Вопросы по курсу «Алгебра и тензорный анализ»

1. Линейные функции на линейных пространствах. Сопряженное пространство. Строка линейной функции, линейная форма. Связь строк в разных базисах.

№1 def Лин. оператор F – отображение лин. пространства V в лин W

1) $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in V$

2) $F(\alpha x) = \alpha F(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

если $V = W$ – лин. преобрзование

если $V = \mathbb{R}$ – однородн. лин. ф-ия = лин. форма

def Сопрям. пр-во V^* – мн-во всех лин. форм над V

$V^* = \{f: V \to \mathbb{R}\}$

$\dim V = \dim V^*$

строка лин. ф-ии – компоненты ковектора (формы) при матричн. записи

компоненты – значения формы на базисных векторах

1) Лин пр-во: 1) $x, y \in V \Rightarrow x+y \in V$ def — мн-во, что для всех его элементов определены „+" „·"
2) $x \in V, \alpha \in R \Rightarrow \alpha x \in V$

$a = \sum \alpha_i a_i$ все $\alpha_i = 0 \Rightarrow a = 0$ – трив.
$\sum \alpha_i^2 \neq 0$ – лин. зависимы

$e_1 \dots e_n$ – л.н.з. базис л.п.
$x = \sum x^i e_i = x^i e_i$; $x = (x^1\, x^2 \dots x^n)^T$ – вектор столбец.
$a^i b_i = \sum a^i b_i = b_i a^i$ $x' = C^{-1} x$ – ковариант.
$D = C^{-1}$ $x' = D \cdot x$ $x'^j = d^j_k x^k$
контр.вар.

Лин. ф-ия ≡ лин. форма $\boxed{f: V \to R}$
$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i f_i = f_i x^i$
$V^* = \{f: V \to R\}$ – сопрям. пр-во
$f_k c^k_i \to \omega' = \omega \cdot C$ – снизу $\Rightarrow C$ – ковариант
$x' = D \cdot x$ – сверху $\Rightarrow D$ – контрвариант

Линейный ф-ал / лин. ф-ия – отображение вектор. пр-ва R в числовое поле F

2. Второе сопряженное пространство. Ковариантные и контравариантные базисы, векторы и координаты. Изоморфизм исходного и второго сопряженного пространств.

Второе сопряж пр-во – $V^{**} = \{V^* \to R\}$

$x = x^i e_i$ $f = f_i \omega^i$
$f(x) = (f, x) = (f_i \omega^i, x^k e_k) = f_i x^k (\omega^i e_k) = f_i x^k \underbrace{\Omega^i_k}$

$\delta^i_k = 1$ $i = k$
$\delta^i_k = 0$ $i \neq k$

$(V^*)^* = V^{**} = V$

def Второе сопряж. пр-во - мн-во всех лин. форм над V^*

$V^{**} = \{f : V^* \to R\}$

$(V^*)^* = V^{**} = V$

ковариантные вектора - которые изменяются по одному закону с базисом

контрвариантные вектора - которые изменяются по обратному закону к базису

координаты - их компоненты

3. Симметрические и кососимметрические полилинейные функции. Определение коэффициентов и матрицы полилинейной функции. Координатная форма действий над полилинейными функциями.

Тензорное умножение

$A \in T^p_q$ $B \in T^r_l$ $C \in T^{p+r}_{q+l}$ $C = A \otimes B$

$A \otimes B = \{z = z^{ij} e_i \otimes e_j \mid z^{ij} \in \mathbb{R}, e_i \otimes e_j$ - базисная диада$\}$

e^1 - столбец (вектор)

e_1 - строка (ковектор)

симметричная $e_{ij} = e_{ji}$

кососимметр. $e_{ij} = -e_{ji}$

Полилинейная ф-ия - функция ~~лин по ко~~ определена на всевозм. векторах и линейна по каждому при фикс. остальных +

коэфф. полилин. ф-ии - коэфф. разлож. векторов по базису простр-ва

матрица полилин. ф-ии - мат-ца из коэфф- этой ф-ии

Т. Любая полилинейная ф-ия (кос.) в n-ом пространстве м.б. представ. в виде матрицы.

def Полилинейная ф-ия $A(x_1, \dots x_n)$
n векторных аргументов – числ.
ф-ия, определенная на всевозмож.
векторах $x_1, x_2 \dots x_n \in$ лин. L
и линейна по каждому из арг.
при фиксированных остальных

симметричная – не меняется от
перестановки арг.

кососимметричн. – значение меняет
знак от перестан.
аргументов
(= 0 при равенстве
двух других)

4. Определения полиад и тензорного произведения линейных пространств. Тензорное произведение как линейное пространство. Размерность тензорного произведения.

$x \otimes y$ – диада – некоторая
билинейная операция
„склеивания" векторов
из разных пространств
(полиада – n векторов)

V, W – лин. пр-ва ($\dim V = n$, $\dim W = m$)
$\otimes$ $V \times W \to V \otimes W (= T)$ – тензорное произвед. пр-в

по одному прост.
диады – „склеивание векторов" из разных +
базисов

-тензорное умножение
мн-во всевозможных $v \otimes w$ –
-тензорное произведение пространств
$\dim (V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W = n \cdot m$

Эта операция называется *тензорным умножением* векторов, а множество $V \otimes W$, которое получается из наборов всевозможных диад, – *тензорным произведением* пространств.

Левая свертка: $\omega \in V^*$ ковектор $(\omega, x\otimes y) = (\omega, x)y = \alpha y \in W$ вектор

Правая свертка: $\theta \in W^*$ ковектор $\equiv y(x\otimes y, \theta) = (y, \theta)x = \beta x \in V$ вектор

что тензорное произведение любых двух векторов будет линейной комбинацией базисных диад:

$$x = x^i e_i; \quad y = y^j l_j; \quad t_{ij} \equiv e_i \otimes l_j; \quad z^{ij} \equiv x^i y^j;$$

$$x \otimes y = x^i e_i \otimes y^j l_j = x^i y^j e_i \otimes l_j = x^i y^j t_{ij} = z^{ij} t_{ij}, \qquad (2)$$

а следовательно, тензорное произведение пространств $V \otimes W$ наделено структурой *линейного пространства размерности* $nm = \dim(V \otimes W)$. Элементы пространства $T \equiv V \otimes W$ называются *тензорами,* а коэффициенты разложения z^{ij} этого элемента z по базисным диадам $t_{ij} = e_i \otimes l_j$ называются *координатами* или *компонентами* этого тензора:

$$z \in T \equiv V \otimes W \qquad \boxed{z = z^{ij} t_{ij} = z^{ij} e_i \otimes l_j} \ . \qquad (3)$$

$$\boxed{\dim T = \dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W = nm}$$

Тензорное умножение $A \in T^p_q$ $B \in T^r_l$ $C \in T^{p+r}_{q+l}$

$C = A \otimes B$

5. Пространства тензоров типа (p ,q) определение, базис, размерность, форма записи компонент тензоров. Компонентная форма записи арифметических действий над тензорами.

def Тензор T типа (p, q) ранга $n=p+q$ элемент тензорного произведения лин. пространства V в кол-ве p и сопряж. простр. V^* в кол-ве q

базис: $T = T^{i\dots s}_{i\dots k}\, \underbrace{e_j \otimes \dots \otimes e_s}_{p} \otimes \underbrace{e^i \otimes \dots \otimes e^k}_{q}$

~~контр.вектор.~~ ковектор. ~~ковектор.~~ контр.вектор.

$\dim T = n^{p+q}$, где $n = \dim V$

компоненты тензора:

$$T^{i\dots e}_{j\dots k} = T(e^i \otimes \dots \otimes e^e \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_k) = T^{e}_{sm}\, \delta^i_e\, \delta^s_j\, \delta^m_k = T^i_{jk}$$

Смена базиса:

$$T^{i'\dots e'}_{j'\dots k'} = T^{i\dots e}_{j\dots k}\, d^{i'}_i \dots d^{e'}_e\, c^j_{j'} \dots c^k_{k'}$$

6. Линейные функции на евклидовых пространствах, изоморфизм исходного и сопряженного пространств. Контравариантный базис и ковариантные координаты вектора в евклидовом пространстве. Матрица перехода от ковариантного к контрвариантному базису.

def Лин-пр-во евклидово, если опред. скалярн. произв. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L \quad \exists (\bar{x}, \bar{y})$

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, x)$

2) $(\bar{x}+\bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$

3) $(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$

4) $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, при $\bar{x} \neq 0$

5) $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, при $\bar{x} = 0$

def Два евклидовых пространства изоморфны, если между ними можно установить соответствие φ, что

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$
3) $(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$

Сопоставим *форме* $f \in V^*$ *вектор* $x_f \in V$, такой, чтобы свертка давала такой же результат, что и скалярное произведение:

$$V^* \ni f \leftrightarrow x_f \in V$$

Свертка - $(f, x) = f(x) = (x_f, x)$ - **Скалярное произведение**.

контрвариантный базис - базис в пр-ве векторов

ковариантный базис - базис в пр-ве ковекторов.

Метрический тензор - T^0_2

Матрица Грама $G = g_{ik} = (e_i, e_k)$

Переход с помощью метрического тензора - матрица Грама

опускание и свертывание контрвар. вектора с метрич. тензором

$x_i = x^k g_{ki}$ $\qquad$ $x^i = g^{ik} x_k$

7. Связь компонентов тензора в разных базисах. Геометрические объекты, изоморфизм линейных пространств геометрических объектов и тензоров. Произведение тензоров, его инвариантность, свойства.

Старый базис $e = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

новый базис $e' = (e_1' \dots e_n')$

$$\bar{e}_j' = c_j^k \bar{e}_k$$

c – матрица перехода (ковариантно) $C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & & \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$

$$\forall \bar{x}: \begin{cases} \bar{x} = \bar{e}x \\ \bar{x} = \bar{e}'x' \end{cases} \Rightarrow \bar{e}x = \bar{e}'x' = \bar{e}Cx'$$

$$\Rightarrow x = Cx' \Rightarrow x' = C^{-1}x = Dx$$

$x^{i'} = d_k^{i'} x^k$ – контрвариант.

коорд. тензора T

$$T^{i'\dots e'}_{j'\dots k'} = T^{i\dots e}_{j\dots k}\, d_i^{i'} \dots d_e^{e'}\, c_{j'}^{j} \dots c_{k'}^{k}$$

- контрвариантное (– верхние) по $d_i^{i'}$
- ковариантное (– нижние) по $c_{i'}^{i}$

Изоморфность пространств $V \cong V^*$ приводит к изоморфизму пространств тензоров, надстроенных над ними: $T_0^2 \cong T_1^1 \cong T_2^0$. Фактически это стирает разницу между типами тензоров, сохраняя только их ранги.

Инвариантность – св-во, неизм. при смене базиса, не зависящ. от порядка

Начнем с определения скалярного инварианта.

Скалярный инвариант это функция $\Phi: T \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\Phi(T^{\cdots}_{\cdots}) = \Phi(T'^{\cdots}_{\cdots}),$$

где $T^{\cdots}_{\cdots}, T'^{\cdots}_{\cdots}$ координаты тензора T в разных базисах.

Приведем примеры скалярных инвариантов:

1) Для тензора нулевого ранга T его единственная координата T является инвариантом.

2) Для тензора первого ранга T, заданного над евклидовым пространством, скалярным инвариантом является квадрат его длины, вычисляемый по формуле (4):

$$|T|^2 = (T,T) = g_{ik}T^iT^k$$

3) Для тензора 2-ого ранга T спектр скалярных инвариантов состоит из множества сверток:

$$J_1 = g_{ik}T^{ik} = T^i_i = SpT \text{ - линейный инвариант;}$$

$$J_2 = T_{ik}T^{ik} \text{ - квадратичный инвариант;}$$

$$J_3 = T^i_jT^j_kT^k_i \text{ - кубический инвариант;}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (10)$$

$$J_n = T^{i_1}_{i_2}T^{i_2}_{i_3}\dots T^{i_n}_{i_1} \text{ - } n \text{ - й инвариант.}$$

def Тензорное умножение

$A \in T^p_q$, $B \in T^n_e$ $\quad C \in T^{p+n}_{q+e}$

$C = A \otimes B$

Св-ва

1. $\dim(A\otimes B) = \dim A \cdot \dim B$
2. $(A\otimes B)\otimes C \approx A\otimes(B\otimes C)$
3. $\exists$ изоморфизм $A\otimes B \leftrightarrow B\otimes A$
4. $A\otimes(B\oplus C) = (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$

внешняя сумма лин. пр-ва

2. Если любой вектор из Ω *единственным* образом представляется в виде суммы векторов из V и W, то

$$\Omega = V \oplus W.$$

8. Внутренняя свертка тензоров, определение, координатная форма. Свертка и полная свертка тензоров, определение, координатная форма. Свойства сверток. Свертка геометрического объекта и тензора. Признак тензора.

def Свертка – отображение пары пр-в во мн-во чисел

$V^* \times V \to \mathbb{R}$

$x \in V,\ f \in V^* \Rightarrow (f, x) = f(x) \in R$

def Внутренняя свертка – вычисление следа матрицы

$z = z^i_j e_i \otimes e^j \in T^1_1$

$(z) = (z^i_j)$, $sp(z) = z^i_j$

def Полная свертка тензоров

$x = x^i e_i$, $f = f_i n^i$

$f(x) = (f, x) = (f_i n^i, x^k e_k) =$

$= f_i x^k (n^i e_k) = f_i x^k \delta^i_k$

$(n^i e_k) = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

Св-ва свертки:

1. Симметричность

$\forall x \in V, \forall f \in V^* \Rightarrow (f, x) = (x, f)$

т.к. $f_i x^i = x_i f^i$

2. лин. по аргументам

· т.к. $f(x)$ – лин. форма – по x

· $x = const$, $f, g \in V^*$, $\alpha, \beta \in R \Rightarrow (\alpha f + \beta g, x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

3. инвариантность
значение не зависит от выбора базисов в V^*

4) <u>Свертка с вектором</u> (ковектором): $x \in V$, $\omega \in V^*$

$$A \in T_1^1 \ ; \quad y = \left(A, x\right) \in V \quad \Leftrightarrow \quad y^i = A_k^i x^k \ ;$$

$$\psi = \left(A, \omega\right) \in V^* \ \Leftrightarrow \ \psi_k = A_k^i \omega_i \ .$$

Подробная запись свертки смешанного тензора с ковектором (10):

$$A = A_k^i e_i \otimes e^k , \quad \omega = \omega_k e^k ,$$

$$\psi = \left(A, \omega\right) = (A_k^i e_i \otimes e^k , \omega_j e^j) =$$

$$= A_k^i \omega_j (e_i , e^j) \otimes e^k = A_k^i \omega_j \delta_i^j e^k = A_k^i \omega_i \, e^k \in V^* .$$

5) <u>Свертка с комплиментарным тензором</u>

Назовем тензоры *комплиментарными,* если они имеют хотя бы одну пару противолежащих индексов. Так тензоры A_j^i , B^{kl}, C_{mn} попарно комплиментарны. Очевидно, что смешанный тензор комплиментарен с любым тензором. Определим свертку тензоров следующим правилом: «После немого суммирования произведений координат двух комплиментарных тензоров оставшийся индекс занимает освободившееся место».

$$\left(X, Y\right) : \ T_q^p \times T_t^s \to T_n^m ; \quad X \in T_q^p \quad ; \quad Y \in T_t^s \ ; \quad p + q - 2 = m + n .$$

комплиментарной - имеет хотя бы одну пару противолежащих индексов

$(A,B)_{21} = a^i_j\, b^{jl} = (A\,\hat{i})\cdot(B\,\hat{l}) = AB$

$(A,B)_{22} = a^i_j\, b^{kj} = (A\,\hat{i})\cdot(B\,\hat{k}) = A\cdot B^T$

$(A,C)_{11} = a^i_j\, c_{in} = (A\,\hat{j})(C\,\hat{n}) = A^T C$

$\boxed{A^i_j \quad B^{kl} \quad C_{mn}}$

(1) - строка

(2) - столбец.

$x = \sum x^i e_i = x^i e_i$ - по Эйнштейну

$\omega: V \Rightarrow R$ - однородная лин. форма

Th. Признак тензора

Если при сворачивании некоторого объекта с произвольным ~~тензором~~ вектором (ковектором) $\rightarrow$ тензор с соответствующим набором индексов $\Rightarrow$ исходный базис-тензор.

9. Тензорное произведение полилинейных функций, определение, свойства. Теорема о базисе пространства полилинейных функций. Транспонированный тензор. Разложения полилинейной функции в сумму симметрической и кососимметрической.

def Произведение полилинейной ф-ии

$u \in \Lambda^{p_1}_{q_1}$ $\quad v \in \Lambda^{p_2}_{q_2}$

$w = u \cdot v$

$w(x_1, , x_{p_1}, \dots, x_{p_2+p_1}; y^1, \dots, y^{q_2}, \dots y^{q_1+q_2}) =$

$= u(x_1, \dots x_{p_1}; y^1, \dots y^{q_1}) \cdot v(x_1, \dots, x_{p_2}; y^1, \dots y^{q_2})$

Св-ва

1. $uv \neq vu$
2. $u(vw) = (uv)w = uvw$
3. $u(v+w) = uv + uw$
4. $u \cdot \theta = \theta v = \theta$
5. $(\alpha u)v = u(\alpha v)$

def Транспонированный базис

$(z_{ij})^T = (z_{ji})$

$(z^{ij})^T = (z^{ji})$

Тензор симметричный: $z = z^T$

кососимметричный: $z = -z^T$

Симметризация $\quad Sym\, z = \frac{1}{2}(z + z^T)$

Альтернирование $\quad Alt\, z = \frac{1}{2}(z - z^T)$

$z = Sym\, z + Alt\, z$

Внешнее произведение $\quad A \wedge B = Alt(A \otimes B)$

Поли-вектор - элемент кососимметрической алгебры

ЛЕММА 5 (*Универсальность тензорного произведения*) **

Для любой билинейной функции $f : V \times W \to \mathbb{R}$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \otimes W \to \mathbb{R}$ такое, что $f(x, y) = \varphi(x \otimes y)$.

Если $\{e_i\}$ - базис пространства V, то поливекторы $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ..... \wedge e_{i_p}$ где $i_1 < i_2 < ... < i_p$, составляют базис пространства $\Lambda T^p(V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: В силу универсальности тензорного произведения (лемма 5, стр. 30) любое кососимметричное полилинейное отображение может быть представлено в виде:

$$f(x_1,...,x_p) = \varphi(x_1 \wedge ... \wedge x_p).$$

Это означает, что пространство $\Lambda T^p(V)$ изоморфно пространству $\Lambda V^p = \underbrace{V \wedge V \wedge ... \wedge V}_{p}$, называемому *внешней p-степенью пространства* V.

Как изоморфные пространства они имеют изоморфные базисы:

$$f(e_1,...,e_p) = \varphi(e_1 \wedge ... \wedge e_p). \qquad \square$$

Из леммы 7 следует, что размерность пространства $\Lambda T^p(V)$, равная числу базисных элементов порядка p, может быть найдена как число сочетаний из «n» по «p»:

$$\dim \Lambda T^p(V) = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (10)$$

10. Операции симметрирования и альтернирования полилинейных функций, определение, свойства. Симметрирование и альтернирование тензоров. Координатная форма операций симметрирования и альтернирования.

Тензор симметричный: $Z = Z^T$

кососимметричный: $Z = -Z^T$

Симметризация $Sym\, Z = \frac{1}{2}(Z+Z^T)$

Альтернирование $Alt\, Z = \frac{1}{2}(Z-Z^T)$

$$\boxed{e^i \wedge e^j \equiv Alt(e^i \otimes e^j).}$$

$z_{(ij)} = \frac{1}{2}(z_{ij} + z_{ji})$ $z_{[ij]} = \frac{1}{2}(z_{ij} - z_{ji})$

def S_r - группа постановок из $1 \dots r$
$\forall p \in S_r$ и $\forall r$-формы φ

$(p\varphi)(\bar{u}_1, \dots \bar{u}_r) = \varphi(\bar{u}_{p(1)}, \dots \bar{u}_{p(r)})$

форма симметрична, при $p\varphi = \varphi$
кососимметрична $p\varphi = (\operatorname{sgn} p)\varphi$
$+1$ - чётная
-1 - нечетная

11. Внешние формы и поливекторы, определение. Коэффициенты внешней формы, основные коэффициенты. Разложение внешней формы по тензорным произведениям векторов контравариантного базиса.

def Внешняя форма k-го порядка - полилинейная, кососимметр. ф-ция на наборах из k векторов

Внешнее произведение $A \wedge B = Alt(A \otimes B)$
Поли-вектор - элемент кососимметрической алгебры

12. Внешнее произведение.Теорема о базисе пространства внешних форм, следствия. Вид внешней формы, порядок которой совпадает с размерностью пространства.
13. (*) Внешнее дифференцирование. Точные и замкнутые формы. Теорема Пуанкаре.
14. (*) Интегрирование внешних форм. Обобщенная теорема Стокса.
15. (*)Определения ориентированного параллелепипеда и его объема. Объем как внешняя форма, связь его со специальным геометрическим объектом. Свойства коэффициентов этого объекта. Определение псевдотензоров, операции над ними.

16. Пространство тензоров на евклидовых пространствах, его базис. Связь компонент тензора в различных базисах, жонглирование индексами. Свертка тензоров, скалярное произведение вектора на тензор.

def Пр-во евклидово если на нем определена операция скалярного произведения

$(x, y) = (x^i e_i, y^k e_k) = x^i y^k (e_i, e_k) =$
$= x^i y^k g_{ik}$, где

g_{ik} - метрический тензор

$G = (g_{ik})$ - матрица Грамма

Жонглирование

$x_i = x^k g_{ki}$ $\qquad$ $x^i = g^{ik} x_k$

Переход между базисами

$e' = eC$ $\qquad$ $x' = Dx$

$f' = Cf$ $\qquad$ $D = C^{-1}$

Скалярное произведение

$T \cdot c = (\sum_k a_k b_k) c = \sum_k a_k (b_k c)$

17. Метрический тензор. Объем параллелепипеда в евклидовом пространстве. Векторные произведения вектора и тензора.

def Метрический тензор - скалярное произведение базисных векторов

$G = (g_{ik})$ - мат-ца Грама

Векторное произведение вектора и тензора

$T \times c = (\sum_k a_k b_k) \times c = \sum_k a_k (b_k \times c)$

$\Rightarrow c \times T = \sum_k (c \times a_k) b_k$

18. Инварианты тензора. Алгебраические инварианты тензора второго ранга. Квадратичная функция и линейное преобразование, порожденное тензором. Главные направления и главные значения тензора.

<u>def</u> Инвариант тензора T — св-во объекта, зависящее от его порядка но не изменяемое при смене базиса

<u>def</u> Алгебраический инвариант

$\det(T-\lambda E)=0$

собственные значения

из $T-\lambda E=0$ — собственные вектора

В новом базисе симметр. тензор:

$$T_{n\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

квадратичн. ф-ия $q(x)=T_{ij}x_ix_j$ = const

$\Rightarrow$ поверхность 2-го порядка в R

$q(x)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\dots+\lambda_nx_n^2=\pm1$ —

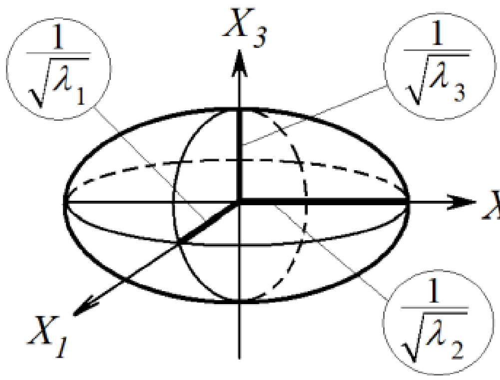
тензорная поверхность T

собственные вектора — главные направления

собственные числа — главные значения

19. Тензорная поверхность, главные оси тензора. Шаровой тензор и девиатор.

Тензорная поверхность является геометрическим инвариантом тензора, то есть тем «геометрическим объектом», который можно сопоставить симметричному тензору 2-го ранга. В размерностях 2 или 3 его можно даже увидеть. Наиболее типичный случай для физических приложений (тензор инерции, тензор электропроводности и т.п.) – это **трехосный эллипсоид**.



Главные значения:

$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$

Главные оси: X_1, X_2, X_3

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = 1;$$

$$\boxed{\frac{X_1^2}{1/\lambda_1} + \frac{X_1^2}{1/\lambda_2} + \frac{X_3^2}{1/\lambda_3} = 1}$$

def Шаровой тензор, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$

$$T = \lambda g^{ij} e_i \otimes e_j = P \qquad P_{ik} = \frac{1}{n} g_{ik} T^s_s$$

def Девиатор тензора

$$\mathcal{D} = T - P$$

$$T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{n} g_{ik} T^s_s + \frac{1}{n} g_{ik} T^s_s = \mathcal{D}_{ik} + P_{ik}$$

20. Тензорное поле в точечном евклидовом пространстве, криволинейные координаты, r-мерные поверхности. Локальный базис, касательное пространство, метрический тензор. Допустимые преобразования координат. Матрицы перехода между локальными базисами.

def Аффинное пространство с метрикой Евклида — точечное евклидово пространство

def если в трехмерном пр-ве задана с.к $\{u^1, u^2, u^3\}$ и для каждой точки пространства $\exists$ взаимнооднознач. соответствие со знач u^1, u^2, u^3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ u^1, u^2, u^3 – криволинейные координаты

. Касательные вектора к координатным линиям, согласованные с их направлением, образуют *локальный координатный базис* (*локальный репер*) : $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Касательное пр-во – совокупность касательных векторов с введенной на ней единственной структурой векторного пространства

Декартова С.К.:

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k \Rightarrow g_{ik} = i_i \cdot i_k = \delta_{ik} = diag(1,1,1)$$

Криволинейная С.К.:

$$\frac{\partial r}{\partial y^i} = \frac{\partial r}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i} = i_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k \Rightarrow g_{ik} = i_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} i_s \frac{\partial x^s}{\partial y^k} = \delta_{js} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial x^s}{\partial y^k}$$

Мат-ца перехода

$$c^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \qquad d^{i'}_i = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} \qquad c_i^k d^i_j = \delta^k_j$$

21. Символы Кристоффеля I и II рода. Свойства символов Кристоффеля. Ковариантные производные контравариантных и ковариантных координат вектора, скаляра.

Так как векторы локального базиса являются функциями координат $\vec{e}_i = \vec{e}_i(y^1, y^2, y^3)$, то можно разложить производные от базиса по этому же базису

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial y^k} = \Gamma^j_{ik}\vec{e}_j, \qquad (1)$$

где Γ^j_{ik} - некоторые коэффициенты разложения (их 27 штук), называемые *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля 2-го рода*.

$$\Gamma^i_{jk} = e^i \frac{\partial e_j}{\partial y^k} = -e_j \frac{\partial e^i}{\partial y^k}.$$

$$\Gamma_{i,jk} \equiv g_{is}\Gamma^{s}_{jk} = g_{is}e^{s}\frac{\partial e_j}{\partial y^k} = e_i\frac{\partial e_j}{\partial y^k}. \qquad (5)$$

Эти коэффициенты обычно называют *символами Кристоффеля 1-го рода*.

1) Символы симметричны по двум последним индексам

$$\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ji}; \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}.$$

---

2) (Лемма Леви-Чивиты). Символы Кристоффеля могут быть выражены через производные от метрического тензора по формуле:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial y^i}\right). \qquad (7)$$

3) Символы Кристоффеля не являются тензорами.

$$= c^{i}_{i'}c^{j}_{j'}c^{k}_{k'}e_i\frac{\partial e_j}{\partial y^k} + c^{i}_{i'}c^{k}_{k'}e_i e_j\frac{\partial c^{j}_{j'}}{\partial y^k} = c^{i}_{i'}c^{j}_{j'}c^{k}_{k'}\Gamma_{i,jk} + c^{i}_{i'}c^{k}_{k'}g_{ij}\frac{\partial c^{j}_{j'}}{\partial y^k}. \qquad (8)$$

Последняя группа членов в (8) является нетензорной «добавкой», не позволяющей считать символ Кристоффеля тензором. Чтобы подчеркнуть нетен-

---

Внутренняя свертка символа Кристоффеля 2-го рода равна

$$\Gamma^{i}_{ij} = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial y^j}. \qquad (9$$

Внутренняя свертка символа Кристоффеля 2-го рода равна

$$\Gamma^{i}_{ij} = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial y^j}. \qquad (9$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{\partial y^\beta}. \qquad \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{H_\beta}{H^2_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial y^\alpha}$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta\alpha} = H_\alpha\frac{\partial H_\alpha}{\partial y^\beta}; \qquad \Gamma_{\alpha,\beta\beta} = -H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial y^\alpha}$$

$$dA = e_k DA^k \Rightarrow \boxed{DA^k \equiv dA^k + A^i\Gamma^k_{ij}dx^j = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i\Gamma^k_{ij}\right)dx^j}, \qquad (1)$$

а соответствующую производную – *ковариантной производной контравариантного* векторного поля:

$$DA^k = A^k_{;j}dx^j \Rightarrow \boxed{A^k_{;j} \equiv A^k_{,j} + A^i\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i\Gamma^k_{ij} \equiv \nabla_j A^k}. \qquad (2)$$

Лемма Леви-Чивиты

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial y^i}\right)$$

ковариантная пр-ая –

$$\nabla_j T^{ik} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^j} + T^{sk}\Gamma^i_{sj} + T^{is}\Gamma^k_{sj}$$

$$\nabla_j T^i_k = \frac{\partial T^i_k}{\partial x^j} + T^s_k\Gamma^i_{sj} - T^i_s\Gamma^s_{kj}$$

$$\nabla_j T_{ik} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^j} - T_{sk}\Gamma^s_{ij} - T_{is}\Gamma^s_{kj}$$

Ковариантная производная ковекторного поля – ковариантное тензорное поле 2-ого ранга.

22. Ковариантные производные компонент тензора. Свойства ковариантных производных: производная суммы и произведения, леммы Риччи, производные как компоненты тензора.

Производная суммы

$\nabla_j C^i_k = \nabla_j A^i_k + \nabla_j B^i_k$, при $C = A + B$

Производная произведения

$\nabla_s C^i_{jk} = B^p_{jk}\nabla_s A^i_p + A^i_p \nabla_s B^p_{jk}$, при $C = AB$

ЛЕММА 12 (Лемма Риччи)

Ковариантные производные метрического тензора g_{ik},

символов Кронекера δ^k_j *и символов Леви-Чивиты* ε^{ijk}, ε_{ijk} *равны нулю,*

то есть при ковариантном дифференцировании все они ведут себя как константы.

23. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах: дивергенция, ротор, градиент, оператор Лапласа.

Дифференциальные операторы теории поля

В декартовых координатах вводят оператор ∇ (читается «набла») как формальное дифференцирование по координатам:

$$\vec{\nabla} = \left\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\right\} = \vec{i}\,\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z. \qquad (1)$$

На его основе вводят четыре дифференциальных оператора (напомним, что слово «поле» опускаем (стр. 102)):

Градиент (действует на скаляры, переводя их в векторы)

$$grad\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left\{\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi\right\} = \vec{i}\,\partial_x\varphi + \vec{j}\partial_y\varphi + \vec{k}\partial_z\varphi. \qquad (2)$$

Дивергенция (действует на векторы, переводя их в скаляры)

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z. \qquad (3)$$

Ротор (действует на векторы, переводя их в векторы)

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})\begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_x A_z - \partial_z A_x \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Оператор Лапласа (действует на скаляры, переводя их в скаляры)

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = divgrad\varphi = \partial_{xx}^2\varphi + \partial_{yy}^2\varphi + \partial_{zz}^2\varphi. \qquad (5)$$

Градиент тензора: $gradT \equiv \nabla\otimes T = e^i\nabla_i \otimes T = e^i \otimes \nabla_i T$

(Тензор типа (p,q) переходит в тензор типа $(p,q+1)$).

Дивергенция тензора $divT = \nabla\cdot T = e^i\nabla_i\cdot T = e^i\left(\nabla_i, T\right)$.

(Тензор типа (p,q) переходит в тензор типа $(p-1,q)$.)

Ротор тензора $rotT = \nabla\times T = e^i\nabla_i\times T = \left[e^i\nabla_i, T\right]$.

(Тензор переходит в осевой тензор того же ранга.)

Оператор Лапласа в криволинейных координатах $\Delta\varphi = divgrad\varphi = (\nabla, \nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$ (13) (переводит скаляры в скаляры).

Существует удобная, но замысловатая форма записи:

$$\Delta\varphi = (e^i\nabla_i, e^j\nabla_j\varphi) = (e^i, e^j)\nabla_i\nabla_j\varphi = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi = \nabla_i\left(g^{ij}\partial_j\varphi\right) =$$

$$= \nabla_i A^i = (8) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}A^i\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\varphi\right). \quad (14)$$

24. Интеграл от тензора, обобщенная теорема Остроградского-Гаусса.

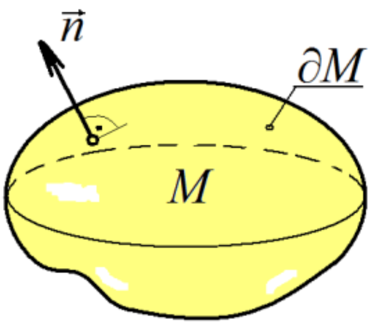
***Интегралом от тензора** T типа (p,q) по области M в E^3 назовем тензор I того же типа, компоненты которого в прямоугольной декартовой системе координат равны интегралам от компонент тензора T по соответствующей виду интеграла мере μ:*

$$I = \int_M T d\mu = \int_M T_{i\ldots k}^{j\ldots s} \overbrace{e_j \otimes \ldots \otimes e_s}^{p} \otimes \underbrace{e^i \otimes \ldots \otimes e^k}_{q} d\mu =$$

$$= \left(\int_M T_{i\ldots k}^{j\ldots s} d\mu\right) \overbrace{e_j \otimes \ldots \otimes e_s}^{p} \otimes \underbrace{e^i \otimes \ldots \otimes e^k}_{q}. \quad (15)$$

определить *обобщенную формулу Остроградского–Гаусса*

$$\boxed{\int_M \nabla * T dV = \int_{\partial M} n * T dS} \quad (16)$$



M – область E^3; ∂M – граница области;
V – мера объема; S – мера площади;
$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали;
$*$ – символ операции (один из трех):
$\bullet$ – скалярное произведение,
$\otimes$ – тензорное произведение,
$\times$ – векторное произведение.

25. Тензор Римана-Кристоффеля, связь с метрическим тензором, симметрия. Повторное ковариантное дифференцирование в евклидовом пространстве.

Тензор Римана-Кристофеля - тензор из символов Кристофеля и числа

$$R = (R^{i}_{qk\ell})$$

$$R^{s}_{kji} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x^{j}}\Gamma^{s}_{ik} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{s}_{mj}\right]_{[jk]} \neq 0$$

26. Ортогональные координаты, параметры Ламе. Символы Кристоффеля в ортогональных координатах. Физические компоненты тензора.
27. Гладкое многообразие. Определение риманова пространства. Поверхность как риманово пространство.
28. Абсолютный дифференциал тензорного поля, параллельный перенос вдоль кривой. Условия евклидовости пространства.
29. Интеграл от скалярной функции в римановом пространстве.
30. Изотропные направления и кривые. Геодезические линии.
31. Многогранник Френе в римановом пространстве. Трехгранник Френе в R^3 . Формулы для векторов главной нормали, бинормали и кручения при естественной параметризации кривой
32. Поверхности в R^3 : нормальный вектор, первая квадратичная форма.
33. Нормальная кривизна кривой на поверхности, вторая квадратичная форма поверхности, теорема Менье.
34. Индикатриса Дюпена, главные направления и главные кривизны, средняя и гауссова кривизны. Формула Эйлера.
35. Внутренняя и внешняя геометрия поверхности.Классификация точек поверхности в R^3.
36. Деривационные уравнения. Формулы Гаусса-Петерсона-Кодацци. Теорема Боне. Замечательная теорема Гаусса.

Литература:

1. Мусин Ю.Р. Тензоры. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии М.; МАИ 2017.
2. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: - М.: Наука, 2000.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М.: Наука, 1987.
4. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: МГУ, 1974.
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.

7. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: ГИТТЛ, 1956.
8. Норден А.П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956
9. Финников С.П. Дифференциальная геометрия. - М.: Изд-во МГУ, 1961.

Доцент, к.ф.-м.н. Мусин Ю.Р.

木星