Вопросы к экзамену по курсу «Проектный практикум»

1. Обработка данных. Нормальный, логарифмически нормальный и Вейбулла законы распределения. Функции распределения, плотности распределения. Физические модели законов распределения

Обработка данных.???

Планирование прямых механических испытаний и статистическая обработка результатов измерений включает:

-выбор гипотетического распределения ХМС;

-определение минимального числа объектов испытаний;

-проверку согласия результатов измерений с выбранным гипотетическим распределением;

-оценивание параметров распределения; -оценивание параметров и числовых характеристик распределения 10 ХМС;

-оценивание доверительных интервалов числовых характеристик и параметров распределения ХМС.

Частные генеральные совокупности значений ХМС; соответствующие отдельным партиям однотипных объектов, можно объединять в одну общую генеральную совокупность. На основе результатов измерения ХМС при испытании нескольких групп объектов из разных партий оценивают характеристики распределения ХМС в общей совокупности. Выборку считают полной, если все запланированные для испытания объекты доведены до критического состояния.

2.3.1. Нормальное распределение

Плотность вероятностей:

$$f(x;a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.11}$$

где

$a,\ \sigma > 0$- параметры распределения.

Функция нормального закона распределения имеет следующий вид:

$$F(x;a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \tag{2.12}$$

где x может принимать все действительные значения. Функция распределения (2.12) удовлетворяет равенству

$$F(x;a,\sigma) = F((x-a)/\sigma;\ 0,\ 1),$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь значения функции $F(z;0,\ 1)$

$$F(z;\ 0,\ 1) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{2.13}$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа, $z=(x-a)/\sigma$ - нормированная случайная величина.

Квантиль уровня P: x_p определяется соотношением:

$$x_p = a + z_p \cdot \sigma, \tag{2.14}$$

где z_p - квантиль стандартного нормального распределения уровня *P*, определяемый соотношением:

$$\Phi(z_p) = P. \tag{2.15}$$

Медиана, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации определяются соотношениями:

$$M_e\{X\}=a, M\{X\}=a, \sigma\{X\}=\sigma, \gamma\{X\}=\frac{\sigma}{a}. \tag{2.16}$$

Нормальное распределение допускается применять только при значении коэффициента вариации, не превышающем 0,20, когда указанная вероятность пренебрежимо мала. Нормальное распределение рекомендуется применять для обработки результатов измерений кратковременных ХМС только в том случае, если это регламентируется нормативной документацией, или, если имеется необходимость сопоставления с архивными данными, полученными на основе нормального распределения. Нормальное распределение не рекомендуется применять для обработки результатов измерений длительных ХМС.

2.3.2. Логарифмически нормальное распределение

Функции плотности вероятностей и распределения имеют следующий вид:

$$f(x;a_l,\sigma_l,x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_l\cdot(x-x_0)}e^{-\frac{[\ln(x-x_0)-a_l]^2}{2\cdot\sigma_l^2}}, \qquad (2.17)$$

$$F(x;a_l,\sigma_l,x_0)=\Phi(z), \qquad (2.18)$$

где $z=[\ln(x-x_0)-a_l]/\sigma_l$ - нормированная случайная величина,

$a_l,\sigma_l>0,\ x_0<x$ - параметры распределения.

Квантиль распределения уровня P определяется соотношением:

$$\ln(x_p-x_0)=a_l+z_p\cdot\sigma_l, \qquad (2.19)$$

где z_p - квантиль нормированного нормального распределения уровня P, определяемый соотношением (2.15).

Медиана, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

$$M_e\{X\}=x_{0,5}=x_0+e^{a_l},\quad M\{X\}=x_0+e^{a_l+\frac{\sigma_l^2}{2}},\quad D\{X\}=e^{2\cdot a_l+\sigma_l^2}\cdot(e^{\sigma_l^2}-1). \qquad (2.20)$$

Логарифмически нормальное распределение рекомендуется применять при обработке результатов измерения кратковременных и длительных ХМС, кроме временного сопротивления при хрупком разрушении.

2.3.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

Трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко для случайной величины X имеет следующие выражения для функции плотности распределения и функции распределения:

$$f(x;b,c,x_0) = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{x - x_0}{c} \right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{c} \right)^b} , \qquad (2.21)$$

$$F(x;b,c,x_0) = 1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{c} \right)^b} , \qquad (2.22)$$

где $b > 0, c > 0, x_0 < x$ - параметры распределения.

Математическое ожидание и дисперсия определяются выражениями:

$$M\{X\} = c \cdot \Gamma(1 + 1/b) + x_0, \quad D\{X\} = c^2 \cdot [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)] , \qquad (2.23)$$

где

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} \, dy \qquad (2.24)$$

гамма-функция.

Квантиль уровня P случайной величины X определяется по уравнению:

$$x_p = x_0 + c \cdot \left[\ln \frac{1}{1-P} \right]^{\frac{1}{b}} . \qquad (2.25)$$

Квантиль уровня $P = 0{,}632$, $x_{0,632} = c + x_0$, медиана распределения определяется выражением:

$$x_{0,5} = x_0 + c \cdot \left[\ln \frac{1}{1-0{,}5} \right]^{\frac{1}{b}} . \qquad (2.26)$$

При $x_0 = 0$ имеем двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко, при b=1 – экспоненциальное (показательное) распределение.

Распределение Вейбулла — Гнеденко применяется также в случае построения вероятностных моделей ситуаций, поведение объекта в которых определяется «наиболее слабым звеном». Проводится аналогия с цепью, сохранность которой определяется тем ее звеном, которое имеет наименьшую прочность.

2. Выборочный метод. Оценки выборочного среднего, среднего квадратичного, дисперсии, коэффициента вариации, квантилей.

Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2.28}$$

используется в качестве оценки математического ожидания $M\{X\}$ (генерального среднего).

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{2.29}$$

используется в качестве оценки дисперсии $D\{X\}$ (генеральной дисперсии).

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{2.30}$$

используется в качестве оценки среднего квадратического отклонения $\sigma\{X\}$ (генерального среднего квадратического отклонения).

Выборочный коэффициент вариации:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \tag{2.31}$$

используется в качестве оценки коэффициента вариации $\gamma\{X\}$ (генерального коэффициента вариации).

Для полной выборки **непараметрическую оценку квантиля** уровня P случайной величины X вычисляют по следующей формуле [5]:

$$x_p = (1-\alpha_p)\cdot x_i + \alpha_p \cdot x_{i+1} \ , \tag{2.34}$$

где i – порядковый номер измеренного значения x_i случайной величины X, в **ранжированной** (расположенной в порядке возрастания значений) выборке объема n из произвольного непрерывного распределения. Значение i определяется из следующего уравнения:

$$i = \mathrm{int}\left[p\cdot(n+1)\right], \tag{2.35}$$

где $\mathrm{int}(x)$ - целая часть числа x,

$$\alpha_p = p\cdot(n+1) - i \ . \tag{2.36}$$

Для однократно **цензурированной** справа выборки I типа **непараметрическую оценку квантиля** уровня P случайной величины X вычисляют по формуле (2.34) [6,7], в которой:

$$i = \mathrm{int}\left[p\cdot\frac{k+1}{h}\right], \tag{2.37}$$

где k - число наблюдаемых членов выборки объема n;

$h = \dfrac{k}{n+1}$ - оценка степени цензурирования выборки;

$$\alpha_p = p\cdot\frac{k+1}{h} - i \ . \tag{2.38}$$

3. Метод максимального правдоподобия

В соответствии с методом максимального правдоподобия (ММП) оценки параметров непрерывной не менее двух раз дифференцируемой функции распределения случайной величины в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяются решением системы уравнений максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ММП-оценки) определяются в точках экстремума функции максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{k} f_x(x_i) \cdot \prod_{j=1}^{m} \left[1 - F_x(x_{бj})\right]^{r_j}, \quad (1.1.1)$$

где

k - число наблюдений (число объектов достигших критического состояния);

m - число баз испытания, при достижении которых наблюдаются объекты недостигшие критического состояния;

r_j - количество объектов, снятых с испытаний на данной базе;

$n = k + \sum_{j=1}^{m} r_j$ - общее число испытанных объектов испытания;

$x_{бj}$ - значения баз испытания, при которых наблюдаются недостигшие критического состояния объекты.

$$\left.\frac{d\ln L}{dg}\right|_{g=\hat{g}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{f_x(x_i)}\cdot\frac{df_x(x_i)}{dg}-\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{r_j}{1-F_x(x_{бj})}\cdot\frac{dF_x(x_{бj})}{dg}\right]=0, \quad (1.1.2)$$

где производные плотности распределения и функции распределения по параметрам определяют конкретный вид системы уравнений (1.1.2) для того или иного закона распределения.

Ковариационная матрица (ν) размерности $k_1 \cdot k_1$ оценок параметров распределений определяется обращением информационной матрицы (μ) вторых производных логарифма функции максимального правдоподобия по параметрам распределений:

$$(\nu)=(\mu)^{-1}=\left(-\frac{d^2\ln L}{dg^2_{l,s}}\right), \quad l,s=1....k_1, \qquad (1.1.3)$$

$$\mu_{l,s}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{f_x(x_i)}\cdot\left[\frac{df_x(x_i)}{dg_l}\cdot\frac{df_x(x_i)}{dg_s}\cdot\frac{1}{f_x(x_i)}-\frac{d^2 f_x(x_i)}{dg_l dg_s}\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{1-F_x(x_{бj})}\cdot\left[\frac{dF_x(x_{бj})}{dg_l}\cdot\frac{dF_x(x_{бj})}{dg_s}\cdot\frac{1}{1-F_x(x_{бj})}+\frac{d^2F_x(x_{бj})}{dg_l dg_s}\right]. \qquad (1.1.4)$$

2.5.1. Логарифмически нормальное распределение

Оценки параметров $\hat{a}_l, \hat{\sigma}_l, \hat{x}_0$ логарифмически нормального распределения в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяют в соответствии с (2.40) как корни системы трех уравнений:

$$\left.\frac{d\ln L}{da_l}\right|_{a_l=\hat{a}_l} = \sum_{i=1}^{k}(y_i - \hat{a}_l) + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \psi(z_j) = 0, \tag{2.43}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{d\sigma_l}\right|_{\sigma_l=\hat{\sigma}_l} = \sum_{i=1}^{k}(y_i - \hat{a}_l)^2 + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \psi(z_j)\cdot z_j - k\right] = 0, \tag{2.44}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{dx_0}\right|_{x_0=\hat{x}_0} = \sum_{i=1}^{k}\frac{y_i - \hat{a}_l}{x_i - \hat{x}_0} + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \sum (x_i - \hat{x}_0)^{-1} + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^{m}\frac{r_j \cdot \psi(z_j)}{x_{бj} - \hat{x}_0} = 0, \tag{2.45}$$

где

$$y_i = \ln(x_i - \hat{x}_0),\ z_j = \frac{\ln(x_{бj} - \hat{x}_0) - \hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l},\ \psi(z_j) = \frac{\varphi(z_j)}{1-\Phi(z_j)},$$
$$\varphi(z_j) = \frac{e^{-\frac{z_j^2}{2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}},\ \Phi(z_j) = \int_{-\infty}^{z_j}\varphi(t)\cdot dt. \tag{2.46}$$

2.5.3. Распределение Вейбулла-Гнеденко

ММП-оценки параметров b, x_0 распределения Вейбулла-Гнеденко (2.21), (2.22) в соответствии с уравнениями (2.40) рассчитывают как корни системы уравнений:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\ln L}{db}\right|_{b=\hat b} &= \left[\frac{k}{\hat b}+\sum_{i=1}^{k}\ln(x_i-\hat x_0)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{\hat b}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot(x_{бj}-\hat x_0)^{\hat b}\right]- \\ &-k\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{\hat b}\cdot\ln(x_i-\hat x_0)+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot(x_{бj}-\hat x_0)^{\hat b}\cdot\ln(x_{бj}-\hat x_0)\right]=0\end{aligned}, \qquad (2.56)$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\ln L}{dx_0}\right|_{x_0=\hat x_0} &= \sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{\hat b-1}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot(x_{бj}-\hat x_0)^{\hat b-1}- \\ &-\frac{1-\dfrac{1}{\hat b}}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{\hat b}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot(x_{бj}-\hat x_0)^{\hat b}\right]=0\end{aligned}, \qquad (2.57)$$

после чего оценку параметра c определяют из уравнения:

$$\hat c^{\hat b}=\frac{1}{k}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat x_0)^{\hat b}+\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot(x_{бj}-\hat x_0)^{\hat b}\right]. \qquad (2.58)$$

4. Метод наименьших квадратов

2.6. Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод наименьших квадратов

Пусть имеется линейная модель [2,9]:

$$y = X \cdot b + \varepsilon , \qquad (2.59)$$

где y - вектор-столбец наблюдений размерности n, X - матрица размерности $n \times k_1$ известных коэффициентов ($n > k_1$), b - вектор столбец параметров размерности k_1 и ε - вектор-столбец случайных «ошибок» размерности n с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности $n \times n$:

$$D(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot V . \qquad (2.60)$$

Это означает, что случайные ошибки наблюдений некоррелированы, но имеют различные дисперсии. Метод наименьших квадратов состоит в минимизации скалярной суммы квадратов:

$$S = (y - X \cdot b)^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot b) \qquad (2.61)$$

по компонентам вектора b. Необходимым условием обращения (2.61) в минимум является условие $\partial S / \partial b = 0$. Выполняя дифференцирование, получаем:

$$2 \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot b) = 0 , \qquad (2.62)$$

откуда находим вектор МНК-оценок:

$$\hat{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y . \qquad (2.63)$$

5. Доверительное оценивание квантилей распределения, средних и дисперсий. ???

4.6. Доверительное оценивание квантилей характеристик усталостных свойств при построении кривых усталости

Точные верхние $\hat{y}_{pu}$ нижние $\hat{y}_{pl}$ доверительные границы [33] для квантиля случайной величины y в линейной модели (4.9) определяются из следующих уравнений:

$$\hat{y}_{pu} = \hat{y}(x_0) + t_\beta[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}\ , \tag{4.36}$$

$$\hat{y}_{pl} = \hat{y}(x_0) + t_{1-\beta}[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}\ , \tag{4.37}$$

где оценка условного математического ожидания y на заданном уровне x_0 равна:

$$\hat{y}(x_0) = (\tilde{x}_0)^T \cdot \hat{b} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \cdot (x_0 - \bar{x})\,, \tag{4.38}$$

а ее дисперсия на заданном уровне x_0 определяется с учетом (4.35) из следующего уравнения:

$$\delta^2\{\hat{y}\} = (\tilde{x}_0)^T \cdot D(\hat{b}) \cdot (\tilde{x}_0) = D(\hat{b}_1) + D(\hat{b}_2) \cdot (x_0 - \bar{x})^2\ , \tag{4.39}$$

$t_\beta[\Delta, f]$ - квантиль уровня β нецентрального распределения Стьюдента с параметром нецентральности $\Delta = z_p \cdot \dfrac{\hat{\sigma}_y(x_0)}{\delta\{\hat{y}\}}$ и числом степеней свободы $f = n - k_1$, где k_1 - число оцениваемых параметров линейной модели (в нашем случае $k_1 = 2$). Значение квантиля нецентрального распределения вполне может быть определено по приближенному уравнению (2.97), так как суммарный объем усталостных испытаний n, для которого возможно вычисление доверительных границ (4.36), (4.37) не может быть меньше 20-30 образцов, а при этом объеме приближение по уравнению (2.97) вполне удовлетворительно.

6. Определение объема испытаний с целью достижения требуемой точности оценки квантилей, среднего и дисперсии

При определении минимального необходимого объема выборки следует исходить из целей испытаний. Если цель планируемых испытаний – оценка среднего квадратического отклонения ХМС, то объем выборки для построения интервальной оценки среднего квадратического отклонения σ с заданной относительной погрешностью δ определяют по таблице 2.1. [12] для заданного значения доверительной вероятности β в соответствии с уравнением:

$$(1+\delta)^2 = \frac{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}}. \qquad (2.107)$$

Если истинное значение математического ожидания известно, то $n = f$, если неизвестно, то $n = f + 1$.

Если целью испытаний является оценка квантильных значений ХМС, то объем испытаний определяют по формулам (2.81), (2.82) [7,13]:

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{\sigma}} = z_p - t_{1-\beta}\left[n-1\,, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\ , \quad \text{для } p < 0{,}5\ , \qquad (2.108)$$

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{\sigma}} = t_{\beta}\left[n-1\,, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - z_p\ , \quad \text{для } p \geq 0{,}5\ , \qquad (2.109)$$

где δ_p - максимальная ошибка оценки квантиля в долях выборочного среднего квадратичного отклонения. Величину δ_p принимают равной 0,2-0,3 при высоких требованиях к точности, 0,4-0,6 при средних требованиях и 0,8-1,0 при низкой точности. Для планирования испытаний в полных нормальных выборках используют таблицу 2.2.

Таблица 2.1.

Необходимый объем выборки для оценки среднего квадратического отклонения с заданной относительной погрешностью

f	Значения δ при β		f	Значения δ при β	
	0,95	0,9		0,95	0,9
1	70,52	30,26	28	0,70	0,56
2	11,07	6,64	29	0,69	0,55
3	5,58	3,71	30	0,67	0,54
4	3,80	2,54	40	0,568	0,450
5	2,93	2,11	50	0,486	0,393
6	2,42	1,77	60	0,434	0,353
7	2,08	1,55	70	0,396	0,383
8	1,84	1,38	80	0,366	0,299
9	1,65	1,26	90	0,341	0,279
10	1,61	1,16	100	0,321	0,263
11	1,40	1,07	120	0,289	0,238
12	1,30	1,01	140	1,265	0,218
13	1,22	0,95	160	0,240	0,202
14	1,15	0,90	170	0,230	0,190
15	1,10	0,86	200	0,217	0,179
16	1,04	0,82	220	0,206	0,170
17	1,00	0,78	240	0,196	0,162
18	0,96	0,75	260	0,188	0,155
19	0,92	0,73	280	0,181	0,149
20	0,89	0,70	300	0,174	0,144
21	0,86	0,68	400	0,149	0,123
22	0,83	0,66	500	0,132	0,110
23	0,80	0,64	600	0,120	0,100
24	0,78	0,62	700	0,110	0,092
25	0,76	0,61	800	0,103	0,086
26	0,74	0,59	900	0,097	0,081
27	0,72	0,58	1000	0,092	0,076

Таблица 2.2.

Минимально необходимый объем испытаний n для оценки квантили уровня p с максимальной относительной ошибкой, не превышающей δ_p при доверительной вероятности β

β	p	Значения объема испытаний n при δ_p, равной									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,5	165	42	19	11	7	5	4	4	3	3
0,9	0,1;0,9	324	90	42	26	19	14	11	9	8	7
0,9	0.05; 0,95	420	113	55	34	24	18	14	12	10	9
0,9	0,01;0,99	663	170	86	52	35	26	21	17	14	12
0,9	0,005;0,995	755	200	92	60	43	28	23	20	16	13
0,9	0,001;0,999	1100	355	135	73	53	37	29	25	21	17
0,95	0,5	270	68	30	18	12	9	7	6	5	4
0,95	0,1;0,9	535	140	68	41	29	22	17	14	12	10
0,95	0,05;0,95	700	182	89	55	37	27	21	18	15	13
0,95	0,01;0,99	1055	254	135	82	56	41	32	26	22	19
0,95	0,005;0,995	1250	330	157	94	63	47	36	29	25	21
0,95	0,001;0,999	1595	421	207	122	83	60	47	37	31	26

7. Графическое представление эмпирических функций распределения

2.8. Построение графика функции распределения на вероятностной сетке

При построении вероятностной сетки [13] для нормального распределения вдоль оси абсцисс в равномерном или логарифмическом масштабе наносят шкалу значений случайной величины X, а по оси ординат в равномерном масштабе шкалу значении нормированной величины $z = \frac{x-a}{\sigma}$. Параллельно со шкалой z строят шкалу функции нормального распределения, значения которой определяют по формуле (2.12) для соответствующих значений z (рис. 2.1.).

При построении вероятностной сетки для трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе располагают шкалу значений величины $\ln(x - x_0)$ или в логарифмическом масштабе шкалу значений $x - x_0$. Вдоль оси ординат в равномерном масштабе строят шкалу величины $y = \ln\ln\frac{1}{1-F(x)}$, и шкалу соответствующих значений функции распределения $F(x)$. График функции распределения Вейбулла-Гнеденко на вероятностной сетке изображают прямой в соответствии с уравнением:

$$\ln(x - x_0) = \ln c + \frac{1}{b}\cdot y. \qquad (2.106).$$

8. Параметрические критерии. Критерии для отбрасывания аномальных результатов наблюдений: критерий Граббса, Диксона

Параметрические критерии – это критерии, включающие в формулу расчёта параметры распределения, т. е. средние и дисперсии (t-критерий Стьюдента, критерий F и др.).

критерии применяют для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний в том случае, когда причина резких отклонений не обнаруживается во время проведения эксперимента, но значение полученной механической характеристики отдельного образца вызывает сомнение. Критерии применяются для случая нормального (логарифмически нормального) распределения исследуемой величины. При выборках объемом больше 50 отбрасывание выделяющихся результатов наблюдений обычно не проводят, поскольку они не оказывают заметного влияния на точность оценки числовых характеристик и параметров распределения случайной величины. Нулевой гипотезой при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее или наименьшее значение вариационного ряда принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные наблюдения.

Критерий Граббса применяют в тех случаях, когда имеются статистические данные по рассматриваемой выборке. Для этого рассчитывают статистики:

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s}, \; u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s} , \tag{3.1}$$

где $\bar{x}$, s - выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение,

x_1, x_n - крайние члены вариационного ряда.

Рассчитанное значение u сопоставляют с критическим u_α для заданного уровня значимости α и объема выборки n. Критические значения определяются из уравнения [40]:

$$u_\alpha = (n-1) \cdot \sqrt{\frac{t^2_{\alpha/n,n-2}}{n \cdot \left(n - 2 + t^2_{\alpha/n,n-2}\right)}} , \tag{3.2}$$

где $t^2_{\alpha/n,n-2}$ - квантиль распределения Стьюдента уровня α / n с числом степеней свободы $f = n - 2$. Для двустороннего критерия α / n заменяют на $\alpha / 2n$.

Нулевую гипотезу принимают, если $u \le u_\alpha$ и отвергают в противном случае.

9. Критерий сравнения двух дисперсий (критерий Фишера)

3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей. Критерий Фишера (*F*-критерий)

Дисперсии двух совокупностей объемами n_1 и n_2, подчиняющихся нормальному (логарифмически нормальному) закону распределения, сравнивают с помощью двустороннего критерия *F*. Для этого рассчитывают дисперсионное отношение *F* по формуле [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \text{ - при } s_1^2 > s_2^2 \tag{3.3}$$

или

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \text{ - при } s_2^2 > s_1^2, \tag{3.4}$$

где s_1^2, s_2^2 - выборочные дисперсии.

Дисперсионное отношение *F* сопоставляют с критическим значением F_α для заданного уровня значимости α и чисел степеней свободы $f_1 = n_1 - 1,\ f_2 = n_2 - 1$, где f_1 - число степеней свободы для большей дисперсии. В случае соблюдения условия $F \le F_\alpha$, принимают нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

10. Точный и приближенный критерии сравнения средних Стьюдента

3.4. Проверка гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей. Критерий Стьюдента (*t*-критерий)

Критерий Стьюдента применяют для сравнения средних значений двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных, но равных дисперсиях $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Нулевая гипотеза заключается в предположении о равенстве средних $H_0 : a_1 = a_2$. Для проверки этой гипотезы по выборочным средним $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и выборочным дисперсиям s_1^2, s_2^2 рассчитывают статистику t [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \tag{3.5}$$

где

$$s^2 = \frac{f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2}{f_1 + f_2}. \tag{3.6}$$

При использовании критерия Стьюдента предварительно проверяют гипотезу о равенстве дисперсий согласно 3.3. Полученное значение t-критерия сравнивают с критическим для уровня значимости α и числа степеней свободы $f = f_1 + f_2$. Если $|t| \le t_{\frac{\alpha}{2}}$, то нулевую гипотезу о равенстве средних принимают. В противном случае $a_1 \ne a_2$.

3.5. Приближенный t - критерий.

С помощью приближенного t - критерия производят проверку равенства средних значений при неизвестных и неравных дисперсиях $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, что обнаруживается при проверке по критерию Фишера. В этом случае вычисляют статистику [7,13]:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}. \tag{3.7}$$

Для определения числа степеней свободы используют уравнение:

$$f = \frac{1}{c^2 / f_1 + (1-c)^2 / f_2}, \tag{3.8}$$

где

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}. \tag{3.9}$$

Нулевая гипотеза принимается или отвергается при тех же условиях, что и в точном критерии Стьюдента.

В случае цензурированных выборок из нормальных совокупностей для проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений вычисляют статистику (3.7), в которой оценки средних и дисперсий производят как ММП-оценки параметров (см. 2.5.). При двусторонней альтернативной гипотезе $H_A: a_1 \neq a_2$, для выполнения нулевой гипотезы должны выполняться неравенства [6,7]:

$$|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ и } |t| < -t_{\frac{\alpha}{2}}.$$

11. Критерий сравнения ряда дисперсий (критерий Бартлета)

3.6. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий ряда генеральных совокупностей. Критерий Бартлета

Однородность (равенство) дисперсий ряда выборок из нормально распределенных совокупностей оценивают с помощью критерия Бартлета. Для этого рассчитывают статистику критерия по формуле [2,7,13,14]:

$$\chi^2 = \frac{1}{c} \cdot \left[\ln\left(s^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} n_i - m \right) - \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2 \right], \qquad (3.10)$$

где m - количество выборок, s_i^2 - выборочная дисперсия,

$$c = 1 + \frac{1}{3 \cdot (m-1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m} \right], \qquad (3.11)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}. \qquad (3.12)$$

Если значения $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha, f=m-1}$, то нулевая гипотеза об однородности ряда дисперсий подтверждается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза о неравенстве дисперсий.

12. Критерий сравнения ряда средних. Однофакторный дисперсионный анализ

3.7. Проверка гипотезы о равенстве средних ряда генеральных совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ

Равенство (однородность) ряда средних значений оценивают с помощью однофакторного дисперсионного анализа. В основе его лежит предположение о нормальности закона распределения характеристик механических свойств в каждой выборке и однородности ряда дисперсий. Проверка нулевой гипотезы о равенстве всех средних производят с помощью F- критерия дисперсионного отношения [7,13]:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}\ , \tag{3.13}$$

где s_1^2 - дисперсия между m выборками объемом n_i, характеризующая рассеяние по факторам,

s_2^2 - внутренняя дисперсия, характеризующая внутреннее рассеяние, связанное со случайными колебаниями внутри каждой выборки.

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot (\bar{x}_i - \hat{a})^2}{f_1}, \quad f_1 = m - 1\ , \tag{3.14}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{f_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot s_i^2}{f_2}, \quad f_2 = \sum_{i=1}^{m} n_i - m\ , \tag{3.15}$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}\ . \tag{3.16}$$

В формулах (3.14)-(3.16) $\bar{x}_i, s_i^2$ - выборочные средние и дисперсии i - ой выборки, $x_{i,j}$ - j - ое значение случайной величины (результат испытания) в i - ой выборке. Если дисперсионное отношение (3.13) окажется меньше критического значения F_α критерия Фишера, найденного для уровня значимости α и чисел степеней свободы f_1, f_2, то нулевая гипотеза о равенстве средних $a_1 = a_2 = ... = a_m = a$ подтверждается. В этом случае все рассматриваемые результаты испытаний принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами a, σ^2. Оценкой σ^2 служит выборочная полная (общая) дисперсия (3.6), а оценкой a - выборочное общее среднее (3.16). В противном случае гипотеза о равенстве средних отвергается. Это означает, что имеет место m нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией, но с разными средними. Оценкой генеральной дисперсии является величина s_2^2, а оценками генеральных средних – выборочные средние $\bar{x}_i$.

13. Критерии согласия. Критерии нормальности: критерии Шапиро-Уилка, Андерсона-Дарлинга

Проверка соответствия опытных данных выбранному виду гипотетического распределения целесообразна при объемах выборки не менее 50. В отдельных случаях проверка согласия возможна при меньшем числе образцов. Рекомендуется одновременное применение нескольких критериев в тех случаях, когда результаты проверки по одному критерию не позволяют сделать безусловный вывод о согласии опытного и теоретического распределений. Здесь рассматриваются только такие критерии согласия, которые предполагают неизвестной функцию распределения характеристик механических свойств, то есть параметры функции распределения оцениваются по данным выборочной совокупности, как это практически всегда бывает при механических испытаниях материалов и элементов конструкций. Обычно объемы выборок при механических испытаниях ограничены. Поэтому в данном разделе не рассматриваются критерии согласия, требующие больших объемов испытаний $(n > 100)$.

3.8.1. Критерий Шапиро-Уилка

Критерий Шапиро-Уилка (W-критерий) предназначен для проверки гипотезы о **нормальном** (логарифмически нормальном) распределении [7,13,15,16]. При ограниченном объеме опытных данных ($n \le 50$) критерий W является наиболее мощным. Результаты механических испытаний располагают в вариационный ряд и вычисляют статистику критерия:

$$W = \frac{b^2}{s^2} \ , \qquad (3.17)$$

где s^2 вычисляется по формуле:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ , \qquad (3.18)$$

а величина оценки b определяется по уравнению [15,16]:

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \ \ a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \nu_{i,j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \nu_{i,j} \right)^2}}, \qquad (3.19)$$

где α_i - математическое ожидание i - ой порядковой статистики в выборке из нормированного нормального распределения, $\nu_{i,j}$ - ковариация i -ой и j -ой порядковых статистик, определяемые по уравнениям (2.72)-(2.75), при этом $(\nu) = (V)^{-1}$. Вычисленное значение W сравнивают с критическим в соответствии с Приложением П1. Если W больше критического значения W_α для объема выборки n, то нулевая гипотеза принимается. В противном случае принимается альтернативная гипотеза.

3.8.3. Критерий Андерсона-Дарлинга

Критерий Андерсона-Дарлинга используют для проверки **нормальности** в тех случаях, когда больший интерес представляет соответствие эмпирической функции распределения теоретической в области крайних значений случайной величины (на «хвостах» распределения) при объемах испытаний не менее 50. С этой целью вычисляют статистику [17-19]:

$$A^2 = -n - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n}\right) \ln\left[1 - F(x_i)\right] \right\}, \qquad (3.22)$$

и составляют неравенство:

$$\left(A^2 - \frac{0{,}7}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{3{,}6}{n} - \frac{8{,}0}{n^2}\right) \le A_\alpha\,. \qquad (3.23)$$

Если неравенство (3.23) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается. Критические значения критерия A_α составляют для уровней значимости: $\alpha = 0{,}15,\ A_\alpha = 0{,}576$; $\alpha = 0{,}10,\ A_\alpha = 0{,}656$; $\alpha = 0{,}05,\ A_\alpha = 0{,}787$; $\alpha = 0{,}01,\ A_\alpha = 1{,}092$.

14. Критерий согласия хи-квадрат

3.8.4. Критерий χ^2

Критерий согласия χ^2 применяется для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения **произвольному** теоретическому распределению, параметры которого оцениваются по выборке. С этой целью рассчитывают статистику [2,7,13]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{e} \frac{\left(n_i - n \cdot P_i\right)^2}{n \cdot P_i}. \qquad (3.24)$$

Для расчета статистики (3.24) размах варьирования случайной величины разбивают на интервалы и для каждого из них определяют число наблюдений n_i. Интервалы, содержащие менее 5 наблюдений объединяют с соседними. Пользуясь оценками параметров функции распределения $F(x)$, определяют оценку вероятности попадания случайной величины в интервал P_i. Расчетное значение критерия сопоставляют с критическим $\chi^2(\alpha, f)$, найденным для уровня значимости α и числа степеней свободы $f = e - d - 1$ (e - количество интервалов после их объединения, d - число параметров функции распределения, оцениваемых по данным выборки). Если значение статистики (3.24) меньше критического то нулевая гипотеза о соответствии опытных данных выбранному гипотетическому распределению принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается.

15. Непараметрические критерии.

Непараметрический статистический критерий - строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается та или иная статистическая непараметрическая гипотеза с известным уровнем значимости. Непараметрические критерии не включают в расчёт параметры вероятностного распределения и основаны на оперировании частотами или рангами.

Статистическая проверка непараметрических гипотез выполняется с помощью непараметрических критериев значимости (вспомогательных величин, которые при условии верности нулевой гипотезы имеют заранее известное распределение). Если выборочное значение статистического критерия значимости будет принадлежать области критических значений, нулевая гипотеза отвергается. Все множество задач статистической проверки непараметрических гипотез можно разделить на два вида:[1]

- проверка гипотезы относительно функции распределения
- проверка гипотезы о принадлежности двух выборок генеральной совокупности, то есть гипотезы о равенстве функций распределения двух случайных величин.

Для проверки гипотез о виде функции распределения используются критерии согласия, а для проверки гипотез о равенстве функций распределения используют критерии однородности. Альтернативная гипотеза будет сложной, поэтому распределение статистического критерия в случае верности H1 однозначно неизвестно и при исследовании гипотезы не контролируется вероятность B совершения ошибки 2-го рода[1].

16. Критерий знаков, критерий знаковых рангов Уилкоксона

3.9.1. Критерий знаков для медианы

При использовании критерия знаков [2,21] рассматривают последовательность, состоящую из n независимых испытаний, в каждом из которых могут осуществиться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равновероятности положительного и отрицательного исходов. Пусть проведены испытания первой (X) и второй (Y) совокупностей и получены значения ХМС, расположенные в порядке испытаний:

$$x_1, x_2, ..., x_n;$$
$$y_1, y_2, ..., y_n.$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в n пар испытаний получены k положительных разностей, m - отрицательных и l нулевых; n_1=n—l. Нулевую гипотезу о равенстве медиан ХМС двух совокупностей не отвергают, если число k попадает в область допустимых значений $k_{\alpha l}$, $k_{\alpha u}$, с уровнем значимости α. Границы допустимых значений рассчитывают по формулам [21]:

$$\alpha = 0{,}5^{n_1} \cdot \sum_{i=0}^{k_{\alpha l}} \frac{n_1!}{i! \cdot (n_1 - i)!}, k_{\alpha u} = n_1 - k_{\alpha l}\,. \qquad (3.26)$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0 : P=0,5 при альтернативной гипотезе H_A : P<0,5 должно выполняться неравенство $k \geq k_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе H_A :- P>0,5 должно выполняться неравенство $k \leq k_{\alpha u} = n_1 - k_{\alpha l}$. При двусторонней альтернативной гипотезе выполняется неравенство H_A : $P \neq 0{,}5$; $k_{\alpha l} \leq k \leq k_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов испытаний ХМС общей генеральной совокупности.

3.9.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона

В отличие от критерия знаков критерий знаковых рангов Уилкоксона учитывает расстояние наблюдений относительно нуля посредством рангов [2,21].

Пусть пары случайных величин *{X,Y}* представляют собой результаты механических испытаний двух совокупностей с совместной функцией распределения *F(X,Y)*. Одну из выборок подвергают некоторой обработке. Результаты механических испытаний другой выборки используют для контроля влияния обработки. Обработку и контроль назначают независимо и случайно. Критерий проверяет нулевую гипотезу об отсутствии различия между обработкой и контролем. Это означает, что при выполнении нулевой гипотезы случайная величина $Z=X—Y$ распределена симметрично относительно нуля. Критерий также используют для проверки гипотезы о симметрии непрерывного распределения *F(x)* относительно центра θ. Для этого вместо второй выборки задают *n* значений, равных θ. Результаты испытаний образцов первой *X* и второй *Y* совокупностей располагают в порядке испытаний:

$$x_1, x_2, \ldots.., x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots.., y_n;$$
$$z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \ldots.., z_n = x_n - y_n.$$

Абсолютные значения разностей $|z_i|$ располагают в порядке возрастания (ранжируют) и подсчитывают сумму рангов *T* (порядковых номеров) положительных значений z_i в этом ряду. Нулевые разности не учитывают, то есть $n_1 = n - l$. Для проверки нулевой гипотезы: $H_0: \ \theta = 0$ где θ - медиана генеральной совокупности разностей, из которой извлекают выборку, при альтернативной гипотезе $H_A: \theta < 0$ должно выполняться неравенство $T > T_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе $H_A: \theta > 0$ должно выполняться следующее неравенство:

$$T \le T_{\alpha u} = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - T_{\alpha l}. \quad (3.27)$$

При двусторонней альтернативной гипотезе $H_A: \theta \ne 0$ должно выполняться неравенство $T_{\alpha l} \le T \le T_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Точные критические значения вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [21]:

$$M(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + x^i)}{2^n} . \quad (3.28)$$

Степень полинома (3.28) определяет все возможные наблюденные значения статистики T в выборке объема n, а коэффициенты полинома определяют распределение вероятностей этих значений.

Другим способом точного вычисления распределения статистики знаковых рангов Уилкоксона является использование следующей рекурентной формулы [21]:

$$\overline{P}(i,k)=\overline{P}(i-1,k)+\overline{P}(i-1,k-i);\ P(n,x)=\frac{\overline{P}(n,x)}{2^n};\ i=1..n; k=0..x\ , \qquad (3.29)$$

при следующих начальных условиях:

$P(a,b)=0$ при $a>0, b<0$, $P(a,b)=0$ при $a=0, b<>0$, $P(a,b)=1$ при $a=0, b=0$. (3.30)

Для приближенного расчета при больших n вычисляют статистики T_1, T_1^* по формулам [22-24]:

$$T_1=\frac{T-\dfrac{n_1\cdot(n_1+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n_1\cdot(n_1+1)\cdot(2\cdot n_1+1)}{24}}};\ T_1^*=\frac{T_1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1-T_1^2}}\right). \qquad (3.31)$$

Нулевую гипотезу принимают, если $T^*_{\frac{\alpha}{2}}<T_1^*<T^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где

$$T^*_{1-\frac{\alpha}{2}}=0{,}5\cdot\left[t_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=-T^*_{\frac{\alpha}{2}}\ ; \qquad (3.32)$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $f=n_1-1$;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения.

17. Двухвыборочный критерий Уилкоксона

Критерий предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, то есть об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении [2,21,25]. Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ - случайная выборка из $F(x-\theta_x)$, $y_1, y_2, ..., y_n$ - случайная выборка из $F(y-\theta_y)$ ($m \le n$). Функцию распределения F не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности $H_0 : \Delta = \theta_y - \theta_x = 0$ против альтернативы $H_A : \Delta \ne 0$ строят вариационный ряд из $k = m + n$ наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду:

$$W = \sum_{i=1}^{m} R_i \ . \qquad (3.34)$$

Для проверки нулевой гипотезы: $H_0 :\ \Delta = 0$ при альтернативной гипотезе $H_A : \Delta < 0$ должно выполняться неравенство $W > W_{\alpha l}$. При альтернативной гипотезе $H_A : \Delta > 0$ должно выполняться следующее неравенство $W \le W_{\alpha u}$. При двусторонней альтернативной гипотезе $H_A : \Delta \ne 0$ должно выполняться неравенство $W_{\alpha l} \le W \le W_{\alpha u}$ с уровнем значимости 2α.

Точные критические значения статистики U, считающей сколько раз элемент первой выборки превосходит элемент второй выборки [$U = W - 0{,}5 \cdot m(m+1)$] вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [2]:

$$M(x) = \frac{m! \cdot n! \cdot \prod_{i=1}^{m+n}(x^i - 1)}{(n+m)! \cdot \prod_{i=1}^{m}(x^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1)} \ . \qquad (3.35)$$

Методика расчет точных критических значений суммы рангов такая же, как и описанная выше методика для критерия знаковых рангов. Другим способом точного вычисления распределения статистики Уилкоксона является использование следующей рекурентной формулы [21]:

$$P(i,j,k)=\frac{j}{i+j}\cdot P(i,j-1,k-i)+\frac{i}{i+j}\cdot P(i-1,j,k);i=1..m;j=1..n;k=0..x\ , \qquad (3.36)$$

при следующих начальных условиях:

$$P(i,j,k)=0,\textit{при}k<0;P(i,0,k)=1\ \textit{при}k=0;P(i,0,k)=0\ \textit{при}\ k\neq 0\ . \qquad (3.37)$$

Для приближенного расчета при больших m,n вычисляют статистики W_1,W_1^* по формулам [22-24]:

$$W_1=\frac{W-\dfrac{n\cdot(m+n+1)}{2}+0{,}5}{\sqrt{\dfrac{n\cdot m\cdot(m+n+1)}{12}}};\ W_1^*=\frac{W_1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{m+n-2}{m+n-1-W_1^2}}\right). \qquad (3.38)$$

Нулевую гипотезу принимают, если для двустороннего критерия с уровнем значимости α выполняется неравенство $W^*_{\frac{\alpha}{2}}<W_1^*<W^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где

$$W^*_{1-\frac{\alpha}{2}}=0{,}5\cdot\left[t_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=-W^*_{\frac{\alpha}{2}}\ ; \qquad (3.39)$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\dfrac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $f=m+n-2$;

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль уровня $1-\dfrac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения.

В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

18. Критерий Краскела-Уоллиса

Критерий Краскела-Уоллиса [2,21,26] обобщает задачу о двух выборках на случай k выборок: $x_{ij},\ i = 1,k;\ j = 1,n_j$ с функциями распределения $F(x-\theta_j)$, где n_j - число наблюдений в j-ой выборке. Нулевая гипотеза утверждает, что k выборок из произвольных совокупностей можно рассматривать как одну (объединенную) выборку из общей совокупности, то есть утверждается равенство параметров сдвига θ_j, когда не задано значение общего параметра масштаба $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k$ против альтернативы $H_A : \theta_1,...,\theta_k$ не все равны. Для проверки нулевой гипотезы строят общий вариационный ряд из $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ наблюдений и рассчитывают статистику:

$$H = \frac{12}{N\cdot(N+1)}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i} - 3\cdot N\cdot(N+1), \qquad (3.40)$$

где R_i - сумма рангов i ой выборки в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают величину H_1:

$$H_1 = \frac{H}{2}\cdot\left(1 + \frac{N-k}{N-1-H}\right), \qquad (3.41)$$

которую сравнивают с критическим значение H_α:

$$H_\alpha = 0{,}5\cdot\left[(k-1)\cdot F_{1-\alpha} + \chi^2_{1-\alpha}\right]; \qquad (3.42)$$

где $F_{1-\alpha}$ - квантиль уровня $1-\alpha$ F - распределения с числами степеней свободы $f_1 = k-1, f_2 = N-k$;

$\chi^2_{1-\alpha}$ - квантиль уровня $1-\alpha$ распределения χ^2 с числом степеней свободы $f = k-1$.

Нулевую гипотезу принимают, если $H_1 \le H_\alpha$ с уровнем значимости α. В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Другим весьма эффективным способом проверки k - выборочной гипотезы является попарное сравнение выборок по критерию Уилкоксона с вычислением точных критических значений (см.3.9.4.).