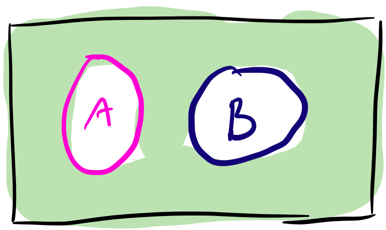
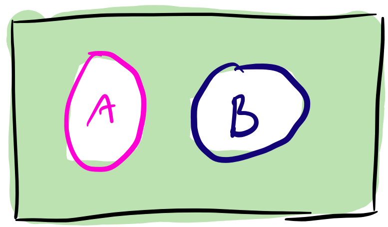
Øving 1 TMA4245

Oppgave 1:

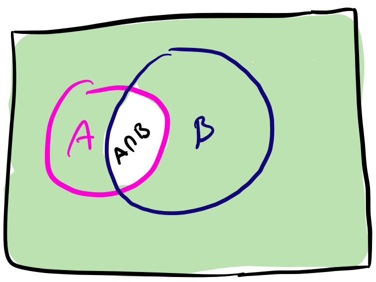
$P((A \cup B)')$ og $P(A' \cap B')$



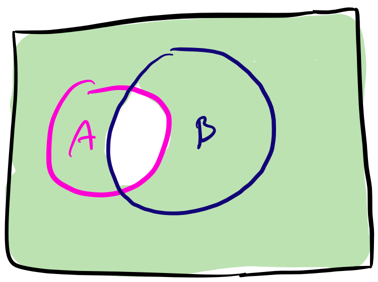


de er like

$P((A \cap B)')$

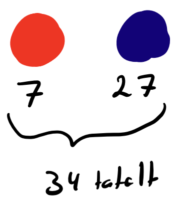


$P(A' \cup B')$



de er også like

Oppgave 2:



1. Vi trekker 7 kuler og at alle er rød kan bare trekkes på en måte.
Vi finner så hvor mange mulige måter kulene kan trekkes på:

$$\frac{34!}{7!(34-7)!} = 5379616$$

$$P(7\,\text{røde}) = \frac{1}{5379616} \approx 0.000000186$$

2. Om nøyaktig 4/7 skal være rød kan vi finne antall mulige kombinasjoner ved

$$\binom{7}{4} \times \binom{27}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \times \frac{27!}{3! \cdot 24!}$$

$$= 35 \times 2925$$

$$= 102375$$

og dele på antall kombinasjoner

$$P(4\,\text{røde}) = \frac{102375}{5379616} \approx 0.0190$$

3. Vi finner først sannsynligheten av nøyaktig 6 røde kuler

$$\binom{7}{6} \times \binom{27}{1} = 7 \times 27$$

$$= 189$$

$$\frac{189}{5379616} = 0.00003513261$$

Så multipliser vi med sannsynlighet for å trekke den siste røde kula

$$0.00003513261 \times \frac{1}{27} \approx 0.0000013012$$

Oppgave 3:

300 lodd

3 gir gevinst A

3 gir gevinst B

1. Skal Ola trekke nøyaktig 1 lodd med gevinst A ut av 300 kan vi sjekke for mange måter det kan skje på

$$\binom{3}{1} \times \binom{297}{4} = \frac{3!}{1!\,2!} \times \frac{297!}{4! \cdot 293!} = 3 \times 317\,691\,990$$

$$= 953\,075\,970$$

Så finner vi alle kombinasjoner

$$\binom{300}{5} = \frac{300!}{5! \cdot 295!} = 19\,582\,837\,560$$

Så finner vi sannsynligheten:

$$P(\text{èn } A) = \frac{953\,075\,970}{19\,582\,837\,560} = 0.04867$$

2. For at vi skal få minst en gevinst av A kan det skje på 5 forskjellige måter. Vi finner denne sannsynligheten ved å finne komplimentæren og så trekke det fra 1.

antall kombinasjoner for $\bar{A}$:

$$\binom{297}{5} = \frac{297!}{5! \cdot 292!} = 18\,616\,750\,614$$

så $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{18\,616\,750\,614}{19\,582\,837\,560} \approx 0.04933$

3. minst en gevinst. vi tar da å finne $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ og trekke det fra 1

Vi har 294 uten gevinst og vi trekker 5

$$\binom{294}{5} = \frac{294!}{5! \cdot 289!} = 17\,689\,173\,558$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \frac{17\,689\,173\,558}{19\,582\,837\,560}$$

$$\approx 0.09670 \approx \underline{\underline{9.67\%}}$$

Oppgave 4

$P(A) = 0.4$

$P(B) = 0.3$

$P(C) = 0.3$

$P(A \cup B) = 0.6$

$P(A \cup C) = 0.5$

$P(A \cup B \cup C) = 0.7$

I

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$$

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = 0.333$$

II

$P(A \mid B) \neq P(A) \rightarrow$ A og B er avhengige hendelser

III

$P(A \cap B) \neq \emptyset \rightarrow$ A og B er IKKE disjunkte hendelser

Oppgave 5

8% av menn e fargeblind
0.3% av kvinnan e fargeblind

$$P(F \cap M) = 0.33 \cdot 0.08 = 0.0264$$
$$P(F \cap K) = 0.66 \cdot 0.003 = 0.00198$$

antell menn = x
antell kvinne = 2x

$$P(M) = 0.33$$
$$P(K) = 0.66$$

$$P(F) = 0.33 \cdot 0.08 + 0.66 \cdot 0.003 = 0.02838$$

$$P(K \mid F) = \frac{P(K \cap F)}{P(F)} = \frac{0.00198}{0.02838} \approx 7.0\%$$

Oppgave 6

$$\boxed{f(x) = P(X = x)}$$

I

$$P(x \leq 2) = 0.05 + 0.10 + 0.25 = 0.40$$
$$P(x \leq 2 \mid x < 4) = \frac{0.40}{0.40 + 0.40} = 0.50$$
$$P(x \leq 2 \mid x \geq 1) = \frac{P(x \leq 2 \cap x \geq 1)}{P(x \geq 1)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.95} = 0.368$$

II

$$F(x) = P(x \leq x) = \sum_{x_i = 0}^{x} P(x_i)$$

7

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\};\ x \geq 0$$

a)

I

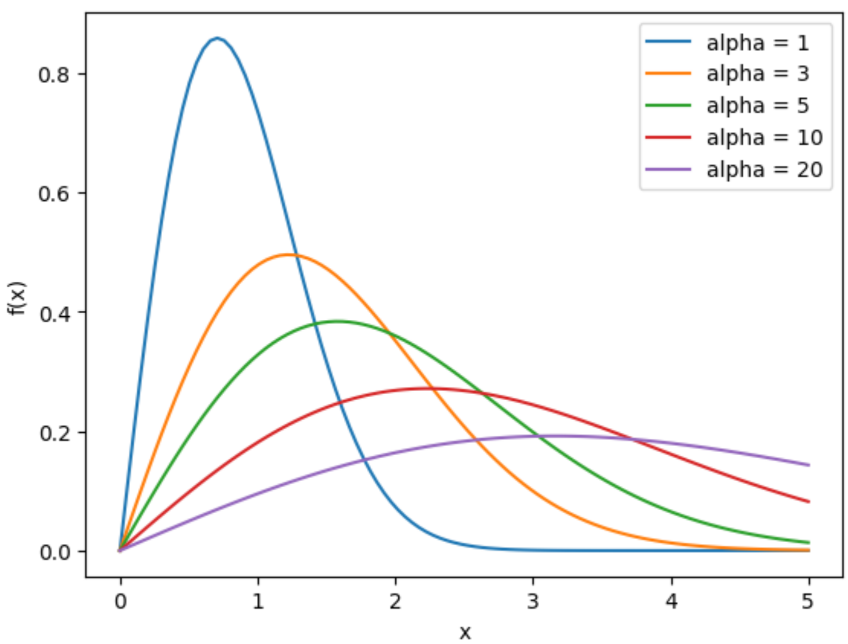
$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \quad //$$

II

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sett hvilke x-verdier du vil plotte for
x = np.linspace(0,5,100)

# Sett verdien for parameteren alpha
alphas = [1, 3, 5, 10, 20]

# Beregn så sannsynlighetstettheten og plott opp funksjonen
# Definer funksjonen f_X(x, alpha)
def f_X(x, alpha):
    return (2/alpha)*x*np.exp(-x**2/alpha)

for alpha in alphas:
    plt.plot(x, f_X(x, alpha), label="alpha = " + str(alpha))

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.legend()
```

✓ 0.1s



b)

I

Et instrument har to uavhengige moduler og trenger bare én for å fungere

$$P(Z > z) = 1 - F_Z(z) = 1 - P(Z \leq z)$$

vi finner $P(Z \leq z)$ ved å multiplisere de to uavhengige modulene

$$P(Z \leq z) = P(X \leq z)^2 = F_X^2(z)$$

Da får vi at

$$P(Z > z) = 1 - F_X^2(z)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{z^2}{\alpha}}\right)^2$$

II

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

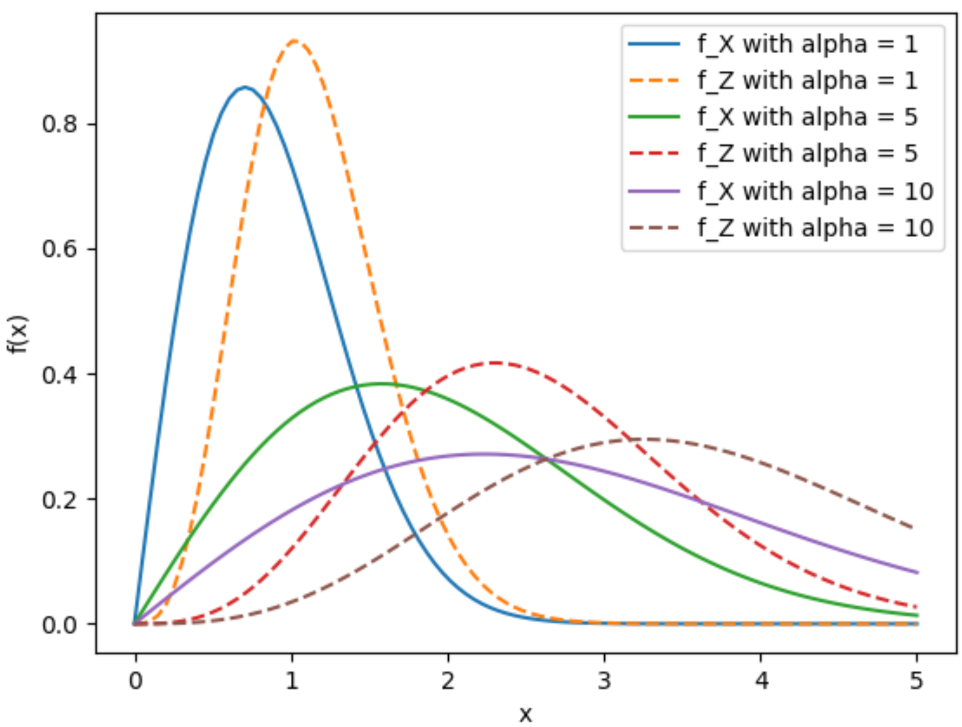
så la oss finne $F_Z(z)$

$$F_Z(z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 1 + \left(1 - e^{-\frac{z^2}{\alpha}}\right)^2$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{z^2}{\alpha}}\right)^2$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(1 - e^{-\frac{z^2}{\alpha}}\right)^2$$
$$= \frac{4z\left(e^{\frac{z^2}{\alpha}} - 1\right)e^{-\frac{2z^2}{\alpha}}}{\alpha}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sett hvilke x-verdier du vil plotte for
x = np.linspace(0,5,100)

# Sett verdien for parameteren alpha
alphas = [1, 5, 10]

# Beregn så sannsynlighetstettheten og plott opp funksjonen
# Definer funksjonen f_X(x, alpha)
def f_X(x, alpha):
    return (2/alpha)*x*np.exp(-x**2/alpha)

# Definer funksjonen F_Z(z, alpha)
def f_Z(z, alpha):
    return 4*z*(np.exp(z**2/alpha) - 1)*np.exp(-2*z**2/alpha)/alpha

for alpha in alphas:
    plt.plot(x, f_X(x, alpha), label="f_X with alpha = " + str(alpha))
    plt.plot(x, f_Z(x, alpha), label=f"f_Z with alpha = {alpha}", linestyle='--')

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.legend()
```

✓ 0.0s



He ser vi at levetiden til instrumentet forskyves mot høyre som e logisk fordi den avhengiger av at begge modulene feiler og ikke bare Y slik $f_X(x)$ viser.

Oppgave 8

300 lodd

3 lodd har gevinst A

3 lodd har gevinst B

294 lodd har ingen gevinst

X er antall gevinster av A

Y er antall gevinster av B

$f_X(x) = P(X = x)$

$f_Y(y) = P(Y = y)$

$f_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$

I

Finner først alle mulige måter å trekke disse 5 loddene

$$\binom{300}{5} = \frac{300!}{5!(295!)} =$$

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x} \times \binom{297}{5-x}}{\binom{300}{5}}$$

II

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\binom{3}{x} \times \binom{3}{y} \times \binom{294}{5-(x+y)}}{\binom{300}{5}}$$

III

Vi kan si at $f_X(x) = \sum_{y}^{5-x} f_{XY}(x,y) = \sum_{y}^{5-x} \frac{\binom{3}{x} \times \binom{3}{y} \times \binom{294}{5-(x+y)}}{\binom{300}{5}}$

$$= \underbrace{\binom{3}{x} \times \frac{1}{\binom{300}{5}}}_{\text{konstante for } x} \underbrace{\sum_{y}^{5-x} \binom{3}{y}\binom{294}{5-(x+y)}}_{\text{Vandermondes identitet}}$$

$$= \frac{\binom{3}{x}}{\binom{300}{5}} \cdot \binom{294+3}{5-x} = \frac{\binom{3}{x}\binom{297}{5-x}}{\binom{300}{5}}$$