

Masse og Kraft

Erik Alexander Sandvik

8. Mars 2019

Abstrakt

Denne rapporten utforsker fire målemetoder for måling av masse. To av metodene utnytter Hookes lov for elastiske deformasjoner. En metode bruker at perioden til en harmonisk oscillator er avhengig av massen. I den siste metoden brukes en balansevekt. Hensikten er å sammenligne de ulike målemetodene ved å måle på et aluminiumslodd med ukjent masse, samt å finne det dynamiske området til hver målemetode. Alle metodene viste seg å være enige om massen til aluminiumsloddet med verdier rundt ~ 2.1 kg, men usikkerheten varierer. Vi klarte bare å finne det dynamiske området til balansevekten på minst 3 størrelsesordener.

Introduksjon

Vi skal se på fire forskjellige målemetoder som måler masse. I de to første målemetodene utnytter vi Hookes lov som sier at en elastisk deformasjon på et legeme er proporsjonal med kraften på det legemet. Vi skal bruke vekten til et aluminiumslodd til å deformere en bladfjær og på den måten måle massen til aluminiumsloddet. Men først må målemetoden kalibreres med kalibreringslodd for at vi skal oppnå så høy presisjon og nøyaktighet som mulig. En annen målemetode baserer seg på at perioden til en harmonisk oscillator er avhengig av massen. Da skal vi igjen bruke bladfjæren til å oscillere aluminiumsloddet. Ved å måle periodetiden til den oscillerende bevegelsen kan vi estimere massen til aluminiumsloddet. Til slutt skal vi se på en litt mer tradisjonell målemetode som baserer seg på balanseprinsippet. Vi skal bruke kalibreringsloddene på balansevekten for å se hvor presis og nøyaktig denne balansevekten egentlig er og for å kalibrere balansevekten. Deretter skal vi måle massen til aluminiumsloddet med balansevekten og korrigere med en kalibreringsmodell.

Hensikten med dette er å sammenligne de ulike målemetodene. Fra hver målemetode får vi et svar på hva massen til aluminiumsloddet kan være med usikkerhet. Det vil være interessant å se hvor godt disse målemetodene stemmer overens og om de ulike estimatene på massen er innenfor alle usikkerhetene.

Ikke minst skal vi forsøke å finne det dynamiske området til hver målemetode. Når vi generelt bruker et måleinstrument (ikke bare for å måle masse) er det viktig å være klar over hvor små fluktuasjoner vi kan måle rundt de store verdiene for at vi skal kunne bruke en slik måling til å dra en konklusjon.

Teori

Usikkerheten i en måling

Når vi skal forsøke å oppnå et så stort dynamisk område som mulig til en målemetode så er usikkerheten i en enkeltmåling helt sentralt. På en annen side er teorien om usikkerheter for omfattende til at jeg kan ta det mer her. Dersom du vil ha grundige forklaringer og utledninger av usikkerheter så anbefaler jeg [1]. Her oppsummerer jeg bare den delen som er viktig for oss:

Med "usikkerhet" menes standardavviket til distribusjonen av middelveidier av N enkeltmålinger gitt at feilen i målingene er strengt tilfeldige.

Gitt N enkeltmålinger x_i der gjennomsnittet $\langle x \rangle$ brukes som det beste estimatet til den "sanne verdien" til den størrelsen vi forsøker å måle, så er usikkerheten σ_x gitt ved

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2, \quad (1)$$

Gitt en utgangsstørrelse Z som er relatert til et vilkårlig antall inngangstørrelser A, B, \dots gjennom funksjonen

$$Z = Z(A, B, \dots),$$

og du kjenner usikkerheten $\Delta A, \Delta B, \dots$ til alle inngangsstørrelsene. Da er usikkerheten ΔZ i Z gitt ved

$$\Delta Z^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial A} \Delta A \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B} \Delta B \right)^2 + \dots, \quad (2)$$

Dynamisk område

At et måleinstrument har et stort dynamisk område vil si at måleinstrumentet kan både måle store verdier og små variasjoner rundt de store verdiene. Dette henger sammen med usikkerheten. Dersom de små endringene i den avleste verdien på måleinstrumentet er innenfor usikkerheten så kan vi ikke si med sikkerhet at vi virkelig har målt en endring i den målte størrelsen. Det dynamiske området til et måleinstrument er gitt som antallet størrelsesordenene mellom den største verdien instrumentet kan måle og den minste endringen rundt den store verdien som fortsatt er utenfor usikkerheten.

Eksempel: Dersom du har en vekt som er i stand til å måle masser i størrelsesorden 10^3 og samtidig måle endringer i størrelsesorden 10^{-3} rundt de store verdiene som er utenfor usikkerheten, så er det dynamiske området 6 størrelsesordener fordi $10^3 / 10^{-3} = 10^6$.

Elastiske deformasjoner og Hookes lov

Vi skiller mellom to ulike deformasjoner: *elastisk* deformasjon og *plastisk* deformasjon. Vi kaller det en *elastisk* deformasjon når et legeme deformeres som et resultat av en kraft, men går tilbake til sin opprinnelige form etter at kraften har sluttet å virke. Dette er i motsetning til en *plastisk* deformasjon der legemet deformeres permanent (og så finnes det selvfølgelig kombinasjoner av begge der legemer deformeres mer eller mindre permanent). Mange faste materialer følger tilnærmet Hookes lov

$$F = -k\delta L, \quad (3)$$

der F er kraften som virker på legemet, ΔL er et mål på hvor mye legemet blir deformert i den retningen kraften F virker (med lengdeenhet), og k er proporsjonalitetskonstanten (stivheten) som varierer fra ett materiale til et annet, når de deformeres elastisk. Kraften F kan f. eks være tyngden til et annet legeme, som på jordens overflate er

$$G = -mg, \quad (4)$$

der G er tyngden, m er massen til legemet og g er tyngdeakselerasjonen på jordens overflate. Ved å kombinere (3) og (4) har vi dermed en metode for å måle en masse m :

$$-mg = -k\delta L$$

$$m = \frac{k}{g}\delta L \quad (5)$$

I noen situasjoner er man kanskje ikke så interessert i k , men bare proporsjonalitetskonstanten mellom m og ΔL . Da kan man heller bruke

$$m = K\delta L, \quad (6)$$

der

$$K = \frac{k}{g}, \quad (7)$$

Periodetiden til en harmonisk oscillator

Det finnes andre måter vi kan måle masser på, ved å ta utgangspunkt i Hookes lov. F. eks kan vi bruke Newton's andre lov for å utlede bevegelseslikningen til en punktpartikkel med masse m og posisjon $x = \delta L$ som blir utsatt for kraften (3):

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Dette er bevegelseslikningen for en harmonisk oscillator og den har løsning $x = A \cos(2\pi ft + \phi)$ der frekvensen f er gitt ved

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (8)$$

Ved å bruke relasjonen $f = 1/T$ der T er periodetiden til bevegelsen, ser vi at T må være avhengig av massen.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (9)$$

Ved å måle periodetiden til et oscillerende legeme har vi dermed en annen metode for å måle en masse m gitt at vi kjenner stivheten k .

Ved å kombinere (9) og (2) kan vi finne et estimat til den minste masseendringen Δm vi kan måle.

$$\Delta m = 2m \frac{\Delta T}{T}, \quad (10)$$

der ΔT er usikkerheten i perioden som vi finner fra (1).

Minste kvadraters metode

Anta at du har et sett med N datapunkter (x_i, y_i) etter å ha gjort noen målinger og en teoretisk modell $y(x)$. Modellen beskriver hvordan datapunktene ideelt burde oppføre seg og du har lyst til å bruke denne modellen til å sammenligne målingene dine med det du forventer å se. $y(x)$ har noen parametere som du må bestemme for å kunne sammenligne målingene med modellen. Anta at modellen har n parametere, p_1, \dots, p_n . Spørsmålet er; hvilke valg av parameterverdier gjør at modellen passer best opp mot de N datapunktene?

Se for deg at du bare har to datapunkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) og at modellen $y(x | p)$ bare har én parameter p . Hvis du ønsker deg en verdi for p som gjør at modellen passer best opp mot datapunktene så vil du selvfølgelig at absoluttverdien til differansen $\delta_1 = y_1 - y(x_1 | p)$ skal bli minst mulig. Og du vil selvfølgelig at absoluttverdien til differansen $\delta_2 = y_2 - y(x_2 | p)$ skal bli minst mulig. Men de skal bli minst mulig *samtidig*. Når du justerer på verdien til p og gjør den ene differansen mindre og mindre, så står du i fare for å gjøre den andre differansen større. En løsning kan være å legge sammen differansene $\delta_1 + \delta_2$ og så justere p slik at summen av de blir minst mulig. Men dersom den ene differansen er $+100$ og den andre differansen er -100 så passer jo ikke det noe særlig bra, selv om summen av dem er null. Hva om du kvadrerer differansene *før* du legger de sammen og så minimerer du *det* i stedet? Det er essensen i de minste kvadraters metode.

Du ser altså etter en verdi av p som gjør at funksjonen

$$\Delta(p) = \sum_{i=1}^2 [(y_i - y(x_i | p))]^2,$$

blir minst mulig. Eller helt generelt, med N datapunkter og n parametere: du ser etter verdier for p_1, \dots, p_n som er slik at funksjonen

$$\Delta(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^N [(y_i - y(x_i | p_1, \dots, p_n))]^2,$$

blir minst mulig. I det helt generelle tilfellet ser du etter et minimumspunkt i \mathbb{R}^n og spesielt interesserte kan se nøyaktig hvordan det gjøres i [2], men til vårt formål blir det kanskje litt i det lengste laget. Den eneste modellen vi skal bruke de minste kvadraters metode på er noe så fælt som et førstegradspolynom

$$y(x | a, b) = ax + b, \tag{11}$$

og alt det står på er å finne de to parameterne a (stigningstallet) og b (konstantleddet) slik at funksjonen

$$\Delta(a, b) = \sum_{i=1}^N [(y_i - y(x_i | a, b))]^2, \tag{12}$$

blir minst mulig. Eller helt konkret; vi må finne m og c slik at

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = 0,$$

En fullstendig utledning av a og b finnes i [3]. Her nøyer vi oss med å skrive opp resultatet:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle) y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}, \quad (13)$$

$$b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle, \quad (14)$$

der $\langle x \rangle$ og $\langle y \rangle$ er gjennomsnittsverdien av hhv. første-og andrekomponentene av alle datapunktene. Siden modellen (11) kan passe vilkårlig *dårlig* opp mot datapunktene, så har ikke (12) noen maksimumspunkter. Punktet (a, b) bestemt av (13) og (14) kan derfor bare være et minimumspunkt.

Dersom det er ingen systematiske feil, kun tilfeldige, som er årsaken til eventuelle avvik mellom datapunktene og (11) så er usikkerheten i stigningstallet og konstantleddet hhv. tilnærmet gitt ved

$$\Delta a^2 \approx \frac{1}{D} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}, \quad (15)$$

$$\Delta b^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\langle x \rangle^2}{D} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}, \quad (16)$$

der $d_i = y_i - y(x_i | a, b)$ og $D = \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2$. Se [4] for en fullstendig utledning.

Eksperimentelt

Kalibreringsloddene

Til flere av eksperimentene har vi brukt et sett med kalibreringslodd på hhv. 1 g, 10 g, 100 g, 500 g, 1 kg og 2 kg. De følger den såkalte OIML-standarden og er av ASTM klasse 5. Hva dette effektivt betyr er at hvert kalibreringslodd har en viss toleranse, dvs en verdi som massen til et kalibreringsloddet kan avvike fra den "offisielle" verdien. F.eks kan kalibreringsloddet på 1 g ha en masse som maksimalt kan avvike 0.50 mg fra 1 g. En fullstendig oversikt over toleransene finnes i [5]. De toleransene som er relevante for dette eksperimentet står oppført i Tabell 1.

Kalibreringslodd	Toleranse
1 g	0.50 mg
10 g	2.0 mg
100 g	9 mg
500 g	30 mg
1 kg	50 mg
2 kg	100 mg

Tabell 1: Den "offisielle" verdien til kalibreringsloddene med toleranser

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av måleur

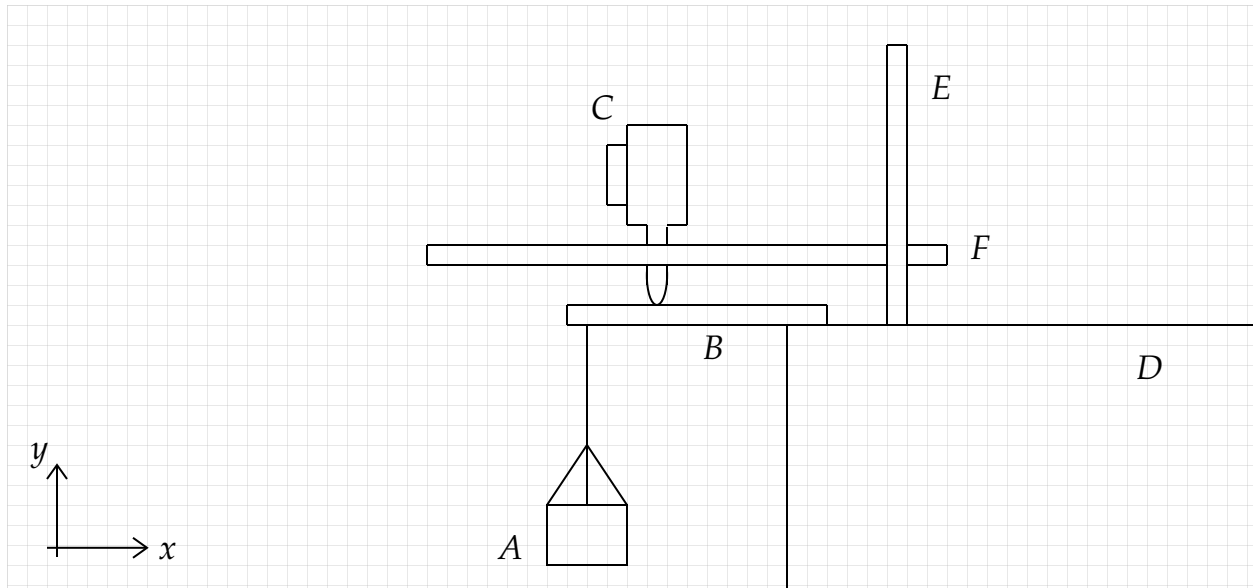


Fig. 1: Illustrasjon av eksperimentet der vi måler en elastisk deformasjon ved bruk av måleur. Kurven A henger i en tråd som er festet til bladfjæren B . Når det legges en vekt i kurven vil bladfjæren bli deformert i negativ y -retning. Deformasjonen måles med et måleur C og vil selvsagt bli større jo større vekt vi legger i kurven. Vi antar at deformasjonen følger Hookes lov. Den ene enden av bladfjæren er festet godt fast til et bord D . Stativene E og F brukes til å plassere måleuret. Stativet F har et hull der tuppen på måleuret kan gå gjennom.

En illustrasjon til den første metoden vi brukte for å måle masse er vist i Fig. 1. Vi legger en vekt opp i en kurv A slik at bladfjæren B bøyes nedover. Måleuret C har en tupp som kan presses opp i måleuret og den plasseres slik at tuppen blir presset opp i måleuret av bladfjæren. Når bladfjæren bøyes nedover vil tuppen bli presset mindre opp jo mer vekt vi legger i kurven. Verdien som leses av på måleuret vil derfor være en funksjon av massen som legges i kurven og den skal bli mindre med økende masse.

Vi har antatt at bladfjæren følger Hookes lov (3) og at relasjonen mellom deformasjonen δL til bladfjæren og massen m som legges i kurven er gitt ved (5). Vi forventer altså en lineær sammenheng mellom ΔL og m og vi kan bruke minste kvadraters metode (13) og (14) til å sammenligne datapunktene $(\Delta L, m)$ med det førstegradspolynomet som passer best til datapunktene, der stigningstallet skal tilsvare proporsjonalitetskonstanten i (6) og

konstantleddet forventes å være \sim lik null.

Når vi har proporsjonalitetskonstanten gitt ved (6) har vi kalibrert denne målemetoden. Vi kan dermed bruke denne målemetoden til å estimere massen til objekter som ikke er kjent fra før, f.eks aluminiumsloddet. Proporsjonalitetskonstanten gir også et godt estimat til stivheten k til blad fjæren som vi skal bruke i harmonisk oscillator-eksperimentet gitt at vi har en verdi for tyngdeakselerasjonen g . I Oslo er denne omtrentlig lik $g = 9.819 \text{ m/s}^2$. Se [6].

Etter at vi har målt massen til aluminiumsloddet legger vi til en liten masse og ser om endringen i den målte verdien er utenfor usikkerheten. Målet er å legge til en så liten masse som mulig der vi fortsatt kan observere en endring utenfor usikkerheten. Det dynamiske området til denne målemetoden er gitt av forholdet mellom størrelsesordenen til aluminiumsloddet og størrelsesordenen til den minste massen vi kan legge til og fortsatt observere en endring utenfor usikkerheten.

Deformasjonen δL er en differanse mellom to avleste verdier på måleuret, ikke én. Vi må lese av en verdi på måleuret når det *ikke* er en kalibreringsvekt i kurven, og når det *er* en kalibreringsvekt i kurven. Det er naivt å anta at den avleste verdien på måleuret når det ikke er en kalibreringsvekt i kurven er den samme når vi går fra å bruke én kalibreringsvekt til en annen. I teorien gir det intuitivt mening at den avleste verdien når det ikke er en kalibreringsvekt i kurven alltid skal være den samme, men i den virkelige verden kan man ikke ta for gitt at dette er tilfellet. For hver masse setter vi derfor L_0 lik den verdien måleuret viser før vi setter en masse i kurven og L lik den verdien måleuret viser etter at vi har satt en masse i kurven, slik at $\delta L = L_0 - L$.

Måleuret vi brukte er en Baker Type J02 måleuret med serienummer C3767. Den viser hver 0.01 mm som tuppen har blitt presset opp og har en usikkerhet på 0.001 mm. Se [6] for datablad og [8] for et bilde av måleuret.

Det er også en viss avlesningsusikkerhet når jeg leser av verdien på måleuret, men jeg har valgt å ikke ta hensyn til avlesningsusikkerheten eller usikkerheten som er oppgitt i [7]. Årsaken til dette er at gitt at det er rent tilfeldige feil som er årsaken til disse usikkerhetene, så vil de uansett forplante seg i usikkerheten til stigningstallet gitt ved (15). Det er tross alt stigningstallet a som gir oss den størrelsen vi er ute etter, nemlig k . Det er langt mer praktisk å bare bruke (15) enn å føre en tabell med usikkerheter til flere forskjellige størrelser til hver eneste måling. Av samme grunn tar jeg heller ikke hensyn til toleransene til kalibreringsvektene i dette eksperimentet.

Sentrale størrelser til dette eksperimentet med forklaringer er listet i Tabell 2.

Symbol	Forklaring
m	Massen som ligger i kurven
g	Tyngdeakselerasjonen
k	Stivheten til bladfjæren
L_0	Den avleste verdien til måleuret når det ikke ligger en vekt i kurven
L	Den avleste verdien til måleuret når det ligger en vekt i kurven
δL	$L_0 - L$
a	Stigningstallet til linja som passer best opp til datapunktene ($\delta L, m$)
b	Konstantleddet til linja som passer best opp til datapunktene ($\delta L, m$)

Tabell 2: Sentrale størrelser i dette eksperimentet med forklaringer

Oppsummering om utførelsen av eksperimentet:

1. Vi leser av verdien L_0 på måleuret før vi setter et kalibreringslodd i kurven.
2. Vi setter et kalibreringslodd i kurven og leser av verdien L på måleuret.
3. $\delta L = L_0 - L$ er deformasjonen til bladfjæren.
4. Vi gjentar punkter 1.-3. frem til vi har fått et tilstrekkelig antall datapunkter.
5. Vi bruker minste kvadraters metode (13) og (14) til å finne den linja som passer best til datapunktene. Likningen til denne linja brukes som en formel til å estimere massen til objekter som ikke er kjent fra før.

6. Stigningstallet til denne linja er et estimat til proporsjonalitetskonstanten gitt ved (6). Vi har dermed et estimat på stivheten k til bladfjæren.

7. Vi leser av verdien L_0 på måleuret før vi plasserer aluminiumsloddet i kurven. Når den er plassert i kurven leser vi av verdien L på måleuret. Deretter bruker vi formelen som nevnt i punkt 5. til å estimere massen til aluminiumsloddet.

8. Vi legger til en liten masse sammen med aluminiumsloddet og ser om vi kan observere en endring i den målte verdien som er utenfor usikkerheten. Den minste massen vi kan legge til å fortsatt observere en endring gir det dynamiske området til denne målemetoden. Mer konkret er det dynamiske området forholdet mellom størrelsesordnene til aluminiumsloddet og denne minste massen.

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av laserpeker

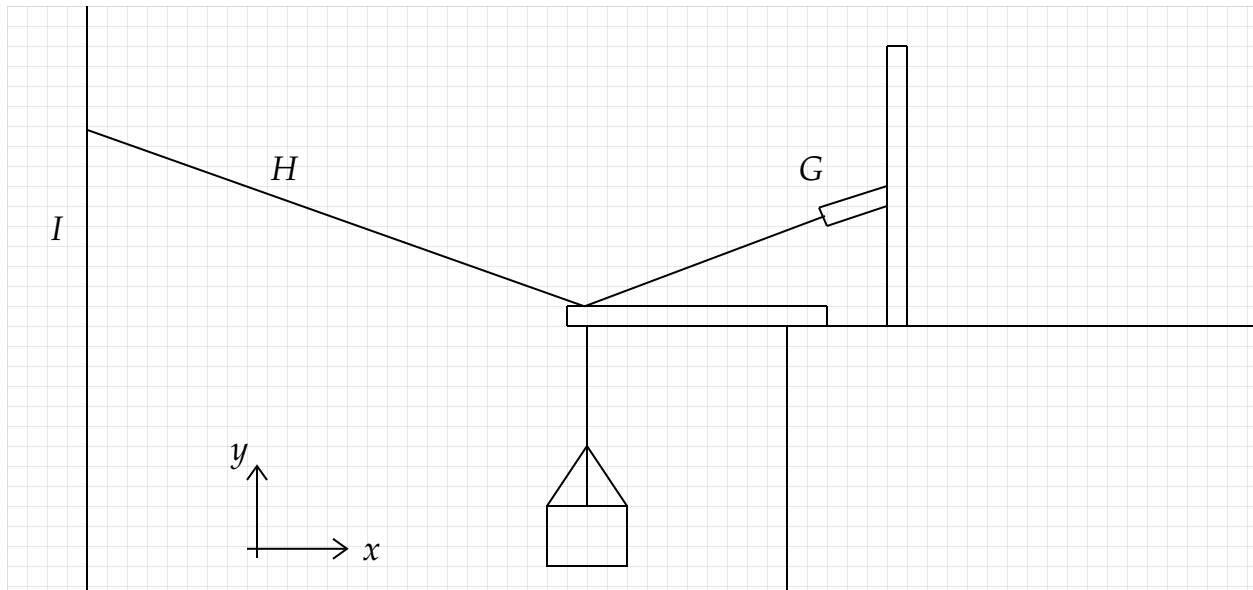


Fig. 2: Liten modifikasjon til det samme eksperimentet. En laserpeker G stråler ut en lysstråle H som reflekteres av bladfjæren og treffer en vegg I . Når det legges en vekt i kurven vil bladfjæren bøyes nedover og lysstrålen vil treffe vegg lenger ned jo større vekt som legges i kurven. Dermed kan vi måle massen i vekten ved å måle posisjonen til punktet der lysstrålen treffer vegg.

Denne gangen måler vi deformasjonen til bladfjæren på en litt annen måte. I stedet for et måleut så bruker vi denne gangen en laserpeker G . Laserpekeren er satt opp slik at lysstrålen H reflekteres av den blanke overflaten til bladfjæren og treffer en vegg I .

Posisjonen til punktet der lysstrålen treffer veggen vil variere med deformasjonen til blad fjæren og dermed massen som legges i kurven.

Etter at vi har satt opp eksperimentet og før vi setter noen kalibreringslodd i kurven lar vi posisjonen der lysstrålen treffer veggen på dette tidspunktet være nullpunktet $l_0 = 0$. Etter at vi har satt en masse i kurven måler vi avstanden l mellom posisjonen til lysstrålen og nullpunktet og vi antar at l er proporsjonal med massen. Metoden i dette eksperimentet er så og si den samme som i det foregående eksperimentet, men jeg må likevel påpeke en betydelig forskjell mellom eksperimentene:

Proporsjonalitetsfaktoren mellom m og l som vi finner i dette eksperimentet er *ikke* den samme som (6) som følger direkte fra Hookes lov og som vi skulle finne i det foregående eksperimentet. Det er klart at proporsjonalitetsfaktoren i dette eksperimentet *sier noe om* stivheten k til blad fjæren, men vi kan ikke finne k direkte fra proporsjonalitetsfaktoren på samme måte som i (6). Proporsjonalitetsfaktoren i dette eksperimentet er unik for akkurat den innfallsvinkelen mellom blad fjæren og lysstrålen og akkurat den avstanden mellom blad fjæren og veggen som ble brukt i dette eksperimentet.

Ellers er metoden effektivt den samme. Siden vi antar at l er proporsjonal med m kan vi igjen bruke minste kvadraters metode (13) og (14) for sammenligne målingene med det forventede resultatet (6).

Når vi har gjort det har vi kalibrert denne målemetoden også. Vi kan igjen estimere massen til aluminiumsloddet og prøve oss frem med små ekstra masser som vi legger til aluminiumsloddet. Når vi har funnet den minste massen som fortsatt gir en endring i den målte verdien utenfor usikkerheten har vi det dynamiske området til denne målemetoden.

Oppsummering om utførelsen av eksperimentet:

1. Vi markerer et nullpunkt på veggen når det er ingen kalibreringslodd i kurven.
2. Vi legger et kalibreringslodd i kurven og måler avstanden l mellom lysstrålens posisjon og nullpunktet.
3. Vi gjentar punkter 1.-2. frem til antallet datapunkter anses som tilstrekkelig.
4. Igjen bruker vi minste kvadraters metode (13) og (14) til å finne den linja som passer best til datapunktene. Likningen til denne linja brukes som en formel til å estimere massen til objekter som ikke er kjent fra før.

5. Vi plasserer aluminiumsloddet i kurven og noterer posisjonen til lysstrålen på veggen.
6. Vi legger til en liten masse til aluminiumsloddet og ser om vi kan observere en endring i den målte verdien som er utenfor usikkerheten. Den minste massen som gir en slik endring gir det dynamiske området til denne målemetoden.

Sentrale størrelser til dette eksperimentet med forklaringer er listet i Tabell 3.

Symbol	Forklaring
m	Massen som ligger i kurven
K	Proporsjonalitetsfaktoren
l_0	Nullpunkt for posisjonen der lysstrålen treffer veggen. Settes lik null.
l	Posisjonen til der lysstrålen treffer veggen etter at det er satt en masse i kurven
a	Stigningstallet til linja som passer best opp til datapunktene (l, m)
b	Konstantleddet til linja som passer best opp til datapunktene (l, m)

Tabell 3: Sentrale størrelser i dette eksperimentet med forklaringer

Harmonisk Oscillator

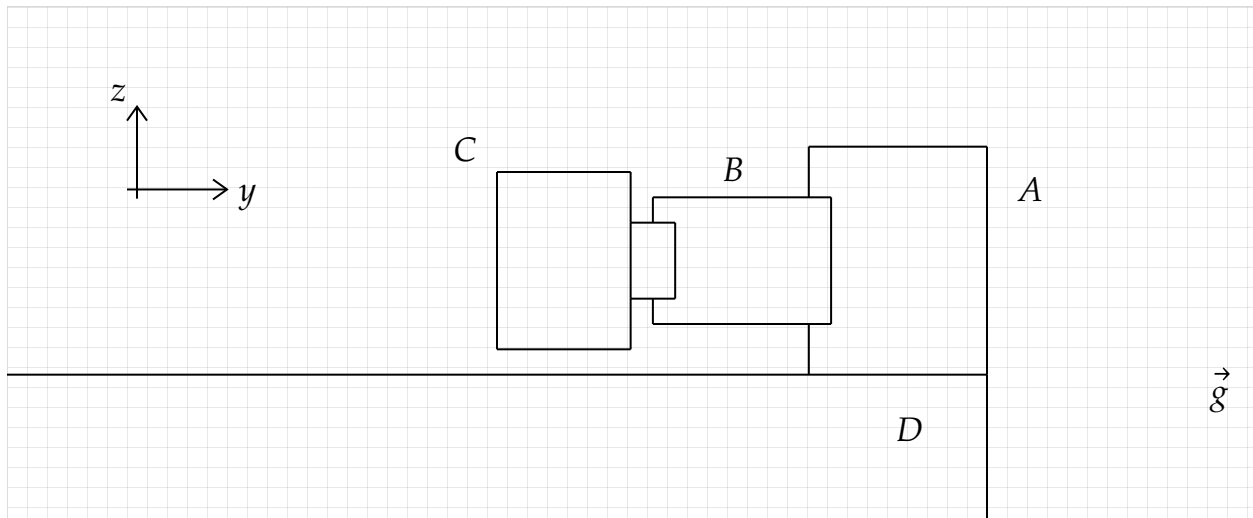


Fig. 3: yz -perspektiv av eksperimentet. Bladfjæren B er festet til en tung kloss A som er festet til et bord D . Aluminiumsklossen C igjen festet til bladfjæren. Tyngdeakselerasjonsvektoren \vec{g} er tegnet inn kun for å illustrere hvilken retning som er "ned".

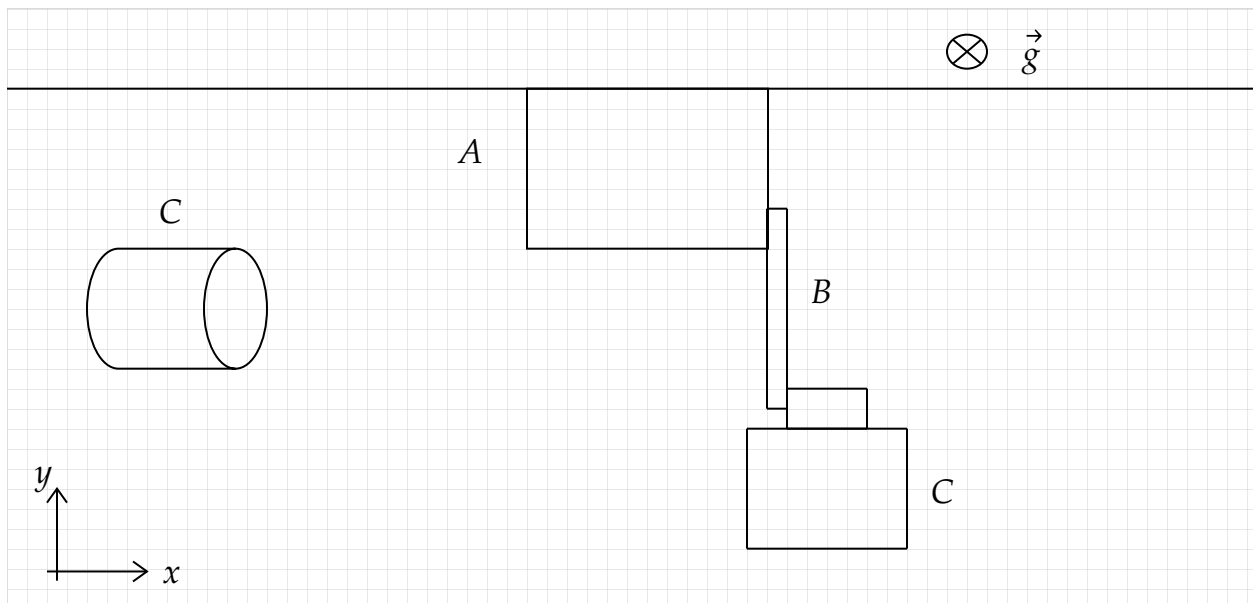


Fig. 4: xy -perspektiv av det samme eksperimentet. Koordinataksene følger et høyrehåndssystem. Når vi drar i aluminiumsklossen C i x -retning mens den er festet til bladfjæren, vil det virke en kraft $F = k\Delta x$ på bladfjæren der Δx er avstanden vi har dratt aluminiumsklossen fra hvilestillingen. Da virker det en kraft $-F$ på aluminiumsklossen. Når vi slipper aluminiumsklossen vil den oscillere med en masseavhengig frekvens tilnærmet gitt ved (8). Aluminiumsklossen er tegnet inn en ekstra gang øverst til venstre for å illustrere at den er sylinderformet.

Fig. 3 og fig 4. viser to illustrasjoner til det eksperimentelle oppsettet. Den samme blad fjæren B er festet til en tung kloss A og en aluminiumskloss C er festet til blad fjæren. Når vi drar aluminiumsklossen til en avstand Δx fra hvilestillingen, virker det en kraft $F = k\Delta x$ på blad fjæren i og dermed en kraft $-F$ på aluminiumsklossen. Når vi slipper aluminiumsklossen vil den oscillere med en masseavhengig frekvens tilnærmet gitt ved (8). Ved å måle periodetiden til den oscillerende bevegelsen kan vi bestemme massen til aluminiumsklossen. Til dette brukte vi en stoppeklokke.

For å få et så godt estimat på periodetiden som mulig bør den måles gjentatte ganger. Om frekvensen til den oscillerende bevegelsen er veldig høy kan man vurdere å måle annenhver periode. Usikkerheten i perioden kan finnes ved å bruke (1).

Deretter kan vi feste en mindre masse til aluminiumsklossen med teip og gjenta øvelsen. Vi måler periodetiden til den oscillerende bevegelsen og estimerer massen med usikkerhet. Den minste massen vi kan feste til aluminiumsklossen som gir en endring utenfor usikkerheten gir det dynamiske området til denne målemetoden på samme måte som i de to tidligere øvelsene. Ved å bruke (10) kan vi estimere den minste masseendringen vi kan måle. Vi teipet fast noen binderser til aluminiumsloddet som veier ~ 31 g.

For at vi skal kunne bruke (9) til å måle en masse m er vi nødt til å kjenne k fra før. I øvelsen med måleuret kan vi finne k . Eventuelt kan vi finne massen til aluminiumsloddet på en annen måte (f.eks ved bruk av balansevekt) og bruke (9) til å finne k . Eller vi kan gjøre begge deler og sammenligne de to metodene når vi skal finne det dynamiske området.

Sentrale størrelser til dette eksperimentet med forklaringer er listet i Tabell 4.

Symbol	Forklaring
m	Massen til aluminiumsklossen
k	Stivheten til blad fjæren
T	Periodetiden til den oscillerende bevegelsen

Tabell 4: Sentrale størrelser i dette eksperimentet med forklaringer

Balanseprinsippet

I denne øvelsen bruker vi en litt mer tradisjonell målemetode. Vi skal kalibrere en balansevekt (se fig. 5) ved hjelp av kalibreringsloddene. Balansevekten er en såkalt "Ohaus Triple Beam Balance", se datablad i [9]. For hver kalibreringsvekt leser vi av en verdi på balansevekten slik at vi har et datasett mellom avlest masse M og "offisiell" masse m og så kan vi igjen bruke minste kvadraters metode (13) og (14) til å lage en lineærtilpasning. Når vi skal måle andre ukjente masser, f.eks massen til aluminiumsloddet, så kan vi bruke (15) og (16) til å anslå usikkerheten i massen. Til slutt kan vi legge på 1 g ekstra til aluminiumsloddet for å se om endringen i den avleste massen er utenfor usikkerheten. Dersom den er det har vi et grunnlag til å si noe om det dynamiske området til balansevekten.



Fig. 5: Samme type balansevekt som ble brukt i dette forsøket.

Resultater

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av måleutrustning

m	L_0	L	δL
1 g	N/A	N/A	0.01 mm
10 g	10.21 mm	10.16 mm	0.05 mm
100 g	10.22 mm	9.68 mm	0.54 mm
500 g	10.22 mm	7.65 mm	2.57 mm
600 g	10.22 mm	7.16 mm	3.06 mm
610 g	10.22 mm	7.14 mm	3.08 mm
1 kg	10.48 mm	5.52 mm	4.96 mm
2 kg	10.48 mm	2.51 mm	7.97 mm

Tabell 5: Målinger av elastisk deformasjon ved bruk av måleutrustning. m er den "offisielle" massen til et kalibreringslodd. L_0 er avlest verdi på måleutrustningen før et kalibreringslodd ble lagt i kurven. L er avlest verdi på måleutrustningen etter at et kalibreringslodd ble lagt i kurven. δL er differansen mellom L_0 og L , også kjent som deformasjonen til bladfjæren.

Minste kvadraters metode (13) og (14) samt formlene for usikkerhetene (15) og (16) på datasettet (δL , m) gir

$$a = 0.24 \pm 0.01 \text{ kg/mm}$$

og

$$b = -0.070 \pm 0.052 \text{ kg}$$

Med $K = a$ gir (5) stivheten til bladfjæren som er

$$k = 2400 \pm 98 \text{ N/m}$$

der usikkerheten er gitt ved $\Delta k = g\Delta a$. Den fullstendige formelen for usikkerheten er egentlig $\Delta k = \sqrt{(g\Delta a)^2 + (a\Delta g)^2}$, men $(a\Delta g)^2$ anses som liten nok til at den kan sløyfes.



Fig. 6: Datapunkter (δL , m) sammen med det førstegradspolynomet som passer best til datapunktene. Alle linjer som befinner seg mellom de to blå stiplede linjene er innenfor usikkerheten til stigningstallet og konstantleddet.

Før vi satte aluminiumsloddet i kurven viste måleuret $L_0 = 10.22$ mm. Etter at det ble satt i kurven viste måleuret $L = 1.88$ mm. Det gir $\delta L = 8.34$ mm og

$$m_{al} = 2.0 \pm 0.1 \text{ kg}$$

der usikkerheten er funnet ved å kombinere (2) og (11).

Det var meningen at vi skulle legge til en mindre masse til aluminiumsloddet for å se om vi kan observere en endring utenfor usikkerheten, men dette glemte vi å gjøre. Vi har derfor ikke ordentlig testet denne målemetoden for å finne det dynamiske området og jeg har ikke en tabell som viser massen lagt til aluminiumsloddet med usikkerheter for å finne det dynamiske området.

Etter at målingene ble gjort fant vi ut at det ene stativet (E i fig. 1) var løst.

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av laserpeker

m	l
1 g	1 mm
10 g	7 mm
100 g	53 mm
500 g	251 mm
600 g	299 mm
1 kg	481 mm
2 kg	886 mm

Tabell 6: Målinger av elastisk deformasjon ved bruk av laserpeker. m er den "offisielle" massen til et kalibreringslodd.

l

er avstanden mellom punktet der lysstrålen treffer veggen relativt til et nullpunkt.



Fig. 7: Datapunkter (l, m) sammen med det førstegradspolynomiet som passer best til datapunktene. Alle linjer som befinner seg mellom de to blå stiplede linjene er innenfor usikkerheten til stigningstallet og konstantleddet.

Minste kvadraters metode (13) og (14) samt formlene for usikkerhetene (15) og (16) på datasettet (l, m) gir

$$a = 0.002 \pm 0.000 \text{ kg/mm}$$

og

$$b = -0.03 \pm 0.02 \text{ kg}$$

a er det beste estimatet til proporsjonalitetsfaktoren K .

Da vi satte aluminiumsloddet i kurven var avstanden mellom nullpunktet og posisjonen til lysstrålen $l = 941 \text{ mm}$. Det gir

$$m_{al} = 2.0 \pm 0.0 \text{ kg}$$

der usikkerheten er funnet ved å kombinere (6) og (2).

Også her var det meningen at vi skulle legge til en mindre masse til aluminiumsloddet for å se om vi kan observere en endring utenfor usikkerheten, men også her ble det glemt. I tillegg bruke vi det samme eksperimentelle oppsettet som i målingene med måleuret der det ene stativet var løst.

Harmonisk Oscillator

Følgende tabell viser periodemålingene med aluminiumsloddet alene:

$2T$	$2T$
0.80 s	0.85 s
0.81 s	0.85 s
0.89 s	0.86 s
0.84 s	0.79 s
0.81 s	0.86 s
0.84 s	0.86 s
0.85 s	0.82 s
0.82 s	0.83 s
0.83 s	0.81 s

Tabell 7: Annenhver periode til det oscillerende aluminiumsloddet målt med stoppeklokke.

Perioden til aluminiumsloddet er

$$T = 0.42 \pm 0.01 \text{ s}$$

der $\langle T \rangle = 0.42 \text{ s}$ og usikkerheten er funnet ved å bruke (1).

Ved å benytte oss av (17) kan vi bruke (9) til å estimere stivheten k i bladfjæren.

$$k = 480 \pm 6 \text{ N/m}$$

der usikkerheten er funnet ved å kombinere (9) og (2).

Følgende tabell viser periodemålingene med aluminiumsloddet + noen binderser

$2T$	$2T$
0.77 s	0.79 s
0.78 s	0.88 s
0.78 s	0.84 s
0.92 s	0.84 s
0.86 s	0.83 s
0.85 s	0.95 s
0.87 s	0.83 s
0.91 s	0.87 s
0.83 s	0.83 s
0.85 s	0.84 s

Tabell 8: Annenhver periode til det oscillerende aluminiumsloddet + binderser målt med stoppeklokke.

Periodetiden til aluminiumsloddet + bindersene er

$$T = 0.42 \pm 0.01 \text{ s}$$

der $\langle T \rangle = 0.42 \text{ s}$ og usikkerheten er funnet ved å bruke (1).

Ved å bruke (9) kan vi finne massen til aluminiumsloddet + bindersene.

$$m_{al+b} = 2.2 \pm 0.1 \text{ kg}$$

der usikkerheten er funnet ved å kombinere (9) og (2).

Balanseprinsippet

m	M
1 g	1.0 g
500 g	499.7 g
1 kg	999.3 g
2 kg	1999.3 g

Tabell 9: "Offisiell" masse m til kalibreringsloddene og avlest masse M på balansevekten.

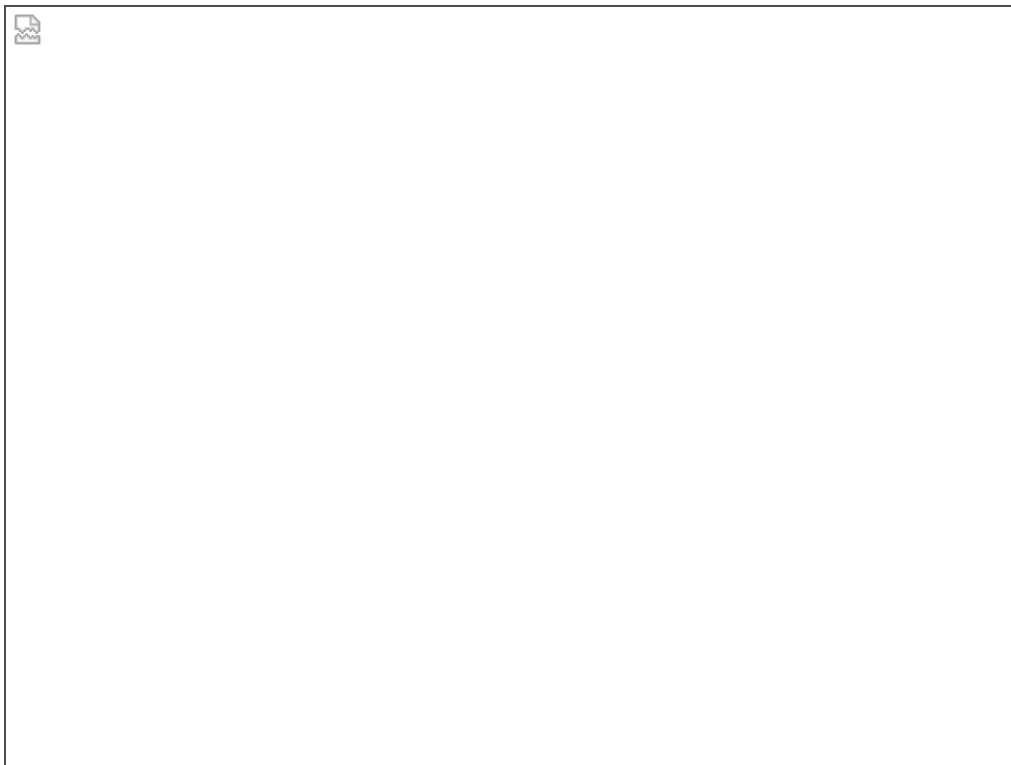


Fig. 8: Datapunkter (M, m) sammen med det førstegradspolynomet som passer best til datapunktene. Alle linjer som befinner seg mellom de to blå stiplede linjene er innenfor usikkerheten til stigningstallet og konstantleddet.

Minste kvadraters metode (13) og (14) samt formlene for usikkerhetene (15) og (16) på datasettet (M, m) gir

$$a = 1.0 \pm 0.0$$

og

$$b = 0.1 \pm 0.2 \text{ g}$$

Den avleste massen til aluminiumsloddet var $M_{al} = 2142.0 \text{ g}$. Ved å bruke modellen (11) med parameterne a og b , så gir det

$$m_{al} = 2142.1 \pm 0.3 \text{ g}$$

der usikkerheten er funnet ved å kombinere (11) og (2).

Da vi la på kalibreringsloddet på 1 g, så var den avleste massen $M_{al+1g} = 2143.1 \text{ g}$. Igjen ved å bruke modellen (11) med parameterne a og b får vi

$$m_{al+1g} = 2143.3 \pm 0.3 \text{ g} \quad (17)$$

der usikkerheten igjen er funnet ved å kombinere (11) og (2).

Endringen er utenfor usikkerheten. Balansevekten har et dynamisk område på minst 3 størrelsesordener, fordi $2142 \text{ g} / 1 \text{ g} \sim 10^3$.

Diskusjon

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av måleutrustning

Under eksperimentelt forklarte jeg at vi ikke kan ta for gitt at den avleste verdien på måleuret er den samme hver gang det ikke er en kalibreringsvekt i kurven. Fra tabell 5 ser vi at denne verdien stort sett er den samme, men ikke mellom alle målinger. Vi fant senere ut at det ene stativet (E i fig. 1) var løst. Det er et stort usikkerhetsmoment i målingene. Siden vi ikke har kjennskap til denne målemetoden fra før er det vanskelig å si hvor mye det har påvirket målingene og det betyr at vi ikke har fått testet denne målemetoden skikkelig. Usikkerhetene i stigningstallet a og konstantleddet b ble veldig høye på hhv. 0.01 kg/mm og 0.05 kg . Usikkerheten i massen til aluminiumsloddet ble også veldig høy på hele 0.1 kg . Dersom vi skulle forsøke å finne det dynamiske området til denne målemetoden måtte vi altså ha brukt en ekstra masse på minst 100 g . Uten denne systematiske feilen er det tvilsomt at det dynamiske området til denne målemetoden er så dårlig, men med de målingene fra tabell 5 er det vanskelig å trekke en skikkelig konklusjon.

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av laserpeker

Det samme eksperimentelle oppsettet som forrige øvelse ble brukt i denne øvelsen. Også her er det et løst stativ som gjør det vanskelig å trekke en skikkelig konklusjon.

Jeg forklarte i det forrige eksperimentet at det er naivt å anta at vi kommer til å lese av den samme verdien når det ikke er en masse i kurven fra én måling til en annen. Dette er sant også i denne øvelsen. På en annen side måtte vi denne gangen fysisk markere et nullpunkt på veggen og det er betydelig mer kronglete å holde styr på N forskjellige nullpunkter som står tett opp på hverandre enn det er å bare lese av en verdi på et måleutrust og skrive det ned. Vi har derfor bare satt ett nullpunkt, og det ble satt etter at vi ble ferdige med målingene i det forrige eksperimentet og før vi gjorde noen målinger. Men det er klart at dette er en svakhet i målingene våre, særlig når det viser seg at det ene stativet var løst. Vi kunne se at verdien til måleuret når det ikke var en vekt i kurven endret seg og det er grunn til å tro at noe tilsvarende har skjedd i denne øvelsen. Men siden vi bare har valgt ett nullpunkt er det ikke mulig å vite om det har skjedd og i hvor stor grad det har skjedd.

Den målte massen til aluminiumsloddet i denne metoden er innenfor usikkerheten til den målte massen i den forrige metoden (men det var jo også litt av en usikkerhet).

Harmonisk Oscillator

Her var det egentlig planen at jeg skulle bruke verdien til k fra måleutrustmetoden slik at jeg kunne anslå massen til aluminiumsloddet ved å bruke (9). Denne verdien hadde imidlertid en så vanvittig stor usikkerhet at det nesten ikke hadde vært noe poeng i å gjøre dette. I stedet brukte jeg verdien (17) for å finne $k = 480 \pm 6 \text{ N/m}$.

En ting jeg legger merke til er at denne verdien ikke stemmer overens med verdien fra måleutrustmetoden $k = 2400 \pm 98 \text{ N/m}$. Siden alle måleutrustmetodene stemmer nokså godt overens når det kommer til massen til aluminiumsloddet, mistenker jeg at jeg må ha regnet feil når jeg kom fram til denne verdien, men jeg klarer ikke å finne ut av hvor jeg eventuelt regnet feil. Det bør nevnes at blad fjæren vi brukte til denne måleutrustmetoden ikke er den samme blad fjæren som i metoden med måleuret. Men blad fjæren er likevel av samme materiale og er av samme type. At det er såpass betydelige forskjeller mellom dem tviler jeg meget sterkt på.

Ved å bruke (10) anslo vi at vi kunne måle en minste masseendring på $\sim 30 \text{ g}$, men etter at vi

faktisk utførte målingen viste det seg å ikke være tilfellet. Den avgjørende årsaken til det er oppløsningen til stoppeklokken. Gjennomsnittet av målingene i tabell 8 er egentlig litt større enn gjennomsnittet av målingene i tabell 7, men ikke stort nok til at det er en signifikant endring. Fra målingene alene kan vi dermed ikke slå fast at vi faktisk har lagt på en ekstra masse. Dette gjør også at vi ikke har nok grunnlag til å si noe om det dynamiske området til denne målemetoden.

Balanseprinsippet

Fra verdiene til a og b fant vi at balansevekten er en meget presis og nøyaktig målemetode. Vi kunne anslå massen til aluminiumsloddet med mange siffrers nøyaktighet, noe vi ikke kunne gjøre i noen av de andre målemetodene. Endringen i den målte verdien da vi la på 1 g til aluminiumsloddet var også utenfor usikkerheten. Vi har derfor et godt nok grunnlag til å si at det dynamiske området til balansevekten er minst 3 størrelsesordener. Usikkerheten i massen til aluminiumsloddet impliserer at en ekstra masse i størrelsesorden 10^{-1} g også ville vært utenfor usikkerheten slik at det dynamiske området ville vært 4 størrelsesordener. Men vi kan ikke påstå at det er 4 størrelsesordener før vi har testet det.

Konklusjon

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av måleur

$$m_{al} = 2.0 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Dynamisk område: Ikke funnet.

Måling av elastisk deformasjon ved bruk av laserpeker

$$m_{al} = 2.0 \pm 0.0 \text{ kg}$$

Dynamisk område: Ikke funnet

Harmonisk Oscillator

$$m_{al+b} = 2.2 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Dynamisk område: Ikke funnet

Balanseprinsippet

$$m_{al} = 2142.1 \pm 0.3 \text{ g}$$

Dynamisk område: Minst 3 størrelsesordener. Kanskje 4.

Referanser

- [1] G. L. Squires, *Practical Physics*, 2d ed, ch. 3
- [2] Klara Hveberg, Tom Lindstrøm, *Flervariabel Analyse med Lineær Algebra*, 2. utg, s. 502
- [3] G. L. Squires, *Practical Physics*, 2d ed, p. 30
- [4] G. L. Squires, *Practical Physics*, 2d ed, p. 166
- [5] https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS2150/v19/kursmateriell/masse-og-kraft/astm_weight_tolerances.pdf
- [6] https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS2150/v19/kursmateriell/datablader-og-brukermanualer/maleur---kalibreringssertifikat/maaleur_c3767.pdf
- [7] https://units.fandom.com/wiki/Gravity_of_Earth
- [8] <http://www.tradecomcombine.com/images/J02.gif>
- [9] <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS2150/v19/kursmateriell/datablader-og-brukermanualer/balansevekt-ohaus-triple-beam-balance-manual.pdf>