Mekanik III - Labbrapport

Erik Björk, Jakob Dahlgren

17 februari 2025

Innehåll

Sammanfattning

blah

1 Inledning

Laborationen undersökte kopplade svängningar hos två pendlar, med en fjäder emellan.

2 Teori

Kopplade svängningar löses generellt i fyra steg:

1. Ställ upp Lagrangianen, antag små svängningar, och lös för rörelseekvationerna.
2. gör en ansats:
$$q_j = A_j e^{i\omega t}, \tag{2.1}$$
för j generaliserade koordinater.
3. Lös matrisekvationen som uppstår för att hitta vinkelfrekvenserna ω, samt hitta relationerna mellan koefficienter. Detta ger den allmänna lösningen.
4. Använd begynnelsevillkor för att få ut den fullständiga lösningen.

3 Metod

3.1 Materiel

- Stång med massa
- Fjäder
- Vinkelgivare, kopplad till mätprogram (2 st)

3.2 Utförande

Stängerna med massor hängdes upp i vinkelgivare. En fjäder sattes fast mellan stängerna. Mätprogrammet statades, och de teoretiskt härledda egenmoderna togs fram. Massorna positionerades motsvarigt till varje randvillkor, och systemets rörelse mättes. Experimentet upprepades flera gånger för varje randvillkor för att använda den mest representativa mätserien.

Efter mätningarna gjordes kurvanpassningar till mätdatan för att hitta systemets egenfrekvenser. Dessa jämfördes med den teoretiskt beräknade värdenna, baserat på mätningar av pendelns tröghetsmoment, massa och fjäderkonstanten.

A Härledning

Vi utgår från bilden i labbinstruktionen. Där har man två tunna stänger med en fjäder emellan i punkterna P_1, P_2. Tillsammans med objektet längst ut har pendlarna ett tröghetsmoment kring O som I_0, och ett masscentrum i C_1, C_2. Eftersom pendlarna inte har någon rörelse relativt O så blir den totala kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi} + \dot{\theta}) \tag{A.1}$$

Den potentiella energin ges från gravitationen och fjädern. För det krävs positionerna av punkterna.

$$\mathbf{r}_{P1} = l(\sin\phi\,\hat{\imath} - \cos\phi\,\hat{\jmath}) \tag{A.2}$$
$$\mathbf{r}_{P2} = l(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) \tag{A.3}$$
$$\mathbf{r}_{C1} = L(\sin\phi\,\hat{\imath} - \cos\phi\,\hat{\jmath}) \tag{A.4}$$
$$\mathbf{r}_{C2} = L(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) \tag{A.5}$$
$$\tag{A.6}$$

relativt respektive punkt O för varje pendel. Därefter kan gravitationspotentialen skrivas som

$$U_W = mg\mathbf{r}_{C1}(1 - \cdot\,\hat{\jmath}) + mg(1 - r_{C2}\cdot\,\hat{\jmath}) \tag{A.7}$$
$$= mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) \tag{A.8}$$

Fjädern antas ha jämviktsläge när pendlarna är rakt ner, det vill säga när vinklarna är 0. Därmed blir

$$U_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_{P1} - \mathbf{r}_{P2})^2 \tag{A.9}$$
$$= \frac{kl^2}{2}(\sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos^2\theta + \cos^2\phi - \sin\theta\sin\phi - \cos\theta\cos\phi) \tag{A.10}$$
$$= \frac{kl^2}{2}\cos(\theta - \phi) \tag{A.11}$$

Tillsammans blir den potentiella energin då

$$U = kl^2(1 - \cos(\theta - \phi)) + mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) \tag{A.12}$$

Vilket ger Lagrangianen

$$L = T - U = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) - kl^2(1\cos(\theta - \phi)) - mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) \tag{A.13}$$

Redan här antar vi små svängningar, och approximerar $\sin, \cos$ till ledande ordning 2. Det innebär att

$$\sin x = x, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \tag{A.14}$$

med högre ordningens termer försummade. Det innebär att Lagrangianen blir

$$L = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{kl^2}{2}(\theta - \phi)^2 - \frac{mgL}{2}(\theta^2 + \phi^2) \tag{A.15}$$

Rörelseekvationerna blir då

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = I\ddot{\theta} + mgL\theta + kl^2(\theta - \phi) \tag{A.16}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 = I\ddot{\phi} + mgL\phi + kl^2(\phi - \theta) \tag{A.17}$$

Detta ser ut som kopplade svängningar. Vi gör ansatsen att

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{A.18}$$

Vilket insatt i (A.16), (A.17) (samt förkortat med exponentialen) ger

$$\begin{cases} 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)A - kl^2 B \\ 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)B - kl^2 A \end{cases} \tag{A.19}$$

Vilket är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{A.20}$$

Söker icke-triviala lösningar. Det ges när determinanten av matrisen är 0, vilket innebär att

$$\det \begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{A.21}$$

$$(-I\omega^2 + mgL + kl^2)^2 - (kl^2)^2 = 0 \tag{A.22}$$

$$I^2\omega^4 - 2I\omega^2(mgL + kl^2) + (mgL + kl^2)^2 - k^2l^4 = 0 \tag{A.23}$$

$$\tag{A.24}$$

Använder PQ-formeln för att lösa för ω:

$$\omega^2 = mgL + kl^2 \pm \frac{1}{I}\sqrt{(mgL + kl^2)^2 - (mgL + kl^2)^2 + k^2l^4} \tag{A.25}$$

$$= \frac{mgL + kl^2 \pm kl^2}{I} \tag{A.26}$$

Det vill säga, vi har egenfrekvenserna

$$\omega_1^2 = \frac{mgL}{I}, \quad \omega_2^2 = \frac{mgL + 2kl^2}{I} \tag{A.27}$$

Vilket ger den allmänna lösningen

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \tag{A.28}$$

Denna lösning har dubbelt så många konstanter som förväntat för två stycken andra ordningens differentialekvationer. Vi hittar beroendet mellan kosntanterna genom insättning i (A.19). Börjar med ω_1:

$$\begin{cases} 0 = (-mgL + mgL + kl^2)A_1^\pm - kl^2 B_1^\pm \\ 0 = (-mgl + mgL + kl^2)B_1^\pm - kl^2 A_1^\pm \end{cases} \tag{A.29}$$

Vilket ger att

$$A_1^\pm = B_1^\pm \tag{A.30}$$

Därefter, ω_2:

$$\begin{cases} 0 = (-mgL - 2kl^2 + mgL + kl^2)A_2^\pm - kl^2 B_2^\pm \\ 0 = (-mgl - 2kl^2 + mgL + kl^2)B_2^\pm - kl^2 A_2^\pm \end{cases} \tag{A.31}$$

vilkt innebär att

$$A_2^\pm = -B_2^\pm \tag{A.32}$$

och den allmänna lösningen reduceras till

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} - A_2^+ e^{i\omega_2 t} - A_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \tag{A.33}$$

Genom kombinering kan vi skapa systemets normalkoordinater:

$$q_1(t) = \theta(t) + \phi(t) = 2A_1^+ e^{i\omega_1 t} + 2A_1^- e^{i\omega_1 t} \tag{A.34}$$

$$q_2(t) = \theta(t) - \phi(t) = 2A_2^+ e^{i\omega_2 t} + 2A_2^- e^{i\omega_2 t} \tag{A.35}$$

Vilka uppfyller ekvationen för harmoniska oscillatorer med respektive egenfrekvens:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \tag{A.36}$$

Omvandling tillbaka till θ, ϕ går man baklänges:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \tag{A.37}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \tag{A.38}$$

Vi söker reella lösningar för alla tidssteg. Utveckling av exponentialen ger då att

$$q_i(t) = 2\left(\cos(\omega_i t)(A_i^+ + A_i^-) + i\sin(\omega_i t)(A_i^+ - A_i^-)\right), \tag{A.39}$$

vilket innebär att konstanterna måste vara varandras komplexa konjugat. Notera att i betecknar både index och komplexa talet ovan. Det ger oss nya definitioner av q_1, q_2:

$$q_1 = C_{11}\sin\omega_1 t + C_{12}\cos\omega_1 t \tag{A.40}$$

$$q_2 = C_{21}\sin\omega_2 t + C_{22}\cos\omega_2 t \tag{A.41}$$

där

$$C_{i1} = 2(A_i^+ + A_i^-), \quad C_{i2} = 2(A_i^+ - A_i^-) \tag{A.42}$$

A.1 Fall A

Här släpps båda pendlarna med samma vinkel α åt samma håll. Det innebär alltså att fjädern inte har någon påverkan. Därmed har vi endast oscillation i frekvens ω_1. Rörelseekvationen beskrivs då endast av $q_1(t)$. Insättning av begynnelsevillkoret ger då att

$$\theta(0) = \phi(0) = C_{12} = \alpha \tag{A.43}$$

Det vill säga, vi har en ren cosinusrörelse i båda pendlarna.

A.2 Fall B

I detta fallet släpps det från motsatt håll, vilket innebär att vi har egenfrekvensen ω_2 som enda bidraget, dvs.

$$\theta(t) = -\phi(t) = q_2(t) \tag{A.44}$$

Insättning av begynnelsevärde ger då igen att

$$\theta(0) = \alpha = -\phi(0) = C_{22} \tag{A.45}$$

Igen har vi en ren cosinusrörelse i systemet.

A.3 Fall C

I fall C har vi en superpoosition av egenfunktionerna. Begynnelsevärdena är $\theta(0) = 0, \phi(0) = -\alpha$. Använder vi uttrycken för θ, ϕ ovan får man då att

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(C_{12} - C_{22}) & = -\alpha \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{22}) & = 0 \end{cases} \tag{A.46}$$

Vilket har den unika lösningen

$$C_{12} = -\alpha, \quad C_{22} = \alpha \tag{A.47}$$