1

Figure 1: Kongsberg Maritimes AUV Hugin.

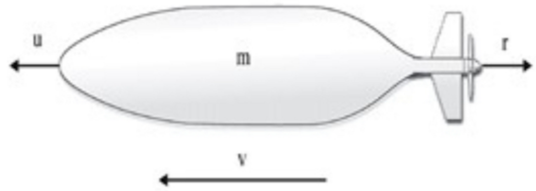


Figure 2: AUV med horisontale krefter.

a) $$\sum F = ma = u - r$$

$$m \cdot \dot{v} = u - r$$

$$m \cdot \dot{v} = u - kv$$

$$\boxed{m\dot{v} + kv - u = 0}$$

Dette er en første ordens diff likning med u som pådrag.

b)

Fra forelesning

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u - \frac{k_l}{m}v^2$$

$$v(t) = \frac{u}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad v(0) = 0$$

$$m\dot{v} + kv - u = 0$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

$$v(t) = \frac{u}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

c)

$$\dot{v} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{a}v + \frac{1}{m}u$$

Fra forelesning

For $\dot{x} = ax + bu$ så er

$T = -\frac{1}{a}$ systemets tidskonstant

$K = -\frac{b}{a}$ systemets forsterkning

Fremkommer slik: $\underbrace{-\frac{1}{a}}_{T}\dot{x} + x = \underbrace{-\frac{b}{a}}_{K}u$

$$T = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{\left(-\frac{k}{m}\right)} = \frac{m}{k}$$

I Tids konstanten beskriver hvor fort en diff likning vil konvergere.

II Om vi øker k vil tidskonstanten bli mindre fordi den verdien v konvergere mot vil bli lavere.

III) Om vi øker massen vil tidskonstanten øke siden det tar lengre tid å få et tyngre legeme opp i fart.

d)

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

Fra forelesning

For $\dot{x} = ax + bu$ så er

$T = -\frac{1}{a}$ systemets tidskonstant

$K = -\frac{b}{a}$ systemets forsterkning

Fremkommer slik: $\underbrace{-\frac{1}{a}}_{T}\dot{x} + x = \underbrace{-\frac{b}{a}}_{K}u$

$$K = -\frac{\frac{1}{m}}{\left(-\frac{k}{m}\right)} = -\left(\frac{1}{m}\cdot\left(-\frac{m}{k}\right)\right)$$

$$K = \frac{1}{k}$$

Når k øker vil forsterkningen avta. Som i dette tilfellet betyr at når motstanden $r = kv$ blir større har pådraget mindre å si fordi forsterkningen avtar.

e) $m = 200kg$ og $k = 100 kg/s$

$$T = \frac{m}{k}$$

$$= \frac{200kg}{100kg/s} = 2s$$

T = 2s betyr at etter 2s har AUV'en nåd 63% av sin endelige fart

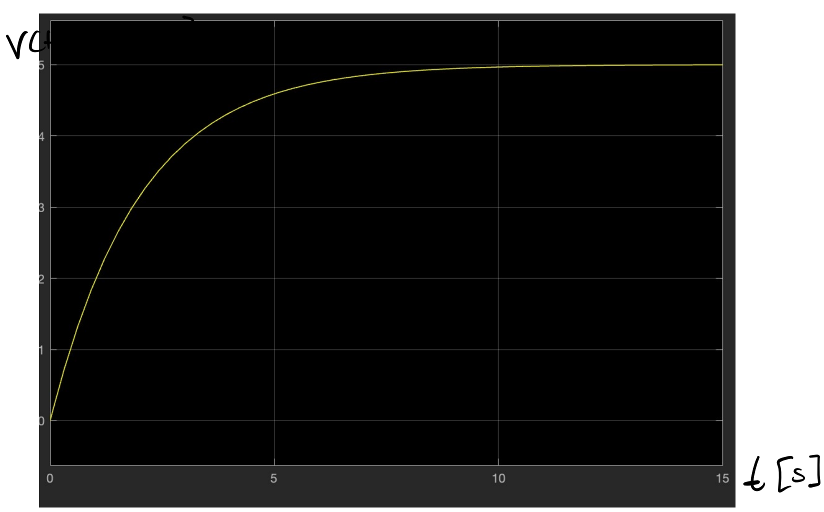
$$K = \frac{1}{k}$$

$$\left[\frac{1}{kg/s}\right] = \frac{1}{1} \cdot \frac{s}{kg} = s/kg$$

$$= \frac{1}{100kg/s} = 0.01 \, s/kg$$

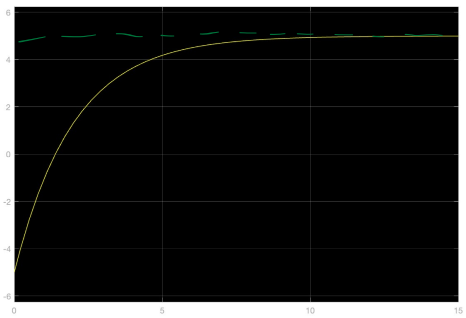
Dette betyr at systemet blir dempet med 0.01 s/kg

f) $m = 200 kg$, $U = 500N$, $k = 100 kg/s$

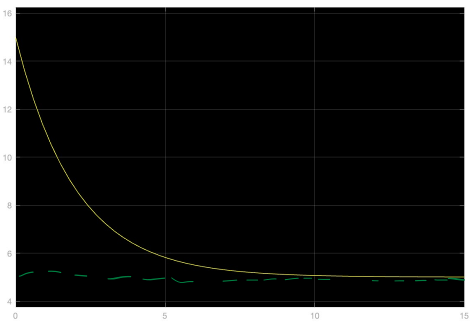


g)

$V_0 = -5\ m/s$



$V_0 = 15\ m/s$



diff likningen konvergerer mot samme sluttverdi uavhengig av start verdien.

h)

hva må u være for å få en konstant fart på 3m/s?

I ved å regne på forsterkningen til systemet

$$V(t) = \frac{u}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \overbrace{\frac{1}{k}}^{K} u \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$v = \frac{1}{k} \cdot u \cdot 1 = K \cdot u$$

Når $t \to \infty$ går dette uttrykket mot 1

$$u = \frac{v}{K} = \frac{3\ m/s}{0.01\ s/kg} = 300N$$

Ⅱ ved å anta at den deriverte er null i 1 a)

$$m\dot{v} + kv - u = 0 \quad , \quad \dot{v} = 0$$

$$m \cdot 0 + kv - u = 0$$

$$kv = u \quad \Rightarrow \quad u = 100\,\tfrac{kg}{s} \cdot 3\,\tfrac{m}{s} = 300\,N$$

i)

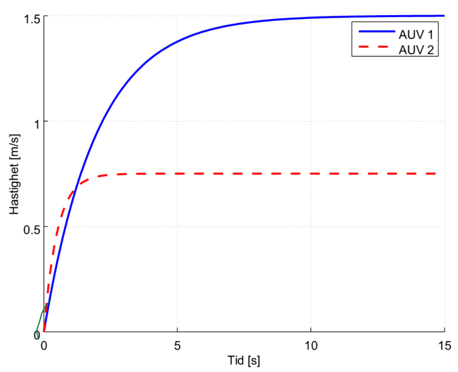
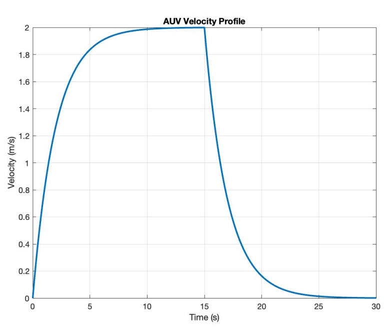


Figure 3: Tidsrespons.

$T_1 > T_2$ fordi endringen i farten i punktet $V(0)$ e større for AUV 2 enn AUV 1 som betyr at AUV 2 vil nå sin endelige fart fortere enn AUV 1

$K_1 > K_2$ fordi dempingen i K_2 er større enn dempingen i K_1 som gjør at AUV 2 ikke vil nå like stor fart

j)



Denne grafen ligner hvordan en kondensator lades opp og gir fra seg energi.

Oppgave 2

$[kg/s^2]$

$F_f = kx$

$F = d\dot{x}$

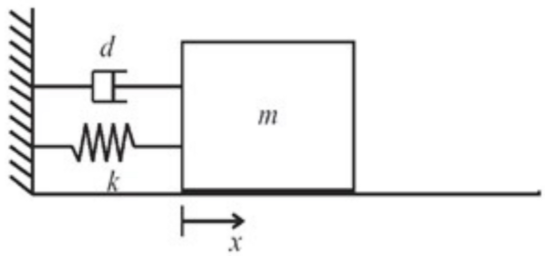


Figure 4: Masse-fjær-demper system.

a) Kraftbalanse $\sum F = ma \rightarrow a = \ddot{x}$

$$-F_f - F_d = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + F_d + F_f = 0$$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Dette er en 2. ordens diff likning siden vi har $\ddot{x}$ → dobbelt derivert

Da trenger vi to initialverdier x_0 og $\dot{x}_0$ for å finne løsningen

b) $m=2,\ d=4,\ k=6$

$$\ddot{x} + \frac{4}{2}\dot{x} + \frac{6}{2}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Vi har røttene $-1 + i\sqrt{2}$ og $-1 - i\sqrt{2}$ //

c)

$$x(t) = e^{at}(C\cos bt + D\sin bt)$$

$a = -1 + i\sqrt{2}$, $b = -1 - i\sqrt{2}$

$\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 0$

$x_0 = x(0) = 1$

$$X(t) = e^{-t}\left(C\cos\sqrt{2}t + D\sin\sqrt{2}t\right)$$

$$X(0) = 1 = e^{0}\left(C\cos\sqrt{2}\cdot 0 + D\sin\sqrt{2}\cdot 0\right)$$

$$= 1\cdot(C\cdot 1 + D\cdot 0)$$

$$1 = C$$

$$\dot{X}(t) = -e^{-t}\left(C\cos\sqrt{2}t + D\sin\sqrt{2}t\right)$$

$$-\sqrt{2}e^{-t}\left(C\sin\sqrt{2}t - D\cos\sqrt{2}t\right)$$

$$\dot{X}(0) = -1\,(C\cdot 1 + D\cdot 0) - \sqrt{2}(C\cdot 0 - D\cdot 1)$$

$$0 = -C + \sqrt{2}D$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad //$$

$$X(t) = e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right) \quad //$$

d) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og $\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$

ω_0: Udempet resonansfrekvens

ζ: relativ dempingsfaktor

Zeta

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2\sqrt{km}}{2\sqrt{km}} \cdot \frac{d}{m}\dot{x} + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2\sqrt{km}\,d}{2\sqrt{km}\,m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \frac{\sqrt{km}}{m} \cdot \frac{d}{2\sqrt{km}}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{k}}{m}}_{\frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{k} = \sqrt{\frac{k}{m}}} \cdot \zeta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad //$$

Har 3 forskjellige tilfeller

$$\boxed{\begin{array}{l} 0<\zeta<1 \rightarrow \text{systemet er underdempet} \\ \zeta = 1 \rightarrow \text{Kritisk dampet} \\ \zeta > 1 \rightarrow \text{Overdempet} \end{array}}$$

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}} = \frac{4}{2\sqrt{6\cdot 2}} = \frac{4}{2\sqrt{4\cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

→ Dette systemet er underdempet //

e)

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{d}{2\sqrt{km}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 1$$

$$f = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159\,\text{Hz} //$$

f)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p x_2 - q x_1 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1$$

x_1 er systemets posisjon / tilstand
og x_2 er systemets endring av posisjon / tilstand //