

# VISKØSE VÆSKER OG ELASTISKE STOFFER

FORELESNINGER I MEK 2200

av

BJØRN GJEVIK



UNIVERSITETET I OSLO  
MATEMATISK INSTITUTT  
15. NOVEMBER 2002



## Forord

Dette kompendiet inneholder forelesninger og oppgaver til emnet ME 115, Viskøse væsker og elastiske stoff. ME 115 bygger på emnet ME 102, Innføring i fluid mekanikk, hvor det finnes et kompendium utarbeidet av under-tegnede. De to kompendiene danner en sammenhengende innføring i kontinuumsmekanikk og når man leser ME 115 vil det være nyttig og tildels påkrevet å gå tilbake til ME 102 for å se fremstillingen i sammenheng.

Når man første gang ser at væsker og elastiske stoff behandles sammen i et kurs, virker dette uvant på mange. Men en må huske på at selv om en væske som for eksempel vann og et elstisk stoff som for eksempel glass synes å ha svært forskjellige egenskaper er det også en rekke likheter. Det viktige er her tidsskalaen for påvirkningen. Glass vil nemlig også flyte som en meget seig væske under langtids påvirkning. En luftboble i en glassvase vil for eksempel stige uhyre langsomt oppover i glasset på grunn av oppdriftskraften. Is er et annet medium som kan vise egenskaper som både minner om elastiske stoff og seigflytende væsker. Slår du på en isbre med isøks virker den sprø. Likevel flyter breen nedover i en langsom strøm og formes etter landskapet.

Skille mellom væsker og faste stoff er derfor ikke så veldefinert som vi vanligvis tror. Dessuten viser det seg at den matematiske beskrivelsen av spenninger og deformasjoner i væsker og faste stoff er lik. Det er derfor hensiktsmessig å behandle både viskøse væsker og elastiske eller plastiske stoff samtidig i et innføringskurs som dette. Dette kurset tar sikte på å gi den grunnleggende matematiske beskrivelse av spenninger og deformasjoner. Deretter vil vi formulere de grunnleggende likninger for likevekt og bevegelse. Til slutt vil vi ved en rekke eksempler vise hvordan disse likningene kan brukes til å løse forskjellige problemer i fluid mekanikk og elastisitetsteori.

Denne utgaven av kompendiet er blitt noe utvidet i forhold til den gamle. Dette henger sammen med at ME115 ble oppgradert til et 5 vekttallskurs.

Undertegnede vil rette en hjertelig takk til Tom Sjølie for å ha tegnet mange av figurene i kompendiet og til Dina Haraldsson for å ha skrevet manuskriptet i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Blindern, 15. november 2002

Bjørn Gjevik



Fig. 1: Flyt i isbre i Alaska. Det svarte morenematerial viser strømningsmønstret som står i breen. Foto: Jon Ove Hagen, Geografisk Institutt, UiO.

# Innhold

<b>1 Kartesiske vektorer og tensorer</b>	<b>1</b>
1.1 Notasjon . . . . .	1
1.2 Dyader . . . . .	4
1.3 Øvingsoppgaver . . . . .	4
<b>2 Definisjon av spenning. Cauchy's relasjoner. Spenningstensor.</b>	<b>7</b>
2.1 Definisjon av spenning . . . . .	7
2.2 Cauchy's relasjoner . . . . .	10
2.3 Eksempel på beregning av spenningen i en tynn stav . . . . .	14
2.4 Øvingsoppgaver . . . . .	15
<b>3 Prinsipalspenninger og prinsipalretninger</b>	<b>17</b>
3.1 Øvingsoppgaver . . . . .	19
<b>4 Bevegelseslikningen i primitiv form. Kontinuitetslikningen.</b>	<b>21</b>
4.1 Utledning av bevegelseslikningen . . . . .	21
4.2 Eksempel på likevekt i tyngdefeltet . . . . .	24
4.3 Kontinuitetslikningen . . . . .	25
4.4 Integralformulering av bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen . . . . .	26
4.5 Øvingsoppgaver . . . . .	28
<b>5 Hastighet. Forskyvning og akselerasjon</b>	<b>29</b>
5.1 Øvingsoppgave . . . . .	31
<b>6 Deformasjoner (tøyninger) i tre dimensjoner</b>	<b>33</b>
6.1 Tensoren for de relative hastighets- og forskyvningsforskjeller. Ekspansjon/kontraksjon. Deformasjon uten volumendring. Rotasjon som stift legeme. . . . .	33
6.2 Eksempler . . . . .	37
6.3 Øvingsoppgaver . . . . .	38

<b>7 Forbindelsen mellom spenninger og tøyninger/tøyningshastigheter. (Stress-strain relasjoner)</b>	<b>41</b>
7.1 En-dimensjonale modeller . . . . .	41
7.2 Generell form av stress-strain relasjoner for et deformert medium	47
7.3 Lineært elastisk stoff. Hookes lov generalisert til tre dimensjoner.	
Isotrop elastisk stoff. . . . .	48
7.4 Newtonske fluider . . . . .	49
<b>8 Bevegelseslikningene på utviklet form</b>	<b>51</b>
8.1 Bevegelseslikningen for isotrop lineær elastisk stoff . . . . .	51
8.2 Bevegelseslikningen for Newtonske fluider . . . . .	52
8.3 Grenseflatebetingelser og initialbetingelser . . . . .	53
<b>9 Eksplisitte løsninger av bevegelseslikningene/likevektslikningene for elastiske stoff</b>	<b>57</b>
9.1 Spenningsfordelingen i tyngdefeltet . . . . .	57
9.2 Aksial tøyning av sylinderisk stav . . . . .	58
9.3 Bølgeutbredelse i elastiske media:	
Plane longitudinale- og transversalebølger . . . . .	60
9.4 Refleksjon av elastiske bølger . . . . .	64
9.4.1 Refleksjon av P-bølge ved skilleflate mellom to elastiske media . . . . .	65
9.4.2 Refleksjon ved fri overflate . . . . .	67
9.4.3 Refleksjon ved fast flate . . . . .	68
9.5 Longitudinalbølger i en elastisk stav . . . . .	68
9.5.1 Stående svingninger i stav . . . . .	69
9.6 Vridning (torsjon) av sirkulær sylinderisk stav . . . . .	71
9.7 Bøyning av bjelker . . . . .	74
9.7.1 Beregning av utkraget bjelke . . . . .	77
9.7.2 Fritt opplagret bjelke . . . . .	78
9.8 Øvingsoppgaver . . . . .	79
<b>10 Eksplisitte løsninger av bevegelseslikningen for viskøs væske (Navier Stokes likninger)</b>	<b>83</b>
10.1 Plan Couette-strøm . . . . .	83
10.2 Trykkgrevet stasjonær strøm i rett sirkulært rør. Hagen-Poiseuille strøm. . . . .	84
10.3 Stasjonær strøm av væskefilm langs skråplan . . . . .	86
10.4 Grensesjikt . . . . .	88
<b>11 Energilikninger for væsker og elastiske stoff. Varmeledning.</b>	<b>95</b>
11.1 Energilikningen for den mekaniske energien . . . . .	95
11.2 Spenningskreftenes totale arbeid . . . . .	95
11.3 Energilikningen for den totale energien . . . . .	97
11.4 Energi dissipasjon i viskøse væsker . . . . .	97
11.5 Elastisk energi . . . . .	100

11.6 Varmeledning. Varmetransport i væsker . . . . .	101
11.7 Diffusjon av varme og bevegelsesmengde . . . . .	104
11.8 Termisk drevet strøm . . . . .	107
11.9 Krypstrøm . . . . .	110
<b>12 Skalering og modellover</b>	<b>117</b>
12.1 Skalering . . . . .	117
12.2 Geometrisk og dynamisk ensartethet (similaritet). Modell-lover . . . . .	119



# Kapittel 1

## Kartesiske vektorer og tensorer

### 1.1 Notasjon

En vektor betegnes vanligvis med et av de tre symbolene

$$\mathbf{A}, \vec{A}, \text{ og } \{A_i\}$$

hvor  $i = 1, 2, 3$  og  $A_1, A_2, A_3$  er vektorens komponenter langs tre ortogonale akseretninger  $x_1, x_2, x_3$  ( $x, y, z$ ). Vi vil ofte sløyfe parantesene i det siste symbolet slik at

$$A_i$$

underforstått  $i = 1, 2, 3$ , betegner vektoren og ikke bare  $i$ -te komponent. Det vil fremgå av sammenhengen hvorvidt vi mener vektoren eller bare  $i$ -te komponent. Vi skal referere til dette som *indeksskrivemåten* for kartesiske vektorer.

Enhetsvektorene langs de tre akserettingene  $x_1, x_2$  og  $x_3$  betegner vi henholdsvis med

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \text{ og } \mathbf{i}_3$$

Vi har at

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3$$

Innfører vi *summekonvensjonen* kan dette uttrykket skrives

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{i}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

Summekonvensjonen sier at når et indeks forekommer to ganger skal indekset settes 1, 2, og 3 og resultatet summeres. En vektor  $\mathbf{B}$  kan på tilsvarende måte skrives

$$\mathbf{B} = B_j \mathbf{i}_j \quad (j=1, 2, 3)$$

Skalarproduktet av vektorene  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  blir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i \mathbf{i}_i \cdot B_j \mathbf{i}_j = A_i B_j \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$$

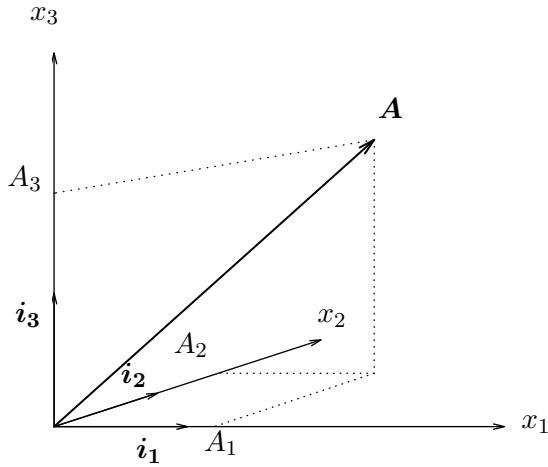


Fig. 1.1:

Nå er  $\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = 0$  når  $i \neq j$  og  $\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = 1$  når  $i = j$ . Ved å summere over indeksene  $i$  og  $j$  får vi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Ved hjelp av indeksskrivemåten og summekonvensjonen kan altså skalarproduktet  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  skrives  $A_i B_i$ .

En gradient-vektor  $\nabla\beta$  hvor  $\beta$  er en skalar betegnes i den nye indeksskrivemåten

$$\nabla\beta = \left\{ \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \right\} \quad (i=1, 2, 3)$$

For enkelhetsskyld skal vi også her sløyfe parantesene og la symbollet

$$\frac{\partial\beta}{\partial x_i}$$

betegne både vektoren og  $i$ -te komponent.

Divergensen til en vektor  $\mathbf{A}$  kan skrives

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

hvor det er underforstått at siden indekset  $i$  forekommer to ganger skal det settes 1, 2 og 3 og leddene summeres.

Uttrykket for virvlingen til en vektor ( $\nabla \times \mathbf{A}$ ) blir ganske komplisert i den nye skrivemåten og vi skal foreløpig la dette bero.

En  $3 \times 3$  matrise  $\mathcal{P}$  kan skrives

$$\mathcal{P} = \{P_{ij}\} = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{Bmatrix}$$

hvor første indeks ( $i = 1, 2, 3$ ) angir linje i matriseoppstilling og andre indeks ( $j = 1, 2, 3$ ) angir kolonne.

En tensor er en matrise som oppfyller visse transformasjonsegenskaper ved dreining av koordinatsystemet. Siden de  $3 \times 3$  matrisene som vi skal arbeide med i dette kurset er tensorer vil vi allerede nå referere til tensoren  $\mathcal{P}$ .

På tilsvarende måte som for vektorer skal vi sløyfe parantesene i uttrykket  $\{P_{ij}\}$  og la  $P_{ij}$ , underforstått  $i = 1, 2, 3$  og  $j = 1, 2, 3$ , betegne hele tensoren og ikke bare det enkelte element. Når vi har innført summekonvensjonen kan vi på en enkel måte definere pre- og post-multiplikasjon mellom en tensor (matrise) og en vektor.

*Pre-multiplikasjonen* defineres ved

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{P} = A_i \cdot P_{ij} = A_1 P_{1j} + A_2 P_{2j} + A_3 P_{3j} = M_j$$

hvor  $M_j$  er en vektor med komponentene

$$A_1 P_{1j} + A_2 P_{2j} + A_3 P_{3j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Ved matriseoppstilling fremkommer vektoren  $M_j$ 's komponenter ved multiplikasjon mellom "linje" vektoren  $\mathbf{A}$  og kolonnene i matrisen  $\mathcal{P}$ .

$$\{A_1, A_2, A_3\} \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{Bmatrix} = \{M_1, M_2, M_3\}$$

På tilsvarende måte kan vi definere *post-multiplikasjon* ved

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{A} = P_{ij} A_j = P_{i1} A_1 + P_{i2} A_2 + P_{i3} A_3 = N_i$$

hvor  $N_i$  er en vektor med komponenter

$$P_{i1} A_1 + P_{i2} A_2 + P_{i3} A_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dersom matrisen  $\mathcal{P}$  er symmetrisk,  $P_{ij} = P_{ji}$  vil pre- og post-multiplikasjon gi samme resultat (se oppgave 3). Altså:

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{A}$$

for symmetriske matriser.

Ofte vil vi også få bruk for å multiplisere samsvarende ledd i to matriser med hverandre og summere resultatet. Denne spesielle multiplikasjonen kan skrives enkelt i indeksnotasjon

$$A_{ij} B_{ij} = \beta$$

Resultatet av multiplikasjonen blir her en skalar.

## 1.2 Dyader

Indeksskrivemåten er begrenset til Kartesiske vektorer og tensorer og den kan ikke uten videre overføres til ikke-kartesiske koordinatsystemer. I dette tilfellet kan dyade-formalismen for tensorer være nyttig. Vi skal her gi noen enkle eksempler på denne skrivemåten. En matrise (tensor)  $\mathcal{P}$  skrives på dyadeform ved

$$\mathcal{P} = P_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (i = 1, 2, 3) \text{ og } (j = 1, 2, 3)$$

Enhetsvektor symbolet  $\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j$ , betegner elementets plass i matrisen og må ikke forveksles med vektorproduktet  $\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$ . Post-multiplikasjon mellom en vektor

$$\mathbf{A} = A_k \mathbf{i}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

og matrisen  $\mathcal{P}$  kan nå skrives

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \cdot \mathbf{A} &= P_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot A_k \mathbf{i}_k \\ &= P_{ij} A_k \mathbf{i}_i (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \\ &= P_{ij} A_j \mathbf{i}_i \end{aligned}$$

Vi har her benyttet oss av at skalar produktet  $\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = 0$  for  $j \neq k$  og  $= 1$  for  $j = k$ .

På helt tilsvarende måte kan vi skrive pre-multiplikasjon

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathcal{P} &= A_k \mathbf{i}_k \cdot P_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{j}_j \\ &= A_k P_{ij} (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_i) \mathbf{j}_j \\ &= A_i P_{ij} \mathbf{j}_j \end{aligned}$$

Det fremgår ved denne skrivemåten umiddelbart at  $\mathcal{P} \cdot \mathbf{A}$  og  $\mathbf{A} \cdot \mathcal{P}$  er vektorer. Fordelen med dyade-formalism ligger i at enhetsvektorene her:  $\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k$  kan være enhetsvektorer i ortogonale ikke-kartesiske koordinatsystem f.eks. sylinder- og kule-koordinatsystem.

## 1.3 Øvingsoppgaver

1. Matrisen  $\{\delta_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$  betegnes enhetsmatrisen eller Kroneckers delta. Vi har at

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & i=j \\ \delta_{ij} &= 0 & i \neq j \end{aligned}$$

Vis at

- a)  $\delta_{ij} A_j = A_i$
- b)  $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$

2. Skriv uttrykket for den konvektive akselerasjon  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  i indeksnotasjon.
3. Vis at pre- og post-multiplikasjon mellom en matrise (tensor)  $\mathcal{P}$  og en vektor  $\mathbf{A}$  gir samme svar dersom  $\mathcal{P}$  er symmetrisk.
4. La  $A_{ij}$  og  $B_{ij}$  være tensorer. Forklar at
  - a)  $A_{rs}B_{rs}$  er et tall,
  - b)  $A_{aj}B_{jb}$  er en tensor som fremkommer ved vanlig matrise multiplikasjon mellom  $A_{ij}$  og  $B_{ij}$ ,
  - c)  $A_{pq}B_{rq}$  er en tensor som fremkommer ved vanlig matrise multiplikasjon mellom  $A_{ij}$  og  $B_{ij}^T$ .

5. La

$$\mathbf{A} = \{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \{B_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Finn  $A_{ij}B_{ij}$ ,  $A_{ik}B_{kj}$ ,  $A_{ab}B_{cb}$ ,  $A_{\nu l}B_{\nu l}$ ,  $B_{sr}A_{ks}$  og  $A_{pq} + B_{pq}$ .

6. La  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  og  $\mathbf{k}$  betegne enhetsvektorene i et kartesisk koordinatsystem
  - a) Skriv tensoren  $\mathcal{P}_{ij} = -p\delta_{ij}$  på dyadeform.
  - b) Skriv tensoren
 
$$\mathcal{P}_{ij} = \{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
 på dyadeform.
  - c) Skriv tensoren  $\mathcal{P} = \alpha\mathbf{ii} + \mathbf{kk} + \mathbf{ik} + \beta\mathbf{kj}$  på matriseform.
7. La  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{i}_i$  og  $\nabla = \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Vis at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_i$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{i}_i$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} \equiv \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \mathbf{i}_i$$



# Kapittel 2

## Definisjon av spenning. Cauchy's relasjoner. Spenningstensoren.

### 2.1 Definisjon av spenning

Vi skal i det følgende behandle elastiske og viskøse spenninger i fluider og deformerbare stoff. Disse spenningene skyldes henholdsvis kraftvirkning mellom molekylene og transport av bevegelsesmengde pga. molekylbevegelsen. Spenninger av denne arten opptrer f.eks. ved

- deformasjoner i elastiske stoff
- oppvarming/avkjøling av elastiske stoff
- hastighetsforskjeller (skjærstrømmer) i viskøse væsker.

Spenning regnes som kraft pr. flateenhet. Dersom  $d\mathbf{f}$  betegner kraften på et flateelement med areal  $d\sigma_n$  og enhetsnormal  $\mathbf{n}$ , defineres spenningen på flatelementet  $\mathbf{P}_n$  ved

$$\mathbf{P}_n = \frac{d\mathbf{f}}{d\sigma_n} \quad (2.1)$$

Enheten for spenning i SI-systemet er  $N/m^2 = 1$  Pascal (Pa).

Spenningen på en flate er altså en vektor og det er ofte hensiktsmessig å innføre normalkomponenten og tangensialkomponent i forhold til flaten. Disse betegnes henholdsvis som *normalspenningen* og *skjærspenningen* (tangensialspenningen) på flaten. Normalspenningen er definert ved

$$P_{nn} = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

og skjærspenningen ved

$$P_{nt} = |\mathbf{P}_n \times \mathbf{n}| \quad (2.3)$$

Lar vi  $\mathbf{t}$  betegne en enhetsvektor i skjærspenningens retning har vi at

$$\mathbf{P}_n = P_{nn}\mathbf{n} + P_{nt}\mathbf{t}$$

Det betyr at enhetsvektoren i skjærspenningens retning kan bestemmes av likningen

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{P}_n - P_{nn}\mathbf{n}}{P_{nt}}$$

dersom  $\mathbf{P}_n$ ,  $P_{nn}$  og  $P_{nt}$  er kjent.

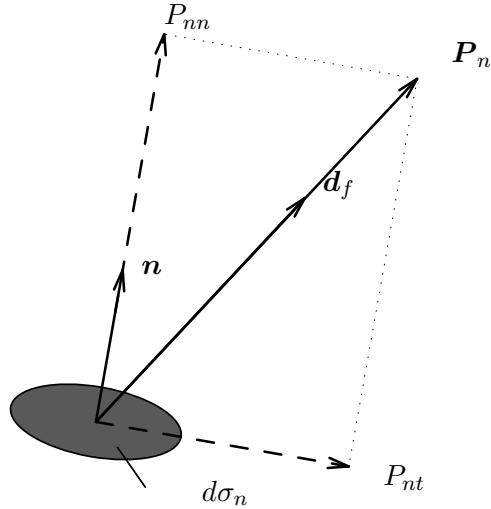


Fig. 2.1:

For en væske i likevekt er  $P_{nt} = 0$  og  $P_{nn} = -p$  hvor  $p$  er det isotrope væsketrykket.

Den totale spenningskraften på et volum  $V$  begrenset av en lukket flate  $S$  finnes ved å summere bidragene fra flateelementer på flaten  $S$  i.e.

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{P}_n d\sigma_n \quad (2.4)$$

Kraften pr. volumenhett blir

$$\mathbf{f} = \frac{1}{V} \int_S \mathbf{P}_n d\sigma_n \quad (2.5)$$

Når det kun er et isotropt trykk i mediet er  $\mathbf{P}_n = -pn\mathbf{n}$  og kraften på volumet på grunn av trykket er

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{P}_n d\sigma_n = - \int_S p \mathbf{n} d\sigma_n$$

Et flateelement har to sider, den ene siden er definert ved den positive retningen av normalvektoren og den andre siden er definert normalvektorens negative retning,  $-\mathbf{n}$ . Spenningen på siden med retning  $-\mathbf{n}$  betegnes  $\mathbf{P}_{-n}$ . Den totale kraften på en tynn skive med grunnflate  $d\sigma_n$  og tykkelse  $dh$  er

$$(\mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{-n})d\sigma_n$$

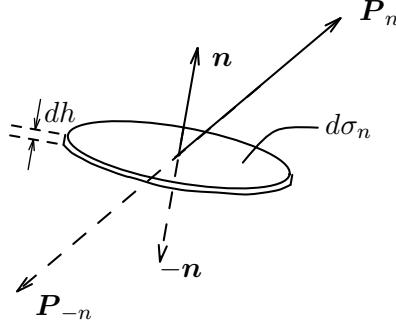


Fig. 2.2:

Massen av denne tynne skiven er  $dm = \rho d\sigma_n dh$  hvor  $\rho$  er massetettheten. Kraften pr. masseenhet er altså

$$(\mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{-n})/\rho dh$$

Ifølge Newton's lov,  $F = ma$ , er skivens akselerasjon lik kraft pr. masseenhet. For en uendelig tynn skive,  $dh \rightarrow 0$  vil akselerasjonen bli uendelig unntatt dersom

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n \quad (2.6)$$

Dette viser at spenning på de to sidene av flateelementet er like stor men motsatt rettet.

Vi har nå etablert følgende notasjon for spenning:

$$\mathbf{P}_x = \text{spenningen på en flate normalt } x\text{-aksen}$$

Den er gitt ved tre komponenter

$$\mathbf{P}_x = \{P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}\}$$

Første indeks her  $x$ , betegner retningen av flaten, andre indeks  $x, y$  eller  $z$  betegner komponentens retning. Følgelig blir f.eks.  $P_{xy}$  å lese: spenningskomponenten på flaten normalt  $x$ -aksen med retning langs  $y$ -aksen. Etter det vi har sagt tidligere er:

$$\begin{aligned} P_{xx} & \quad \text{normalspenning.} \\ \left. \begin{aligned} P_{xy} \\ P_{xz} \end{aligned} \right\} & \quad \text{skjærspenninger} \end{aligned}$$

På tilsvarende måte kan spenningene på flater normalt  $y$ - og  $z$ -aksen skrives henholdsvis

$$\mathbf{P}_y = \{P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}\}$$

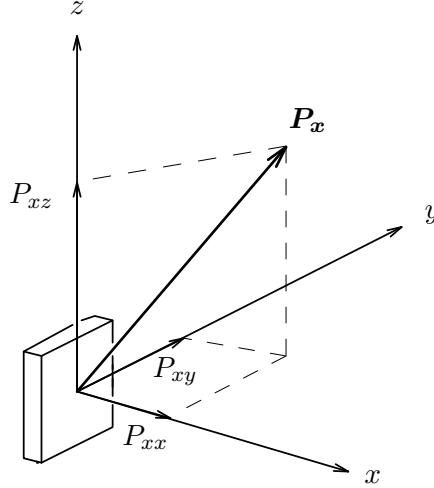


Fig. 2.3:

og

$$\mathbf{P}_z = \{P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}\}$$

Dette gir ialt 9 spenningskomponenter som kan ordnes i en matrise (tensor)

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

og den betegnes *spenningstensoren*. I indeksskrivemåten kan dette skrives komprimert  $\mathcal{P} = P_{ij}$ .

Flere andre betegnelser er vanlig for spenningstensoren f.eks.  $T_{ij}$ ,  $S_{ij}$  og  $\sigma_{ij}$ . I dette kurset holder vi fast på betegnelsen  $P_{ij}$  som har lang tradisjon ved UiO.

## 2.2 Cauchy's relasjoner

Vi skal nå vise at dersom de ni spenningskomponentene  $P_{ij}$  er kjent så kan vi finne spenningen på et flateelement med en vilkårlig orientering i forhold til akserettingene. Vi betrakter et tetraeder  $ABCO$  av form slik som antydet i fig. 2.4. Sideflaten  $ABC$  har areal  $d\sigma_n$  og normalvektoren til flaten er  $\mathbf{n}$ . De øvrige tre sideflatene  $OCB$ ,  $OAB$  og  $OAC$  har henholdsvis areal  $d\sigma_x$ ,  $d\sigma_y$  og  $d\sigma_z$  og normalvektorer  $-\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$  og  $-\mathbf{k}$ . Spenningen på flaten  $ACB$  er  $\mathbf{P}_n$  og på de øvrige tre sideflatene  $\mathbf{P}_{-x}$ ,  $\mathbf{P}_{-y}$  og  $\mathbf{P}_{-z}$  henholdsvis

Dersom  $n_x$ ,  $n_y$  og  $n_z$  er komponentene av enhetsnormalvektoren følger det av enkle geometriske betraktninger at

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= n_x d\sigma_n \\ d\sigma_y &= n_y d\sigma_n \\ d\sigma_z &= n_z d\sigma_n \end{aligned}$$

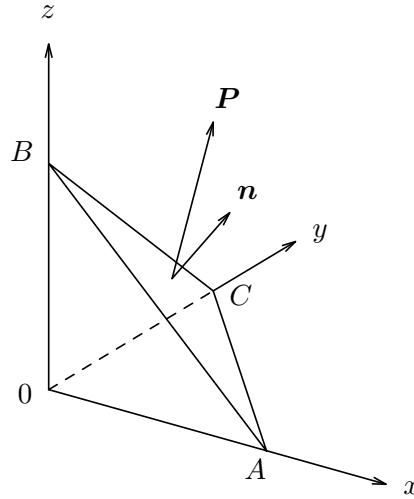


Fig. 2.4:

Videre har vi fra (2.6) at

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{-x} &= -\mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_{-y} &= -\mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_{-z} &= -\mathbf{P}_z\end{aligned}$$

Den totale kraften på tetraedret kan følgelig skrives

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{P}_n d\sigma_n + \mathbf{P}_{-x} d\sigma_x + \mathbf{P}_{-y} d\sigma_y + \mathbf{P}_{-z} d\sigma_z \\ &= \mathbf{P}_n d\sigma_n - \mathbf{P}_x d\sigma_x - \mathbf{P}_y d\sigma_y - \mathbf{P}_z d\sigma_z \\ &= (\mathbf{P}_n - n_x \mathbf{P}_x - n_y \mathbf{P}_y - n_z \mathbf{P}_z) d\sigma_n\end{aligned}$$

Dersom  $h$  er tetraedrets høyde på sideflaten  $d\sigma_n$  er tetraedrets volum

$$V = \frac{1}{3} h d\sigma_n$$

og massen er

$$M = \frac{1}{3} \rho h d\sigma_n$$

hvor  $\rho$  er massetettheten. Kraften pr. masseenhet kan derved skrives

$$\frac{\mathbf{P}_n - n_x \mathbf{P}_x - n_y \mathbf{P}_y - n_z \mathbf{P}_z}{\frac{1}{3} \rho h}$$

Denne størrelsen er ifølge Newtons 2. lov lik akselerasjonen. Skal akselerasjonen holde seg endelig når tetraedrets utstrekning blir liten i.e. når  $h \rightarrow 0$  må

$$\mathbf{P}_n = n_x \mathbf{P}_x + n_y \mathbf{P}_y + n_z \mathbf{P}_z \quad (2.8)$$

Skriver vi denne vektorlikningen ut på komponentform får vi

$$\begin{aligned} P_{nx} &= n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx} \\ P_{ny} &= n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy} \\ P_{nz} &= n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dette viser at spenningen på en flate med vilkårlig orientasjon (enhetsnormal  $\mathbf{n}$ ) kan uttrykkes ved de 9 spenningskomponentene som vi tidligere har innført. Likningen (2.8) betegnes som *Cauchy's første spennings relasjon*. (2.8) viser at spenningen på en flate kan finnes ved premultiplikasjon mellom enhetsvektoren normalt flaten og spenningstensoren

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} \quad (2.10)$$

Ved indeksskrivemåten kan dette uttrykkes

$$P_{nj} = n_i P_{ij} \quad (2.11)$$

Det er relasjonene (2.10) eller (2.11) som kvalifiserer spenningsmatrisen  $P_{ij}$  til betegnelsen tensor.

Mellan de ni spenningskomponentene eksisterer det tre relasjoner slik at det er egentlig bare seks uavhengige spenningskomponenter. Disse relasjonene betegnes *Cauchy's andre sett av spenningsrelasjoner* og de innebærer at spenningstensoren er symmetrisk

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (2.12)$$

Eksplisitte betyr dette at

$$\begin{aligned} P_{xy} &= P_{yx} \\ P_{xz} &= P_{zx} \\ P_{yz} &= P_{zy} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vi skal gi et bevis for at det må være slik. La oss betrakte et parallellepiped som vist på fig. 2.5.

Sidekantene i epipedet er  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  og  $\Delta z$  og aksekorssets origo er lagt til sentrum av epipedet og aksene er parallelle med sidekantene. Vi skal for enkelhets skyld anta at sideflatene er så små at spenningen kan regnes konstant over sideflatene. På figuren er spenningskomponentene på sideflatene  $abcd$ ,  $bcef$  og  $dcfg$  inntegnet. Dersom vi ønsker å beregne dreie-momentet av spenningskreftene på epipedets overflate m.h.p. f.eks.  $x$ -aksen innser vi at bare skjærspenningstensoren  $P_{zy}$  og  $P_{yz}$  vil inngå. Dette illustreres best på et snitt gjennom epipedet i  $yz$ -planet (fig. 2.6).

Dreiemomentet  $M_x$  m.h.p.  $x$ -aksen og positiv retning slik som angitt på figur 2.6 er

$$M_x = (P_{zy} - P_{yz}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Nå er vinkelakselerasjonen  $\dot{\Omega}_x$  om  $x$ -aksen gitt ved

$$\dot{\Omega}_x = M_x / I_x$$

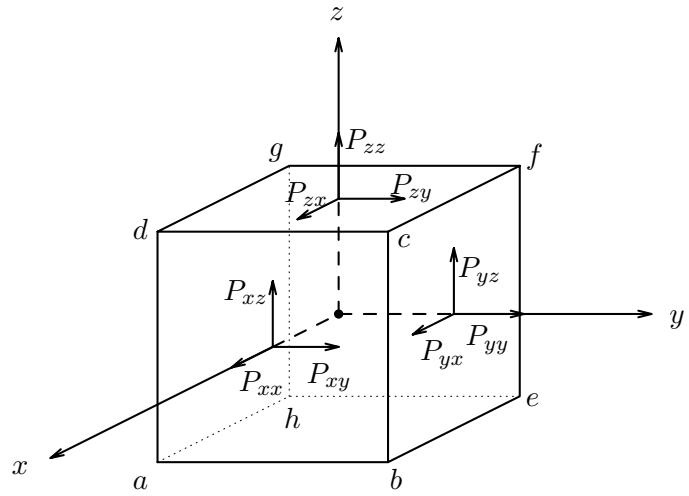


Fig. 2.5:

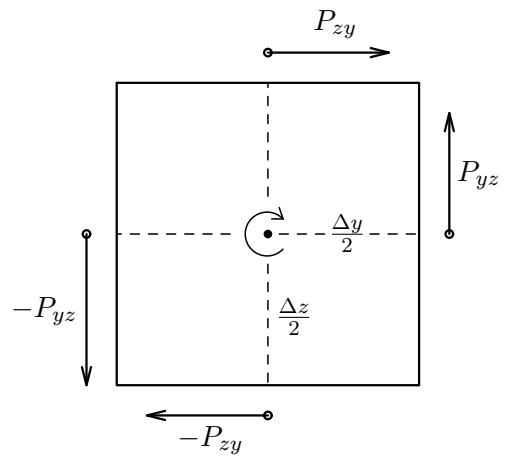


Fig. 2.6:

hvor  $I_x$  er treghetsmomentet m.h.p. på den samme aksen. Skal vi ha endelige vinkelakselerasjoner selv for små epiped hvor  $I_x \rightarrow 0$  må samtidig  $M_x \rightarrow 0$ . Det betyr at

$$P_{zy} = P_{yz}$$

Dette gir oss den siste av relasjonene i (2.11) og de to øvrige fremkommer på tilsvarende måte ved å beregne dreiemomentet m.h.p.  $y$ - og  $z$ -aksene. En viktig konsekvens av Cauchy's andre relasjon er at (2.9) kan skrives

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}$$

### 2.3 Eksempel på beregning av spenningen i en tynn stav

Vi skal vise hvordan vi ved hjelp av Cauchy's første sett av relasjoner kan finne spenningen på snittflater gjennom en stav som er utsatt for spenning (strekk) i lengderetningen.

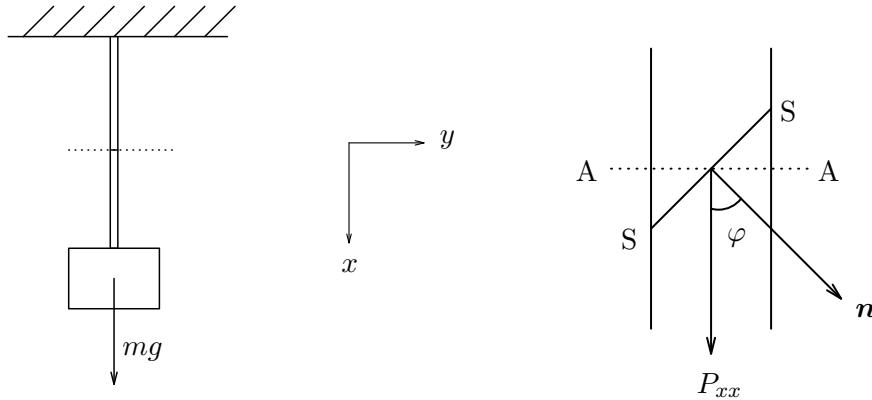


Fig. 2.7:

Dersom belastningen er  $mg$  og stavens tverrsnitt er  $q$  så er staven utsatt for en strekkspenning

$$P_{xx} = \frac{mg}{q}$$

Dette er spenningen på en snittflate  $A - A$  normalt staven. Spenningen,  $\mathbf{P}_n$ , på en snittflate  $S - S$  som danner en vinkel  $\phi$  med aksen og har normalvektor  $\mathbf{n} = \{\cos \phi, \sin \phi\}$  finner vi fra (2.8)

$$\mathbf{P}_n = \{\cos \phi P_{xx}, 0, 0\}$$

Normalspenningen på snittflaten er

$$P_{nn} = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} = P_{xx} \cos^2 \phi$$

Skjærspenningen er

$$P_{nt} = |\boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{n}| = \frac{1}{2} P_{xx} \sin 2\phi$$

Dette viser at den maksimale skjærspenningen opptrer på flater som danner  $45^\circ$  med lengderetningen.

## 2.4 Øvingsoppgaver

1. I en todimensjonal spenningstilstand er spenningstensoren gitt ved

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = P_{xx} \mathbf{i}\mathbf{i} + P_{xy} (\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i}) + P_{yy} \mathbf{j}\mathbf{j}.$$

hvor  $\mathbf{i}$  og  $\mathbf{j}$  betegner enhetsvektorene henholdsvis i  $x$ - og  $y$ -retning. En flate er definert ved  $y=\eta(x)$ .

- a) Skriv spenningstensoren på matriseform.
- b) Finn enhetsnormalen til flaten  $y=\eta(x)$ .
- c) Finn spenningen på flaten.
- d) Beregn normal- og tangentialspenningen.
- e) Hva blir resultatet med  $P_{xx}=P_{yy}$  og  $P_{xy}=0$ ?

2. I en todimensjonal spenningstilstand er spenningstensoren gitt ved

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{Bmatrix} \beta x & \kappa y \\ \kappa y & \beta x \end{Bmatrix}$$

hvor  $\beta$  og  $\kappa$  er konstanter.

- a) Finn spenningskraften på sidekantene av et kvadrat med sentrum i origo.
- b) Bestem relasjon mellom  $\beta$  og  $\kappa$  når den samlede spenningskraften på kvadratet er null.

Lengden av kvadratets sidekant settes lik  $2l$ .



## Kapittel 3

# Prinsipalspenninger og prinsipalretninger

Det viser seg at det alltid er mulig å finne orienteringer av flaten slik at det kun opptrer normalspenninger på flaten. Fra (2.8) har vi at spenningen på en flate med normalvektor  $\mathbf{n}$  er

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}$$

Skal spenningen være rettet langs normalvektoren må

$$\mathbf{P}_n = \sigma \mathbf{n}$$

hvor  $\sigma$  er en skalar størrelse. Vi må altså ha

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$$

Denne likningen kan skrives

$$(\mathcal{P} - \sigma \mathcal{J}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.1)$$

hvor  $\mathcal{J}$  betegner enhetsmatrisen

$$\mathcal{J} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Skriver vi ut (3.1) som tre likninger ser de slik ut

$$\begin{aligned} (P_{xx} - \sigma)n_x + P_{xy}n_y + P_{xz}n_z &= 0 \\ P_{yx}n_x + (P_{yy} - \sigma)n_y + P_{yz}n_z &= 0 \\ P_{zx}n_x + P_{zy}n_y + (P_{zz} - \sigma)n_z &= 0 \end{aligned}$$

Dette er et homogent lineært likningssatt for de tre vektorkomponentene  $n_i$ . Skal settet ha løsning  $n_i \neq 0$  må determinanten

$$\det[\mathcal{P} - \sigma \mathcal{J}] = 0 \quad (3.2)$$

Vi ser at  $\sigma$  er hva en i lineær algebra kaller egenverdien til matrisen  $\mathcal{P}$  og  $\mathbf{n}$  er den tilhørende egenvektoren. Siden spenningstensoren er symmetrisk har vi fra kjente teoremer i lineær algebra at det alltid eksisterer tre reelle egenverdier  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  med tilhørende egenvektorer  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  og  $\mathbf{n}_3$ . Retningene gitt ved disse egenvektorene kalles *hovedspenningsaksene* eller *prinsipalretninger* og de tilhørende normalspenningskomponentene  $\sigma_1, \sigma_2$  og  $\sigma_3$  kalles *hovedspenningerne* eller *prinsipalspenningene*.

For to-dimensjonale (plane) spenningstilstander kan dette illustreres ved enkle regninger og uten bruk av kunnskaper i lineær algebra. I dette tilfellet er spenningstensoren en  $2 \times 2$  matrise som kan skrives

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{Bmatrix}$$

Spenningen på et flateelement med normalvektor  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$  er

$$\begin{aligned} P_{nx} &= n_x P_{xx} + n_y P_{yx} \\ P_{ny} &= n_x P_{xy} + n_y P_{yy} \end{aligned}$$

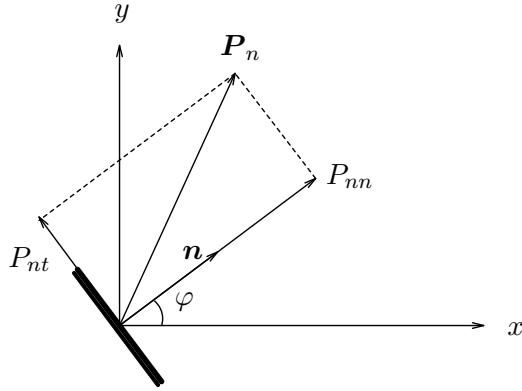


Fig. 3.1:

Normal- og skjærspenningene på flatelementet er henholdsvis

$$\begin{aligned} P_{nn} &= P_{nx}n_x + P_{ny}n_y \\ P_{nt} &= P_{ny}n_x - P_{nx}n_y \end{aligned}$$

Nå er  $n_x = \cos \phi$  og  $n_y = \sin \phi$  og ved innsetning får vi

$$\begin{aligned} P_{nn} &= P_{xx} \cos^2 \phi + P_{yx} \sin 2\phi + P_{yy} \sin^2 \phi \\ P_{nt} &= P_{xy} \cos 2\phi - \frac{1}{2}(P_{xx} - P_{yy}) \sin 2\phi \end{aligned}$$

Prinsipalspenningsretningene kan nå finnes ved å sette  $P_{nt} = 0$ . Dette gir

$$\tan 2\phi = \frac{2P_{xy}}{P_{xx} - P_{yy}}$$

og prinsipalspenningsretningene er  $\phi = \phi_0$ ,  $\phi = \phi_0 + \pi/2$ . Siden

$$\frac{dP_{nn}}{d\phi} = 2P_{nt}$$

får vi at normalspenningen  $P_{nn}$  har ekstremalverdier når  $\varphi = \varphi_0$ . Størrelsen av normalspenningen er da:

$$P_{nn} = \frac{1}{2} \left[ (P_{xx} + P_{yy}) \pm \sqrt{(P_{xx} - P_{yy})^2 + 4P_{xy}^2} \right]$$

Det samme resultatet ville en få direkte ved å løse determinantlikningen (3-2).

### 3.1 Øvingsoppgaver

1. I et kartesisk koordinatsystem  $(x, y)$  med to-dimensjonal spenningstilstand har spenningstensoren  $\mathcal{P}$  komponentene

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor  $\tau$  er en konstant. ( $\tau = P_{xy}$ ).

- a) Finn spenningen på et flateelement hvor flatenormalen ligger i  $x, y$ -planet og danner vinkelen  $\varphi$  med  $x$ -aksen.
- b) Finn normal- og tangentialspenningen på flateelementet.
- c) Finn prinsipalspenningene (hovedspenningene) og retningene (prinsipalspenningsaksene). (Eksamens ME 105, 1981)

2. I et kartesisk koordinatsystem  $(x, y)$  med to-dimensjonal spenningstilstand har spenningstensoren  $\mathcal{P}$  komponentene

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

hvor  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  er konstanter.

- a) Finn prinsipalspenningene og prinsipalretningene.
- b) Finn normal- og skjærspenningen på flateelementet hvor flatenormalen ligger i  $x, y$ -planet og danner en vinkel  $\varphi$  med  $x$ -asken.
- c) Bestem vinkel  $\varphi$  som gir maksimal verdi for skjærspenningen. Finn skjærspenningen og normalspenningen i dette tilfellet.  
(Eksamens ME 105, 1982)

3. I et kartesisk koordinatsystem  $x, y, z$  har spenningstensoren  $\mathcal{P}$  komponenter

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor  $\sigma$  og  $\tau$  er konstanter og de øvrige komponentene er null.

- a) Finn kraften på små flateelement normalt  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksen.  
Arealet av flateelementene betegnes  $\Delta S$ .
- b) Finn prinsipalspenningene og prinsipalspenningsretningen.
- c) Finn retningen for normalen til de flatene hvor det ikke  
er normalspenninger. (Eksamens ME 105, 1983)
4. Vi betrakter en to-dimensjonal spenningstilstand i et rettvinklet kartesisk koordinatsystem hvor  $\mathbf{i}_1$  og  $\mathbf{i}_2$  er enhetsvektorer. Spenningene på plan som har  $\mathbf{i}_1$  og  $\mathbf{i}_2$  som normalvektorer er henholdsvis

$$\mathbf{P}_1 = a\mathbf{i}_1 + b\mathbf{i}_2$$

og

$$\mathbf{P}_2 = c\mathbf{i}_1 + d\mathbf{i}_2$$

hvor  $a, b, c$  og  $d$  er konstanter.

- a) Hvilken sammenheng må det være mellom  $b$  og  $c$ ?
- b) Sett  $b = a$  og  $d = -a$ . Finn normalvektoren til plan hvor tangentialspenningen er null.
- c) Finn maksimal tangentialspenning. (Eksamens ME 105, 1985)

## Kapittel 4

# Bevegelseslikningen i primitiv form. Kontinuitetslikningen.

### 4.1 Utledning av bevegelseslikningen

I dette avsnittet skal vi formulere bevegelseslikningen for et kontinuerlig medium; væske, gass, deformerbart fast stoff, hvor det virker spenningskretter. Fra Cauchy's relasjoner vet vi at dersom spenningstensoren er kjent kan vi beregne spenningene på flater med vilkårlig orientering overalt i mediet. Vi tar for oss et parallellepiped med sidekanter  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  og  $\Delta z$  som er orientert i forhold til koordinataksene  $x$ ,  $y$  og  $z$  slik som vist på figur 4.1.

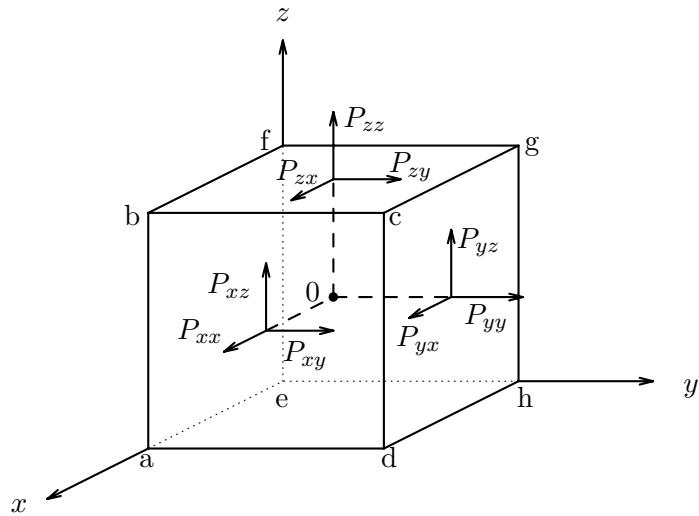


Fig. 4.1:

På denne figuren har vi også tegnet inn normal- og skjærspenninger på de tre sideflatene som vender fremover. Av dette er det klart at spenningskraften i  $x$ -retning er forårsaket av komponentene

$$P_{xx}, P_{yx} \text{ og } P_{zx}$$

I sentrum,  $O$ , av epipedet har disse komponentene verdien

$$(P_{xx})_0 \ (P_{yx})_0 \ \text{og} \ (P_{zx})_0$$

Den midlere spenningskraften på sideflatene som skyldes de nevnte spenningskomponentene kan da skrives

$$\begin{aligned} \text{På sidefl. } adcb & \quad \left[ (P_{xx})_0 + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \\ - " - \quad e h g f & \quad - \left[ (P_{xx})_0 - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \\ - " - \quad c d h g & \quad \left[ (P_{yx})_0 + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \Delta z \\ - " - \quad a b f e & \quad - \left[ (P_{yx})_0 - \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \Delta z \\ - " - \quad b c g f & \quad \left[ (P_{zx})_0 + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] \Delta x \Delta y \\ - " - \quad a d h e & \quad - \left[ (P_{zx})_0 - \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Vi har da sløyfet høyere ordens ledd i Taylor utviklingen av  $P_{xx}$ ,  $P_{yx}$  og  $P_{zx}$  omkring punktet  $O$ .

Den totale spenningskraften i  $x$ -retning,  $F_x$ , fåes ved å summere alle bidragene fra sideflatene og dette gir

$$F_x = \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

hvor  $\Delta \tau = \Delta x \Delta y \Delta z$  er volumet av epipedet. Ved tilsvarende resonnement kan vi finne spenningskraftene i  $y$ - og  $z$ -retning og disse er henholdsvis

$$F_y = \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

og

$$F_z = \left( \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

Benytter vi oss av indeksskrivemåten kan vi sammenfatte dette i et enkelt uttrykk for spenningskraften på epipedet

$$\mathbf{F} = \{F_i\} = \left\{ \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \right\} \Delta \tau$$

Vektoren

$$\left\{ \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \right\}$$

er avledet av spenningstensoren ved derivasjon m.h.p. de tre akserettingene. Denne vektoren blir betegnet som divergensen til spenningstensoren og dette skrives ofte

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = \left\{ \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \right\}$$

Massen,  $m$ , av epipedet kan vi uttrykke

$$m = \rho \Delta \tau$$

hvor  $\rho$  er den midlere massetetthet. Spenningskraften pr. masseenhett blir følgelig

$$\mathbf{f}^s = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \right\}$$

Dersom det i tillegg til spenningskraften også virker volumkrefter pr. masseenhett f.eks. tyngdekraften som vi betegner

$$\mathbf{f}^v$$

så vil epipedets akselerasjon  $\mathbf{a}$  være bestemt ved

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}^s + \mathbf{f}^v$$

Ved å sette inn for  $\mathbf{f}^s$  får vi bevegelseslikningen på primitiv form

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{P} + \mathbf{f}^v \quad (4.1)$$

I indeksnotasjon kan denne likningen skrives

$$a_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + f_i^v \quad (4.2)$$

Likevektbetingelsen for et stoff som deformeres under påvirkning av ytre krefter er

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + f_i^v \quad (4.3)$$

For å få en entydig betegnelse i indeksnotasjonen er indekset  $v$  for volumkraften flyttet opp.

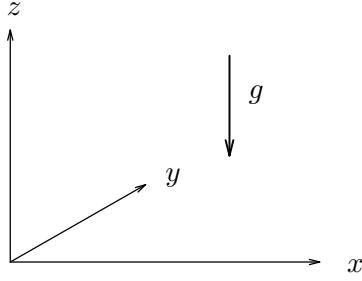


Fig. 4.2:

## 4.2 Eksempel på likevekt i tyngdefeltet

Vi betrakter et elastisk lag med plan overflate og vi legger  $x$ - og  $y$ -aksen langs overflaten med  $z$ -aksen rettet vertikalt oppover

Laget tenkes å være homogent med tetthet  $\rho$  og det er ubegrenset både i horisontal retning og i dypet. Dersom tyngden er den eneste ytre kraft får vi fra likevektslikningen (4.3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) - g &= 0\end{aligned}$$

hvor  $g$  er tyngdens akselerasjon. Vi forventer at spenningsforholdene i mediet er uavhengig av  $x$  og  $y$  slik at  $\partial/\partial x$  og  $\partial/\partial y = 0$ . Derved får vi at likevektbetingelsene kan skrives

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} &= \rho g\end{aligned}$$

Den siste av disse likningene kan integreres og dette gir

$$P_{zz} = \rho g z + A$$

Integrasjonskonstanten  $A$  bestemmes ved grenseflatebetingelsen ved overflaten. Dersom spenning på overflaten  $z=0$  skyldes lufttrykket,  $p_0$ , har vi at

$$P_{zz} = -p_0 \quad \text{for } z=0$$

Integrasjonskonstanten kan derved bestemmes og vi får at normalspenningen  $P_{zz}$  varierer med dypet etter formelen

$$P_{zz} = -p_0 + \rho g z$$

Det vil si at spenningen på en flate i et dyp  $z = -H$  er gitt ved vekten av materialet i en sylinder over flaten med tillegg for lufttrykket. Dette gir tilsvarende trykkfordeling i  $z$ -retningen som ved hydrostatisk likevekt i væsker. De øvrige spenningskomponentene  $P_{xx}, P_{yy}$  etc. er foreløpig ubestemt, og material egenskapene må spesifiseres før disse kan bestemmes. Det skal senere vise seg at komponentene  $P_{xx}$  og  $P_{yy}$  ikke er lik  $P_{zz}$  slik at spenningstilstanden ikke er isotrop det vil si lik i alle retninger. (Se avsnitt 7.3.)

### 4.3 Kontinuitetslikningen

Kontinuitetslikningen uttrykker at masse er en konservert størrelse. Det innebærer at netto massestrømmen inn i et avgrenset volumelement må være lik økningen eller reduksjonen av masse innenfor elementet. Vi velger å betrakte et volumelement i form av epipedet i figur 4.1. Massestrømmen pr. flateenhet og tidsenhet i sentrum av epipedet kan vi skrive

$$\mathbf{q} = (\rho \mathbf{v})_0 \quad (4.4)$$

hvor  $\mathbf{v}$  er hastigheten i punktet. Hastigheten har komponenter  $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$  eller i indeksnotasjon  $\mathbf{v} = \{v_i\}$ . Massestrømmens komponent i  $x$ -retning i punktet  $O$  er altså

$$q_x = (\rho u)_0$$

og den midlere massestrømmen pr. flateenhet og tidsenhet ut gjennom sideflaten  $adb$  i epipedet er

$$(\rho u)_0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2} \quad (4.5)$$

Siden flaten har areal  $\Delta y \Delta z$  er den totale massestrømmen ut gjennom flaten pr. tidsenhet lik

$$\left[ (\rho u)_0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \quad (4.6)$$

Likeledes blir uttrykket for den totale massestrømmen inn gjennom sideflatene  $efgh$  pr. tidsenhet

$$\left[ (\rho u)_0 - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \quad (4.7)$$

Den netto innstrømningen av masse pr. tidsenhet gjennom de to nevnte sideflatene er gitt ved differansen mellom uttrykkene (4.7) og (4.6). Følgelig kan netto innstrømningen i tidsrommet  $\Delta t$  skrives

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta\tau\Delta t$$

På tilsvarende måte finner vi henholdsvis at netto innstrømning gjennom sideflatene normalt  $y$ - og  $z$ -aksen er

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Delta\tau\Delta t$$

og

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\Delta\tau\Delta t.$$

Økningen i masse innenfor epipedet i samme tidsrom er

$$\Delta\rho\Delta\tau$$

hvor  $\Delta\rho$  er tetthetsendring.

Kravet om at massen skal være bevart leder til følgende masseregnskap for epipedet

$$\Delta\rho\Delta\tau = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \Delta\tau\Delta t$$

Ved overgang til differensialsymboler  $\partial\rho/\partial t$  i stedet for  $\Delta\rho/\Delta t$  gir dette kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

Denne likningen kan i vanlig vektornotasjon skrives

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (4.8)$$

og ved indeksskrivemåten

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)$$

## 4.4 Integralformulering av bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen

I det foregående har vi utledet bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen ved å gjøre regnskap for krefter og massetransport for et rettvinklet epiped. Denne fremgangsmåten er knyttet til en kartesisk koordinatbeskrivelse og vi har egentlig i denne utledelsen inndirekte også utledet Gauss integrasjonsats for en tensor. Vi skal nå formulere bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen uten at vi begrenser oss til et bestemt valg av koordinatsystem, men dette vil til gjengjeld kreve at vi har bevist Gauss sats på annen måte.

La oss betrakte en liten avgrenset del av mediet med begrensningsflate  $S$  og volum  $V$ . La  $\mathbf{n}$  betegne enhetsnormalen til et flateelement  $d\sigma_n$  i begrensningsflaten  $S$ . Den totale spenningskraften som virker på  $S$  er

$$\int_S \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} d\sigma_n = \int \nabla \cdot \mathcal{P} d\tau$$

hvor flateintegralet er omskrevet til et volumintegral ved hjelp av Gauss sats.  $d\tau$  betegner som vanlig et volumelement. Dersom det også virker en volumkraft  $\mathbf{f}_v$  pr. masseenhet på massen innenfor volumet  $V$  så kan resultanten av volumkraften skrives

$$\int_V \mathbf{f}_v \rho d\tau$$

hvor  $\rho$  er massetettheten. Akselerasjonen av massen innenfor flaten  $S$  er

$$\int_V \rho \mathbf{a} d\tau$$

Newton's andre lov for massen innenfor volumet  $V$  gir

$$\int_V \rho \mathbf{a} d\tau = \int_V \nabla \cdot \mathcal{P} d\tau + \int_V \mathbf{f}_v \rho d\tau$$

Dette kan skrives

$$\int_V (\rho \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathcal{P} - \mathbf{f}_v \rho) d\tau = 0$$

Denne likningen er oppfylt dersom integranden er lik null og det leder direkte til bevegelseslikningen (4.1).

På tilsvarende måte kan vi utlede kontinuitetslikningen. Total massetransport gjennom flaten  $S$  kan skrives

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma_n = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau$$

hvor flateintegralet igjen er omskrevet ved hjelp av Gauss sats. Massetransporten er her regnet positiv når den er rettet ut gjennom flaten. Endringen pr. tidsenhet av masse innenfor volumet er

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Prinsippet om massebevarelse medfører

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau$$

som kan skrives

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) d\tau = 0$$

Den siste likningen er oppfylt dersom integranden er null og det leder direkte til kontinuitetslikningen (4.8).

## 4.5 Øvingsoppgaver

1. Finn divergensen til tensoren  $P_{ij} = \beta\delta_{ij}$  hvor  $\beta$  er en funksjon av  $x, y$  og  $z$ .
2. Bestem akselerasjonen i et medium hvor spenningstensoren er gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} \beta x & \kappa y \\ \kappa y & \beta x \end{Bmatrix}$$

og den ytre kraft er  $f = \{f_x, 0, 0\}$ .  $\beta$  og  $\kappa$  er konstanter. Hva er betingelsen for likevekt?

3. Bestem akselerasjonene i et medium hvor spenningstensoren er gitt ved

$$P_{ij} = \gamma x_i x_j + (\beta - \gamma) x_r x_s \delta_{ir} \delta_{js}$$

og hvor det ikke virker ytre krefter.  $\gamma$  og  $\beta$  er konstanter.

# Kapittel 5

## Hastighet. Forskyvning og akselerasjon

Vi har allerede innført felthastigheten

$$\mathbf{v} = \{v_i\}$$

og vi tenker oss at i et kontinuerlig medium (væske, elastisk/plastisk stoff) er hastigheten en funksjon av romkoordinatene  $\mathbf{r} = \{x_i\}$  og tiden  $t$ .

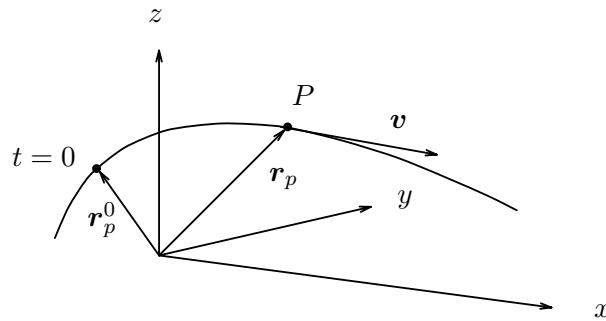


Fig. 5.1:

Vi lar  $\mathbf{r}_p$  betegne koordinaten til et bestemt punkt  $P$  eller partikkelen i mediet. Den tidsderiverte av  $\mathbf{r}_p$  er da partikkelenes hastighet og partikkelen forutsettes å følge mediets bevegelse gitt ved felthastigheten. Derved er

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p, t) \quad (5.1)$$

Dersom  $\mathbf{r}_p^0$  er partikkelenes posisjon ved tiden  $t=t_0$  finner vi ved integrasjon av (5.1) at posisjonen ved et etterfølgende tidspunkt er

$$\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p^0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_p, t) dt \quad (5.2)$$

Størrelsen  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p^0$  er partikkelen forslyvning eller forrykningen som den også kalles. Vi lar vektoren

$$\mathbf{u} = \{u_i\}$$

betegne *forskyvningen*. Vi har altså at

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p^0$$

Siden  $\mathbf{r}_p$  som er en funksjon av  $t$  inngår i integralet i (5.2) er det i alminnelighet vanskelig å finne enkle analytiske relasjoner mellom forskyvningen  $\mathbf{u}$  og felthastigheten  $\mathbf{v}$ . Likninger hvor den ukjente, her  $\mathbf{r}_p$ , forekommer både eksplisitt og i integraluttrykk kalles integrallikninger og løsningsmetoder for slike likninger gjennomgåes i avanserte kurs i mekanikk og anvendt matematikk. I mange tilfeller er forskyvningene små slik at vi kan forenkle likningen (5.2). Vi setter

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p^0 + \mathbf{u}, t) \cong \mathbf{v}(\mathbf{r}_p^0, t)$$

Dette betyr at vi approksimerer felthastigheten i omegn av partikkelen posisjon ved  $t=t_0$  med hastigheten i dette punktet. Følgelig får vi

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p^0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_p^0, t) dt$$

Derivasjon av denne likningen m.h.p. tiden gir

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \quad (5.3)$$

Denne relasjonen mellom forskyvningsfeltet og hastighetsfeltet gjelder altså ved små forskyvninger.

Partikkelen akselerasjon finner vi ved å derivere (5.1) med hensyn på tiden. Når vi husker at  $\mathbf{v}$  også er en implisitt funksjon av tiden gjennom  $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t)$  får vi

$$\mathbf{a}_p = \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}$$

Dette gir

$$\mathbf{a}_p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (5.4)$$

hvor

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}$$

Detaljene i denne utledningen og den fysikalske tolkningen av leddene på høyre side i likning (5.4) er gitt i forelesningskompendiet for kurset ME 102 (Gjevik, 1981). Dersom hastigheten er tilstrekkelig liten kan den konvektive akselerasjonen  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  sløyfes og vi får

$$\mathbf{a}_p = \frac{d^2\mathbf{r}_p}{dt^2} \cong \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

For små forskyvninger er altså akselerasjonen

$$\mathbf{a}_p = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

Denne formelen kommer ofte til anvendelse ved deformasjoner av elastiske stoff.

## 5.1 Øvingsoppgave

1. Gitt et en-dimensjonalt hastighetsfelt

$$v(x, t) = \frac{v_0}{L} x \sin \omega t$$

hvor  $v_0, L$  og  $\omega$  er konstanter

- a) Vis at akselerasjonen for en partikkel i feltet er

$$a_p = \frac{v_0 \omega}{L} x [\cos \omega t + \frac{v_0}{L \omega} \sin^2 \omega t]$$

- b) Vis at forskyvningen til partikkelen er

$$u = x_0 \left\{ \exp \left[ \frac{v_0}{\omega L} (1 - \cos \omega t) \right] - 1 \right\}$$

hvor  $x_0$  er posisjonen ved  $t=0$ .

- c) Bestem også  $a_p$  og  $u$  ved å bruke tilnærrelsene (5.3) og (5.5). Hvilken betingelse må være oppfylt for at (5.3) og (5.5) skal gi en god tilnærrelse til de eksakte uttrykkene?



## Kapittel 6

# Deformasjoner (tøyninger) i tre dimensjoner

- 6.1 Tensoren for de relative hastighets- og forskyvningsforskjeller. Ekspansjon/kontraksjon.  
Deformasjon uten volumendring.  
Rotasjon som stift legeme.

Vi skal nå se på hastighetsforskjellen og forskyvningsforskjellen mellom to nærliggende punkter  $P_1$  og  $P_2$  i feltet.

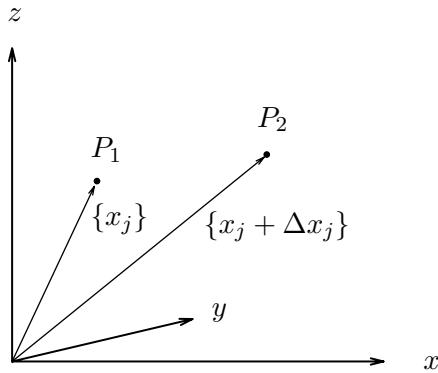


Fig. 6.1:

Felthastigheten betegner vi som før ved

$$\boldsymbol{v} = \{v_i\}$$

og forskyvningen ved

$$\boldsymbol{u} = \{u_i\}$$

Forskjellen i hastighet eller forskyvning mellom punktene  $P_1$  og  $P_2$  er

$$\Delta v_i = v_i(x_j + \Delta x_j, t) - v_i(x_j, t) \cong \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

$$\Delta u_i = u_i(x_j + \Delta x_j, t) - u_i(x_j, t) \cong \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

hvor vi ved Taylor-utviklingen har sløyfet høyere ordens ledd i  $\Delta x_j$ . Matrisene eller tensorene  $\dot{\mathcal{D}}$  og  $\mathcal{D}$  som er definert ved

$$\dot{\mathcal{D}} = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

og

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

kalles henholdsvis tensoren for de relative hastighetsforskjeller og tensoren for de relative forskyvningsforskjeller (tøyninger).

Som følge av hastighetsforskjellene i feltet kan et volumelement utsettes for

1. Ekspansjon eller kontraksjon uten formforandring  
(formtro volumendring)
2. Deformasjon uten volumforandring  
(volumtro formendring)
3. Rotasjon som stift legeme.

Ekspansjon/  
kontraksjon

Deformasjon uten  
volumendring

Rotasjon som  
stift legeme

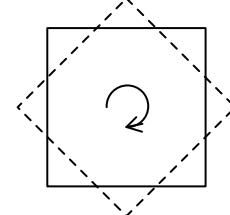
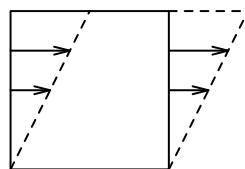
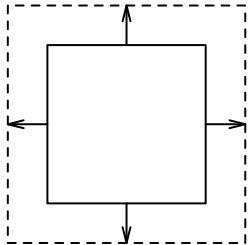


Fig. 6.2:

Tensoren  $\dot{\mathcal{D}}$  må beskrive alle disse deformasjonsformene og vi kan dele tensoren i tre deler

$$\dot{\mathcal{D}} = \dot{\mathcal{D}}_e + \dot{\mathcal{D}}_d + \dot{\mathcal{D}}_r \quad (6.3)$$

hvor  $\dot{\mathcal{D}}_e$ ,  $\dot{\mathcal{D}}_d$  og  $\dot{\mathcal{D}}_r$  henholdsvis står for ekspansjon, deformasjon uten volumendring og rotasjon som stift legeme.

Tensoren  $\dot{\mathcal{D}}_e$  kan vi finne enkelt. Hastighetsfeltet ved ren ekspansjon kan vi skrive

$$v_i = \alpha x_i$$

hvor  $x_i$  er den vektorielle avstanden fra punktet ekspansjonen foregår ut fra og  $\alpha$  er en konstant. Positiv  $\alpha$  betyr ekspansjon og negativ  $\alpha$  tilsvarer kontraksjon. Divergensen til dette feltet er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 3\alpha$$

Slik at hastighetsforskjellen regnet ut fra ekspansjonspunktet ved ren ekspansjon er:

$$\Delta v_i = \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \Delta x_i$$

Eller om vi vil

$$\Delta v_i = \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \delta_{ij} \Delta x_j$$

hvor  $\delta_{ij}$  er Kroneckers delta eller enhetsmatrisen. Derved kan vi identifisere tensoren  $\dot{\mathcal{D}}_e$  som

$$\dot{\mathcal{D}}_e = \left\{ \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \delta_{ij} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Hastighetsfeltet som tilsvarer ren rotasjon kan skrives

$$\Delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{x}$$

hvor  $\boldsymbol{\Omega}$  er vinkelhastighetsvektoren. Dette gir når vektorproduktet regnes ut

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{vmatrix} = \begin{aligned} (\Omega_y \Delta z - \Omega_z \Delta y) \mathbf{i} \\ (\Omega_z \Delta x - \Omega_x \Delta z) \mathbf{j} \\ (\Omega_x \Delta y - \Omega_y \Delta x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vi kan også uttrykke det samme ved matrise multiplikasjon

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}$$

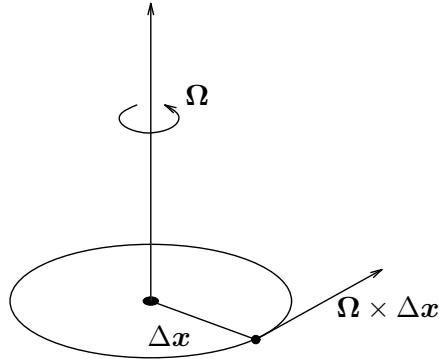


Fig. 6.3:

Slik at tensoren for ren rotasjon  $\mathcal{D}_r$  kan identifiseres som den antisymmetriske tensoren

$$\dot{\mathcal{D}}_r = \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Tensoren  $\dot{\mathcal{D}}$  kan deles i en symmetrisk og en antisymmetrisk del. Ved å addere og subtrahere får vi

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\}$$

Det første leddet representerer den symmetriske delen og det andre leddet den antisymmetriske delen. Etter hva vi har sett må den antisymmetriske delen tilsvare ren rotasjon og i ME 102 kompendiet ble dette leddet knyttet til virvlingen i feltet. Det symmetriske delen av  $\dot{\mathcal{D}}$  skal vi betegne

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.6)$$

og tensoren  $\{\dot{\epsilon}_{ij}\}$  tilsvarer altså hastighetsforskjellene for ekspansjon og deformasjon uten volumforandring. Vi har altså at

$$\dot{\mathcal{D}}_e + \dot{\mathcal{D}}_d = \{\dot{\epsilon}_{ij}\}$$

Derved kan vi finne tensoren for deformasjon uten volumforandring ved innsetting fra (6.4) og vi får

$$\dot{\mathcal{D}}_d = \{\dot{\epsilon}_{ij}\} - \left\{ \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \delta_{ij} \right\} \quad (6.7)$$

Tilsvarende betraktninger som vi nå har gjennomført for hastighetsfeltet kan gjøres for forskyvningsfeltet. Ved å dele tensoren  $\mathcal{D}$  på tilsvarende måte som er gjort i likning (6.3) får vi

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_e + \mathcal{D}_d + \mathcal{D}_r$$

hvor de tre delene igjen representerer de tre deformasjonsformene. Videre definerer vi en symmetrisk tensor ved

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.8)$$

og finner

$$\mathcal{D}_e + \mathcal{D}_d = \{\epsilon_{ij}\} \quad (6.9)$$

slik at

$$\mathcal{D}_d = \{\epsilon_{ij}\} - \left\{ \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{3} \delta_{ij} \right\} \quad (6.10)$$

Tensoren  $\{\epsilon_{ij}\}$  blir ofte kalt *tøyningstensoren*.

## 6.2 Eksempler

### 1. Strekning av elastisk stav

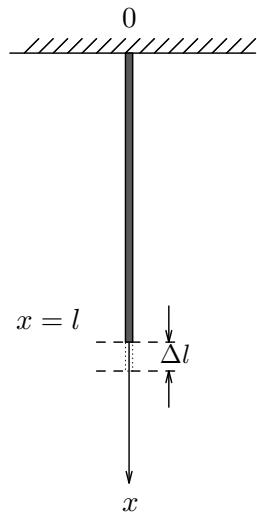


Fig. 6.4:

Vi legger  $x$ -aksen langs stavens lengdeakse med origo 0 i fastspenningspunktet. Stavens opprinnelige lengde er  $l$  og den strekkes  $\Delta l$ . Forrykningen i stavens lengderetning er da

$$u = \frac{\Delta l}{l} x$$

Dersom vi ser bort fra tverrkontrasjonen er forskyvningen i staven gitt ved forskyvningsvektoren

$$\{u_i\} = \{u, 0, 0\}$$

Tøyningstensoren blir

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta l}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

### 2. Skjærdeformasjoner

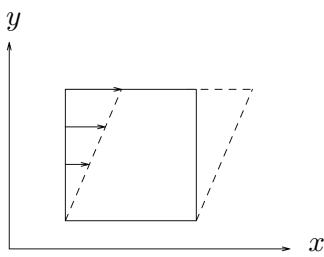


Fig. 6.5:

Forrykningen i  $x$ -retning ved deformasjonen vist på figuren er

$$u = \alpha y$$

hvor  $\alpha$  er en konstant. Forutsetter vi at det er ingen forskyvninger langs de to andre aksene slik at forskyvningsvektoren er

$$\{u_i\} = \{u, 0, 0\}$$

Tøyningstensoren blir i dette tilfellet

$$\epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Vi finner også at tensoren for ren ekspansjon  $\mathcal{D}_e = 0$  slik at vi i dette tilfellet har deformasjoner uten volumendring. Skjærdeformasjoner av denne art opptrer også ved skjærstrømmer i væsker. Hastighetsfeltet er da f.eks.

$$\{v_i\} = \{u, 0, 0\}$$

hvor  $u = \alpha y$  er strømkomponenten i  $x$ -retning. Tensoren for "hastighetsøyningene" i væsker blir altså

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Konstanten  $\alpha$  har i dette tilfellet dimensjon  $s^{-1}$ .

### 6.3 Øvingsoppgaver

1. Et forskyvningsfelt  $u_i$  har formen  $u_i = \alpha_{ij}x_j$  der  $\alpha_{ij}$  er konstanter. Hvor dan må  $\alpha_{ij}$  velges for at forskyvningene tilsvarer
  - a) Ren ekspansjon/kontraksjon?
  - b) Ren rotasjon?
  - c) Ren volumbevarende deformasjon?

(Svar: 1.  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$ . 2.  $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ . 3.  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  og  $\alpha_{ii} = 0$ ).
2. Vi betrakter et to-dimensjonalt forskyvningsfelt i  $x, y$  planet gitt ved

$$\mathbf{u} = ay\mathbf{i}$$

hvor  $\mathbf{i}$  er enhetsvektoren i  $x$ -retning og  $a$  er en konstant.

- a) Finn tøyningstensoren  $\epsilon_{ij}$  som svarer til dette forskyvningsfeltet.
- b) Bruk tilsvarende metode som ble brukt for spenningstensoren til å finne prinsipalretningene for tøyningstensoren og de tilhørende prinsipalverdiene (egenverdiene).
- c) Vis at et kvadrat med sidekanter  $L$ , med sentrum i origo og sidekantere orientert i prinsipalretningene deformeres til et rektangel. Vis også at den relative lengdeendringen av sidene er lik prinsipalverdiene funnet under (b). Vi forutsetter at  $a \ll 1$  slik at andre ordens ledd,  $a^2$ , kan sløyfes. (Eksamens ME 105, 1984)

3. a) Finn forskyvningsfeltet som svarer til konstant tøyningstensor.  
 b) Vis at dette forskyvningsfeltet kan skrives som

$$\mathbf{u} = \epsilon_{xx}x\mathbf{i} + \epsilon_{yy}y\mathbf{j} + \epsilon_{zz}z\mathbf{k} + \mathbf{S}$$

der  $\mathbf{S}$  representerer en stift legeme bevegelse:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{V} \times \mathbf{r}$$

$\mathbf{C}$  representerer translasjon mens  $\mathbf{V} \times \mathbf{r}$  representerer rotasjon. Rotasjonsvinkelen  $\mathbf{V}$  må være liten for at uttrykket for rotasjonen skal være gyldig. Hvordan bestemmes  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{C}$ ?

- c) Vis at forskyvningsfeltet over deformerer rette linjer til rette linjer.



## Kapittel 7

# Forbindelsen mellom spenninger og tøyninger/tøyningshastigheter. (Stress-strain relasjoner)

### 7.1 En-dimensjonale modeller

For at bevegelseslikningen skal kunne gi oss informasjoner om mediets bevegelse, må vi kjenne de fysikalske relasjonene mellom spenningstensoren og de tilstandsparametre som til enhver tid beskriver mediet. For mange stoffer er disse relasjonene svært kompliserte idet spenningene ikke bare avhenger av den øyeblikkelige tilstand, men også av de tidligere tilstander som mediet har gjennomgått. For enkelte stoff er i mange tilfelle spenningene kun avhengige av forskyvningsfeltet eller hastighetsfeltet samt temperatur og trykk. Dersom spenningene er avhengige av forskyvningsfeltet men uavhengig av hastighetsfeltet i.e. uavhengig av om forskyvningene foregår hurtig eller sakte sier vi at mediet er *elastisk*. I det motsatte tilfelle hvor spenningene er avhengig av hastighetsfeltet men uavhengig av forskyvningene betegner vi mediet som en *viskøs væske*. Mellom disse to idealiserte yttertilfellene finner man mange stoffer som danner de forskjelligste overgangsformer.

I utallige laboratorieforsøk er de elastiske egenskaper for faste stoffer blitt kartlagt ved at en prøvestav (streng) er blitt utsatt for en kraft  $F$  i prøvens lengderetning.

Stavens lengde  $l$  endres med en størrelse  $\Delta l$  som følge av belastningen og den relative forlengelsen (strain)

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

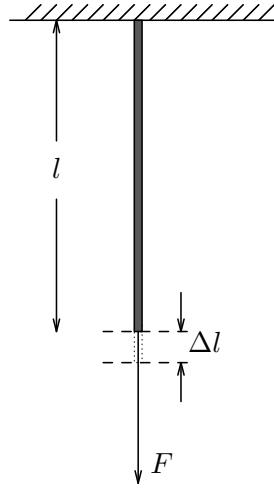


Fig. 7.1:

Spenningen (stress) i staven på en tverrsnittflate defineres ved

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

hvor  $q$  er tverrsnittsarealet av strengen. Vi ser foreløpig bort fra virknin- gen av tverrkontrasjonen og regner  $q$  som konstant. Måleresultatene av slike laboratorie-forsøk blir ofte fremstilt ved at spenningen,  $\sigma$ , blir plottet mot den relative forlengelsen,  $\epsilon$ . Eksempler som viser karakteristiske trekk ved slike plott er vist i figur 7.2.

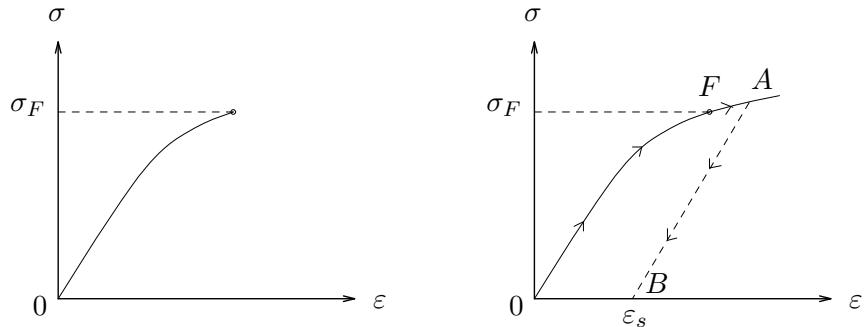


Fig. 7.2:

Det viser seg at for enkelte stoff så faller punkter med samhørende  $\sigma$ ,  $\epsilon$  verdier med god tilnærrelse langs en og samme kurve under av- og pålastning av prøven. Dette gjelder så lenge spenning ikke overskridet en viss verdi  $\sigma_F$  (figur 7.2a). Det eksisterer derfor en entydig relasjon mellom  $\sigma$  og  $\epsilon$

$$\sigma = f(\epsilon)$$

og vi sier materialet i prøven er *et perfekt elastisk* for spenninger  $\sigma < \sigma_F$ . En rekkeutvikling av denne funksjonen etter potenser av  $\epsilon$  gir selvsagt som første tilnærming at  $\sigma$  er en lineær funksjon av  $\epsilon$ .

$$\sigma = E\epsilon \quad (7.1)$$

hvor konstanten  $E$  betegnes som Youngs elastisitetsmodul. Youngs modul har samme dimensjon som  $\sigma$  og i SI-systemet er enheten  $N/m^2$  eller Pascal (Pa)  $1\text{Pa} = 1\text{ N/m}^2$ . Svært mange stoff (metaller, stein eller glass) følger en slik lineær lov opp til forholdsvis store spenninger. Vi kaller loven (7.1) *Hooke's lov* etter den engelske vitenskapsmannen Robert Hooke (1635–1703). Stoff som følger denne loven betegnes som lineært elastiske.

**Robert Hooke** (1635 – 1703) ble født på Isle of Wight i England og fikk utdannelse ved Oxford Universitetet. Vitenskapsmann med interesse også for å forbedre mekaniske innretninger. Han eksperimenterte blant annet med små vindmøller og propeller for å måle strømhastigheter i luft og vann. I dag er Hookes mest kjent for å ha studert elastiske krefter i fjærer og ha formulert den loven som nå bærer hans navn. I 1676 ble det i England publisert en avhandling som utmerket seg ved usedvanlig korthet og originalt innhold. Den vitenskapelige teksten bestod kun av anagrammet

ceiiinossstuv

Forfatterens navn var Hovde. To år etter ga Hooke tydningen av anagrammet. Det inneholdt bokstavene i den latinske setningen  
 ut tensio sic vis

Dette som i oversettelse betyr "som forlengelsen så og kraften" var Hookes formulering av loven som han oppdaget eksperimentelt allerede i 1660 og som han så altså først publisert under pseudonymet Hovde i 1676.

Hookes var også en av de første som foreslo at himmellegemer som sol og planeter tiltrekker hverandre med en kraft (gravitasjon). Etter samarbeid med astronomen Edmund Halley kom de fram til at denne kraften var omvendt proporsjonal med avstanden mellom klodene.

Tabell 1 gir Youngs modul for noen stoffer. (1 Giga Pa =  $10^9\text{ N/m}^2$ )

Tabell 1

Stoff	E Giga Pa
Stål	209
Kobber	123
Gummi	0.001
Granitt	46

Ved hjelp av loven (7.1) og tabellen kan vi nå beregne forlengelsen av et gummistrikk.

I et gummistrikk med lengde  $l = 0.5m$  og tverrsnitt  $q = 5 \cdot 10^{-2} cm^2$  henges det lodd med masse  $m = 0.1kg$ . Spenningen i strikken er

$$\sigma = \frac{mg}{q} = 2 \cdot 10^5 N/m^2$$

og forlengelsen av strikken beregnes fra (7.1)

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l = 10 \text{ cm}$$

For noen stoff finner man at kurvene i  $\sigma$ - og  $\epsilon$ -diagrammet blir forskjellige ved av og pålastning. Vi sier da at prøven viser *hysterese*.

Overskrides den kritiske spenningen,  $\sigma_F$ , så finner man alltid at avlastningskurven er forskjellig fra pålastningskurven og desuten at prøven etter avlastning har fått en permanent forlengelse. I figur 7.2b er  $OA$  pålastningskurve,  $AB$  avlastningskurven og  $\epsilon_s$  den permanente forlengelse. Vi sier at prøven er blitt *plastisk deformert* og at prøven er plastisk for spenninger som er større enn den kritiske spenningen  $\sigma_F$ . Denne kritiske spenningen kaller vi prøvens *flytespenning* eller *flytegrense*. I ingeniørkretser blir denne betegnet  $f_y$ . Når flyting inntrer så er det en liknende relasjon mellom spenning og deformasjonshastighetene som i en viskøs væske. Flytegrensen for et stoff kan være mer eller mindre veldefinert og er som regel sterkt temperaturavhengig.

For stål av vanlig handelskvalitet er  $f_y = 300 \text{ N/mm}^2 = 300 \text{ Mega Pa}$ . Dimensjonrende flytespenning ( $f_{yd}$ ) brukt ved styrkeberegninger av konstruksjoner reduseres med en sikkerhetsfaktor  $\gamma_m = 1.25 - 2.00$  slik at  $f_{yd} = f_y / \gamma_m$ .

Man betegner materialer som viser liten eller ingen plastiske deformasjoner for spenninger opp mot materialets bruddstyrke *sprøe materialer*. Eksempler på dette er glass og forskjellige steinarter. Materialer som blir plastisk deformert for spenninger over flytegrensen, betegnes som *duktile materialer* (kobber, aluminium). Forsøk viser at en prøvestav av et sprøtt materiale f.eks. en steinart kan bli duktil ved at prøvestavens sideflater utsettes for store trykk samtidig med at den belastes i lengderetningen. Dette resultatet har åpernbart store geologiske konsekvenser idet steinarter som er under store trykk derved kan deformeres plastisk.

Nå viser det seg imidlertid at under slike forsøk som her er nevnt, så vil tidsforløpet av belastningen ha innflytelse på deformasjonsforløpet. Studiet av tidseffekters virkning på deformasjonsforløpet kalles *rheologi*. For et stoff som ved en forsøksserie finnes å være lineært elastisk, vil man for eksempel kunne måle forskjellig verd til Youngs modul ettersom prøvestaven belastes hurtig eller sakte. Man kan dessuten finne at for stoffer som oppfører seg som et perfekt elastisk stoff når av- eller pålastning skjer relativt hurtig, så kan plastisk deformasjon eller flytning skje ved små spenninger dersom prøven belastes lenge nok. Slike fenomen er velkjent i geofysikken. Jorden er nesten perfekt elastisk for hurtige påvirkninger som f.eks. jordskjelvølger. Den deformeres imidlertid plastisk ved flytning under laster som har lang tidsvarighet. Nedbøyningen

av landmassene i Fennoscandia under den Pleistocene istid og de etterfølgende landhevninger etter at islasten forsvant er et eksempel på dette.

Flytning av den arten som her er nevnt innebærer at ingen stoff kan betraktes som helt faste. Imidlertid foregår flytning så sakte at man som oftest kan se bort fra den, unntatt ved belastninger av svært lang tidsvarighet. Flytningen er sterkt avhengig av temperaturen og den foregår langt hurtigere ved høye temperaturer enn ved lave. Av fysikalske grunner skiller man mellom denne formen for flytning som altså foregår for alle spenningspåvirkninger og den ordinære plastiske flytning hvor flytning finner sted for spenninger som overskridet en mer eller mindre veldefinert flytegrense. En kaller den type flytning som foregår uavhengig av den plastiske flytegrensen for *Nabaro-Herring flytning* etter vitenskapsmennene Nabaro og Herring som var de første til å gi en fysikalisk forklaring på fenomenet.

For oversiktens skyld kan det være hensiktsmessig å sette opp en liste som angir mulige stress-strain relasjoner for noen av de deformasjonsfenomen som vi her har diskutert. Vi vil foreløpig for enkelhets skyld bare betrakte endimensjonal spenning og deformasjon.

### i) Lineært elastisk stoff

Den matematiske modellen for dette tilfellet er gitt ved likning (7.1) (Hooke's lov).

### ii) Flytning (viskøs væske)

I dette tilfellet er spenningen kun avhengig av deformasjonshastigheten  $\dot{\epsilon}$  og kan uttrykkes ved en relasjon

$$\sigma = f(\dot{\epsilon}) \quad (7.2)$$

I mange tilfeller er relasjonen lineær og

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (7.3)$$

hvor  $\eta$  er viskositetskoeffisienten. Ved vanlig plastisk flytning under store spenninger eller høy temperatur gjelder vanligvis kompliserte relasjoner av formen (7.2) mens den enkle lineære relasjon (7.3) gjelder for Nabaro-Herring flytning. Den mest kjente loven for viskøs flytning er Newtons friskjonslov for en skjærstrøm hvor strømhastigheten  $u$  i  $x$ -retning varierer i retning normalt strømmen ( $y$ -aksen) skjærspenningen er da

$$P_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu \dot{\epsilon}_{yx}$$

Flytning i isbreer blir ofte beskrevet med Glens lov som kan uttrykkes

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{\frac{1}{3}}$$

### iii) Perfekt plastisk stoff

I dette tilfellet er stoffet lineært elastisk for spenninger mindre enn flytegrensen  $\sigma_F$ . For spenninger større enn  $\sigma_F$  følger deformasjonen lover av formen (7.2). Sammenfattet kan vi skrive dette

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon & \sigma < \sigma_F \\ \sigma &= \eta\dot{\epsilon} & \sigma \geq \sigma_F\end{aligned}$$

### iv) Firmoviskøs stoff (Kelvin Voigt modell)

Når et lineært elastisk stoff utsettes for en belastning så vil tidsforløpet for deformasjonen være lik tidsforløpet for belastningen. Anelastiske egenskaper ved noen stoffer fører til at tidsforløpet av deformasjonen er forskjellig fra tidsforløpet av belastningen. For noen stoffer finner man at når prøvestaven plutselig utsettes for en belastning så vil deformasjon asymptotisk nærme seg en stasjonær verdi. En sammenkopling av de lineære modellene i) og ii) kan være en brukbar modell i dette tilfellet. Den blir kalt Kelvin-Voigt modellen og forbindelsen mellom  $\sigma$  og  $\epsilon$  er

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (7.4)$$

hvor  $E$  og  $\eta$  er konstanter og  $\dot{\epsilon}$  er den tidsderiverte av  $\epsilon$ . Lar man ved tiden  $t=0$   $\epsilon$  være lik null og pålegger plutselig en spenning  $\sigma_0$  så vil  $\epsilon$  i den etterfølgende tid finnes ved å løse differensielllikning (7.4). Vi finner

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - e^{-\frac{Et}{\eta}} \right]$$

Vi ser at den relative forlengelsen nærmer seg asymptotisk til den stasjonære verdien  $\sigma_0/E$ . Etter en tid  $\tau=\eta/E$  avviker  $\epsilon$  36% fra den stasjonære verdien. Tidsparameteren  $\tau$  gir et mål for den tiden det tar før  $\epsilon$  er meget nær den stasjonære verdien. En kaller derfor  $\tau$  for *relaksasjonstiden* for firmoviskøse stoff.

### v) Maxwell-modellen

Denne modellen beskriver stoffer som er elastiske for hurtige påvirkninger men som flyter for langsom påvirkning. Bek og silikonkitt er eksempler på stoffer med slike rheologiske egenskaper. Relasjonen mellom  $\sigma$  og  $\epsilon$  er

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (7.5)$$

hvor som før  $E$  og  $\eta$  er konstanter. Likning (7.5) viser at man for Maxwells modell har summert deformasjonene for en lineær viskøs modell og en lineær elastisk modell. Oppfatter vi  $\epsilon=\epsilon(t)$  som en kjent funksjon av tiden så er (7.5) en differensielllikningen for  $\sigma$  som har følgende løsning når  $\sigma=\sigma_0$  for  $t=0$

$$\sigma = E \int_0^t \dot{\epsilon}(s) e^{\frac{s-t}{\tau}} ds + \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.6)$$

hvor tidsparameteren  $\tau = \eta/E$ . For  $t \ll \tau$  så er  $e^{(s-t)/\tau} \approx 1$  og  $e^{-t/\tau} \approx 1$ . Med disse tilnærrelser finner man fra (7.6) at

$$\sigma - \sigma_0 = E(\epsilon - \epsilon_0)$$

hvor  $\epsilon_0$  er verdien av  $\epsilon$  ved  $t=0$ . Av denne likningen ser vi at for påvirkninger av varighet meget mindre enn  $\tau$  så følger mediet en lineær elastisk lov.

I det andre grensetilfellet hvor  $t \gg \tau$  omskriver vi (7.6) og setter

$$\sigma = E \int_0^t I_1(s) I_2(s) ds + E \int_0^t \dot{\epsilon}(t) e^{\frac{s-t}{\tau}} ds + \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.7)$$

hvor  $I_1(s) = \dot{\epsilon}(s) - \dot{\epsilon}(t)$  og  $I_2(s) = e^{\frac{s-t}{\tau}}$ . For  $t \gg \tau$  forløper funksjonene  $I_1(s)$  og  $I_2(s)$  som antydet i figur 7.3.

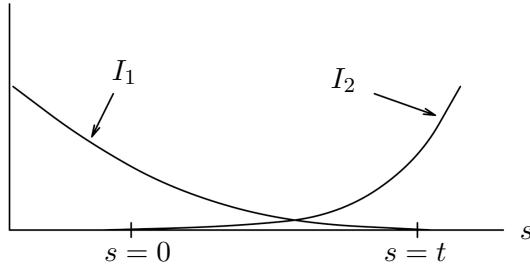


Fig. 7.3:

Det vesentligste bidraget til  $\sigma$  er derfor det andre ledet på høyre side av likning (7.7) og etter integrasjon får vi at

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$

Dette viser at for påvirkninger av varighet meget større enn  $\tau$  så følger mediet en lineær viskøs lov.

## 7.2 Generell form av stress-strain relasjoner for et deformerbart medium

I analogi med hva vi fant i det en-dimensjonale tilfellet venter vi at for deformerbare medium vil spenningen i alminnelighet avhenge av tensorkomponentene  $\epsilon_{kl}$  og  $\dot{\epsilon}_{mn}$ . Dette kan vi skrive ved funksjonssammenhengen

$$P_{ij} = P_{ij}(\epsilon_{kl}, \dot{\epsilon}_{mn}) \quad (7.8)$$

hvor  $k, l, m$  og  $n$  har verdiene 1, 2, 3. For deformerbare faste stoffer og fluider med komplekse egenskaper kan disse relasjonene være svært innviklet og de

kan også avhenge av ytre forhold såsom temperatur, trykk og de påvirkninger mediet har vært utsatt for ved tidligere belastninger.

I dette kurset skal vi bare behandle to relativt enkle modeller som med god tilnærming beskriver forholdene i elastiske stoff ved små forskyvninger og i en stor klasse av viskøse fluider deriblant vann og luft.

### 7.3 Lineært elastisk stoff. Hookes lov generalisert til tre dimensjoner. Isotropt elastisk stoff.

I et lineært elastisk stoff antas spenningskomponentene å være lineære funksjoner av tøyningstensorens komponenter. Dette kan skrives

$$P_{ij} = K_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (7.9)$$

hvor koeffisientene  $K_{ijkl}$  er konstanter. For bedre å få et inntrykk av strukturen i denne tensor-likningen skriver vi ut likningene for tre av komponentene

$$P_{11} = K_{1111}\epsilon_{11} + K_{1122}\epsilon_{22} + K_{1133}\epsilon_{33} + K_{1112}\epsilon_{12} + K_{1113}\epsilon_{13} + K_{1123}\epsilon_{23}$$

$$P_{22} = K_{2211}\epsilon_{11} + K_{2222}\epsilon_{22} + K_{2233}\epsilon_{33} + K_{2212}\epsilon_{12} + K_{2213}\epsilon_{13} + K_{2223}\epsilon_{23}$$

$$P_{33} = K_{3311}\epsilon_{11} + K_{3322}\epsilon_{22} + K_{3333}\epsilon_{33} + K_{3312}\epsilon_{12} + K_{3313}\epsilon_{13} + K_{3323}\epsilon_{23}$$

Her har vi benyttet at  $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$  og samlet disse leddene under en felles konstant  $K_{1112}$ . På tilsvarende måte har vi samlet leddene inneholder  $\epsilon_{13}$  og  $\epsilon_{31}$  og leddene  $\epsilon_{23}$  og  $\epsilon_{32}$ .

På tilsvarende måte kan likningene for spenningskomponentene  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  og  $P_{23}$  skrives ut. Dette viser at tensor (7.9) inneholder i alt 36 konstanter. Nå kan det vises at koeffisienttensoren  $K_{ijkl}$  har følgende symmetriegenskaper

$$K_{ijkl} = K_{klij}$$

Derved reduseres antallet uavhengige konstanter til 21. Vi skal i avsnitt (11.5) komme tilbake til beviset for denne påstanden. I et isotropt elastisk stoff hvor forholdene omkring et punkt i mediet er like i alle retninger omkring punktet vil antall konstanter reduseres ytterligere til 2. Vi skal gi en delvis begrunnelse for dette. På grunn av retningsuavhengigheten må

$$K_{1111} = K_{2222} = K_{3333} \quad (7.10)$$

For å se dette antar vi at tøyningen  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ . Det må det gi opphav til like store bidrag til spenningskomponenter  $P_{11}$ ,  $P_{22}$  og  $P_{33}$  i de tre akserettingene. Av tilsvarende grunner må vi ha at

$$K_{1122} = K_{1133} = K_{2211} = K_{2233} = K_{3311} = K_{3322} \quad (7.11)$$

Ved å utnytte isotropi egenskapen kan man finne flere relasjoner mellom koeffisientene i (7.9) og (7.11). Det kan derfor føres fullstendig bevis for at for et isotropt elastisk stoff er det bare to uavhengige koeffisienter i relasjonen (7.9). Med de forenklinger som dette innebærer kan vi skrive (7.9) på følgende form

$$P_{ij} = \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \left( \epsilon_{ij} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{3} \delta_{ij} \right) \quad (7.12)$$

hvor  $\kappa$  og  $\mu$  er elastisitetskoeffisientene henholdsvis for ren ekspansjon eller kontraksjon (formtro volumendring) og deformasjoner uten volumendring (volumtro formendring).

Koeffisientene  $\kappa$  og  $\mu$  er stoffkonstanter som kan være avhengig av temperaturen og andre fysiske parametere. For disse koeffisientene benyttes henholdsvis betegnelsen bulk modulus og stivhetsmodulus. I SI-systemet har koeffisientene enheten Pascal =  $N/m^2$ .

En alternativ form av (7.12) er mye brukt. Den fås ved å innføre en elastisitetskoeffisient

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$$

Dette gir

$$P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (7.13)$$

Koeffisientene  $\lambda$  og  $\mu$  betegnes Lamé's elastisitetsparametere og disse brukes mye i litteraturen innen seismologi og seismiskprospektering.

Relasjonene (7.12) eller (7.13) mellom spenninger og tøyninger gjelder for isotrope og lineært elastiske stoffer. De representerer den generaliserte *Hooke's law* i tre-dimensjoner og denne loven viser seg å være gyldig med god tilnærming så lenge forskyvningene er tilstrekkelig små. Loven har et stort anvendelsesområde og den danner blant annet grunnlaget for spenningsberegninger av konstruksjoner og for beregninger av bølgeforplantning i mange geologiske materialer.

En vesentlig forutsetning for å komme fram til (7.12) eller (7.13) er betingelsen om isotropi. I mange anvendelser kan man imidlertid få med anisotrope stoff å gjøre. Dette kan f.eks. være sedimentlag med utpreget lagstruktur, laminater og forskjellige krystallinske stoffer. Dersom avviket fra isotropi er betydelig kan man i slike tilfelle være nødt til å ta i bruk flere elastisitetskoeffisienter enn de to som må til for å beskrive et isotropt stoff. Se avsnitt 11.5.

## 7.4 Newtonske fluider

I Newtonske fluider er de viskøse spenningene lineære funksjoner av tøynings-hastighetstensorens komponenter  $\dot{\epsilon}_{mn}$ . Videre forutsettes det at de viskøse egenskaper i fluidet er retningsuavhengig. Siden vi tenker oss at transport av bevegelsesmengde ved molekylenes bevegelser (Brownske bevegelser) er den primære årsak til de viskøse spenningene er det rimelig å forvente retnings-uavhengighet for fluider med kuleformede molekyler med svakt utviklete krystallstrukturer. I så fall vil det i analogi med tilfellet for isotrope elastiske stoff kreves 2 uavhengige koeffisienter i relasjonen mellom  $P_{ij}$  og  $\dot{\epsilon}_{mn}$ . Tar vi også hensyn til at det i et fluid er et isotropt trykk,  $p$ , kan relasjonen skrives

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \kappa\nabla \cdot \mathbf{v}\delta_{ij} + 2\mu \left( \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3}\delta_{ij} \right) \quad (7.14)$$

Koeffisientene  $\kappa$  og  $\mu$  er viskositetskoeffisientene henholdsvis for ren ekspansjon og for deformasjon uten volumendringer. Enheten i SI-systemet for  $\kappa$  og  $\mu$  er Pascal  $\times$  sekund.

For et inkompressibel fluid er  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  og (7.14) forenkler seg til

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (7.15)$$

Inkompressive Newtonske fluider er altså karakterisert ved kun en viskositetskoeffisient.

For skjærstrøm i  $x, y$  planet med hastighetsfelt  $\mathbf{v} = \{u(y), 0, 0\}$  får vi fra (7.15)  $P_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$  som viser at skjærspenningen er proporsjonal med hastighetsgradienten. Relasjonen (7.15) er derfor en tre-dimensjonal generalisering av Newton's friksjonslov. (Se avsnitt 10.1 i Me 102 kompendiet.) Slik sett har (7.15) sitt opphav i en empirisk lov på tilsvarende måte som Hooke's lov for et elastisk medium.

Vanlige fluider som vann, sjø og luft følger Newton's friksjonslov med meget god tilnærmelse. I moderne industri fremstilles og brukes imidlertid mange væsker som ikke følger Newton's friksjonslov. Plast-smelte, polymerer og enkelte malinger er eksempel på slike ikke-Newtoniske væsker.

**Isaac Newton** (1642–1727) ble født i Woolsthorpe, England og studerte ved Trinity College, Cambridge. En av tidenes aller største naturvitenskapsmenn og matematiker. Allerede i ung alder beviste han binomialformelen og unnfant ideen om en gjensidig gravitasjonstiltrekning mellom jorden og månen. Samtidig med og uavhengig av den tyske matematikeren Leibnitz oppdaget og utformet Newton differensial og integralregningen, det vi nå kaller calculus. Newton er mest kjent for å ha formulert de tre grunnlovene i mekanikk som idag går under navnene Newtons første, andre og tredje lov. Ved å utnytte disse lovene, sammen med gravitasjonsloven som Hooke og Halley allerede hadde postulert, kom Newton fram til et komplett sett av likninger for å beskrive planetbevegelser. Newton bygget også teleskoper og kom fram til partikkleteorien for lys. Han utførte teoretiske studier og forsøk i hydrodynamikk, blant annet studerte han demping av pendel i væsker og strøm gjennom trange åpninger. Hedret allerede i samtiden som en stor vitenskapsmann, men beskjedent sa han: "Dersom jeg har sett lengere enn andre var det fordi jeg sto på skuldrene til giganter". I 1669 ble Newton Lucasian professor of Mathematics ved Universitetet i Cambridge, et prestisjetungt professorat som eksisterer den dag i dag.

## Kapittel 8

# Bevegelseslikningene på utviklet form

I kapittel 4 har vi tidligere utledet bevegelseslikningen i primitiv form (likning 4.1). Vi kan nå føre inn uttrykkene for spenningen i isotrope elastiske stoffer og Newtonske fluider gitt henholdsvis ved likningene (7.12) og (7.14) og finne et sett av komponentlikninger for forskyvningen eller hastigheten.

### 8.1 Bevegelseslikningen for isotropt lineær elastisk stoff

Vi benytter relasjonen (7.13) og beregner størrelsen

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

som inngår i bevegelseslikningen. Vi får da

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu \epsilon_{ij}) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\end{aligned}$$

Vi har her forutsatt at  $\lambda$  og  $\mu$  er konstanter uavhengig av romkoordinatene og vi har benyttet at divergensen til vektoren  $\mathbf{u}$  kan skrives  $\partial u_j / \partial x_j$  ved indeksnotasjon. Forutsetter vi at forskyvningene er små så har vi tidligere vist i avsnitt 5 likning (5.5) at akselerasjonen er

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Bevegelseslikningen får følgelig formen:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^v \quad (8.1)$$

hvor  $f_i^v$  betegner volumkrefter (pr. masseenhett). Innfører vi de vanlige vektorsymbolene

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \quad (\text{gradient til skalaren } \beta) \\ \nabla^2 \mathbf{u} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{Laplaciske til vektoren } \mathbf{u} = \{u_i\}) \end{aligned}$$

kan (8.1) skrives med vektorsymboler

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}^v \quad (8.2)$$

Vektorlikningen (8.1) eller (8.2) gir tre skalarlikninger for bestemmelse av de tre forskyvningskomponentene  $u_i$ .

## 8.2 Bevegelseslikningen for Newtonske fluider

Ved strømning i fluider vil forskyvningene ikke nødvendigvis være små og akcelerasjonen gitt ved hastighetsfeltet etter den generelle formelen

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{D v_i}{dt}$$

Vi benytter nå relasjonen (7.14) og beregner størrelsen

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

som inngår i bevegelseslikningen. Dette gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij}) + \kappa \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon_{ij} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \delta_{ij} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\kappa - \frac{2}{3}\mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\kappa + \frac{\mu}{3}) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned}$$

Derved kan bevegelseslikningen for Newtonske fluider skrives

$$\frac{D v_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\kappa + \frac{\mu}{3}) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^v \quad (8.3)$$

og denne likningen kalles vanligvis Navier Stokes likning.

For inkompressible fluider hvor  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  forenkler likningen seg til

$$\frac{Dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^v \quad (8.4)$$

Bruker man vanlige vektorsymboler kan (8.4) skrives

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}^v \quad (8.5)$$

Vektorlikningen (8.5) gir tre skalarlikninger til bestemmelse av de tre hastighetskomponentene  $v_i$ .

Bevegelseslikningen for en inkompressibel viskøs væske ble tidligere utledet på en mer intuitiv måte i kurset ME 102 (se Gjevik, 1994).

**Louis Marie Henri Navier** (1785–1836) kom fra Dijon i Sør-Frankrike og var utdannet ingeniør. Arbeidet spesielt med brokonstruksjoner og konstruerte bl.a. en hengebru over Seine i Paris. Underviste i mekanikk ved Ecole Polytechnique og Ecole des Ponts et Chaussés samtidig som drev med praktisk ingeniørarbeid og skrev avhandlinger innen mekanikk. Formulerte likningen for viskøs væskestrøm ved å ta hensyn til hypotetisk tiltrekningende frastøtende kraft mellom molekylene og anta at denne kraften avhenger av hastighetsforskjellen og avstanden mellom molekylene.

**Sir George Gabriel Stokes** (1819–1903) kom fra Skreen, Irland, fikk sin utdannelse ved Cambridge og ble værende i England hvor han bidro stort til landets ry innen teoretisk fysikk. Var innehaver av Lucasian professoratet i Cambridge, Isak Newton's gamle stilling. I et arbeide fra 1845 utledet han Navier-Stokes likningen på liknende måte som det gjøres i dag og innførte den dynamiske viskositetskoeffisienten. Skrev også mange vitenskapelige arbeider om bølgebevegelser i væsker og en bestemt ikke-lineær bølgeform, som har fått navnet Stokes-bølge.

### 8.3 Grenseflatebetingelser og initialbetingelser

Dersom resultaten av de ytre volumkraftene  $f_i^v$  er gitt kan vi i prinsipp tenke oss å løse vektorlikningene (8.2) eller (8.5) og finne forskyvningsfeltet eller hastighetsfeltet henholdsvis for elastiske stoff og Newtonske fluider. Likningene er partielle differensielllikninger og løsningene vil inneholde ubestemte konstanter eller funksjoner. Disse må bestemmes på vanlig måte ved grenseflatebetingelser og initialbetingelser. Grenseflatebetingelsene angir betingelser som må legges på spenninger, forskyvninger eller hastigheter ved mediets begrensninger i rommet. Initialbetingelsene angir startbetingelsene for deformasjonene eller strømmen ved et gitt tidspunkt f.eks.  $t=0$ .

Grenseflatebetingelser må vanligvis benyttes ved overflaten i en væske, ved skilleflater mellom ikke-blandbare væsker eller deformerbare stoffer og der hvor

væsker eller gasser grenser inn til faste eller deformerbare veggger. Slike flater kan vi beskrive ved en funksjonssammenheng

$$z = \eta(x, y, t) \quad (8.6)$$

hvor  $\eta$  angir avstanden til  $x, y$  planet fra ethvert punkt på flaten. Enhetsvektoren normalt til flaten kan uttrykkes

$$\mathbf{n} = \left\{ -\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1 \right\} \Big/ \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

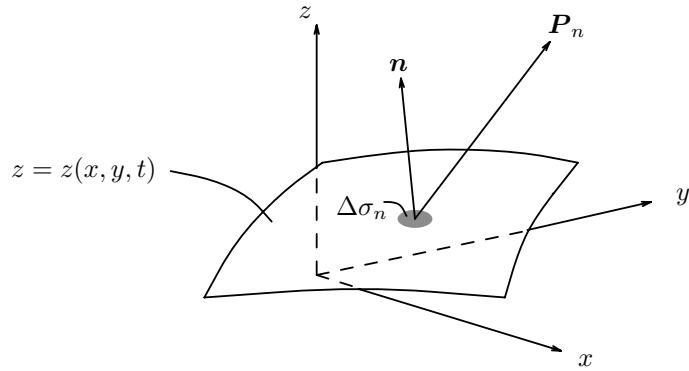


Fig. 8.1:

Spenningen på flaten er

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}$$

hvor  $\mathcal{P}$  er spenningstensoren. Derved at normalspenningen og skjærspenningen gitt ved henholdsvis

$$P_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_n = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}$$

og

$$\mathbf{P}_{nt} = \mathbf{n} \times \mathbf{P}_n$$

Skjærspenningens størrelse er

$$P_{nt} = |\mathbf{n} \times \mathbf{P}_n|$$

Vi skal nå se på noen ofte forekommende former for grenseflatebetingelsene

**a) Fri overflate:**

En fri overflate er for eksempel grenseflaten mellom vann og luft eller mellom et elastisk stoff og luft. På grunn av den store forskjellen i tetthet vil bevegelser i vannet eller i det elastiske stoffet vil den energisvake bevegelsen som

introduseres i luften ikke ha nevneverdig innflytelse på bevegelsen i de tunge mediene. Partikler i overflaten vil følgelig fritt kunne bevege seg langs flaten påvirket av lufttrykket. De dynamiske grenseflatebetingelsene ved en ideell fri overflate kan derfor skrives

$$P_{nt} = 0 \quad (8.7)$$

og

$$P_{nn} = -p_0 \quad (8.8)$$

hvor  $p_0$  er trykket i luften som regnes å være konstant upåvirket av bevegelsen i det tilgrensende mediet. I tillegg til de dynamiske grenseflatebetingelsene har vi den kinematiske betingelsen som ved en fri overflate kan skrives

$$\frac{D\eta}{dt} = w \quad (8.9)$$

hvor  $w$  er hastighetskomponenten i  $z$ -retning. Denne betingelse ble utledet i ME 102-boken (se Gjevik 1993).

### b) Faste veger:

Ved faste veger har man vanligvis ikke noen dynamiske betingelser og spenningen ved veggen kan først bestemmes når den matematiske løsningen er funnet. Imidlertid vil man ha kinematiske betingelser. Målinger viser at ved vanlig trykk og temperatur så vil en væske eller gass som strømmer langs en fast vegg hefte til veggen slik at hastigheten

$$\mathbf{v} = 0 \quad (8.10)$$

ved veggen. For elastiske stoff som er spent fast vil en måtte ha at forskyvningen

$$\mathbf{u} = 0 \quad (8.11)$$

ved fastspenningsflaten. Siden de fleste stoff er mer eller mindre deformerbare er det vanskelig å få en ideell fastspenning og (8.11) vil ofte bare være av tilnærmet gyldighet.

### c) Skilleflate mellom to medier

I skilleflatene tenker vi oss å merke en rett sylinder med grunnflate  $\Delta\sigma_n$  og høyde  $\Delta h$  slik som antydet på figur 8.2.

Toppflaten av sylinderen ligger i mediet I og bunnflaten i mediet II. Spenningen på topp- og bunnflaten er henholdsvis

$$\mathbf{P}_n^I = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \quad (8.12)$$

og

$$\mathbf{P}_n^{II} = -\mathbf{n} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{II}} \quad (8.13)$$

hvor  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$  og  $\mathcal{P}_{\mathcal{II}}$  er de respektive spenningstensorene i mediene. Siden høyden i sylinderen er meget liten kan vi se bort fra spenningene på sideflatene og den totale spenningskraften skyldes bidraget fra endeflatene som kan skrives

$$(\mathbf{P}_n^I + \mathbf{P}_n^{II}) \Delta\sigma_n$$

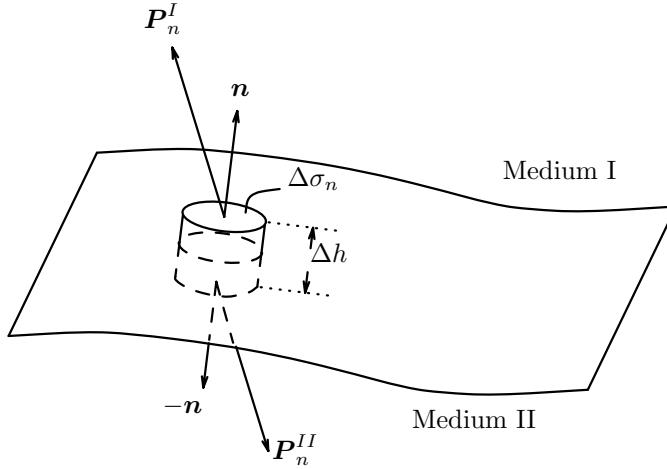


Fig. 8.2:

Akselerasjonen som sylinderen får er

$$\frac{(\mathbf{P}_n^I + \mathbf{P}_n^{II}) \Delta\sigma_n}{\bar{\rho} \Delta\sigma_n \Delta h}$$

hvor  $\bar{\rho}$  er den midlere tetthet. Skal akselerasjonen holde seg endelig når  $\Delta h \rightarrow 0$  må vi ha at

$$\mathbf{P}_n^I + \mathbf{P}_n^{II} = 0$$

Dersom vi i denne likningen setter inn uttrykkene (8.12) og (8.13) får vi

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{II}} \quad (8.14)$$

Dette viser at spenningen er kontinuerlig ved skilleflaten. Den relasjonen betegner den dynamiske grenseflatebetingelsen ved en skilleflate mellom to medier.

Vanligvis vil vi ha fullstendig heft mellom de to mediene slik at det ikke er relativ bevegelse mellom partiklene på hver side av skilleflaten. Dette kan uttrykkes ved at hastigheten

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_{II} \quad (8.15)$$

dersom mediene er væsker eller gasser, og ved at forskyvningen

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_{II} \quad (8.16)$$

dersom mediene er elastiske stoffer. Likningene (8.15) og (8.16) er forskjellige former av den kinematiske grenseflatebetingelsen.

# Kapittel 9

## Eksplisitte løsninger av bevegelseslikningene/like- vektslikningene for elastiske stoff

### 9.1 Spenningsfordelingen i tyngdefeltet

I avsnitt (4.2) studerte vi spenningsfordeling i et elastisk lag i tyngdefeltet og vi bestemte den vertikale spenningskomponenten

$$P_{zz} = -p_0 + \rho g z \quad (9.1)$$

hvor  $p_0$  er lufttrykket over mediet og  $\rho$  er tettheten,  $g$  er tygdens akselerasjon og  $z$  er den vertikale koordinaten som regnes negativ nedover i dypet.

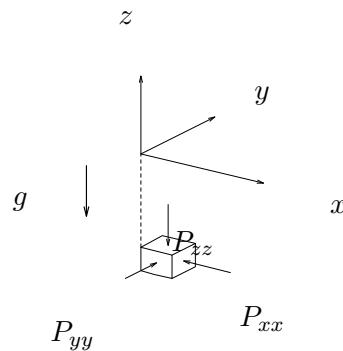


Fig. 9.1:

Vi skal nå også bestemme de øvrige spenningskomponentene. Forskyvningene i mediet på grunn av sammenpressingen i tyngdefeltet er rettet i  $z$ -retning slik at forskyvningsvektoren er

$$\mathbf{u} = \{0, 0, u_z(z)\}$$

Tøyningstensoren  $\epsilon_{ij}$  har følgelig komponenter

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

og divergensen til forskyvningsfeltet er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Fra Hookes lov i formen (7.13) får vi derfor

$$P_{xx} = P_{yy} = \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (9.2)$$

og

$$P_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (9.3)$$

mens de øvrige spenningskomponentene  $P_{xy} = P_{yz} = P_{xz} = 0$ . Fra (9.2) og (9.3) følger at

$$P_{xx} = P_{yy} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{zz}$$

hvor  $P_{zz}$  er bestemt ved (9.1). Dette viser at normalspenningen i horisontalretning er mindre enn normalspenningen i vertikalretning. Spenningsfordelingen er altså ikke isotrop slik som ved likevekt i væsker. I geologiske materialer granitt, kalkstein osv. er  $\lambda \simeq \mu$  og

$$P_{xx} = P_{yy} = \frac{1}{3} P_{zz}$$

For mange vil det virke unaturlig at det bare er forskyvninger i  $z$ -retning. Dette bunner i at en uvilkårlig forestiller seg et elastisk lag av endelig utstrekning i horisontalplanet. Når laget presses sammen i høyden vil den horisontale utstrekningen av laget øke noe. Laget som behandles her er imidlertid tvunget til å beholde den horisontale utstrekningen. Det vil for eksempel være en god modell for en del ytre lag av en homogen kulesymmetrisk klode som presses sammen av gravitasjonen.

## 9.2 Aksial tøyning av sylinderisk stav

Vi belaster en sylinderisk stav som er fastspent i den ene enden med en kraft  $F$  som gir opphav til en spenning på endeflaten  $P = F/q$  hvor  $q$  er tverrsnittsarealet av staven. Tverrsnittsarealet vil som følge av tøyning endre seg litt. Egentlig burde vi derfor finne tverrkontraksjonen på grunn av tøyningen før vi kan beregne spenningen på endeflaten. Imidlertid er endringene i  $q$  vanligvis svært små og vi kan ved spenningsberegningen med god tilnærming sette  $q = q_0$  som er tverrsnittsarealet før staven ble belastet.

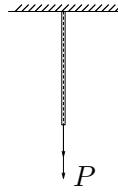
$S$ 

Fig. 9.2:

Vi legger  $x$ -aksen i stavens lengderetning med origo i fastspenningspunktet  $S$  og de øvrige koordinataksene  $y$  og  $z$  er på vanlig måte rettet normalt  $x$ -aksen. Nå venter vi utfra enkle likevektsbetraktninger for et element av staven at spenningskomponenten

$$P_{xx} = P$$

Siden alle de øvrige spenningskomponentene

$$P_{yy} = P_{zz} = P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$$

på sideflaten av staven må vi forvente at disse komponentene også er tilnærmet null inne i staven bortsett fra nær endene hvor spenningstilstanden kan være svært komplisert. For en lang tynn stav kan vi derfor regne med en enkel spenningstilstand som beskrevet her. Forskyvningen i staven kan vi skrive

$$\mathbf{u} = \{u_x(x), u_y(y), u_z(z)\}$$

hvor komponentene  $u_x$ ,  $u_y$  og  $u_z$  er funksjoner henholdsvis av  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Etter hva vil tidligere har sett er det rimelig å forvente at forskyvningene er lineære funksjoner og at det er ingen forskjell på tøyningene i  $y$ - og  $z$ -retning. Følgelig kan vi skrive

$$\begin{aligned} u_x(x) &= \epsilon x \\ u_y(y) &= \gamma y \\ u_z(z) &= \gamma z \end{aligned}$$

hvor  $\epsilon$  og  $\gamma$  er konstanter som henholdsvis er forlengelsen pr. lengdeenhet i  $x$ -retning og tverrkontraksjonen pr. lengdeenhet. For dette forrykningsfeltet har vi at divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \epsilon + 2\gamma$$

Tøyningstensoren  $\epsilon_{ij}$  har tre komponenter som er forskjellige fra null, nemlig:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{zz} = \gamma \end{aligned}$$

og de øvrige tre komponentene er lik null. Fra Hookes lov (7.12) får vi

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \lambda(\epsilon + 2\gamma) + 2\mu\epsilon \\ P_{yy} &= P_{zz} = \lambda(\epsilon + 2\gamma) + 2\mu\gamma \end{aligned} \quad (9.4)$$

og

$$P_{xy} = P_{yz} = P_{zx} = 0$$

som forventet. Skal spenningskomponentene  $P_{yy}$  og  $P_{zz}$  være null må

$$\lambda(\epsilon + 2\gamma) + 2\mu\gamma = 0$$

Som gir

$$\gamma = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \epsilon \quad (9.5)$$

Dette viser at ved strekning av staven ( $\epsilon > 0$ ) er det en minskning av tverrsnittet og  $\gamma < 0$ . Faktoren

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

angir forholdet mellom tverrskontraksjonen og lengdetøyningen og kalles *Poissons forhold*. Poissons forhold er alltid en positiv størrelse og det kan vises at  $0 < \nu < 0.5$ . Ved å sette inn uttrykket (9.5) for  $\nu$  i (9.4) får vi

$$P_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \epsilon \quad (9.6)$$

Faktoren foran  $\epsilon$  i denne likningen er Youngs modul og vi har tidligere betegnet denne med  $E$ . (9.6) viser at Youngs modul kan uttrykkes ved elastisitetskoeffisientene  $\lambda, \mu$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (9.7)$$

Fra likningene (9.5) og (9.7) kan en også finne  $\lambda$  og  $\mu$  uttrykket ved  $E$  og  $\nu$ . Youngs modul og Poissons forhold kan følgelig erstattes Lamées konstanter. I jordskorpa (lithosfæren) er typiske verdier for elastisitetskoeffisientene  $E = 100$  Giga Pa,  $\lambda \cong \mu = 40$  Giga Pa,  $\nu = 0.25$  og tetthet  $\rho = 3000$  kg/m<sup>3</sup>.

**Simeon Denis Poisson** (1781–1840). Fransk matematiker med bakgrunn i medisin. Hans hovedinteresse var mekanikk, elastisitets-teori, varmelære og lydforplantning.

### 9.3 Bølgeutbredelse i elastiske media: Plane longitudinale- og transversalebølger

Ved hjelp av bevegelseslikningen (8.2) skal vi nå vise at bølger kan forplanter seg gjennom elastiske media. Det viser seg å være to hovedtyper som hver har sine karakteristiske egenskaper.

### Plane longitudinale bølger:

Forskyvningsfeltet for denne bølgetypen består av en serie fortetninger og fortynninger som forplanter seg gjennom mediet. Dersom forskyvningene er rettet langs  $x$ -aksen kan vi skrive forskyvningsvektoren

$$\mathbf{u} = \{u_x(x, t), 0, 0\} \quad (9.8)$$

hvor

$$\rightarrow \longrightarrow u_x(x, t) = u_0 \sin k(x - ct) \longrightarrow \quad (9.9)$$

Bølgen har amplitude  $u_0$ , bølgetaall  $k$  og den forplanter seg i  $x$ -retning med fasehastighet  $c$ . Bølgelengden  $L$  og bølgeperioden  $T$  er gitt ved relasjonene

$$\begin{aligned} \rightarrow \longrightarrow & \quad \leftarrow \leftarrow \quad \rightarrow \longrightarrow \\ L &= 2\pi/k \\ T &= L/c \end{aligned} \quad (9.10)$$

Et øyeblikksbilde av forskyvningsfeltet ved  $t=0$  er skissert på figur 25.

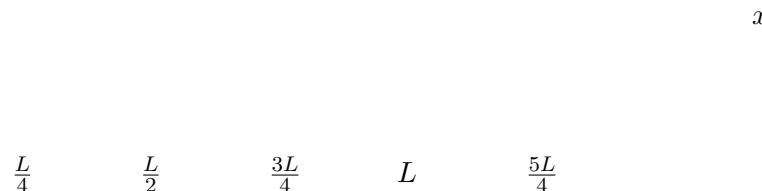


Fig. 9.3:

Med forskyvningsfeltet (9.8) reduseres bevegelseslikningen (8.2) til

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (9.11)$$

hvor vi har sett bort fra eventuelle ytre krefter ( $\mathbf{f}^y = 0$ ). Ved innsetning ser vi at forskyvningsfeltet (9.9) er en løsning av (9.11) dersom

$$c = c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (9.12)$$

Dette viser at longitudinale bølger forplanter seg med fasehastighet  $c_L$ . Den avhenger bare av elastisitetsparametrene og tettheten i mediet. Longitudinale bølger er av tilsvarende natur som lydbølger i luft og vann (se ME 102 kompendiet) og lydforplantning i elastiske stoff skjer ved longitudinal bølgene. Differensielllikninger av typen (9.11) som altså har løsninger som beskriver bølger blir betegnet bølgelikningen.

## Plane transversale bølger:

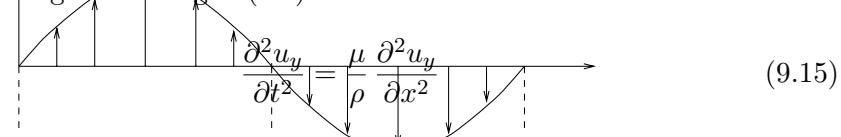
Forskyvningsfeltet for denne bølgetypen er karakterisert ved at forrykningene er rettet vinkelrett på forplantningsretningen. La vi bølgene forplante seg i  $x$ -retning mens forskyvningene er rettet i  $y$ -retning kan vi skrive forskyvningsvektoren

$$\mathbf{u} = \{0, u_y(x, t), 0\} \quad (9.13)$$

hvor

$$u_y = u_0 \sin k(x - ct) \quad (9.14)$$

Bølgens amplitude, bølgetal, bølgelengde, fasehastighet og bølgeperiode definert på tilsvarende måte som for longitudinale bølger (cf. 9.10). Et øyeblikksbilde av forskyvningsfeltet (9.13) ved  $t=0$  er skissert på figur 9.4. Settes forskyvningen (9.13) inn i bevegelseslikningen (8.2) reduseres denne til



når vi ser bort fra ytre krefter.

Fig. 9.4:

Skal (9.14) være en løsning av bølgelikningen (9.15) må

$$c = c_T = \sqrt{\mu/\rho}$$

Vi ser umiddelbart at  $c_L > c_T$ . Transversalbølgene vil derfor alltid forplante seg langsomere enn longitudinalbølgene.

Forskjellen i forplantningshastighet mellom longitudinalbølgen og transversalbølgen kan brukes til å estimere avstanden til et jordskjelvssenter. La oss anta at begge bølgemodene følger omrent samme bane og at banens lengde er  $D$  som altså angir avstanden. Gangtiden for longitudinalbølgen er  $T$  og for transversalbølgen  $T + \Delta T$  hvor  $\Delta T$  er den observerte tidsforsinkelsen mellom de to bølgemodene. Vi har da at

$$T = \frac{D}{c_L}, \quad T + \Delta T = \frac{D}{c_T}$$

ved å eliminere  $T$  fra disse to likningene får vi

$$D = \frac{c_T c_L}{c_L - c_T} \Delta T$$

Denne likningen viser at avstanden  $D$  kan beregnes dersom tidsforsinkelsen  $\Delta T$  og bølgehastighetene  $c_L$  og  $c_T$  er kjent.

### Ikke-plane bølger:

Vi har i det foregående strengt talt bare påvist eksistensen av plane bølger, men det kan forholdsvis lett vises at en kan ha bølger hvor forskyvningstilstanden er mer komplisert. Dersom vi tar divergensen til vektorene på begge sider av likhetsteget i likning (8.2) med  $\mathbf{f}^v = 0$  fåes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (9.16)$$

hvor vi som før har forutsatt at  $\mathbf{f}_y = 0$  og antatt at  $\lambda, \mu$  og  $\rho$  er konstanter. Nå er

$$\nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

og vi omskriver likningen (9.16)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = c_L^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (9.17)$$

Dette viser at divergensen til forskyvningsfeltet oppfyller bølgelikningen.

En enkel løsning av (9.17) er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{f(r - c_L t)}{r} \quad (9.18)$$

hvor  $f$  betegner en funksjon av  $r - c_L t$  og  $r$  er avstanden fra et punkt  $P$  i rommet. Løsningen (9.18) representerer bølger med kuleform som brer seg ut fra punktet  $P$ . Amplituden avtar proporsjonalt med avstanden fra  $P$  som er et uttrykk for at energi i bølgebevegelsen spres over stadig større kuleskall (sfærisk dempning).

På tilsvarende måte som vi utledet bølgelikning for divergensen til forskyvningsfeltet kan vi vise at hvirvingen til forskyvningsvektoren også oppfyller en bølgelikning. Ved å ta hvirvlinger til vektorene i (8.2) får vi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u})$$

fordi  $\nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \equiv 0$ . Dette viser at  $\nabla \times \mathbf{u}$  oppfyller en tredimensjonal bølgelikning hvor fasenhastigheten er  $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . På tilsvarende måte som for longitudinale bølger kan transversale bølger bre seg ut i kuleform fra en kilde.

### Seismiske bølger:

Ved jordskjelv eller sjokk fra kraftige eksplosjoner vil det genereres elastiske bølger i jorden som kan bre seg ut over store avstander. Disse bølgene blir betegnet seismiske bølger eller jordskjelvbølger. De komplekse geologiske lagdelingene i jorden og jordoverflaten vil føre til at de seismiske bølgene får en komplisert forplantningsbane og tildels andre egenskaper enn de enkle plane bølgeformene som vi har beskrevet her. Det viser seg imidlertid at en nesten alltid kan finne igjen bølgekomponentene som tilsvarer plane longitudinale og transversale bølger i registreringer fra stasjoner som ligger langt borte fra jordskjelvet.

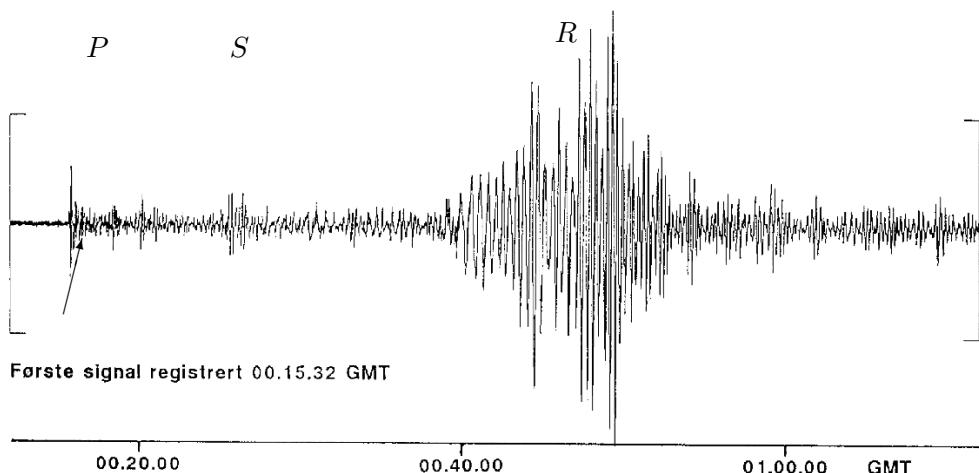


Fig. 9.5: San Fransisco jordskjelv, 18 oktober 1989, magnitud 6.9. Målingene er foretatt ved NORSAR Observatorium ved Karasjok, Finnmark. Longitudinalbølgene, ofte kalt primærbølger, er merket med  $P$ . Transversalbølgene, ofte kalt sekundærbølger, er merket med  $S$ . De kraftige svingningene, merket  $R$ , er overflatebølgene som har forplantet seg langs jordoverflaten.

Siden longitudinalbølgen vil ankomme først har den fått navnet primærbølgen og transversalbølgen som ankommer senere blir kalt sekundærbølgen. I fjell er ofte  $\lambda = \mu$  og  $c_L/c_T = \sqrt{3}$ . Middelverdier for fasehastigheten for primærbølgen og sekundærbølgen i jordskorpa er henholdsvis omkring 6.4 km/s og 3.7 km/s som følger av verdiene for elastisitetskoeffisientene gitt i avsnitt 9.2. I sedimentene er de tilsvarende hastigheten omkring 2.0 km/s og 1.0 km/s. Kunstige genererte primærbølger (ved trykkluft i vann, eksplosiver i fjell) vil reflekteres fra strukturer i berggrunn og brukes til å kartlegge jordskorpen og ved leting etter olje og mineraler.

## 9.4 Refleksjon av elastiske bølger

Bølger som forplanter seg inn i et område hvor de elastiske parametrerne eller tettheten endrer seg raskt vil kunne avbøytes og reflektere. Slike områder eller

soner finnes for eksempel i det indre av jorden i ca 10–40 km dyp ved overgangen mellom jordskorpen og mantelen, og i ca 3000 km dyp ved overgangen mellom mantel og jordkjernen. Overgangssoner med svakere refleksjonsegenskaper finnes også mellom de forskjellige lag i sedimentbassenger spesielt ved skilleflatene mot olje- eller gass-førende lag. Kraftige refleksjoner vil også finne sted ved jordoverflaten eller ved havbunnen.

Ved å studere refleksjon og avbøyning av seismiske bølger kan man derfor bestemme sammensetningen av Jordens dype indre eller påvise olje- eller gass-førende lag i sedimenter. Refleksjon av seismiske bølger spiller derfor en viktig rolle og en matematisk behandling av refleksjon av elastiske bølger vil finnes i enhver lærebok i teoretisk seismologi.

I det generelle tilfellet vil refleksjon av elastiske bølger være et ganske komplisert fenomen. En longitudinalbølge (P-bølge) som for eksempel kommer inn mot et reflekterende lag, vil i alminnelighet føre både til en reflektert longitudinalbølge og transversalbølge (S-bølge). På den andre siden av laget vil dessuten en longitudinalbølge og transversalbølge genereres og forplantet seg bort fra det reflekterende laget. De sistnevnte bølgene betegnes ofte transmitterte bølger.

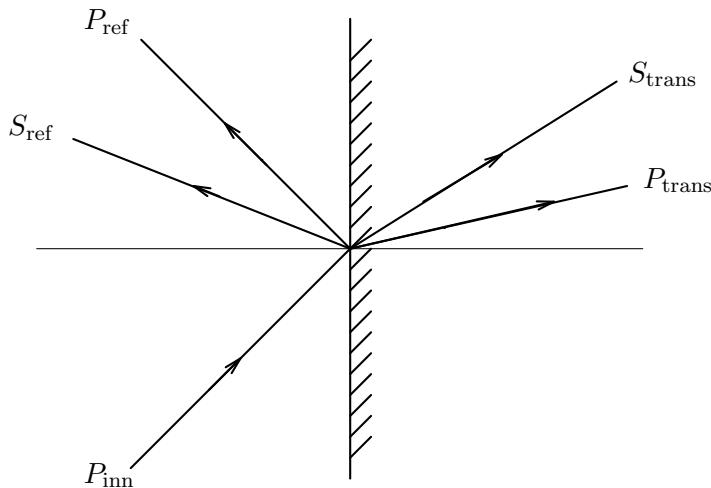


Fig. 9.6: Figuren viser hvordan en inkommande longitudinalbølge ( $P_{\text{inn}}$ ) fører til en reflektert longitudinalbølge ( $P_{\text{ref}}$ ), en reflektert transversalbølge ( $S_{\text{ref}}$ ), en transmittert longitudinalbølge ( $P_{\text{trans}}$ ), og en transmittert transversalbølge ( $S_{\text{trans}}$ ).

#### 9.4.1 Refleksjon av P-bølge ved skilleflate mellom to elastiske media

Her skal nøyne oss med å behandle det tilfellet at plane longitudinalbølger kommer normalt inn mot en plan skilleflate mellom to homogene elastiske lag. Tettlethen og de elastiske parametrerne i de to lagene er henholdsvis  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  og  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$ .

Bølgefeltet består av en innkommende bølge ( $I$ ), en reflektert bølge ( $R$ ) og

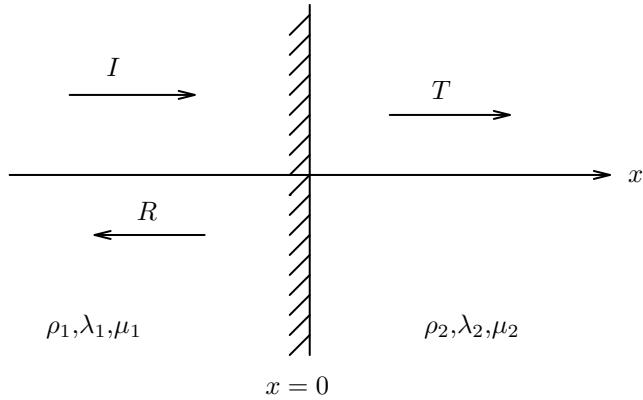


Fig. 9.7: Refleksjon og transmisjon av plane longitudinalbølger ved skilleflaten mellom to elastiske media.

en bølge som transmitteres inn i det andre laget ( $T$ ). De tilhørende forskyvningene som bare består av forskyvninger i  $x$ -retning kan henholdsvis skrives

$$u_I = I \sin k_1(x - c_{L1}t) \quad (9.19)$$

$$u_R = R \sin k_1(x + c_{L1}t) \quad (9.20)$$

$$u_T = T \sin k_2(x - c_{L2}t) \quad (9.21)$$

hvor  $c_{L1}$  og  $c_{L2}$  er henholdsvis longitudinalbølgens hastighet i de to lagene,  $k_1$  og  $k_2$  er de tilhørende bølgetallene og  $I, R, T$  er amplitudene. Størrelsene  $k_1 c_{L1} = \omega_1$  og  $k_2 c_{L2} = \omega_2$  er bølgernes vinkelhastighet. De tilhørende bølgeperiodene er:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad (9.22)$$

Den totale forskyvningen i lag 1 er summen av forskyvningen for den innkommende og den reflekterte bølgen

$$u_1(x, t) = u_I + u_R \quad (9.23)$$

I lag 2 består den totale forskyvningen bare av det transmitterte bølgefeltet

$$u_2(x, t) = u_T$$

De tilhørende spenningene i det første laget er

$$P_{xx} = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} = \rho_1 c_{L1}^2 \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

med tilsvarende uttrykk for spenningen i det andre laget. Ved skilleflaten mellom lagene som vi antar ligger ved  $x = 0$  krever grenseflatebetingelsene at forskyvningene,  $u$ , og spenningen,  $P_{xx}$  er kontinuerlige

$$u_1(x = 0, t) = u_2(x = 0, t) \quad (9.24)$$

$$\rho_1 c_{L1}^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \rho_2 c_{L2}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (9.25)$$

Ved å sette uttrykkene for forskyvningfeltene inn i grenseflatebetingelsene (9.24–9.25) får vi følgende likninger

$$-I \sin(k_1 c_{L1} t) + R \sin(k_1 c_{L1} t) = -T \sin(k_2 c_{L2} t)$$

$$\rho_1 c_{L1}^2 k_1 I \cos(k_1 c_{L1} t) + \rho_1 c_{L1}^2 k_1 R \cos(k_1 c_{L1} t) = \rho_1 c_{L2}^2 k_2 T \cos(k_2 c_{L2} t)$$

Skal disse betingelsen være oppfylt for alle tider må uttrykkene som inneholder tiden,  $t$ , kunne forkortes. Dette krever at

$$k_1 c_{L1} = k_2 c_{L2} \quad (9.26)$$

som uttrykker at bølgene har samme frekvens eller periode, men at den transmitterte bølgen har bølgelengden forskjellig fra den innkommende og reflekterte bølge. Når nå de trigonometriske uttrykkene kan forkortes forenkles betingelsene seg til

$$I - R = T$$

$$\rho_1 c_{L1} I + \rho_1 c_{L1} R = \rho_2 c_{L2} T$$

Derved kan amplituden for den reflekterte og den transmitterte bølgen beregnes

$$R = \frac{\rho_2 c_{L2} - \rho_1 c_{L1}}{\rho_2 c_{L2} + \rho_1 c_{L1}} I \quad (9.27)$$

$$T = \frac{2\rho_1 c_{L1}}{\rho_2 c_{L2} + \rho_1 c_{L1}} I \quad (9.28)$$

Dette viser at amplituden av den reflekterte og den transmitterte bølge er bestemt av den *akustiske impedansen*, det vil si produktet av tetthet og bølgehastighet i de to lagene. Dersom de to lagene har samme akustisk impedanse,  $\rho_2 c_{L2} = \rho_1 c_{L1}$ , så er  $R = 0$  og  $T = I$ . Den innkommende bølgen vil altså gå uhindret gjennom. Dersom den akustiske impedanse  $\rho_2 c_{L2} \gg \rho_1 c_{L1}$  vil  $R = I$  og  $T = 0$ . I dette tilfellet vil den innkommende bølgen bli totalreflektert ved skilleflaten. Forholdet mellom amplituden til reflektert og innkommende bølge

$$r = \frac{R}{I} = \frac{\rho_2 c_{L2} - \rho_1 c_{L1}}{\rho_2 c_{L2} + \rho_1 c_{L1}} \quad (9.29)$$

kalles *refleksjonskoeffisienten*. Denne størrelsen spiller en viktig rolle i oljeleting hvor longitudinalbølger generert med lydkanoner brukes til å påvise olje eller gass, på grunnlag av målinger av refleksjonskoeffisienten.

#### 9.4.2 Refleksjon ved fri overflate

Ved en fri overflate vil den innkommende bølge reflektere fullstendig og ingen bølge vil transmitteres. Dette tilfellet trenger spesiell behandling. Vi tenker oss at mediet til venstre i figur 1 er begrenset av en plan fri overflate ved  $x = 0$  og at den innkommende longitudinalbølgen kommer inn normalt mot flaten som i forrige avsnitt. Uttrykkene for forskyvningfeltene for den innkommende og

reflekterte bølge kan skrives henholdsvis som i likning (9.19) og (9.20). Grenseflatebetingelsene ved  $x = 0$  blir i dette tilfellet at spenningen  $P_{xx}$  forsvinner. Dette kan med henvisning til forrige avsnitt skrives

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (9.30)$$

Settes det totale forskyvningsfeltet for innkommende og reflektert bølge inn i grenseflatebetingelsen (9.30) fåes

$$I + R = 0$$

Dette viser at amplituden for den reflekterte bølge er lik den innkommende, men med motsatt fortogn. Det betyr at for eksempel en innkommende trykkpuls vil reflekteres som en strekkpuls.

#### 9.4.3 Refleksjon ved fast flate

En kan også tenke seg den muligheten at et elastisk lag grenser inn mot et nært udeformerbart medium slik at forskyvningene er nær null på skilleflaten.

La oss anta det elastiske mediet til venstre i figur 9.7 er festet til et idealisert udeformerbart medium langs skilleflaten ved  $x = 0$  og at den innkommende longitudinalbølgen kommer inn normalt mot flaten. Også i dette tilfellet vil den innkommende bølge reflektere fullstendig og ingen bølge transmitteres. Uttrykkene for forskyvningsfeltene for den innkommende og reflekterte bølge blir som i forrige avsnitt. Grenseflatebetingelsene ved  $x = 0$  blir i dette tilfellet at forskyvningen  $u = 0$ . Settes det totale forskyvningsfeltet for innkommende og reflektert bølge inn i grenseflatebetingelsen fåes

$$I - R = 0$$

som viser at amplituden for den reflekterte bølge er lik den innkommende og med samme fortogn. Det betyr at for eksempel en innkommende trykkpuls vil reflekteres som en trykkpuls. Vi legger merke til at samme resultat fremkommer fra likningene (9.27–9.28) dersom den akustiske impedansen  $\rho_2 c_{L2} \rightarrow \infty$ .

### 9.5 Longitudinalbølger i en elastisk stav

I en elastisk stav som utsettes for forskyninger i lengderetningen, for eksempel ved et slag i enden, vil trykkpulsen fra slaget forplante seg som en bølge gjennom staven. Vi tenker oss en lang rett uniform elastisk stav med sirkulært tversnitt hvor  $x$ -aksen er rettet langs stavens senterakse. Forskyvningen i lengderetningen  $u = u(x, t)$  er en funksjon av  $x$  og tiden  $t$ , og den tilhørende spenning i stavens lengderetning,  $\sigma$ , er gitt ved den én-dimensjonale Hookes lov.

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9.31)$$

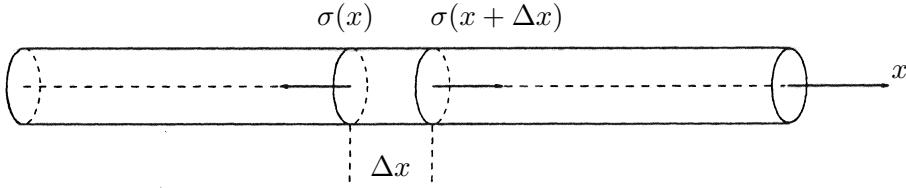


Fig. 9.8: Elastisk stav

hvor Youngs modul,  $E$ , er konstant langs staven. Bevegelseslikningen for et element av staven med lengde  $\Delta x$  kan skrives

$$\rho A \Delta x a = [\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)]A = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x A \quad (9.32)$$

hvor  $\rho$  er tettheten av staven og  $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  er akselerasjonen. Ved innsetting for spenningen fra likning (9.31) fåes bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.33)$$

hvor bølgehastigheten  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Ved innsetting ser vi at bølgelikningen har løsning

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (9.34)$$

hvor  $f(x - ct)$  er en vilkårlig deriverbar funksjon av variabelen  $x - ct$ . Dette viser at forskyvning som starter i den ene enden av staven vil forplante seg med hastighet  $c$  i stavens lengderetning. Når bølgen når den andre enden av staven vil den reflekteres og måten dette skjer på vil være avhengig av om stavens ende er fri eller fastspent (knfr. avsnitt 1.2 og 1.3). Suksessive refleksjoner i endene kan skape stående svingninger.

### 9.5.1 Stående svingninger i stav

Grenseflatebetingelsene for en stav med frie ender er at spenningen,  $\sigma$ , er null i endene, som kan skrives

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (9.35)$$

hvor  $L$  er lengden av staven. Vi søker en periodisk løsning av bølgelikningen (9.33) ved å anta separasjon av variablene  $x$  og  $t$

$$u(x, t) = \hat{u}(x) \cos \omega t \quad (9.36)$$

der  $\omega$  er vinkelhastigheten i svingningen. Den tilhørende perioden er gitt ved  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Ved innsetting i bølgelikningen (9.33) får vi en likning til å bestemme funksjonen  $\hat{u}(x)$

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} = -k^2 \hat{u}$$

hvor bølgetallet  $k = \frac{\omega}{c}$ . Den generelle løsningen av denne likningen er

$$\hat{u}(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

hvor  $A$  og  $B$  er integrasjonskonstanter. Skal randbetingelsene (9.35) være oppfylt må:

$$A = 0 \quad kL = n\pi$$

hvor heltallet  $n = 1, 2, \dots$ . Avhengig av valget av  $n$  får man forskjellige svingetilstander eller svingemoder med bølgetall

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

og tilhørende vinkelhastighet  $\omega_n$  og svingeperiode

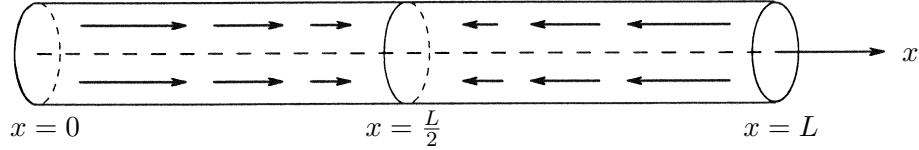
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{ck_n} = \frac{2L}{nc}$$

Forskyvningsfeltet er gitt ved

$$u(x, t) = B \cos k_n x \cos \omega_n t$$

Forskyvningene, for tidspunkt  $t = 0$ , for de to svingemodene  $n = 1$  og  $n = 2$ , grunnsvingningen og første overtone, er skissert i figur 9.9.

$n = 1$  Grunnsvingning:  $u = B \cos(\frac{\pi x}{L})$



$n = 2$  Overtone:  $u = B \cos(\frac{2\pi x}{L})$

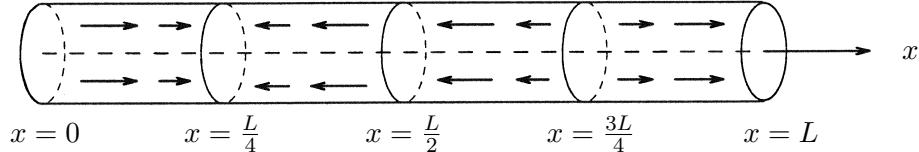


Fig. 9.9: Grunnsvingning og overtone i elastisk stav

Ved hjelp av kjente trigonometriske formler kan vi skrive

$$\cos k_n x \cos \omega_n t = \frac{1}{2} [\cos(k_n x - \omega_n t) + \cos(k_n x + \omega_n t)]$$

Siden  $\omega_n = k_n ct$  kan høyresiden i uttrykket omskrives slik at

$$\cos k_n x \cos \omega_n t = \frac{1}{2} [\cos k_n(x - ct) + \cos(k_n(x + ct))]$$

som viser at de stående svingningene i staven er sammensatt av bølger som forplanter seg i begge retninger langs staven og reflekteres ved endene.

## 9.6 Vridning (torsjon) av sirkulær cylindrisk stav

Vi betrakter en stav med tverrsnittsradius  $a$  og lengde  $L$  og legger  $x$ -aksen i stavens lengdeakse. Staven er fastspent i den ene enden,  $x=0$ , og den utsettes for et vridningsmoment i den andre enden,  $x=L$ .

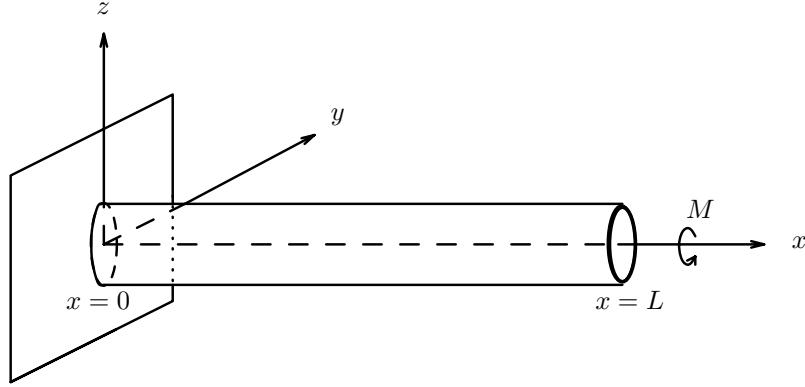


Fig. 9.10:

For små vridningsvinkler forventer vi at forskyvningene er orientert i plan normalt lengdeaksen og at det er ingen forskyvninger i  $x$ -retningen. Punkter i staven som ligger i et vilkårlig tverrsnittsplan i avstand  $x$  fra den fastspente enden vil vries en vinkel  $\theta$  rundt lengdeaksen. Ved små deformasjoner kan vi sette

$$\theta = qx$$

hvor  $q$  er en konstant som settes  $q=\theta_0/L$ . Dette innebærer at vridningsvinkelen øker lineært fra null i den fastspente enden til  $\theta_0$  i den andre enden. Forskyvningen i et punkt  $P$  i avstand  $r$  fra lengdeaksen  $A$  (se figur 9.10) er

$$\mathbf{u} = r\theta \mathbf{i}_\varphi$$

hvor  $\mathbf{i}_\varphi$  er enhetsvektoren rettet normalt  $AP$  og  $\varphi$  betegner vinkelen mellom retningen  $AP$  og  $y$ -aksen. Nå er  $\mathbf{i}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{j} + \cos \varphi \mathbf{k}$  hvor  $\mathbf{j}$  og  $\mathbf{k}$  er enhetsvektoren henholdsvis langs  $y$ - og  $z$ -aksen. Nå er  $y = r \cos \varphi$  og  $z = r \sin \varphi$  slik at forskyvningens  $y$  og  $z$  komponenter følgelig blir

$$\mathbf{u} = qx(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \quad (9.37)$$

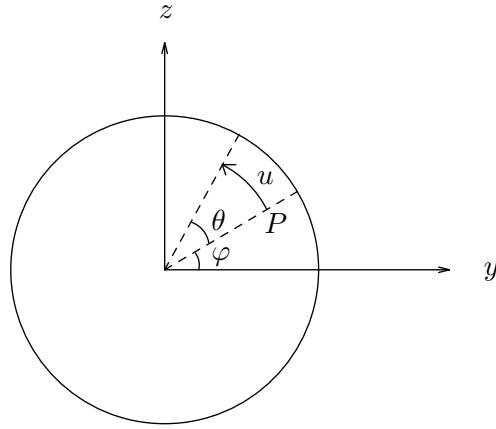


Fig. 9.11:

Vi ser at siden både  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  og  $\nabla^2 \mathbf{u}$  så er likevektslikningen oppfylt og (9.37) er derfor en mulig vridningstilstand ved likevekt.

Spenningene i staven kan vi finne på vanlig måte fra Hookes lov (7.13). Dette gir

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P_{yz} = 0 \quad (9.38)$$

og

$$P_{xy} = -\mu qz, \quad P_{xz} = \mu qy \quad (9.39)$$

Grenseflatebetingelsene foruten at forskyvningen skal være null ved  $x=0$  er:

1. Spenningsfri sideflate
2. Resultantmomentet av spenningene på endeflatten  $x=L$  må være lik det ytre pålagte momentet  $M$ .

Det første betingelsen kan skrives

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{i}_r = 0 \quad (9.40)$$

hvor normalvektoren til sylinderflaten

$$\mathbf{i}_r = \cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}$$

Når vi regner ut produktet (9.40) og bruker (9.39) får vi at

$$P_{xy} \cos \varphi + P_{xz} \sin \varphi = 0$$

Innsatt (9.39) viser at denne betingelsen er oppfylt.

Resultantmomentet av spenningene på endeflatten  $x=L$  beregnes på følgende måte

$$\mathbf{M} = \iint_{r \leq a} r \mathbf{i}_r \times (\mathcal{P} \cdot \mathbf{i}) dy dz = \mu q \mathbf{i} \iint_{r \leq a} (y^2 + z^2) dy dz = \frac{\pi}{2} \mu q a^4 \mathbf{i}$$

Innfører vi den totale vridningsvinkelen  $\theta_0 = qL$  vil momentet kunne skrives

$$M = \frac{\pi}{2} \mu \frac{\theta_0}{L} a^4 \quad (9.41)$$

Dersom  $M$  og  $\theta_0$  måles vil skjærmodulen  $\mu$  kunne beregnes fra (9.41). Ved å utføre vridningsmålinger for prøvestaver av et stoff kan man således bestemme  $\mu$  eksperimentelt. Denne metoden er mye benyttet.

### Eksempel

En stiv sirkulær skive med radius  $R$  og masse  $m$  er festet i sentret til en tynn sirkulær elastisk stav som igjen er festet i den andre enden.

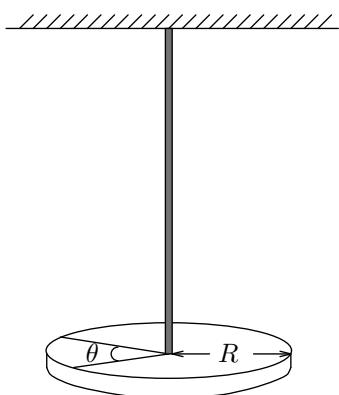


Fig. 9.12:

Systemet henger vertikalt slik som antydet på figuren. Staven har lengde  $L$ , radius  $a$ . Skiven vries en vinkel  $\theta_0$  og slippes. På grunn av vridningsmomentet i staven vil skiven dreie i en svingbevegelse (torsjonsvingninger). Dersom vi antar at massen av staven er liten i forhold til massen av skiven kan vi neglisjere stavens treghet og lett bestemme svingtiden for skiven. Vridningsmomentet på skiven ved et vilkårlig vinkeldreining  $\theta$  er:

$$-\frac{\pi}{2} \mu \frac{\theta}{L} a^4$$

Spinsatsen for skiven m.h.p. tyngdepunktet

$$I\ddot{\theta} = -\frac{\pi}{2} \mu \frac{\theta}{L} a^4$$

hvor  $I = \frac{1}{2}mR^2$  er treghetsmomentet for skiven. Innfører vi vinkelhastigheten

$$\Omega = \sqrt{\frac{\pi \mu a^4}{m L R^2}}$$

kan likningen skrives

$$\theta = -\Omega^2 \theta$$

Dette er en svinglikning som har løsning

$$\theta = \theta_0 \cos \Omega t$$

og det viser at skiven utfører harmoniske svingninger (torsjonspendel) med svingeperioden  $T = 2\pi/\Omega$  og maksimalt vinkelutslag  $\theta_0$ . Torsjonspendel har vært benyttet som regulator i mekaniske klokker.

## 9.7 Bøyning av bjelker

Vi skal nå se hvordan bøyningen av bjelker og staver kan beregnes når belastningen er gitt. Kunnskap om dette emnet er av stor betydning for ingeniører som planlegger og dimensjonerer konstruksjoner. Slike beregninger kan gjøres med utgangspunkt direkte i de elastiske likevektslikningene (4.3) med spenningene gitt ved Hooke's lov (7.13).

Her vil vi for enkelhets skyld velge en tilnærmet betraktningsmåte som bare er gyldig ved små bøyningsutslag for tynne bjelker hvor den karakteristiske tversnittsdimensjonen er mye mindre enn lengden. Likningene som vi kommer fram til for bjelkebøyning er imidlertid mye enklere enn de generelle likevektslikningene.

Vi tenker oss at bøyningen foregår i  $xz$ -planet, slik som antydet i figur 9.13 hvor forskyvningen av senterlinjen i bjelken,  $w(x)$ , er regnet fra  $x$ -aksen som er senterlinjens posisjon når staven er ubelastet. Senterlinjen i tverrsnittet er definert som flatesenteret eller tyngdepunktet i tversnittsarealet. For hvert segment

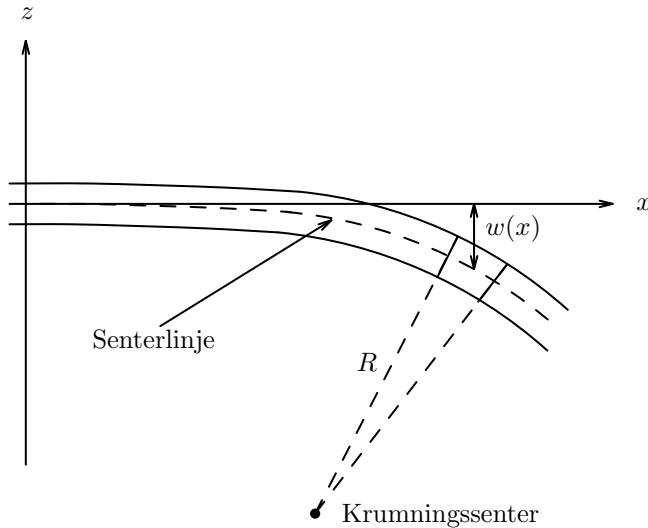


Fig. 9.13: Bøyning av stav

av staven kan vi nå definere en krumningsradius  $R$  og fra matematikkpensumet vet vi at krumningsradius til en kurve  $z = w(x)$  er gitt ved

$$\frac{1}{R} = -\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (9.42)$$

Ved å velge minustegnet i uttrykket for krumningsradius har vi definert krumningsradius som positiv når krumningssentret ligger under bjelken som i tilfellet vist på figur 9.13. Siden vi bare er interessert i små bøyninger vil helningen av senterlinjen  $\frac{dw}{dx}$  være liten i forhold til 1, og krumningsradius vil være tilnærmet

gitt ved

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (9.43)$$

Ved bøyning slik som skissert på figur (9.13) må vi forvente at bjelken strekkes langs ytterkanten og presses sammen langs innerkanten av bøyen. Langs en flate som ligger i nærheten av senterlinjen vil en forvente at bjelken hverken er strukket eller presset sammen. Siden denne flaten er uberørt av strekk og trykk deformasjoner blir den kalt nøytralflaten i bjelken. Det kan vises at ved små bøyninger så vil nøytralflaten gå gjennom bjelkens senterlinje.

Ved ren bøyning, det vil si at bjelken ikke samtidig strekkes eller komprimeres i lengderetningen, vil et element av bjelken med lengde  $l$  deformeres slik som vist i figur 9.14.

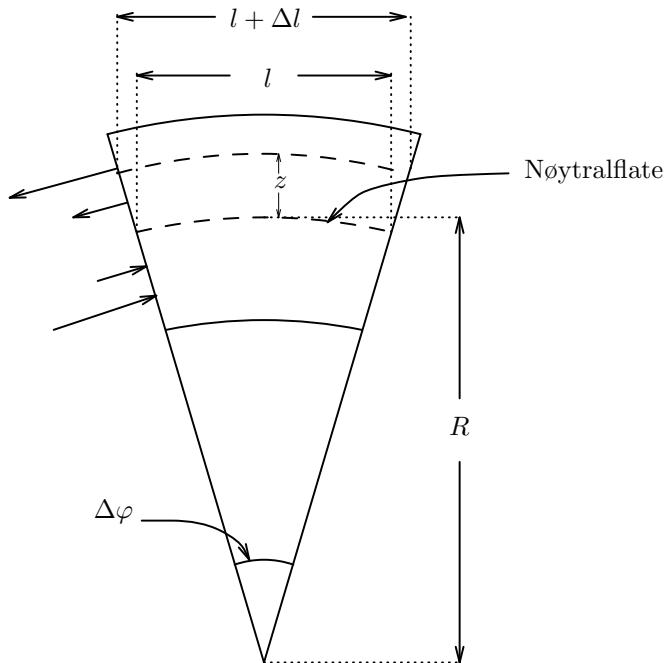


Fig. 9.14: Et element av bjelken i figur 9.13.

Fra figur 9.14 ser vi at vinkeldeformasjonen som tilsvarer krumningen av bjelken er gitt ved

$$\Delta\varphi = \frac{l}{R}$$

Over den nøytrale flaten vil materialet bli utsatt for en forlengelse,  $\Delta l$ , som øker med avstanden,  $z$ , fra nøytralflaten. Likeledes vil materialet under nøytralflaten bli utsatt for en sammenpressing som også øker med avstanden fra nøytralflaten. Av figuren følger

$$l + \Delta l = \Delta\varphi(R + z)$$

Tøyningen i  $x$ -retning er

$$\epsilon_{xx} = \frac{l + \Delta l - l}{l} = \frac{\Delta\varphi(R + z) - \Delta\varphi R}{\Delta\varphi R} = \frac{z}{R}$$

Når denne relasjonen settes opp er det en direkte konsekvens av antagelsen om at en tverrsnittsflate som er plan og normal til senteraksen før bøyningen også vil være plan og normal til senteraksen etter at bjelken er bøyd. Dette gjelder bare for små bøyninger og antagelsen blir ofte referert til som *Navier-Bernoulli's hypotese*, etter den sveitsiske vitenskapsmannen *Daniel Bernoulli* (1700–1782) og den franske ingeniør og lærer *Louis Marie Henri Navier* (1785–1826).

Antar vi nå at Hooke's lov kan brukes til å bestemme den tilsvarende spenningen,  $P_{xx}$ , i tverrsnittsflaten av elementet fåes

$$P_{xx} = E\epsilon_{xx} = E\frac{z}{R} \quad (9.44)$$

At spenningen i bjelkens lengderetning er en lineær funksjon av  $z$  slik som det fremgår av formelen ovenfor, er en sentral antagelse i den tilnærmede bjelketeorien og er en følge av Navier-Bernoulli's hypotese.

Spenningskraften setter opp et moment med hensyn på senterflatens skjæringslinje med tverrsnittsflaten som er parallel med  $y$ -aksen. Dette momentet er gitt ved

$$M(x) = \iint_{\text{snittflate}} z P_{xx} dy dz$$

Ved innsetting for spenningen  $P_{xx}$  fra (9.44) fåes

$$M(x) = \frac{EI}{R} \quad (9.45)$$

hvor  $I$  er flatetregheitsmomentet med hensyn på  $y$ -aksen, som er definert ved

$$I = \iint_{\text{snittflate}} z^2 dy dz \quad (9.46)$$

Positiv verdi for momentet i (9.45) tilsvarer at bjelken bøyes nedover slik som vist i figur 9.13. Vårt valg av positiv krumningsradius i likning (9.42) er i samsvar med dette.

Momentet av spenningen skyldes snittkretene på grunn av de ytre kreftene som virker på bjelken. Betegner vi momentet av de ytre kreftene med  $M_y(x)$  så må vi altså ved likevekt ha at spenningskretenes moment i snittflaten er lik de ytre kreftenes moment

$$M(x) = M_y(x) \quad (9.47)$$

Setter vi inn for  $M(x)$  fra likning (9.45) får vi en differensielllikning for nedbøyningen av en bjelke

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI} \quad (9.48)$$

Denne differensielllikningen kan lett løses når  $M_y(x)$  er kjent og integrasjonskonstantene bestemmes av grensebetingelsen ved endene av bjelken  $x = 0$  og  $x = L$ , hvor  $L$  er lengden av bjelken.

Dersom bjelken er fast innspent i den ene enden ( $x = 0$ ) og fri til å bevege seg i den andre enden blir betingelsene

$$w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad (9.49)$$

Dersom bjelken er opplagret i begge ender blir betingelsene

$$w = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (9.50)$$

### 9.7.1 Beregning av utkraget bjelke

Vi skal nå beregne nedbøyningen av en utkraget horisontal bjelke festet i en vegg i den ene enden ( $x = 0$ ), mens den andre enden er fritt bevegelig slik som skissert i figur 9.15. Bjelken bøyes på grunn av ytre krefter som er laster og vekten av bjelken. I første omgang skal vi tenke oss at last bare virker i endepunktet  $x = L$ .

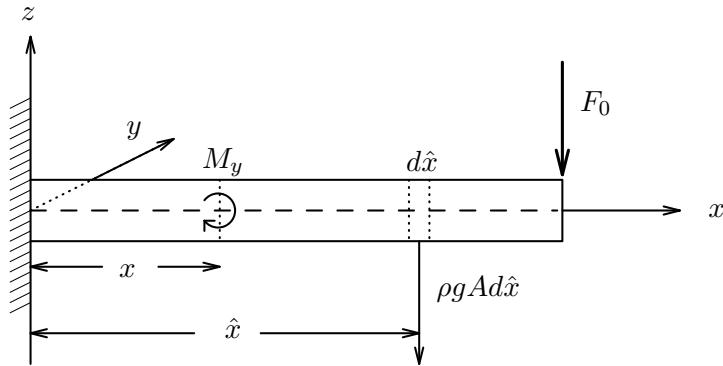


Fig. 9.15: Bjelke festet i en vegg i den ene enden. I den andre enden virker en punktlast  $F_0$ .

Momentet av de ytre kraftene i et vilkårlig tverrsnitt blir derfor

$$M_y(x) = F_o(L - x) + \int_x^L \rho g A(\hat{x} - x) d\hat{x} \quad (9.51)$$

Første leddet på høyre side i likningen representerer momentet av lasten  $F_o$  og andre leddet representerer momentet av vekten av delen av bjelken fra  $x$  til  $x = L$ . Bjelkens tetthet er  $\rho$ ,  $A$  er tversnittsarealet og  $g$  er tyngdens akselerasjon. Regner man ut integralet kan uttrykket for momentet skrives

$$M_y(x) = F_o(L - x) + \frac{\rho g A}{2}(x^2 - 2Lx + L^2) \quad (9.52)$$

Setter man nå dette uttrykket for momentet inn i bjelkelikningen (9.48) fåes

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F_o}{EI}(L - x) - \frac{\rho g A}{2EI}(x^2 - 2Lx + L^2) \quad (9.53)$$

Integrasjon av likningen gir

$$w(x) = -\frac{F_o}{6EI}(3Lx^2 - x^3) - \frac{\rho g A}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + C_1x + C_2 \quad (9.54)$$

hvor  $C_1$  og  $C_2$  er integrasjonskonstanter. Disse bestemmes ved grenseflatebetingelsene ved  $x = 0$  (likning 9.49) som gir  $C_1 = C_2 = 0$ . Nedbøyningen i bjelkens endepunkt blir følgelig

$$w_L = w(x = L) = -\frac{F_o L^3}{3EI} - \frac{G_o L^3}{8EI} \quad (9.55)$$

hvor  $G_o = \rho g A L$  er vekten av bjelken.

For en bjelke med rektangulært tverrsnitt med sidekanter  $b$  og  $h$  henholdsvis i  $y$ - og  $z$ -retning, er flatetregheitsmomentet  $I = \frac{ah^3}{12}$  og tversnittsarealet  $A = bh$ . Til sammenlikning for en stav med sirkulær tverrsnitt og radius  $r$  er  $I = \frac{\pi r^4}{4}$  og tversnittsarealet  $A = \pi r^2$ .

Det fremgår av uttrykket for  $w_L$  at for et gitt tversnittsareal vil nedbøyningen bli minst mulig med en tversnittsform hvor flatetregheitsmomentet  $I$  blir størst mulig. Dette er bakgrunnen for at bjelker som skal være stive lages for eksempel med T- eller H-formet tverrsnitt.

### 9.7.2 Fritt opplagret bjelke

I det andre eksemplet skal vi beregne nedbøyningen av horisontal bjelke som er fritt opplagret i endepunktene  $x = 0$  og  $x = L$  slik som skissert i figur (9.16). Bjelken bøyes på grunn av ytre krefter ved lasten,  $F_o$ , som her tenkes plassert i midtpunktet av bjelken og vekten,  $G_o$ , som er jevnt fordelt. I opplagringspunktene vil det virke vertikale reaksjonskrefter, ( $R_1$  og  $R_2$ ), som ved likevekt vil være like stor på grunn av symmetrien om midtpunktet. Størrelsen av reaksjonskraftene er

$$R_1 = R_2 = \frac{F_o + G_o}{2}$$

hvor  $G_o$  er vekten av bjelken;

$$G_o = \int_0^L \rho g A x dx = \rho g A L \quad (9.56)$$

La oss her bare se på tilfellet at lasten  $F_o = 0$  og at bjelken bøyes bare på grunn av vekten. Momentet i et tverrsnitt ved  $x$  på grunn av reaksjonskraften i  $x = L$  og tyngden av den delen av bjelken som ligger mellom snittflaten og endepunktet  $x = L$  blir

$$M_y(x) = -\frac{G_o}{2}(L - x) + \int_x^L \rho g A(\hat{x} - x) d\hat{x}$$

Beregnes integralet kan vi skrive

$$M_y(x) = -\frac{G_o}{2}(x - \frac{x^2}{L})$$

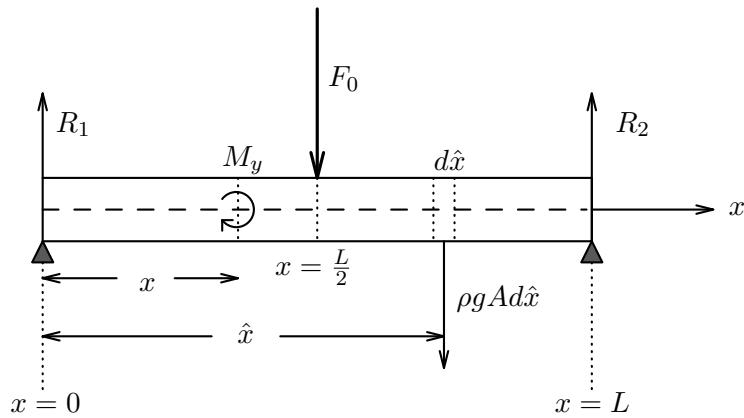


Fig. 9.16: Fritt opplagret bjelke med punktlast

Setter man nå disse utrykkene inn i bjelkelikningen (9.48) fåes etter integrasjon

$$w(x) = -\frac{G_o}{24EI} (x^4 - 2Lx^3) + C_1x + C_2 \quad (9.57)$$

hvor  $C_1$  og  $C_2$  er integrasjonskonstanter. Disse bestemmes med randbetingelsene  $w = 0$  for  $x = 0$  og  $x = L$ , og resultatet blir:

$$w(x) = -\frac{G_o}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \quad (9.58)$$

Den største nedbøyningen får vi i midtpunktet av bjelken

$$w(x = \frac{L}{2}) = -\frac{5G_oL^3}{384EI}$$

## 9.8 Øvingsoppgaver

1. Lagdeling og elastiske parametre er som i avsnitt 9.4. En innkommende transversalbølge med forskyvningsfelt

$$v_I = I \sin k_1(x - c_{T1}t)$$

i  $y$ -retning har amplitud  $I$ , bølgetall  $k_1$ , og bølgehastighet  $c_{T1}$ . Bestem amplituden for den reflekterte og den transmitterte bølgen og refleksjonskoeffisienten.

2. Finn perioden for longitudinale stående svingninger i en rett elastisk stav hvor bølgehastighet er  $c$  når:
  - a) Staven er festet i den ene enden og fri i den andre.
  - b) Staven er festet i begge endene.

3. a) Vis at i et homogent lineært elastisk medium så vil divergensen til forskyvningsvektoren,  $\mathbf{u}$ , oppfylle bølgelikningen

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

hvor  $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $\lambda$  og  $\mu$  er Lamé elastisitetskoeffisienter og  $\rho$  er tettheten.  $t$  betegner tiden.

Vi skal studere radielle (kulesymmetriske) svingninger av en homogen elastisk kule med radius  $R$  og spenningsfri overflate. Forskyvningen som vi betegner  $u_r$  er rettet radielt og vi antar at  $u_r$  er en periodisk funksjon av  $t$  og skriver

$$u_r(r, t) = \hat{u}_r(r) \cos \omega t$$

hvor  $\hat{u}_r(r)$  er en funksjon av  $r$ . Divergensen til forskyvningsfeltet kan vi skrive

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = H(r) \cos \omega t$$

hvor  $H(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \hat{u}_r)$ .

- b) Vis at funksjonen  $H(r)$  oppfyller likningen

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH}{dr} + k^2 H = 0$$

hvor  $k = \omega/c$ . Vis også at denne liknikngen har løsning

$$H = A \frac{\sin kr}{kr}$$

hvor  $A$  er en integrasjonskonstant. Ved kulesymmetri er Laplaceoperatoren gitt ved  $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr})$ .

- c) Finn forskyvningen  $u_r(r, t)$ .  
d) Den radielle spenningskomponenten har formen

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

og skjærspenningskomponentene  $\sigma_{r\varphi}$  og  $\sigma_{r\theta}$  er i dette tilfellet med kulesymmetri identisk lik null. Sett opp grenseflatebetingelsen ved kulens overflate  $r=R$  og vis at dette leder til betingelsen

$$\tan kR = \frac{kR}{1 - \frac{\lambda+2\mu}{4\mu} (kR)^2}$$

- e) Med  $\lambda = \mu$  som gjelder for mange geologiske materialer har denne likningen en løsning

$$kR \simeq 2.56$$

(kreves ikke bevist). Finn svingeperioden  $T = 2\pi/\omega$  for en elastisk kule med radius  $R = 6400$  km og  $c = 10$  km/s. Tilsvarende svingninger av jordkloden med nær den samme periode er påvist ved målinger!  
(Eksamens ME 105, 1984)

4. To homogene isotrope ideelt elastiske media grenser inn til hverandre langs en plan skilleflate ( $x = 0$ ) og det er fullstendig heft mellom de to delene. Mediet til venstre har tetthet  $\rho_1$  og longitudinalbølgens hastighet er gitt ved  $c_1$ . De tilsvarende størrelser for mediet til høyre er  $\rho_2$  og  $c_2$ . Lamées elastisitetskoeffisienter betegnes henholdsvis  $\lambda_1, \mu_1$  og  $\lambda_2, \mu_2$  for de to mediene.

Vi skal betrakte en plan longitudinalbølge I som brer seg gjennom mediet 1 mot skilleflaten og senere, i spørsmålene nedenfor, skal det vises at denne bølgen deler seg i en reflektert bølge  $R$  og en transmittert bølge  $T$  som fortsetter inn i mediet 2. Det er ingen ytre krefter.

- a) Vis at de én-dimensjonale forskyvningsfeltene

$$\begin{aligned} u_I &= I \sin(k_1 x - \omega t) & x \leq 0 \\ u_R &= R \sin(-k_1 x - \omega t) & x \leq 0 \\ u_T &= T \sin(k_2 x - \omega t) & x \geq 0 \end{aligned}$$

hvor  $I, R$  og  $T$  er konstanter, er løsninger av bevegelseslikningene, og bestem bølgetallene  $k_1$  og  $k_2$  når vinkelhastigheten  $\omega$  er gitt. Vis at løsningene representerer henholdsvis en innkommende, en reflektert og en transmittert bølge.

- b) Formuler grenseflatebetingelsene ved skilleflaten  $x = 0$  og bestem konstantene  $R$  og  $T$  dersom  $I$  er gitt.  
c) Hva er betingelsen for at en plan longitudinalbølge går gjennom skilleflaten uten å bli påvirket av endringene i tetthet og elastisitetssegenskaper?  
d) Utled energilikningene for en plan longitudinalbølge som forplanter seg i  $x$ -retning slik at forskyvningen er gitt ved  $u = u(x, t)$  og vis at den elastiske energien pr. masseenhet er

$$E = \frac{c^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$c$  er longitudinalbølgens hastighet. (Eksamens ME 105, 1988)

5. Finn nedbøyningen av en bjelke som er fritt opplagret i endepunktene (figur 9.16) med belastning  $F_o$  i midtpunktet. Vi ser bort fra tyngdens virkning.

Hint: Det blir forskjellige uttrykk for momentet  $M_y(x)$  avhengig av om  $x$  er større eller mindre enn  $\frac{L}{2}$ .

# Kapittel 10

## Eksplisitte løsninger av bevegelseslikningen for viskøs væske (Navier Stokes likninger)

### 10.1 Plan Couette-strøm

Eksperimenter med den enkel skjærstrømmen som settes opp i en inkompres-sibel pressibel væske mellom to parallelle plater når den ene platen trekkes med jevn hastighet danner grunnlaget for Newtons friksjonslov. Dette har vi diskutert i kapittel 7. Imidlertid kan det være av interesse å vise direkte

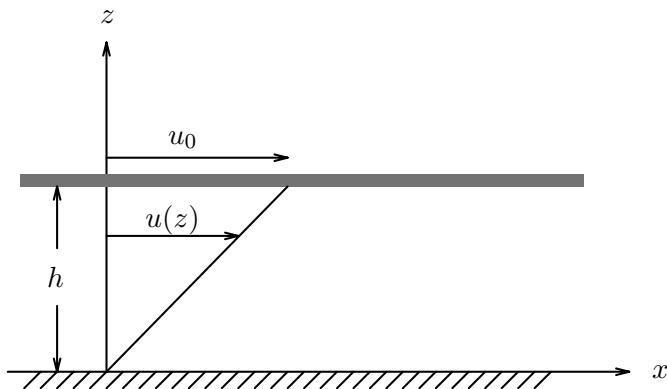


Fig. 10.1:

at Navier Stokes likning (8.5) har en løsning som tilsvarer dette spesialtilfellet. Det forutsettes at bevegelsen er stasjonær, rettlinjet og foregår i  $x, z$  planet. Den øvre platen trekkes med hastighet  $U_0$  i  $x$ -retning mens den nedre forut-settes å være i ro. Avstanden mellom platene er  $h$  og vi antar at det ikke er

trykkgradienter i væsken. Hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \{u(z), 0, 0\}$$

hvor  $u$  er hastighetskomponenten i  $x$ -retning. Fra bevegelseslikningen (8.5) får vi, når vi ser bort fra ytre krefter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Inegrasjon med hensyn på  $z$  gir

$$u = Az + B \quad (10.1)$$

hvor  $A$  og  $B$  er integrasjonskonstanter som må bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsene. Disse betingelsene er

$$u = 0 \quad \text{for } z=0$$

og

$$u = U_0 \quad \text{for } z=h$$

Dette gir  $B=0$  og  $A=U_0/h$  slik at hastighetsprofilen blir

$$u(z) = \frac{U_0}{h}z \quad (10.2)$$

Dette strømprofilen har fått navnet plan Couette strøm og det opptrer i væske- eller gassfylte tynne spalter mellom plater som glir over hverandre slik væskefylte spalter vil man f.eks. h i mekaniske lager hvor olje eller luft brukes som smøremiddel.

Grenseflatebetingelsen ved øvre plate kan også formuleres på en annen måte. La oss anta at platen trekkes med en konstant trekk-kraften. Det betyr at skjærspenningen ved øvre plate  $P_{zx}$  må ha en konstant verdi som vi betegner  $\tau_0$ . Dette kan skrives

$$P_{zx} = \mu \frac{du}{dz} = \tau_0 \quad (10.3)$$

settes løsningen (10.1) inn i betingelsen (10.3) får vi at

$$A = \tau_0 / \mu$$

Dette gir altså tilsvarende profil som (10.2).

## 10.2 Trykkgrevet stasjonær strøm i rett sirkulært rør. Hagen-Poiseuille strøm.

Det er enklast å beskrive strøm i et polarkoordinatsystem  $(r, x)$  hvor  $x$ -aksen er lagt langs rørets symmetriakse og er avstanden fra denne aksen.

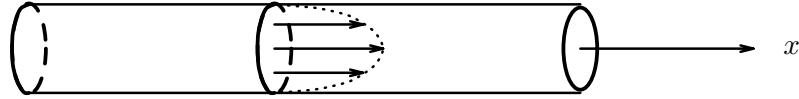


Fig. 10.2:

Rørets radius er  $a$ . Strømmen antas å være rettlinjert og drevet av en konstant trykkgradient (trykkgfall) i  $x$ -retning

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \beta$$

Hastigheten  $u$  er rettet i  $x$ -retningen og er en funksjon av avstanden fra aksen

$$u = u(r)$$

Dersom vi ser bort fra ytre krefter gir  $x$ -komponenten av bevegelseslikningen (8.5)

$$\frac{\beta}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u = 0$$

Under forutsetning av at  $u$  bare er en funksjon av  $r$  så har Laplace operatoren i polarkoordinater følgende form

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$$

Innsatt i likningen ovenfor gir dette

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) = -\frac{\beta}{\mu} r$$

Ved integrasjon to ganger med hensyn på  $r$  fåes

$$u = -\frac{1}{4} \frac{\beta}{\mu} r^2 + A \ln r + B$$

Leddet  $A \ln r$  blir singulært ( $\rightarrow \infty$ ) når  $r \rightarrow 0$  så vi må åpenbart kreve  $A=0$  for å unngå urealistisk hastighet i sentret av røret. Den andre integrasjonskonstanten bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsen  $u = 0$  ved rørveggen  $r = a$ . Dette gir en parabolsk hastighetsprofil

$$u = \frac{1}{4} \frac{\beta}{\mu} (a^2 - r^2) \quad (10.4)$$

med maksimumshastighet

$$U_0 = \frac{1}{4} \frac{\beta}{\mu} a^2$$

i sentrum av røret.

Volumstrømmen (pr. tidsenhet) gjennom røret er

$$Q = \int_0^a u 2\pi r dr = \frac{\pi a^2}{2} U_0 \quad (10.5)$$

Det parabolske strømprofilet blir kalt Hagen-Poiseuille strøm etter tyskeren Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1799–1884) og franskmannen Jean Léon Marie Poiseuille (1799–1869) som omkring 1840 kom fram til formelen (10.4) hovedsakelig på grunnlag av eksperimentelle undersøkelser.

Den parabolske strømprofilet vil bare være en mulig stasjonær strømningstilstand når strømhastighet i midten av røret ligger under en viss grense. For høyere strømhastigheter er profilen instabil og turbulens vil oppstå i væsken. Stabilitetskravet kan best uttrykkes ved det dimensjonsløse Reynoldstallet

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu}$$

hvor  $d = 2a$  er rørdiametern. Undersøkelser viser at strømprofilen (10.4) er stabil når  $Re < 2000$ .

### 10.3 Stasjonær strøm av væskefilm langs skråplan

Tyngdekraften kan drive en plan stasjonær strøm av et jevntykt væskelag nedover et skråplan. Vi beskriver strømmen i et  $(x, z)$  koordinatsystem hvor  $x$ -aksen er rettet langs skråplanet slik som figur 10.3 viser.

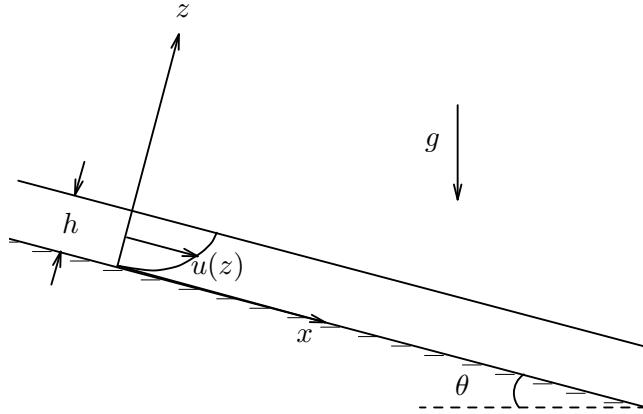


Fig. 10.3:

Væskelagets tykkelse betegnes  $h$  og planets hellingsvinkel med horisontalen er  $\theta$ . Væsken forutsettes å være i plan rettlinjet strøm i  $x$ -retningen og strømkomponenten er kun funksjon av  $z$ . Hastighetsfeltet betegnes følgelig ved

$$\mathbf{v} = \{u(z), 0, 0\}$$

Bevegelseslikningen (8.4) på vektorform gir komponentlikningene:

$$0 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g \sin \theta \quad (10.6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \theta \quad (10.7)$$

henholdsvis i  $x$ - og  $z$ -retning. Ved integrasjon av likningen (10.6) får vi

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} \sin \theta z^2 + Az + B$$

hvor  $A$  og  $B$  er integrasjonskonstanter som må bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsene. Ved skråplanet må vi ha full heft av væsken slik at

$$u = 0 \quad \text{for } z=0$$

Væskens overflate forutsettes å være fri slik at skjærspenningen  $P_{zx}$  kan settes lik null. Dette medfører

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z=h$$

Ved hjelp av disse grenseflatebetingelser kan  $A$  og  $B$  bestemmes og vi får

$$u = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} \sin \theta [2hz - z^2] \quad (10.8)$$

Dette viser at strømprofilen er parabolsk med maksimalhastighet

$$u_0 = \frac{\rho gh^2}{2\mu} \sin \theta$$

ved overflaten.

Integrasjon av likning (10.7) gir følgende uttrykk for trykket i væsken

$$p = -\rho g \cos \theta z + C$$

Integrasjonskonstanten  $C$  bestemmes ved grenseflatebetingelsen  $p=p_0$  ved  $z=h$  hvor  $p_0$  er trykket over væsken. Dette gir trykkfordelingen

$$p = p_0 + \rho g \cos \theta (h-z)$$

En stasjonær strøm (10.8) vil bare kunne realiseres i eksperimenter hvor strømhastigheten  $U_0$  er meget liten. Det betyr at enten må  $h$  eller  $\theta$  være svært små eller så må  $\mu$  være stor. For større strømhastigheter vil bevegelsen bli ustabil, bølger vil dannes på væskeoverflaten og tubulens vil oppstå i væsken. Det kan vises at for at (10.8) skal være en mulig stabil strømtilstand så må det dimensjonsløse Reynoldstallet

$$Re = \frac{U_0 h}{\nu} \leq \frac{5}{4} \cotan \theta$$

Dette viser at for bratte skråplan  $\theta = \pi/2$ . Så vil stabil bevegelse bare være mulig dersom væskelaget er ekstremt tynt. Ustabile væskefilmer med bølger på overflaten kan man for eksempel se på vinduer i regnvær. Tynne væskefilmer dannes ofte i vertikale rør hvor det pumpes gass som inneholder noe olje og bevegelsen i oljefilmen spiller en stor rolle for skjærspenningen mellom gassen og rørveggen.

## 10.4 Grensesjikt

Når en viskøs væske strømmer forbi en vegg vil det nær veggen oppstå en forholdsvis tynn sone hvor de viskøse spenningene dominerer og hvor strømhastigheter varierer sterkt over små avstander. Denne sonen blir kalt *grensesjikt*, og strømforholdene i grensesjiktet spiller en vesentlig rolle for motstanden på legeme som beveger seg gjennom en væske eller en gass. Forholdene i grensesjiktet er også avgjørende for varmeovergang og massetransport (f.eks. av oppløselige stoffer) fra vegg til væsken.

Vi skal her beregne tykkelsen av grensesjiktet ved en tynn plate som er orientert langs strømretningen.

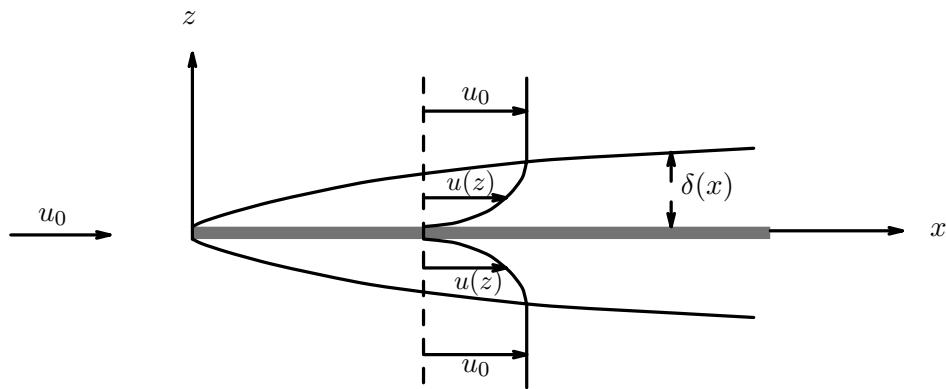


Fig. 10.4:

Væsken antas å være inkompressibel, vi forutsetter stasjonære forhold og strømmen mot platen, den frie strømmen, er uniform og strømhastigheten er  $u_0$ . Vi venter at det utvikler seg et grensesjikt nær platen med en strømprofil som skissert på figur 10.4. Tykkelsen av grensesjiktet  $\delta$  defineres vanligvis som tykkelsen av den sonen hvor strømhastigheten avviker mer enn 1% fra hastigheten i den frie strømmen. Eksperiment og erfaring tilsier at  $\delta = 0$  ved platens forkant og at  $\delta$  øker nedover langs platen i strømretningen. Strømforholdene i grensesjiktet er bestemt ved Navier-Stokes likning og  $x$ -komponenten av denne likningen kan skrives

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (10.9)$$

hvor vi har benyttet vanlig betegnelse og aksekorset er orientert slik som antydet på figuren

Vi antar at vi har å gjøre med en meget lang plate i forhold til grensesjiktets tykkelse. Av den grunn forventer vi at variasjonen i strømhastigheten i  $z$ -retningen altså på tvers av sjiktet er meget større enn variasjonene i platens retning. Dette kan uttrykkes ved

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad \text{og} \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|$$

Likeledes venter vi at hastighetskomponenten i  $x$ -retningen er meget større enn hastighetskomponenten i  $z$ -retning

$$|u| \gg |w|$$

Siden den frie strømmen er uniform så er det i dette tilfellet ingen trykkgradienter i væsken utenfor grensesjiktet. Fordi grensesjiktet er tynt og trykket må være kontinuerlig ved grensesjiktets ytterkant er det rimelig å forvente at trykkgradienten  $\frac{\partial p}{\partial x}$  er neglisjerbar også inne i grensesjiktet. Disse betraktninger gjelder imidlertid bare for grensesjiktet langs en plate. I grensesjiktet langs en sylinder som står på tvers i strømmen vil det for eksempel opptre trykkgradienter fordi det i dette tilfellet er trykkgradienter i den frie strøm som akselererer væskepartiklene forbi sylinderen. (Jfr. potensialteorien for strøm omkring sylinder ME 102.)

På bakgrunn av disse antagelsene kan (10.9) forenkles og vi får

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10.10)$$

i grensesjiktet ved en plate. I tillegg til denne likningen har vi kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10.11)$$

Vi legger merke til at selv om  $|\frac{\partial u}{\partial x}| \ll |\frac{\partial u}{\partial z}|$  så kan ledet  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  ikke sløyfes i forhold til  $w \frac{\partial u}{\partial z}$  fordi  $|u| \gg |w|$ .

Dersom vi vil finne hastighetsprofilet kan vi innføre strømfunksjonen  $\psi$  slik at  $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$  og  $w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Likningen (10.11) er da oppfylt og ved innsetning i (10.10) fåes en ikke-lineær differensielllikning for  $\psi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \quad (10.12)$$

som kan løses for eksempel med numeriske metoder. Den tilsvarende strømprofilen  $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$  er fremstilt grafisk i figur 10.4, som også viser sammenlikninger

med målinger. Strømprofilen har fått navnet *Blasius-profilet* etter den tyske forskeren ogingenøren H. Blasius (se figur 10.4).

Nær platen vil både  $u$  og  $w$  være tilnærmet lik null. Det betyr at i dette området er høyresiden av likningen (10.10)

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Denne likningen multipliseres med tettheten  $\rho$  og integrasjon gir

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_0 \quad (10.13)$$

hvor integrasjonskonstanten  $\tau_0$  er skjærspenningen ved platen.  $\tau_0$  vil selvfølgelig være en funksjon av  $x$ . Integrerer vi siste likning og setter  $u=0$  for  $z=0$  får vi

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} z \quad (10.14)$$

som viser at nær platen er hastighetsprofilen en lineær funksjon av  $z$ . Dette fremgår også av figur 10.4.

Vi skal nå utlede en relasjon som gjør det mulig å estimere grensesjiktstykkelsen med god tilnærming uten å kjenne den eksakte formen av hastighetprofilet. Ved å bruke kontinuitetslikningen (10.11) kan (10.10) skrives

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Denne likningen integreres med hensyn på  $z$  over grensesjiktet

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z}(uw) dz = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

Siden  $u=0$  for  $z=0$  og  $u=u_0$  samt  $\frac{\partial u}{\partial z} \simeq 0$  for  $z=\delta$  får vi

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2) dz + u_0 w|_{z=\delta} = -\nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (10.15)$$

Ved å integrere kontinuitetslikningen (10.11) med hensyn på  $z$  finner vi et uttrykk for hastighetskomponenten i  $z$ -retning ved ytterkanten av grensesjiktet

$$w|_{z=\delta} = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Derved kan vi skrive (10.14) på formen

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} [u^2 - u_0 u] dz = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (10.16)$$

Dette er relasjonen vi hadde til hensikt å utlede.

Vi antar nå at hastighetsprofilen i grensesjiktet er tilnærmet gitt ved

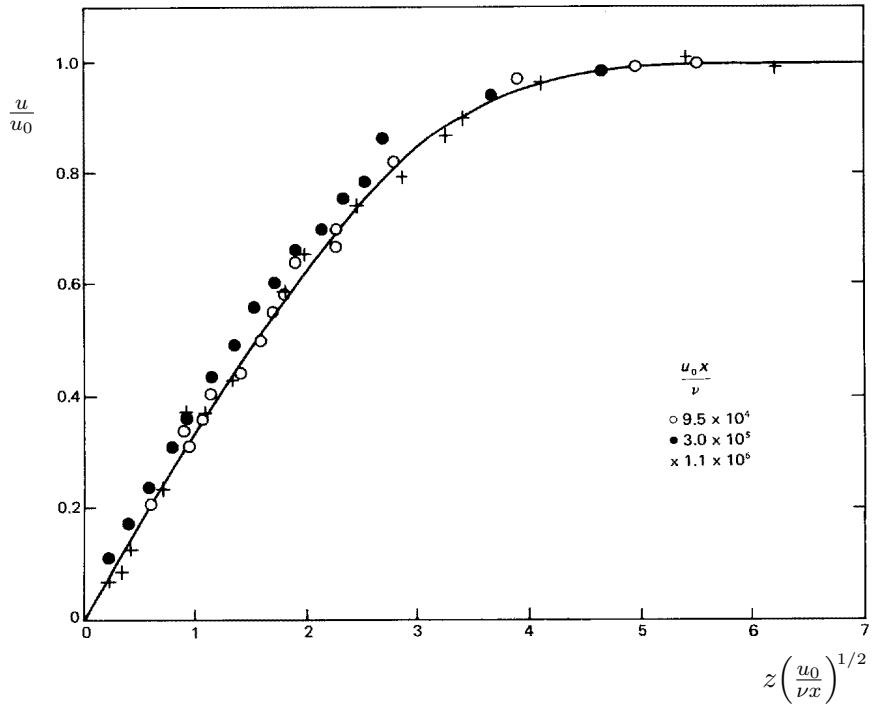


Fig. 10.5: Blasius profilet med eksperimentell verifikasjon.

$$u = u_0 \sin \left( \frac{\pi}{2\delta} z \right) \quad \text{for } z \leq \delta \quad (10.17)$$

Ved innsetning i (10.16) finner vi

$$\delta \delta' = \frac{\nu}{u_0} K \quad (10.18)$$

hvor  $K$  er en konstant som er lik  $\pi^2/(4-\pi)$  og  $\delta'$  betegner derivasjon med hensyn på  $x$ . Integrasjon av denne likningen gir grensesjiktstykken som funksjon av avstanden  $x$  fra platens forkant

$$\delta = \sqrt{2K} \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \quad (10.19)$$

Med dette valget av hastighetsprofilen får vi  $\sqrt{2K} = 4.795$  som er i meget god overensstemmelse med verdien  $\sqrt{K} = 5$  som finnes ved nøyaktigere metoder.

Det er viktig å være klar over at den eksakte strømprofil er av formen

$$u = u_0 f' \left( \sqrt{K} \frac{z}{\delta} \right) \quad (10.20)$$

med tilhørende strømfunksjon

$$\psi = \frac{u_0 \delta}{\sqrt{K}} f \left( \sqrt{K} \frac{z}{\delta} \right)$$

hvor  $f\left(\sqrt{K}\frac{z}{\delta}\right)$  er en funksjon av  $\sqrt{K}\frac{z}{\delta}$ . Innsetning i (10.12) gir

$$\frac{u_0 \delta \delta'}{\nu K} f f'' + f''' = 0$$

Velger vi  $\delta \delta' = \frac{\nu K}{u_0}$  i samsvar med (10.18), så leder dette til at grensesjiktstykken er gitt ved (10.19) og at strømprofilen kan bestemmes ved å løse differensiallikningen

$$f f'' + f''' = 0$$

Den likningen blir løst numerisk i kurset om numeriske metoder i mekanikk og det er egentlig  $f'$  som funksjon av  $z$  som er fremstilt grafisk på figur 10.4. En hastighetsprofil av formen (10.20) blir kalt en *similaritetsprofil* fordi profilen har samme form langs hele platen, bare skalaen avhenger av avstanden fra forkanten av platen.

På grunn av den viskøse skjærspenningen ved platen utsettes denne for en kraft i strømretningen. Kraften pr. lengdeenhet normalt strømretningen på en plate av lengde  $L$  er

$$F = 2 \int_0^L \tau_0 dx = 2\mu \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} dx$$

hvor 2-tallet foran integranden skriver seg fra at vi har tatt med virkningen fra begge sider av platen. Bruker vi strømprofilen (10.17) og formelen (10.19) for grensesjiktstykken får vi at

$$F = 1.31 \rho u_0 \sqrt{\nu u_0 L} \quad (10.21)$$

Ved mere nøyaktigere metoder vil man finne at konstanten i (10.21) er 1.328. Betegner vi platens bredde med  $b$  og arealet med  $S = bL$  defineres motstandscoeffisienten  $C_D$  som

$$C_D = \frac{Fb}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 S} = 2.656 \sqrt{\frac{\nu}{u_0 L}} = 2.656 Re^{-\frac{1}{2}}$$

hvor Reynoldstallet  $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$ . Vi har her benyttet den nøyaktige verdien for konstanten.

### Eksempel

En 30 fots ( $\sim 10$  m) lang båt har en bunnflate (under vann) med areal  $40 \text{ m}^2$ . Båten går med 20 knops fart ( $u_0 = 10 \text{ m/s}$ ). Vi skal finne et grovt estimat for friksjonsmotstanden på bunnflaten. vi regner bunnflaten som en plate og benytter (10.21) med  $L = 10 \text{ m}$  og platebredde  $b = 4 \text{ m}$ . Vannets viskositet er  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  og  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Motstandskraften  $F_M$  er

$$F_M = \frac{1}{2} Fb = 0.664 b \rho u_0 \sqrt{\nu u_0 L} = 266 N$$

Faktoren  $\frac{1}{2}$  kommer av at vi nå regner motstanden på den ene siden av platen. Motoreffekten som skal til for å drive båten fremover

$$E = F_M u_0 = 2660 \text{ watt} \simeq 3.6HK$$

Den tilsvarende motstandskoeffisienten er

$$C_D = \frac{Fb}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 S} = \frac{1}{2} \cdot 2.656 Re^{-\frac{1}{2}} = 1.328 \cdot 10^{-4}$$

Det er klart at friksjonsmotstanden bare utgjør en del av den totalemotstanden. I tillegg kommer motstand på grunn av kjølvannstrømmen og at båten danner bølger hvor energien i bølgene taes fra motoreffekten. Likevel forklarer ikke dette at vi får en urealistisk liten motstandskraft og et alt for lite effekt forbruk. I disse overslagsberegningene har vi antatt at grensesjiktet er laminært. For så store hastigheter som vi regner med vil denne antagelsen vise seg å bryte sammen og overslagene må korrigeres. Grensesjiktetstykkele ved bakkant av båten er

$$\delta_L = 5 \sqrt{\frac{\nu L}{u_0}} = 5 \cdot 10^{-3} m$$

som gir et Reynoldstall basert på grensesjiktstykken

$$(Re)_\delta = \frac{\delta_L U_0}{\nu} = 5 \cdot 10^4$$

Denne verdien av Reynoldstallet ligger over grensen for omslag til turbulens i grensesjiktet. (Se ME 102-boken, s. 168.) For de hastigheter og platestørrelser vi her regner med vil turbulensen bevirke at verdien for  $C_D$  blir meget større og på grunnlag av målinger kan en sette  $C_D = 2 \cdot 10^{-3}$ . Dette leder til en motstandskraft på

$$F_M = C_D \frac{1}{2} \rho u_0^2 S = 4000 N$$

og en effekt

$$E = F_m u_0 = 40kW \simeq 54HK$$

I tillegg kommer så bølgemotstanden.



# Kapittel 11

## Energilikninger for væsker og elastiske stoff. Varmeledning.

### 11.1 Energilikningen for den mekaniske energien

Vi antar at den ytre kraft kan avledes av et potensiale  $V$  som er uavhengig av tiden og skriver

$$\{f_i^y\} = -\nabla V = -\left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\}$$

Potensialet  $V$  er altså et mål for den potensielle energien pr. masseenhet. Eksempelvis er  $V = gz$  for tyngdefeltet hvor  $z$ -aksen er rettet vertikalt.

Ved å multiplisere bevegelseslikningen på primitiv form (4.1) (innsatt  $\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt}$ ) med  $v_i$  får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (11.1)$$

Vi innfører den individuelle derivasjonsooperatoren

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

og siden  $V$  er uavhengig av tiden kan vi skrive (11.1) på formen

$$\frac{D}{dt}(T+V) = \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (11.2)$$

hvor  $T = v_i^2/2 = \mathbf{v}^2/2$  er den kinetiske energien pr. masseenhet. Likningen (11.2) viser hvordan den mekaniske energien  $T+V$  pr. masseenhet endrer seg for en partikkkel av mediet som følge av spenningens arbeid. Vi kaller (11.2) likningen for den mekaniske energien.

### 11.2 Spenningskretenes totale arbeid

Leddet på høyre side av likning (11.2) er ikke spenningskretenes totale arbeid. For å finne dette må vi gå fram på følgende måte: Vi betrakter et flateelement

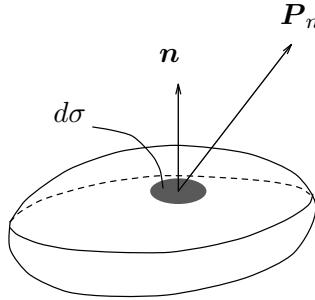


Fig. 11.1:

med areal  $d\sigma$  og flatenormal  $\mathbf{n}$ . Ifølge Cauchy's 1. relasjon er spenningen på flaten gitt ved

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}$$

Den tilsvarende kraften er

$$d\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n d\sigma = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Arbeidet som kraften utfører pr. tidenhet på mediet er

$$dA = d\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{v} = (\mathcal{P} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma \quad (11.3)$$

Dette uttrykket kan vi eventuelt skrive på ”indeks form”

$$dA = P_{ij} n_j v_i d\sigma$$

Skal vi finne arbeidet på et volumelement må vi integrere (11.3) over volumets begrensningsflate. Flateintegralet kan lett omskrives til et volumintegral når man benytter Gauss sats. Fordi enkelte av leserne muligens ikke er kjent med denne satsen skal vi antyde hvordan integralet kan regnes ut. Dvs. vi gir et primitivt bevis for Gauss sats.

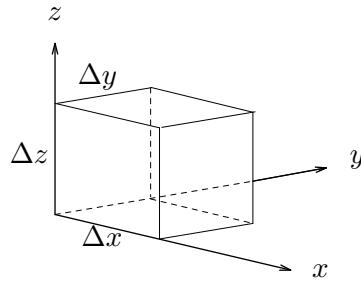


Fig. 11.2:

La oss betrakte et parallellepiped med sidekanter  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  og  $\Delta z$  og volum  $\Delta\tau$ . Arbeidet som utføres på sideflaten  $a, b, c, d$  er

$$P_{ix} v_i \Delta y \Delta z$$

På den motstående sideflaten får vi et tilsvarende uttrykk med motsatt fortegn fordi flatenormalen har motsatt retning. Det samlede arbeidet som utføres på de to sideflatene kan derfor skrives

$$\Delta A_x = [(P_{ix}v_i)_{x=x+\Delta x} - (P_{ix}v_i)_x] \Delta y \Delta z \simeq \frac{\partial}{\partial x} (P_{ix}v_i) \Delta \tau$$

På tilsvarende måte kan man gå fram å finne arbeidet på de øvrige sideflatene  $\Delta A_y$  og  $\Delta A_z$  og det totale arbeidet  $\Delta A$  kan skrives som summen av disse bidragene

$$\Delta A = \Delta A_x + \Delta A_y + \Delta A_z = \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij}v_i) \Delta \tau \quad (11.4)$$

Dette er uttrykket for det totale arbeidet som spenningskraftene utfører pr. tidsenhet på volumelementet  $\Delta \tau$ . Dersom vi er interessert i arbeidet pr. masseenhet finner vi det ved å dividere (11.4) med elementets masse  $\rho \Delta \tau$  og vi får

$$W = \frac{\Delta A}{\rho \Delta \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij}v_i) \quad (11.5)$$

### 11.3 Energilikningen for den totale energien

Vi betegner den indre energien pr. masseenhet (termisk energi elastisk energi) med  $E$ . Den totale energien er summen av den mekanisk energien  $T+V$  og den indre energien  $E$ .

Ifølge termodynamikkens første hovedsetning så forandrer den totale energien seg ved spenningskraftenes totale arbeid  $W$  og ved den tilførte varme  $Q$  (pr. masseenhet) og vi kan skrive

$$\frac{D}{dt} (T+V+E) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij}v_i) + Q \quad (11.6)$$

Dette er den termodynamiske energilikningen eller energilikningen for den totale energien.

Ved å substrahere energilikningen (11.2) fra (11.6) får vi etter enkel omforming

$$\frac{DE}{dt} = \frac{1}{\rho} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + Q \quad (11.7)$$

Denne likningen sier hvordan spenningskraftenes arbeid virker inn på den indre energien.

### 11.4 Energi dissipasjon i viskøse væsker

Vi kan bruke likningen (11.7) til å beregne hvordan viskositeten eller friksjonen i en væske medfører at den indre energien øker dvs. temperaturen stiger. Vi vet at når hastigheten dør ut i en væske som er satt i bevegelse inne i en lukket

beholder så må væskens kinetiske energi ha gått med til å varme opp væsken. Vi spør: Hvordan skjer denne energioverføringen? Likningen (11.7) kan gi oss svaret på det.

La oss først skrive

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Det første leddet på høyre side er komponentene i den symmetriske tensoren  $\{\dot{\epsilon}_{ij}\}$  og det andre leddet er komponenten i en antisymmetrisk tensor. Skriver vi ut uttrykket  $P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  vil bare leddene som inneholder den symmetriske tensoren gi bidrag mens alle ledd som kommer fra det antisymmetriske tensoren hever hverandre. Vi kan følgelig skrive

$$P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = P_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (11.8)$$

Ved innsetning av uttrykket (7.14) for  $P_{ij}$  finner vi

$$P_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^2$$

fordi  $\delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Nå er

$$(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}) = \dot{\epsilon}_{ij}^2 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2$$

Vi kan derfor skrive

$$\begin{aligned} \Delta &= (\kappa - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^2 \\ &= \kappa(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij})^2 \end{aligned} \quad (11.9)$$

Dette viser at størrelsen  $\Delta$  alltid er positiv.

Energilikningen (11.7) kan følgelig bringes over på formen

$$\frac{DE}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\Delta}{\rho} + Q \quad (11.10)$$

Første leddet på høyre side av (11.10) uttrykker forandringen i indre energi som følge av ekspansjon eller kontraksjon. Den andre størrelsen  $\Delta/\rho$  som altså er positiv medfører alltid en økning av den indre energien. Vi betegner dette leddet *energi-dissipasjonen* og den er en ensidig irreversibel overgang fra mekanisk energi til indre energi dvs. varme. Størrelsen  $\Delta$  er energi-dissipasjonen pr. volumenhet. Den har enheten Joule/m<sup>3</sup>s. For en inkompressibel væske hvor  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  er uttrykket for energi-dissipasjonen spesielt enkelt.

$$\Delta = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^2 \quad (11.11)$$

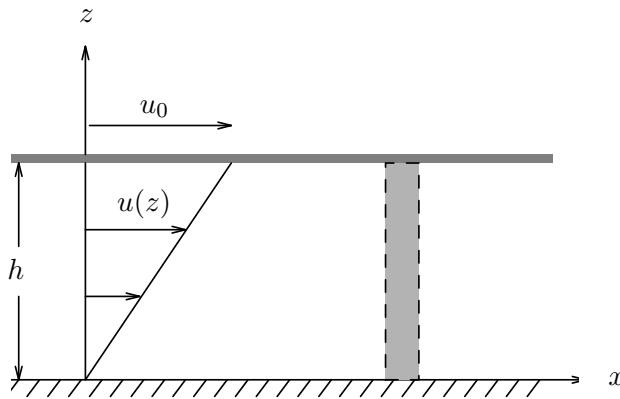


Fig. 11.3:

La oss til slutt som et eksempel beregne energi-dissipasjonen for en plan Couette-strøm. I dette tilfellet er strømhastigheten

$$u = \frac{U_0}{h} z$$

hvor  $U_0$  er hastigheten av "lokket" og  $h$  er avstand mellom lokket og bunnplanet. Vi finner

$$\dot{\epsilon}_{ij}^2 = \dot{\epsilon}_{xx}^2 + 2\dot{\epsilon}_{xz}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2 = 2\dot{\epsilon}_{xz}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{U_0}{h} \right)^2$$

fordi  $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{zz} = 0$ . Vi har derfor at

$$\Delta = \mu \left( \frac{U_0}{h} \right)^2$$

og den samlede dissipasjonen i en væskesøyle med grunnflate i flateenhet er

$$\Delta h \cdot 1 = \mu \frac{U_0}{h}$$

Arbeidet som denne kraften utfører pr. tidsenhet er

$$P_{xz} \cdot U_0 = \mu \frac{U_0^2}{h}$$

Vi ser av dette uttrykket at arbeidet som utføres pr. tidsenhet når lokket føres med konstant hastighet tilsvarer den samlede energi-dissipasjonen i væskesøylen. Det mekaniske arbeidet som vi må bruke for å føre lokket bortover med konstant hastighet går altså med til å øke de indre energien i væskeren. Med andre ord; det mekaniske arbeidet fører til at væskeren varmes opp.

## 11.5 Elastisk energi

Ved å benytte (11.8) som også gjelder for et elastisk stoff kan energilikningen (11.7) skrives

$$\frac{DE}{dt} = \frac{1}{\rho} P_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + Q \quad (11.12)$$

Vi skal nå for enkelhets skyld anta at vi har adiabatiske tilstander dvs. at det ikke er noen varmeutveksling. Vi setter derfor  $Q = 0$ . Vi antar videre at forrykningene er små slik at hastigheten  $v_i \simeq \partial u_i / \partial t$  hvor  $u_i$  betegner forrykninlene. Dette medfører at

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$$

hvor  $\epsilon_{ij}$  er definert ved (6.8). Forutsetningen om små forrykninger innebærer også at  $\frac{DE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t}$ . Bruker vi disse resultatene samtidig med at vi innfører uttrykket (7.13) for spenningen i (11.12) så kan denne likningen skrives

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{ij}^2 \right]$$

Dette viser at den indre energien er gitt ved

$$E = \frac{1}{\rho} \left[ \lambda \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{2} + \mu \epsilon_{ij}^2 \right] \quad (11.13)$$

som er uttrykket for den elastiske energien i et isotropt ideelt elastisk medium. Vi legger merke til at den indre energien bare er avhengig av deformasjonene i mediet. Dersom mediet blir deformert øker den indre elastiske energien, men den avtar igjen til den opprinnelige verdi når deformasjonene opphører. Det er altså ikke noen ensidig irreversibel energiovergang til indre energi i et ideelt elastisk medium. Vi sier at mediet er *ikke-dissipativt*.

Vi skal til slutt beregne energien i en plan longitudinal bølge ( $P$ -bølge) som brer seg i  $x$ -aksens retning. Forrykningene er gitt ved

$$u = u_0 \sin k(x - ct)$$

hvor  $u_0$  er amplituden,  $k$  er bølgetallet og  $c$  er bølgehastigheten (fasehastigheten). Vi har at

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

og at bølgeperioden  $T = 2\pi/kc$ .

Den elastiske energien pr. masseenhett i  $P$ -bølggen finner vi ved å benytte (11.13). Dette gir siden  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \epsilon_{ii}$  og  $\epsilon_{ij} = 0$  når  $i \neq j$ .

$$E = \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho} \epsilon_{ii}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho} u_0^2 k^2 \cos^2 k(x - ct)$$

Ved enkle omskrivninger får vi at den maksimale energien i løpet av en periode er

$$E_m = \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho} u_0^2 k^2 = 2\pi^2 \left( \frac{u_0}{T} \right)^2$$

For et jordskjelv av styrke 6 vil forrykningsamplituden for  $P$ -bølger med periode  $T=1$  s vanligvis være omkring  $u_0 = 190$  nanometer ( $190 \cdot 10^{-9}$  m) i en storsirkel avstand på  $60^\circ$  fra episentret. Dette tilsvarer for eksempel avstanden mellom Norge og Japan. Med de angitte verdier for  $u_0$  og  $T$  får vi  $E_m = 1.8 \cdot 10^{-13}$  J/kg.

I tillegg til den elastiske energien er det en kinetisk energi i bølgebevegelsen. Det kan lett vises at den midlere verdien over en periode av den elastiske energien og den kinetiske energien er like!

Utfra energilikningen er det også mulig å komme frem til det maksimale antall elastisitetskoeffisienter for et anisotrop lineært elastisk medium. Vi antar det er ingen varmeutveksling og at forrykningene er små. Energilikningen kan da skrives

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} P_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$$

Siden spenningskomponentene  $P_{ij}$  er funksjoner av tøyningstensorkomponentene  $\epsilon_{ij}$  viser denne likningen at  $E$  er en tilstandsfunksjon som avhenger av  $\epsilon_{ij}$ . Vi må derfor ha at

$$P_{ij} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Dersom vi nå krever at  $P_{ij}$  er en lineær funksjon av  $\epsilon_{ij}$  må  $E$  være et andregradspolynom i  $\epsilon_{ij}$ . Siden det er 6 uavhengige komponenter i tøyningstensoren vil det mest generelle formen av andregradspolynomet for  $E$  inneholde 21 uavhengige koeffisienter foran leddene i polynomet. Et anisotrop medium vil altså ha 21 elastisitetskoeffisienter i relasjonene mellom spenninger og tøyninger. Kravet om isotropi reduserer dette tallet til 2 slik vi har sett i kapittel 7.

## 11.6 Varmeledning. Varmetransport i væsker.

I den termodynamiske energilikningen (11.6) har vi ikke gitt noe mål for varmeutvekslingen bortsett fra den har fått betegnelsen  $Q$ . Varmeutvekslingen kan ha forskjellige årsaker og varme kan tilføres de enkelte deler av mediet f.eks. ved

1. varmeledning
2. stråling
3. radioaktiv varmeproduksjon
4. latent varme ved faseoverganger.

Vi skal nøye oss med å se på hvordan varmeledningsprosessen kan parametriseres dvs. uttrykkes ved de tilstandsvariable. Vi skal her måle temperaturen  $T$  i den absolutte temperaturskala grader Kelvin ( $K$ ).

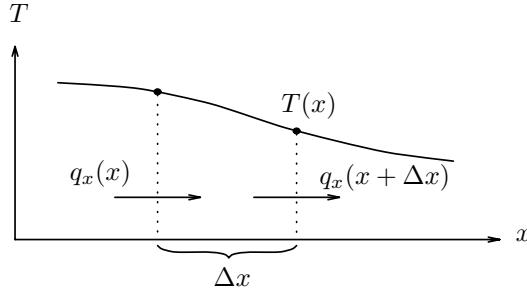


Fig. 11.4:

Det viser seg at varmestrømmen på grunn av ledning er proporsjonal med temperaturgradienten. Dette er Fouriers lov oppkalt etter den franske vitenskapsmann og administrator Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Dersom  $q_x$  er varmestrømmen pr. tidsenhet og flateenhet i  $x$ -retning kan denne loven skrives

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11.14)$$

hvor  $k$  er *termisk konduktivitet* eller varmeledningstallet. Dimensjonen for varmeledningstallet er  $[k] = J/mKs$  og størrelsen kan finnes i tabeller for de fleste stoff. Det negative fortegnet i (11.14) er valgt fordi varmestrømmen går fra steder med høy temperatur mot steder med lavere temperatur.

Den netto varmestrøm *inn* i området med lengde  $\Delta x$  gjennom et flatelement med areal  $\Delta\sigma = \Delta y \Delta z$  er

$$\Delta Q = [-q_x(x+\Delta x) + q_x(x)]\Delta\sigma \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Delta x \Delta\sigma \quad (11.15)$$

Generaliserer vi Fouriers lov (11.14) til tilfeller hvor temperaturen er en funksjon både av  $x, y$  og  $z$  får vi at varmestrømsvektoren  $\mathbf{q}$  kan skrives

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

På tilsvarende måte som i det en-dimensjonale tilfellet finner vi at den netto varmestrømmen til et volumelement med volum  $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$  er

$$\Delta Q = -\nabla \cdot \mathbf{q} \Delta\tau = \nabla \cdot (k \nabla T) \Delta\tau$$

For varmestrømmen pr. masseenhet  $Q$  finner vi

$$Q = \frac{\Delta Q}{\rho \Delta\tau} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T \quad (11.16)$$

Det er da forutsatt at  $k$  er konstant i mediet.

For vanlige væsker er det liten forskjell på den spesifikke varmekapasiteten  $c$  (enhet  $J/K kg$ ) ved konstant trykk og konstant volum og den indre termiske energien kan uttrykkes ved

$$E = cT \quad (11.17)$$

Vi kan nå sette uttrykkene (11.16) og (11.17) for  $Q$  og  $E$  inn i energilikningen (11.10). Forutsetter vi at også  $c$  er konstant i mediet leder dette til varmeledning- eller varmetransportlikningen for en *tilnærmet inkompresibel væske*

$$\frac{DT}{dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\Delta}{\rho c} \quad (11.18)$$

hvor  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  er *varmediffusiviteten*. Varmediffusiviteten har dimensjon  $[\kappa] = m^2/s$  dvs. samme dimensjon som den kinematiske viskositetskoeffisienten  $\nu$ . Forholdet mellom disse to størrelser er derfor et dimensjonsløst tall som vi betegner

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

$Pr$  har navnet Prandtl-tallet etter den tyske hydro- og aerodynamiker Ludvig Prandtl (1875–1953). Tallet er et mål for hvor fort bevegelsesmengde sprer seg i forhold til varme gjennom molekylære diffusjonsprosesser.

Skriver vi ut venstre siden i (11.18) får likningen formen

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underset{\text{konvektiv varmetransport}}{\mathbf{v} \cdot \nabla T} = \underset{\text{varmeledning}}{\kappa \nabla^2 T} + \underset{\text{dissipasjon}}{\Delta / \rho c} \quad (11.19)$$

Dette viser at temperaturen endrer seg i tiden som følge av tre forskjellige fysikalske prosesser. Vi har *varmeledning* som er varmeoverføring ved molekylære prosesser og *konvektiv varmetransport* som skyldes varmetransport med den makroskopiske strømmen i væsken. Dessuten har vi energi-dissipasjonen. Vi kaller likningen (11.19) *varmetransportlikningen* og i denne likningen inngår differansene i varmestrøm. Den konvektive varmestrømmen pr. flateenhet og tidsenhet kan skrives

$$\mathbf{q}_k = \rho c T \mathbf{v}$$

og varmestrømmen ved ledning er gitt ved

$$\mathbf{q}_l = -k \nabla T$$

Vanligvis er den konvektive varmetransporten mye større enn varmeledningen  $|\mathbf{q}_k| \gg |\mathbf{q}_l|$ . Et unntak er varmetransporten nær faste begrensningsflater hvor strømhastigheten er liten og varmeledningen dominerer i forhold til konvektiv varmetransport. Oppvarmingen pga. energi-dissipasjonen er som oftest så ubetydelig at denne effekten kan neglisjeres i forhold til andre varmekilder.

Til hjelp ved beregninger angir tabell 2 verdier for dynamisk viskositetskoeffisienten  $\mu$ , kinetisk viskositetskoeffisient  $\nu = \mu/\rho$ , varmeledningstallet  $k$ , varmediffusjonstallet  $\kappa$  og Prandtl tallet  $Pr$  for vann og luft ved  $15^\circ\text{C}$ . Den spesifikke varmekapasiteten for vann ved  $15^\circ\text{C}$  er  $c = 4.19 \cdot 10^3$  Joule/kg  $K$ . Varmekapasiteten for luft ved  $15^\circ\text{C}$  og konstant trykk er  $c_p = 1.00 \cdot 10^3$  Joule/kg  $K$ .

Tabell 2

Medium	$\mu$ $kg/ms$	$\nu$ $m^2/s$	$k$ $J/mKs$	$\kappa$ $m^2/s$	Pr
Vann	$1.137 \cdot 10^{-3}$	$1.138 \cdot 10^{-6}$	0.590	$1.40 \cdot 10^{-7}$	8.10
Luft	$1.780 \cdot 10^{-1}$	$1.450 \cdot 10^{-5}$	0.025	$2.02 \cdot 10^{-5}$	0.72

## 11.7 Diffusjon av varme og bevegelsesmengde

Varme er et uttrykk for hurtige uordnede bevegelser av molekylene på mikroskopisk skala og temperatur er et mål for den kinetiske energien i disse bevegelsene. Ved varmeledning brer varmen seg ved at de hurtige bevegelser av molekylene i de varme områdene overføres ved støt og koblinger mellom molekylene til kalde områder hvor molekylene beveger seg langsommere. Etter hva vi har sett kan dette beskrives ved varmeledningslikningen som i det en-dimensjonale tilfellet kan skrives.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (11.20)$$

hvor  $\kappa$  er diffusjonskoeffisienten. Størrelsen på diffusjonskoeffisienten vil bestemme hvor fort varmen brer seg, eller diffunderer som vi også sier. Vi sier derfor at likningen (11.20) beskriver en *diffusjonsprosess* og kaller likningen en *diffusjonslikning*.

I en væskestrøm har molykylene både en hurtig uordnet mikroskopisk bevegelse samtidig med en midlere ordnet makroskopisk bevegelse som vi tolker som strøm. Ved støt og koblinger kan den makroskopiske bevegelsen overføres fra molekyler som beveger seg hurtige til de som beveger seg sakte. På denne måten kan bevegelsesmengde bre seg i væsken ved en liknende diffusjonsprosess som for varme.

Et eksempel på dette er hvordan en viskøst væske som grenser inn til en plate og som settes i bevegelse ved at platen trekkes fremover med konstant fart. Bevegelsen vil, dersom en starter fra ro, forplante seg oppover i væsken. Dersom vi forutsetter at viskositeten i væsken er tilstrekkelig stor vil strømmen i væsken være rettlinjet, parallell med platen, og uten ustabiliteter og turbulens. Under disse forutsetninger vil det ikke være horisontale trykkgradienter i væsken. Legger vi  $x$ - og  $z$ -aksene henholdsvis langs og normalt platen så kan hastighetsfeltet i væsken skrives  $\mathbf{v} = \{u(z, t), 0\}$ , og fra Navier-Stokes likning (8.3) får vi at

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (11.21)$$

Dette viser at vi har en liknende diffusjonslikning for bevegelsesmengde som for varmeledning. Denne analogien kan man utnytte til å finne løsninger for likning (11.21) når vi allerede har funnet løsninger for (11.20) eller omvendt.

Vi velger som initial- og randbetingelser

$$u(z, t = 0) = 0, \quad u(z = 0, t) = u_o, \quad \text{og} \quad u(z = \infty, t) = 0 \quad (11.22)$$

og søker en similaritetsløsning av (11.21) hvor strømkomponenten er en funksjon av en similaritetsvariabel

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{\nu t}} \quad (11.23)$$

slik at  $u(z, t) = u(\eta)$ . Vi lar  $u'(\eta)$  betegne den deriverte av  $u$  med hensyn på  $\eta$  og finner

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= u'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{aligned}$$

Nå er

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{z}{\sqrt{\nu t}} \frac{1}{2t} = -\frac{\eta}{2t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(\eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 = u''(\eta) \frac{1}{\nu t}$$

Ved innsetting i likning (11.21) får vi så

$$u''(\eta) = -\frac{\eta}{2} u'(\eta)$$

Integrasjon av denne likningen gir

$$u'(\eta) = A \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right)$$

Ved å integrere en gang til og benytte randbetingelsene får vi

$$u(\eta) = u_o \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \right) \right) \quad (11.24)$$

hvor funksjonen  $\operatorname{erf}(x)$  er den såkalte feilfunkjonen. Feilfunksjonen er mye brukt i statistikk, og er definert ved integralet

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds \quad (11.25)$$

Funksjonen er lik 0 for  $\eta = 0$  og lik 1 for  $\eta = \infty$  og den finnes forøvrig tabulert i håndbøker i matematikk og statistikk. Hastighetprofilen (11.24) er plottet i figur 11.5 på grunnlag av tabellverdier for feilfunksjonen. Vi legger merke til at profilen ved forskjellige tidspunkter er "similær", eller likedannet, ved at profilen reduserer seg til en og samme graf ved den valgte skaleringen av

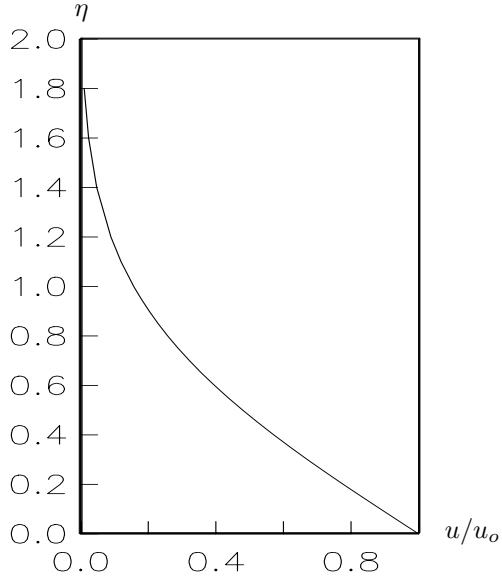


Fig. 11.5: Strømprofilen ved platen

aksen. Endringene i profilformen mellom to tidspunkter,  $t_1$  og  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), består derfor i at en ved  $t_2$  må gå til større  $z$ -verdier for å ha samme verdi for  $\eta$  og derved samme strømhastighet som ved  $t_1$ . På den måten viser grafen også hvordan bevegelsen brer seg oppover i væsken etter som tiden går.

På grunn av likheten mellom likningene (11.20) og (11.21) kan vi nå direkte skrive opp løsningen av (11.20) for det tilfellet at varmen brer seg, med ledning, oppover fra en plate som holdes på fast temperatur  $T_o$ . Vi antar her for enkelhetsskyld at temperaturen i mediet ved  $t = 0$  er  $T = 0$ . Innfører vi en similartitetsvariabel

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{\kappa t}}$$

kan løsningen av (11.20) med nevnte randbetingelser skrives

$$T(\zeta) = T_o(1 - \operatorname{erf}(\zeta))$$

Formen på grafen  $T(\zeta)$  og tolkningen av dette resultatet blir selvfølgelig tilsvarende som for tilfellet i figur 11.5.

Med andre randbetingelser enn hva vi har valgt her har man en tilsvarende analogi mellom løsninger av (11.20) og (11.21), men de matematiske uttrykkene blir mer komplisert enn i tilfellet som er behandlet her. For eksempel vil løsningen, dersom laget over platen har en endelig tykkelse  $H$  (og ikke er uenkelig tykk som her antatt) bestå av en sum hvor feilfunksjoner inngår i hvert ledd.

Til slutt er det interessant å legge merke til at det er ingen tilfeldiget at feilfunksjonen dukker opp som løsning av diffusjonslikningen. Feilfunksjonen beskriver blant annet fordelingen av statistiske vilkårlige og uavhengige målefeil.

Spedningen som fremkommer ved diffusjon, etter et stort antall vilkårlige støt og koblinger mellom molekyler i uordnet bevegelse, vil ikke uventet fordele seg statistisk på tilsvarende måte.

## 11.8 Termisk drevet strøm

På grunn av termisk utvidelse vil temperaturforskjeller i en væske eller gass skape tetthetsforskjeller og derved forskjeller i oppdriftskraft som så kan føre til sterke strømninger. Dette kalles termisk drevet strøm eller termisk konveksjon. Oppvarming og avkjøling i atmosfæren og havet er den primære årsaken til vind og strøm. På en varm soldag varmes for eksempel bakken opp og den lette luften som dannes stiger opp mens kaldere luft trekkes inn fra siden. Er luften fuktig og oppdriften sterkt kan de vertikale luftstømmene stige høyt til værs og danne tårnformede skyer med tordenvær (cumulonimbus). Ofte vil man se at skyene med oppstigende luft ordner seg i bånd eller cellestrukturer sammensatt av mange enkeltskyer. I laboratoriet vil man kunne se lignende cellestrukturer i tynne væskelag som varmes opp nedenfra. Seksantede cellestrukturer, hvor væsken i noen tilfeller stiger opp i midten og synker ned ved kantene i cellen, er for eksempel vanlige. I andre tilfeller går strømmen i motsatt retning. Det er påvist at strømretningen avhenger av hvordan viskositeten endrer seg med temperaturen. I det hele tatt byr termisk drevet strøm på et rikt utvalg av fascinerende strømningsformer som det både er spennende å studere, og hvor det er mange viktige anvendelsområder for teoretiske undersøkelser. Dette gjelder spesielt innenfor teknisk varmetransport og kjøleteknikk.

Her skal vi nøyne oss med å se på en forholdsvis enkel løsning av Navier-Stokes likning som beskriver termisk drevet strøm mellom to parallelle vertikale plater, den ene kald og den andre varm. I dette tilfellet vil væsken ved den varme platen få en oppdrift, på grunn av termisk utvidelse, og stige oppover. Væsken ved den kalde platen vil derimot få en negativ oppdrift og vil derfor synke. På den måten vil vi kunne få en stasjonær bevegelse hvor væsken stiger ved den varme platen og synker ved den kalde, mens varmen ledes gjennom væskelaget fra den varme til den kalde platen. Vi betrakter strøm i  $xz$ -planet som vist i figur 11.6.

Avstand mellom platene er  $h$  og temperaturen av platene er henholdsvis  $T_0 + \frac{\Delta T}{2}$  og  $T_0 - \frac{\Delta T}{2}$ . Vi antar at det er stasjonære forhold og at temperaturfeltet bare er en funksjon av  $x$ . På tilsvarende måte antar vi at strømfeltet er rettlinjet og også bare avhengig av  $x$  slik at

$$\mathbf{v} = \{0, w(x)\}$$

Varmetransportlikningen reduserer seg derfor til

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med randbetingelser  $T = T_0 \pm \frac{\Delta T}{2}$  ved  $x = \pm \frac{h}{2}$ . Integrasjon av denne likningen

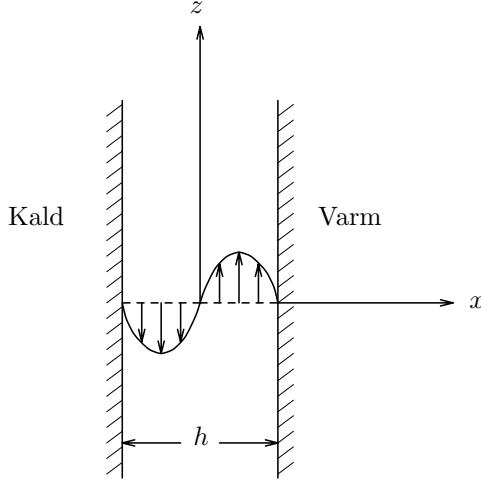


Fig. 11.6: Termisk drevet strøm mellom to vertikale plater.

gir etter at integrasjonskonstantene er bestemt ved randbetingelsene

$$T(x) = T_0 + \frac{\Delta T}{h}x \quad (11.26)$$

Tettheten i væsken,  $\rho$ , er bestemt ved en tilstandslikning. Generelt vil tilstandsligningen ha formen

$$\rho = \rho(p, T)$$

slik at tetthet avhenger både av temperatur og trykk. For små strømhastigheter, mye mindre en lydhastigheten, er trykkavhengigheten neglisjerbar. For små temperaturinterval kan en dessuten med god tilnærming anta at  $\rho$  er en lineær funksjon av  $T$

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$$

hvor  $\rho_0$  og  $T_0$  er henholdsvis samhørende referanseverdier for temperatur og tetthet. Parameteren  $\beta$  betegner den termiske utvidelseskoeffisienten. Med temperaturprofilen (11.26) får vi altså en tetthetsvariasjon i væskelaget gitt ved

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\beta \Delta T}{h}x\right)$$

Vertikalkomponenten av Navier-Stokes likning (8.3) gir

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho g$$

Setter vi nå inn for tettheten får vi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_0 g + \frac{\rho_0 g \beta \Delta T}{h} x$$

Denne likningen er oppfylt når vi velger

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g$$

og

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0 g \beta \Delta T}{\mu h} x$$

Ved integrasjon av den første finner vi:

$$p = p_0 - \rho_0 g z$$

hvor  $p_0$  er trykket i origo. Den andre likningen integreres to ganger og de to integrasjonsbetingelsene bestemmes ved å kreve  $w = 0$  for  $x = \pm \frac{h}{2}$ . Dette gir:

$$w(x) = \frac{g \beta \Delta T h^2}{24 \nu} \frac{x}{h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right] \quad (11.27)$$

Den maksimale strømhastigheten inntreffer for  $\frac{x}{h} = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$  og er

$$w_s = \pm \frac{\sqrt{3} g \beta \Delta T h^2}{216 \nu}$$

Strømprofilen er skissert i figur 11.7, som viser at strømmen er oppover i den

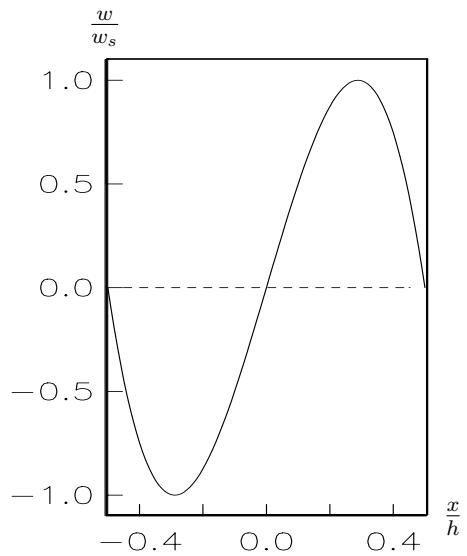


Fig. 11.7: Strømprofilen i trang spalte

varme del av væskelaget og nedover i den kalde delen. Styrken av strømmen,  $w_s$ , avhenger av temperaturdifferansen og avstanden mellom platene samt tyngdeakselerasjonen, viskositeten og den termiske utvidelseskoeffisienten.

Løsningen av Navier-Stokes likning som vi har funnet her kan for eksempel beskrive strømningen i den smale luftfylte spalten i isolerglass. I isolerglasset er imidlertid strømningen avgrenset øverst og nederst i glasset og i disse områdene vil det være en strøm på tvers av spalten som skissert til venstre i figur 11.8.

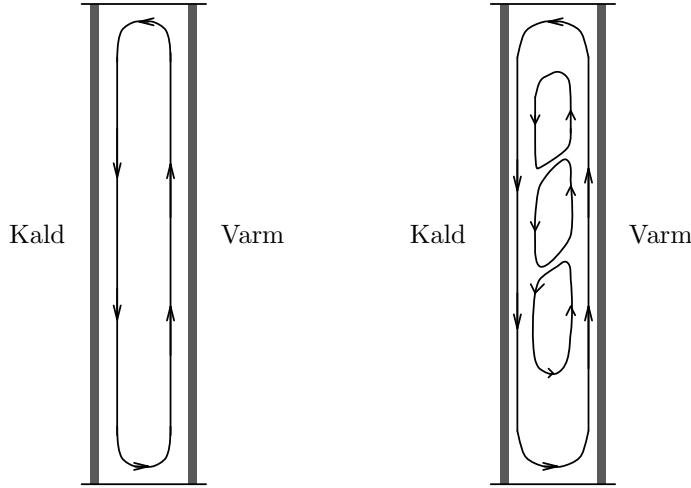


Fig. 11.8: Strømninger i luftspalten i isolerglass.

Løsningen kan derfor bare gjelde i det indre av spalten et stykke bort fra endene. Dersom strømmen i spalten blir for sterk kan det også oppstå instabiliteter og turbulens og det kan for eksempel avsnøre seg langstrakte celler i strømmen slik som er skissert til høyre i figur 11.8. Dette vil sterkt påvirke varmetransporten gjennom isolerglasset.

For å få en ide om hvilke strømhastigheter en kan regne med er det interessant å gjøre et overslag på grunnlag av uttrykket (11.27). Med  $\Delta T = 20K$ ,  $\beta = 3.5 \cdot 10^{-3}1/K$ ,  $\nu = 0.15 \cdot 10^{-4}m^2/s$  og  $h = 1\text{ cm}$  får vi  $w_s = 3\text{ cm/s}$ .

## 11.9 Krypstrøm

I en svært seig viskøs væske vil både strømhastigheten og akselerasjonen vanligvis være liten. På norsk kan vi kalle dette krypstrøm som en fri oversettelse av den engelske betegnelsen “creeping motion”. Krypstrøm kan for eksempel forekomme i lavastrøm og i seigt flytende lag i jordens indre, og i strøm av seige oljer, lakk og maling. I slike tilfeller kan vi ofte sløyfe akselerasjonsleddet i Navier Stokes likning (8.3) som da forenkler seg til

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} - g\mathbf{k} \quad (11.28)$$

Her har vi dessuten antatt at tyngdekraften er den eneste volumkraften og vi har valgt  $z$ -aksen med enhetsvektor  $\mathbf{k}$  vertikalt oppover. Likningen ovenfor beskriver en bevegelse hvor trykk, viskøse spenninger og tyngdekraften er de dominerende krefter. Væsken, eller det flytende stoffet, kan som oftest regnes som inkompressibel, slik at hastighetsfeltet er divergensfritt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11.29)$$

Tar vi divergensen til likning (11.28) og antar homogen væske slik at  $\rho$  og  $\nu$  er konstanter får vi:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (11.30)$$

som viser at for krypstrøm vil trykket i væsken oppfylle Laplace-likningen. Vi skal nå se på et eksempel hvor overflaten av en seig væske er deformert som en sinusformet bølge (figur 11.9):

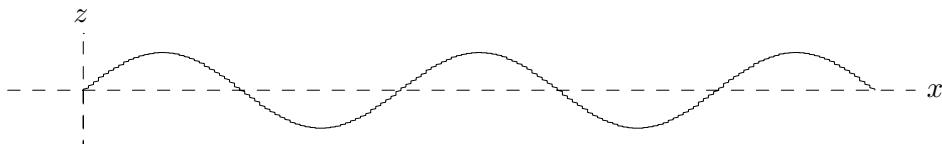


Fig. 11.9: Bølgeform på overflaten.

$$\eta = a(t) \sin kx$$

Denne overflateformen kan vi tenke oss å ha oppstått for eksempel ved et periodisk varierende trykk som virket langs overflaten.

Det som vil skje videre når trykket forsvinner er at massen i bølgetoppene ( $\eta > 0$ ) vil sige ned og fylle bølgedalene ( $\eta < 0$ ) slik at overflaten etterhvert blir plan. Vi skal beregne hvor fort denne utflatningen av overflaten skjer. Grenseflatebetringesene ved overflaten  $z = \eta$  er

$$\begin{aligned} P_{nn} &= -p_0 \\ P_{nt} &= 0 \\ \frac{D\eta}{dt} &= w \end{aligned} \quad (11.31)$$

Disse tre betingelsene uttrykker henholdsvis at normalspenningen  $P_{nn}$  på flaten er lik lufttrykket  $p_0$ , skjærspenningen  $P_{nt} = 0$  og den kinematiske betingelsen som sier at væskepartikler ikke beveger seg gjennom flaten. Enhetsnormalen til overflaten kan skrives:

$$\mathbf{n} = \{n_x, n_z\} = \left\{ -\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right\} \Bigg/ \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}$$

For to-dimensjonal bevegelse er spenningstensoren

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{Bmatrix}$$

Derved blir spenningen på overflaten

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} = \{P_{xx}n_x + P_{xz}n_z, P_{zx}n_x + P_{zz}n_z\}$$

Siden normal- og tangentialspenningen på overflaten henholdsvis er

$$\begin{aligned} P_{nn} &= \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} \\ P_{nt} &= |\mathbf{P}_n \times \mathbf{n}| \end{aligned}$$

kan de to første grenseflatebetingelsene i (11.31) skrives henholdsvis

$$\begin{aligned} P_{xx}n_x^2 + 2P_{xz}n_xn_z + P_{zz}n_z^2 &= -p_0 \\ (P_{xx} - P_{zz})n_xn_z + P_{xz}(n_z^2 - n_x^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11.32)$$

Med hastighetsfelt  $\mathbf{v} = \{u, w\}$  følger det fra Newton's friksjonslov (likning (7.15)) at

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ P_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ P_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Ved likevekt og plan overflate vil trykket i væsken,  $p_s$ , være bestemt ved den hydrostatisk trykkfordelingen

$$p_s = p_o - \rho g z$$

Vi deler derfor trykket når overflaten er deformert i en del  $p_s$  pluss et tilleggstrykk  $p'$  som skyldes bevegelsen

$$p = p_o - \rho g z + p'$$

Ved innsetting i (11.32) får vi ledd hvor  $\eta$  og deriverte av  $\eta, u$  og  $w$  inngår i produkter. Dersom amplituden av bølgen  $a$  er liten og bølgelengden stor vil disse leddene være små og bare de ledd hvor kun en liten størrelse inngår som faktor vil dominere i forhold til ledd hvor to eller tre små faktorer er med. Beholder vi på den måten bare de dominerende ledd får vi den lineariserte formen av grenseflatebetingelsen ved  $z = 0$

$$p' = -\rho g \eta \quad (11.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (11.34)$$

Likeledes kan vi linearisere den kinematiske betingelsen som blir

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad (11.35)$$

også for  $z = 0$ . Prosessen med linearisering av likninger og grenseflatebetingelser er diskutert inngående i Me102-kompendiet.

Siden  $\eta$  er antatt å være en periodisk funksjon av  $x$  er det klart at  $p'$ ,  $u$  og  $w$  også må være det. Fra grenseflatebetingelse ser vi at disse må ha formen

$$\begin{aligned} p' &= \hat{p}(z) \sin kx \\ u &= \hat{u}(z) \cos kx \\ w &= \hat{w}(z) \sin kx \end{aligned}$$

Fra (11.30) får vi da at

$$\hat{p} = Ae^{kz}$$

når vi har antatt at  $p' \rightarrow 0$  for  $z \rightarrow -\infty$ . Integrasjonskonstanten  $A$  bestemmes fra (11.33) som gir

$$A = -\rho g a$$

$\hat{u}$  og  $\hat{w}$  kan nå finnes henholdsvis ved å benytte  $x$ -komponenten av (11.28) og kontinuitetslikningen (11.29). Resultatet blir:

$$\begin{aligned} \hat{u}(z) &= \frac{ga}{2\nu} ze^{kz} \\ \hat{w}(z) &= \frac{ga}{2\nu k} (kz - 1)e^{kz} \end{aligned}$$

Med disse uttrykkene for  $\hat{u}$  og  $\hat{w}$  oppfyller  $u$  og  $w$  grenseflatebetingelsen (11.34). Ved innsetting i (11.35) får vi

$$\frac{da}{dt} = -\frac{ga}{2\nu k}$$

Integrasjon gir

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{gt}{2\nu k}} \quad (11.36)$$

hvor  $a_0$  er bølgeamplituden ved  $t = 0$ . Dette viser at bølgeformen på overflaten jevner seg ut ved eksponensiell dempning. Etter et tidsrom

$$t_e = \frac{2\nu k}{g}$$

er bølgeamplituden bare  $\frac{1}{e}$ -del av den opprinnelige. Den karakteristiske tiden for dempning,  $e$ -foldingstiden  $t_e$ , kan også uttrykkes ved bølgelengden  $L = \frac{2\pi}{k}$

$$t_e = \frac{4\pi\nu}{gL}$$

Lange bølger dempes derfor raskere ut en korte bølger.

## Landhevning

Under siste istid var Skandinavia dekket av en iskappe som var opptil 2–3000 meter tykk på liknende måte som Grønland og Antarktis er i dag. Vekten av isen presset landet ned og det er vanlig antatt at seigtflytende masser under den faste jordskorpen ble langsomt presset tilside. Da isen begynte å smelte, for

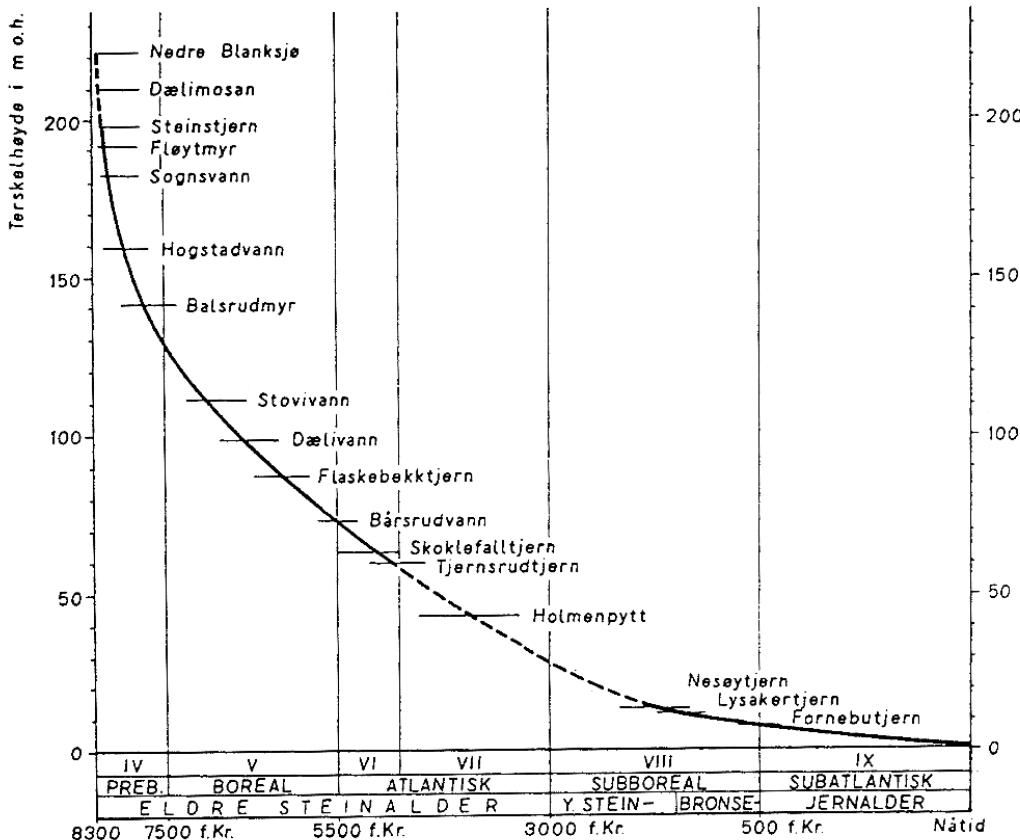


Fig. 11.10: Landhevningskurve fra Osloområdet (fra Ulf Hafsten, *Naturen*, nr. 8 1962). Så lenge havnivået sto over terskelhøyden i tjernet trengte sjøen inn og det ble avsatt marine bunnsedimenter i tjernet. Da landet steg og havet trakk seg tilbake nedenfor terskelhøyden ble tjernet avstengt fra sjøen og ferskvannsedimenter ble avsatt på bunnen. Skille mellom marine og terrestiske bunnsedimenter kan kartlegges og dateres ved boreprøver i tjernet. På denne måten har man fått data til å tegne kurven for landhevingen overfor.

10–15 tusen år siden, var de sentrale deler av Skandinavia trykket flere hundre meter ned og havnivået sto tilsvarende høyere enn i dag. Etterhvert som islasten forsvant begynte de seigflytende massene å strømme tilbake slik at landet steg i forhold til havet. Da landet steg ble det etterhvert avsatt spor i en strandsone ved overgangen fra marine- til ferskvannsavsetninger av leire eller jord. Disse avsetningene som idag finnes i bunnen av myrer og vann kan nå dateres slik at man kan finne landhevningskurver slik som den for Osloområdet som er gjennomgitt i figur 11.10. Landhevingen var rask for 8–10 tusen år siden og er langsom i dag, bare 3–4 cm pr. 100 år. Flere forskere har, i forbindelse med modellering av landhevingen, antatt at de seigflytende massene i jordens indre kan modelleres som en Newtonsk væske med meget stor viskositet. For å demonstrere dette er data fra landhevningskurven (fig. 11.11) plottet sammen med en demningsgraf beregnet på grunnlag av formel (11.36). Det er forbausende å se den

gode overensstemmelsen mellom modellert og målt tidsforløp. Viskositeten for de flytende massene, som man på denne måten får bestemt, er enormt stor i forhold til viskositeten for kjente materialer. Til slutt bør det nevnes at det også finnes alternative forklaringer på landhevnningen. Denne forfatteren har for eksempel vist at tetthetsendinger i forbindelse faseoverganger i jordens indre som aktiviseres av islasten også kan være en mulig forklaring.

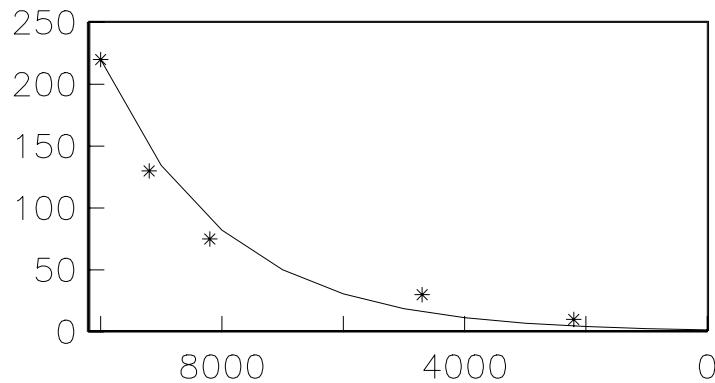


Fig. 11.11: Tidsforløpet av landhevnningen i Osloområdet. Heltrukken kurve er beregnet fra formel (11.36) med  $L = 2000$  km,  $\nu = 1.0 \cdot 10^{17}$  m<sup>2</sup>/s. \* er målinger fra landhevningskurven i figur 11.10.

### Strøm omkring kule

Et annet kjent eksempel på anvendelse av krypstrømsteorien er beregningen av strømfeltet rundt en kule som beveger seg langsomt gjennom en seig væske. Dette ble først gjort av engelskmannen Stokes, hvis navn også er knyttet til Navier-Stokes likning. Det vil føre for langt å redegjøre for detaljene i disse beregningene her og vi vil nøye oss med å ta med den kjente formelen for motstandskraften på kulen;

$$F = 6\pi\mu a U$$

hvor  $a$  er radius av kula og  $U$  er kulas fart.



# Kapittel 12

## Skaling og modellover

### 12.1 Skaling

Det er ofte hensiktsmessig å måle de fysiske parametrerne som for eksempel lengde, hastighet, trykk, temperatur osv. i enheter som er tilpasset det bestemte fenomenet som vi skal studere. Valg av naturlige enheter eller skalastørrelser kan være vanskelig, men i mange problemer peker visse størrelser seg ut. Når en kule med diameter  $d$  beveger seg med jevn hastighet  $U$  gjennom en ubegrenset væske (dvs. egentlig langt bort fra veggene eller andre gjenstander som kan forstyre strømningsmønstret nær kulen) kan det være naturlig å velge  $U$  som skala for hastighet og  $d$  som skala for lengde.

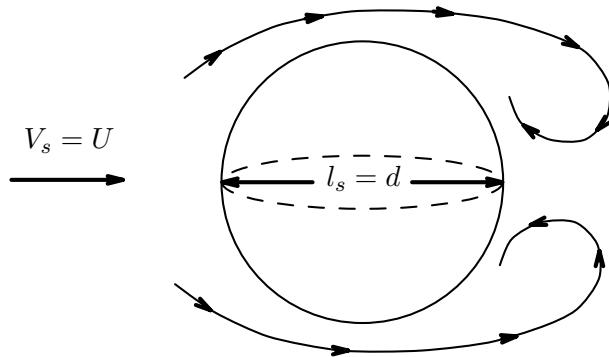


Fig. 12.1: Kule i jevn hastighet.

Vi lar  $l_s$  og  $v_s$  betegne typiske skalaer for henholdsvis lengde og hastighet. Ut fra disse størrelsene kan en definere tidsskala  $t_s = l_s/v_s$  og trykkskala  $p_s = \rho v_s^2$  hvor  $\rho$  er tetheten i mediet. Inngår temperaturen som variabel i problemet må vi også velge en temperaturskala  $T_s$ . På grunnlag av dette kan vi innføre dimensjonsløse størrelser eller måltall som karakteriserer lengde, tid, hastighet, trykk og temperatur

$$x_i^* = x_i/l_s, \quad t^* = t/t_s, \quad v_i^* = v_i/v_s, \quad p^* = p/p_s, \quad T^* = T/T_s \quad (12.1)$$

I disse lineære transformasjonene betegner \* dimensjonsløse måltall.

Vi skal nå vise hvordan bevegelseslikningen for en homogen inkompresibbel viskøs væske,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i - g \delta_{i3} \quad (12.2)$$

hvor  $z$ -aksen er lagt langs vertikalen og  $g$  er tyngdens akselerasjon, transformeres til dimensjonsløs form. Ved å substituere fra (12.1) i (12.2) får vi etter enkel omskrivning

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} v_i - \frac{1}{Fr} \delta_{i3} \quad (12.3)$$

hvor  $\nabla^{*2}$  betegner Laplace-operatoren i de nye romkoordinatene.  $Re$  og  $Fr$  er dimensjonsløse tall definert ved

$$\begin{aligned} Re &= \frac{v_s l_s}{\nu} && \text{Reyoldstallet} \\ Fr &= \frac{v_s^2}{g l_s} && \text{Froudetallet} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Disse tallene har fått navn henholdsvis etter engelskmennene Osborne Reynolds (1842–1912) og William Froude (1810–1879). Reynolds er kjent blant annet for sine eksperimenter med turbulent rørstrøm og Froude la grunnlaget for modell-testing av skipskrog og utførte målinger for å bestemme motstanden på skip

Renoldstallet kan tolkes som forholdet mellom treghetskrefter og viskøse krefter

$$Re = \frac{\text{Treghetskrefter}}{\text{Viskøse krefter}} = \frac{\rho \left| v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|}{\mu |\nabla^2 v_i|} = \frac{\rho v_s^2 / l_s}{\mu v_s / l_s^2} = \frac{v_s l_s}{\nu}$$

hvor vi har gjort overslaget over leddene  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  og  $\nabla^2 v_i$  ved å bruke de karakteristiske skalastørelsene. I fenomen hvor de viskøse kretene er neglisjerbare vil  $Re \rightarrow \infty$  slik at vi kan sløyfe friksjonsleddet i (12.3) og vi står da igjen med den friksjonsfrie bevegelseslikningen. Det er imidlertid viktig å være klar over at i nærheten av faste vegger vil væsken hefte til veggen og i grensesjiktet vil de viskøse spenningene være av betydning selv om en kan regne væsken som friksjonsfri forøvrig.

Froudetallet kan gis en liknende tolkning

$$Fr = \frac{\text{Treghetskrefter}}{\text{Tyngdekraft}} = \frac{\left| v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|}{g} = \frac{v_s^2 / l_s}{g} = \frac{v_s^2}{g l_s}$$

Froudetallet kommer inn i problemer hvor tyngden er viktig for eksempel i strømninger med fri overflate, strømning med tetthetssjiktning og for tyngdebølger (overflatebølger).

På liknende måte som vi har skalert bevegelseslikningen kan vi også skalere varmetransportlikningen. For en inkompressibel væske kan denne likningen skrives

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T \quad (12.5)$$

hvor vi for enkelhets skyld har sløyfet dissipasjonen, som vanligvis er en liten størrelse, og sett bort fra eventuelle andre varmekilder inne i væsken. Ved å substituere (12.1) i (12.5) får vi etter enkel omskrivning

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Pe} \nabla^{*2} T^* \quad (12.6)$$

hvor det opptrer et nytt dimensjonsløst tall

$$Pe = \frac{v_s l_s}{\kappa}, \quad \text{Péclettallet}$$

Péclettallet angir forholdet mellom konvektiv varmetransport og transport av varme ved ledning

$$Pe = \frac{\text{Konvektiv varmetransport}}{\text{Varmeledning}} = \frac{\left| v_j \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right|}{\kappa |\nabla^2 T|} = \frac{v_s T_s / l_s}{\kappa T_s / l_s^2} = \frac{v_s l_s}{\kappa}$$

Dersom varmeledningen dominerer er  $Pe \ll 1$  i det motsatte tilfellet med stor konvektiv varmetransport er  $Pe \gg 1$ . Péclettallet og Reynoldstallet har samme form med den forskjell at i førstnevnte inngår varmediffusiviteten  $\kappa$  og i det andre viskositetskoeffisienten  $\nu$ . Forholdet mellom Péclettallet og Reynoldstallet er et nytt dimensjonsløst tall

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{Prandtlallet}$$

Det har fått navnet av tyskeren Ludwig Prandtl (1875–1953) som er kjent for sine mange grunnleggende arbeider i hydro- og aerodynamikk.

Prandtlallet er et mål for forholdet mellom diffusjonshastigheten for bevegelsesmengde og for varme.

## 12.2 Geometrisk og dynamisk ensartethet (similaritet). Modell-lover.

Dersom vi har en likedannet, formlik modell av en innretning eller konstruksjon så sier vi at modellen er geometrisk ensartet med prototypen. Skalafaktoren for modellen er foholdt mellom to tilsvarende avstander på modellen og prototypen. Modeller av store skipsskrog som brukes ved testing i modell-tanker lages for eksempel ofte med en skalafaktor 1:50. Små leketøy bilmodeller av "matchbox" type har ofte en skalafaktor 1:50. Ved geometrisk ensartethet er modellen fullstendig bestemt ved skalafaktoren. For å kunne tolke resultater fra modellforsøk i modell-tanker eller vindtunneller er det viktig å vite når

strømningsmønstret er likedannet for modell og prototype. La oss eksempelvis studere strømningsforholdene omkring en kule med diameter  $d$  som beveger seg med jevn fart  $U$  gjennom en væske. Er kulen lang bort fra væskeoverflaten eller andre gjenstander som kan forstyrre strømmen så vil kulens fart og størrelse samt væskens viskositet være de eneste parametrene som bestemmer strømningsforholdene. Dette innser vi fordi Reynoldstallet

$$Re = \frac{l_s v_s}{\nu} = \frac{Ud}{\nu}$$

er den eneste parameteren som inngår i den skalerte bevegelseslikningen (12.3). (Vi regner her med at tyngdekraften er uten betydning og setter  $Fr = \infty$ .) Av samme grunn er det klart at kuler av forskjellig storrelse og med forskjellig fart vil gi opphav til ensartete strømningsforhold dersom Reynoldstallet er det samme. Kravet om dynamisk ensartethet for modell og prototype kan i dette tilfellet uttrykkes ved

$$\left(\frac{Ud}{\nu}\right)_{\text{modell}} = \left(\frac{Ud}{\nu}\right)_{\text{prototype}} \quad (12.7)$$

Dette resultatet kan man bruke når modellen ved eksperimenter skal bestemme motstandskraften på kuler som beveger seg med jevn fart. Vi betegner kraften med  $F$  og tenker oss å måle denne i enheter  $\frac{1}{2}\rho U^2 S$  hvor  $\rho$  er tetheten i væsken og  $S$  er tverrsnittsarealet av kulen. Forholdet  $F/\frac{1}{2}\rho U^2 S$  må da være en dimensjonsløs storrelse som vi kaller motstandskoeffisienten og etter hva vi tidligere har sagt så kan motstandskoeffisienten bare avhenge av Reynoldstallet. I likningsform kan dette skrives

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = C_D(Re) \quad (12.8)$$

Målinger med kuler av forskjellig storrelse og som beveger seg med forskjellig fart viser at motstandskoeffisienten har samme verdi når Reynoldstallet er det samme. (Se figur 12.2.) For små Reynoldstall gjelder Stokes motstandslag for kule

$$F = 6\pi\mu r U$$

hvor  $r$  er radius i kula. Skalerer vi med tverrsnittsarealet  $S = \pi r^2$  får vi

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = 12 \frac{\nu}{Ur} = \frac{24}{Re}.$$

I dette tilfellet er altså motstandskoeffisient proporsjonal med det inverse Reynoldstallet.

Det vi her har sagt om Reynoldstallsimilaritet for kuler gjelder også for geometrisk ensartete legemer av annen form.

I fenomen hvor andre parametre enn storrelse, hastighet og viskositet er av betydning vil kravet om dynamisk similaritet mellom modell og prototype bli mer omfattende enn angitt i (12.7).

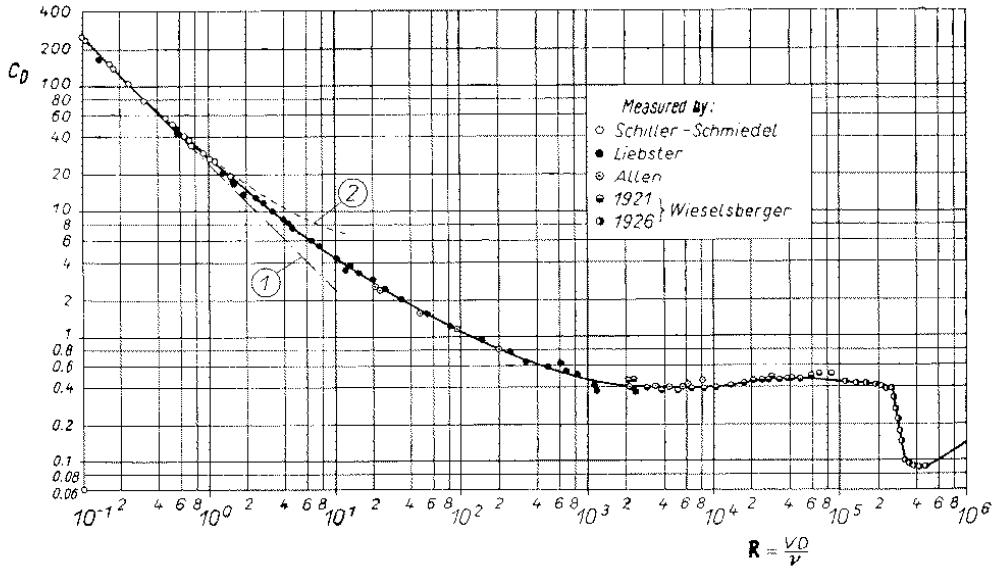


Fig. 12.2: Motstandskoeffisienten for kule, som funksjon av Reynoldstallet. (Fra Schlichting, 1968)

Et skip som beveger seg med jevn fart vil danne overflatebølger. Disse vil ta energi fra skipet og motstandskraften som virker på skipet vil i dette tilfellet både skyldes bølgemotstanden (bølgemotstand) og friksjonsvirkningen (friksjonsmotstand). Dersom skipet seiler på dypt vann og langt bort fra andre ting som kan forstyrre strømningsforholdene omkring skipet så vil skipets fart  $U$ , skipets lengde  $L$ , tyngdeakselerasjonen  $g$  og vannets viskositet være de parametrerne som i første rekke bestemmer strømningsforholdene for geometrisk ensartete skip. Dette innser vi fordi Reynoldstallet

$$Re = \frac{l_s v_s}{\nu} = \frac{LU}{\nu}$$

og Froudetallet

$$Fr = \frac{v_s^2}{gL_s} = \frac{U^2}{gL}$$

er de eneste parametrerne som inngår i den skalerte bevegelseslikningen (12.3). Skal vi i dette tilfellet ha dynamisk ensartethet mellom modell og prototype så må

$$\left( \frac{LU}{\nu} \right)_{\text{modell}} = \left( \frac{LU}{\nu} \right)_{\text{prototype}}$$

og

$$\left( \frac{U^2}{gL} \right)_{\text{modell}} = \left( \frac{U^2}{gL} \right)_{\text{prototype}}$$

Modell-lovene krever i dette tilfelle både similaritet i Reynoldstall og i Froudetall.

En skipsmodell som skal testes i modelltank bygges ofte i skala 1:50. Prototypen har lengde  $L_p = 200$  m og skal kjøres med fart  $u_p = 10$  m/s. Modellens lengde er følgelig 5 m. For å oppnå similaritet i Froudetall mellom modell og prototype i henhold til likning (ovenfor) må modellen kjøres med hastighet

$$u_m = u_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 1.41 \text{ m/s}$$

Kreves samtidig similaritet i Reynoldstall må modellforsøket foretaes i en væske med viskositet

$$\nu_m = \nu_p \frac{L_m u_m}{L_p u_p} = 2.8 \cdot 10^{-3} \nu_p$$

hvor  $\nu_p$  er viskositeten i fullskalaforsøket i.e. viskositeten av vann. I praksis vil det derfor være umulig å få oppfylt kravene både til Froudetall og Reynoldstall similaritet. Det ville i så fall kreve at modellforsøket kunne utføres i en væske med viskositet mindre enn  $\frac{3}{1000}$  av den for vann!

For å kunne utnytte resultater fra forsøk i vanlige modell-tanker til for eksempel å bestemme motstanden på skipsskrog i full skala trenges det derfor tilleggsantagelser. Motstandskraften  $F$  som skipet blir utsatt for kan skalles med  $\frac{1}{2}\rho U^2 S$  hvor  $S$  nå betegner den "våte" delen av skipets bunnflate Vi kan derved innføre en motstandscoeffisient  $C_D$  som er en funksjon av to parametere nemlig Reynoldstallet og Froudetallet. Vi skriver dette på formen

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = C_D(Re, Fr)$$

Froude antok at motstandscoeffisienten  $C_D$  kan deles i to  $C_R$  og  $C_F$  hvor den første avhenger kun av Reynoldstallet og den andre avhenger kun av Froudetallet.

$$C_D(Re, Fr) = C_R(Re) + C_F(Fr)$$

$C_R$  representerer hovedsakelig friksjonsmotstanden som skyldes de viskøse skjærspenninger mot bunnflate og denne kan estimeres slik som antydet i avsnittet om grensesjikt.  $C_F$  representerer bølgemotstanden og denne delen av motstanden kan bestemmes ved modellforsøk hvor det er Froudetall similaritet mellom modell og prototype.

Ved vanlig seilingshastighet vil bølgemotstanden dominere over friksjonsmotstand for små skip. For de store supertankerne er friksjonsmotstanden av samme størrelse og i mange tilfelle større enn bølgemotstanden. Ved små hastigheter vil friksjonsmotstanden dominere. Den totale motstandscoeffisienten for skip ligger i området  $2 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3}$  avhengig av Reynoldstallet og Froudetallet.