TMA4245 - Øving 2

1

```python
# Antall realisasjoner man skal bruke
n = 1000

# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = simX(n)

# Approksimer sannsynligheten
P_X_le_2 = np.sum(simulerte_X <= 2)/n

# Skriv ut resultatet
print("Approksimert sannsynlighet: ",P_X_le_2)
```

✓ 0.0s

```
Approksimert sannsynlighet:  0.397
```

2

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i) = 0\cdot 0.5 + 1\cdot 0.10 + 2\cdot 0.25 + 3\cdot 0.4 + 4\cdot 0.15 + 5\cdot 0.05$$

$$= 2.65$$

$$Var(X) = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2 = 8.35 - 2.65^2 = 1.3275 \approx 1.33$$

$$E[X^2] = 0^2\cdot 0.5 + 1^2\cdot 0.10 + 2^2\cdot 0.25 + 3^2\cdot 0.4 + 4^2\cdot 0.15 + 5^2\cdot 0.05$$

$$= 8.35$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.3275} = 1.15217 \approx 1.15$$

```python
# Antall kjøringer
n = 1000

# Simuler n ganger
x_simulated = simX(n)

# Beregn forventningsverdien E[X]
mean_x_simulated = np.mean(x_simulated)

# Beregn standardavviket SD[X]
std_x_simulated = np.std(x_simulated)

print("Tilnærmet forventningsverdi E[X]:", mean_x_simulated)
print("Tilnærmet standardavvik SD[X]:", std_x_simulated)
```

✓ 0.0s

```
Tilnærmet forventningsverdi E[X]: 2.609
Tilnærmet standardavvik SD[X]: 1.1541745968439958
```

3

a)

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\}, \quad x \geq 0$$

$\Downarrow$ henter fra forrige innlevering

$$f_X(x) = \frac{2}{\alpha} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

b) La oss finne en formel slik at U kan definere X

$$U = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\}$$

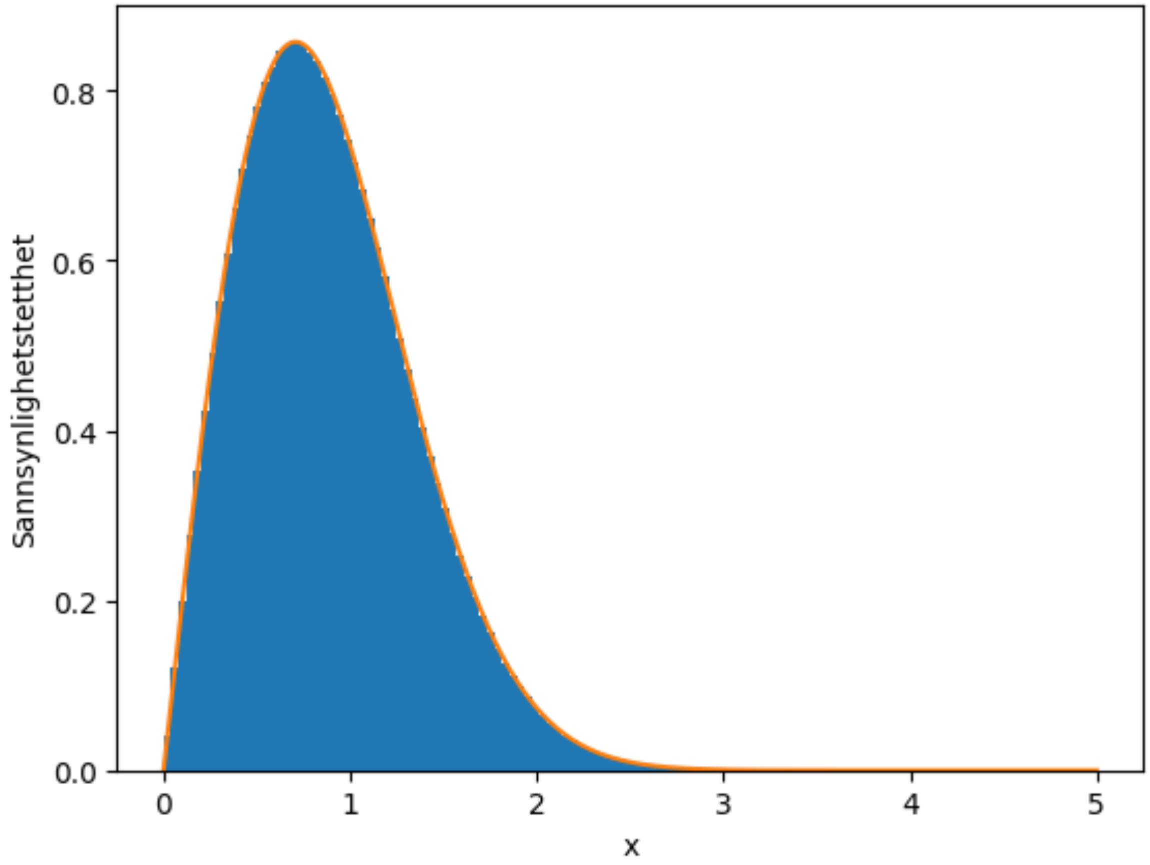
Vi løser for x:

$$e^{-\frac{x^2}{\alpha}} = 1 - U$$

$$-\frac{x^2}{\alpha} = \ln 1 - U$$

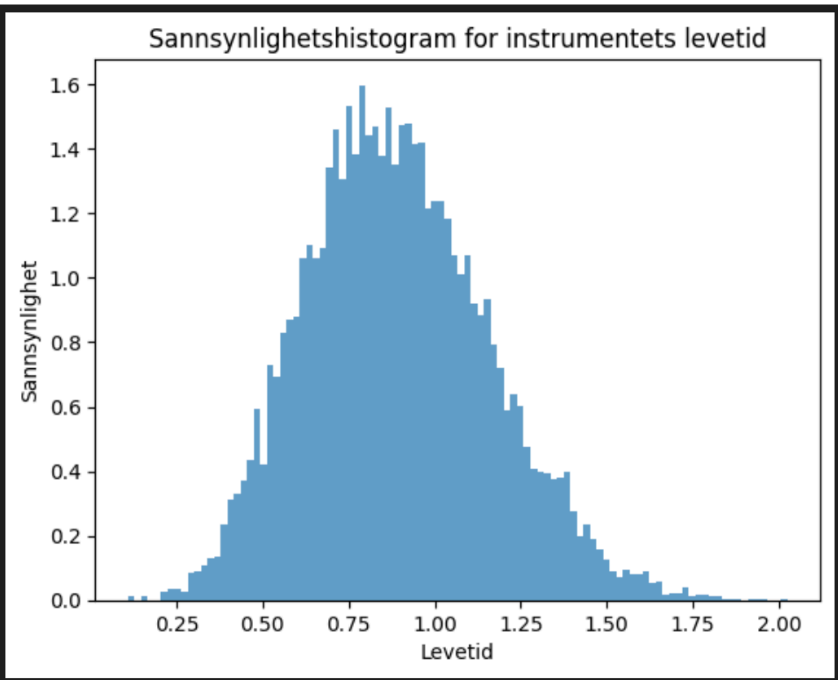
$$x = \sqrt{-\alpha \ln 1 - U}$$

```python
def generateX(n,alpha):
    u = np.random.uniform(size=n) #array med n elementer.
    x = np.sqrt(-alpha*np.log(1-u))

    return x

# Sett antall realisasjoner og verdien til alpha
n = 10000000
alpha = 1

# simuler realisasjoner av X
simulerte_X = generateX(n,alpha)

# Lag sannsynlighetshistogram for de simulerte verdiene,
# vi spesifiserer antall intervaller ved å sette "bins=100"
plt.hist(simulerte_X, density=True,bins=100)  #density=True gjør at vi får et sannsynlighetshistogram

# Angi navn på aksene
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("Sannsynlighetstetthet")

# Regn ut og plott sannsynlighetstettheten til X på samme plott
x = np.linspace(0,5,1000) # 1000 verdier mellom 0 og 5
y = (2/alpha) * x * np.exp(-(x**2)/alpha) # fyll inn formelen du fant for sannsynlighetstettheten
plt.plot(x,y)

# Avslutt med å generere alle elementene du har plottet
plt.show()
```
✓ 0.3s



c)

```python
def Y(n):
    alpha_1 = 1
    alpha_2 = 1.2

    # Generer de ulike komponentene
    x1 = generateX(n, alpha_1)
    x2 = generateX(n, alpha_1)
    x3 = generateX(n, alpha_2)
    x4 = generateX(n, alpha_2)
    x5 = generateX(n, alpha_2)


    # Kombinerer realisasjonene og finner den tredje lengste levetiden for hver realisasjon
    lifetime = np.vstack((x1, x2, x3, x4, x5))
    instrument_lifetimes = np.partition(lifetime, 2, axis=0)[2]

    return instrument_lifetimes

# Sett antall realisasjoner
n = 10000

# Generer realisasjoner for instrumentets levetid
Y_realizations = Y(n)

# Plotter sannsynlighetshistogram
plt.hist(Y_realizations, bins=100, density=True, alpha=0.7)
plt.xlabel('Levetid')
plt.ylabel('Sannsynlighet')
plt.title('Sannsynlighetshistogram for instrumentets levetid')
plt.show()

# Beregner tilnærmede verdier for P(Y >= 1) og P(Y >= 1 | Y >= 0.75)
P_Y_ge_1 = np.mean(Y_realizations >= 1)
P_Y_ge_1_given_Y_ge_075 = np.mean(Y_realizations[Y_realizations >= 0.75] >= 1)

print(f"P(Y >= 1): {P_Y_ge_1}")
print(f"P(Y >= 1 | Y >= 0.75): {P_Y_ge_1_given_Y_ge_075}")
```
✓ 0.1s




```
P(Y >= 1): 0.3289
P(Y >= 1 | Y >= 0.75): 0.480286214953271
```

④ 1) $E[x](\alpha) = \int_0^\infty x \frac{2}{\alpha} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \, dx = 2\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$

$$= 2\left(\underbrace{-\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx\right)$$

$$\boxed{u = \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{du}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-u^2} du$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

2)

```
# Sett antall realisasjoner
n = 10000

# Generer realisasjoner for instrumentets levetid
Y_realizations = Y(n)

# Beregn forventningsverdien E[Y]
mean_Y_realizations = np.mean(Y_realizations)

# Beregn standardavviket SD[Y]
std_Y_realizations = np.std(Y_realizations)

print("Tilnærmet forventningsverdi E[Y]:", mean_Y_realizations)
print("Tilnærmet standardavvik SD[Y]:", std_Y_realizations)
```

✓ 0.0s

```
Tilnærmet forventningsverdi E[Y]: 0.8982129876782987
Tilnærmet standardavvik SD[Y]: 0.26522696452296113
```

5

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & = \left(\frac{1+3+1+1}{18}\right) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \\ 1 & = \frac{1}{3} \\ 2 & = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(y)} \rightarrow \quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} [1/6, 1/2, 1/6, 1/6] & \text{for } x=0 \\ [1/6, 1/6, 1/2, 1/6] & \text{for } x=1 \\ [1/6, 1/6, 1/2, 1/6] & \text{for } x=2 \end{cases}$$

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+2}{3} = 1 \,//$$

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{3}{18} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 3\frac{5}{18}$$

$$= \frac{5+10+15}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \,//$$

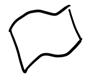
X og Y er avhengige stokastiske variabler siden sannsynligheten for y-verdier gitt $x=0$ er ulik $x=1$ og $x=2$. Dette gjelder selvfølgelig andre veien også.

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 1 \cdot \frac{17}{9} - \frac{5}{3} = \frac{17-15}{9} = \frac{2}{9} \,//$$

Vi har $E[X]$ og $E[Y]$ så vi må finne $E[XY]$

$$E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 3 \frac{1}{18}$$
$$+ 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot 3 \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1+6+3+2+4+18}{18} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9}$$

6

 $\rightarrow$ 100g

$W_P \rightarrow$ Vekt plate

$W_E \rightarrow$ Vekt av eske med 10 plater

$E[W_P] = 100g$

$SD[W_P] = 0.8g$

a)

$$E[W_E] = 10 \times E[W_P] + 50g$$

$$= 10 \times 100g + 50g = 1050g$$

$$SD[W_E] = \sqrt{10 \times SD[W_P]^2} = \sqrt{10 \times 0.8^2} = 2.53$$

b)

- $E[D] = 10 \times 0.21 = 2.1$
- $P(D \geq 1) = 1 - P(D = 0)$

$$= 1 - (1 - 0.21)^{10}$$

$$= 1 - 0.79^{10} = 0.905$$

D er antall defekt i en batch med 10 plater.