第14卷 第1期
1964年1月

数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 14, No. 1
Jan., 1964

Burnside 定理的一个推广*

陈重穆
(西南师范学院)

作者在文[1]中曾变动 Burnside 定理[2]的条件得出下述两个定理:

定理 1. 如果有限羣G是p-正常的,又G的p-sylow 子羣P的正常化$N_P = P \times K$,那末就存在着G的正常子羣它的因子羣是P羣.

定理 2[1]**.** 如果有限羣G的每一个p-羣$\bar{P}$的元素均与其正常化$N_{\bar{P}}$中阶数与p互质的元素可交换相乘,那末就存在G的正常子羣N使$G = PN$, $P \cap N = e$, 其中P是G的一个p-sylow 子羣.

設G的阶为$p^a n$, $(p, n) = 1$, 則 Burnside 定理的結論可表述为"G有n阶正常子羣N". 仅管定理2的条件是"G有n阶正常子羣N"的充分及必要条件(已由文[7]指出),但由它还不能直接推导出 Burnside 定理. 这篇短文在定理2的基础上推广了 Burnside 定理(定理3及系1),此外还研究了"G有n阶正常子羣"的某些充分条件并推广了 Frobenius 的一个定理[3]. 最后,本文还对含有循环 sylow 子羣的有限羣作了初步探討.

定理 3. 設有限羣G的阶为$p^a n$, $(p, n) = 1$, P是G的一个p-sylow 子羣. 如果包含P之核心Z的每一个P的子羣P'的正常化$N_{P'}$中所有阶与p互质的元素都与P'的元素可交换相乘,那末就存在G的n阶正常子羣N.

証. 只須証明"G的每一个p-羣$\bar{P}$的正常化$N_{\bar{P}}$中所有阶与p互质的元素均与$\bar{P}$的元素可交换相乘"就够了. 现对G的阶用归納法.

設$\bar{P}$的正常化是全羣G,那末$\bar{P}$的核心化$Z_{\bar{P}}$是G的正常子羣. 如果$Z_{\bar{P}} = G$,那么我們要証明的定理已成立;如果$Z_{\bar{P}} \neq G$,那么就可用归納假設于$Z_{\bar{P}}$而得$Z_{\bar{P}} = P_1 N_1$,其中P_1是$Z_{\bar{P}}$的一个p-sylow 子羣, $P \supseteq P_1 \supseteq Z$, N_1是$Z_{\bar{P}}$的正常子羣,且$P_1 \cap N_1 = e$. 如果$N_1 = e$,那么P_1便是G的正常子羣. 由于$P_1 \supseteq Z$,故G有正常子羣$\bar{P}P_1 \supseteq Z$. 根据假設G內所有阶与p互质的元素均与$\bar{P}P_1$的元素可交换相乘,故也与$\bar{P}$的元素可交换相乘. 如果$N_1 \neq e$,那末由于N_1是$Z_{\bar{P}}$的特性正常子羣,故是G的正常子羣. 研討因子羣G/N_1,显然PN_1/N_1是它的一个p-sylow 子羣. 容易証明, ZN_1/N_1是PN_1/N_1的核心,而且包含ZN_1/N_1的每一个PN_1/N_1的子羣$P'N_1/N_1$ $(P \supset P' \supset Z)$的正常化是$N_{P'}N_1/N_1$,故由归納假設存在G/N_1的正常子羣N/N_1使$\dfrac{G}{N_1} = \dfrac{PN_1}{N_1} \cdot \dfrac{N}{N_1}$, $\dfrac{PN_1}{N_1} \cap \dfrac{N}{N_1} = e$,亦即存在着$G$的$n$阶正常子羣$N$. 从而$G$內凡阶与$p$互质的元素均与$\bar{P}$的元素可交换相乘.

設$\bar{P}$的正常化$N_{\bar{P}}$异于G. 由于$N_{\bar{P}} \supset Z$,故可設$N_{\bar{P}}$包含Z的一个p-sylow 子羣是P', $P \supset P' \supset Z$. 显然P'的核心Z'包含Z. 設P_2是包含Z'但含于P'內的任一羣,又設

* 1962年9月3日收到,1963年3月25日收到修改稿.

1) 承审查者指出在文[1]发表后次年本定理又見于书[7].

P_2 在 $N_{\bar{P}}$ 內的正常化是 N_{P_2}，那末 N_{P_2} 含在 P_2 在 G 內的正常化中，故由假設 N_{P_2} 中所有阶与 p 互質的元素均与 P_2 的元素可交換相乘，故由归納假設，$N_{\bar{P}}$ 存在正常子羣 N' 使 $N_{\bar{P}} = P'N'$，$P' \cap N' = e$. 从而便得 $N_{\bar{P}}$ 中所有阶与 p 互質的元素均与 $\bar{P}$ 的元素可交換相乘. 我們的証明便完成了.

显然,本定理的逆定理也是成立的.

系 1. 設有限羣 G 的阶为 $p^a n$，$(p, n) = 1$，P 是它的一个 p-sylow 子羣，Z 是 P 的核心，A 是包含 Z 的 P 的任一 Abel 子羣，N_A 是 A 在 G 內的正常化，其阶为 $p^a h$，$(p, h) = 1$. 如果 N_A 恆有 h 阶正常子羣，則 G 有 n 阶正常子羣.

証. 令 P' 是包含 Z 的 P 的任一子羣. $N_{P'}$ 是 P' 的正常化，其阶为 $p^b k$，$(p, k) = 1$. 显然 P' 的核心 $Z' \supset Z$ 而 Z' 在 $N_{P'}$ 內是正常的，故 Z' 的正常化 $N_{Z'} \supset N_{P'}$. 設 $N_{Z'}$ 的阶为 $p^a h$，$(p, h) = 1$. 由假設 $N_{Z'}$ 有 h 阶正常子羣 H. 易知 $H \cap N_{P'}$ 是 $N_{P'}$ 的 k 阶正常子羣. 因此 P' 的元素与 $N_{P'}$ 內阶与 p 互質的元素均能交換相乘. 由定理 3 本系得証.

由于 $N_{P'}$ 有含在 Z' 內的极小正常子羣 A，它应为初等 Abel 羣，又 $N_A \supseteq N_{P'}$，故得

系 2. 設有限羣 G 的阶为 $p^a n$，$(p, n) = 1$，A 为 G 的任一初等 Abel p-子羣，N_A 是 A 的正常化，其阶为 $p^a h$，$(p, h) = 1$. 如果 N_A 恆有 h 阶正常子羣，則 G 有 n 阶正常子羣.

根据文献[5]所指出的定理可推出較其为广的引理

引理. 設 p-羣 P 存在着如下的子羣列

$$P \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{s-1} \supset P_s \supset E, \tag{1}$$

其中每 $P_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都是 P 的特性子羣，而且(1)所对应的因子羣列

$$P/P_1, \cdots, P_{s-1}/P_s, P_s \tag{2}$$

中每羣都是 Abel 羣，每羣之基底中同阶元素的个数均不超过 k. 如果一元 a 之阶与

$$(p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \cdots (p - 1)p$$

互質而 a 与 P 可交換相乘，那末 a 就与 P 的每元可交換相乘.

当(1)是遞升核心羣列[4]或換位羣列时，本引理都包含了文献[5]所指出之定理.

証. 由假設可知 a 与每 P_i 可交換相乘. 研討羣 (P_i, a)，由于 P_i/P_{i+1} 是 Abel 羣，由文献[5]之定理，关于模 P_{i+1}，a 与 P_i 之每元可交換相乘. 故 (P_{i+1}, a) 是 (P_i, a) 的正常子羣. 因此 (a) 是 (P_s, a) 的正常子羣，以特性故，(a) 又为 $(P_{s-1}, a), \cdots, (P_1, a), (P, a)$ 的正常子羣. 因而 a 与 P 的每元可交換相乘.

由定理 3 及引理卽得下面的

定理 4. 設有限羣 G 的阶为 $p^a n$，$(p, n) = 1$，P 是它的一个 p-sylow 子羣，Z 是 P 的核心，P' 是包含 Z 的任一 P 的子羣. 如果 P' 的子羣列(1)所对应因子羣列(2)中每一羣基底的同阶元素的个数都不超过 k，又

$$((p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \cdots (p - 1), n) = 1,$$

則 G 有 n 阶正常子羣.

本定理是文献[3]，[6]定理的推广.

定理 5. 設有限羣 G 的阶为 $p^a n$，$(p, n) = 1$. 如果 G 的 p-sylow 子羣是循环的，那末下面三个情况之一必然发生：

1）G 有 n 阶正常子羣，

2) 設 $p^a h$ 是 G 的 p-sylow 子羣 P 的核心化 Z_P 的阶; $p^a hk$ 是 P 的正常化 N_P 的阶, 而 $n = hkl$, 則 $k > 1$, $k | p-1$, 并且

i) G 有正常 p-子羣, 或者

ii) 存在整数 $r > 1$ 使 $r | l$, $p^a | r-1$.

証. 如果 $k = 1$, 則 $N_P = Z_P$. 由 Burnside 定理, 情况1)成立. 如果 $k > 1$, 則由于 N_P/Z_P 同构于 P 的自同构羣的某一个子羣, 故 k 为 $p^a(p-1)$ 的一个約数, 但 $(p, k) = 1$, 所以 $k | p-1$.

設 H 是包含 N_P 的极大子羣, 它在 G 下的指数設为 $r(r > 1)$, 用归納假設于 H.

如果 H 对情况 1) 成立, 則有 H 的正常子羣 M 使 $H = PM$, $P \cap M = e$. 令 $N_P \cap M = K$, 則易知 $N_P = P \times K$. 因此由 Burnside 定理, G 对情况 1) 成立.

如果 H 对情况 2), i)成立. 令 $\bar{P}$ 是 H 的正常 p-子羣. 如果 H 的正常化是 G, 則因 P 是循环羣, 故 $\bar{P}$ 是 H 的特性正常子羣, 从而 $\bar{P}$ 是 G 的正常子羣. 設 H 的正常化为自身, 其共軛系令为

$$H = H_1, H_2, \cdots, H_r.$$

如果 H_1 与 $H_i (i \neq 1)$ 有公共的 p-子羣 P'. 显然 $\bar{P}$ 与 P' 同在 H 的一个 p-sylow 子羣 P 內, 由于 P 是循环的, 故 $\bar{P} \supseteq P'$ 或者 $P' \supseteq \bar{P}$, 因而 P' 或者 $\bar{P}$ 是 H 和 N_{P_i}(P' 在 H_i 的 p-sylow 子羣 P_i 中, N_{P_i} 是 P_i 在 G 內的正常化) 的正常 p-子羣. 由 H 的极大性及 N_{P_i} 不含于 H 內(因若不然, H_i 的正常 p-子羣 $\bar{P}_i$ 便与 $\bar{P}$ 一致), 卽得 $(H, N_{P_i}) = G$. 因此 G 有正常 p-子羣.

如果 H 与 $H_i (i \neq 1)$ 无公共的 p-子羣, 則 H_i 与 $H_j (i \neq j)$ 亦然. 由熟知的 Frobenius 定理, H 內阶为 p^a 約数元素的个数为 p^a 的倍数, 設为 mp^a (在每 H_i 內亦然), 于是在 G 內阶为 p^a 約数的元素的个数为

$$r(mp^a - 1) + 1 \equiv 0 \mod p^a,$$

因此, $p^a | r-1$.

参 考 文 献

[1] 陈重穆, 关于 Burnside 的一个定理, 数学进展, **4** (1958), 274—276.
[2] Zassenhaus, H., Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937, S. 133, Satz 4.
[3] ——————, S. 137, Satz 8.
[4] ——————, S. 44.
[5] Burnside, W., Theory of Groups of Finite Order, 2d ed., 1911, p. 112, Th. IV.
[6] ——————, p. 327, corl. II.
[7] Hall, M., Theory of Groups, 1959, p. 217, Th. 14.4.7.