

Mekanik III - Labbrapport

Erik Björk, Jakob Dahlgren

17 februari 2025

Innehåll

1	Inledning	3
2	Teori	4
2.1	Lösning av Systemet	4
2.1.1	Fall A	8
2.1.2	Fall B	8
2.1.3	Fall C	8
2.2	Beräkning av Tröghetsmoment och Eigenfrekvenser	8
2.3	Felberäkningar	9
3	Metod	10
3.1	Materiel	10
3.2	Utförande	10
4	Resultat	11
4.1	Experimentkörning	11
4.2	Mätningar	11

Sammanfattning

blah

1 Inledning

Laborationen undersökte kopplade svängningar hos två pendlar, med en fjäder emellan. Det jämfördes med teoretiska approximationer, där systemets Lagrangian beräknades analytiskt. Vidare undersöktes hur koppling påverkar oscillerande system, där energi överfördes mellan pendlarna.

2 Teori

Kopplade svängningar löses generellt i fyra steg:

1. Ställ upp Lagrangianen, antag små svängningar, och lös för rörelseekvationerna.
2. gör en ansats:

$$q_j = A_j e^{i\omega t}, \quad (1)$$

för j generaliserade koordinater.

3. Lös matrisekvationen som uppstår för att hitta vinkelfrekvenserna ω , samt hitta relationerna mellan koefficienter. Detta ger den allmänna lösningen.
4. Använd begynnelsevillkor för att få ut den fullständiga lösningen.

Vidare behövs också mätningar och beräkningar av stångens tröghetsmoment, massa, samt fjäderkonstanten.

2.1 Lösning av Systemet

placeholder

Figur 1: Uppställning av systemet.

Utgående från uppställningen i figur 1 har man två tunna stänger med en fjäder emellan i punkterna P_1, P_2 . Tillsammans med objektet längst ut har pendlarna ett tröghetsmoment kring O som I_0 , och ett masscentrum i C_1, C_2 . Eftersom pendlarna inte har någon rörelse relativt O så blir den totala kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi} + \dot{\theta}) \quad (2)$$

Den potentiella energin ges från gravitationen och fjädern. För det krävs positionerna av punkterna.

$$\mathbf{r}_{P1} = l(\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}) \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{P2} = l(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{C1} = L(\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{C2} = L(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \quad (6)$$

$$(7)$$

relativt respektive punkt O för varje pendel. Därefter kan gravitationspotentialen skrivas som

$$U_W = mg\mathbf{r}_{C1}(1 - \cdot \hat{j}) + mg(1 - r_{C2} \cdot \hat{j}) \quad (8)$$

$$= mgL(2 - \cos \phi - \cos \theta) \quad (9)$$

Fjäders antas ha jämviktsläge när pendlarna är rakt ner, det vill säga när vinklarna är 0. Därmed blir

$$U_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_{P1} - \mathbf{r}_{P2})^2 \quad (10)$$

$$= \frac{kl^2}{2}(\sin^2 \theta + \sin^2 \phi + \cos^2 \theta + \cos^2 \phi - \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \cos \phi) \quad (11)$$

$$= \frac{kl^2}{2} \cos(\theta - \phi) \quad (12)$$

Tillsammans blir den potentiella energin då

$$U = kl^2(1 - \cos(\theta - \phi)) + mgL(2 - \cos \phi - \cos \theta) \quad (13)$$

Vilket ger Lagrangianen [1]

$$L = T - U = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) - kl^2(1 - \cos(\theta - \phi)) - mgL(2 - \cos \phi - \cos \theta) \quad (14)$$

Redan här antas systemet ha små svängningar. Termerna med sin, cos approximeras till ledande ordning 2. Det innebär att

$$\sin x = x, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (15)$$

med högre ordningens termer försummade, enligt funktionernas Taylorutveckling [1]. Det innebär att Lagrangianen blir

$$L = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{kl^2}{2}(\theta - \phi)^2 - \frac{mgL}{2}(\theta^2 + \phi^2) \quad (16)$$

Rörelseekvationerna blir då

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = I\ddot{\theta} + mgL\theta + kl^2(\theta - \phi) \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 = I\ddot{\phi} + mgL\phi + kl^2(\phi - \theta) \quad (18)$$

Detta ser ut som kopplade svängningar. För att lösa systemet görs ansatserna

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (19)$$

Vilket insatt i (17), (18) (samt förkortat med exponentialen) ger

$$\begin{cases} 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)A - kl^2B \\ 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)B - kl^2A \end{cases} \quad (20)$$

Vilket är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (21)$$

Söker icke-triviala lösningar. Det ges när determinanten av matrisen är 0, vilket innebär att

$$\det \begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

$$(-I\omega^2 + mgL + kl^2)^2 - (kl^2)^2 = 0 \quad (23)$$

$$I^2\omega^4 - 2I\omega^2(mgL + kl^2) + (mgL + kl^2)^2 - k^2l^4 = 0 \quad (24)$$

$$(25)$$

Använder PQ-formeln för att lösa för ω :

$$\omega^2 = mgL + kl^2 \pm \frac{1}{I} \sqrt{(mgL + kl^2)^2 - (mgL + kl^2)^2 + k^2l^4} \quad (26)$$

$$= \frac{mgL + kl^2 \pm kl^2}{I} \quad (27)$$

Det vill säga, systemets egenfrekvenser är

$$\omega_1^2 = \frac{mgL}{I}, \quad \omega_2^2 = \frac{mgL + 2kl^2}{I} \quad (28)$$

Vilket ger den allmänna lösningen

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \quad (29)$$

Denna lösning har dubbelt så många konstanter som förväntat för två stycken andra ordningens differentialekvationer. Beroendet mellan konstanterna hittas genom insättning i (20). Börjar med ω_1 :

$$\begin{cases} 0 = (-mgL + mgL + kl^2)A_1^\pm - kl^2B_1^\pm \\ 0 = (-mgL + mgL + kl^2)B_1^\pm - kl^2A_1^\pm \end{cases} \quad (30)$$

Vilket ger att

$$A_1^\pm = B_1^\pm \quad (31)$$

Därefter, ω_2 :

$$\begin{cases} 0 = (-mgL - 2kl^2 + mgL + kl^2)A_2^\pm - kl^2B_2^\pm \\ 0 = (-mgl - 2kl^2 + mgL + kl^2)B_2^\pm - kl^2A_2^\pm \end{cases} \quad (32)$$

vilket innebär att

$$A_2^\pm = -B_2^\pm \quad (33)$$

och den allmänna lösningen reduceras till

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} - A_2^+ e^{i\omega_2 t} - A_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \quad (34)$$

Genom kombinerings kan då systemets normalkoordinater skapas:

$$q_1(t) = \theta(t) + \phi(t) = 2A_1^+ e^{i\omega_1 t} + 2A_1^- e^{-i\omega_1 t} \quad (35)$$

$$q_2(t) = \theta(t) - \phi(t) = 2A_2^+ e^{i\omega_2 t} + 2A_2^- e^{-i\omega_2 t} \quad (36)$$

Vilka uppfyller ekvationen för harmoniska oscillatorer med respektive egenfrekvens:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (37)$$

Omvandling tillbaka till θ, ϕ går man baklänges:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \quad (38)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \quad (39)$$

Eftersom lösningen beskriver ett fysikaliskt och verkligt system söks reella lösningar för alla tidssteg. Utveckling av exponentialen ger då att

$$q_i(t) = 2 \left(\cos(\omega_i t) (A_i^+ + A_i^-) + i \sin(\omega_i t) (A_i^+ - A_i^-) \right), \quad (40)$$

vilket innebär att konstanterna måste vara varandras komplexa konjugat. Notera att i betecknar både index och komplexa talet ovan. Det ger oss nya definitioner av q_1, q_2 :

$$q_1 = C_{11} \sin \omega_1 t + C_{12} \cos \omega_1 t \quad (41)$$

$$q_2 = C_{21} \sin \omega_2 t + C_{22} \cos \omega_2 t \quad (42)$$

där

$$C_{i1} = 2(A_i^+ + A_i^-), \quad C_{i2} = 2(A_i^+ - A_i^-) \quad (43)$$

2.1.1 Fall A

Här släpps båda pendlarna med samma vinkel α åt samma håll. Det innebär alltså att fjädern inte har någon påverkan. Därmed sker endast oscillation i frekvens ω_1 . Rörelseekvationen beskrivs då endast av $q_1(t)$. Insättning av begynnelsevillkoret ger då att

$$\theta(0) = \phi(0) = C_{12} = \alpha, \quad (44)$$

det vill säga, det blir en ren cosinusrörelse i båda pendlarna.

2.1.2 Fall B

I detta fallet släpps det från motsatt håll, vilket innebär att egenfrekvensen ω_2 bör vara enda bidraget:

$$\theta(t) = -\phi(t) = q_2(t) \quad (45)$$

Insättning av begynnelsevärde ger då igen att

$$\theta(0) = \alpha = -\phi(0) = C_{22} \quad (46)$$

Igen, en ren cosinusrörelse i systemet.

2.1.3 Fall C

I fall C är pendlarnas vinklar i en superposition av egenfunktionerna. Begynnelsevärdena är $\theta(0) = 0$, $\phi(0) = -\alpha$. Används uttrycken för θ , ϕ från ekvation 41,42, får man då att

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(C_{12} - C_{22}) = -\alpha \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{22}) = 0 \end{cases}, \quad (47)$$

vilket har den unika lösningen

$$C_{12} = -\alpha, \quad C_{22} = \alpha \quad (48)$$

2.2 Beräkning av Tröghetsmoment och Egenfrekvenser

Tröghetsmomentet för pendeln behövs för att beräkna systemets egenfrekvenser. Den består av en stång, som antas vara lång och smal, samt en massa som antas vara en ihålig cylinder. Då ges tröghetsmomenten runt kropparnas masscentrum av [1]

$$I_{\text{stång}} = \frac{1}{12}mL^2 \quad (49)$$

$$I_{\text{cyl}} = LGGIN!!!! \quad (50)$$

Kombinerat med parallellaxelteoremet blir det totala tröghetsmomenten kring O då

$$I_0 = LGGINOCKS!!!! \quad (51)$$

2.3 Felberäkningar

3 Metod

3.1 Materiel

- Stång med massa
- Fjäder
- Vinkelgivare, kopplad till mätprogram (2 st)

3.2 Utförande

Stängerna med massor hängdes upp i vinkelgivare. En fjäder sattes fast mellan stängerna. Mätprogrammet startades, och de teoretiskt härledda egenmoderna togs fram. Under laborationen använder PASCO *Capstone*.

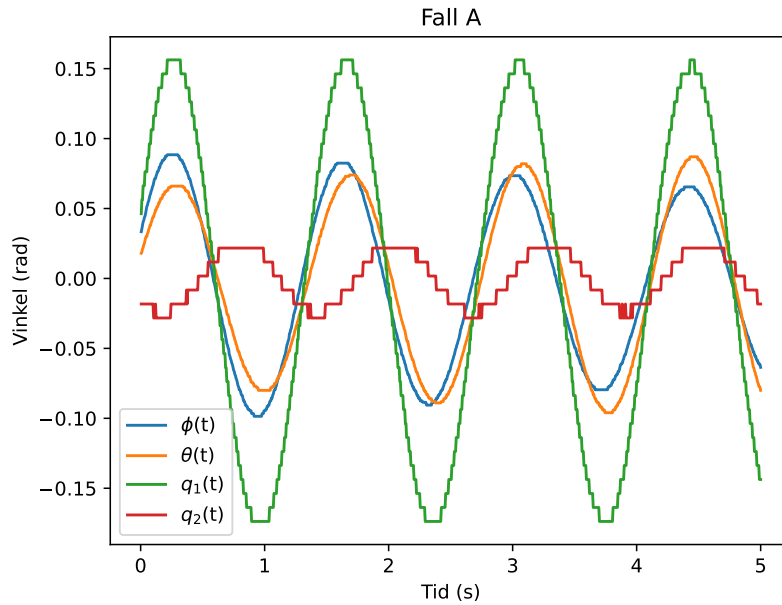
Massorna positionerades motsvarigt till varje randvillkor, och systemets rörelse mättes. Experimentet upprepades flera gånger för varje randvillkor för att använda den mest representativa mätserien.

Efter mätningarna gjordes kurvanpassningar till mätdata för att hitta systemets egenfrekvenser. Dessa jämfördes med den teoretiskt beräknade värderna, baserat på mätningar av pendelns tröghetsmoment, massa och fjäderkonstanten.

4 Resultat

4.1 Experimentkörning

I figurerna 2,3,4 syns datan för de första fem sekunderna av mätningar. Där är båda pendlarna med, som θ och ϕ , samt egenmoderna q_1, q_2 .



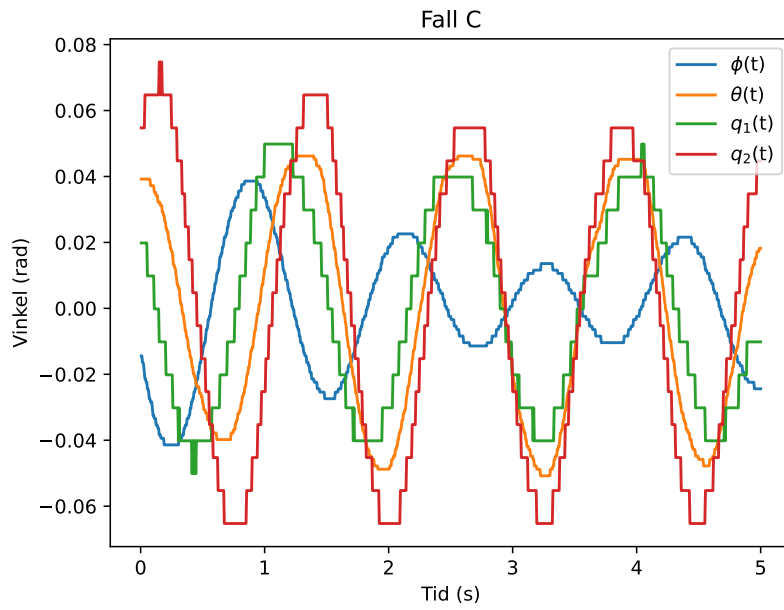
Figur 2: Mätdata från fall A.

Från en sinusanpassning i *Capstone* fick man ut egenfrekvenserna för vardera fall:

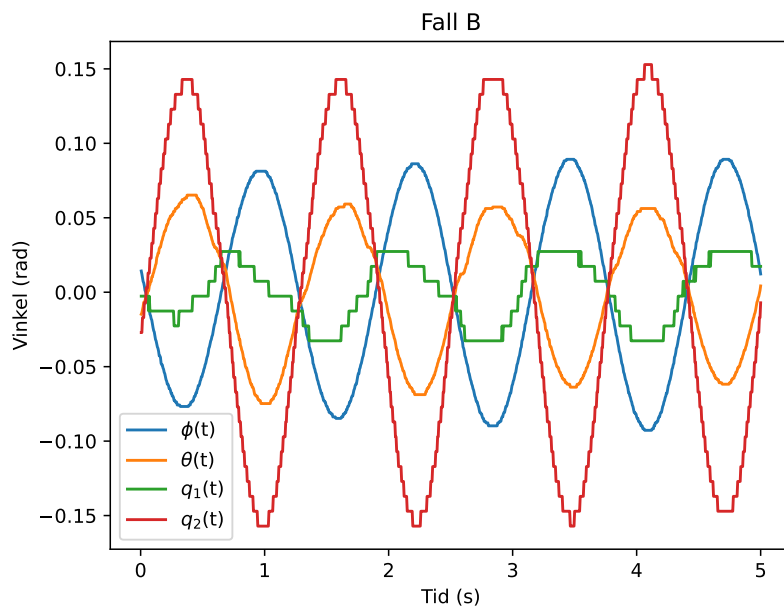
$$\begin{cases} \omega_{A1} = 4.52 \text{ rad/s} \\ \omega_{B1} = 4.52 \text{ rad/s} \\ \omega_{C1} = 4.53 \text{ rad/s} \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_{A2} = 5.05 \text{ rad/s} \\ \omega_{A2} = 5.06 \text{ rad/s} \\ \omega_{A2} = 5.06 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (52)$$

4.2 Mätningar

lägg in alla mätningar med osäkerheter här!!!!



Figur 3: Mätdata från fall C.



Figur 4: Mätdata från fall C.

Referenser

- [1] Carl Nordling och Jonny Österman. *Physics Handbook for Science and Engineering*. 9. utg. Lund: Studentlitteratur, 2021. ISBN: 978-91-44-12806-1.