Криволинейные интегралы.

Кривые в пространстве

Определение. Пусть в трёхмерном пространстве задана прямоугольная декартовая система координат $Oxyz$ и пусть на отрезке $[\alpha,\beta]$ заданы непрерывные функции $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$. Тогда говорят, что задано **отображение** отрезка $[\alpha,\beta]$ в трёхмерное пространство или **вектор-функция скалярного аргумента**

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \qquad (1)$$

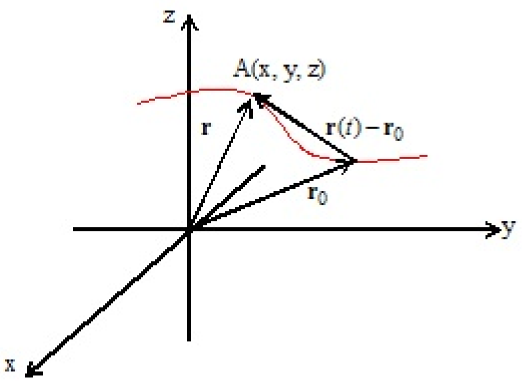
Здесь $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ – ортонормированный базис.

Определение. Геометрическое место точек, определяемое множеством $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \le t \le \beta\}$, называется **простой кривой,** где вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определяется соотношениям (1). Если эта кривая лежит в некоторой плоскости π, то такая кривая называется **плоской кривой**

В частности, если плоскость π совпадает с координатною плоскостью Oxy, то уравнение кривой Γ имеет вид.

$$\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \alpha \le t \le \beta\}$$

Определение. Если для кривой $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \le t \le \beta\}$ выполняется условие $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, то кривая Γ называется **замкнутой**. Замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, называют **контуром**.



Таким образом, радиус-вектор точки кривой может рассматриваться как некоторая векторная функция скалярного аргумента t. При изменении параметра t изменяется величина и направление вектора $\mathbf{r}$.

Замечание. Одна и та же кривая Γ может быть параметризована различными способами. Мы будем рассматривать далее только те параметризации, которые получаются из параметризации (1) путём представления параметра t в виде непрерывной строго возрастающей функцией другого параметра.

В теме «функции многих переменных» было доказано, что:

1) непрерывность $\mathbf{r}(t)$ равносильна непрерывности $x(t), y(t), z(t)$

2) существование $\mathbf{r}'(t)$ равносильно существованию $x'(t), y'(t), z'(t)$ и при этом:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}, \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}. \qquad (2)$$

Кроме того, для производных вектор-функции справедливы формулы:

1) $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{r}_i(t)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{r}_i'(t), \quad \alpha_i \in \Re.,$

2) $\big(\lambda(t)\mathbf{r}(t)\big)' = \lambda(t)\mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t)\lambda(t)$, где $\lambda(t)$ – скалярная функция

3) $\big(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)\big)' = \big(\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)\big) + \big(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)\big)$

4) $\left[\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)\right]' = \left[\mathbf{r}_1'(t),\mathbf{r}_2(t)\right] + \left[\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2'(t)\right]$

5) $\mathbf{r}'\left(t(\tau)\right) = \mathbf{r}_t'\left(t(\tau)\right)\cdot t_\tau'(\tau)$ – формула для производной сложной функции, $t(\tau)$ – скалярная функция

Используя полученный результат, докажем, что если $\left|\mathbf{r}(t)\right| = C = const$ и существует $\mathbf{r}'(t)$, то

$$\left(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t)\right) = 0 \qquad (3)$$

В самом деле, так как $\left(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}(t)\right) = \left|\mathbf{r}(t)\right|^2 = C^2$, то дифференцируя данное равенство по правилу дифференцирования скалярного произведения получим (3). С геометрической точки зрения это означает, что если уравнение кривой удовлетворяет условию $\left|\mathbf{r}(t)\right| = C = const$, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ ортогональны. Например, для окружности

$$\mathbf{r}(t) = \rho\cos t\mathbf{i} + \rho\sin t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad \rho = const,$$

получаем, что

$$\left|\mathbf{r}(t)\right| = \sqrt{\rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t} = \rho^2 = const.$$

Тогда

$$\mathbf{r}'(t) = -\rho\sin t\mathbf{i} + \rho\cos t\mathbf{j},$$
$$\left(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t)\right) = -\rho^2\cos t\sin t + \rho^2\cos t\sin t = 0.$$

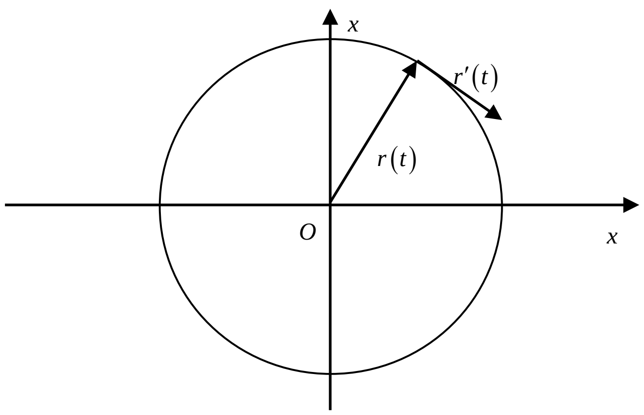


Рис.

Длина дуги. Натуральное уравнение гладкой кривой.

Определение. Кривая $\Gamma = \left\{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \le t \le \beta\right\}$ называется **дифференцируемой кривой**, если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема. Если кроме того $\mathbf{r}'(t)$ непрерывная функция, то кривая Γ называется **непрерывно дифференцируемой кривой**.

Определение. Пусть Γ – дифференцируемая кривая. Если $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, то точка M_0, соответствующая радиус-вектору $\mathbf{r}(t_0)$ называется **особой точкой**.

Определение. Кривая Γ называется **гладкой,** если она непрерывно дифференцируема и не содержит особых точек. Если непрерывная кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то она называется **кусочно-гладкой**.

Выберем на отрезке $[\alpha,\beta]$ точки t_k такие, что

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

Точки на кривой, соответствующие данному разбиению обозначим, через $S_i = \mathbf{r}(t_i)$. Соединив последовательно точки S_i, получим **ломаную** Γ_n, которую будем называть **вписанной** в кривую Γ. Отрезки $S_{i-1}S_i$ будем называть **звеньями** ломанной, а точки S_i - **вершинами** ломаной Γ_n.

Так как длина i-го звена ломаной, т.е. длина отрезка $S_{i-1}S_i$ равна $\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right|$, то длина σ_n всей ломаной равна

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right| \qquad (1)$$

__**Определение.**__ Если существует точная верхняя грань множества длин всех ломаных, вписанных в кривую Γ, то эта грань называется **длиной кривой** Γ. Таким образом, длина кривой Γ

$$S = \sup_{T(\Gamma)}\sigma_n = \sup_{T(\Gamma)}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right|.$$

где $T(\Gamma)$ – разбиения кривой Γ.

Кривая имеющая длину, называется **спрямляемой**.

__**Замечание.**__ Можно доказать, что *спрямляемая кривая обладает свойством* ***аддитивности****, т.е. если спрямляемая кривая* Γ *разбита на две кривые* Γ_1 *и* Γ_2*, то эти кривые также спрямляемы и их длины связаны соотношением*

$$S = S_1 + S_2$$

где S, S_1, S_2 *– длины кривых* Γ, Γ_1 *и* Γ_2.

__**Теорема 1.**__ *Если кривая* Γ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляемая, а для её длины* S *справедлива следующая оценка*

$$S \le (\beta-\alpha)\max_{[\alpha,\beta]}\left|\mathbf{r}'(t)\right| \qquad (2)$$

__**Доказательство.**__ Пусть множество точек $T = \left\{t_i,\, i=\overline{1,n}\right\}$ – разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$. По теореме Лагранжа для вектор-функции имеем

$$\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right| \le \left|\mathbf{r}'(\tau_k)\right|(t_k - t_{k-1}) \qquad (3)$$

Из непрерывности $\mathbf{r}'(t)$ следует непрерывность и ограниченность $\left|\mathbf{r}'(t)\right|$, поэтому

$$\exists C>0 : \forall t\in[\alpha,\beta] \to \left|\mathbf{r}'(t)\right| \le C$$

где в качестве C, в силу теоремы Вейерштрасса, можно взять

$$C = \max_{[\alpha,\beta]}\left|\mathbf{r}'(t)\right|$$

Тогда, из (1) и (3) следует

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right| \le C(\beta-\alpha) \qquad (4)$$

Таким образом, множество длин ломаных вписанных в кривую Γ ограничено сверху, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Это, по определению означает, что кривая Γ спрямляема и её длина имеет оценку (2).

__**Определение.**__ Если параметром кривой Γ является переменная длина её дуги s, то s называют **натуральным параметром**, а уравнение кривой Γ

$$\Gamma = \left\{\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),\, 0 \le s \le S\right\}$$

называют **натуральным уравнением**.

__**Теорема 2.**__ *Пусть кривая* $\Gamma = \left\{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\, \alpha \le t \le \beta\right\}$ *непрерывно дифференцируема и пусть* $s(\tau)$ *– длина той части кривой* Γ*, которая соответствует изменению параметра* t *от* α *до* τ*. Тогда* $\forall t_0 \in [\alpha,\beta]$ *существует* $s'(t_0)$ *причём*

$$s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|. \qquad (5)$$

<u>Доказательство.</u> Пусть точки t_0 и $t_0 + \Delta t \in [\alpha, \beta]$, M_0 и M точки на кривой Γ, соответствующие значению параметра равного t_0 и $t_0 + \Delta t$. Тогда длина дуги $M_0 M$ равна $|\Delta s|$, где

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

а длина хорды $M_0 M$ равна $\Delta \mathbf{r}$, и следовательно

$$|\Delta \mathbf{r}| \le |\Delta s|$$

В силу предыдущей теоремы

$$|\Delta \mathbf{r}| \le |\Delta s| \le \max_G |\mathbf{r}'(t)| |\Delta t| \qquad (6)$$

где $G = [t_0, t_0 + \Delta t]$.

Если $\Delta t > 0$, то $\Delta s > 0$ и наоборот, если $\Delta t < 0$, то $\Delta s < 0$, поэтому $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$. С учётом этого, поделив неравенство (6) на $|\Delta t|$ получим

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right| \le \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \le \max_G |\mathbf{r}'(t)| \qquad (7)$$

Далее, функция $|\mathbf{r}'(t)|$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ следовательно, по теореме Вейерштрасса принимает на нём все свои промежуточные значения, т.е. $\exists \xi \in G : \max_G |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{r}'(\xi)|$. В силу той же непрерывности $|\mathbf{r}'(\xi)| \to |\mathbf{r}'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$. Таким образом существует предел правой части неравенства (7) при $\Delta t \to 0$ равный $|\mathbf{r}'(t_0)|$. Кроме того, в силу дифференцируемости $\mathbf{r}(t)$ существует

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right| = |\mathbf{r}'(t_0)|$$

Отсюда, по теореме о трёх функциях

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\mathbf{r}'(t)|$$

Следовательно, функция $s(t)$ имеет производную, которая по определению с одной стороны и в силу последнего равенства с другой стороны равна

$$s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|.$$

Теорема доказана.

Из формулы (5) следует, что

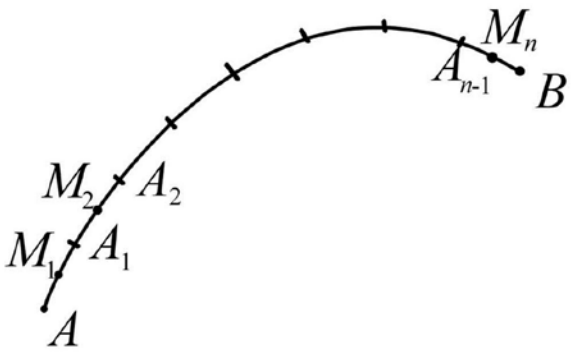
$$ds = s'(t)\,dt = |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Величина ds называется **элементом дуги** (дифференциал дуги).

Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \le t \le \beta\}$ является гладкой. Тогда функция $\mathbf{r}'(t)$ является непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ и так как $\mathbf{r}'(t) \ne 0$ то $|\mathbf{r}'(t)| > 0$. Тогда в силу доказанной теоремы $s'(t) > 0$. Следовательно, непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ является строго возрастающей на $[\alpha, \beta]$ и поэтому существует обратная функция $t(s)$, которая строго возрастает в промежутке $[0, S]$. Таким образом, $t'(s) > 0$. Это в свою очередь означает, что функция $t = t(s)$ является допустимым преобразованием параметра.

Определение криволинейного интеграла 1-го рода

Рассмотрим в трёхмерном пространстве с введённой декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$ кривую AB, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x, y, z)$.



Разобьем кривую на конечное число дуг. Выберем на каждом участке $A_{i-1}A_i$ кривой точку $M_i\left(\xi_i, \eta_i, \varphi_i\right)$ и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующей дуги.

$$f\left(\xi_i, \eta_i, \varphi_i\right)\Delta s_i$$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую **интегральную** сумму функции $f\left(x, y, z\right)$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i, \varphi_i\right)\Delta s_i$$

Обозначим через $\lambda = \max\limits_i \left|\Delta s_i\right|$. Число λ называется **шагом разбиения**.

<u>Определение.</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные дуги существует предел интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения этой кривой и выбора промежуточных точек $\left(\xi_i, \eta_i, \varphi_i\right)$, то этот предел называется **криволинейным интегралом от 1-го рода** от функции $f\left(x, y, z\right)$ по длине дуги AB.

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y, z\right)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i, \varphi_i\right)\Delta s_i.$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1) $\int\limits_{AB} f\left(x, y, z\right)ds = \int\limits_{BA} f\left(x, y, z\right)ds$.

2) $\int\limits_{AB} \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i P_i\left(x, y, z\right)ds = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \int\limits_{AB} P_i\left(x, y, z\right)ds \quad \left(\alpha_i \in \Re\right)$;

3) Если кривая AB разбита на дуга AC и CB, то

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y, z\right)ds = \int\limits_{AC} f\left(x, y, z\right)ds + \int\limits_{CB} f\left(x, y, z\right)ds$$

Отсюда следует, что интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{L} f\left(x, y, z\right)ds$ не зависит от выбора начальной точки.

4) Если в точках кривой AB выполняется неравенство $f_1\left(x, y, z\right) \le f_2\left(x, y, z\right)$, то

$$\int\limits_{AB} f_1\left(x, y, z\right)ds \le \int\limits_{AB} f_2\left(x, y, z\right)ds$$

5) Справедливо неравенство:

$$\left|\int_{AB} f(x,y,z)\,ds\right| \le \int_{AB} \left|f(x,y,z)\right| ds$$

6) Если $f(x,y,z)=1$, то

$$\int_{AB} ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = S;$$

S – длина дуги кривой, λ – наибольшая из всех частичных дуг, на которые разбивается дуга AB.

7) Теорема о среднем.

Если функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на кривой AB, то на этой кривой существует точка* (x_1,y_1,z_1) *такая, что*

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = f(x_1,y_1,z_1)\,S$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, где функции $x,\ y,\ z$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t=\alpha$, а точке B соответствует $t=\beta$. Функция $f(x,y,z)$ – непрерывна на всей кривой AB.

Как было показано, дифференциал дуги вычисляется по формуле:

$$ds = s'(t)\,dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

Тогда, в силу свойства 6) длина всей кривой AB равна:

$$S = \int_{AB} ds = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

Криволинейный интеграл по длине дуги AB будет находиться по формуле:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \quad (1)$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги AB) надо, используя параметрическое уравнение кривой выразить подынтегральную функцию через параметр t, заменить ds дифференциалом дуги в зависимости от параметра t и проинтегрировать полученное выражение по t.

Заметим здесь, что *нижний предел в формуле* (1) *должен быть меньше верхнего.*

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$ по одному витку винтовой линии $x=\cos t;\quad y=\sin t;\quad z=t;\quad 0\le t\le 2\pi.$

$$\int_{AB}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds = \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2\right)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(1+t^2\right)dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной уравнением $y=\varphi(x),\quad a\le x\le b,$ то получаем:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$$

Криволинейные интегралы второго рода.

Пусть AB – непрерывная кривая в трёхмерном пространстве с введённой декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$, а $P(x,y,z)$ – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем кривую точками $A_i(x_i,y_i,z_i)$ на конечное число частичных дуг. Далее на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольно по точке $M_i(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)$

Если определено не только разбиение кривой точками на частичные дуги, но и порядок этих точек, то кривая называется **ориентированной** кривой.

Составим следующую интегральную сумму

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\Delta x_i\,,\quad M_i(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\in A_{i-1}A_i$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ – проекция дуги $A_{i-1}A_i$ на ось Ox.

<u>Определение.</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой AB интегральные суммы имеют конечный предел, не зависящий от способа разбиения этой кривой и выбора промежуточных точек $M_i(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)$, то этот предел называется **криволинейным интегралом 2-го рода** по переменной x от функции $P(x,y,z)$ по кривой AB в направлении от A к B.

$$\int_{AB}P(x,y,z)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\Delta x_i,\quad \lambda=\max_{i=\overline{1,n}}|\Delta x_i| \qquad (1)$$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующую ось. (в рассмотренном выше случае – на ось Ox).

Вообще говоря, криволинейные интегралы могут считаться также и по переменным y и z.

$$\int_{AB}Q(x,y,z)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\Delta y_i \qquad (2)$$

$$\int_{AB}R(x,y,z)\,dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\Delta z_i \qquad (3)$$

Сумму криволинейных интегралов (1)–(3) также называют криволинейным интегралом второго рода.

$$\int_{AB}P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz \qquad (4)$$

<u>Замечание.</u> Криволинейный интеграл удобно записывать в векторной форме. Введём следующие обозначения

$$\mathbf{F}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}\,,$$

$$d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}$$

Величина $\mathbf{F}$ – называется **векторной функцией векторного аргумента,** $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки (x,y,z).

Тогда интеграл (4) можно записать в виде

$$\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz=\int_{AB}(\mathbf{F},d\mathbf{r}) \qquad (5)$$

Такая запись проясняет физический смысл криволинейного интеграла второго рода. Так если $\mathbf{F}$ – некоторая сила, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу этой силы по пути AB.

<u>Теорема.</u> *Если кривая AB – кусочно-гладкая, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ – непрерывны на кривой AB, то криволинейные интегралы*

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx; \quad \int\limits_{AB} Q(x,y,z)\,dy; \quad \int\limits_{AB} R(x,y,z)\,dz;$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

существуют.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1) Криволинейный интеграл при перемене направления кривой меняет знак, так как проекция дуги на ту или иную из осей зависит от направления дуги. Таким образом:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)\,dx$$

2) $\displaystyle\int\limits_{AB} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(x,y,z)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int\limits_{AB} P_i(x,y,z)\,dx \quad (\alpha_i \in \Re);$

3) $\displaystyle\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{AC} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{CB} P(x,y,z)\,dx \quad \forall C \in AB$

4) Следствие из 3. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint\limits_{L} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

5) Если AB – кривая, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным y и z.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам. Пусть гладкая кривая AB в прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta] \qquad (1)$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,x'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,y'(t)\,dt,$$

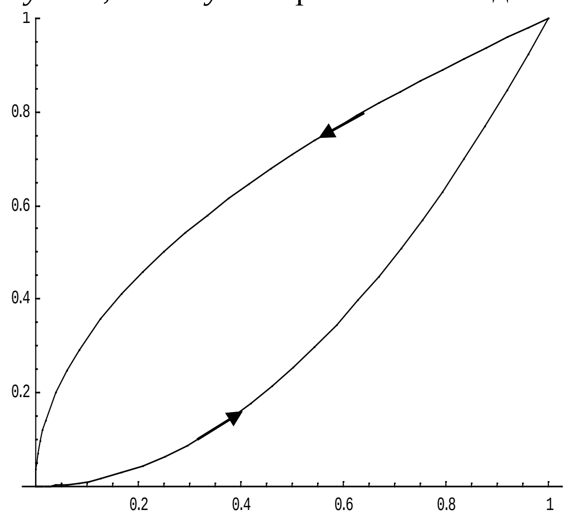
$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,z'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\big]\,dt.$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \Big[P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)\,f'(x)\Big]\,dx.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



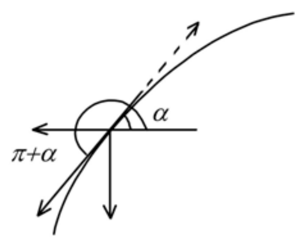
Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1: \quad y = x^2$ и $L_2: \quad y = \sqrt{x}$

$$\oint\limits_L x^2 y dx + x^3 dy = \int\limits_{L_1} x^2 y dx + \int\limits_{L_1} x^3 dy + \int\limits_{L_2} x^2 y dx + \int\limits_{L_2} x^3 dy = \int\limits_0^1 x^4 dx + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x dx + \int\limits_1^0 x^2 \sqrt{x} dx +$$

$$+\int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^{3/2}}{7}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{3/2}}{7}\right|_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть α – угол, составляемый вектором касательной к кривой и положительным направлением оси *x*.



Тогда $dx = ds\cos\alpha, dy = ds\sin\alpha$. Поэтому

$$\int\limits_L P dx + Q dy = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\sin\alpha\right) ds. \qquad (2)$$

В трёхмерном случае, обозначив через α, β и γ – углы, образованные вектором касательной к кривой с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz получим

$$\int\limits_L P dx + Q dy + R dz = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) ds \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) выражают связь между криволинейными интегралами первого и второго рода в двумерном и трёхмерном случаях. Если кривая L задана уравнением (1), то

$$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}, \cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}, \cos\gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}$$

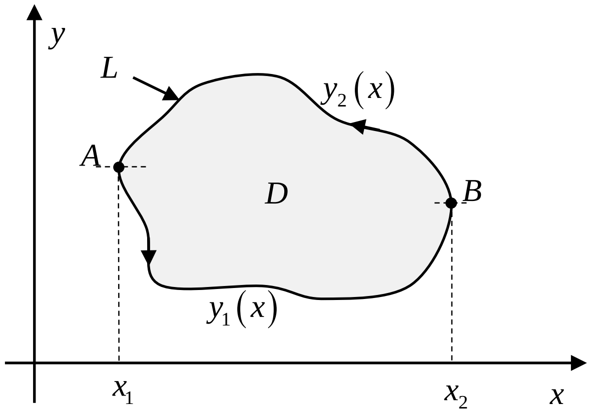
Формула Остроградского – Грина.

(Остроградский Михаил Васильевич (1861-1862) – русский математик, академик Петерб. АН, Джордж Грин (1793 – 1841) – английский математик)

Иногда эту формулу называют формулой Грина, однако, Дж. Грин предложил в 1828 году только частный случай формулы.

Формула Остроградского-Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Будем считать, что рассматриваемая область D **односвязная**.



Тогда криволинейный интеграл по контуру L можно записать в виде (направление обхода указано стрелками):

$$\oint_L P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} P\big(x, y_1(x)\big)dx + \int_{x_2}^{x_1} P\big(x, y_2(x)\big)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\Big[P\big(x, y_2(x)\big) - P\big(x, y_1(x)\big)\Big]dx$$

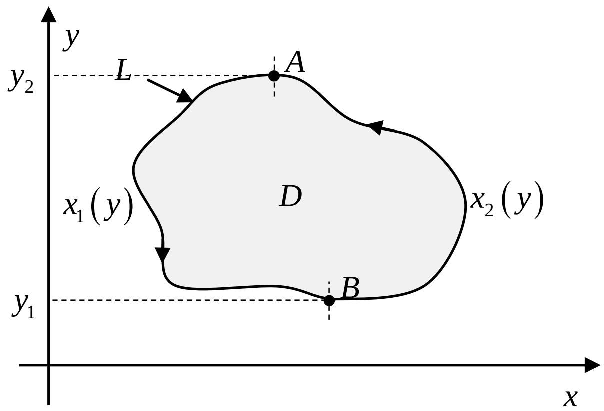
Подынтегральное выражение запишем так:

$$P\big(x, y_2(x)\big) - P\big(x, y_1(x)\big) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy$$

Тогда

$$\oint_L P(x,y)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dydx \quad (1)$$

Представим теперь область D – следующим образом



Пусть $Q(x,y), \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \in C(D)$.

Тогда проводя аналогичные рассуждения находим

$$\oint_L Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy\,. \quad (2)$$

Складывая формулы (1) и (2) получим

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx.$$

Эта формула называется **формулой Остроградского-Грина**.

Следует отметить, что формула Грина справедлива также в случае многосвязной области, т.е. области, внутри которой есть исключенные участки. В последнем случае левая часть формулы будет представлять собой сумму интегралов по внешнему контуру области и интегралов по контурам всех исключенных участков, причем каждый из этих контуров интегрируется в таком направлении, чтобы область D все время оставалась по левую сторону линии обхода.

Пример. Решим пример, рассмотренный выше, воспользовавшись формулой Остроградского-Грина.

$$\oint_L x^2 y dx + x^3 dy = \iint_D \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint_D 2x^2 dydx = \int_0^1 2x^2 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2\left(x^{5/2} - x^4\right) dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35}.$$

Применение формулы Остроградского-Грина к вычислению площадей

Если в формуле Остроградского-Грина положить $Q = x$, $P = -y$. Получим

$$\oint_L -ydx + xdy = 2\iint_D dydx = 2S$$

где S – площадь фигуры, ограниченной контуром L. Таким образом

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \qquad (1)$$

Иногда, для применения формулы (1) полезно воспользоваться следующим соотношением

$$xdy - ydx = \left(x^2 + y^2\right) d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь, ограниченную кривой $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $0 \le t < +\infty$.

Решение. Эта кривая называется **декартов лист** и она симметрична относительно прямой $y = x$. Одна половина листа соответствует изменению параметра t на промежутке $[0,1]$, вторая половина на промежутке $[1,+\infty)$. Однако удобнее рассматривать контур целиком. Тогда

$$xdy - ydx = \left(x^2 + y^2\right) d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = \frac{9a^2 t^2 \left(1+t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2} d\left(\operatorname{arctg} t\right) = \frac{9a^2 t^2}{\left(1+t^3\right)^2} dt = -3a^2 d\left(\frac{1}{1+t^3} \right)$$

Следовательно, площадь петли декартового листа равна

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = -\frac{3a^2}{2} \int_0^\infty d\left(\frac{1}{1+t^3} \right) = \frac{3a^2}{2}$$

Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Связь с вопросом о полном дифференциале

Формула Остроградского-Грина позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

Криволинейный интеграл не зависит от формы пути, если он вдоль всех путей, соединяющих начальную и конечную точку, имеет одну и ту же величину. Дадим более строгое определение

<u>Определение.</u> Пусть D – область. Будем говорить, что криволинейный интеграл второго рода **не зависит от формы пути** в области D, если для любых точек $A, B \in D$ и для любых контуров $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$ с началом в точке A и концом в точке B справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy .$$

Покажем, что условием независимости криволинейного интеграла от формы пути равносильно равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру, содержащему начальную и конечную точки.

Покажем также, что это условие будет выполняться, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. выполняется условие тотальности.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

<u>Теорема 1.</u> Пусть D – односвязная область, $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$. Тогда, условие

$$\forall L \subset D \ \oint_L Pdx + Qdy = 0$$

равносильно тому, что всюду в этой области $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

<u>Доказательство</u>.

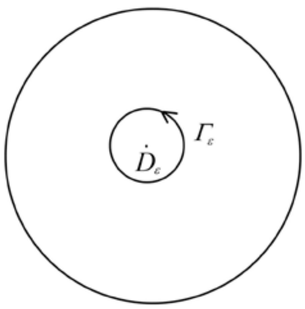
1. $\Leftarrow$ Если всюду в D выполнено равенство $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то $\forall L$ по формуле Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 \cdot dxdy = 0 .$$

2. $\Rightarrow$ Предположим, что в области D есть точка $(x_0; y_0)$, в которой $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$.

Пусть, для определенности,

$$\left. \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right|_{(x_0, y_0)} = c > 0 .$$



Тогда существует окрестность точки (x_0, y_0), в которой значения $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ больше, чем $\frac{c}{2}$. Выберем в этой окрестности окружность Γ_ε радиуса ε и рассмотрим $\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy$.

По формуле Грина

$$\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > \frac{c}{2} \iint\limits_{D_\varepsilon} dxdy = \frac{c}{2} S(D_\varepsilon) = \frac{c}{2} \pi \varepsilon^2 > 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy$ должен быть равен 0.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть D – область. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути в D равносильно тому, что для любого замкнутого контура $L \subset D$*

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0.$$

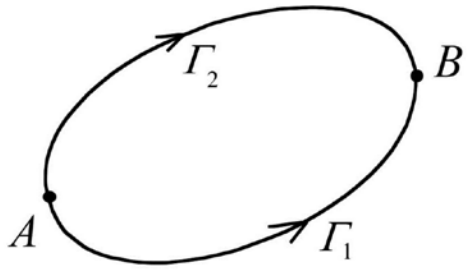
<u>Доказательство.</u>

1. ($\Rightarrow$). Пусть интеграл не зависит от формы пути и пусть L – замкнутый контур в D. Выберем на L две произвольные точки A и B. Рассмотрим соединяющие эти точки части контура L, назовем их Γ_1 и Γ_2. При этом L состоит из Γ_1 и проходимого в противоположном направлении контура Γ_2. По условию,

$$\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

Значит,

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy = 0.$$



2. ($\Leftarrow$). Пусть для любого контура $L \subset D$ $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$.

А) В случае, если Γ_1 и Γ_2, соединяющие точки A, B не имеют других общих точек, то, как и в предыдущей части, L состоит из Γ_1 и проходимой в противоположном направлении Γ_2. Поэтому

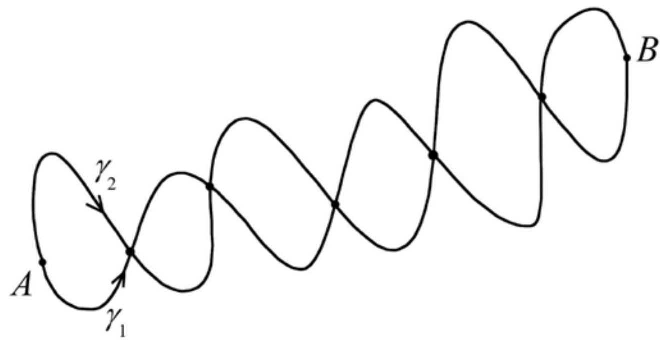
$$0 = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy,$$

Откуда

$$\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

Б) Если Γ_1 и Γ_2 имеют <u>конечное</u> число общих точек, кроме A и B, то можно применить пункт **2А** к каждому полученному контуру, интеграл по которому в связи с предположением равен 0, и поэтому для каждой такой полученной части

$$\int\limits_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma_2} Pdx + Qdy.$$



В) Случай, когда кроме A и B кривые Γ_1 и Γ_2 имеют бесконечное множество общих точек, мы оставим без доказательства.

Сопоставляя теорему 2 с теоремой 1, получаем следствие.

Следствие. *Пусть D − односвязная область. Криволинейный интеграл второго рода не зависит в D от формы пути интегрирования тогда и только тогда, когда в этой области выполняется тождество*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Далее, если $u(x, y)$ − дифференцируемая функция двух переменных, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy .$$

Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q .$$

В предположении непрерывности смешанных производных получаем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему

Теорема 3. *Если выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в области D, то тогда*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

и следовательно, криволинейный интеграл не второго рода не зависит от формы пути в области D.

Докажем, что если D − односвязная область, то верно и обратное утверждение, а именно:

Теорема 4. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области D, то существует $u(x, y)$ такая, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и рассмотрим переменную точку $B(x, y)$ и любую кривую Γ, соединяющую A с B.

По следствию теоремы 2, $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ зависит только от конечной точки $B(x, y)$ и, значит, есть некоторая функция $u(x, y)$. Покажем, что $u(x, y)$ − искомая функция, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q .$$

Для этого рассмотрим точку $(x+\Delta x, y)$ и рассмотрим

$$u(x+\Delta x, y)-u(x,y)=\int\limits_{\Gamma'} Pdx+Qdy,$$

где Γ' – отрезок прямой, соединяющей точки $(x+\Delta x, y)$ и (x,y).

На этом отрезке $dy\equiv 0$ и $\int\limits_{\Gamma'} Pdx+Qdy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx$.

Применяя теорему о среднем, получаем (ввиду непрерывности P), что

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx= =P(x+\theta\Delta x, y)\cdot\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1.$$

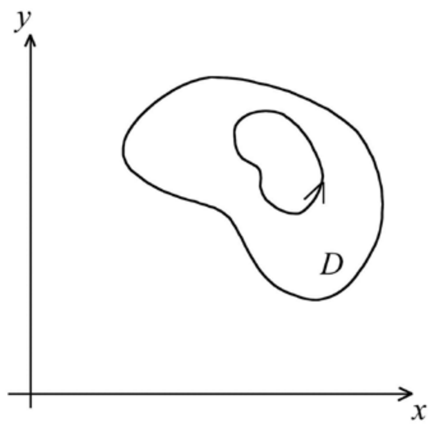
Тогда

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x}=P(x+\Delta x, y),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x, y)=P(x,y).$$

Для Q доказательство аналогичное.

Замечание. Условие односвязности существенно.



Пример. Если область D не содержит начала координат, то $\forall L\subset D \oint\limits_{L}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$.

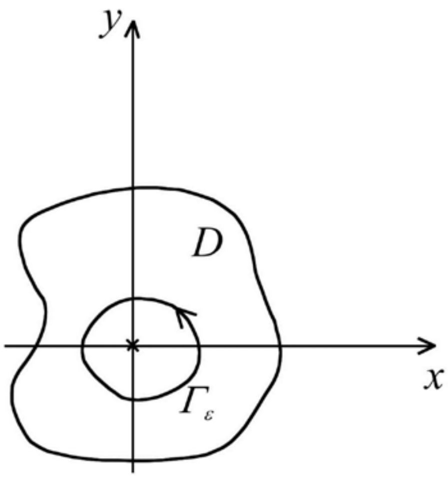
Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(-x^2-y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Таким образом. условие $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено во всей области D (которая не содержит точки $(0;0)$).

С другой стороны, пусть D содержит $(0;0)$. В этом случае формула Остроградского-Грина неприменима, так как в этой точке не существуют частные производные.



Рассмотрим далее контур Γ_ε представляющий собой окружность радиуса ε, содержащуюся в D. Параметризуем эту окружность:

$$\begin{cases} x = \varepsilon \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\varepsilon \cos t \cdot \varepsilon \cos t + \varepsilon \sin t \cdot \varepsilon \sin t\right)}{\varepsilon^2 \cos^2 t + \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ne 0.$$

Это связано с тем, что область, в которой непрерывны $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ многосвязная.