UPPSALA UNIVERSITET

R. Paulsson	2004
M. Kauppi	2004
MJ	2021
PT	2023

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK OCH ASTRONOMI

Laboration: **Kopplade svängningar**

1 Introduktion

Ett system med två kopplade pendlar kan enkelt studeras både teoretiskt och experimentellt och laborationen går ut på att experimentellt verifiera de analytiska sambanden vid små svängningsrörelser.
De kopplade pendlarnas svängningsrörelse kan karakteriseras av en superposition av systemets två egenmoder. Kopplingen mellan pendlarna gör att energi kan överföras från den ena till den andra oscillatorn, men den totala energin i systemet är bevarad. Kopplade oscillatorer förekommer i många mekaniska system. Till exempel kan en molekyls vibrationer modelleras av ett nätverk av 'kulor-och-fjädrar' och studier av kopplade oscillatorer kan ge insikt i molekylers form och reaktivitet.

2 Förberedelser

Innan laborationen skall ni noggrant ha läst igenom denna instruktion, samt relevant kurslitteratur och föreläsningsmaterial så ni förstår den bakomliggande teorin.
Nedan finner ni en lista på uppgifter ni bör ha gjort innan laborationen, som **ska redovisas innan** ni börjar det praktiska experimentet. Om ni inte lyckas med någon eller några av dessa punkter får ni göra det i början av laborationen, då ni kan ta hjälp av labbhandledarna.
Visa följande:

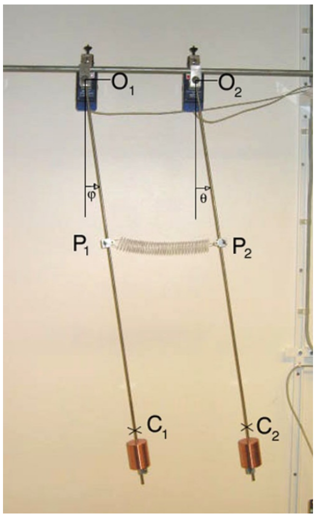
- Härled systemets Lagrangian. Antag små svängningar, det vill säga $\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta} \ll 1$.
- Ta fram och lös rörelseekvationerna.

- Redovisa explicit uttrycken för egenfrekvenserna ($\omega_\pm$) och tidsberoendet för motsvarande egenmoder ($q_\pm(t)$). Antag att pendlarna släpps från vila.
- Redovisa den allmän lösning till rörelseekvationerna, det vill säga, hur $\phi(t)$ och $\theta(t)$ ges av $q_+(t)$ och $q_-(t)$. Ta även fram det omvända uttrycket, hur $q_+(t)$ och $q_-(t)$ beror på $\phi(t)$ och $\theta(t)$.
- Ta fram specifika lösningar för fall A,B,C, dvs. hur initialvillkoren bestämmer värdena på de okända konstanterna i den allmänna lösningen.

Egenfrekvenserna och egenmoderna kan antingen härledas med hjälp av en koordinattransformation från koordinaterna ϕ och θ till systemet normalkoordinater q_+ och q_-, eller via en generell ansats för harmonisk svängning. I det föregående fallet, visa hur du får fram koordinattransformationen. I det senare fallet, visa att din ansats är generell nog för att kunna fånga systems rörelse.

3 Experimentell utrustning

Pendlarna är likadana och består av en massiv cylinder fäst i ena ändpunkten av en stång, som kan rotera kring en horisontell axel genom stångens andra ändpunkt.



Dessa storheter mäts eller beräknas:

m	=	pendelns totala massa
L	=	avståndet mellan upphängningspunkten O och masscentrum C
ℓ	=	avståndet mellan upphängningspunkten O och fjäderns fästpunkt P
k	=	fjäderkonstanten
I_o	=	pendelns tröghetsmoment med avseende på O
ϕ, θ	=	pendlarnas utslagsvinklar
q_+, q_-	=	egenmodernas amplitud
ω_+, ω_-	=	systemets egenfrekvenser
K	=	kopplingskonstanten

Varje pendel är kopplat till egen vinkelgivare. De två digitala vinkelgivarna kan samtidigt läses av med dator med hjälp av program PASCO Capstone. Ställ in samplingsfrekvens i programmet till minimum 100 Hz.

4 Teori

Systemets rörelse bestäms med hjälp av Lagranges ekvationer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_v} = 0$$

där $\mathcal{L}$ är systemets Lagrangian, $\mathcal{L} = T - U$, och q_v är systemets generaliserade koordinater. För härledningen av T och U är det lämpligt att välja utslagsvinklarna ϕ och θ som generaliserade koordinater.
Rörelsen undersöks för små svängningar i vertikalplanet genom upphängningspunkterna ($\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta} \ll 1$). Fjädern antas rak och horisontell.
Systemets egenfrekvenser blir:

$$\omega_+^2 = \omega_0^2 \qquad \text{och} \qquad \omega_-^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \omega_k^2$$

där ω_0 är vinkelfrekvensen för en fri pendel,

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot L}{I_o} \qquad \text{och} \qquad \omega_k^2 = \frac{k \cdot \ell^2}{I_o}$$

Svängningsrörelsen med vinkelfrekvens $\omega_\pm$ beskrivs av egenmoden $q_\pm(t)$. Utslagsvinklarna $\phi(t)$ och $\theta(t)$ kan beskrivas som funktioner av $q_+(t)$ och $q_-(t)$. För att extrahera $q_+(t)$ och $q_-(t)$ från den experimentella datan behövs dock det omvända förhållandet, det vill säga hur $q_+(t)$ och $q_-(t)$ beror på utslagsvinklarna $\phi(t)$ och $\theta(t)$.

5 Uppgifter

Tre olika fall studeras, med tre olika begynnelsevillkor. Pendlarna släpps i alla tre fallen från vila, men med olika utslagsvinklar. Mät utslagsvinklarna under försöken och låt programet PASCO Capstone simultant rita upp fyra grafer för varje experiment, två grafer med vinklarna $\phi(t)$ och $\theta(t)$, och två grafer med $q_+(t)$ och $q_-(t)$ (från det härledda förhållandet). Sensorernas vinkeldata kan kombineras med hjälp av verktyget ”Calculate” som finns som en knapp i menyn till vänster. Extrahera de experimentella egenfrekvenserna $\omega_\pm$ från en (co)sinus-anpassning av $q_\pm(t)$.

- **Fall A:**

  Bägge pendlarna släpps med samma utslagsvinkel α, det vill säga $\phi(0) = \alpha$ och $\theta(0) = \alpha$. Denna svängning sker med bara en vinkelfrekvens. Vad beskriver denna rörelse?

- **Fall B:**

Bägge pendlarna släpps med samma utslagsvinkel α åt olika håll, det vill säga $\phi(0) = -\alpha$ och $\theta(0) = \alpha$. Även denna svängning sker med bara en vinkelfrekvens. Vad beskriver denna rörelse?

- **Fall C:**

  Endast den ena pendeln släpps med utslagsvinkeln α, det vill säga $\phi(0) = -\alpha$ och $\theta(0) = 0$. Hur kan utslagsvinklarna ϕ och θ i det här fallet beskrivas med hjälp av systemets egenmoder?

  För att få en tydligare förståelse av den speciella formen på graferna för $\phi(t)$ och $\theta(t)$ kan deras tidsberoende skrivas om som en produkt av två cosinus- eller sinusfunktioner med hjälp av reglerna för trigonometriska identiteter. Genom att införa $\Omega_1 = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$ och $\Omega_2 = \frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ kan svängningarna skrivas som

  $$\phi(t) = -\alpha \cos(\Omega_1 t) \cos(\Omega_2 t)$$
  $$\theta(t) = \alpha \sin(\Omega_1 t) \sin(\Omega_2 t)$$

  Kan ni identifiera periodtiderna $T_1 = 2\pi/\Omega_1$ och $T_2 = 2\pi/\Omega_2$ i era grafer?

Kopplingskonstanten K definieras som

$$K = \frac{k \cdot \ell^2}{m \cdot g \cdot L + k \cdot \ell^2} = \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2 + \omega_k^2}$$

K kan också uttryckas med hjälp vinkelfrekvenserna och blir då för **fall C**:

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2}$$

6 Redovisning

Redovisa:

- Den teoretiska härledningen av systemets Lagrangian.
- Systemets teoretiska egenfrekvenser $\omega_\pm$ och motsvarande egensvängningar $q_\pm(t)$. Antag att pendlarna släpps från vila.
- Sambandet mellan utslagsvinklarna ϕ och θ och systemets egensvängningar (normal koordinater) q_+ och q_-, och det omvända förhållandet, det vill säga hur q_+ och q_- beror på ϕ och θ.

- Hur amplituden på systemets teoretiska egensvängningar beror på initialvinklarna $\phi(0)$ och $\theta(0)$ i de tre fallen A, B, och C.
- Grafer på de experimentellt uppmätta utslagsvinklarna $\phi(t)$ och $\theta(t)$ samt de experimentellt uppmätta $q_+(t)$ och $q_-(t)$ (via det härledda förhållandet), för de tre fallen.
- Systemets experimentella egenfrekvenser extraherade från en (co)sinus-anpassning av $q_+(t)$ och $q_-(t)$, för de tre fallen.
- Alla uppmäta storheter, inklusive beräkningen av tröghetsmomentet, med deras osäkerheter.

Om din beräkning av pendelns tröghetsmoment innehåller icke-försumbara approximationer behöver du diskutera hur dessa approximationer systematiskt påverkar dina teoretiska resultat.

Förklara:

- Hur väl överensstämde era experimentella resultat med de teoretiska? Använd *fortplantning av mätosäkerheter* för att resonera kring eventuella skillnader och eventuella felkällor. Hur påverkar era eventuella approximationer av tröghetsmomentet de teoretiska egenfrekvenserna?
- Vad visar kopplingskonstanten? Vilka extrema värden kan den ta? Vad händer om man använder en starkare fjäder? Vad händer när man sätter fjädern högre eller lägre?

I rapporten skall den teoretiska härledningen beskrivas ingående. Formler och figurer i härledningen kan ritas för hand och skannas in.