組合數學

4

記 數

- 例如，n 個命題字母的真值表中有多少列？一個擁有 n 個元素的集合有多少個子集合？
- 相乘原理

相乘原理 (product rule):

如果第一個事件有 n_1 種可能結果且第二個事件有 n_2 種可能結果，則這兩個事件序列共有 $n_1 \times n_2$ 種可能結果。

相 乘 原 理

範例： 丟一個銅板跟一個骰子共有多少種可能結果？

解答： 由於銅板的正反面結果跟骰子的點數結果互相不影響，因此我們可以將整個工作分成丟銅板與丟骰子兩個子工作，先後順序無關。如圖 4.1 與 4.2 所示，不論是先丟銅板或是先丟骰子，都有 $2\times6 = 6\times2 = 12$ 種可能結果。 ■

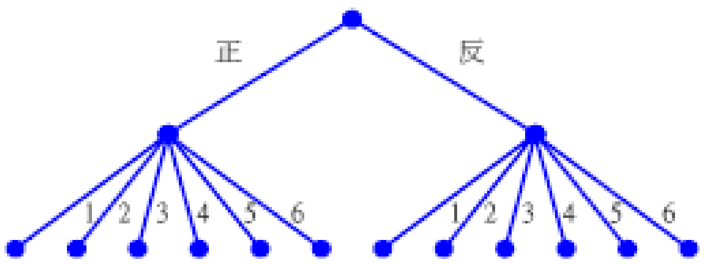

圖 4.1

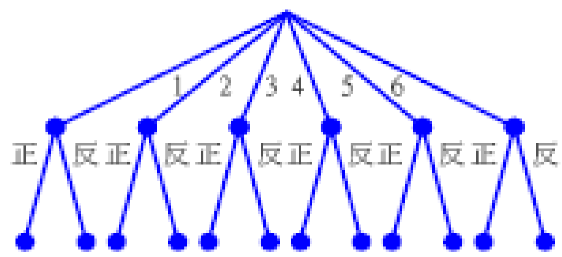

圖 4.2

範例

範例： 假設學號的後四碼是數字，那麼這四碼的數字有多少種可能情況？

解答： 它可以視為是四個子工作的序列：先挑第一個數字，再第二個，第三個，最後是第四個數字。第一個數字可以是 0~9 中的任何一個，因此有 10 種可能。同樣地，第二個、第三個、第四個數字也都有 10 種可能。因此，總共有 $10\times10\times10\times10=10,000$ 種可能結果。■

範 例

範例： 延續上面的範例，如果每一個數字只能出現一次，那麼這四碼的數字有多少種可能情況？

解答： 同樣的，它可以視爲是四個子工作的序列：先挑第一個數字，再第二個，第三個，最後是第四個數字，但是選過的數字不能再選。第一個數字可以是 0~9 中的任何一個，因此有 10 種可能。第二個數字只剩 9 個數字可以選，因爲它不能跟第一個數字一樣，以此類推。因此，總共有 $10\times9\times8\times7=5,040$ 種可能結果。■

相 加 原 理

相加原理（sum rule）：

如果 A 跟 B 是兩個沒有交集的事件，分別各有 n_1 與 n_2 種可能結果，則事件”A 或 B”共有 n_1+n_2 種可能結果。

- 相加原理可以延伸至任何彼此沒有交集的有限數目事件。
- 當一個事件可以分解成多個沒有交集的子事件時，原事件的可能結果數就等於所有子事件數加起來的結果。

範 例

範例： 假設你想從 5 種房車以及 7 種休旅車中挑選一種買來做爲交通工具，那麼有多少種選擇？

解答： 你所面對的是兩個沒有交集的事件：選擇房車有 5 種可能或者選擇休旅車有 7 種可能。根據相加原理，你因此共有 5+7=12 種可能選擇。 ■

範例： 令 A 與 B 是兩個沒有交集的有限集，則根據相加原理，$|A \cup B| = |A| + |B|$。 ■

兩個原理一起使用

範例： 假設學號的後四碼是數字，那麼這四碼的數字中有多少種可能情況是以 4 或 5 為開頭？

解答： 我們可以將以 4 為開頭的情況跟以 5 為開頭的情況分開考慮，因為這兩類情況並沒有交集。首先，我們計算以 4 為開頭的可能情況數。第一個數字我們必須選擇 4，因此只有一種情況。接下來的三個數字我們都有 10 種可能數字可以選擇。因此，根據相乘原理，共有 $1\times10\times10\times10=1000$ 種可能情況是以 4 為開頭的四位數。依據類似的推理，我們也可以結論有 1000 種可能情況是以 5 為開頭的四位數。根據相加原理，我們因此共有 $1000+1000=2000$ 種可能情況是以 4 或 5 為開頭。 ■

兩 個 原 理 一 起 使 用

- 假設學號的後四碼是數字，那麼這四碼的數字中有多少個是數字有重複的？
- 這個問題事實上可以這麼解：有重複的四碼學號跟沒有重複的四碼學號彼此沒有交集，而且他們的聯集就是所有的四碼學號。
- 因此，根據前面範例的結果，$|A \cup B| = |A| + |B|$，其中 A 表示有重複的四碼學號集而 B 表示沒有重複的四碼學號集。
- 換句話說，$|A| = |A \cup B| - |B| = 10{,}000 - |B|$。但是，根據前面的範例，我們已經求得四碼學號中沒有重複數字的情況有 $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5{,}040$ 種，即 $|B| = 5040$。
- 因此，有重複的四碼學號個數 $|A| = 10{,}000 - 5040 = 4960$ 個。

決 定 樹

- 圖 4.1 與 4.2 所示的決定樹引領我們到相乘原理，這是因爲那些樹的每一級都有相同數目的可能情況。
- 舉例來說，圖 4.1 中決定樹的第二級每一個節點都有六個分支，而圖 4.2 中決定樹的第二級每一個節點都有兩個分支。
- 這是比較有規則性的決定樹。規則性比較差的決定樹也可以用來解記數問題，但是在這種情況下，它就不對應至相乘原理。

決 定 樹

- 小明連丟五次銅板。其中沒有連續出現兩次正面的結果有幾個？

圖 4.4 顯示這個問題的決定樹。每丟一次銅板有正反面兩種可能結果。一旦出現正面，那麼下一個出現的只能是反面。共有 13 種可能結果。由於樹的每一級分支數不固定，因此這個範例不可以用相乘原理來解。

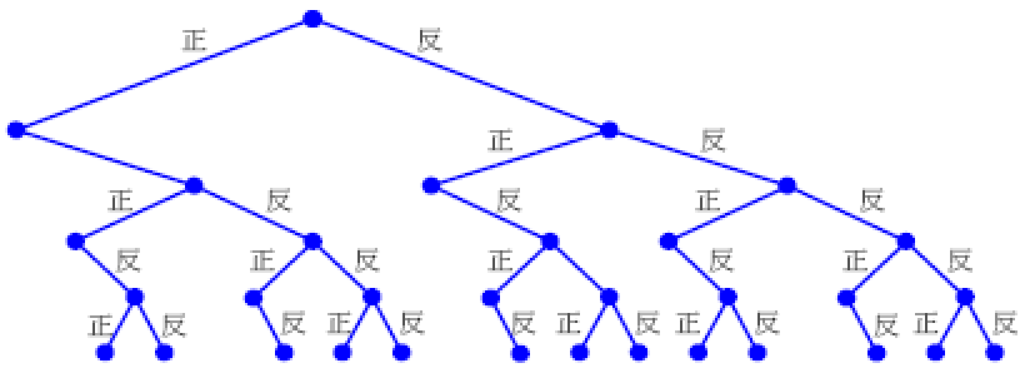

圖 4.4

決 定 樹

範例： 畫出由 X、Y、Z 所組成長度為 3 的字串之決定樹，其中 Z 後面不可以跟著 Y。

解答： 如圖 4.5 所示，共有 21 種可能字串。 ■

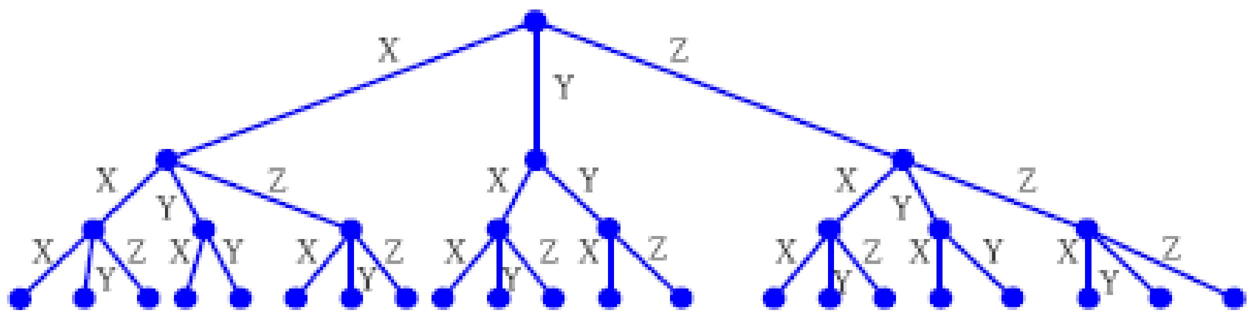

圖 4.5

包 含 與 排 斥 原 理

包含與排斥原理：

假設我們有 n 個有限集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, $n \geq 2$，則

$$\left|A_1 \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{1\le i\le n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$$

$$- \cdots + (-1)^{n+1}\left|A_1 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

包 含 與 排 斥 原 理

- 假設 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 都是集合 X 的子集合，其中 $|X|=N$。
- 假設集合 A_1 的元素具有某一個性質，A_2 的元素具有另外一個性質，以此類推，A_n 的元素具有第 n 個性質。
- 那麼，我們可以利用包含與排斥原理來算出 X 中具有一個或多個這些性質的元素個數。
- X 中具有一個或多個這些性質的元素個數是 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$。
- X 中完全不具備任何一個這些性質的元素個數是 $N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$。

坑 洞 原 理

- 也稱爲鴿籠原理

坑洞原理：

i　如果有 $r+1$ 根蘿蔔放入 r 個坑洞裡，那麼某一個坑洞裡至少放了兩根蘿蔔。

ii　如果有 $rs+1$ 根蘿蔔放入 r 個坑洞裡，那麼某一個坑洞裡至少放了 $s+1$ 根蘿蔔。

證 明

- (i) 如果 r 個坑洞每一個最多只放了一根蘿蔔，那麼根據相加原理，蘿蔔的總數應該小於等於 r，這跟我們假設的有 $r+1$ 根蘿蔔相矛盾。
- (ii) 如果 r 個坑洞每一個最多只放了 s 根蘿蔔，那麼根據相加原理，蘿蔔的總數應該小於等於 rs，這跟我們假設的有 $rs+1$ 根蘿蔔相矛盾。

範 例

範例： 證明在任何以 13 個人組成的人群中，至少有兩個人的生日是同一個月份。

證明： 我們可以將 12 個月份想成是 12 個坑洞，而 13 個人的生日月份想成是蘿蔔。那麼，根據坑洞原理，至少有兩根蘿蔔是放在同一個坑洞中。換句話說，至少有兩個人的生日月份是一樣的。 ■

坑 洞 原 理

- 請注意，坑洞原理很自然地可以延伸成：「如果有 r 根蘿蔔放入 r 個坑洞裡，那麼一個坑洞放一根蘿蔔若且唯若每一個坑洞都有放蘿蔔。」

範例

範例： 假設 $f: X \to Y$ 是從一個有限集合對映至另一個有限集合的函數，而且 $|X| = |Y|$。證明 f 是蓋射函數若且唯若 f 是嵌射函數。

證明： 我們可以將 Y 的元素想成是 $|Y|$ 個坑洞，而 X 的元素想成是 $|X|$ 個蘿蔔。那麼，根據坑洞原理，既然蘿蔔的數目等於坑洞的數目而且每一個坑洞都放了蘿蔔（蓋射函數），那麼每一個坑洞一定剛好放一根蘿蔔（嵌射函數）。

類似地，既然蘿蔔的數目等於坑洞的數目而且每一個坑洞都剛好放一根蘿蔔（嵌射函數），那麼每一個坑洞一定都放了蘿蔔(蓋射函數)。 ■

排 列 與 組 合

排 列

- 從 n 個不同物件中挑出 r 個不同物件做排列，所可能產生的情況數目表示爲 $P(n,r)$。
- 一般來說，$P(n,r)$ 可以表示成下列的公式

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0 \le r \le n$$

$P(n,r)$

$$P(n,0)=\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

- 這個結果可以解釋成 0 個物件的有序排列方式只有一種－空集合。

$$P(n,1)=\frac{n!}{(n-1)!}=n$$

- 這個公式反映了事實－從 n 個物件中選出一個物件做排列有 n 種排列方式。

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=n!$$

- 這個結果說明從 n 個物件中選出 n 個物件做排列有 $n!$ 種排列方式。

範例

範例： 從 20 個人所組成的人群中有多少種方法可以挑出一個總統以及一個副總統？

解答： 在這裡，誰當總統是有關的。我們想知道的是從 20 個人中挑出 2 個做排列的可能排列數。答案是 $P(20,2) = 20!/18! = 380$。■

範例： 6 個人坐一排，有多少種坐法？

解答： $P(6,6) = 6!/0! = 720$。■

範 例

- 記數問題也有可能必須用其它的記數問題來做爲子工作。

範例： 圖書館有 4 種資料結構的書、7 種計算機組織的書、以及 3 種離散數學的書。如果同類的書必須放在一起，那麼將這些書擺在書架上的方法有多少種？

範 例

解答： 我們可以將這個問題想成是一序列的子工作。首先，第一個子工作是 3 個主題的安排。這個子工作有 3!種安排方式。其次的一個子工作是資料結構書的安排，有 4!種安排方式。接下來的子工作是計算機組織書的安排，有 7!種安排方式。最後一個子工作是離散數學書的安排，有 3!種安排方式。因此，根據相乘原理，總共有 $(3!)\times(4!)\times(7!)\times(3!)=4,354,560$ 種安排。■

組　合

- 從 n 個不同物件中挑出 r 個不同物件的組合數，符號表示為 $C(n,r)$。
- 從n個不同物件中挑出r個不同物件做排列的可能排列數等於選出這r個物件的方法，$C(n,r)$，乘以這r個物件的可能排列數目，$r!$。因此

$$C(n,r)\times r!=P(n,r)$$

- 或者

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!},\qquad 0\le r\le n$$

$C(n,r)$

範例： $C(7,3)$的值為

$$\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$$

前面我們計算過 $P(7,3)$的值是 210，而 $C(7,3)\times(3!)$ $=35\times6=210=P(7,3)$。■

$$C(n,0)=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

- 這個結果可以解釋成從 n 個物件選取 0 個物件的方式只有一種－選擇空集合。

$C(n,r)$

$$C(n,1)=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$$

- 這個公式反映了事實－從 n 個物件中選出一個物件有 n 種方式。

$$C(n,n)=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

- 這個結果說明從 n 個物件中選出 n 個物件只有 1 種選法－全部都選。

範 例

範例： 從 52 張撲克牌中取出 5 張，有多少種可能？

解答： 在這裡，5 張排的先後順序是無關的。我們想知道的只是最後在我們手上的 5 張牌是哪 5 張。答案是 $C(52,5) = 52!/(5!47!) = 2,598,960$。■

範例： 從 20 個人所組成的人群中有多少種方法可以挑出兩個人做爲對外協商代表？

解答： 在這裡，兩個協商代表的職權是一樣的。因此，我們想知道的是從 20 個人中挑出 2 個人的可能選擇數。答案是 $C(20,2) = 20!/(2!18!) = 190$。■

混 合 使 用

- 在解記數的問題時，$C(n,r)$ 可能必須跟相乘原理或者相加原理一起使用。

混合使用

範例： 一個班上有 19 個大一生以及 34 個大二生。現在打算從其中選出 8 位同學成立一個協會。

a. 如果協會要有 3 位大一生、5 位大二生，則有多少種選法？

b. 如果協會要有 1 位大一生、7 位大二生，則有多少種選法？

c. 如果協會至多只要 1 位大一生，則有多少種選法？

d. 如果協會至少要有 1 位大一生，則有多少種選法？

混合使用

解答： 對於問題 a，我們所面對的是有兩個子工作所形成的序列－選擇大一生以及選擇大二生。我們應該用相乘原理。（將問題想成是一序列的子工作似乎蘊涵了先後次序，但是它只是建立了決定樹的不同級，而這是相乘原理的基礎。事實上，學生的先後次序並不重要。）由於有 $C(19,3)$種方法挑選大一生並且有 $C(34,5)$種方法挑選大二生，因此答案是

$$C(19,3)\cdot C(34,5)=\frac{19!}{3!16!}\cdot\frac{34!}{5!29!}=(969)(278,256)$$

混合使用

對於問題 b，我們所面對的也是由兩個子工作所形成的序列－選擇 1 位大一生以及選擇 7 位大二生。由於有 $C(19,1)$種方法挑選一位大一生並且有 $C(34,7)$種方法挑選 7 位大二生，因此答案是

$$C(19,1)\cdot C(34,7)=\frac{19!}{1!18!}\cdot\frac{34!}{7!27!}=(19)(5,379,616)$$

混合使用

對於問題 c，我們最多可以選 1 位大一生，亦即選 0 位大一生或 1 位大一生。由於這兩者是沒有交集的兩個事件，我們因此利用相加原理。選擇一位大一生的選擇方法正是子題 b 的答案。至於選擇 0 位大一生的方法數就等於是從 34 位大二生中挑出 8 位學生的方法數一樣，$C(34,8)$。因此答案是

$C(19,1)\times C(34,7)+C(34,8)=$很大的一個數

混合使用

問題 d 的解法有好幾種。其中之一是利用相加原理－有 1 位大一生的選法，加上有 2 位大一生的選法，等等，一直加到有 8 位大一生的選法。我們以下採取的是比較簡單的一個解法：先計算從全部 53 位同學當中選出 8 位同學的可能選法數目，有 $C(53,8)$種，這是最沒有限制的情況下的可能選擇數目。我們必須將這個數目扣掉只取大二生的可能選法數目，$C(34,8)$。因此答案是 $C(53,8)-C(34,8)$。■

消 除 重 複 計 算 項

- 記數問題常常可以有許多不同的解法。
- 不幸的是有些解法乍看之下很有道理，其實卻是錯的。
- 這些解法之所以錯誤往往是因爲它們重複計算了其中的一些項。

範例： 一個班上有 19 個大一生以及 34 個大二生。現在打算從其中選出 8 位同學成立一個協會。如果協會至少要有 1 位大一生，則有多少種選法？

消除重複計算項

解答： 針對這個問題，一個錯誤的解法如下：將問題想成是兩個子工作的序列，先選出一位大一生然後在從其他的學生當中選出其餘的 7 位協會委員。選出一位大一生的方法有 $C(19,1)$種。一旦大一生已經選好，我們已經可以保證協會當中至少有一名大一生，因此我們可以在沒有任何限制的前提下從剩餘的 52 位同學當中選出其餘的 7 位協會委員，這有 $C(52,7)$種選法。根據相乘原理，我們得到答案是 $C(19,1)\times C(52,7)$。但是，這個答案比正確的數字大了許多。

消 除 重 複 計 算 項

- 問題是這麼產生的：假設大雄跟宜靜都是大一生。
- 在第一個子工作中，假設我們已經挑出大雄做爲我們至少一個大一生的保證，
- 我們並且從剩餘的 52 位同學當中選出其餘的 7 位協會委員，假設這其中包括了宜靜，另外 6 位是 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$。

消 除 重 複 計 算 項

- 但是，這樣所挑出的 8 位協會委員其實還會再被計算一次，亦即，
- 在挑選大一生時我們其實挑出的是宜靜，而在從剩餘的52位同學當中選出其餘的7位協會委員時，大雄跟$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$一起被挑出。
- 結果是{大雄, 宜靜, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$}跟{宜靜, 大雄, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$}各被算了一次，
- 但是，它們其實是一樣的，只能算一次。

消除重複計算項

範例： 我們要從四位數學系學生與三位物理系學生中選出兩位協會委員，而且協會委員至少必須有 1 位數學系學生。計算以下兩個值。

a. $C(7,2)-C(3,2)$（正確答案：所有可能委員會組合減掉不包括數學系學生的委員會組合）

b. $C(4,1)\times C(6,1)$（錯誤答案：先選一位數學系學生再從所有剩餘的學生中挑出第二位委員）

消除重複計算項

解答： a. $C(7,2)-C(3,2)=18$, b. $C(4,1)\times C(6,1)=24$。特別注意的是，$C(4,1)\times C(6,1)-C(4,2)$也會得到正確的答案，這是因爲 $C(4,2)$代表的是兩位委員都是數學系學生的選法，而這正是在 $C(4,1)\times C(6,1)$被計算兩次的委員組合。 ■

範例

範例： a. $abcdefg$ 這 7 個英文字母可以產生多少個不同的排列？b. $abbbbccccdd$ 這 11 個英文字母又可以產生多少個不同的排列？

解答： 子題 a.是很單純的 7 個不同物件的排列問題，它的答案是 7!。但是，子題 b.的答案不是 11!，因爲 $abbbbccccdd$ 這 11 個英文字母有些是一樣的。這意味著 11!是把許多相同的排列重複計算多次的結果（相同的排列指的是我們根本無法分辨出諸如 $ab_1b_2bbccccdd$ 與 $ab_2b_1bbccccdd$ 有什麼不同）。

範 例

- 讓我們看這 11 個字母的任何一個排列字串。在這個字串中，4 個 b 分別共佔了 4 個位置。
- 在這 4 個位置中，無論我們將佔了這 4 個位置的 b 如何重新排列，所產生出來的字串還是一樣的。
- 這種看起來都一樣的字串有4! 個。

範 例

- 換句話說，這 11 個字母的任何一個排列字串都會產生 4! 個看起來都一樣的字串。
- 爲了避免重複計算，我們必須將 11! 除以 4!，如此才能將所有 4 個 b 互相動來動去的各種可能性考慮進去。
- 類似地，我們也必須再除以 4!，如此才能將所有 4 個 c 互相動來動去的各種可能性考慮進去，
- 並且再除以 2!，如此才能將所有 2 個 d 互相動來動去的各種可能性考慮進去。

範 例

- 因此，不同的排列數總共有

$$\frac{11!}{4!4!2!}$$

消 除 重 複 計 算 項

- 一般的情況是，如果我們有 n 個物件，其中有 n_1 個物件是同屬一類的（一樣的或無法分辨的）
- 另外又有 n_2 個物件是同屬另一類的（一樣的或無法分辨的）、
- 以此類推乃至於有 n_k 個物件是同屬另一類的（一樣的或無法分辨的）
- 那麼這 n 個物件的不同排列數有

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_k!)}$$

範 例

範例： "MONGOOSES"這 9 個英文字母可以產生多少個不同的排列？

解答：

$$\frac{9!}{3!2!}$$ ■

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 我們已經有的公式 $P(n,r)$ 與 $C(n,r)$，它們所假設的是當我們從 n 個物件中取出其中 r 個物件做排列或不做排列時，每一個物件只能使用一次。
- 因此，$r \le n$。
- 現在，讓我們假設這 n 個物件每一個都可以不限次數地重複使用，亦即，每一次取一個物件，看完結果後又把該物件放回去，因此下一次還可能取到同一個物件。

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 要計算從 n 個物件中取出其中 r 個物件做排列並且允許重複使用是很容易的一件事。
- 針對第一個物件，我們有 n 種選擇。
- 由於重複使用是被允許的，因此針對第二個物件，我們還是有 n 種選擇。
- 類似地，第三個乃至於到第 r 個物件我們都各有 n 種選擇。
- 因此，從 n 個物件中取出其中r個物件做排列並且允許重複使用的結果有 n^r 種可能。

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 要計算從 n 個物件中取出（允許重複使用）其中 r 個物件的組合數，我們倒是有一個相當聰明的想法。

範例： 學校想要從大學部學生、碩士班學生、以及博士班學生中挑選五位成立所謂的學生代表會。共有多少種選法？

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 由於我們並不在意挑出學生的次序，因此這是一個組合問題而不是一個排列問題。
- 我們所面對的因此是從 3 個物件中取出（允許重複使用）其中 5 個物件的組合數。
- 例如，學生代表會可能包含一位大學部學生、三位碩士班學生、以及一位博士班學生，或者是五位大學部學生。

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 所有這些可能性可以用五個星號代表選出的五位代表並且在星號間畫上區隔號代表這三類學生的分佈情形。
- 舉例來說，我們可以將一位大學部學生、三位碩士班學生、以及一位博士班學生所組成的學生代表會表示成

$$*\,|\,***\,|\,*$$

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 而將五位大學部學生所組成的學生代表會表示成

  $$*****||$$

- 我們所面對的問題因此變成是總共七個位置（五個星號加上兩個區隔號），
- 而且這七個位置中哪五個是擺星號的就對應至學生代表會的不同組成方式。
- 因此，我們可以計算從七個位置中挑選出五個位置擺星號的可能選法數目，$C(7,5)$或 $\frac{7!}{5!2!}$

允 許 重 複 的 排 列 組 合

- 一般的情況是，如果我們用同樣的方式來表示從 n 個物件中取出（允許重複使用）其中 r 個物件做組合，那麼會有 n-1個區隔符號代表這 n 個物件的個別拷貝數。
- 總共因此有 r+(n-1) 個位置要我們填，而且其中我們要挑出 r 個位置放星號。
- 所以，我們要的是

$$C(n+r-1,r)=\frac{(n+r-1)!}{(n+r-1-r)!r!}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

允 許 重 複 的 排 列 組 合

範例： 我們想從紅色、黃色、以及綠色棒棒糖中挑選六支棒棒糖。共有多少種選法？

解答：

$$C(8,6)=\frac{8!}{6!2!}$$ ■

二 項 式 定 理

帕 斯 卡 三 角 形

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & & C(0,0) & & & & & & 0 \\
 & & & & & C(1,0) & & C(1,1) & & & & & 1 \\
 & & & & C(2,0) & & C(2,1) & & C(2,2) & & & & 2 \\
 & & & C(3,0) & & C(3,1) & & C(3,2) & & C(3,3) & & & 3 \\
 & & C(4,0) & & C(4,1) & & C(4,2) & & C(4,3) & & C(4,4) & & 4 \\
 & C(5,0) & & C(5,1) & & C(5,2) & & C(5,3) & & C(5,4) & & C(5,5) & 5 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
C(n,0) & & C(n,1) & & & & \cdots & & & & C(n,n-1) & C(n,n) & n
\end{array}
$$

列

帕 斯 卡 三 角 形

- 將實際上的數字算出來，我們發現帕斯卡三角形的樣子變成：

	列
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
⋮	⋮

帕 斯 卡 三 角 形

- 帕斯卡公式

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \qquad 1 \le k \le n-1$$

- 證明如下：

$$
\begin{aligned}
C(n-1,k-1)+C(n-1,k) &= \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \underbrace{\frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}}_{\text{乘以}k/k}+\underbrace{\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}}_{\text{乘以}(n-k)/(n-k)} \\
&= \frac{k(n-1)!+(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{[k+(n-k)](n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= C(n,k)
\end{aligned}
$$

二 項 式 定 理

範例： 計算 $(a+b)^3$ 以及 $(a+b)^4$ 並且比較所得係數與帕斯卡三角形的第三列、第四列。

解答： $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，它的係數 1, 3, 3, 以及 1 正好是帕斯卡三角形的第三列。

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^3$，它的係數 1, 4, 6, 4, 以及 1 正好是帕斯卡三角形的第四列。 ■

二 項 式 定 理

- $(a+b)^n$ 的展開係數是帕斯卡三角形的第 n 列。

二項式定理：

對於任何一個非負整數 n，

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ C(n,k)a^{n-k}b^k + \cdots + C(n,n-1)a^1 b^{n-1} + C(n,n)a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

證 明

證明： 由於二項式定理宣稱"對於任何一個非負整數 n"，因此我們將用歸納法來證明。首先，當 $n=0$ 時，這個定理告訴我們

$$(a+b)^0=C(0,0)a^0b^0$$

亦即

$$1=1$$

這很顯然地成立，因此當 $n=0$ 時成立。

證 明

假設當 $n=k$ 時成立，即

$$(a+b)^k = C(k,0)a^k b^0 + C(k,1)a^{k-1}b^1 + \cdots + C(k,k-1)a^1 b^{k-1} + C(k,k)a^0 b^k$$

我們要證明當 $n=k+1$ 時成立。但是

證 明

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) = (a+b)^k a + (a+b)^k b \\
&= [C(k,0)a^k b^0 + C(k,1)a^{k-1}b^1 + \cdots \\
&\quad + C(k,k-1)a^1 b^{k-1} + C(k,k)a^0 b^k]a \\
&\quad + [C(k,0)a^k b^0 + C(k,1)a^{k-1}b^1 \\
&\quad + \cdots + C(k,k-1)a^1 b^{k-1} \\
&\quad + C(k,k)a^0 b^k]b \quad (\text{帶入}P(k))
\end{aligned}
$$

證 明

$$
\begin{aligned}
&= C(k,0)a^{k+1}b^0 + C(k,1)a^k b^1 + \cdots \\
&\quad + C(k,k-1)a^2 b^{k-1} + C(k,k)a^1 b^k \\
&\quad + C(k,0)a^k b^1 + C(k,1)a^{k-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + C(k,k-1)a^1 b^k + C(k,k)a^0 b^{k+1} \\
&= C(k,0)a^{k+1}b^0 + [C(k,0) + C(k,1)]a^k b^1 \\
&\quad + [C(k,1) + C(k,2)]a^{k-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + [C(k,k-1) + C(k,k)]a^1 b^k \\
&\quad + C(k,k)a^0 b^{k+1} \quad \text{(蒐集類似項)}
\end{aligned}
$$

證 明

$$= C(k+1,0)a^{k+1}b^0 + C(k+1,1)a^k b^1$$

$$+ C(k+1,2)a^{k-1}b^2 + \cdots$$

$$+ C(k+1,k+1)a^0 b^{k+1} \quad (\text{帕斯卡公式})$$

（因為 $C(k,0)=1=C(k+1,0)$ 且 $C(k,k)=1=C(k+1,k+1)$）

整個歸納證明因此完成。 ■

範 例

範例： 利用二項式定理我們可以展開$(x-3)^4$如下：

$$
\begin{aligned}
(x-3)^4 &= C(4,0)x^4(-3)^0 + C(4,1)x^3(-3)^1 + C(4,2)x^2(-3)^2 \\
&\quad + C(4,3)x^1(-3)^3 + C(4,4)x^0(-3)^4 \\
&= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(9) + 4x(-27) + 81 \\
&= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81
\end{aligned}
$$

另外，利用二項式定理我們可以展開$(x+1)^5$如下：

$$
\begin{aligned}
(x+1)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4 + C(5,2)x^3 + C(5,3)x^2 \\
&\quad + C(5,4)x^1 + C(5,5) \\
&= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x^1 + 1
\end{aligned}
$$

■

範 例

範 例： $(x+y)^7$ 展開以後的第五項爲何？

解 答： $C(7,4)x^3y^4$。

其它等式

I.	$C(n,k)=C(n,n-k)$	對稱
II.	$C(n,k)=\frac{n}{k}C(n-1,k-1)$	抽取
III.	$C(n,k)C(k,r)=C(n,r)C(n-r,k-r)$	三項式精化
IV.	$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)a^{n-k}b^k$	二項式定理
V.	$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)^2=C(2n,n)$	中間係數展開
VI.	$\sum_{i=0}^{k}C(n+i-1,i)=C(n+k,k)$	平行和
VII.	$\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k C(n-r,k)\frac{n+1}{r+k+1}=C(n,r)^{-1}$	逆展開