Элементы векторной алгебры.

Векторы. Геометрическое векторное пространство

Основными объектами, рассматриваемыми в Евклидовой геометрии являются точки, прямые, плоскости, а также поверхности и кривые. Под **точкой** понимается один из первичных математических объектов (как множество или число), который рассматривается как неделимый элемент соответствующего математического пространства. **Прямая** и **плоскость** также относятся к первичным понятиям математики. В рамках данного курса будем исходить из определений, данных в школьном курсе геометрии.

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначение вектора $\overrightarrow{AB}$ или $\mathbf{a}$.

К слову сказать, впервые понятие вектора было введено Саймоном Стивеном (1548 - 1620) примерно в 1580 году для описания понятия силы и доказательства правила сложения сил.

Определение. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\mathbf{a}| = a$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными** ($\mathbf{a} || \mathbf{b}$), если они расположены на одной или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. При этом, одинаково направленные векторы называются **сонаправленными** ($\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$).

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны. Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и имеют одинаковые длины.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называются **сложение** и **умножение на число**.

Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, лежащий в одной плоскости с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец с концом вектора $\mathbf{b}$. (**правило треугольника**).

Очевидно, что это правило можно сформулировать и так: **суммой** векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является вектор, лежащий в одной плоскости с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющий длину и направление диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, таким образом, что его начало совпадает с началом векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. (**правило параллелограмма**)

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на действительное число α называется вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ такой, что $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$ и при этом $\mathbf{a}$ коллинеарен $\mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{a}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{b}$, если $\alpha > 0$. Вектор $\mathbf{a}$ противоположно направлен с вектором $\mathbf{b}$, если $\alpha < 0$.

Можно проверить, что введённые операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ - коммутативность (правило параллелограмма).
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (правило четырехугольника)
3) $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$
4) $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \mathbf{o}$
5) $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ – ассоциативность относительно умножения на число
6) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$

8) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Определение. Совокупность векторов с введёнными над ними линейными операциями, удовлетворяющим свойствам 1-8 называется **геометрическим векторным пространством**. Обозначается V .

Линейная зависимость векторов.

Так как геометрическое векторное пространство является частным случаем линейного пространства, то в нем аналогичным образом вводится понятие линейной зависимости и независимости векторов, базиса и размерности пространства.

Примеры:

1) Совокупность векторов параллельных некоторой прямой образуют одномерное векторное пространство V^1

2) Совокупность векторов параллельных некоторой плоскости образуют двумерное векторное пространство V^2

3) Совокупность некомпланарных векторов образуют трёхмерное векторное пространство V^3

В силу определения размерности пространства:

1) Любые 2 вектора в пространстве V^1 линейно зависимы.

2) Любые 3 вектора в пространстве V^2 линейно зависимы.

3) Любые 4 вектора в пространстве V^3 линейно зависимы.

4) Базисом в пространстве V^3 являются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

5) Базисом на плоскости (в пространстве V^2) называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

6) Базисом на прямой (в пространстве V^1) называется любой ненулевой вектор.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - базис в пространстве V , то любой вектор из этого пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т.е.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i \qquad (1)$$

и такое представление единственно. (см. соответствующую тему в разделе «Линейные и евклидовы пространства»)

В этом случае числа a_1, a_2 и a_3 в представлении (1) называются **компонентами или координатами** вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе. Записывается

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты (следствие единственности представления (1)),
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda a_i \mathbf{e}_i .$$

Следовательно, вектор $\lambda \mathbf{a}$ имеет координаты $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$. Записывается

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbf{e}_i ,$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) \mathbf{e}_i .$$

Соответственно, в координатной форме имеем следующую запись

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$$

<u>Определение.</u> Базис называется **ортогональным**, если его векторы попарно ортогональны. Если при этом их длины равны единице, то такой базис называется **ортонормированным.** Такой базис часто обозначается так: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

<u>Пример.</u> Даны векторы $\mathbf{a}=\{1,2,3\}$, $\mathbf{b}=\{-1,0,3\}$, $\mathbf{c}=\{2,1,-1\}$ и $\mathbf{d}=\{3,2,2\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, т.е., если определитель матрицы составленной из столбцов координат векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3+(-2-3)+12=4\neq 0$$

Пусть вектор $\mathbf{d}$ имеет координаты $\{x_1, x_2, x_3\}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}=\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Тогда,

$$\mathbf{d}=\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i$$

Для нахождения координат вектора $\mathbf{d}$ необходимо решить систему

$$\begin{cases} x_1 a_1 + x_2 b_1 + x_3 c_1 = d_1 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 + x_3 c_2 = d_2 \\ x_1 a_3 + x_2 b_3 + x_3 c_3 = d_3 \end{cases}$$

Воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3)+(-2-2)+12=-1.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2)-3(-2-3)+2(4-6) = -4+15-4=7;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6+(4-6)+18=10;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$: $\mathbf{d}=\{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Система координат.

Перейдем теперь к описанию основных объектов, рассматриваемых в Евклидовой геометрии: точки, прямой, плоскости, кривых и поверхностей. Начнем с точки.

Положение произвольной точки в пространстве однозначно определяется с помощью **системы координат,** которая представляет собой способ определения положения того или иного объекта с помощью чисел или других символов. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

<u>**Аффинная система координат.**</u>

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем **радиус-вектором** точки M. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M *можно единственным образом сопоставить некоторую тройку чисел* – компоненты ее радиус- вектора. При этом сама точка O будет соответствовать нулевому вектору.

<u>**Определение.**</u> **Аффинная система координат** представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса.

Частным случаем аффинной системы координат является **декартова система координат** в пространстве называется совокупность точки и ортогонального базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат, называются **осями координат**.

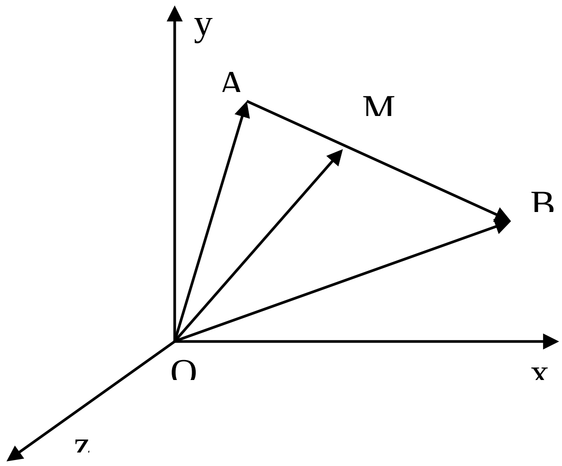
1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **аппликат**

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.



Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

По определению координат точки имеем $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда (см. рисунок)

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Расстояние d_{AB} между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определим как длину вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Пусть точка $M(x, y, z)$ делит отрезок AB в соотношении $\lambda : \mu$ (см. рисунок)**.** Найдём координаты этой точки. Имеем

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\mu\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{\lambda+\mu}$$

Переходя к равенствам по координатам получаем

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\mu+\lambda};\quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\mu+\lambda};\quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\mu+\lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

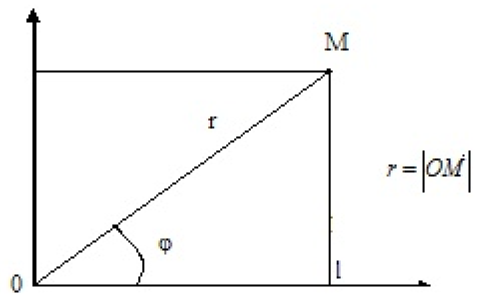
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

<u>Полярная система координат.</u>

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ есть радиус-вектор точки M. Проведём из точки O в некотором направлении луч l.

<u>Определение.</u> Точка O называется **полюсом**, а луч l – **полярной осью,** вектор $\overrightarrow{OM}$ – **полярным радиусом.**

Суть задания какой-либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют полярный радиус и угол между полярной осью и полярным радиусом. Этот угол φ называется **полярным углом**.



Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ox.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad x^2+y^2=z^2$$

Цилиндрическая и сферическая системы координат.

Как и на плоскости, в пространстве положение любой точки может быть определено тремя координатами в различных системах координат, отличных от декартовой прямоугольной системы. Цилиндрическая и сферическая системы координат являются обобщением полярной системы координат на случай трехмерного пространства.

Введем в пространстве точку O и луч l, выходящий из точки O, а также вектор $\mathbf{n}\perp l,\ |\mathbf{n}|=1$. Через точку O можно провести единственную плоскость, перпендикулярную вектору нормали $\mathbf{n}$.

Для введения соответствия между цилиндрической, сферической и декартовой прямоугольной системами координат, точку O совмещают с началом декартовой прямоугольной системы координат; луч l – с положительным направлением оси x; вектор нормали – с осью z.

Цилиндрическая и сферическая системы координат используются в тех случаях, когда уравнение кривой или поверхности в декартовой прямоугольной системе координат выглядят достаточно сложно, и операции с таким уравнением представляются трудоемкими.

Представление уравнений в цилиндрической и сферической системе позволяет значительно упростить вычисления, что будет показано далее.

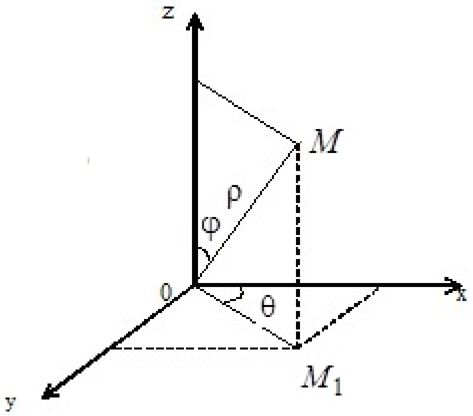


Рис. 1. Сферическая система координат

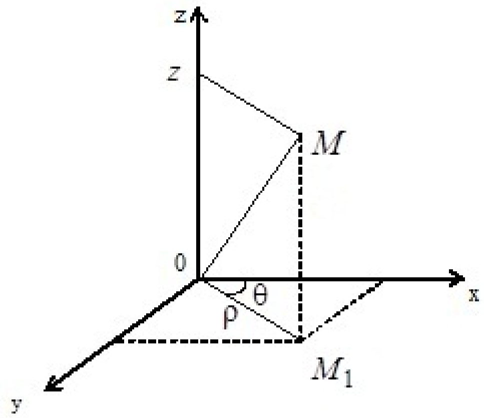


Рис. 2. Цилиндрическая система координат

Если из точки P опустить перпендикуляр MM_1 на плоскость, то точка M_1 будет иметь на плоскости полярные координаты (ρ,θ).

<u>Определение.</u> Сферическими координатами точки M называются числа (ρ,θ,φ), где φ - угол между ρ и нормалью (рис. 1).

<u>Определение.</u> Цилиндрическими координатами точки M называются числа (ρ,θ,z), которые определяют положение точки M в пространстве (рис.2).

Аналогично полярной системе координат на плоскости можно записать соотношения, связывающие между собой различные системы координат в пространстве. Для цилиндрической и декартовой прямоугольной систем эти соотношения имеют вид:

$$z = z,\quad x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\ \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x},\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В случае сферической системы координат соотношения имеют вид:

$$z = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi;\quad x = \rho\cos\theta\sin\varphi;\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x};\quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};\quad \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Произведение векторов

<u>Скалярное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u> Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right) \quad (1)$$

<u>Свойства</u> скалярного произведения:

1) $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$;

2) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ или $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{b} = 0$.

3) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$;

4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$;

5) $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$

<u>Доказательство.</u> Св-ва 1-3 и 5 очевидны и доказываются непосредственно с помощью формулы (1). Докажем св-во 4. Для доказательства рассмотрим вначале скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, таких, что $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$. В этом случае $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\perp\mathbf{c}$ и в силу свойства 2) имеем:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=0,\quad (\mathbf{a},\mathbf{c})=0,\quad (\mathbf{b},\mathbf{c})=0.$$

Таким образом, св-во 4) выполняется.

Пусть теперь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ - компланарные векторы и при этом $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{c}$. Тогда

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b},\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{b})=\alpha|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{b}|\cos\left(\widehat{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{b}}\right)=$$

$$=\alpha\sqrt{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2}\,|\mathbf{b}|\frac{|\mathbf{b}|}{\sqrt{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2}}=\alpha|\mathbf{b}|^2,$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})=0,$$

$$(\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{b},\mathbf{b})=\alpha|\mathbf{b}|^2.$$

В этом случае

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha|\mathbf{b}|^2.$$

Пусть теперь $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ - ортогональный базис. Очевидно, что

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=|\mathbf{e}_i||\mathbf{e}_j|\cos\left(\widehat{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j}\right)=\delta_{ij}|\mathbf{e}_i|^2 \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь произвольные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в ортогональном базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{b}=\sum_{i=1}^{3}b_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{c}=\sum_{i=1}^{3}c_i\mathbf{e}_i$$

Домножив первое равенство скалярно на каждый из базисных векторов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ и учитывая, что для векторов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ свойство 4) выполняется, получаем

$$(\mathbf{a},\mathbf{e}_i)=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{3}a_i(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=a_i|\mathbf{e}_i|^2$$

Следовательно, координаты любого вектора $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ можно найти по формулам

$$a_i=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{e}_i)}{|\mathbf{e}_i|^2} \qquad (3)$$

Выберем базис таким образом, чтобы первый базисный вектор совпадал с вектором $\mathbf{c}$. Тогда

$\dfrac{(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}$ - первая компонента вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

$\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}$ - первая компонента вектора $\mathbf{a}$

$\dfrac{(\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}$ - первая компонента вектора $\mathbf{b}$

Тогда, по правилу сложения векторов (при сложении векторов соответствующие компоненты складываются) имеем

$$\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}+\frac{(\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Таким образом, *векторное пространство со скалярным произведением, заданным формулой* (1)*, является евклидовым пространством*.

Замечание. Свойства 4 и 5 можно записать в виде

$$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Определение. Пусть даны какие-нибудь два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда вектор $\mathbf{c}$, найденный по формуле

$$\mathbf{c}=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

называется **ортогональной проекцией** вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$. Обозначается

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} \qquad (4)$$

Теорема. Пусть даны векторы $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$; $\mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ в декартовой прямоугольной системе координат (в ортонормированном базисе). Тогда

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i \qquad (5)$$

Доказательство. В самом деле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e}_i,\sum_{j=1}^{3}b_j\mathbf{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i.$$

Замечание. Скалярное произведение в ортонормированном базисе можно записывать в матричной форме, если координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ записывать в виде столбцов $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)^T$ и $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)^T$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{b}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{\sum_{i=1}^{3}a_ib_i}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}; \qquad (7)$$

Пример. Найти $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b},2\mathbf{a}-\mathbf{b})$, если $|\mathbf{a}|=2,\ |\mathbf{b}|=3,\ \mathbf{a}\perp\mathbf{b}.$

Решение.

$$(5\mathbf{a}+3\mathbf{b},2\mathbf{a}-\mathbf{b})=10(\mathbf{a},\mathbf{a})-5(\mathbf{a},\mathbf{b})+6(\mathbf{b},\mathbf{a})-3(\mathbf{b},\mathbf{b})=10|\mathbf{a}|^2-3|\mathbf{b}|^2=40-27=13,$$

т.к. $(\mathbf{a},\mathbf{a})=|\mathbf{a}|^2=4,\ (\mathbf{b},\mathbf{b})=|\mathbf{b}|^2=9,\ (\mathbf{a},\mathbf{b})=0$.

Пример. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

Решение. $\mathbf{a}=\{1,2,3\}$, $\mathbf{b}=\{6,4,-2\}$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})=6+8-6=8$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}; \qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}.$$

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}; \qquad \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b},5\mathbf{a}-6\mathbf{b})$, если

$$|\mathbf{a}|=4,\ |\mathbf{b}|=6,\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\pi/3.$$

Решение.

$$(3\mathbf{a}-2\mathbf{b},5\mathbf{a}-6\mathbf{b})=15(\mathbf{a},\mathbf{a})-18(\mathbf{a},\mathbf{b})-10(\mathbf{b},\mathbf{a})+12(\mathbf{b},\mathbf{b})=$$

$$=15|\mathbf{a}|^2-28|\vec{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3}+12|\mathbf{b}|^2=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+12\cdot36=240-336+432=336$$

Пример. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Решение. Имеем $\mathbf{a}=\{3,4,5\}$, $\mathbf{b}=\{4,5,-3\}$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=12+20-15=17; \qquad |\mathbf{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}; \qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}.$$

$$\cos\varphi=\frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{17}{50}; \qquad \varphi=\arccos\frac{17}{50}.$$

Пример. При каком m векторы $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ перпендикулярны.

Решение.

$$\mathbf{a} = \{m,1,0\}\ ;\ \mathbf{b} = \{3,-3,-4\}\ ,\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) = 3m - 3 = 0;\ \ \Rightarrow m = 1\ .$$

Векторное произведение векторов.

Определение. Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$,

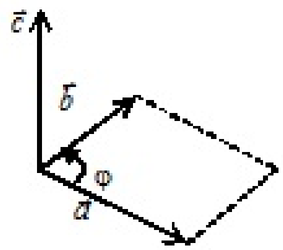
$\sin\varphi \geq 0;\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

3) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют **правую тройку векторов,** т.е. из конца вектора $\mathbf{c}$ движение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ осуществляется против часовой стрелки.

Обозначается: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

С геометрической точки зрения модуль векторного произведения векторов равняется площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$;

2) $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = 0$, если $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}$ или $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{b} = 0$;

3) $[\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{a},\alpha\mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;

4) $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{a},\mathbf{c}]$;

Пусть в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ заданы два вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Рассмотрим вопрос о том, как выражается векторное произведение через координаты этих векторов. Для этого выясним вначале, как перемножаются вектора ортонормированного базиса. Будем предполагать, что вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют правую тройку. Результаты перемножений оформим в виде таблицы

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	0	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	0

В этой таблице векторы стоящие слева считаются первыми, а стоящие сверху – вторыми сомножителями.

Нетрудно проверить, что для левого базиса соответствующая таблица будет иметь вид

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	0	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	0

Чтобы записать векторные произведения базисных векторов для любого ортонормированного базиса в одной форме введём в рассмотрения величину ε, которая определяется следующим образом

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \textit{для правого базиса} \\ -1, & \textit{для левого базиса} \end{cases}$$

Затем введём в рассмотрение величины ε_{ijk} определяемые равенствами

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -\varepsilon$$

Все остальные ε_{ijk} равны нулю. Эти величины зависят от выбора базиса и называются **символами Леви-Чивиты.** При помощи этих символов векторные произведения базисных векторов можно записать в виде (доказывается непосредственной проверкой):

$$\left[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь два произвольных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Их разложения по базису имеет вид

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j \mathbf{e}_j$$

Найдём их векторное произведение. Имеем с учётом формулы (1) и свойств 1) – 4)

$$\begin{aligned} [\mathbf{a},\mathbf{b}] &= \left[\sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{3} b_j \mathbf{e}_j\right] = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} b_j \left[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = \\ &= \varepsilon\left[(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

Полученную формулу легче запомнить, если записать её в виде определителя матрицы третьего порядка

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \varepsilon \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Если обозначить векторное произведение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ через вектор $\mathbf{c}$, то в соответствии с формулой (2) его координаты c_k определяются следующим образом:

$$c_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \qquad (4)$$

<u>**Пример.**</u> Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

<u>**Решение.**</u> $\mathbf{a} = \{2,5,1\}$; $\quad \mathbf{b} = \{1,2,-3\}$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

<u>**Пример.**</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

<u>**Решение.**</u>

$$\overrightarrow{AC} = \{0-2;1-2;0-2\} = \{-2;-1;-2\}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{4-2;0-2;3-2\} = \{2;-2;1\}$$

$$\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&-1&-2\\2&-2&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-1&-2\\-2&1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-2&-2\\2&1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-2&-1\\2&-2\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(-1-4)-\mathbf{j}(-2+4)+\mathbf{k}(4+2)=-5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}.\qquad S_\Delta=\frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ компланарны.

Решение.

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-7&8\\7&-3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-4&5\\0&4&-5\end{pmatrix},$$

Следовательно, векторы линейно зависимы и поэтому они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1;\ \ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=30^0$.

Решение.

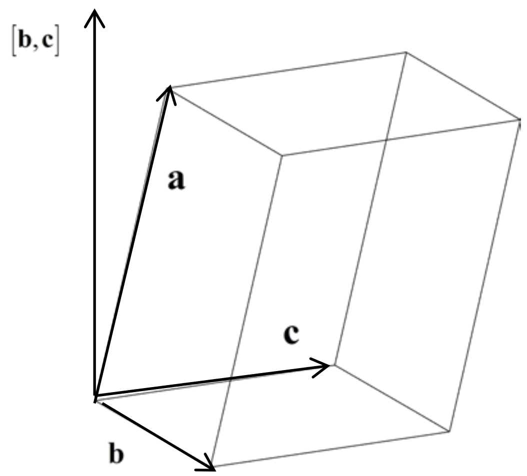
$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}=8\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$S=8|\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin30^0=4\ (\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\mathbf{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ или $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])$.



Смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. (см. рис.).

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение равно нулю, если:
   а) хоть один из векторов равен нулю;
   б) два из векторов коллинеарны;
   в) векторы компланарны.

2) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b}\times\mathbf{c}])$

3) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b})$

4) $(\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$

Доказательство свойств 1-4 (кроме 1в) основывается на соответствующих свойствах скалярного и векторного произведений. Свойство 1в будет доказано чуть позже.

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\right|$$

<u>Доказательство.</u> Как известно, объём призмы

$$V_{пр} = h_{пр}\cdot S_{пр}$$

где h - высота призмы, S - площадь основания

Объём пирамиды

$$V_{пир} = \frac{1}{3}h_{пир}\cdot S_{пир}$$

При этом $h_{пр} = h_{пир}$, $S_{пир} = \frac{1}{2}S_{пр}$, поэтому

$$V_{пир} = \frac{1}{6}V_{пр} = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\right|$$

6) Если $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$, то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{3} c_k\mathbf{e}_k$$

Тогда

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i,\left[\sum_{j=1}^{3} b_j\mathbf{e}_j,\sum_{k=1}^{3} c_k\mathbf{e}_k\right]\right) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i,\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} b_j c_k \varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_i b_j c_k \varepsilon_{jkl}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_l) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_i b_j c_k \varepsilon_{jkl}\delta_{il} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_i b_j c_k \varepsilon_{jki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_i b_j c_k \varepsilon_{ijk} = \varepsilon\left[a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2\right] = \varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Из полученной формулы в частности следует, что $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны (Свойство 1в).

<u>Пример.</u> Доказать, что точки $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = \{-2;-6;1\}, \overrightarrow{AC} = \{4;-3;-2\}, \overrightarrow{AD} = \{-4;-2;2\}$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ и $D(3,7,2)$.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=\{-2;-3;-4\}$, $\overrightarrow{BD}=\{1;4;-3\}$, $\overrightarrow{BC}=\{4,-1,-2\}$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-8-3)-\mathbf{j}(-2+12)+\mathbf{k}(-1-16)=-11\mathbf{i}-10\mathbf{j}-17\mathbf{k}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$$S_{осн}=\sqrt{510}/2\left(ед^2\right)$$

Т.к. $V=\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}\left(ед\right).$

Двойное векторное произведение векторов.

Рассмотрим двойное векторное произведение трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и докажем, что имеет место равенство

$$\left[\mathbf{a},\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]\right]=\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{a},\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\cdot\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\qquad(1)$$

Если $\mathbf{b}\,||\,\mathbf{c}$, то очевидно

$$\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]=0\Rightarrow\left[\mathbf{a},\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]\right]=0$$

$$\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{a},\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\cdot\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\mathbf{b}\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\cos\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}\right)-\mathbf{c}\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right)=\left\{\cos\left(\mathbf{a},\mathbf{c}\right)=\pm\cos\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\cos\alpha\right\}=$$

$$\left(\mathbf{b}\cdot|\mathbf{c}|\mp\mathbf{c}\cdot|\mathbf{b}|\right)\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha=\left\{\mathbf{b}=\lambda\mathbf{c}\right\}=\left(\lambda\mathbf{c}\cdot|\mathbf{c}|\mp|\lambda|\mathbf{c}\cdot|\mathbf{c}|\right)\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha=0$$

Примечание. Знак «$\pm$» зависит от того сонаправлены вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ или разнонаправлены, а именно, если $\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{c}$ то имеет место знак «$+$», в противном случае знак «$-$».

Пусть теперь вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны. Обозначим $\mathbf{u}=\left[\mathbf{a},\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]\right]$. Вектор $\mathbf{u}$ ортогонален вектору $\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]$ и $\mathbf{a}$ и следовательно лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, поэтому

$$\mathbf{u}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}\qquad(2)$$

Обозначим через $\mathbf{c}'$ вектор, лежащий в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и получающийся из вектора $\mathbf{c}$ путём поворота на угол 90° по часовой стрелке если смотреть из конца вектора $\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]$. Тогда векторы $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}$ и $\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]$ образуют правую ортогональную тройку векторов и поэтому

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{c}'\right)=\lambda\left(\mathbf{b},\mathbf{c}'\right)+\mu\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)=\lambda\left(\mathbf{b},\mathbf{c}'\right)$$

С другой стороны, используя свойство перестановки для смешанного произведения имеем

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{c}'\right)=\left(\left[\mathbf{a},\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right]\right],\mathbf{c}'\right)=\left(\left[\left[\mathbf{b},\mathbf{c}\right],\mathbf{c}'\right],\mathbf{a}\right)$$

Положим $\mathbf{v}=\left[[\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{c}'\right]$. Так как векторы $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ и $\mathbf{c}'$ ортогональны, то вектор $\mathbf{v}\parallel\mathbf{c}$, поэтому

$$|\mathbf{v}|=\left|[\mathbf{b},\mathbf{c}]\right|\cdot|\mathbf{c}'|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{c}'|\cdot\sin\left(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}\right)=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|^2\cdot\cos\left(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}'}\right)=|\mathbf{c}|(\mathbf{b},\mathbf{c}') \;\Rightarrow\; \mathbf{v}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c}')$$

Тогда

$$(\mathbf{u},\mathbf{c}')=\left(\left[[\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{c}'\right],\mathbf{a}\right)=(\mathbf{v},\mathbf{a})=(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c}'),\mathbf{a})=(\mathbf{b},\mathbf{c}')\cdot(\mathbf{a},\mathbf{c})$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (2) находим $\lambda=(\mathbf{a},\mathbf{c})$. Но если домножить соотношение (2) скалярно на $\mathbf{a}$ получим

$$(\mathbf{u},\mathbf{a})=0=\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mu(\mathbf{a},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mu(\mathbf{a},\mathbf{c}) \;\Rightarrow\; \mu=-(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

что и завершает доказательство формулы (1).

*Взаимный (биортогональный базис)**

Докажем вначале следующее утверждение.

Предложение 1. *Каков бы ни был базис* $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, *попарные векторные произведения базисных векторов линейно независимы.*

Доказательство. (от противного) Рассмотрим равенство

$$\alpha_1[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]+\alpha_2[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]+\alpha_3[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]=0$$

и предположим, что какой-нибудь один из коэффициентов, например α_1 отличен от нуля. Тогда умножив обе части равенства скалярно на $\mathbf{e}_1$ получим

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=0$$

Это означает, что вектора $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ компланарны и не образуют базис. Полученное противоречие доказывает данное утверждение.

Определение. Базис, составленный из векторов

$$\mathbf{e}_1'=\frac{[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)},\quad \mathbf{e}_2'=\frac{[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)},\quad \mathbf{e}_3'=\frac{[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \qquad (1)$$

называется **взаимным** или **биортогональным** к базису $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. Базис $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ в этом случае называется **основным базисом**.

Из доказанного ранее предложения следует, что векторы $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ линейно независимы и так как речь идёт о трёхмерном пространстве, они образуют базис. Название «биортогональный» связано с тем, что векторы обоих базисов имеющих разные номера ортогональны, т.е.

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j')=\delta_{ij} \qquad (2)$$

Упражнение. Показать, что ортонормированный базис совпадает со своим взаимным. **Указание:** воспользоваться тем, что в ортонормированном базисе $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\varepsilon$, где $\varepsilon=1$ для правого базиса и $\varepsilon=-1$ для левого базиса.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ *- базис взаимный к* $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, *тогда произвольный вектор* $\mathbf{x}$ *раскладывается по эти векторам так*

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{x},\mathbf{e}_i')\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i'\mathbf{e}_i'=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i'. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим разложение вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i$$

Умножим это равенство скалярно сначала на $\mathbf{e}_1'$ затем на $\mathbf{e}_2'$ и далее на $\mathbf{e}_3'$ получим

$$x_1=(\mathbf{x},\mathbf{e}_1'),\quad x_2=(\mathbf{x},\mathbf{e}_2'),\quad x_3=(\mathbf{x},\mathbf{e}_3').$$

Аналогично доказывается и второе разложение.

Итак, числа $x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1')$, $x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2')$ и $x_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_3')$ однозначно определяют вектор $\mathbf{x}$ с помощью векторов $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. Числа $x_1' = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$, $x_2' = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)$ и $x_3' = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_3)$ определяют координаты вектора во взаимном базисе $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ с помощью векторов основного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Представление вектора $\mathbf{x}$ в основном и биортогональном базисах представлено на рисунках 1 и 2.

Рис 1. В произвольном базисе

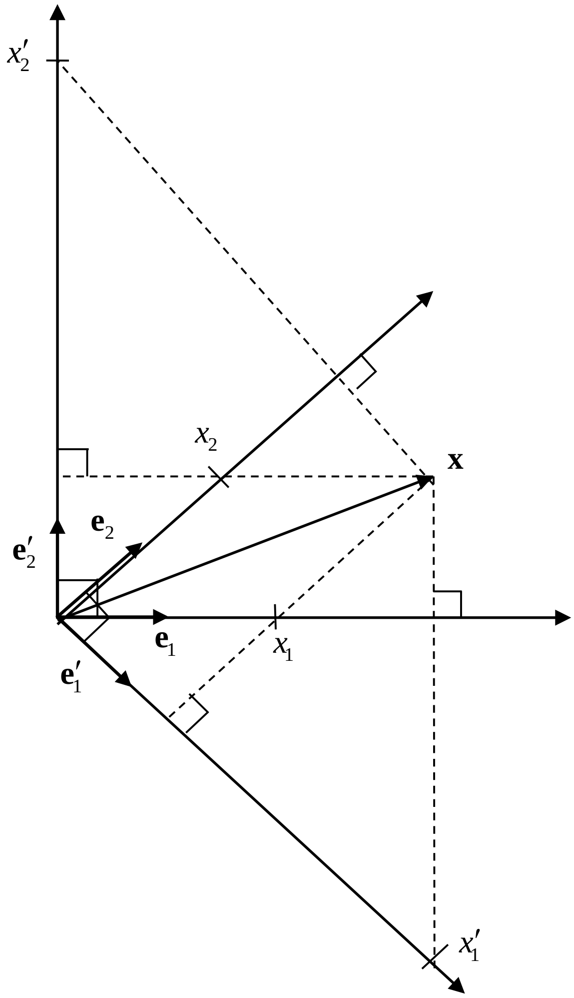
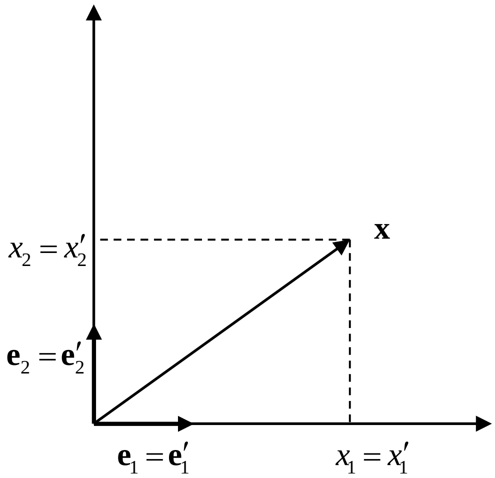


Рис 2. В ортонормированном базисе



В заключение отметим ещё оно свойство взаимного базиса

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ *- базис взаимный к* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. *Обозначим через* $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$ *- базис взаимный к* $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. *Тогда базисы* $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$ *и* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим второе равенство из (3). Написанное для базиса $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ оно будет иметь вид

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i') \mathbf{e}_i''$$

Подставляя сюда вместо $\mathbf{x}$ последовательно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, и учитывая равенство (2), получим

$$\mathbf{e}_i'' = \mathbf{e}_i$$

*Ковариантный и контравариантный базис**

Как было показано в предыдущем пункте вектор $\mathbf{x}$ можно представить двумя способами

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i') \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i' \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i'. \ (1)$$

Исходный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ принято называть **ковариантным базисом,** взаимный базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ **- контравариантным базисом**.

Можно показать, что координаты вектора во взаимном базисе преобразуются при смене базиса по тому же закону, что и векторы основного (ковариантного) базиса, а координаты вектора в осномном базисе по тому же закону, что и векторы взаимного (контравариантного) базиса. Поэтому числа $x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$, $x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$ и $x_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_3)$ называются **контравариантными координатами** вектора, а числа $x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$, $x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)$ и $x'_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_3)$ - **ковариантными координатами.**

В математике принято различать написание ковариантных и контравариантных координат, а также базисов. А именно, для ковариантных величин используются нижние индексы $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, а для контравариантных – верхние индексы $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$. В этом случае представления для вектора $\mathbf{x}$ в формуле (1) запишутся так

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}^i$$

Так как для ортонормированного базиса основной и взаимный базисы совпадают (см. рис. 1,2 пред. пункта), следовательно, ковариантные и контравариантные координаты векторов также совпадают.

В случае произвольного базиса скалярное произведение базисных векторов определяется как (см. тему «Евклидовы пространства»)

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}, \quad (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij} \qquad (4)$$

где совокупности коэффициентов определяемых формулами (4) образуют так называемые **метрические матрицы** $\mathbf{G} = (g_{ij})$ и $\mathbf{G}' = (g^{ij})$**.** Кроме того, в силу (2) из предыдущего пункта

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j \qquad (5)$$

Формулы для скалярных произведений при этом будут иметь вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g^{ij} a_i b_j$$

В ортонормированном базисе $a^i = a_i$, $b^j = b_j$ и $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$, и формулы (5) совпадают с полученными ранее формулами для скалярного произведения.

Положим в первой из формул (3) $\mathbf{a} = \mathbf{e}^1$ получим

$$\mathbf{e}^i = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^3)\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3} g^{ij} \mathbf{e}_j$$

Это разложение векторов взаимного (контравариантного) базиса по векторам основного (ковариантного) базиса. Аналогично можно получить разложение ковариантного базиса по векторам контравариантного базиса

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} \mathbf{e}^j$$

Домножим, к примеру, последнее равенство скалярно на $\mathbf{e}^j$, получим

$$\delta_i^j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} (\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^j) = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} g^{kj}$$

или, что то же самое в матричной форме

$$\mathbf{G}\mathbf{G}' = \mathbf{G}'\mathbf{G} = \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица.

Таким образом $\mathbf{G}' = \mathbf{G}^{-1}$, т.е. метрические матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$ являются взаимно обратными.