第 20 卷　第 6 期
2000 年 12 月
福州师专学报(自然科学版)
JOURNAL OF FUZHOU TEACHERS COLLEGE
(Natural Science Edition)
Vol. 20　No. 6
Dec.　2000

网络流与最大流问题

林履端
(福州师范高等专科学校 学报编辑部, 福建 福州 350011)

摘要: 本文主要讨论了网络流及其应用, 其中最大流问题是当今网络流理论中最重要的问题之|　, 它在我们现实生活、科技及生产领域中都有广泛的应用。

关键词: 网络; 网络流; 容量; 割; 最大流
中图分类号: O157. 5　　文献标识码: A　　文章编号: 1009- 8721(2000) 06- 0001- 06

Network Flow and Maximum Flow

LIN Lv-duan

Abstract: In this paper, we discuss the Network flow and its application, the maximum flow is the important problem in the Network Flow theory, it can be applied to the real problems, science and technology.

Key words: Network, Network Flow, Capacity, Cut, Maximum flow

§1　网络和流

在还没有开始介绍网络及其有关理论之前, 先来观察下面具体例子。

今要从某地方 x 调运货物到 y_1 和 y_2 两个地方, 调运路线具体如下图 1. 1 所示

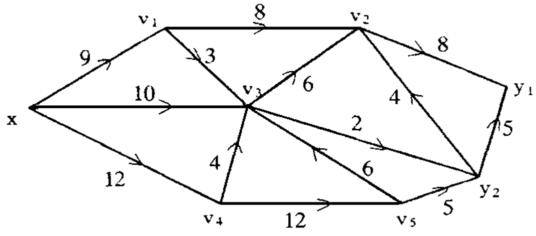


图 1. 1

根据图 1. 1 所示的路线图, 可知货物从 x 发出以后, 中间可以经过 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 最后把货物送到 y_1 和 y_2, 在图中的每条有向边上都赋给一个数字, 该数字其具体意义是表示各边所允许通过的最大运输量(即运输流量) 或费用, 现在要问: (1) 从 x 运送货物到 y_1 和 y_2 中间经过的线路最大承受力(即最大流量) 是多少? (2) 当从 x 运送货物到 y_1 和 y_2 的货物数量已经确定, 要问应该怎样选择运输路线可使费用最省? 这样的问题, 就是经常遇到的运输网络以及寻求网络的最大流问题。

设 $N = (V, E)$ 是一连通的有向图, X 和 Y 是 V 的两个非空且不相交的子集, X 中的每一点都有通路到达 Y 中的某点, 而且在 N 的边集 E 中每一边 e 上都定义了一个边权函数 $c(e)$, ($c(e)$ 一般是整数值函数), 则称这样的有向图 N 为网络。

网络 N 中的顶点子集 X 中的点称为 N 的发点(或原点); 子集 Y 中的点称为 N 的收点(或汇点)。既不在 X 中, 也不在 Y 中的顶点称为 N 的中间点。而定义在 E 中的边权函数称为网络 N 的容量函数, 具体到 E 中的某一边 e 时, 其函数值 $c(e)$ 称为该边 e 的容量。当边 e 用有序点组 (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ 来表示时, $c(e) = c(x, y)$, 而且一般来说

$$c(x\ y) \neq c(y\ x)$$

当网络表示交通运输系统的数学模型时, 边容量可以表示该条边所示的路所能承担的最大运输量, 由于网络 N 具体表示系统的不同, 边容量也具有不同的物理意义。

当 X 和 Y 都只含唯一顶点时, 则称这样的网络 N 为单发点单收点网络。

收稿日期: 2000- 09- 01

网络在我们生活与生产中经常遇到的, 除了运输网络外, 通讯网络, 管道网络等等, 例如, 某城市自来水从自来水厂出来, 经自来水管道, 最后流到用户; 煤气厂, 管道和用户也形成一个网络。在这些网络中, 每一管道所允许通过的最大水(煤气) 量, 就是该管道的容量。

对于给定的网络 N, 从发点出来的"货物", 经过网络上的有向边, 最后流入收点的"货物" 称为流量, 而每一条边$(v_i v_j)$ 流过的流量, 记为$f(v_i v_j)$(或$f(ij)$, 称为边$(v_i v_j)$ 的流。

显然, 边$(v_i v_j)$ 的流不能超过该边的容量, 因此有

$$0 \leqslant f((v_i v_j) \leqslant c(v_i v_j)$$

满足上式的网络称为相容网络。

对给定的网络 N, 若每条边上的流都知道, 即相当于在N 的边集E 上定义了一个函数(即N 上所有边的流的全体)

$$F = \{f(u\ v) \mid u, v \in V\}$$

则称 F 的网络N 的流。如果 F 的$f(u\ v)$ 都是相容的, 则称该网络 N 的流 F 是相容的。例如, 在下面图 1.2 中所示的网络 N 和它的一个流 F 是相容的

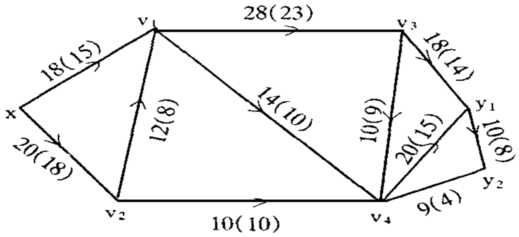


图 1.2

图中每一边上都有两个数字, 括号外的数字表示该边的容量, 而括号内的数字表示经过该过的流

例如 $c(x\ v_1) = 18$ $f(x\ v_1) = 15$

$c(v_1 v_3) = 28$ $f(v_1 v_2) = 23$

$c(v_1 v_2) = 14$ $f(v_1 v_3) = 10$

$c(v_3 v_4) = 10$ $f(v_3 v_4) = 9$

$c(v_4 y_2) = 9$ $f(v_4 y_2) = 4$

$c(y_1 y_2) = 10$ $f(y_1 v_2) = 8$

等等。

如果一条边$(u\ v)$ 的流等于该边的容量, 即

$$f(u\ v) = c(u\ v)$$

则称边$(u\ v)$ 是饱和边否则非饱和边, 例如在图 1.2 所示的网络 N 流中

$$f(v_2\ v_4) = 10 = c(v_2\ v_4)$$

因此边$(v_2\ v_4)$ 是饱和的, 而其余各边均是非饱和的。

设 V_1 和 V_2 是 N 的顶点集 V 的两个子集, 用$(V_1\ V_2)$ 表示起点在 V_1, 终点在 V_2 的有向边的集合, 用 $f(V_1\ V_2)$ 表示集合$(V_1\ V_2)$ 中各边流的总和, 即

$$f(V_1\ V_2) = \sum_{u \in v_1, v \in v_2} f(u\ v)$$

特别, $f(x\ V)$ 表示从顶点 x 流出来的流的和, $f(V\ x)$ 表示流进顶点 x 的流的总和, 有时, 记

$$f(x\ V) = f^+(x)$$

$$f(V\ x) = f^-(x)$$

定理 1.1 设网络 $N = (V, E)$, F 是网络N 上的流且 x 和y 分别是 N 的唯一发点和唯一收点, 则有

$$f(u\ V) - f(V\ u) = \begin{cases} f^+(x) & \text{当 } u = x \\ 0 & \text{当 } u \neq x\ u \neq y \\ f^-(y) & \text{当 } u = y \end{cases}$$

这个定理的正确性较易证明

当 $u = x$ 时, $f(u\ V) = f(x\ V) = f^+(x)$ 由于 x 是发点, 即没有流进, 于是 $f(V\ x) = 0$, 因此有

$$f(x\ V) - f(V\ x) = f^+(x)$$

当 $u \neq x\ u \neq y$ 时即u 是中间点, 而中间点流进与流出的流必相等, 也因此, 这时

$$f(u\ V) - f(V\ u) = 0$$

当 $u = y$ 时 $f(y\ V) = 0$ 于是

$$f(u\ V) - f(V\ u) = 0 - f(V\ y) = f^-(y)$$

并且可得

$$f^+(x) = f^-(y)$$

当发点 x 不仅一点, 而是一个集合 X, 收点也是一个集合 Y 时, 则有

$$f^+(X) = f^-(Y)$$

以上还可由图 1.2 所示的网络 N 和流具体加以验证。

定理 1.1 事实上是假设了网络 N 和流在中间流运过程中没有"漏掉"。对于一个网络 N 的流 F, 如果满足相容性和定理 1.1 时则称这样的流 F 在网络N 上是可行流。

任一个网络 N, 至少有一个可行流, 因为, 定义所有的边其流都等 0, 即

$$f(u\ v) = 0 \quad \forall\ u \in V\ v \in V$$

这样的流 F, 显然满足相容性与定量 1. 1 两个条件, 因此是可行流, 并称为零流。

网络的流的问题常常可以用来描述运输网络的货物流, 通讯网络中的信息流等等, 例如, 图 1.3 所示的网络 N 上的流F 就是一个发点x 和一个收点y 的可行流。

若 S 是网络N 的顶点集 V 的一个子集, F 是N 中的流, 那么$f^+(S) - f^-(S)$ 称为相对 F 而言出自S 的合成流, $f^-(S) - f^+(S)$ 称为相对 F 进入S 的合成流。

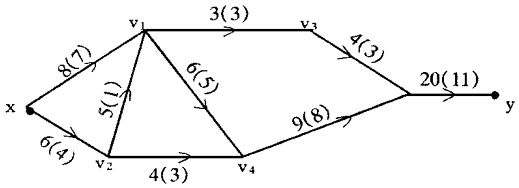


图 1.3

如果一个 N 中的 F 满足定理 1.1, 又称这样的流是守恒的。若流 F 是守恒的, 那末, 易知, 对于顶点集 V 的中间点集S, 进入合成流和流出合流都等于 0, 即

$$f^{+}(S)-f^{-}(S)=0$$
$$f^{-}(S)-f^{+}(S)=0$$

对于网络N 和流F 而言出自发点集X 的合成集X 的合成流等于进入收点集 Y 的合成流, 并称该合成流的值为流F 的值记为 Val$F$, 即

$$\mathrm{Val}F=f^{+}(X)-f^{-}(X)=f^{+}(X)$$
$$=f^{-}(Y)-f^{+}(Y)=f^{-}(Y)$$

例如, 在图 1.3 中所示的网络流 $N(F)$ 其

$$\mathrm{Val}F=4+7=11$$

若网络N 不存在其他的流 F 使得:

$$\mathrm{Val}F>\mathrm{Val}F^{*}\quad(\text{或 }\mathrm{Val}F^{*}\geqslant \mathrm{Val}F\ \ \forall\ F)$$

则称 F^{*} 为N 的最大流, (同理, 可以定义N 的最小流)。确定一个网络N 的最大(小) 流在实际问题中有着重要意义, 而求网络 N 的最大(小) 流的问题也叫做最大流问题。

§ 2　网络的割

为了介绍最大(小) 流问题的解决方法, 先来讨论所谓网络的割。

网络中的一个流从发点集 X 流出后, 经过中间点及其相连接的边, 最后流向收点集 Y, 因此, 如果去掉(割掉) 中间的某些边就会"断" 流, 因此, 对一个网络 N 除了发点集X 和收点集 Y 的外分清中间点以及相连接的边的相关联情况, 对研究网络上流的流这是至关重要的, 正如, 图 2.1 表示的一个运输网络 N, 其中 x 为发货地, y 为接收地, 中间经过 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 五个中间站以及联接它们的有向边, 在 x 把货物发送到y 可以经过不只一条路线而送达。但是, 如果在网络中去掉某些边(正如某些条公路不能通行), 那末就会影响到运输, 甚至完全停止, 例如, 去掉$(v_1\ v_5)$ 和$(v_2\ v_3)$ 就不能运输了, 把N 的所有顶点分成不连通的两个部分(子集) $S=\{x\ v_1, v_2\}$ 与 $\overline{S}=\{v_3, v_4, v_5, y\}$

(这里只考虑从 S 到$\overline{S}$ 而不考虑从$\overline{S}$ 到 S), 例如$(v_1\ v_5)$ 和(v_2, v_3) 这样的两条边就叫做网络 N 的一组割, 割的一般定义是:

设 $N=(V\ E)$ 是有单一发点x 和单一收点y 的网络, N 的割(记为 K) 就是 N 中边集E 的子集$K=(S,\overline{S})=\{(u\ v)\mid u\in S, v\in\overline{S}, \text{且 } x\in S, y\in\overline{S}\}$ 其中$S\cup\overline{S}=N(V), S\cap\overline{S}=$ f

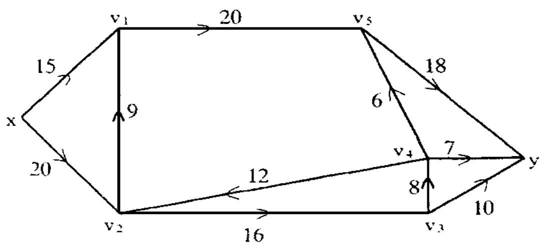


图 2.1

根据割的定义可知, 一个网络 N 的割不是唯一的。

割 K 中所有边的容量和称为该割K 的容量, 记为 Cap$K$, 即

$$\mathrm{Cap}K=\sum_{e\in K}c(e)$$

例如, 图 2.1 所示的网络N 的一个割

$K_1=\{(v_1\ v_5), (v_2\ v_3)\}$

其容量

$$\mathrm{Cap}K_1=c(v_1\ v_5)+c(v_2\ v_3)$$
$$=20+16=36$$

引理　对网络N 中任一流F和任一割$K=(S,\overline{S})$, 都有

$$\mathrm{Val}F=f^{+}(S)-f^{-}(\overline{S})$$

事实上这定理的意思是流 Val$F$ 即从x 最后流到y 的流的值是等于从S 流向$\overline{S}$ 流的值减去从$\overline{S}$ 流回S 流的值, 这是很显然。对网络 N 上流F 而言。

若$f(e)=0$ 称边 e 为f – 零

若$f(e)>0$ 称边 e 为f – 正

若$f(e)<c(e)$ 称边e 为f – 未饱和

若$f(e)=c(e)$ 称边e 为f – 饱和

定理 2.1　对网络 N 中任一流F 和任一割K 都有

$$\mathrm{Val}F\leqslant \mathrm{Cap}K$$

且上式等号成立的重要条件是割$K=(S,\overline{S})$ 中每一条都f – 饱和。

该定理的正确性是很显然的。

例如　在图 2.2 所示的网络　$N(F)$ 中的割有

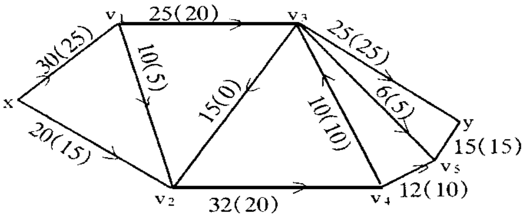


图 2.2

$K_1=\{(x\ v_1)\ (x\ v_2)\}$

$K_2=\{(v_1\ v_3)\ (v_2\ v_4)\}$

$K_3=\{(v_3\ y)\ (v_3\ v_5)\ (v_4\ v_5)\}$

$K_4=\{(v_1\ y)\ (v_5\ y)\}$ 等

且

$\mathrm{Val}F=25+15=40$

$\mathrm{Cap}K_1=30+20=50$

$\mathrm{Cap}K_2=25+32=57$

$\mathrm{Cap}K_3=25+6+12=43$

$\mathrm{Cap}K_4=25+15=40$

因此对于图 2.2 所示的网络流 $N(F)$ 是满足

$$\mathrm{Val}F\leqslant \mathrm{Cap}K$$

若对给定的网络 N 中的割K^{*}, 满足

$$\mathrm{Cap}K^{*} = \min_{k \in N(E)} \{\mathrm{Cap}K\}$$

则称 N^{*} 是网络 N 中的最小割。例上例中 K_4 的最大流和割, 则有

$$\mathrm{Val}F^{*} \leqslant \mathrm{Vap}K$$

使得上式中等号成立的 K 就是最小割。

因此, 有

定理 2.2 若 f^{*} 和 K^{*} 分别是网络 N 的最大流和最小割, 则有

$$\mathrm{Val}F^{*} = \mathrm{Cap}K^{*}$$

这定理就是所谓最大流最小割定理。该定理为后面即将讨论到的"最大流问题"提供了理论依据, 在图论中有着重要地位, 图论中许多有关的问题, 都可以通过适当地选择网络流, 并应用该定理得到解决。

§ 3 最大流问题

对给定的网络 N, 寻求网络 N 一个最大的可行流问题就叫做最大流问题。

例如 图 3.1 所示的网络流 $N(F)$, 现在要求 N 上的流达到最大值, 亦即从 x 流到 y 的总流量最大。

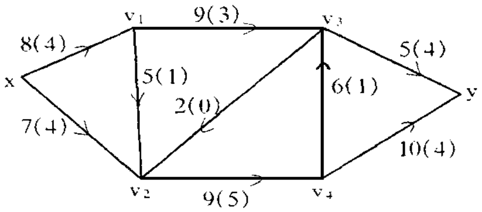


图 3.1

观察网络图可以看到从 x 到 y 共有 4 条有向路

P_1: $x \to v_1 \to v_3 \to y$

P_2: $x \to v_1 \to v_2 \to v_4 \to y$

P_3: $x \to v_2 \to v_4 \to y$

P_4: $x \to v_2 \to v_4 \to v_3 \to y$

而这些有向路却是有向边组成, 根据图 3.1 所示可知所有有向边均未饱和, 由不饱和有向边(至少一条) 组成的有向路称为未饱和路: f – 未饱和路。如果, 有向路的每一条有向边都饱和的, 则称为 f – 饱和路。上面的 P_1, P_2, P_3 和 P_4 均未饱和, 因此, 可以进行增流, 以使由发点 x 流向收点 y 的流量达到最大, 观察图 3.1 的网络流可知最小割为

$$K^{*} = \{(v_2 v_4)(v_3 y)\}$$

而且

$$\mathrm{Cap}K^{*} = 9 + 5 = 14$$

根据定理 2.2, 该网络的最大流就等于最小割的值, 即 14, 而现在从 x 流向 y 的总流量为 8, 因此还可以在网络上增加流 6, 最后经过增加和调整, 可得最大流的网络如图 3.2 中的 $N(F^{*})$, 可知该网络的最大流 F^{*} 的值为 14(等于该网络最小割的值), 其中 $(v_2 v_4)$, $(v_3 y)$ 都已经达到饱和, 也就是不能再增加了。

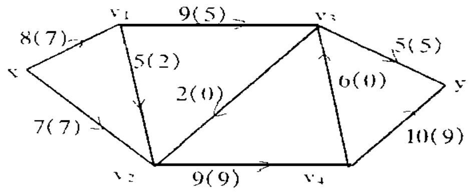
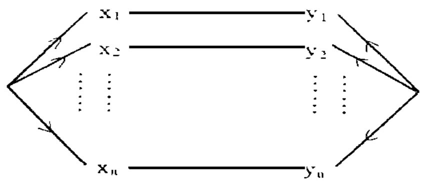


图 3.2 N(F*)



最后必须指出, 如果网络的发点和收点都是多个的情况(如上图所示), 这时不妨设发点有 $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$, 而收点有 $y_1, y_2, y_3 \cdots\cdots y_m$, 对于这要的网络可以通过引进两个顶点 x 和 y, 连接 $(x\ x_1)$, $(x\ x_2)$ $\cdots\cdots$ $(y_1\ y)$, $(y_2\ y)$ $\cdots\cdots$ $(y_m\ y)$ 并且假定这些边的容量为 $+\infty$, 这样便化为一个发点与一个收点的网络流问题, 例如, 图 3.3 所示的网络流 $N(F)$, 试求其最大流

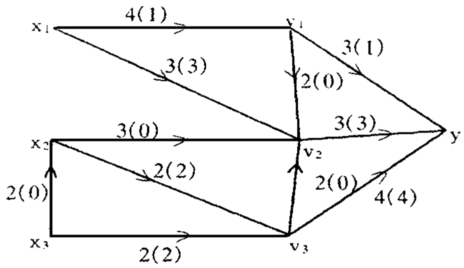


图 3.3 N(f)

该图所示的网络 $N(f)$ 是三个发点 x_1, x_2, x_3 和一个收点 y, 为此引进辅助点 x, 并连接 $(x\ x_1)$, $(x\ x_2)$, $(x\ x_3)$ 可得只有一个发点 x 和一个收点 y 的网络流图 $N(f)$, 如图 3.4 所示

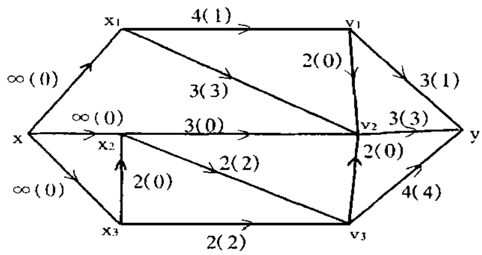


图 3.4 N′(f)

为了求最大流, 考虑到原来发点 x_1, x_2, x_3 发出来的流分别为 4, 2 和 2, 便把$(x\ x_1)$, $(x\ x_2)$ 和$(x\ x_3)$ 各边的流分别定为 4, 2 和 2, 如图 3. 5 中所示的 $N''(f)$:

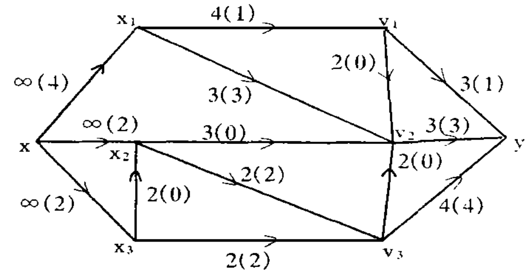


图 3. 5 N″(f)

现在用寻找可增路的方法或且说得详细些是在网络流图 $N''(f)$ 中寻找一条从发点 x 到出点 y 的有向路 P。如果 P 上的至少一条边未饱和则称为 f 一未饱和路, 此时可以通过修改 f 一未饱和路上未饱和边上的流, 这样的路, 也叫做 f 一可增路。

观察图 3. 5 所示的网络流图发现, 例如

$$P = (x\ x_2\ v_2\ x_1\ y)$$

是一条 f 一可增路, (在图 3. 5 中粗线所示) 而且, 这条可增广路是由五条边组成的, 而

$$(x\ x_2), (x_2\ v_2), (v_2\ x_1), (x_1\ v_1), (v_1\ y)$$

其中除了$(v_2\ x_1)$ 是反向边外, 其他的都是顺向边, 各条边未饱和值分别为:

$$c(x\ x_2) - f(x\ x_2) = \infty - 2$$

$$c(x_2\ v_2) - f(x_2\ v_2) = 3 - 0 = 3$$

$$c(x_1\ v_1) - f(x_1\ v_1) = 4 - 1 = 3$$

$$c(v_1\ y) - f(v_1\ y) = 3 - 1 = 2$$

取

$$\varepsilon(P) = \min\{\infty - 2, 3 - 0, 4 - 1, 3 - 1\} = 2$$

于是, 对图 3. 5 所示的网络 $N''(f)'$ 的路 P 进行调整, 使每一顺向边增加流值 $\varepsilon(P) = 2$, 而每一反向边减去 $\varepsilon(P) = 2$, 其他边不变, 修改后的网络流图为

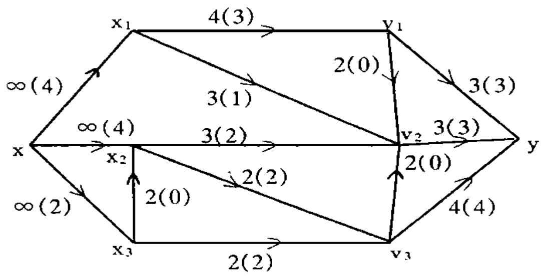


图 3. 6 N(f*)

注意到$(v_1 y)$, $(v_2 y)$ 和$(v_3 y)$ 均已饱和, 所以图 3. 6 所示的 $N(f^*)$ 中流就是最大流(f^*) 且流量为

$$\mathrm{Val}(f^*) = 3 + 3 + 4 = 10$$

如果去掉辅助点 x, 最后得最大流图为:

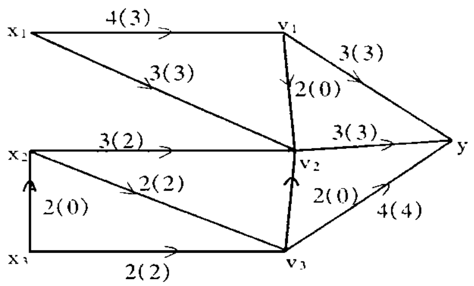


图 3. 7 N(f*)

§ 4 最优化原则

最优化原则是动态规划中, 要做出最优决策所要遵循的原则, 现在采用网络这个工具来描述最优化决策的过程, 实质上化为在网络上求有向最短路的问题, 下面结合具体例子说明在已知网络上求有向最短路的方法与步骤。

例如 图 4. 1 所示的网络 N 要求它的最短路, 不能用无向图求最短路的方法来处理, 而是采取从终点逐步向后逆推的方法, 逐点确定出到达终点的最短路, 直到出发点也确定出到达终点的最短路为止, 问题也就解决, 下面以图 4. 1 所示的网络 N 为例, 求其从 A 到 G 的最短路:

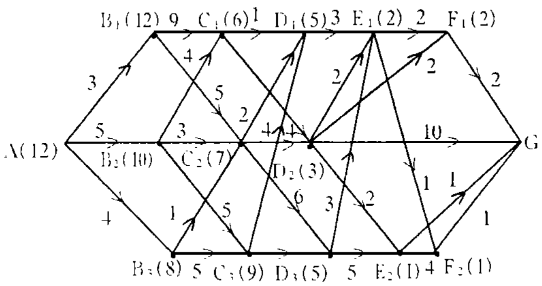


图 4. 1

1° 首先考虑与终点 G 最近的两个点(F_1 和 F_2, 它们都只有唯一条路通向 G, 即 F_1 经过$(F_1\ G)$ 到达 G 且路程长为 2, 那末在图 4. 1 中网络中顶点 F_1 的右边括号内写上 2, 以表示该点到 G 的最短路程。同时, F_2 经过$(F_2\ G)$ 到达 G, 且路程长为 1, 于是在顶点 F_2 的右边括号内写上 1, 以表示该点到达到 G 的最短路程。

2° 考虑 E_1 和 E_2

E_1 到达终点 G 有两条路 即

$E_1 \rightarrow F_1 \rightarrow G$ 路程长为 4

$E_1 \rightarrow F_2 \rightarrow G$ 路程长为 2

于是 E_1 到达 G 的最短路路程长为 2, 便在图中的 E_1 右边括号内写上 2

同理可求 E_2 到达 G 的最短路为 1, 在 E_2 后面括号内写上 1

3 考虑 D_1, D_2 和 D_3

现在, 只要考虑这三点到 E_1 和 E_2 的有向路的情况就行了, D_1 只有唯一条路到达 E_1, 于为便在 D_1 右边括号内写上 3+ 2 = 5

D_2 通向 E_1 有一条, 通向 E_2 有一条, 长度都是 2, 但是 E_1 和 E_2 根据括号内数字可知它们到达 G 的最短路程分别为 2 和 1, 这样 D_2 应选择路线:

$$D_2 \to E_2 \to G$$

为最短路线, 且路程长为 2+ 1 = 3

同样方法, 可求得 D_3 到达 G 的最短路程为 $D_3 \to E_1 \to G_1$, 且路程长为 3+ 2 = 5

4 考虑 C_1, C_2 和 C_3

现在, 以 $D_1(5)$, $D_2(3)$ 和 $D_3(5)$ 为基础, 便可确定 C_1, C_2 和 C_3 到 D_3 终点 G 的最短路

$C_1 \to D_1$ 且记 $C_1(6)$

$C_2 \to D_2$ 且记 $C_2(7)$

$C_3 \to D_1$ 且记 $C_3(9)$

5 以 C_1, C_2, C_3 为基础确定 B_1, B_2, B_3 的最短路和长度用类似 4 的方法可得

$B_1 \to C_2$ 且记 $B_1(12)$

$B_2 \to C_1$ 且记 $B_2(10)$

$B_3 \to C_2$ 且记 $B_3(8)$

6 以 B_1, B_2, B_3 为基础确定 A 的最短路与长度为

$A \to B_3$ 且 $A(12)$

最后可得由 A 到 G 的最短路为

$$A \to B_3 \to C_2 \to D_2 \to E_2 \to G$$

且最短路程长为 12

最后结果表示为图 4. 2 所示的图中用粗线表示的就是所要求的从 A 到 G 的最短路。

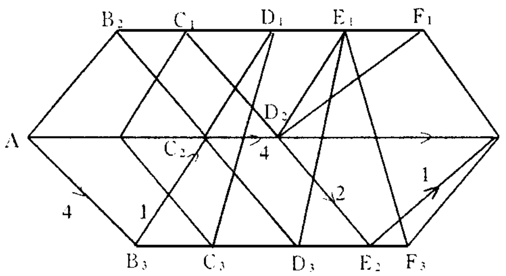


图 4. 2

上述求解的过程可以归结为从终点往始点方向倒推, 逐点确定到达终点的最短路。在网络图不很复杂的情况下, 也可以直接在网络图上进行, 具体方法是: 从终点倒推求出每顶点到达终点的最短路的长, 并把该点到达终点的最短路长, 标记在该顶点右边括号内, 直到始点为止。

例如, 在图 4. 3 所示的网络图 N 中, 试求从始点 A 到终点 M 的最短路线。

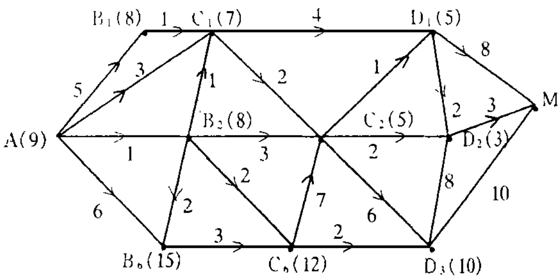


图 4. 3 N

首先, 从终点 M 倒推顶点 D_1, D_2 和 D_3, 根据网络图中每条边上的数字表示该边的长度可得 D_1, D_2 和 D_3 到达终点 M 的最短路长分别为 5, 3 和 10, 于是在 D_1, D_2 和 D_3 的右边括号内写上以上数字, 在图 9. 15 中, 顶点 D_1 记为 $D_1(5)$, 顶点 D_2 记为 $D_2(3)$, 顶点 D_3 记为 $D_3(10)$。

然后, 最确定 C_1, C_2 和 C_3, 类推至始点 A 得 A 到终点 M 的最短路长为 9, 并记 A 为 $A(9)$, 这也就是所要求的最短路长, 而最短路用粗体线表示, 即

$$A \to B_2 \to C_1 \to C_2 \to D_2 \to M$$

$$\text{或 } A \to B_2 \to C_2 \to D_2 \to M$$

网络图中求从始点到终点的最短路问题。在具体问题时, 也可以是最小费用问题, 因为, 如果把每边长理解为“ 费用”, 那末, 从始点到终点的最短路就可以理解为最小费用或最低消耗等问题, 因此有它实际的应用意义。

参考文献:

1. 楼世博等. 图论及其应用〔M〕. 人民邮电出版社, 1982, 7.

2. 王朝瑞. 图论〔M〕. 人民教育出版社, 1982, 7.

3. 林履端. 笔画与图论〔M〕. 闽新书(99) 内书刊第 123 号, 1999, 3.