Burnside 引理的应用

孔德宝

（呼伦贝尔学院数学系　内蒙古　海拉尔区　021008）

摘　要：通过对 Burnside 引理的应用，进一步了解循环群对集合的作用。从而对旋转群有更深刻的了解。

关键词：Burnside 引理；群 g 对 x 的作用；循环群

中图分类号：O152.8　**文献标识码**：A　**文章编号**：1009-4601（2008）03-0066-03

定义 1　设 G 是一个群，Ω 是一个集合，若 $\forall g \in G$ 对应 Ω 上的一个变换 $g(x)$ 满足

1. $e(x) = x, \forall x \in \Omega$；
2. $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall \in \Omega$。

则称 G 作用于 Ω 上，$g(x)$ 称为 g 对 x 的作用。

定义 2

$R_G = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega \times \Omega, 且存在 g \in G 使 y = g(x)\}$，则称 Ω 上的关系 R_G 为 G 关系。

定理 1　设有限群 G 作用在有限集 Ω 上，则 Ω 上的 G 关系 R_G 是一个等价关系。

通过 G 关系 R_G 把 Ω 划分若干个等价类，每个等价类叫做 Ω 上一个 G -轨道。

定理 2 (Burnside 引理)　设有限群 G 作用在有限集 Ω 上，则 Ω 上的 G -轨道的个数为 $N = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\Psi(g)$，其中 $\Psi(g)$ 表示满足 $gx = x$ 的元 $x \in \Omega$ 的个数，既在 g 的作用下保持不变的元 $x \in \Omega$ 的个数。

设 X={1, 2, ⋯, n}，代表 n 个着色对象。Y={$y_1, y_2, \cdots, y_m$} 为 m 种颜色的集合。令 $f: X \to Y$ 代表 n 个对象的一种着色方案，则 $\Omega = \{f \mid f: X \to Y\}$ 代表全部着色方案，显然有 $|\Omega| = |Y|^{|X|} = m^n$，因而有 m^n 种着色方案。但其中有些方案在循环群 G 作用下是同一种方案，我们想求在循环群 G 作用下不同种方案的数目。

设 $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in G$，其中 $i_1, \cdots, i_n \in X$。

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in \Omega$，其中 $y_1, \cdots, y_n \in Y$。

定义 g 对 f 的作用为

$$g(f) = \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = fg^{-1}$$

则 $e(f) = f, g_1 g_2(f) = f(g_1 g_2)^{-1} = fg_2^{-1}g_1^{-1}$，$g_1(g_2(f)) = g_1 g_2(f)$，所以满足群 G 对集合 Ω 的作用。

$g \in G, 使 g(f_1) = f_2 \Leftrightarrow f_1 与 f_2 是同一类型的置换$
$\Leftrightarrow f_1 与 f_2 属于同一轨道$。

因而，每一种着色方案对应一个轨道，不同类型的着色数目就是 Ω 在群 G 的作用下的轨道数目，由 Burnside 引理可求。

易证，

$g(f) = f \Leftrightarrow$ 置换g中同一循环中的元素的着色相同。

设 g 是一个 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 型置换，每个循环中元素的颜色都有 n 种选择，因而共有 $n^{\lambda_1}n^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n} = n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$ 种选择，既 $\Psi(g) = n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$。由 Burnside 引理知，用 m 种颜色去对 n 个对象着色的不同种类数为

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\Psi(g) = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

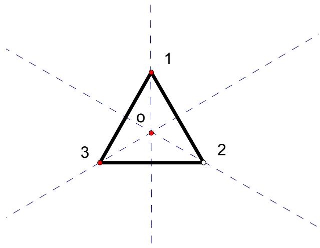
收稿日期：2007-02-11

作者简介：孔德宝（1963-）男，呼伦贝尔学院数学系，副教授。研究方向：组合计数。

其中 g 是一个$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型置换，和式是对$G$中每一个置换求和。

例 1　由红、绿、蓝三色珠子做成有三颗珠的项链有多少种不同的式样？

解：问题相当于对正三角形的三个顶点用三种颜色着色，求不同的方案数。



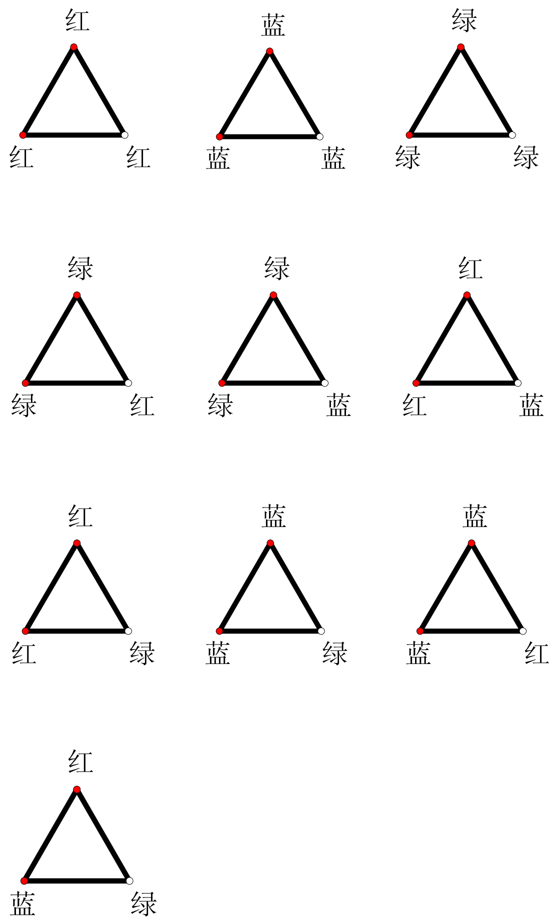
右图中恒等变换（1）（2）（3），

绕垂直于正三角形并通过 0 的轴线沿顺时针方向转 120°的变换（123），转 240°的变换（132），对直线 3-o 的反射（3）（12），直线 1-o 的反射（1）（23），直线 2-o 的反射（2）（13）。

G ={（1）（2）（3），（123），（132），（3）（12），（1）（23），（2）（13）}

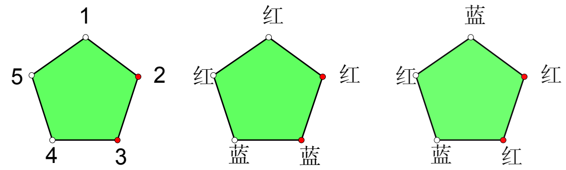
$$N=\frac{1}{6}(3^3+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2)=10。$$

这 10 种方案见下图



例 2　用 3 个红珠子、2 绿珠子做成的项链有多少种不同的式样？

解：　X={1, 2, 3, 4, 5}, Y={3 红，2 蓝}



G ={（1）（2）（3）（4）（5），（12345），（13524），（14253），（15432），（1）（25）（34），（2）（13）（45），（3）（15）（34），（4）（12）（35），（5）（14）（23）}。

对应g_1=（1）（2）（3）（4）（5），可 3 个红珠子、2 绿珠子做成的项链有 c(5, 3)=10 种方案，在g_1作用下不变。对应g_2=（12345）等 4 个$(5)^1$格式的方案数为 0 。对应$(1)^1(2)^2$格式的方案数为 2，所以

$$N=\frac{1}{10}\times(10+5\times 2)=2，$$ 2 种方案见上图。

例 3　甲烷CH_4的枝链是
$$\begin{array}{ccccc} & & H & & \\ & & | & & \\ H & - & C & - & H \\ & & | & & \\ & & H & & \end{array}$$
，若 4 个H链，用H、CL、CH_3、C_2H_5之一替换，问有几种不同的化学结构？

解：问题相当于对正四面体的四个顶点用四种颜色着色，求不同的方案数。

恒等变换（1）（2）（3）（4）。

通过四个顶点的三阶轴的置换：

（4）（123），（4）（132）；（1）（234），（1）（243）；（2）（134），（2）（143）；（3）（124），（3）（142）。

连接不相交边中点的二阶轴的置换：　（13）（24），（14）（23），（12）（34）。

所以不同的化学结构数目为

$$N=\frac{1}{12}(4^4+8\times 4^2+3\times 4^2)=36$$

用四种颜色对正四面体的 6 条边着色，问有多少种不同方案？

解：恒等变换（1）（2）（3）（4）（5）（6）。

通过四个顶点的三阶轴的置换：

（123）（456），（132）（465）；（364）（251），（346）（215）；

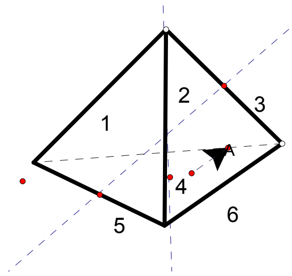
(265)(341),(256)(314);(154)(263),(145)(236)。

连接不相交边中点的二阶轴的置换：

(3)(5)(61)(24),

(1)(6)(35)(24),

(2)(4)(16)(35)。

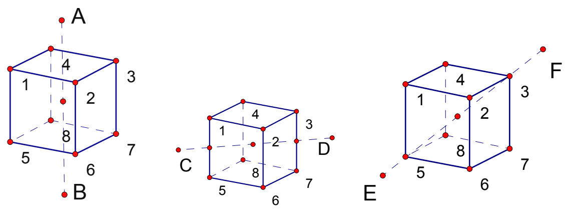


所以不同的化学结构数目为

$$N=\frac{1}{12}(4^6+8\times4^2+3\times4^4)=416$$

例 4　用两种颜色对正六面体的八个顶点着色，问有多少种不同方案？

解：



1. 恒等置换 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)

2. 绕 AB 轴旋转 90° 的置换为 (1234)(5678)，同类置换有 (2673)(1584)，(1562)(4873)。

3. 绕 AB 轴旋转 180° 的置换为 (13)(28)(37)(46)，同类置换有

(26)(35)(48)(17)，(16)(25)(47)(38)。

4. 绕 AB 轴旋转 270° 的置换为 (1432)(5876)，同类置换有

(2376)(1485)，(1265)(4378)。

5. 绕 CD 旋转 180° 的置换为 (15)(28)(37)(46)，同类置换有

(17)(26)(35)(48)，(12)(35)(46)(78)，

(17)(28)(34)(56)，(14)(28)(35)(67)，

(17)(23)(46)(58)。

6. 绕 EF 旋转 120° 的置换为 (3)(5)(274)(168)，同类置换有

(1)(7)(245)(386)，(2)(8)(163)(457)，

(4)(6)(138)(275)。

7. 绕 EF 旋转 240° 的置换为 (3)(5)(247)(186)，同类置换有

(1)(7)(254)(368)，(2)(8)(136)(475)，

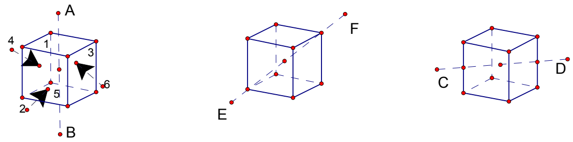
(4)(6)(183)(257)。

不同的着色方案数为

$$N=\frac{1}{24}(2^8+3\times2^2+3\times2^4+3\times2^2+6\times2^4+4\times2^4+4\times2^4)=23$$

例 5　用两种颜色对正六面体的六个顶点着色，问有多少种不同方案？

解：1. 恒等置换 (1)(2)(3)(4)(5)(6)。



2. 绕 AB 轴旋转 90° 的置换为 (1)(2)(3645)，同类置换有

(3)(4)(1526)，(5)(6)(1423)。

3. 绕 AB 轴旋转 180° 的置换为 (1)(2)(34)(56)，同类置换有

(3)(4)(12)(56)，(5)(6)(12)(34)。

4. 绕 AB 轴旋转 270° 的置换为 (1)(2)(3546)，同类置换有

(3)(4)(1625)，(5)(6)(4132)。

5. 绕 CD 旋转 180° 的置换为 (12)(54)(36)，同类置换有

(35)(46)(12)，(15)(26)(34)，(34)(16)(52)，

(56)(14)(23)，(56)(13)(42)。

6. 绕 EF 旋转 120° 的置换为 (136)(452)，同类置换有

(461)(523)，(145)(362)，(153)(426)。

7. 绕 EF 旋转 240° 的置换为 (163)(425)，同类置换有

(416)(532)，(154)(326)，(135)(462)。

不同的着色方案数为

$$N=\frac{1}{24}(2^6+3\times2^3+3\times2^4+3\times2^3+6\times2^3+4\times2^2+4\times2^2)=10$$

参考文献：

[1] 卢开澄，卢华明. 组合数学（第 3 版）[M]. 北京：清华大学出版社，2002.7.

[2] 胡冠章. 应用近世代数[M]. 北京:清华大学出版社，1999.2.