Числовые ряды.

Основные определения.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

При этом числа $a_1, a_2, ...$ будем называть членами ряда, а a_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (2)$$

называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, сумму ряда (1) можно рассматривать как предел последовательности его частичных сумм.

Определение. Ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Пример. Рассмотрим $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Последовательность q^k – геометрическая прогрессия. Найдём сумму n первых членов геометрической прогрессии. Имеем с одной стороны

$$S_{n+1} = 1 + q + \ldots + q^{n+1} = 1 + q\left(1 + q \ldots + q^n\right) = 1 + qS_n$$

С другой стороны

$$S_{n+1} = S_n + q^{n+1}$$

Исключая S_{n+1} из двух последних равенств, находим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$ то

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

Задачу о нахождении частичной суммы ряда $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ обычно рассматривают как задачу о представлении S_n в виде функции от n, удобной для вычисления. Можно, например, задать последовательность b_n такую, что $\forall n \in N$ справедливо равенство $a_n = b_{n+1} - b_n$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(b_{k+1} - b_k\right) = b_{n+1} - b_1$$

Упражнение. Найти выражение для частичной суммы в случае если:

1) $a_n = b_{n+k} - b_n, \quad k \in N$

2) $a_n = b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n$

Пример. Доказать по определению сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ и найти его сумму.

Решение. Имеем

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Тогда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Свойства рядов.

Представим числовой ряд следующим образом

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+R_n \qquad (1)$$

Определение. Величина

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\ ,$$

называется **остатком числового ряда** (1).

Теорема 1. Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow$ $\forall n$ остаток R_n – сходится.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$. $\forall n\ R_n$ сходится $\Rightarrow$ сходится R_1. Но R_1 – это и есть исходный ряд.

$(\Rightarrow)$. Ряд сходится $\Rightarrow$ существует $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Но частичная сумма $\tilde{S}_N$ остатка R_N имеет вид $\tilde{S}_N=a_{n+1}+\ldots+a_N=S_N-a_1-\ldots-a_n$. Величина $a_1+\ldots+a_n$ не зависит от N. Кроме того, $S_N\to S$ при $N\to\infty$. Поэтому существует $\lim_{N\to\infty}\tilde{S}_N=S-a_1-\ldots-a_n$. Утверждение доказано.

Следствие. *Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.*

Более того, так как для сходящегося ряда $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, то

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=S-S=0,$$

т.е. можно утверждать, что *ряд* (1) *сходится тогда и только тогда, когда* $\lim_{n\to\infty}R_n=0,$

Теорема 2. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится и его сумма равна* S*, то ряд* $\sum Ca_n$ *тоже сходится, и его сумма равна* CS. ($C=const$)

Теорема 3. *Если ряды* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно* S_1 *и* S_2*, то ряд* $\sum(a_n\pm b_n)$ *тоже сходится и его сумма равна* $S_1\pm S_2$

$$\sum(a_n\pm b_n)=\sum a_n\pm\sum b_n=S_1\pm S_2.$$

Следствие. *Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.*

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

Критерий Коши. (необходимое и достаточное условие сходимости ряда)

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **фундаментальной** если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$, такое что $\forall n>N$ и $\forall p\in\mathbb{N}$, выполнялось бы неравенство:

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$$

Теорема (Критерий Коши сходимости последовательности.) *Для того, чтобы последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. **(необходимость)**. Пусть $x_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство $|a - x_n| < \varepsilon / 2$ выполняется при $n > N$. Но при $n > N$ и любом натуральном p (так как $n + p > N$) выполняется также неравенство $|a - x_{n+p}| < \varepsilon / 2$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a + a - x_n| \le |x_{n+p} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем **критерий Коши для ряда:** *для того, чтобы ряд* $\sum a_n$ *был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *выполнялось бы неравенство*

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon .$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому, как правило, используются более простые признаки сходимости:

Следствие (Необходимое условие сходимости). *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то общий член* a_n *стремится к нулю.*

Доказательство. Действительно, из критерия Коши при $p = 1$ получаем неравенство $|a_{n+1}| < \varepsilon$, выполняющееся $\forall n > N$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Замечание. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что *если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится* **(достаточное условие расходимости)**. Согласно этому замечанию, мы получаем, что ряд $a - a + a - a + \ldots$ расходится при $a \ne 0$.

Пример. Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим рядом.** Этот ряд является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Покажем, что этот ряд расходится. Используем критерий Коши. Следует доказать, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n \ge N, \exists p \in \mathbb{N} : \quad \left| \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} \right| \ge \varepsilon .$$

Положим $\varepsilon = 1/2$ выберем число. Берем любое N и любое $n > N$. Пусть $p = n$. Тогда

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon .$$

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3 - 1/n} = \frac{1}{3} \ne 0$ – необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

Теорема. *Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена* (Доказательство аналогично соответствующему признаку для последовательностей).

Замечание. Однако, этот признак также не является достаточным. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n \text{ не существует}$$

Тем не менее, последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| \le 1$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда* $\sum a_n$ *с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$. Пусть $S_N \to S,\ \ N \to \infty$. Тогда $S_N \le S$ при всех N, т.к. $u_n \ge 0 \quad \forall n$.

$(\Leftarrow)$. Пусть $\forall N \ \ S_N < C$. Поскольку $S_{N+1} = S_N + u_{N+1} \ge S_N$, последовательность S_N возрастает и, по условию, ограничена. Следовательно, по теореме Вейерштрасса (см. 1-ый семестр), она имеет предел, то есть ряд сходится.

Простые следствия из этого критерия – очень полезные теоремы сравнения.

Признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ при $a_n, b_n \ge 0$.

Теорема 1. *Если* $a_n \le b_n$ *при любом достаточно большом* n, *то из сходимости ряда* $\sum b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum b_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $a_n \le b_n$, то $S_n \le \sigma_n$, поэтому частичные суммы ряда $\sum a_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема 2. *Если* $a_n > 0, \quad b_n > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne \{0, \infty\}$, *то ряды* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \ge N \ \ \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon = \frac{k}{2}$. Тогда

$$\exists n_0: \ \ \forall n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n$$

при $n \ge N$ (т.к. $b_n > 0$).

Если ряд $\sum a_n$ – сходится, то сходится и ряд $\sum (k/2) b_n$ (по теореме 1). Тогда, взяв $c = 2/k$, получим, что и ряд $\sum (ck/2) b_n$, т.е. ряд $\sum b_n$ – сходится.

Если ряд $\sum b_n$ – сходится, то сходится и ряд $\sum (3k/2) b_n$ и, следовательно, сходится ряд $\sum a_n$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если, начиная с некоторого номера $n > N$ выполняется неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (1)$$

то из сходимости ряда $\sum b_n$ следует сходимость ряда $\sum a_n$

Если же начиная с некоторого номера $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (2)$$

то из расходимости ряда $\sum b_n$ следует расходимость ряда $\sum a_n$.

Доказательство. Будем считать без ограничения общности, что неравенство (1) выполнено $\forall n$. Тогда имеем последовательность неравенств

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \ldots$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \quad \Rightarrow \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$$

Если ряд $\sum b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum (a_1/b_1) b_n$. Следовательно, по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum a_n$.

Доказательство для неравенства (2) строится аналогичным образом.

Теорема 4. *Если выполняется предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (3)$$

то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

Пример применения **теоремы 2.**

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sin\frac{1}{2^n}\right)$ сходится, т.к. $\ln\left(1 + \sin\frac{1}{2^n}\right) \sim \sin\frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится.

Признаки Даламбера и Коши

Теорема (признак сходимости Даламбера) (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum a_n$ с положительными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q,$$

то ряд $\sum a_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum a_n$ расходится.

Доказательство. Из условий теоремы следует что

$$0 < a_n \le qa_{n-1} \le q^2 a_{n-2} \le \ldots \le q^{n-n_0} a_{n_0} \quad .$$

Иными словами, $a_n \le \dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n$ и по первой теореме сравнения ряд сходится.

Если $a_{n+1} \ge a_n$, то $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$ и ряд расходится.

В предельной форме этот признак выглядит так:

Теорема (предельный признак Даламбера) *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$*, то при* $q < 1$ *ряд сходится, а при* $q > 1$ *– расходится. Если* $q = 1$*, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Доказательство. При $q < 1$ выбираем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Пусть n_0 выбрано так, чтобы при $n \ge n_0$ выполняется неравенство $\left| \dfrac{a_{n-1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$, т.е. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$ и $a_{n+1} < (q+\varepsilon) a_n$, $q + \varepsilon < 1$. По предыдущей теореме ряд сходится. Если же $q > 1$, то выберем ε так, что $q - \varepsilon > 1$. Тогда, при $n \ge n_0$ имеем $a_{n+1} > (q - \varepsilon) a_n > a_n$ и ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

$$a_n = \frac{n}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + 1/n}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Вывод: ряд сходится.

Замечание. Признаки Даламбера в приведённой формулировке не работают, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует. Тем не менее, этот признак можно усилить. Как известно, из любой расходящейся последовательности, можно выделить пару сходящихся подпоследовательностей с разными пределами. Поэтому, обозначим

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ – верхнее значение предела

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ – нижнее значение предела

После чего сформулируем усиленный признак Даламбера

Теорема (усиленный признак Даламбера). *Если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *то ряд* $\sum a_n$ *сходится, если* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *– ряд расходится.*

Замечание. В такой формулировке признак Даламбера не решает вопроса о сходимости в случае если

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Теорема (Радикальный признак Коши) *Если для ряда* $\sum a_n$ *с неотрицательными членами существует такое число* $q < 1$*, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{a_n} \le q,$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum a_n$ *расходится.*

Доказательство. Неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le q$ при $n \ge n_0$ равносильно неравенству $a_n \le q^n$. Так как $0 \le q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходится. По 1-й теореме сравнения ряд $\sum a_n$ также сходится.

Если же $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то и $a_n \ge 1$ и равенство $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ невозможно. Т.о. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

Теорема (предельный признак Коши). *Если существует предел* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд сходится, а при* $q > 1$ *ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $q < 1$. Выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$ (т.е. $\varepsilon < 1 - q$). Тогда при $n \ge n_0(\varepsilon)$ $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$, т.е. $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. Применяя предыдущую теорему, получаем, что ряд сходится.

Если же $q > 1$, то выберем ε так, что $q - \varepsilon > 1$ (т.е. $\varepsilon < q - 1$). Тогда $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 < q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$. Вновь по предыдущей теореме ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n^2}{3+5/n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ne 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Важное замечание. Признак Даламбера и признак Коши связаны между собой: если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

то тогда существует и предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ (т.е. оба предела равны). Обратное неверно, поэтому:

1) Если можно применить признак Даламбера, то можно и применить признак Коши
2) С другой стороны существуют случаи, когда признак Даламбера не работает, а признак Коши работает

Для иллюстрации данного замечания поступим следующим образом. Во-первых, используя понятия верхнего и нижнего пределов, усилим признак Коши (также как это сделали с признаком Даламбера)

<u>Теорема</u> (усиленный признак Коши). *Если* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}<1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится, если* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}>1$ *– ряд расходится.*

<u>Замечание.</u> Признак Коши в такой формулировке не решает вопроса о сходимости в случае, если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$. Тем не менее, в силу неравенств

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

усиленный признак Коши, может дать ответ на вопрос о сходимости в том случае если признак Даламбера (в том числе и усиленный) не работает

<u>Важный пример.</u> Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n-n}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^5}+\dots$$

Очевидно, здесь

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

Следовательно, признак Даламбера не работает. С другой стороны

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$$

Поэтому, в соответствии с усиленным признаком Коши этот ряд сходится

<u>Упражнение.</u> Показать с помощью усиленного признака Коши, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-(-1)^n}$ расходится. Показать также, что признак Даламбера здесь не работает.

Итак, признаки Коши и Даламбера удобны, но слабоваты. Например, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ имеем:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}\to1,\ \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}=e^{\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{n+1}\right)}\to1 \text{ при } n\to\infty,$$

т.е. признак Коши не применим.

Признак Даламбера тем более, неприменим, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

Однако мы знаем, что гармонический ряд расходится, а для второго ряда легко подсчитать частичную сумму:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}\xrightarrow[N\to\infty]{}1$$

т.е. ряд сходится.

Интегральный признак Коши. Признаки Раабе и Гаусса.

<u>Теорема (интегральный признак Коши)</u> *Если* $f(x)$ *– непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке* $[1,\infty)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Доказательство. Ввиду монотонности при всех n выполняются неравенства $a_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = a_n, n \le x \le n+1$.

Интегрируя, получаем $a_{n+1} \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le a_n$.

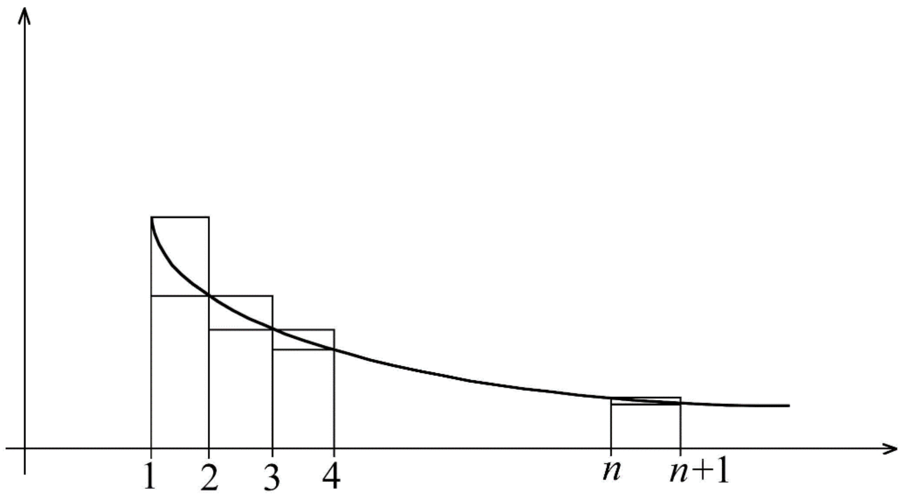
Тогда $a_2 + ... + a_{n+1} \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + ... + a_n$, или $S_{n+1} - a_1 \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$.

Поэтому если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\exists c: \ \forall X \ \int\limits_1^{X} f(x)dx \le C$.

Тогда $\forall n \ S_{n+1} - a_1 \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le C$ и $S_{n+1} \le C + a_1$, $\Rightarrow$ ряд сходится.

Пусть теперь наоборот, известно, что ряд сходится. Тогда $\exists C: \forall n \ S_n \le C$.
Взяв произвольное X, выберем n так, чтобы $X \le n+1$. Тогда
$\int\limits_1^{X} f(x)dx \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n \le C$. Значит, $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Геометрическая иллюстрация теоремы.



$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ – площадь под графиком $f(x)$ на отрезке от 1 до $n+1$. $a_1 + ... + a_n$ – площадь ступенчатой фигуры, расположенной над графиком и $a_2 + ... + a_{n+1}$ – площадь ступенчатой фигуры, под графиком.

Пусть ряд и интеграл сходятся. Тогда остаток ряда

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx + \int\limits_{n+1}^{n+2} f(x)dx + ... = \int\limits_n^{\infty} f(x)dx.$$

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется **общегармоническим рядом** или **рядом Дирихле.**

Пример. (**Сходимость общегармонического ряда**). Общему члену общегармонического ряда соответствует функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$. По интегральному признаку Коши, общегармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

При доказательстве признаков Коши и Даламбера использовалась идея сравнения рядов с рядом, членами которого являются члены убывающей геометрической прогрессии. Если ряд сравнивать с общегармоническим рядом, то можно получить ещё один интересный признак сходимости.

<u>Теорема.</u> (Признак Раабе)

1) (Радикальный признак). Числовой ряд $\sum a_n$ *сходится, если при достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1 \qquad (1)$$

Если $R_n \leq 1$ *то ряд расходится*

2) (Предельный признак). Пусть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$$

Тогда, числовой ряд $\sum a_n$ *сходится, если* $q > 1$ *и расходится при* $q < 1$.

<u>Замечание.</u> В предельном случае, при $q = 1$ признак Раабе не работает (**Пример гармонический ряд**). Тем не менее, он даёт ответ на вопрос о сходимости даже в тех случаях, когда признаки Коши и Даламбера не работают.

<u>Доказательство</u> (для радикального признака). Пусть выполнено неравенство (1). Тогда

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{q}{n} + 1 \qquad (2)$$

Возьмём теперь любое число s между 1 и q, т.е. $1 < s < q$. Тогда, по известноому предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{1/n} = s$$

при достаточно больших n имеет место неравенство

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{1/n} < q \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{q}{n}$$

Тогда, в соответствии с неравенством (2) получим

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$$

Это неравенство можно записать следующим образом

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{1/(n+1)^s}{1/n^s}$$

Справа стоит отношение двух последовательных членов обобщённого гармонического ряда, который сходится при $s > 1$. В этом случае по третьей теореме сравнения сходится ряд $\sum a_n$. Если же начиная с некоторого номера

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$

то рассуждая аналогичным образом, придём к неравенству

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/(n+1)}{1/n}$$

где справа стоят последовательные члены расходящегося гармонического ряда. Следовательно, по третьей теореме сравнения ряд $\sum a_n$ расходится.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2}{n}-1\right)=2>1$. Следовательно, ряд сходится.

Теорема. (признак Гаусса). *Пусть* $\delta>0$ *и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+O\left(n^{-(1+\delta)}\right),\ n\to\infty. \quad (3)$$

Тогда:
Если $\lambda>1$ *- ряд сходится,*
Если $0\le\lambda<1$ *- ряд расходится,*
Если $\lambda=1$ *и* $\mu>1$ *- ряд сходится,*
Если $\lambda=1$ *и* $\mu\le 1$ *- ряд расходится.*

Доказательство. В случае, если $\lambda>1$ $(0\le\lambda<1)$ доказательство основывается на применении признака Даламбера т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}$$

и ряд сходится если $\lambda>1$. При $0\le\lambda<1$ ряд расходится.

Случай $\lambda=1$ и $\mu>1$ $(\mu<1)$ исследуется с помощью признака Раабе. Имеем из соотношения (3)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu$$

Таким образом, ряд сходится при $\mu>1$ и расходится при $\mu<1$

Рассмотрим, наконец, случай $\lambda=1$ и $\mu=1$. Здесь равенство (3) даёт

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O\left(n^{-(1+\delta)}\right)=\frac{n+1}{n}+O\left(n^{-\delta}\right)$$

Следовательно, при больших значениях n ряд $\sum a_n$ эквивалентен гармоническому ряду и поэтому расходится.

Примеры. В применении к гармоническому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ признак Гаусса дает:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},\ \lambda=1,\mu=1 \text{ - ряд расходится.}$$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ имеем:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{n}=1+\frac{2}{n},\ \lambda=1,\mu=2>1 - \text{ряд сходится.}$$

Знакопеременные ряды.

Определение. **Знакопеременным числовым рядом** или **рядом общего типа** называется ряд вида

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

где общий член u_n может быть как положительным, так и отрицательным

Частным случаем знакопеременного ряда является **знакочередующийся ряд** или **ряд типа Лейбница**, который имеет вид:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Теорема о сходимости знакочередующегося ряда (Признак Лейбница). *Если у знакочередующегося ряда* (1) *общий член стремится к нулю* $a_n \to 0$ *и последовательность* $\{a_n\}$ *– монотонна, то ряд сходится.*

Доказательство. Частичную сумму чётного порядка можно представить в виде

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Так как каждая скобка есть положительное число, то последовательность $\{S_{2n}\}$ – возрастающая. С другой стороны те же частичные суммы можно переписать в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Отсюда видно, что последовательность $\{S_{2n}\}$ – ограничена сверху, т.е. $S_{2n} < a_1$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса эта последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Переходя к сумме нечётного порядка, имеем $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$. Так как общий член стремится к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$$

Отсюда следует, что число S является суммой ряда, т.е. ряд сходится. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Из доказательства теоремы видно, что частичные суммы чётного порядка приближаются к S возрастая. Написав аналогичное представление для нечётных сумм, нетрудно видеть, что они приближаются к S убывая

$$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

Поэтому, всегда имеет место неравенство $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ откуда в частности следует, что

$$0 < S < a_1$$

Это позволяет, получить очень простую оценку для остатка рассматриваемого ряда, а именно

$$|r_n| < a_{n+1} \text{ , где } r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

Замечание 2. Условие монотонности существенно. В качестве примера можно рассмотреть ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ , где } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & n = 2k \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad k \in N$$

Тогда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

Первый ряд сходится, а второй расходится. Следовательно, рассматриваемый ряд расходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда* (2) *следует сходимость ряда* (1).

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ существует число N, такое, что при $n>N$ и любом целом $p>0$ верно неравенство:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum|u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum|u_n|$ расходится.

Для исследования на абсолютную сходимость можно пользоваться всеми признаками и теоремами сформулированными для знакоположительных рядов. Например, признаки Коши и Даламбера.

Признак Даламбера. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=q$, *то при* $q<1$ *ряд* $\sum u_n$ *будет абсолютно сходящимся, а при* $q>1$ *ряд будет расходящимся. При* $q=1$ *признак не дает ответа о сходимости ряда.*

Признак Коши. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=q$, *то при* $q<1$ *ряд* $\sum u_n$ *будет абсолютно сходящимся, а при* $q>1$ *ряд будет расходящимся. При* $q=1$ *признак не дает ответа о сходимости ряда.*

Важное замечание. Вообще из расходимости ряда (2) не следует расходимость ряда (1). Но, если эта расходимость установлена по признакам Коши и Даламбера, то расходимость ряда (2) влечёт за собой и расходимость ряда (1).

В самом деле, если $q>1$ в признаке Даламбера, то $|u_{n+1}|>|u_n|$ и общий член $|u_n|$ не стремится к нулю. Но тогда и u_n не стремится к нулю. Следовательно, ряд (1) расходится.

Для признака Коши, если $q>1$, то $|u_n|=q^n\to\infty$. Тогда $u_n\to\infty$ и ряд (1) расходится.

Упражнение. Сформулировать по аналогии интегральный признак Коши, признаки Гаусса и Раабе.

Признаки Абеля и Дирихле

При исследовании на условную сходимость наиболее часто применяются признаки Абеля и Дирихле. В обоих этих признаках ряд общего типа представляется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n \qquad (1)$$

<u>Теорема. (Признак Дирихле).</u> *Если частичные суммы ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *, т.е. суммы* $\sum_{n=1}^{N} b_n$ *ограниченны в совокупности (т.е.* $\exists C \ \ \forall N \ \ \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \le C$ *), а последовательность* a_n *монотонно стремится к 0, то ряд (1) сходится.*

<u>Доказательство.</u> Обозначим для начала

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = B_N$$

Далее, для доказательства воспользуемся критерием Коши. С этой целью преобразуем следующую сумму

$$\begin{aligned}
&r_{n,p} = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p} = \\
&= a_{n+1}\left(B_{n+1} - B_n\right) + a_{n+2}\left(B_{n+2} - B_{n+1}\right) + \ldots + a_{n+p}\left(B_{n+p} - B_{n+p-1}\right) = \\
&= -a_{n+1}B_n + B_{n+1}\left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) + B_{n+2}\left(a_{n+2} - a_{n+3}\right) + \ldots + B_{n+p-1}\left(a_{n+p-1} - a_{n+p}\right) + a_{n+p}B_{n+p}
\end{aligned}$$

Данное преобразование называется **преобразованием Абеля**. Выберем теперь n столь большим, что $a_{n+1} < \varepsilon/2C$. Это можно сделать, так как a_n стремится к нулю. Тогда в силу ограниченности B_n и монотонного стремления к нулю членов последовательности a_n получаем, что $\forall p > 0$

$$\left|r_{n,p}\right| \le Ca_{n+1} + C\left(a_{n+1} - a_{n+p}\right) + Ca_{n+p} = 2Ca_{n+1} < \varepsilon$$

Тогда, согласно критерию Коши ряд (1) сходится.

<u>Замечание</u>. Если положить $b_n = \left(-1\right)^{n+1}$, то $\left|B_n\right| \le 1$ и мы получаем признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

<u>Теорема. (Признак Абеля).</u> *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, а числа* a_n *образуют монотонную и ограниченную последовательность, то ряд* (1) *– сходится.*

<u>Доказательство.</u> Данный признак можно получить на основании признака Дирихле. Учитывая, что последовательность a_n имеет конечный предел равный, например a, выполним следующее преобразование

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a\right)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Второй ряд по условию теоремы сходится, а первый удовлетворяет условия признака Дирихле так как $a_n - a \to 0 \left(n \to \infty\right)$ монотонно. Таким образом ряд (1) сходится.

<u>Пример.</u> Доказать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n$, где последовательность $\left\{a_n\right\}$ монотонно стремится к нулю.

<u>Решение.</u> Обозначим $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$

Тогда, умножая обе части равенства на $2\sin\frac{1}{2}$, находим

$$2\sin\frac{1}{2}B_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}\sin k$$

Используя тригонометрическое равенство $2\sin\frac{1}{2}\sin k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)$, получаем, что

$$2\sin\frac{1}{2}B_n=\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=2\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}\quad\Rightarrow\quad B_n=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

Очевидно, что $|B_n|\le\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-1}$. Таким образом, условия теоремы Дирихле выполнены, следовательно, ряд сходится.

Упражнение. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n$, где последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле

Пример. Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}$

Решение. Очевидно, что при $\alpha>0$ ряд удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и следовательно, сходится. При $\alpha\le 0$ общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится.

Далее, имеет место оценка

$$\left|\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{n^{\alpha}}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha>1$. Покажем, что при $0<\alpha\le1$ этот ряд расходится. В самом деле

$$\left|\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\right|\ge\frac{\sin^2 n}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{\cos 2n}{n^{\alpha}}\right)$$

Ряд с первым общим членом расходится при $0<\alpha\le1$, а второй сходится. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\right|$ расходится при $0<\alpha\le1$, откуда следует условная сходимость исходного ряда. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\quad\begin{cases}\textit{сходится абсолютно при}\quad \alpha>1\\ \textit{сходится условно при}\quad 0<\alpha\le1\\ \textit{расходится при}\quad \alpha\le0\end{cases}$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}\ln(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}\ln(n+1)}$ сходится (см. предыдущие примеры). Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$ – ограничена. Следовательно, по признаку Абеля исследуемый ряд сходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Теорема 1. *Если ряд $\sum a_n$ можно представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами, то тогда этот ряд сходится абсолютно.*

Доказательство. В самом деле, пусть имеет место представление

$$\sum a_n=\sum b_n-\sum c_n$$

где ряды $\sum b_n$ и $\sum c_n$ знакоположительные и сходящиеся.

Тогда очевидно

$$|a_n| = |b_n - c_n| \le |b_n| + |c_n| = b_n + c_n$$

Если построенные таким образом ряды $\sum b_n$ и $\sum c_n$ сходятся, то по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum |a_n|$ и следовательно ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно.

<u>Замечание.</u> Обратное утверждение не верно. Т.е., *если ряд* $\sum a_n$ *сходится абсолютно и имеет место представление*

$$\sum a_n = \sum b_n - \sum c_n, \quad b_n, c_n \ge 0$$

то отсюда вовсе не следует, что ряды $\sum b_n$ *и* $\sum c_n$ *сходятся.*

<u>Пример.</u> Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

Этот ряд является знакоположительным и сходящимся. Любой знакоположительный сходящийся ряд является абсолютно сходящимся. Но его можно представить в виде следующий разности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \qquad (1)$$

где ряды, стоящие в правой части (1), являются расходящимися. Таким образом, абсолютно сходящийся ряд представлен в виде разности двух расходящихся рядов с положительными членами.

Интересно, что равенство (1) можно продолжить и по-другому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Получившийся справа ряд тоже сходится, правда условно.

<u>Теорема 2.</u> *Условно сходящийся ряд можно представить разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим ряды $\sum b_n$ и $\sum c_n$, общие члены которых находятся по формулам

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (2)$$

Тогда очевидно

$$b_n \ge 0, \quad c_n \ge 0$$
$$a_n = b_n - c_n$$

Так как ряд $\sum a_n$ сходится то $b_n \to 0$ и $c_n \to 0$. Предположим, что ряд $\sum c_n$ сходится. Тогда из сходимости ряда $\sum b_n - \sum c_n$ следует сходимость ряда

$$\sum b_n + \sum c_n$$

так как $b_n + c_n = 2c_n - (b_n - c_n)$. Но тогда должен сходиться ряд $\sum |a_n|$ так как $|a_n| = |b_n - c_n| = b_n + c_n$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, ряд $\sum c_n$ расходится. Аналогично доказывается расходимость ряда $\sum b_n$.

В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму. По этому поводу имеет место следующие теоремы

<u>Теорема 3.</u> *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

<u>Теорема 4.</u> (Теорема Римана). *Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.*

Доказательство этих теорем приводить не будем, но разберём пример, наглядно показывающий, как перестановки в условно сходящихся рядах могут повлиять на его сумму.

<u>Пример.</u> Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Рассмотрим перестановку ряда, такую что последовательность частичных сумм имела своим пределом любое наперёд заданное число a. Начнём с первого члена и будем добавлять к нему отрицательные пока не получим первую сумму меньшую a

$$S_1 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n_1}<a$$

После этого добавим следующее положительное слагаемое, так чтобы сумма стала больше a

$$S_2 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n_1}+\frac{1}{3}>a$$

Далее, опять буде вычитать отрицательные члены пока сумма не станет меньше a

$$S_3 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n_1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n_1+2}-\ldots-\frac{1}{n_2}<a$$

Затем опять прибавляем положительное слагаемое

$$S_4 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n_1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n_1+2}-\ldots-\frac{1}{n_2}+\frac{1}{5}>a$$

и т.д. продолжая этот процесс до бесконечности.

При этом имеет место следующее соотношение

$$S_{2n}-S_{2n-1}=\frac{1}{2n+1}$$

Переходя к пределу получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=S\,.$$

Учитывая, что

$$S_{2n-1}<a<S_{2n}$$

и при переходе к приделу строгое неравенство превращается в нестрогое, т.е

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\le a\le\lim_{n\to\infty}S_{2n}$$

получаем, что $S=a$.

А постольку поскольку, число a задано произвольно, то тем самым показано, что в условно сходящемся ряде путём перестановки слагаемых, можно получить, любую наперёд заданную сумму.

<u>Упражнение.</u> Сделать в предыдущем примере такую перестановку, чтобы ряд расходился.

Указание. Первая частичная сумма должна быть больше единицы, вторая меньше 2, третья больше 3 и т.д.

<u>Теорема 5.</u> Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида a_ib_k, $i,k=1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\sigma$ – произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Числовые ряды с комплексными членами

Все основные определения сходимости, свойства сходящихся рядов, признаки сходимости для комплексных рядов ничем не отличаются от действительного случая.

Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$. Действительную часть числа z_n будем обозначать a_n, мнимую – b_n (т.е. $z_n = a_n + ib_n, \quad n = 1, 2, 3, ...$).

Числовой ряд - запись вида $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Частичные суммы ряда:

$$S_1 = z_1, \quad S_2 = z_1 + z_2, \quad S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad S_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4, ...,$$
$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n, ...$$

<u>Определение.</u> Если существует предел S последовательности частичных сумм ряда при $n \to \infty$, являющийся собственным комплексным числом, то говорят, что ряд сходится; число S называют суммой ряда и пишут

$$S = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ... \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

Найдём действительные и мнимые части частичных сумм:

$$\begin{aligned} S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3) + ... + (a_n + ib_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + i(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = \sigma_n + i\tau_n \end{aligned},$$

где символами σ_n и τ_n обозначены действительная и мнимая части частичной суммы.

Комплексная последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности, составленные из её действительной и мнимой частей. Таким образом, ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, образованные его действительной и мнимой частями.

<u>Определение</u>. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, составленный из абсолютных величин его членов.

Так же, как и для числовых действительных рядов с произвольными членами, можно доказать, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то обязательно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **условно сходящимся**.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Выпишем несколько значений выражения $e^{i\frac{n\pi}{2}}$:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\frac{2\pi}{2}} = -1, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, e^{i\frac{4\pi}{2}} = 1, e^{i\frac{5\pi}{2}} = i, e^{i\frac{6\pi}{2}} = -1,$$

дальше значения периодически повторяются.

Ряд из действительных частей: $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + ... + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n}} + ...$;

Ряд из мнимых частей $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + ...$;

Оба ряда сходятся условно, поэтому исходный ряд сходится условно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ - ряд с неотрицательными членами, поэтому для исследования его сходимости можно применять все известные признаки сходимости для знакопостоянных рядов с действительными членами.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(3-i)^{2n}}$.

Составим ряд из модулей $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $|3-i|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^{n/2}}{10^n}.$$

Этот ряд сходится (признак Коши $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{13^{n/2}}{10^n}}=\frac{\sqrt{13}}{10}<1$), поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

Для сходящихся рядов с комплексными членами справедливы все свойства рядов с действительными членами:

Необходимый признак сходимости ряда. *Общий член сходящегося ряда стремится к нулю при* $n\to\infty$.

Если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$, то сходится любой его остаток, Обратно, если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

Если ряд сходится, то сумма его остатка после *n*-го члена стремится к нулю при $n\to\infty$.

Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число C, то сходимость ряда сохранится, а сумма умножится на C.

Сходящиеся ряды (A) и (B) можно почленно складывать и вычитать; полученный ряд тоже будет сходиться, и его сумма равна $S_A \pm S_B$.

Если члены сходящегося ряда сгруппировать произвольным образом и составить новый ряд из сумм членов в каждой паре круглых скобок, то этот новый ряд тоже будет сходиться, и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов сходимость сохраняется и сумма не изменяется.

Если ряды (A) и (B) сходятся абсолютно к своим сумма S_A и S_B, то их произведение при произвольном порядке членов тоже сходится абсолютно, и его сумма равна S_AS_B.