• 计算机应用 •

组合优化中整数规划的数论解法

李炯城[1]， 鲍江宏[2]

(1. 广东省电信规划设计院有限公司信息系统研究院，广东 广州 510630；
2. 华南理工大学 数学科学学院，广东 广州 510641)

摘 要：整数规划属于计算机组合优化中的重要方法。目前求解整数规划的方法主要有割平面法和分枝定界法。前者往往收敛很慢甚至不收敛，后者不适用自变量较多的问题。从一种全新的视角出发，使用数论中的不定方程理论，来提出一种高效的整数规划新解法。该方法先把目标函数可能取的整数值k添加作一个新的约束条件，然后让k依次增大。使用不定方程理论，并结合自变量的取值范围，该方法能迅速发现没有意义的k，从而大大减少计算量。该方法还不用求解整数规划相应的松弛线性规划问题。因此这种基于数论的整数规划解法速度很快，是一种较有前途的方法。最后针对典型的问题给出算例进行分析验证。

关键词：组合优化；整数规划；线性规划；数论；不定方程

中图法分类号：TP301.6 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-7024 (2009) 05-1276-03

New method based on number theory for integer programming of combinatorial optimization

LI Jiong-cheng[1], BAO Jiang-hong[2]

(1. Information System Research Institute, Guangdong Planning and Designing Institute of Telecommunications Limited Company, Guangzhou 510630, China; 2. School of Mathematical Sciences, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract：Integer programming is most important method of computer combinatorial optimization. The prime methods for integer programming are the cutting plane method and the branch-and-bound method. The former converges rather slowly, even does not converge. The latter is not competent for the situations where there exist many variables. Having taken a novel view into account, a new efficient method for integer programming is proposed in this work, on the basis of indeterminate equation of number theory. The value k of objective function is considered as a new constraint, then it is increased gradually. Using the indeterminate equation theory and taking the domain of variables into account, the new method could fast find the unmeaning k, so that it could decrease a larger amount of calculation. It is not required to solve the associated linear programming relaxation of an integer programming in the new method. Consequently, the method is rather fast and promising. Finally, a classical example is used for analysis and test.

Key words：combinatorial optimization; integer programming; linear programming; number theory; indeterminate equation

0 引 言

整数规划属于计算机组合优化中的重要方法。在工程应用和基础理论研究中，很多问题都可以归结为整数规划(integer programming，IP)问题，如著名的背包问题、集合划分问题等。整数规划是线性规划(linear programming，LP)的一种特殊形式。对线性规划的求解，目前主要是使用单纯型法。这是一种指数型算法，随着自变量的增加计算量迅速增加。对于整数规划，目前还没有找到任何多项式算法，属于“NP 难”问题。甚至对于寻找整数规划可行解都还没有多项式的算法[1]。

单纯型法的基本思路是探索可行域的边界节点，每步找出目标函数值更优的节点，最终得到最优的节点。但是，LP的最优解往往不是相应的IP问题的最优解，相应的IP问题甚至根本没有可行解。因此，单纯型法对于IP问题无法直接应用。目前常用的IP求解算法基本分两大类：割平面法和分枝定界法。割平面法往往存在收敛速度慢，甚至不收敛的问题；而分枝定界法属于一种隐含枚举法，对于自变量较多的情况，会存在“组合爆炸”的问题，难以适用。此外，近些年来，还出现一些智能算法，如文献[2]。但智能算法往往无法保证它的收敛性。本文从一种全新的视角出发，使用数论中的不定方程理论，来提出一种高效的整数规划新解法。

整数规划问题(IP)通常表示如下

收稿日期：2008-03-28 **E-mail**：majhbao@scut.edu.cn

作者简介：李炯城 (1972－)，男，广东台山人，博士，CCF 高级会员，研究方向为最优化算法、数学物理方程； 鲍江宏 (1971－)，女，四川达县人，博士研究生，讲师，研究方向为最优化算法、微分方程与动力系统。

$$\min_x f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^T \mathrm{x}, \text{或} \max_x f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^T \mathrm{x}, \mathrm{x} \in R^n$$
$$\text{s.t.} \quad \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b} \tag{1}$$
$$x_i \geq 0, \text{并且是整数}$$

其中，$s.t.$代表约束条件。通过必要的变换，总能使得A是m行n列的矩阵，其元素全是非负整数；b是m维列向量，其元素全是非负整数；x与c都是n维列向量，其元素全是非负整数。去除x的整数约束，就得到相应的松弛线性规划问题(LP)。

1　算法思路

为了简单起见，以下以二维变量的问题为例说明算法的思路。但本算法完全适用于任何维数的IP问题。后面还会说明如何应用到大于二维的情况。

$$\min_x f(x_1,x_2) = c_1x_1+c_2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \quad b_2 \end{cases} \tag{2}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{并且都是整数}$$

由于约束条件的限制，x的取值是有上界的，而且x的非负要求也界定了x的取值的下界。此外，c也是非负的。由此，一些学者注意到函数f的取值只能是某个范围内的整数，记为$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$。

因此，他们添加一个约束到原整数规划问题，从而缩小x的可行域，减少计算量，以提高计算速度，如下

$$\min_x f(x_1,x_2) = c_1x_1+c_2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} c_1x_1+c_2x_2 = k \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \quad b_2 \end{cases} \tag{3}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{并且都是整数}$$
$$k \in [f_{\min}, f_{\max}], \text{并且是整数}$$

这相当于把可行域缩小到可行域与(超)平面$c_1x_1+c_2x_2=k$的相交处。然后，让k从$f_{\min}$向$f_{\max}$取整数值(对于$\max_x f(\mathrm{x})$问题则从$f_{\max}$向$f_{\min}$取值)。再用单纯型法求解对于每个k产生的以上问题的松弛LP问题。一旦求解出一个全部分量都是整数的最优解x，则这个x也就是原IP问题的最优解。若所有k产生的松弛LP问题的最优解都没有出现分量全是整数的情况，则表示原IP问题无解。

这种方法对于$f_{\min}$与$f_{\max}$很接近的情况，还算有效，往往要比割平面法和分枝定界法快些。但是，现实问题中，经常是$f_{\min}$与$f_{\max}$离得很远，导致k要取很多值，从而需要求解很多LP问题。加上LP的求解是比较耗费时间的，导致这种方法在很多现实的问题中难以应用。

跳出传统方法，从数论的角度来重新审视整数规划问题。去除x的非负要求，但保留x的整数要求，则$c_1x_1+c_2x_2=k$其实就是数论里面的一次不定方程。虽然c_1、c_2、k都是整数，但注意不是任何一次不定方程都有整数解，如$18x_1+24x_2=9$就没有整数解。因此当k从$f_{\min}$向$f_{\max}$取值时候，很多$c_1x_1+c_2x_2=k$是无整数解的，即这种k是没有意义的，此时根本不应耗时去求解相应的LP问题。如果考虑约束条件对x的取值范围的限制，会发现更多的$c_1x_1+c_2x_2=k$是无整数解的。本文提出的方法不但可以迅速发现没有意义的k，而且还不用求解任何LP问题。因此这种基于数论的整数规划解法速度相当快，是一种较有前途的方法。

2　算法分析与详述

采用数论的常用记号，记(c_1,c_2)为c_1和c_2的最大公约数，但注意不要与$\min_x f(x_1,x_2)$中的小括号混淆，那里代表函数f的参数。注意到$\min_x f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$与$\min_x f(x_1,x_2)=\frac{c_1}{(c_1,c_2)}x_1+\frac{c_2}{(c_1,c_2)}x_2$的最优解是完全相同的。但后者能使得$f_{\min}$与$f_{\max}$更接近，从而去除大量没有意义的$k$。把这一步称预处理。不失一般性，把$\frac{c_1}{(c_1,c_2)}$和$\frac{c_2}{(c_1,c_2)}$仍然记为$c_1$和$c_2$，但此时$(c_1,c_2)=1$，即互为质数。

定理1　$c_1x_1+c_2x_2=k$有整数解的充分必要条件为$(c_1,c_2)\mid k$，即c_1和c_2的最大公约数能整除k。

证明：(略，见[3])

因此，经过预处理后，在不考虑x的取值范围时，$c_1x_1+c_2x_2=k$总是有整数解。可见预处理可以有效地过滤掉明显没有意义的k值。但正如前面所述，约束条件给x的取值范围加上了限制，因此还存在导致x超出取值范围的k值。如何去除这些k值，是以下的研究重点。称式(4)的问题为带约束的一次不定方程

$$c_1x_1+c_2x_2=k \qquad (\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2) \tag{4}$$

为把x的取值范围考虑进去，我们需要对数论中求解一次不定方程的方法进行扩展。

引理1　$c_1x_1+c_2x_2=k$若有整数解，记$\tilde{x}_1$和$\tilde{x}_2$是任一解，则通解为

$$x_1=\tilde{x}_1-\frac{c_2}{(c_1,c_2)}t=\tilde{x}_1-c_2t$$
$$x_2=\tilde{x}_2-\frac{c_1}{(c_1,c_2)}t=\tilde{x}_2+c_1t \tag{5}$$
$$t=0,\pm1,\pm2\cdots$$

证明：

$$c_1\left[\tilde{x}_1-\frac{c_2}{(c_1,c_2)}t\right]+c_2\left[\tilde{x}_2+\frac{c_1}{(c_1,c_2)}t\right]=c_1\tilde{x}_1-\frac{c_1c_2}{(c_1,c_2)}t+c_2\tilde{x}_2+\frac{c_1c_2}{(c_1,c_2)}t=c_1\tilde{x}_1+c_2\tilde{x}_2=k \tag{6}$$

并注意到$(c_1,c_2)=1$，得证。

此外，因为$(c_1,c_2)=1$，利用辗转相除法[3]，总能找到两个整数u和v，满足

$$c_1u+c_2v=1 \tag{7}$$

根据引理2，就能算出带约束的一次不定方程通解的t的取值范围，如下：

定理2　$c_1x_1+c_2x_2=k$，其中$\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2$的通解为

$$x_1=uk-c_2t \qquad x_2=vk+c_1t \tag{8}$$

t的取值范围为：$\max(t_2,t_3) \leq t \leq \min(t_1,t_4)$中的整数，其中

$$t_1=\left\lfloor\frac{uk-\alpha_1}{c_2}\right\rfloor, t_2=\left\lceil\frac{uk-\beta_1}{c_2}\right\rceil, t_3=\left\lceil\frac{\alpha_2-vk}{c_1}\right\rceil, t_4=\left\lfloor\frac{\beta_2-vk}{c_1}\right\rfloor \tag{9}$$

其中：$\lceil\cdot\rceil$——向上取整，$\lfloor\cdot\rfloor$——向下取整。

证明：在式(7)的两边乘以k，得到$c_1(uk)+c_2(vk)=k$。这意味着$\tilde{x}_1=uk$和$\tilde{x}_2=vk$是一个解。根据引理2，得到$x_1=uk-c_2t, x_2=vk+c_1t$。

因为$\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$，所以$uk-c_2t \geq \alpha_1$和$uk-c_2t \leq \beta_1$。从而得到：$t \leq \frac{uk-\alpha_1}{c_2}$，注意到$t$为整数，就有$t \leq t_1$。$t \geq \frac{uk-\beta_1}{c_2}$，注意到$t$为整

数，就有$t \geq t_2$。

因为$\alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2$，所以$vk+c_1t \geq \alpha_2$和$vk+c_1t \geq \beta_2$。从而得到：$t \geq \frac{\alpha_2 - vk}{c_1}$，注意到$t$为整数，就有$t \geq t_3$。$t \leq \frac{\beta_2 - vk}{c_1}$，注意到$t$为整数，就有$t \leq t_4$。

所以，t的取值范围为：$\max(t_2,t_3) \leq t \leq \min(t_1,t_4)$的整数。

当然，若$\max(t_2,t_3)$比$\min(t_1,t_4)$还大，就意味着式(4)没有整数解。这时的k是没有意义的。结合以上分析，给出我们的算法流程图，如图1所示。

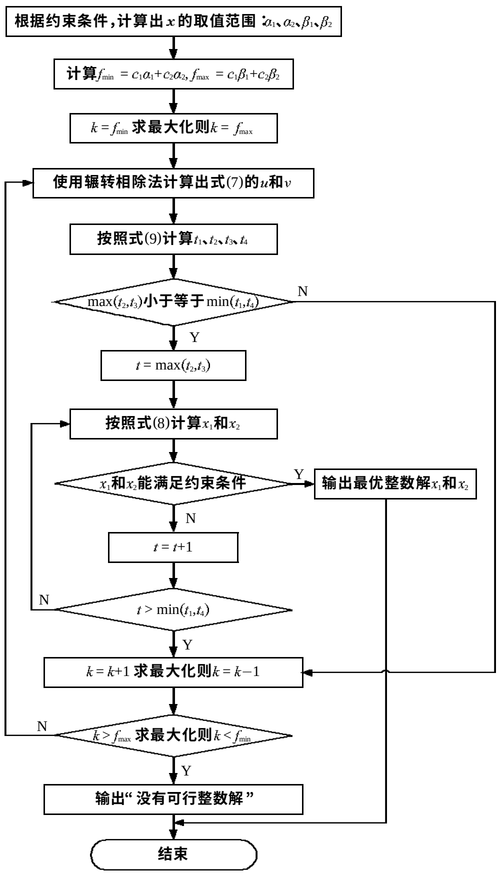

图1　算法流程

对于问题维数大于二的情况（设为n维），只是需要改变(c_1,c_2)为$(c_1,c_2,\cdots c_n)$。其实，数论中有一个递归的方法来求出多于两个数时候的最大公约数[4-5]。计算的方法如下

$$(a_1,a_2,\cdots a_n) = ((a_1,a_2,\cdots a_{n-1}),a_n) \tag{10}$$

3　算　例

$$\max_x f(x_1,x_2) = 40x_1+90x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 9x_1+7x_2 \quad 56 \\ 7x_1+20x_2 \quad 70 \end{cases} \tag{11}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$，并且都是整数

这个例子被用于许多教科书[6-7]和文献[8]，来作为测试整数规划算法的典型例子。首先，作预处理。因为(40,90)=10，处理后有：$f(x_1,x_2) = 40x_1+90x_2$。

由约束条件可得到x_1和x_2的上限如下

$$\beta_1 = \left\lfloor \min\left(\frac{56}{9},\frac{70}{7}\right)\right\rfloor = 6,\ \beta_2 = \left\lfloor \min\left(\frac{56}{7},\frac{70}{20}\right)\right\rfloor = 3 \tag{12}$$

x_1和x_2的下限α_1和α_2显然是0。因此

$$f_{\max} = 4\times 6+9\times 3 = 51,\ f_{\min} = 4\times 0+9\times 0 = 0 \tag{13}$$

根据辗转相除法算出满足式(7)的$u = -2$和$v = 1$。

然后按照以上的算法计算，当算到$k = 34$时候，就发现了最优解。计算过程见表1(没有意义的k不列出)。

表1　计算过程

k	t_1、t_2、t_3、t_4	$x = \{x_1,x_2\}'$	x是否满足约束条件
51	−12、−12、−12、−12	6,3	否
47	−11、−11、−11、−11	5,3	否
43	−10、−10、−10、−10	4,3	否
42	−10、−10、−10、−10	6,2	否
39	−9、−9、−9、−9	3,3	否
38	−9、−9、−9、−9	5,2	否
35	−8、−8、−8、−8	2,3	否
34	−8、−8、−8、−8	4,2	是

可见，仅仅需要简单验证8次约束条件，就能找到这个整数规划问题的最优解，更重要的是不需要求解任何相应的LP问题。然而，文献[6,7]中，使用分枝定界法，单单求解LP问题就要进行7次，而每次LP的求解都要计算很多的步骤，尤其当变量个数较多时，算法的计算量呈指数递增。可见，本文提出的方法在数论不定方程理论的帮助下，具有传统的整数规划求解方法不可比拟的优势。

4　结束语

本文研究了计算机组合优化领域中整数规划的新颖高效求解方法。没有沿用传统的方法，而是从一种全新的视角出发，使用数论中的不定方程理论，来提出一种高效的整数规划新解法。本文的方法还不用求解整数规划相应的松弛线性规划问题。因此这种基于数论的整数规划解法速度很快，是一种较有前途的方法。跳出传统的思路，把代数里面的数论和分析里面的最优化这两个看似毫无相关的学科结合起来，应用到计算机的组合优化领域，取得了意想不到的效果。

参考文献:

[1] Fischetti M,Glover F,Lodi A.The feasibility pump[J].Mathematical Programming, 2005,104:91-104.

[2] 刘建芹,贺毅朝,顾茜茜.基于离散微粒群算法求解背包问题研究[J].计算机工程与设计,2007,28(13):3189-3191.

[3] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].3版.北京:高等教育出版社,2003:10,24-47.

[4] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1957:8.

[5] 《数学百科全书》编译委员会.数学百科全书[M].2卷.北京:科学出版社,1994:769.

[6] 姚恩瑜,何勇,陈仕平.数学规划与组合优化[M].杭州:浙江大学出版社,2001:71-73.

[7] 《运筹学》教材编写组.运筹学[M].3版.北京:清华大学出版社,2005:116-117.

[8] GAO Pei-wang,CAI Ying.A new heuristic algorithm for general integer linear programming problems[J].J Chongqing Univ Eng Ed,2006,5(3):170-174.