрицы  $X$  состоит из единиц. Второй столбец матрицы обычно определяют с помощью простого ортогонального преобразования, приводящего, в соответствии с теорией линейной регрессии, к статистической независимости оценок параметров линейной модели (4.9):

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ 1 & x_2 - \bar{x} \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_m - \bar{x} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Вид функций  $f(N), \varphi(\sigma_a)$  выбирается так, чтобы привести к линейному виду уравнение кривой усталости. Линеаризация уравнений кривых усталости приводит к следующим уравнениям:

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), \quad y = \lg N, \quad b_1 = b_2 \cdot \bar{x} - b_2 \cdot \lg a, \quad b_2 = -\frac{1}{\alpha}, \quad (4.13)$$

при использовании уравнения (4.3),

$$x = \lg \sigma_a, \quad y = \lg N, \quad b_1 = b_2 \cdot \bar{x} + \lg d, \quad b_2 = -m, \quad (4.14)$$

при использовании уравнения (4.5),

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), \quad y = \lg \lg N, \quad b_1 = b_2 \cdot \bar{x} - b_2 \cdot \lg c, \quad b_2 = -\frac{1}{\beta}, \quad (4.15)$$

при использовании уравнения (4.7).

Матрица  $V$  представляет собой диагональную матрицу размерности  $m \times m$  дисперсий оценок случайной величины  $y - D\{\hat{y}_i\}$  для каждого уровня  $x$ , то есть определяет вес данного уровня амплитуд напряжений циклов. Для медианной кривой усталости, то есть кривой усталости, соответствующей вероятности  $p = 0,5$  и для полной выборки эта дисперсия по теореме о дисперсии выборочного среднего равна:

$$V_{i,i} = D\{\hat{y}_i\} = \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.16)$$

где  $\sigma_{y_i}^2$  - генеральная дисперсия случайной величины  $y$  на данном уровне  $x$ . Для квантильной кривой усталости, то есть кривой усталости, соответствующей заданной вероятности  $p$  и для цензурированной выборки эта дисперсия может быть определена приближенно как дисперсия квантиля нормального распределения по теореме о линейной функции нескольких переменных:

$$V_{pi,i} = D\{\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{y_i}\} \approx \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i} \left( \nu_{1,1i}^* + 2 \cdot z_p \cdot \nu_{1,2i}^* + z_p^2 \cdot \nu_{2,2i}^* \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.17)$$

где  $z_p$  - квантиль нормированного нормального распределения;  $(\nu^*)$  -

ковариационная матрица оценок  $\hat{y}_i, \hat{\sigma}_{y_i}$ , определяемая по уравнению (2.59) для ММП-оценок и по уравнению (2.64) для МНК-оценок сдвига и масштаба. В полной выборке  $\nu_{1,1}^* = 1, \nu_{1,2}^* = 0, \nu_{2,2}^* = 0,5$ . При единичном испытании или малом числе наблюдений на данном уровне амплитуды напряжений циклов в первом приближении можно принять  $V_{pi,i} = 1$ , считая равновесными все уровни.

Как показывает опыт массовых усталостных испытаний [27], условная дисперсия  $\sigma_{y_i}^2$  для данного уровня  $x$  в многоцикловой области монотонно изменяется, как правило, возрастая с уменьшением амплитуды напряжения цикла. Поскольку для надежного обоснования этой зависимости требуется весьма большое число испытаний, с целью сглаживания возможных аномалий в уровнях рассеяния при ограниченных данных, рекомендуется ее аппроксимировать корреляционной зависимостью:

$$\sigma_y^2 = g \cdot \sigma_a^\gamma, \quad (4.18)$$

оценивая аналитически параметры  $g, \gamma$  и заменяя дисперсию  $\sigma_{y_i}^2$  в уравнениях (4.16), (4.17) ее оценкой (4.18). Для анализа уровня рассеяния характеристик усталостных свойств, в связи с вариацией долговечности, определяют также зависимость среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от среднего значения логарифма долговечности в следующем виде [27]:

$$\sigma_{\lg N} = h \cdot (\lg N)^\chi. \quad (4.19)$$

Вариация условной дисперсии  $\sigma_y^2$  в связи с изменением уровня  $x$  в значительной степени зависит от выбранной функции долговечности  $y = f(N)$  при линеаризации уравнения кривой усталости. В связи с этим попытаемся таким образом выбрать преобразование долговечности, чтобы условная дисперсия оказалась независимой от уровня амплитуды напряжения цикла. Необ-



ходимым условием этого остается гипотеза о нормальном законе распределения случайной величины  $y$  в результате такого преобразования. Как показывает анализ результатов усталостных испытаний [27], распределение случайной величины  $y = (\lg N)^{1-\chi}$  лучше соответствует нормальному закону, чем  $\lg N$ . В связи с этим, а также с целью стабилизации условной дисперсии  $\sigma_y^2$  рассмотрим более подробно указанное степенное преобразование [32]. Дисперсия  $\sigma_y^2$  по теореме о дисперсии функции случайной величины определяется приближенно из следующего уравнения:

$$\sigma_y^2 \approx \left( \frac{\partial y(\lg N)}{\partial \lg N} \right)^2 \cdot \sigma_{\lg N}^2 = (1 - \chi)^2 \cdot (\lg N)^{-2\chi} \cdot \sigma_{\lg N}^2. \quad (4.20)$$

Если подставить теперь (4.19) в (4.20), то получим, что дисперсия случайной величины  $y = (\lg N)^{1-\chi}$  остается приближенно постоянной при изменении долговечности:

$$\sigma_y^2 \approx (1 - \chi)^2 \cdot h^2. \quad (4.21)$$

Это означает, что если по результатам усталостных испытаний оценить параметры  $h, \chi$  уравнения (4.19), то выборочная условная дисперсия случайной величины  $y = (\lg N)^{1-\chi}$  статистически не изменяется с изменением уровня амплитуды напряжения цикла, что конечно должно проверяться соответствующим критерием, например критерием Бартлета (см. раздел 3.6.). Соответствующие данному степенному преобразованию долговечности уравнения кривых усталости могут иметь следующий вид:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + q \cdot (\lg N)^{1-\chi} \quad (4.22)$$

с соответствующими параметрами линейной модели (4.9):

$$x = \sigma_a, y = (\lg N)^{1-\chi}, b_1 = b_2 \cdot (\bar{x} - \sigma_{-1}), b_2 = 1/q \quad (4.23)$$

или

$$\lg \sigma_a = \lg \sigma_{-1} + w \cdot (\lg N)^{1-\chi}, \quad (4.24)$$

где

$$x = \lg \sigma_a, y = (\lg N)^{1-\chi}, b_1 = b_2 \cdot (\bar{x} - \lg \sigma_{-1}), b_2 = 1/w. \quad (4.25)$$

В уравнениях (4.22), (4.24) подлежат оценке лишь два параметра, что подтверждает преимущество принятия в качестве случайной величины  $y = (\lg N)^{1-\chi}$  при условии предварительной независимой оценки показателя степени  $\chi$  по уравнению (4.19).

Оценки параметров линейной модели (4.9) в соответствии с (2.63) будут равны:

$$\hat{b}(\hat{\sigma}_{-1}) = [\tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1})^T \cdot V^{-1} \cdot \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1})]^{-1} \cdot \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1})^T \cdot V^{-1} \cdot \hat{y} \quad (4.26)$$

для медианной кривой усталости и

$$\hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p = [\tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p})]^{-1} \cdot \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot \hat{y}_p \quad (4.27)$$

для квантильной кривой усталости, где  $\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{yi}$ .

Ниже все соотношения будут записаны для квантильных кривых усталости, как наиболее общих, медианные же уравнения получаются из квантильных, как частный случай, для  $p = 0,5$ . Как указывалось выше, оценка предела неограниченной выносливости для тех уравнений кривых усталости, в которых он используется как параметр, производится минимизацией скалярной суммы квадратов (2.61):

$$S(\hat{\sigma}_{-1p}) = \left\{ \hat{y}_p - \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p}) \cdot \hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p \right\}^T \cdot V_p^{-1} \cdot \left\{ \hat{y}_p - \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p}) \cdot \hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p \right\} \quad (4.28)$$

по параметру  $\sigma_{-1}$  или  $\sigma_{-1p}$  с вычислением на каждом шаге оценок по формулам (4.26) или (4.27). Для уравнений кривых усталости, в которых предел неограниченной выносливости отсутствует, то есть для двухпараметрических уравнений, оценки (4.26) или (4.27) являются окончательными и не зависят от параметра. Величина  $\bar{x}$  в уравнении (4.12) определяется как средневзвешенная величина по всем значениям  $x$  с учетом веса каждого уровня:

$$\bar{x}(\hat{\sigma}_{-1p}) = \frac{X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}{e^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}, \quad (4.29)$$

где  $e$  - единичный вектор размерности  $m$ .

Линейность модели (4.9) проверяется после расчета всех оценок на основании  $F$ -критерия вычислением дисперсионного отношения:

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}, \quad (4.30)$$

где

$$s_2^2 = \frac{S(\hat{\sigma}_{-1p})}{m-2} \quad (4.31)$$

дисперсия вокруг эмпирической линии регрессии,

$$s_1^2 = \frac{ss^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}{n-m} \quad (4.32)$$

внутрисистемная дисперсия,  $ss$  - вектор размерности  $m$  оценок условных дисперсий  $\hat{\sigma}_{y_i}^2$  величины  $y$  на данном уровне  $x$ , методика расчета кото-

рых подробно обсуждалась выше. Гипотеза о линейности модели принимается, если расчетное значение (4.30) не превышает критического, вычисленного для уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  $f_1 = n - m$ ,  $f_2 = m - 2$ :

$$F \leq F_\alpha(f_1, f_2) , \quad (4.33)$$

где  $n$  - суммарный объем испытаний по всем уровням амплитуд напряжений циклов. В этом случае дисперсии объединяются в общую оценку:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2} , \quad (4.34)$$

являющуюся оценкой параметра  $\sigma_0^2$  в уравнении (4.10).

Ковариационная матрица оценок параметров  $b$  линейной модели (4.9) вычисляется по уравнению (2.64):

$$D(\hat{b}) \approx (v) = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n} (v^*) ; (v^*) = n \cdot [\tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot \tilde{X}(\hat{\sigma}_{-1p})]^{-1} . \quad (4.35)$$

Матрица (4.35) из-за преобразования (4.12) является диагональной, что доказывает некоррелированность оценок параметров линейной модели (4.9) при условии независимости оценки третьего параметра  $\sigma_{-1p}$ . Оценки параметров кривых усталости легко пересчитываются на основании уравнений (4.13)-(4.15), но эти оценки уже не будут некоррелированными.

#### 4.6. Доверительное оценивание квантилей характеристик усталостных свойств при построении кривых усталости

Точные верхние  $\hat{y}_{pu}$  нижние  $\hat{y}_{pl}$  доверительные границы [33] для квантиля случайной величины  $y$  в линейной модели (4.9) определяются из следующих уравнений:

$$\hat{y}_{pu} = \hat{y}(x_0) + t_{\beta}[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}, \quad (4.36)$$

$$\hat{y}_{pl} = \hat{y}(x_0) + t_{1-\beta}[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}, \quad (4.37)$$

где оценка условного математического ожидания  $y$  на заданном уровне  $x_0$  равна:

$$\hat{y}(x_0) = (\tilde{x}_0)^T \cdot \hat{b} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \cdot (x_0 - \bar{x}), \quad (4.38)$$

а ее дисперсия на заданном уровне  $x_0$  определяется с учетом (4.35) из следующего уравнения:

$$\delta^2\{\hat{y}\} = (\tilde{x}_0)^T \cdot D(\hat{b}) \cdot (\tilde{x}_0) = D(\hat{b}_1) + D(\hat{b}_2) \cdot (x_0 - \bar{x})^2, \quad (4.39)$$

$t_{\beta}[\Delta, f]$  - квантиль уровня  $\beta$  нецентрального распределения Стьюдента с параметром нецентральности  $\Delta = z_p \cdot \frac{\hat{\sigma}_y(x_0)}{\delta\{\hat{y}\}}$  и числом степеней свободы  $f = n - k_1$ , где  $k_1$  - число оцениваемых параметров линейной модели (в нашем случае  $k_1 = 2$ ). Значение квантиля нецентрального распределения вполне может быть определено по приближенному уравнению (2.97), так как суммарный объем усталостных испытаний  $n$ , для которого возможно вычисление доверительных границ (4.36), (4.37) не может быть меньше 20-30 образцов, а при этом объеме приближение по уравнению (2.97) вполне удовлетворительно.

Оценка  $\hat{\sigma}_y(x_0)$  вычисляется для конкретного значения  $x_0$  по корреляционной зависимости (4.18), если условная дисперсия изменяется по уровням. При постоянной дисперсии используется метод, описываемый уравнениями (4.19)-(4.25).

На основании точных доверительных границ (4.36), (4.37) для зависимой случайной величины  $y$  могут быть построены и доверительные границы для независимой случайной величины  $x$ , то есть определена толерантная доверительная область для предела ограниченной выносливости. Эта задача рассматривается в примере 4.1.

Отметим, что полученные уравнения (4.9)-(4.39) носят обобщенный характер и могут использоваться для более сложных видов линейной модели (4.9) с произвольным количеством параметров  $b$  и регрессоров  $x$ . Модель должна быть линейна относительно этих параметров, но не обязана быть линейна относительно  $x$ . Таким образом, линейная модель включает в себя все виды «полиномиальной» или «криволинейной» зависимости. Изменению подвергнется лишь матрица факторов (4.12) в соответствии с принятым видом линейной модели. При этом условное математическое ожидание (4.38) определяется при фиксированных значениях  $x_0$  каждого фактора (регрессора), то есть  $x_0$  в общем случае  $k$  регрессоров представляет собой вектор размерности  $k$ .

## 4.7. Планирование испытаний при построении кривых усталости

### 4.7.1. Обоснование погрешности определения предела выносливости

При построении медианной  $p=0,5$  кривой усталости объем серии из  $n$  образцов или элементов конструкций разделяют в зависимости от планируемой протяженности кривой на 3-5 групп, каждую из которых испытывают при постоянном уровне переменных напряжений. С увеличением числа уровней амплитуд напряжений погрешность в определении предела выносливости возрастает. Значение ошибки определения предела выносливости зависит от характера распределения объема серии объектов усталостных испытаний  $n$  на отдельные группы по числу принятых уровней напряжений при испытаниях  $m$ . Наименьшая ошибка достигается в том случае, когда преобладающую часть объема серии испытывают на самом нижнем уровне переменных напряжений, но этот вариант распределения не является целесообразным из-за резкого увеличения машинного времени при испытаниях. Если себестоимость объекта испытаний сравнительно не велика, то наиболее оптимальным с точки зрения минимума ошибки в определении предела выносливости и без резкого возрастания машинного времени является максимально возможный неравномерный вариант распределения образцов по уровням напряжений, симметричный относительно середины диапазона амплитуд цикла напряжений [29,31]. Например, при  $m = 4$  на двух крайних уровнях напряжения испытывают до 40% от  $n$ , при двух средних - по 10% от  $n$ . При  $m=3$  на среднем уровне испытывают 10% от  $n$  образцов, а на крайних - по 45% от  $n$ . Большей асимметрии при  $n \leq 10$  добиться практически невозможно.

Объем усталостных испытаний  $n$  должен соответствовать относительной ошибке  $\Delta_p$  оценки квантиля предела выносливости уровня  $p$  с доверительной вероятностью  $\beta$ , определяемой по уравнению:

$$\Delta_p = \frac{\hat{\sigma}_{pu} - \hat{\sigma}_p}{\hat{\sigma}_p}, \quad (4.40)$$

для квантилей верхних уровней  $p \geq 0,5$ ;

$$\Delta_p = \frac{\hat{\sigma}_p - \hat{\sigma}_{pl}}{\hat{\sigma}_p}, \quad (4.41)$$

для квантилей нижних уровней  $p < 0,5$ ,

где  $\hat{\sigma}_{pl}, \hat{\sigma}_{pu}$  - нижние и верхние соответственно доверительные границы квантиля предела выносливости;

$\hat{\sigma}_p$  - оценка квантиля предела выносливости для заданной базовой долговечности  $N_\sigma$ .

Обеспечение нормативных ошибок (4.40), (4.41) при планировании испытаний возможно лишь при наличии значительной предварительной информации о характеристиках рассеяния предела выносливости, параметрах квантильных кривых усталости и о многих других факторах, априорное знание которых делает вообще ненужным проведение испытаний. Поэтому оценки этих ошибок надежно могут быть вычислены только по результатам усталостных испытаний с последующей корректировкой их объемов и режимов, если нормативные требования (4.40) или (4.41) не удовлетворяются. Как показывает практика, минимально необходимый набор факторов планирования усталостных испытаний, проводимых с целью обоснования медианы предела выносливости на данной базе с заданной погрешностью, является следующим: общий объем испытаний и характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений циклов, число и значения этих уровней, коэффициент вариации предела выносливости [27,31]. Перечисленные факторы определяют в первом приближении величину средней квадратической ошибки



медианы предела выносливости. Рассмотрим упрощенный метод определения этой ошибки. Дисперсия случайной величины  $y$  определяется для двухпараметрической линейной модели в соответствии с (4.39) по следующему уравнению (без учета изменения условной дисперсии  $\hat{\sigma}_y(x_0)$ ):

$$\frac{\delta^2\{\hat{y}\}}{\hat{\sigma}_y^2} = \frac{1}{n} \cdot \left( 1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2} \right), \quad (4.42)$$

где

$v_i = \frac{n_i}{n}$  - относительный объем испытаний на  $i$ -ом уровне;

$n$  - общий объем испытаний.

Все остальные обозначения те же, что и в разделе (4.6).

В первом приближении принимаем, что отношение в левой части (4.42) сохраняется и для случайной величины  $x$ :

$$\frac{\delta^2\{\hat{y}\}}{\hat{\sigma}_y^2} = \frac{\delta^2\{\hat{x}\}}{\hat{\sigma}_x^2} \quad (4.43)$$

или с учетом преобразования  $x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1})$ :

$$\frac{\delta^2\{\hat{x}\}}{\hat{\sigma}_x^2} = \frac{\delta^2\{\hat{\sigma}_a\}}{\hat{\sigma}_{\sigma_a}^2}. \quad (4.44)$$

Из (4.44) с учетом (4.42) получим относительную среднюю квадратическую ошибку в определении предела выносливости:

$$\bar{\delta}\{\hat{\sigma}_a\} = \frac{\delta\{\hat{\sigma}_a\}}{\hat{\sigma}_a} = \frac{\gamma_{\sigma_a}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (4.45)$$

где  $\gamma_{\sigma_a} = \frac{\hat{\sigma}_{\sigma_a}}{\hat{\sigma}_a}$  - оценка коэффициента вариации предела выносливости.

По уравнению (4.45) определяют потребный объем усталостных испытаний для обеспечения нормативной относительной средней квадратической ошибки в определении медианы предела выносливости на заданной базе, соответствующей значению  $x_0$ . При этом могут варьироваться характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений путем соответствующего подбора значений  $v_i$ , количество уровней  $m$ , их диапазон и значения  $x_i = \varphi(\sigma_{ai})$ . При необходимости достижения особенно высокой точности проверяются нормативные погрешности (4.40), (4.41), в случае невыполнения которых испытания могут быть продолжены. Оптимизация должна проводиться с учетом экономического аспекта усталостных испытаний.

#### 4.7.2. Определение себестоимости усталостных испытаний при построении кривых усталости

Себестоимость усталостных испытаний [29] определяется стоимостью объектов испытаний и стоимостью машинного времени при проведении испытаний:

$$C = C_1 \cdot n + C_2 \cdot \sum_{i=1}^m n_i \cdot \bar{N}_i, \quad (4.46)$$

или

$$C = n \cdot (C_1 + C_2 \cdot \tilde{N}), \quad (4.47)$$

где  $C_1$  - стоимость одного объекта испытаний;

$C_2$  - стоимость одного цикла испытаний данного объекта;

$\bar{N}_i$  - средняя долговечность, соответствующая  $i$  - му уровню амплитуды напряжения цикла;

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot \bar{N}_i \quad (4.48)$$

- средняя по всем уровням долговечность,

$\nu_i = \frac{n_i}{n}$  - относительный объем испытаний на  $i$  - ом уровне;

$n$  - общий объем испытаний.

Анализ уравнений (4.46)-(4.48) показывает, что одним из основных факторов, определяющим продолжительность испытаний, является характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений. Для того чтобы избежать расчетов себестоимости в абсолютных величинах, примем в качестве базового равномерный вариант распределения объектов по уровням

амплитуд напряжений циклов:

$$C_0 = n_0 \cdot (C_1 + C_2 \cdot \tilde{N}_0), \quad (4.49)$$

где нулевые индексы соответствуют равномерному варианту. Разделив (4.47) на (4.49), получим относительную себестоимость усталостных испытаний:

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0} = \frac{n}{n_0 \cdot (1 + \xi)} \cdot \left( 1 + \frac{\tilde{N} \cdot \xi}{\tilde{N}_0} \right), \quad (4.50)$$

характеризующую изменение себестоимости по сравнению с равномерным вариантом распределения объектов по уровням амплитуд напряжений циклов. Величина  $\xi$ :

$$\xi = \frac{C_2}{C_1} \cdot \tilde{N}_0 \quad (4.51)$$

показывает во сколько раз стоимость среднего времени испытания одного объекта больше стоимости самого объекта испытаний при равномерном варианте распределения объектов по уровням.

Задача планирования усталостных испытаний заключается в определении общего объема испытаний  $n$  и необходимого характера распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений  $v_i$  с целью обеспечения требуемой относительной средней квадратической ошибки по уравнению (4.45) при минимальной относительной себестоимости (4.50) для данного варианта плана испытаний. При этом фиксируются количество и значения амплитуд напряжений и соответствующие им средние долговечности. Задача может быть модифицирована следующим образом: минимизировать не общую себестоимость, а время испытаний  $\tilde{N}$ , которое для данного варианта

уровней зависит только от характера распределения объектов по уровням. Такой способ планирования актуален для испытаний, проводимых на дорогостоящих испытательных стендах. Для дорогостоящих объектов испытаний, например натурных крупногабаритных деталей, минимизировать следует объем испытаний  $n$  за счет увеличения продолжительности испытаний при прочих равных условиях. При этом все выводы будут существенно изменяться в зависимости от предполагаемой базовой долговечности, для которой оценивается предел выносливости, то есть от степени экстраполяции по кривой усталости. Надежность заключений в значительной степени зависит от надежности обоснования априорных медианных кривых усталости.

### 4.7.3. Обоснование параметров априорных кривых усталости

Для целей надежного планирования необходимо располагать параметрами априорной кривой усталости объекта будущих усталостных испытаний, по которой устанавливают уровни амплитуд цикла напряжений, входящих в формулы (4.40), (4.41), (4.45) [13]. Верхний уровень выбирают с учетом требования на протяженность кривой усталости в зону низкой долговечности, однако при этом напряжении медиана числа циклов до разрушения не должна быть ниже  $5 \cdot 10^4$ - $10^5$  циклов, то есть долговечность при испытании должна определяться областью многоциклового усталости. Нижний уровень амплитуды цикла напряжений для объектов испытаний, имеющих горизонтальный участок на кривой усталости, выбирают равным расчетному значению предельной амплитуды, соответствующему горизонтальному участку на кривой усталости. Для элементов из магниевых, алюминиевых, титановых и других сплавов, горизонтальный участок на кривой усталости у которых отсутствует, нижний уровень амплитуды цикла напряжений выбирают из диапазона (1,0-1,2) от оценки предельной амплитуды для принятой базы испытания по уравнению априорной кривой усталости. В случае выбора левой границы указанного диапазона отпадает необходимость экстраполяции кривой усталости в область базовой долговечности, что при принятом уровне ошибки определения предела выносливости приводит к снижению общего числа испытываемых объектов и к увеличению машинного времени испытаний на нижнем уровне напряжений. И, наоборот, выбор правой границы диапазона для нижнего уровня амплитуды цикла вызывает потребность экстраполяции кривой, что при заданном уровне ошибки приведет к увеличению числа объектов испытаний и снижению машинного времени, которое в основном определяется временем испытания на нижнем уровне напряжения. Таким образом, при выборе нижнего уровня амплитуды цикла напряжений необходимо рассматривать

экономический аспект, требующий учета стоимости машинного времени и стоимости объекта испытаний, так как требуемая точность определения предела выносливости может быть достигнута при разных объемах серий объектов испытаний и при различном машинном времени. Остальные уровни амплитуд цикла напряжений при испытании выбирают в диапазоне между максимальным и минимальным уровнем через равные интервалы. Начинать испытания следует с промежуточных уровней и при необходимости проводить их корректировку. Для уточнения значения предела неограниченной выносливости объектов при наличии горизонтального участка на кривой усталости при уровнях амплитуды цикла напряжений 0,95-1,05 значения, соответствующего пределу выносливости, определяемому по уже построенной кривой усталости, испытывают до базовой долговечности дополнительную группу образцов объемом 10-20% от  $n$ , но не менее 3 объектов.

Эффективность планирования испытаний на усталость в значительной степени зависит от степени достоверности выбора параметров медианной кривой усталости по справочной информации, на основании которой назначают уровни амплитуд цикла напряжений для испытания элементов на усталость. Для **деформируемых алюминиевых сплавов** применительно к гладким лабораторным образцам диаметром 7,5-10 мм априорная кривая усталости может быть построена на основании следующих уравнений в общем случае асимметричного нагружения с  $\sigma_m = const$  [13]:

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,63} \cdot [1,57 + 94,1 \cdot (\lg N)^{-2}] \quad (4.52)$$

для переменного изгиба;

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,63} \cdot [1,43 + 85,7 \cdot (\lg N)^{-2}] \quad (4.53)$$

для переменного растяжения-сжатия.

В формулах (4.52), (4.53)  $\sigma_a$  представляет собой ординату точек медианной кривой усталости, выраженную в мегапаскалях;  $\sigma_B$  - условный предел прочности в той же размерности.

Применительно к образцам большего диаметра, при наличии концентрации напряжений, а также для натуральных элементов конструкций априорную кривую усталости для деформированных алюминиевых сплавов строят с использованием уравнения обобщенной кривой усталости [27]:

$$\frac{\sigma_{ad}}{\sigma'_{ad}} = 0,45 + 26,95 \cdot (\lg N)^{-2}, \quad (4.54)$$

где  $\sigma_{ad}$  - предельная амплитуда цикла напряжений кривой усталости элемента конструкции, соответствующая долговечности  $N$  (ордината точек кривой усталости);

$\sigma'_{ad}$  - предельная амплитуда элемента конструкции для базы  $N_0 = 10^7$  циклов, которую оценивают на основании уравнения подобия усталостного разрушения по следующей формуле [34]:

$$\sigma'_{ad} = \frac{\sigma_{-1}}{2 \cdot \alpha_\sigma} \cdot [1 + 10^{\nu_\sigma \cdot (1,946 - \lg \frac{L}{G})}], \quad (4.55.)$$

где  $\sigma_{-1}$  - предельная амплитуда симметричного цикла напряжений (предел ограниченной выносливости) гладкого лабораторного образца диаметром 7,5 - 10 мм (в МПа), рассчитываемая по формулам (4.52), (4.53) для  $N=10^7$  циклов,  $\sigma_m = 0$  для переменного изгиба или для переменного растяжения-сжатия;

$\alpha_\sigma$  - теоретический коэффициент концентрации напряжений;

$\nu_\sigma$  - коэффициент, являющийся характеристикой материала, отражаю-



щий его чувствительность к напрягаемому объему, определяемому абсолютными размерами элемента конструкции и степенью неравномерности распределения напряжений по сечению (для деформированных алюминиевых и магниевых сплавов  $\nu_\sigma = 0,04-0,08$ );

$L$  - часть параметра опасного поперечного сечения элемента конструкции или образца, в точках которого действуют максимальные напряжения, мм;

$\bar{G}$  - относительный максимальный градиент напряжений в зоне концентрации в  $\text{мм}^{-1}$ , формулы расчета которого для некоторых элементов конструкций, представленных на рисунке 4.1, приведены в таблице 4.1.

Для **титановых сплавов**, предел прочности которых находится в диапазоне 700-1300 МПа, априорные кривые усталости определяются по следующим уравнениям [35,39]:

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,40 + 370 \cdot (\lg N)^{-4}] , \quad (4.56)$$

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,43 + 26 \cdot (N)^{-1/3}] \quad (4.57)$$

для переменного изгиба;

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,16 + 310 \cdot (\lg N)^{-4}] , \quad (4.58)$$

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,19 + 22 \cdot (N)^{-1/3}] \quad (4.59)$$

для переменного растяжения-сжатия.

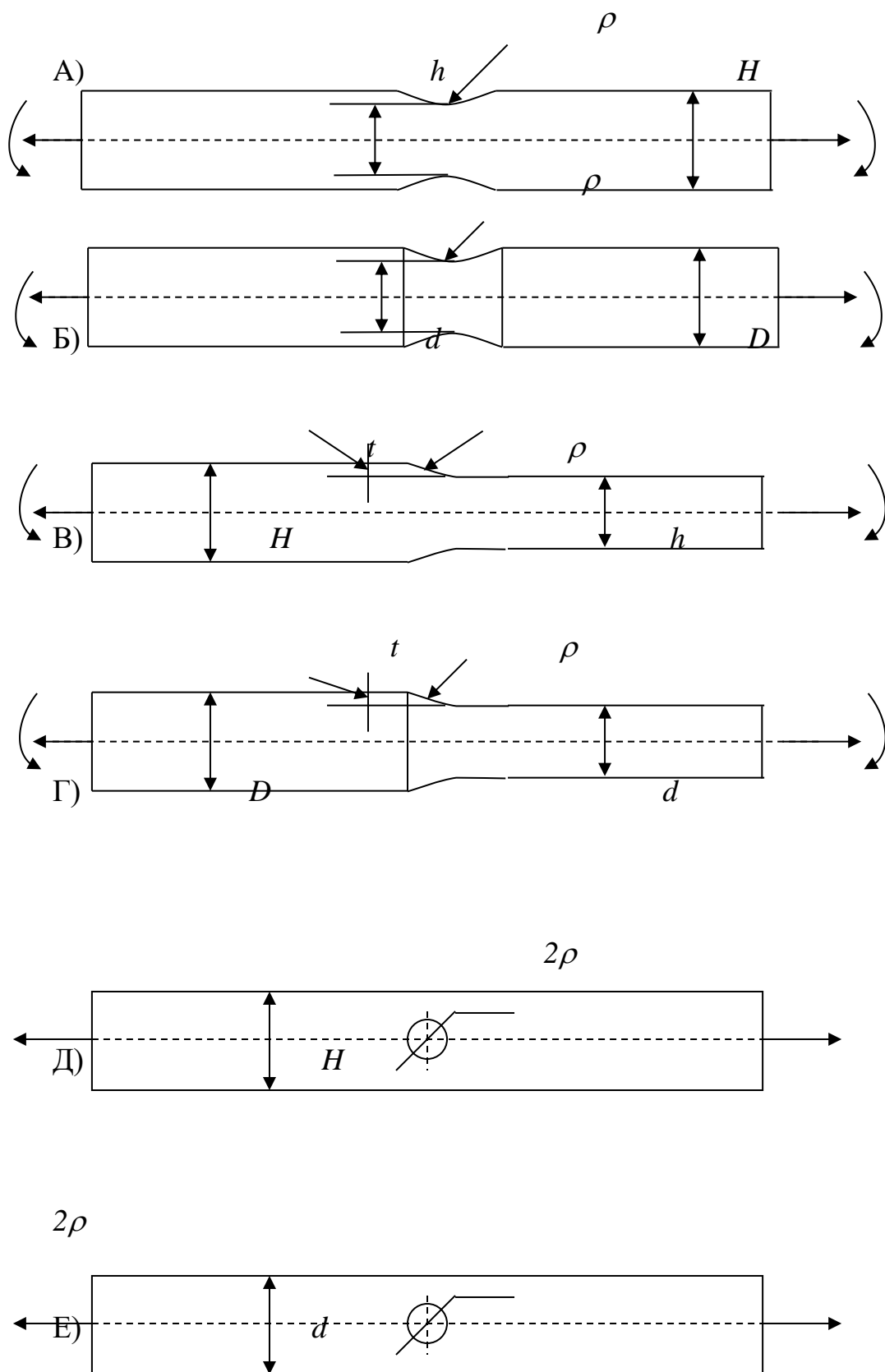


Рис. 4.1. Эскиз рабочей части элемента конструкции или образца для усталостных испытаний

Таблица 4.1.

Формулы для расчета  $L$  и  $\bar{G}$ 

Рис. 4.1	Относительные размеры	Растяжение-сжатие		Изгиб	
		$L$ , мм	$\bar{G}$ , 1/мм	$L$ , мм	$\bar{G}$ , 1/мм
А)	$\frac{H}{h} \geq 1,5$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2}{\rho}$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1,5$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{\rho}$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
Б)	$\frac{D}{d} \geq 1,5$	$\pi \cdot d$	$\frac{2}{\rho}$	$\pi \cdot d$	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1,5$	$\pi \cdot d$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{\rho}$	$\pi \cdot d$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$
В)	$\frac{H}{h} \geq 1,5$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2,3}{\rho}$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1,5$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{\rho}$	$2 \cdot \delta$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
Г)	$\frac{D}{d} \geq 1,5$	$\pi \cdot d$	$\frac{2,3}{\rho}$	$\pi \cdot d$	$\frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1,5$	$\pi \cdot d$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{\rho}$	$\pi \cdot d$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$
Д)	-	$2 \cdot \delta$	$\frac{2,3}{\rho}$	-	-
Е)	-	$2 \cdot d$	$\frac{2,3}{\rho}$	-	-

Примечания: 1.  $\delta$  - толщина плоских элементов конструкций в опасном сечении.

$$2. \varphi = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{t}{\rho} + 2}}.$$

Построение априорной кривой усталости для **стальных образцов** и элементов конструкций [7] осуществляют также на основании информации о соотношениях параметров кривых усталости, статической прочности материала, геометрических особенностей элементов и т. д. Пределы выносливости гладких лабораторных образцов диаметром 7,5-10 мм при переменном изгибе оцениваются на основании выражений (в МПа):

$$\sigma_{-1} = 1,23 \cdot \sigma_B^{0,850} \text{ - для углеродистых сталей} \quad (4.60)$$

и

$$\sigma_{-1} = 2,21 \cdot \sigma_B^{0,777} \text{ - для легированных сталей .} \quad (4.61)$$

Пределы выносливости в случае переменного растяжения-сжатия в среднем составляют 0,75-0,95 предела выносливости при переменном изгибе.

Для образцов больших поперечных сечений, при наличии концентраторов напряжений, а также для натуральных элементов конструкций медиану предела выносливости оценивают по выражению (4.55),  $\nu_\sigma$  - параметр уравнения подобия усталостного разрушения, равный 0,10-0,18 для углеродистых сталей и 0,04-0,12 для легированных сталей; остальные обозначения те же, что и в формуле (4.55).

Левую наклонную ветвь априорной кривой усталости проводят через точку с координатами  $(N_0, \sigma_{-1d})$ , где  $N_0$  - абсцисса точки перелома кривой усталости, значение которой обычно принимают от  $10^6$  до  $3 \cdot 10^6$  циклов или рассчитывают по формуле

$$N_0 = 10^4 \cdot \sigma_{-1d}^{0,997-0,003m}, \quad (4.62)$$

где  $m$  - показатель степени уравнения кривой усталости (4.5), определяемый на основании следующего корреляционного соотношения:

$$m = 0,027 \cdot \sigma_{-1d} + 1,4 \quad (4.63)$$

или приближенно по следующей формуле:

$$m = c \cdot \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} , \quad (4.64)$$

где  $c=12$  - для сварных соединений,  $c=12-20$  для элементов из углеродистой стали и  $c=20-30$  для элементов конструкций из легированной стали.

Для целей расчета на прочность рекомендуют следующую формулу для оценки величины  $c$ :

$$m = 5 + \frac{\sigma_B}{80} . \quad (4.65)$$

Наклон левой ветви априорной кривой усталости в этом случае определяется параметром  $m$ .

При наличии упрочняющей обработки элементов конструкций, действии агрессивных сред или повышенных температур в формулы для предельных амплитуд вводят поправочные коэффициенты, учитывающие действие указанных факторов на предел выносливости:

$$K_{\sigma D} = \left( \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V \cdot \beta} , \quad (4.66)$$

где  $K_{\sigma}$  - эффективный коэффициент концентрации напряжений,  $\varepsilon_{\sigma}$  - масштабный коэффициент,  $K_F$  - коэффициент состояния поверхности,  $K_V$  - коэффициент упрочнения,  $\beta$  - коэффициент, учитывающий состояния среды или коэффициент коррозионного воздействия.

## 4.8. Примеры

**Пример 4.1.** Определить необходимый объем усталостных испытаний образцов сплава АВ для обеспечения относительной ошибки (4.45) оценки медианы предела выносливости на базах  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$  и  $5 \cdot 10^7$  циклов равной 0,01. Запланируем провести испытания на четырех уровнях амплитуд напряжений циклов  $m=4$ , соответствующих средним долговечностям:  $10^5$ ,  $5 \cdot 10^5$ ,  $1,4 \cdot 10^6$ ,  $10^7$  циклов. Примем уравнение кривой усталости для легких сплавов в виде (4.54) при пределе выносливости на базе  $10^7$  циклов равном 150 МПа. Коэффициент вариации предела выносливости примем равным  $\gamma_{\sigma_a}=0,03$ . Таким образом, планируемые уровни амплитуд напряжений составляют: 229 МПа, 192 МПа, 175 МПа и 150 МПа. Рассмотрим четыре варианта распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений циклов (по колонкам):

$$v = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,25 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,25 & 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Объемы усталостных испытаний для обеспечения заданной относительной ошибки 0,01 определяем по формуле (4.45) при значениях  $x_0 = \lg(\sigma_a(N_0) - 0,45 \cdot 150)$  равных 2,209; 2,050; 1,916 и 1,834 для баз  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$  и  $5 \cdot 10^7$  циклов соответственно. Эти объемы испытаний для каждого из вариантов распределения объектов (по колонкам) и каждой базы (по строкам) составляют:

$$n = \begin{pmatrix} 26 & 20 & 11 & 9 \\ 9 & 9 & 21 & 14 \\ 26 & 21 & 35 & 23 \\ 51 & 36 & 46 & 32 \end{pmatrix}.$$

Относительную себестоимость испытаний определяем по уравнению

(4.50) при заданной величине  $\xi = 0,25$  (4.51), что свидетельствует о большей стоимости объекта испытания по сравнению со стоимостью среднего времени испытаний:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,4 \\ 1 & 1,08 & 2,06 & 1,68 \\ 1 & 0,83 & 1,21 & 1,03 \\ 1 & 0,77 & 0,82 & 0,74 \end{pmatrix}.$$

При этом средняя продолжительность испытаний в каждом из вариантов распределения объектов по уровням амплитуд напряжений определяется по уравнению (4.48) и составляет  $3 \cdot 10^6$ ,  $4,23 \cdot 10^6$ ,  $1,48 \cdot 10^6$ ,  $5,53 \cdot 10^6$  циклов соответственно. Таким образом, можно выбрать оптимальный вариант, как с точки зрения минимальной относительной себестоимости для разных базовых долговечностей, так и с точки зрения минимальной продолжительности или минимальных объемов усталостных испытаний образцов из сплава АВ. Наиболее оптимальным с точки зрения комплексного учета основных факторов является, по-видимому, неравномерный симметричный вариант: 0,4; 0,1; 0,1; 0,4, который при средней продолжительности испытаний  $4,23 \cdot 10^6$  циклов имеет минимальную общую себестоимость при экстраполяции на большие долговечности, что особенно актуально при построении кривых усталости.

**Пример 4.2.** Произвести статистическую обработку результатов усталостных испытаний образцов из сплава В95, представленных в Приложении П2.

По результатам статистической обработки на рис.4.2 построены эмпирические функции распределения долговечности, а на рис.4.3 кривые усталости по параметру вероятности разрушения. В таблице 4.2 представлены результаты первичной статистической обработки.

Таблица 4.2.

Результаты первичной статистической обработки усталостных испытаний образцов сплава В95

$\sigma_a$	$lgN_{0,5l}$	$lgN_{0,5}$	$lgN_{0,5u}$	$N_{0,5}$	$S_{lgNl}$	$S_{lgN}$	$S_{lgNu}$	$n$	$r$
330	4,4776	4,5284	4,5792	33759	0,08643	0,1089	0,1492	20	0
285	5,0565	5,1295	5,2026	134745	0,1244	0,1567	0,2147	20	0
254	5,5052	5,6039	5,7027	401700	0,1996	0,2449	0,3205	26	0
228	6,0944	6,2547	6,4152	1797909	0,3162	0,3895	0,5127	25	0
210	6,7189	7,0079	7,2099	10285832	0,4272	0,5106	0,6675	12	13



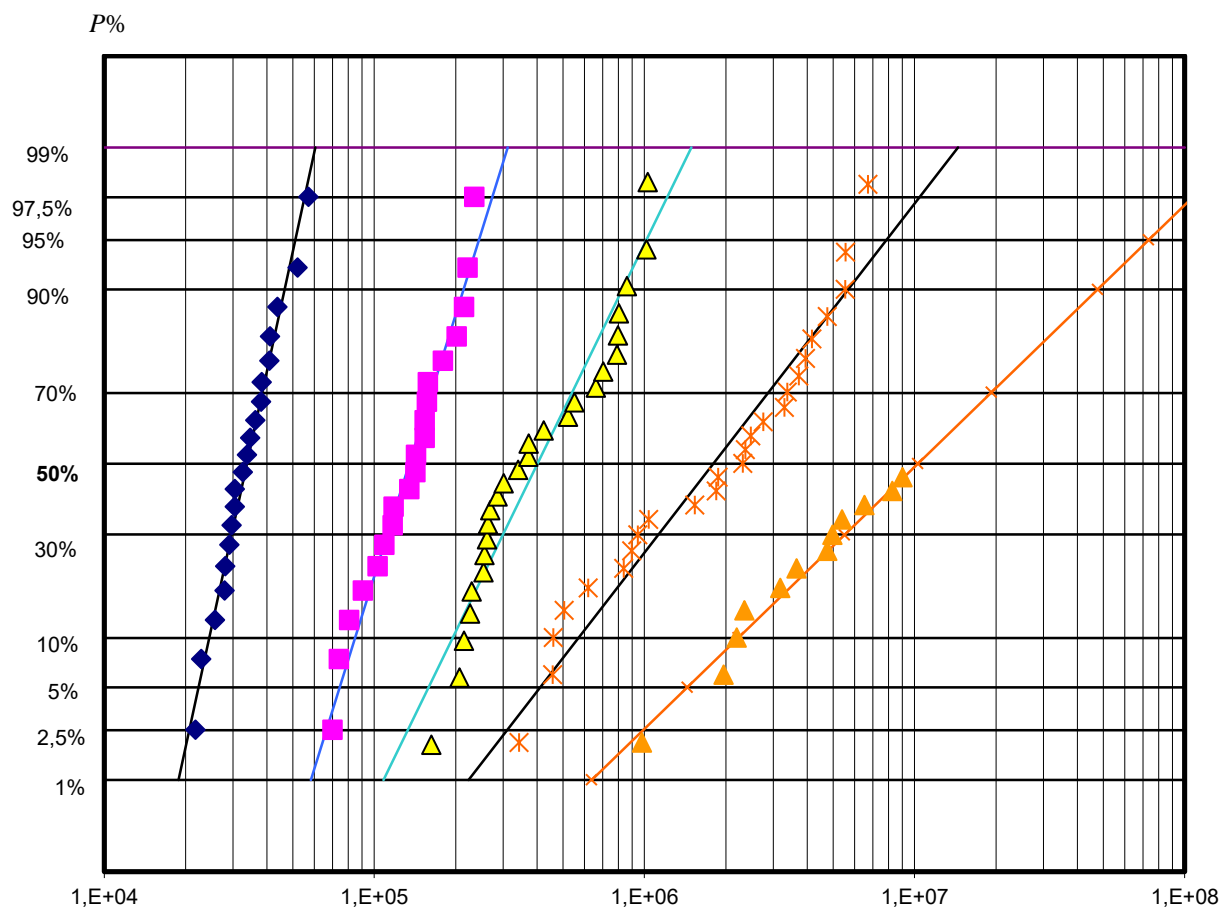
 $N$ 

Рис.4.2. Эмпирические функции распределения долговечности образцов сплава В95

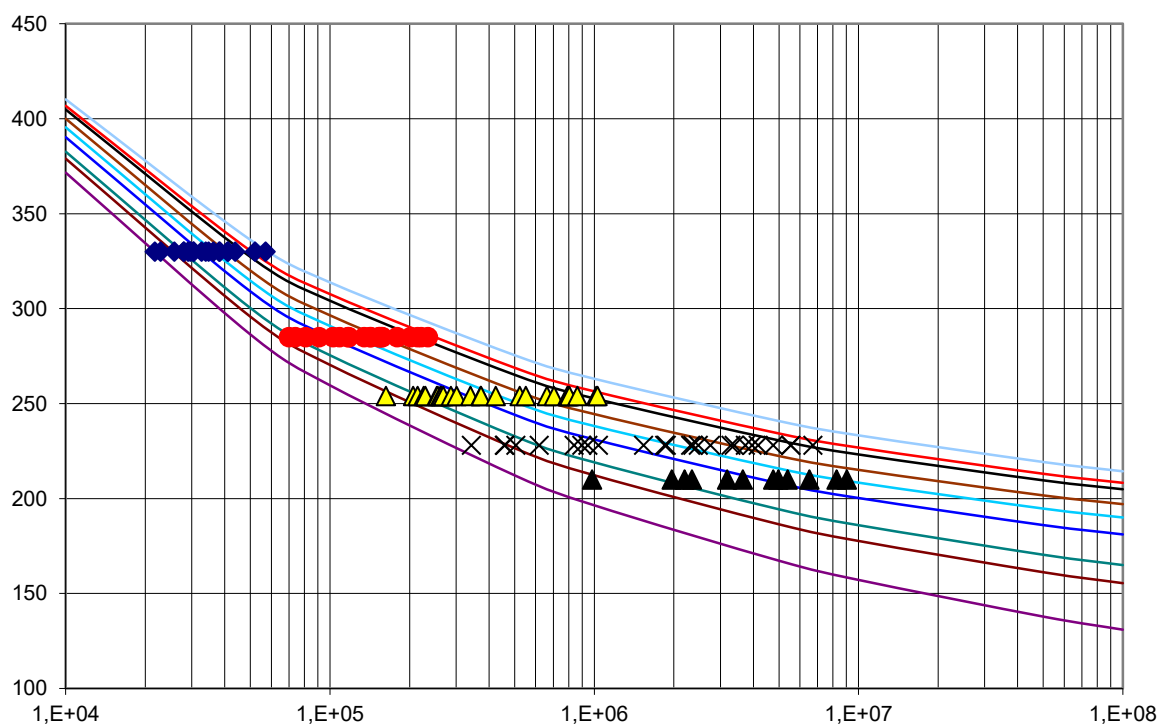
$\sigma_a, \text{МПа}$  $N$ 

Рис.4.3. Квантильные кривые усталости сплава В95, построенные по параметру вероятности разрушения (снизу вверх  $p=0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 0,95; 0,99$ )

## **5. Оценка параметров функции распределения вероятностей предела выносливости**

Одним из вариантов представления характеристик сопротивления усталости материалов и конструктивных элементов являются функции распределения предела выносливости. Для расчета элементов конструкций, планирования испытаний и статистического анализа их результатов рекомендуют нормальный закон распределения предела выносливости  $X = \sigma_{-1}$ , который удовлетворительно согласуется с опытными данными [34]. Для тех же целей используют нормальное распределение величины  $X = \lg(\sigma_{-1} - \sigma_0)$  [27] (логарифмически нормальное распределение). Для сталей широко используют распределение Вейбулла-Гнеденко для предела выносливости. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости проводится методами «вверх-вниз», «пробитов» и приближенным графоаналитическим методом.

### 5.1. Метод «вверх-вниз»

В соответствии с методом «вверх-вниз» [36-38] первый образец серии объектов объемом  $n$  испытывают при значении предела выносливости равном ожидаемому. Если первый образец не разрушится до базового числа циклов  $N_0$ , то второй образец испытывают при более высоком напряжении, а если он разрушится, то испытание второго объекта проводят при более низком уровне напряжения. Уровень напряжения для испытания третьего образца выбирают в зависимости от результатов испытания второго образца. Функция максимального правдоподобия имеет следующий вид:

$$L = C \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{k_i} \cdot (1 - p_i)^{l_i}, \quad (5.1)$$

где  $m$  - количество уровней амплитуд напряжений циклов при испытаниях;

$k_i$  - число разрушенных объектов на  $i$ -ом уровне;

$l_i$  - число неразрушенных объектов на  $i$ -ом уровне;

$n_i = k_i + l_i$  - число испытаний на  $i$ -ом уровне;

$n = \sum_{i=1}^m n_i$  - общее число испытанных объектов;

$p_i = F(\sigma_{ai})$  - вероятность разрушения на  $i$ -ом уровне амплитуды  $\sigma_{ai}$ ;

$F(\sigma_{-1}, g_1, g_2, \dots, g_{k_1})$  - непрерывная дифференцируемая функция распределения предела выносливости с  $k_1$  параметрами  $g$ , которые подлежат оценке в соответствии с принятым теоретическим законом распределения предела выносливости.

При испытаниях методом «вверх-вниз»  $k_i, l_i, n_i$  являются величинами случайными. ММП-оценки параметров распределения определяют решением системы  $k_1$  (по числу параметров) уравнений с учетом (5.1):

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial g} \right|_{g=\hat{g}} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial F(\sigma_{ai})}{\partial g_j} \right) \cdot \left( \frac{k_i}{F(\sigma_{ai})} - \frac{l_i}{1-F(\sigma_{ai})} \right) = 0, \quad j = 1 \dots k_1. \quad (5.2)$$

Производные  $\frac{\partial F(\sigma_{ai})}{\partial g_j}$  определяют конкретный вид системы уравнений (5.2).

Для нормального распределения  $g_1 = a, g_2 = \sigma$ .

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{\varphi(z)}{\sigma}; \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\frac{z \cdot \varphi(z)}{\sigma}; \quad z = \frac{\sigma_{-1} - a}{\sigma}; \quad \varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}; \quad F(\sigma_{-1}) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx. \quad (5.3)$$

Для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко, представленного в виде распределения с параметрами сдвига и масштаба (см. раздел 2 (2.78))  $g_1 = a, g_2 = \sigma, g_3 = \sigma_0$ . Для логарифмически нормального распределения:

$$z = \frac{\ln(\sigma_{-1} - \sigma_0) - a}{\sigma}. \quad (5.4)$$

Все остальные обозначения те же, что и в формуле (5.3). Для распределения Вейбулла-Гнеденко:

$$z = \frac{\ln(\sigma_{-1} - \sigma_0) - a}{\sigma}, \quad a = \ln c, \quad b = \frac{1}{\sigma}, \quad \varphi(z) = e^{z-e^z}, \quad F(z) = 1 - e^{-e^z}. \quad (5.5)$$

Для нормального распределения предела выносливости линейная аппроксимация [36-38] системы уравнений (5.2) приводит при определенных ограничениях к простым оценкам параметров:

$$\hat{a} = \hat{\sigma}_{-1} = \sigma_{a0} + d \cdot \left[ \frac{\sum_{i=0}^m i \cdot k_i}{\sum_{i=0}^m k_i} \pm 0,5 \right], \quad (5.6)$$

$$\hat{\sigma} = s_{\sigma_{-1}} = 1,62 \cdot d \cdot \left[ \frac{\left( \sum_{i=0}^m k_i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^m i^2 \cdot k_i \right) - \left( \sum_{i=0}^m i \cdot k_i \right)^2}{\left( \sum_{i=0}^m k_i \right)^2} + 0,029 \right], \quad (5.7)$$

где  $d$  - интервал между уровнями амплитуд напряжений в продолжение испытаний выдерживается постоянным. После проведения испытаний перед расчетом по формулам (5.6), (5.7) устанавливают общее число разрушений и неразрушений. Если общее число разрушений  $\sum_{i=1}^m k_i$  меньше числа неразрушений  $\sum_{i=1}^m l_i$  расчет ведут по разрушенным образцам. В этом случае в формуле (5.6) ставят знак минус. Если меньшим оказывается общее число неразрушений, то расчет ведут по неразрушенным образцам (т. е. в формулах (5.6), (5.7) вместо  $k_i$  подставляют  $l_i$  и в формуле (5.6) ставят знак плюс. Формула (5.7) дает удовлетворительные результаты при значении первого слагаемого в квадратных скобках больше 0,3. В противном случае необходимо решать численными методами систему уравнений (5.2) с учетом соотношений (5.3)-(5.5).

Ковариационная матрица оценок параметров определяется из уравнений:

$$(\nu) = (\mu)^{-1}; \quad \mu_{i,j} = \sum_{q=1}^m \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_j} \cdot \left[ \frac{k_q}{F^2(\sigma_{aq})} + \frac{l_q}{[1 - F(\sigma_{aq})]^2} \right], \quad i, j = 1 \dots k_1. \quad (5.8)$$

При статистической обработке результатов усталостных испытаний в уравнение (5.8) подставляют ММП-оценки параметров и действительные числа разрушений и неразрушений. При планировании испытаний методом

«вверх-вниз» в уравнение (5.8) подставляют ожидаемые значения параметров распределения и чисел разрушений и неразрушений, которые определяются из следующих уравнений [36]:

$$k_i = \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i}, \quad (5.9)$$

$$\omega_i = \prod_{j=1}^i \frac{F_j}{1-F_j} \text{ при } F_i < 1-F_i, \text{ то есть при } i < 0, \quad (5.10)$$

$$\omega_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1-F_j}{F_j} \text{ при } F_i > 1-F_i, \text{ то есть при } i > 0, \quad (5.11)$$

$$\omega_0 = 1 \text{ при } F_i = 1-F_i, \quad (5.12)$$

$$n = 2 \cdot k_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i \quad (5.13)$$

где  $n$  – ожидаемое значение общего числа испытаний.

Ожидаемое значение числа неразрушений на  $i$ -м уровне связано с числом разрушений следующим соотношением:

$$l_i = k_{i+1} = k_i \cdot \frac{1-F_i}{F_i}, \quad (5.14)$$

где  $F$  в целях сокращения записи обозначает  $F(\sigma_a)$ . С учетом (5.9)-(5.14) уравнение (5.8) примет следующий вид:

$$\mu_{i,j} = \frac{n}{2 \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \omega_q} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_q}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F_q}{\partial g_j} \cdot \frac{\omega_q}{F_q^2 \cdot (1-F_q)}, \quad i, j = 1 \dots k_1. \quad (5.15)$$

Для нормального распределения матрицы  $(\mu)$  и  $(\nu)$  являются приближенно диагональными:

$$\nu_{1,1} = D\{\hat{a}\} = \frac{2 \cdot \sigma^2}{n} \cdot G^2; \quad \nu_{2,2} = D\{\hat{\sigma}\} = \frac{2 \cdot \sigma^2}{n} \cdot H^2; \quad \nu_{1,2} \approx 0, \quad (5.16)$$

где  $\nu_{1,1}$  - асимптотическая дисперсия выборочного среднего значения предела выносливости;

$\nu_{2,2}$  - асимптотическая дисперсия выборочного среднего квадратического отклонения предела выносливости.

Значения функций  $G$  и  $H$  даны в Приложении ПЗ в зависимости от отношения величины интервала между уровнями  $d$  к ожидаемому значению среднего квадратического отклонения  $\frac{d}{\sigma}$  и в зависимости от положения ожидаемого среднего значения предела выносливости относительно ближайшего к этому значению уровня амплитуды напряжения цикла при испытаниях.

Приближенные доверительные границы для квантиля уровня  $p$  предела выносливости с доверительной вероятностью  $\beta$  определяют по уравнениям (2.87)-(2.95) с учетом уравнений (5.8)-(5.16) для ковариационных матриц.



## 5.2. Метод «пробитов»

В соответствии с методом «пробитов» серию образцов объемом  $n$  делят на 4-5 групп. Образцы каждой группы испытывают до базового значения числа циклов на соответствующем уровне напряжения. В результате испытаний на каждом уровне образуются разрушенные и неразрушенные объекты. Оценки параметров распределения предела выносливости определяют решением системы уравнений (5.2). Ковариационную матрицу определяют по уравнению (5.8). В отличие от метода «вверх-вниз» число уровней амплитуд напряжений  $m$ , а также число испытываемых образцов на каждом уровне  $n_i$  определяют заранее, исходя из плана испытаний. Поэтому элементы матрицы (5.8) определяются из следующих уравнений:

$$(\nu) = (\mu)^{-1}; \quad \mu_{i,j} = \sum_{q=1}^m \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_j} \cdot n_q \cdot \left[ \frac{1}{F^2(\sigma_{aq})} + \frac{1}{[1 - F(\sigma_{aq})]} \right], \quad i, j = 1 \dots k_1 \quad (5.17)$$

Для нормального закона распределения предела выносливости рассчитывают более простые оценки параметров по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} = \bar{\sigma}_{-1} = \bar{x} - \frac{\alpha}{\beta}; \quad \hat{\sigma} = s_{\sigma_{-1}} = \frac{1}{\beta}; \quad \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i \cdot \sigma_{ai}}{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i}; \\ \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i}; \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i \cdot (\sigma_{ai} - \bar{x}) \cdot (z_i - \alpha)}{\sum_{i=1}^m n_i \cdot \omega_i \cdot (\sigma_{ai} - \bar{x})^2}; \quad \omega_i = \frac{\varphi^2(z_i)}{p_i \cdot (1 - p_i)} \end{aligned} \right\}, \quad (5.18)$$

где  $z_i$  - квантиль уровня  $p_i = \frac{k_i}{n_i}$  нормированного нормального распределения. Доверительные границы для квантилей пределов выносливости опре-

деляют также, как и для метода «вверх-вниз».

### 5.3. Планирование испытаний методами «вверх-вниз» и «пробитов»

Планирование испытаний методом «вверх-вниз» предусматривает определение потребного объема  $n$  испытаний для обеспечения заданной относительной ошибки  $\delta_p$  оценки квантиля предела выносливости уровня  $p$  с доверительной вероятностью  $\beta$ :

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{\sigma}} \quad \text{для } p \geq 0,5, \quad (5.19)$$

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{\sigma}} \quad \text{для } p < 0,5, \quad (5.20)$$

где  $x_p = \ln(\sigma_p - \sigma_0)$  - для логарифмически нормального распределения и для распределения Вейбулла-Гнеденко;

$x_p = \sigma_p$  - для нормального распределения.

При планировании задают величину интервала между уровнями амплитуд напряжений  $d$ , значение одного из уровней амплитуд напряжений, ожидаемые значения параметров функции распределения предела выносливости.

Планирование испытаний методом «пробитов» предусматривает определение потребного объема испытаний  $n$  при заданных значениях уровней амплитуд напряжений циклов, характере распределения объектов испытаний по уровням для обеспечения заданной относительной ошибки (5.19) или (5.20). Метод «вверх-вниз» дает оценки с меньшей дисперсией, чем метод «пробитов». К числу преимуществ метода «пробитов» относятся: возможность параллельного испытания нескольких объектов на ряде усталостных машин, возможность варьирования величиной интервала между уровнями, возможность объединения разнородных испытаний однотипных объектов в одну группу.

#### 5.4. Модифицированный метод «пробитов» (графоаналитический метод)

Метод используют для определения предела выносливости [13]. Образцы испытывают на пяти-шести уровнях напряжения. Самый высокий уровень выбирают с таким расчетом, чтобы все образцы разрушились до базового числа циклов. Ориентировочно это напряжение равно 1,3-1,5 значения предела выносливости для  $p=50\%$ . Остальные пять уровней распределяют таким образом, чтобы на среднем разрушилось около 50% образцов, на двух высоких от 70 до 80% и не менее 90% на двух низких - не более 10% и 20-30% соответственно. Наименьший уровень напряжения выбирают с учетом возможности надежной экстраполяции до базового числа циклов кривой усталости, построенной для малой вероятности разрушения. Результаты испытаний представляют в виде вариационных рядов, на основании которых строятся кривые распределения долговечности. На основании кривых распределения долговечности строят семейство кривых усталости для ряда вероятностей разрушения. Целесообразно использовать вероятности, равные 0,01;0,1;0,30;0,50;0,70;0,90;0,99.

По кривым усталости определяют соответствующие значения предела выносливости. Предел выносливости для малой вероятности разрушения, например для  $p=0,01$ , находят путем графической экстраполяции, соответствующей кривой усталости до базового числа циклов. Значения пределов выносливости наносят на график, координатами которого являются вероятность разрушения и предел выносливости. Через построенные точки проводят линию, представляющую графическую оценку функции распределения предела выносливости. Оценки параметров функции распределения пределов выносливости определяются по следующему приближенному уравнению:

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial g} \right|_{g=\hat{g}} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial F(\sigma_{ai})}{\partial g_j} \right) \cdot \left( \frac{p_i}{F(\sigma_{ai})} - \frac{1-p_i}{1-F(\sigma_{ai})} \right) = 0, \quad j=1 \dots k_1, \quad (5.21)$$

которое является упрощенным вариантом уравнения (5.2).

В уравнении (5.21)  $p_i$  - вероятность, соответствующая  $i$ -ой квантильной кривой усталости. Все остальные обозначения те же, что и в формуле (5.2).

**Пример 5.1.** В табл. 5.1 приведены результаты усталостных испытаний методом «вверх-вниз» 40 образцов из углеродистой стали с  $\sigma_B=600$  МПа. Рассчитать оценки параметров функций распределения предела выносливости, точечные и доверительные оценки квантиля уровня  $p=0,1$  с доверительной вероятностью  $\beta=0,9$ .

Для нормального распределения оценки параметров равны:  $\hat{a}=295,5$  МПа,  $\hat{\sigma}=6,18$  МПа. Для логарифмически нормального распределения:  $\hat{a}_l=3,27$ ,  $\hat{\sigma}_l=0,229$ ,  $\hat{\sigma}_0=269$  МПа. Для распределения Вейбулла-Гнеденко:  $\hat{c}=13,421$ ,  $\hat{b}=2,085$ ,  $\hat{\sigma}_0=284$  МПа.

Таблица 5.1.

Результаты испытаний образцов

	Число образцов		
	$k$	$l$	$n$
$\sigma_a$ , МПа	разрушенных	неразрушенных	общее
285	0	1	1
290	1	8	9
295	9	6	15
300	7	4	11
305	4	0	4

Верхние и нижние доверительные границы квантили уровня  $p=0,1$  предела выносливости с доверительной вероятностью 0,9 определяют из уравнений (2.87)-(2.95) для нормального, логарифмически нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений предела выносливости соответственно:

$$\hat{\sigma}_{pu} = 292,3 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_p = 287,6 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_{pl} = 282,9 \text{ МПа};$$

$$\hat{\sigma}_{pu} = 294,2 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_p = 288,5 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_{pl} = 282,9 \text{ МПа};$$

$$\hat{\sigma}_{pu} = 294,4 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_p = 288,6 \text{ МПа}; \hat{\sigma}_{pl} = 282,7 \text{ МПа}.$$

Значение статистики критерия согласия хи-квадрат, рассчитывается по формуле [7]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(k_i - n_i \cdot F_i)^2}{n_i \cdot F_i \cdot (1 - F_i)} \leq \chi_{\alpha, m-2}^2 \quad (5.22)$$

и составляет для нормального распределения - 2,747; для логарифмически нормального распределения - 2,422; для распределения Вейбулла-Гнеденко - 2,370. Критическое значение критерия для числа степеней свободы  $f=3$  и уровня значимости 0,05 равно 7,8, что подтверждает гипотезу о соответствии опытных данных теоретическому закону для всех рассматриваемых распределений. Тем не менее, анализ результатов свидетельствует о лучшем соответствии опытных данных логарифмически нормальному распределению и распределению Вейбулла-Гнеденко по сравнению с нормальным законом распределения предела выносливости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. М: «Наука», 1966.
2. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М: «Наука», 1973, с. 899.
3. A. C. Cohen. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. *Technometrics*, vol. 18, № 1, 1976, pp. 99-103.
4. A.C. Cohen. Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution. *Technometrics*, vol 17, № 3, 1975, pp. 347-350.
5. Скрипник В. М., Назин А. Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск, 1981, с. 143.
6. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей надежности элементов конструкций авиационной техники. Докторская диссертация. М.: МАТИ, 1996.
7. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статистических испытаний и испытаний на усталость. Методические указания. РД 50-705-91. М.: Издательство стандартов, с. 167.
8. Гнеденко Б.В. Теория вероятностей. М.: 1961, с.406.
9. Введение в теорию порядковых статистик. Сборник под редакцией Сархан А., Гринберг Б.М.: Статистика, 1970, с.415.
10. David F. N., Johnson N. L. Statistical Treatment of Censored Data, 1954, Part 1. *Biometrika*, v. 41, pp. 228-240.
11. Pearson E. S., Hartley H.O. *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 1966, vol. 2, 1972. Cambridge University Press.
12. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: «Наука», 1983, с. 416.
13. Степнов М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. М.: Машиностроение, 1985, с. 231.

14. Bartlett M. S. Properties of Sufficiency and Statistical Test Proc. Roy. Soc. A., v. 160, 1937, p. 268.
15. Shapiro S.S., Wilk M. B. An Analysis of Variance Test for Normality (complete samples). Biometrika, v. 52, 1965, p. 591.
16. Shapiro S.S., Wilk M.B., Chen H.J. A comparative study of variance test for Normality. J. Amer. Stat. Ass., 1968, № 324, v. 63, pp. 1343-1372.
17. Stephens M. A. Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises and Related statistics without Extensive Tables. J. R. Statist. Soc., B., 32, 1970, pp. 115-122.
18. Stephens M. A. Tests for Normality. Stanford Univ. Dept. of Statistics. Tech. Report, № 152, 1969.
19. Stephens M. A. Kolmogorov-type Tests for Exponentiality When the Scale Parameters is Unknown. Stanford Univ. Dept. of Statist. Tech Report № 154, 1970.
20. Mann N. R., Fertig K. W., Scheuer E. M. Tolerance Bounds and a New Goodness of Fit Test for Two-Parameter Weibull or Extreme Value Distribution. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio, ARL 71-0077, May 1971.
21. Т. Хеттманспергер. Статистические выводы, основанные на рангах. М.: Финансы и статистика, 1987, с. 334.
22. Iman R. L. An approximation to the Exact Distribution of the Wilcoxon signed rank Test Statistic. Commun. Statist. 1974, v. 3, pp. 795-806.
23. Iman R. L. An Approximation to the Wilcoxon-Mann-Whitney rank sum Test Statistic. Commun. Statist., 1976, A5, pp. 587-598.
24. Iman R.L., Davenport J. New Approximation to the Exact Distribution at the Kruskal-Wallis Test statistic. Commun. Statist, 1976, A5, pp. 1335-1348.
25. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика: 1983, с. 518.
26. Kruskal W.H., Wallis W. A. Use of Ranks in one-criterion Variance



Analysis. J. Amer. Statist. Ass., v. 47, 1952, p. 583, v. 48, 1953, p. 907.

27. Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В. Усталость легких конструкционных сплавов, М: Машиностроение, 1973, с. 318.

28. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. О статистической обработке многократно цензурированной выборки при испытаниях на усталость. Зав.лаб. № 7, 1984, с. 145-148.

29. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Экономический аспект планирования усталостных испытаний образцов и элементов конструкций из легких сплавов. Зав. лаб, 1981, № 2, с. 73-75.

30. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности оценки квантили предела выносливости в связи с вариацией выборочных параметров уравнений кривых усталости. Зав. лаб., 1987, № 11, с. 73-76.

31. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности определения пределов ограниченной выносливости элементов конструкций из легких сплавов. Известия ВУЗов. Машиностроение, № 8, 1981, с. 21-24.

32. Агамиров Л.В., Сухова И.П. О закономерностях рассеяния долговечности в связи с формой кривой усталости. Вестник машиностроения, №5,1997,с.3-7.

33. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей надежности элементов конструкций авиационной техники. Докторская диссертация, М.: МАТИ, 1994 г.

34. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977, с.232.

35. Степнов М. Н., Ковалев И. Е., Николаев А. В. и др. Косвенная оценка пределов выносливости титановых сплавов при переменном изгибе, растяжении-сжатии и кручении. Заводская лаборатория, № 3, 1999, с. 41-44.

36. Dixon W. T., Mood A. M. J. Amer. Statist. Ass., v. 43, 1948, p. 109.

37. Степнов М. Н., Агамиров Л.В., Иноземцева И. А. Планирование

усталостных испытаний, проведенных методом «вверх-вниз». Зав. лаб. № 10, 1981, с. 74-77.

38. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях методами «вверх-вниз» и «пробитов». Зав. лаб. № 1, 1990, с. 51-55.

39. Степнов М. Н., Ковалев И. Е., Николаев А. В. и др. Уравнения кривых усталости титановых сплавов и расчетный метод их построения. Заводская лаборатория, № 12, 1999, с. 39-41.

40. Engineering Statistics Handbook.  
<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/eda.htm>, 5/1/2006.

## **Приложение**

Приложение П1. Значения  $\alpha$  -процентных пределов критерия  $W$  для  $n=3 - 50$ 

N	Значения $W$ при $\alpha$ , равном				
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927
7	0,73	0,760	0,803	0,838	0,928
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965
28	0,896	0,907	0,924	0,936	0,966
29	0,898	0,91	0,926	0,937	0,966
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,967
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974

## Приложение П2. Вариационные числа циклов до разрушения образцов из сплава

## B95

330		285		254		228		210	
$N$	$LgN$	$N$	$LgN$	$N$	$LgN$	$N$	$LgN$	$N$	$LgN$
21800	4,3385	70100	4,84572	163000	5,21219	344000	5,53656	982000	5,992111
22900	4,3598	74000	4,86923	207000	5,31597	458000	5,66087	1970000	6,294466
25800	4,4116	80900	4,90795	215000	5,33244	461000	5,6637	2200000	6,342423
28000	4,4472	91000	4,95904	227000	5,35603	506000	5,70415	2350000	6,371068
28100	4,4487	103000	5,01284	230000	5,36173	621000	5,79309	3190000	6,503791
29100	4,4639	109000	5,03743	254000	5,40483	840000	5,92428	3660000	6,563481
29700	4,4728	117000	5,06819	256000	5,40824	898000	5,95328	4760000	6,677607
30500	4,4843	118000	5,07188	262000	5,4183	947000	5,97635	4980000	6,697229
30500	4,4843	135000	5,13033	264000	5,4216	1040000	6,01703	5400000	6,732394
32700	4,5145	142000	5,15229	269000	5,42975	1540000	6,18752	6530000	6,814913
33900	4,5302	143000	5,15534	287000	5,45788	1850000	6,26717	8280000	6,91803
34800	4,5416	154000	5,18752	302000	5,48001	1880000	6,27416	9040000	6,956168
36300	4,5599	154000	5,18752	341000	5,53275	2320000	6,36549	$10^{7*}$	7*
38200	4,5821	157000	5,1959	372000	5,57054	2370000	6,37475	$10^{7*}$	7*
38400	4,5843	158000	5,19866	374000	5,57287	2480000	6,39445	$10^{7*}$	7*
41000	4,6128	180000	5,25527	425000	5,62839	2760000	6,44091	$10^{7*}$	7*
41200	4,6149	202000	5,30535	523000	5,7185	3300000	6,51851	$10^{7*}$	7*
43900	4,6425	215000	5,33244	552000	5,74194	3390000	6,5302	$10^{7*}$	7*
52100	4,7168	222000	5,34635	663000	5,82151	3740000	6,57287	$10^{7*}$	7*
57200	4,7574	235000	5,37107	706000	5,8488	3960000	6,5977	$10^{7*}$	7*
				793000	5,89927	4180000	6,62118	$10^{7*}$	7*
				800000	5,90309	4760000	6,67761	$10^{7*}$	7*
				807000	5,90687	5550000	6,74429	$10^{7*}$	7*
				864000	5,93651	5560000	6,74507	$10^{7*}$	7*
				1020000	6,0086	6730000	6,82802	$10^{7*}$	7*
				1030000	6,01284				

 $10^{7*}$  - образцы не разрушились

Приложение ПЗ. Зависимость коэффициентов  $G, H$  от  $d/\sigma$  и  $B$

$B$	$d/\sigma$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
0	$G$	0,9389	0,9963	1,0758	1,1522	1,2105	1,2400	1,2502	1,2527	1,2532	1,2533	1,2533
	$H$	1,7450	1,3709	1,2766	1,3805	1,7926	2,2625	4,9929	-	-	-	-
0,1	$G$	0,9411	1,0040	1,0754	1,1516	1,2142	1,2535	1,2752	1,2888	1,3002	1,3118	1,3247
	$H$	1,7520	1,3838	1,2745	1,3481	1,6300	2,1196	2,6694	2,9256	2,8296	2,6144	2,4073
0,2	$G$	0,9411	1,0040	1,0743	1,1502	1,2242	1,2909	1,3493	1,4018	1,4535	1,4878	1,5716
	$H$	1,7520	1,3843	1,2705	1,2729	1,3510	1,4643	1,5669	1,6045	1,5680	1,4761	1,4261
0,3	$G$	0,9411	1,0040	1,0743	1,1484	1,2367	1,3423	1,4639	1,5987	1,7478	1,9171	2,1160
	$H$	1,7520	1,3849	1,2655	1,1952	1,1461	1,1347	1,1571	1,1929	1,2242	1,2473	1,2707
0,4	$G$	0,9411	1,0040	1,0719	1,1469	1,2344	1,3888	1,5840	1,8442	2,1840	2,6244	3,1976
	$H$	1,7520	1,3854	1,2616	1,1417	1,0261	0,9830	0,9854	1,0080	1,1166	1,2385	1,4003
0,5	$G$	0,9411	1,0040	1,0715	1,1277	1,2510	1,4079	1,6390	1,9748	2,4630	3,1788	4,2446
	$H$	1,7520	1,3850	1,2601	1,1061	0,9991	0,9385	0,9366	0,9874	1,0946	1,2715	1,5435