Laboratorio: Resolución de PVI con métodos numéricos

**Preparación del laboratorio**

Con esta actividad vas a conseguir poner en práctica los conceptos relacionados con los problemas de valor inicial (PVIs), en las diferentes estructuras que se pueden plantear, así como los diferentes métodos que has implementado para resolver de forma numérica los PVIs.

**Descripción del laboratorio**

Problema 1

Un sistema resonante de muelles sobre el que se ejerce una fuerza externa periódica se modela mediante la ecuación:

**(ecuación 1)**

* Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función PVI1.m que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.
* **Solución:** Para resolver este problema, hacemos un cambio de variables esto significa: y
* de esta manera las condiciones iniciales son , .

En Matlab el código está guardado bajo el nombre PVI1.m y es el siguiente:

function [dX] = PVI1(t,x)

dX = [x(2), 4\*sin(5\*t)-25\*x(1)];

end

* Usa el método de Heun de orden 2 para resolver el PVI en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos. Representa la solución para . Indica en una tabla los valores de para .

**Solución:**

En la Figura 1 mostramos los valores para: , = , en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos. Esta figura muestra los valores resultantes de aplicar el **método de Heun**.

A close up of a map

Description automatically generated

**Figura 1. Resultados método Heun**:intervalo [0,2] con 40 subintervalos.

En la Tabla 1, se colocan los resultados correspondientes al método de Heun en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos, considerando sólo los valores indicados en el enunciado.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.043576 | 0.480038 | 2.706547 |
| 0.5 | 0.210805 | 0.597679 | -2.876228 |
| 0.75 | 0.201433 | -0.889087 | -7.322063 |
| 1 | -0.199876 | -1.932509 | 1.161191 |
| 1.25 | -0.510669 | -0.010366 | 12.634000 |
| 1.5 | -0.116850 | 2.897956 | 6.673260 |
| 1.75 | 0.624296 | 2.107918 | -13.108501 |
| 2 | 0.619067 | -2.381250 | -17.652769 |

**Tabla1. Algunos de los resultados método Heun**:intervalo [0,2] con 40 subintervalos.

El código usado para la generación de estos valores se encuentra en la carpeta Tarea1/1/script.m, esté script llama a la función Heun\_sistemas\_1 para resolver el problema mediante el método de Heun de orden 2.

* Usa el método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver el problema de valor inicial en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos. Representa la solución para . Indica en una tabla los valores de para .
* **Solución:**

En la Figura 2 mostramos los valores para: , = , en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos resultantes de aplicar el **método de RK-4**.

A close up of a map

Description automatically generated

**Figura 2. Resultados método RK-4:** intervalo [0,2] con 40 subintervalos.

En la Tabla 2, se colocan los resultados correspondientes de resolver el problema con el método de Runge-Kutta en el intervalo [0,2] con 40 subintervalos, considerando sólo los valores indicados en el enunciado.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.044389 | 0.474469 | 2.686197 |
| 0.5 | 0.208096 | 0.598464 | -2.808520 |
| 0.75 | 0.200435 | -0.857236 | -7.297143 |
| 1 | -0.190148 | -1.917773 | 0.918013 |
| 1.25 | -0.502346 | -0.083162 | 12.425923 |
| 1.5 | -0.132985 | 2.813696 | 7.076629 |
| 1.75 | 0.596476 | 2.186724 | -12.413004 |
| 2 | 0.627747 | -2.175423 | -17.869753 |

**Tabla 2. Algunos resultados del método de RK4**:intervalo [0,2] con 40 subintervalos.

El código usado para la generación de estos valores se encuentra en la carpeta Tarea1/1/script.m, esté script llama a la función RK\_4\_N para resolver el problema mediante el método de Runge-Kutta de orden 4.

* Proporciona una estimación numérica del orden de los métodos utilizados en los apartados anteriores. Copia el código que has utilizado para realizar dicha estimación numérica.
* **Solución:**

En este caso no podemos hacer una comparación con la solución real, por lo que a través de un método iterativo calculamos el orden de las dos metodologías usando resultados con diferentes n (el proceso detallado se encuentra en la función ordenNumericoSistema.m en la carpeta correspondiente al ejercicio #1). De igual forma mostramos el código utilizado a continuación:

%orden sin conocer solución real

function [oH, oR] = ordenNumericoSistema(fun, a, b, ya)

n = 1:6;

N = 20\*2.^n;

for j = 1:n(end)

[~, yH2] = Heun\_sistemas\_1(fun, a, b, N(j), ya);

[~, yR2] = RK\_4\_N(fun, a, b, N(j), ya);

if j>1

eH(j-1) = norm(yH(:,1)-yH2(1:2:end,1));

eR(j-1) = norm(yR(:,1)-yR2(1:2:end,1));

end

yH = yH2;

yR = yR2;

end

oH = log2(eH(1:end -1)./eH(2:end)); %solución Hunge

oR = log2(eR(1:end -1)./eR(2:end)); %solución Runge-Kutta

En la Figura 3 podemos ver los resultados para los dos métodos. El orden para el método de Heun se aproxima a 2, mientras que el orden para el método de Runge-Rutta se aproxima a 4, como era de esperarse.

A picture containing animal, bird

Description automatically generated

**Figura 3. Ordenes para el método oH (Heun) y el método oR (Runge-Rutta)**

Problema 2

El modelo de Lorenz-Haken para un láser de dos niveles viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

donde es el campo, la polarización y la diferencia de polarizaciones.

* Escribe una función PVI4.m que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.
* **Solución:**

Para simplificar escribimos las variables P, F, d como un vector a de la forma: a = [a(1) a(2) a(3)] = [F P d] y con está notación escribimos la función en Matlab llamada PVI4 que se muestra a continuación:

function [f] = PVI4(t, a)

%a = [a(1) a(2) a(3)] = [F P d]

f = [3\*(-a(1) + a(2)), - a(2) + a(1)\*a(3), 17-a(3) - a(1)\*a(2)];

end

* Resuelve el sistema en el intervalo temporal por el método de Runge-Kutta de orden 4, tomando como paso y como condiciones iniciales . Representa las variables y en el intervalo e indica en una tabla los valores de y para .
* **Solución:**

El código usado para la generación de estos valores se encuentra en la carpeta Tarea1/2/script.m, esté script llama a la función RK\_4\_h.m para resolver el problema mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. En este caso la función tiene una pequeña modificación, en lugar de introducir n de entrada, se introduce el paso (step) h como parámetro de entrada. El resultado se aprecia en la Figura 4.

A close up of a map

Description automatically generated

**Figura 4. Resultados método RK4:** intervalo [0,2], paso .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *P* | *d* |
| 0 | 4.500000 | 4.500000 | 1.000000 |
| 0.6 | 3.860581 | 3.3700234 | 0.805582 |
| 1 | 3.706172 | 3.969843 | 1.756990 |
| 1.8 | 4.181391 | 3.759479 | 0.313287 |
| 2 | 3.899148 | 3.441877 | 0.728239 |

**Tabla 3. Resultados método RK4:** intervalo [0,2] con valores para 5 t’s seleccionados.

Resuelve el sistema en el intervalo temporal por el método de Runge-Kutta de orden 4, tomando como paso y como condiciones iniciales . Representa las variables y en el intervalo e indica en una tabla los valores de y para .

* **Solución:**

En la Figura 5 podemos observar el resultado del método de Runge-Kutta de orden 4, tomando como paso , en el intervalo temporal .

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Figura 5. Resultados método RK4:** intervalo [0,200], paso .

Finalmente, la Tabla 4 muestra los resultados para algunos de los valores en el intervalo

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *P* | *d* |
| 190 | 4.000004 | 4.000000 | 0.999991 |
| 195 | 3.999999 | 3.999999 | 1.000001 |
| 200 | 4.000000 | 4.000001 | 0.999995 |

**Tabla 4. Resultados método RK4:** intervalo [0,2] con valores para 3 t’s seleccionados.

**Rúbrica**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Título de la actividad  (valor real: 5 puntos) | Descripción | Puntuación máxima  (puntos) | Peso  % |
| Criterio 1 | Calidad en la presentación: expresiones matemáticas escritas con editor de ecuaciones, tablas en formato tabla, legibilidad de gráficos… La no presentación en Word supone un 0 en este apartado. | 1.5 | 15% |
| Criterio 2 | Problema 1. Apartado a. El programa funciona. | 1 | 10% |
| Criterio 3 | Problema 1. Apartado b. Tabla de resultados correcta. | 0.625 | 12.5% |
| Criterio 4 | Problema 1. Apartado b. Gráfica correcta. | 0.625 |
| Criterio 5 | Problema 1. Apartado c. Tabla de resultados correcta. | 0.625 | 12.5% |
| Criterio 6 | Problema 1. Apartado c. Gráfica correcta. | 0.625 |
| Criterio 7 | Problema 1. Apartado d. Procedimiento correcto. | 0.5 | 10% |
| Criterio 8 | Problema 1. Apartado d. Resultado e interpretación correctos. | 0.5 |
| Criterio 9 | Problema 2. Apartado a. El programa funciona. | 1 | 10% |
| Criterio 10 | Problema 2. Apartado b. Tabla de resultados correcta. | 0.75 | 15% |
| Criterio 11 | Problema 2. Apartado b. Gráfica correcta. | 0.75 |
| Criterio 12 | Problema 2. Apartado c. Tabla de resultados correcta. | 0.75 | 15% |
| Criterio 13 | Problema 2. Apartado c. Gráfica correcta. | 0.75 |
|  |  | **10** | **100 %** |

**Extensión máxima:** 10 páginas, fuente: Calibri11, interlineado 1.5.