Mekanik III - Labbrapport

Erik Björk, Jakob Dahlgren

17 februari 2025

Innehåll

Sammanfattning

blah

1 Inledning

Laborationen undersökte kopplade svängningar hos två pendlar, med en fjäder emellan.

2 Teori

A Härledning

Vi utgår från bilden i labbinstruktionen. Där har man två tunna stänger med en fjäder emellan i punkterna P_1, P_2. Tillsammans med objektet längst ut har pendlarna ett tröghetsmoment kring O som I_0, och ett masscentrum i C_1, C_2. Eftersom pendlarna inte har någon rörelse relativt O så blir den totala kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi} + \dot{\theta}) \tag{A.1}$$

Den potentiella energin ges från gravitationen och fjädern. För det krävs positionerna av punkterna.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{P1} &= l(\sin\phi\,\hat{\imath} - \cos\phi\,\hat{\jmath}) && \text{(A.2)}\\
\mathbf{r}_{P2} &= l(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) && \text{(A.3)}\\
\mathbf{r}_{C1} &= L(\sin\phi\,\hat{\imath} - \cos\phi\,\hat{\jmath}) && \text{(A.4)}\\
\mathbf{r}_{C2} &= L(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) && \text{(A.5)}\\
& && \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

relativt respektive punkt O för varje pendel. Därefter kan gravitationspotentialen skrivas som

$$\begin{aligned}
U_W &= mg\mathbf{r}_{C1}(1 - \cdot\,\hat{\jmath}) + mg(1 - r_{C2}\cdot\ \hat{\jmath}) && \text{(A.7)}\\
&= mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) && \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

Fjädern antas ha jämviktsläge när pendlarna är rakt ner, det vill säga när vinklarna är 0. Därmed blir

$$\begin{aligned}
U_{\text{fjäder}} &= \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_{P1} - \mathbf{r}_{P2})^2 && \text{(A.9)}\\
&= \frac{kl^2}{2}(\sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos^2\theta + \cos^2\phi - \sin\theta\sin\phi - \cos\theta\cos\phi) && \text{(A.10)}\\
&= \frac{kl^2}{2}\cos(\theta - \phi) && \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

Tillsammans blir den potentiella energin då

$$U = kl^2(1 - \cos(\theta - \phi)) + mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) \tag{A.12}$$

Vilket ger Lagrangianen

$$L = T - U = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) - kl^2(1\cos(\theta - \phi)) - mgL(2 - \cos\phi - \cos\theta) \tag{A.13}$$

Redan här antar vi små svängningar, och approximerar $\sin, \cos$ till ledande ordning 2. Det innebär att

$$\sin x = x, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \tag{A.14}$$

med högre ordningens termer försummade. Det innebär att Lagrangianen blir

$$L = \frac{I_0}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{kl^2}{2}(\theta - \phi)^2 - \frac{mgL}{2}(\theta^2 + \phi^2) \tag{A.15}$$

Rörelseekvationerna blir då

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = I\ddot{\theta} + mgL\theta + kl^2(\theta - \phi) \tag{A.16}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 = I\ddot{\phi} + mgL\phi + kl^2(\phi - \theta) \tag{A.17}$$

Detta ser ut som kopplade svängningar. Vi gör ansatsen att

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{A.18}$$

Vilket insatt i (A.16), (A.17) (samt förkortat med exponentialen) ger

$$\begin{cases} 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)A - kl^2 B \\ 0 = (-I\omega^2 + mgL + kl^2)B - kl^2 A \end{cases} \tag{A.19}$$

Vilket är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{A.20}$$

Söker icke-triviala lösningar. Det ges när determinanten av matrisen är 0, vilket innebär att

$$\det \begin{pmatrix} -I\omega^2 + mgL + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -I\omega^2 + mgL + kl^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{A.21}$$

$$(-I\omega^2 + mgL + kl^2)^2 - (kl^2)^2 = 0 \tag{A.22}$$

$$I^2\omega^4 - 2I\omega^2(mgL + kl^2) + (mgL + kl^2)^2 - k^2l^4 = 0 \tag{A.23}$$

$$\tag{A.24}$$

Använder PQ-formeln för att lösa för ω:

$$\omega^2 = mgL + kl^2 \pm \frac{1}{I}\sqrt{(mgL + kl^2)^2 - (mgL + kl^2)^2 + k^2l^4} \tag{A.25}$$

$$= \frac{mgL + kl^2 \pm kl^2}{I} \tag{A.26}$$

Det vill säga, vi har egenfrekvenserna

$$\omega_1^2 = \frac{mgL}{I}, \quad \omega_2^2 = \frac{mgL + 2kl^2}{I} \tag{A.27}$$

Vilket ger den allmänna lösningen

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \tag{A.28}$$

Denna lösning har dubbelt så många konstanter som förväntat för två stycken andra ordningens differentialekvationer. Vi hittar beroendet mellan kosntanterna genom insättning i (A.19). Börjar med ω_1:

$$\begin{cases} 0 = (-mgL + mgL + kl^2)A_1^\pm - kl^2 B_1^\pm \\ 0 = (-mgl + mgL + kl^2)B_1^\pm - kl^2 A_1^\pm \end{cases} \tag{A.29}$$

Vilket ger att

$$A_1^\pm = B_1^\pm \tag{A.30}$$

Därefter, ω_2:

$$\begin{cases} 0 = (-mgL - 2kl^2 + mgL + kl^2)A_2^\pm - kl^2 B_2^\pm \\ 0 = (-mgl - 2kl^2 + mgL + kl^2)B_2^\pm - kl^2 A_2^\pm \end{cases} \tag{A.31}$$

vilkt innebär att

$$A_2^\pm = -B_2^\pm \tag{A.32}$$

och den allmänna lösningen reduceras till

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} + A_2^+ e^{i\omega_2 t} + A_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ \phi(t) = A_1^+ e^{i\omega_1 t} + A_1^- e^{-i\omega_1 t} - A_2^+ e^{i\omega_2 t} - A_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \tag{A.33}$$

Genom kombinering kan vi skapa systemets normalkoordinater:

$$q_1(t) = \theta(t) + \phi(t) = 2A_1^+ e^{i\omega_1 t} + 2A_1^- e^{i\omega_1 t} \tag{A.34}$$

$$q_2(t) = \theta(t) - \phi(t) = 2A_2^+ e^{i\omega_2 t} + 2A_2^- e^{i\omega_2 t} \tag{A.35}$$

Vilka uppfyller ekvationen för harmoniska oscillatorer med respektive egenfrekvens:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \tag{A.36}$$

Omvandling tillbaka till θ, ϕ går man baklänges:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \tag{A.37}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \tag{A.38}$$

Vi söker reella lösningar för alla tidssteg. Utveckling av exponentialen ger då att

$$q_i(t) = 2\left(\cos(\omega_i t)(A_i^+ + A_i^-) + i\sin(\omega_i t)(A_i^+ - A_i^-)\right), \tag{A.39}$$

vilket innebär att konstanterna måste vara varandras komplexa konjugat. Notera att i betecknar både index och komplexa talet ovan. Det ger oss nya definitioner av q_1, q_2:

$$q_1 = C_{11}\sin\omega_1 t + C_{12}\cos\omega_1 t \tag{A.40}$$

$$q_2 = C_{21}\sin\omega_2 t + C_{22}\cos\omega_2 t \tag{A.41}$$

där

$$C_{i1} = 2(A_i^+ + A_i^-), \quad C_{i2} = 2(A_i^+ - A_i^-) \tag{A.42}$$

A.1 Fall A

Här släpps båda pendlarna med samma vinkel α åt samma håll. Det innebär alltså att fjädern inte har någon påverkan. Därmed har vi endast oscillation i frekvens ω_1. Rörelseekvationen beskrivs då endast av $q_1(t)$. Insättning av begynnelsevillkoret ger då att

$$\theta(0) = \phi(0) = C_{12} = \alpha \tag{A.43}$$

Det vill säga, vi har en ren cosinusrörelse i båda pendlarna.

A.2 Fall B

I detta fallet släpps det från motsatt håll, vilket innebär att vi har egenfrekvensen ω_2 som enda bidraget, dvs.

$$\theta(t) = -\phi(t) = q_2(t) \tag{A.44}$$

Insättning av begynnelsevärde ger då igen att

$$\theta(0) = \alpha = -\phi(0) = C_{22} \tag{A.45}$$

Igen har vi en ren cosinusrörelse i systemet.

A.3 Fall C

I fall C har vi en superpoosition av egenfunktionerna. Begynnelsevärdena är $\theta(0) = 0, \phi(0) = -\alpha$. Använder vi uttrycken för θ, ϕ ovan får man då att

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(C_{12} - C_{22}) & = -\alpha \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{22}) & = 0 \end{cases} \tag{A.46}$$

Vilket har den unika lösningen

$$C_{12} = -\alpha, \quad C_{22} = \alpha \tag{A.47}$$