Linjär Algebra
Föreläsning 7

Erik Sjöström

November 19, 2015

1 Linjära avbildningar (forts)

Kom ihåg:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{och} \qquad f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

Låt:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

vara två linjära avbildningar och:

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \qquad g(\vec{x}) = \mathbf{B} \cdot \vec{x}$$

Då gäller för $f + g$ att:

$$f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{B} \cdot \vec{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \vec{x}$$

$(f + g)$ är också linjär avbildning med standardmatris $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
För $c \cdot f$ där $c \in \mathbb{R}$ gäller:

$$c \cdot f(\vec{x}) = c \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = (c \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{x}$$

dvs $(c \cdot f)$ är också en linjär avbildning med standardmatris $(c \cdot \mathbf{A})$
Låt

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

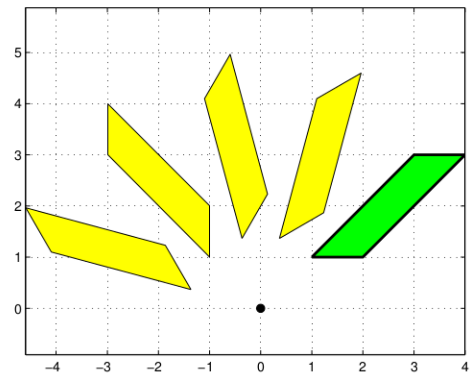
vara två linjära avbildningar med standardmatriser, $\mathbf{A}_{p \times n}$ repektive $\mathbf{B}_{m \times p}$
Då gäller för den sammansatta avbildningen:

$$g(f(\vec{x})) = g(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{x}$$

dvs en linjär avbildning med standardmatris $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$

Anmärkning 1.
Den sammansatta funktionen $g(f(\vec{x}))$ skrivs vanligtvis som $g \circ f(\vec{x})$

Exempel 1.1.
Rotation



Grönt område beskrivs av hörnen:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *och* $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ *där:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix}$$

Hörnpunkten i 1:a gula 4-hörningen ges av:

$$\vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_1, \qquad \vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_2, \qquad \vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_3, \qquad \vec{y}_4 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_4$$

Hörnpunkterna för den andra gula 4-hörningen fås genom att rotera bilderna $\vec{y}_1 \cdots \vec{y}_4$

$$A \cdot \vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_1), \quad A \cdot \vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_2), \quad A \cdot \vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_3), \quad A \cdot \vec{y}_4 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_4)$$

Vi har alltså en sammansatt avbildning $f(f(\vec{x}))$

Exempel 1.2.
Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildninger $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *som först roterar* $(\pi/6)$ *radianer moturs och sedan projiceras ortogonal på x-axeln.*

$$\textit{Rotationen: } f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\textit{Projektionen: } g(\vec{x}) = \mathbf{B} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} g(\vec{e}_x) & g(\vec{e}_y) \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{e}_x & \emptyset \end{bmatrix}}^{\textit{projektion på } x} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Så om vi först roterar och sedan projicerar får vi:

$$g(f(\vec{x})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Om vi istället först projicerar och sedan roterar får vi:

$$f(g(\vec{x})) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & 0 \\ \sin(\pi/6) & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Vi kan alltså se att ordningen spelar roll:

$$f(g(\vec{x})) \neq g(f(\vec{x}))$$

De har alltså olika sandardmatriser, detta kommer från räknereglerna för matriser:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2 Invertering

En avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

kallas inverterbar om det finns en linjär avbildning:

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sådan att:

$$\begin{cases} g(f(\vec{x})) = \vec{x} \\ \\ f(g(\vec{x})) = \vec{x} \end{cases} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

g kallas då för inversen till f och betecknas f^{-1}
Om f har standardmatrisen $\mathbf{A}$ ($f(\vec{x} = \mathbf{A} \cdot \vec{x})$ så är f inverterbar om $\mathbf{A}$ är inverterbar, då har $g = f^{-1}$ standardmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$ ($g(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{x}$)

Exempel 2.1.
Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen motsols med vinkeln θ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Inversen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

där d är determinanten av $\boldsymbol{A}$:

$$d = det(\mathbf{A}) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - (-\sin(\theta) \cdot \sin(\theta)) = \cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

Genom att uttrycka:

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

får vi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

dvs: En rotation $-\theta$ moturs
dvs: Rotation θ medurs
En rotation moturs med vinkeln θ följt av en rotation medurs med vinkeln θ gör att vi är tillbaka där vi startade. dvs: $\boldsymbol{A}$ och $\mathbf{A}^{-1}$ är inverser.

3 Translation

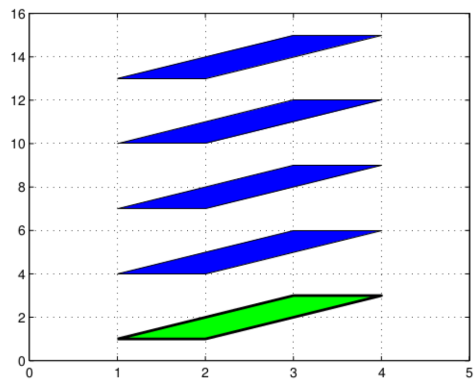
En translation:

$$t_b : \vec{x} + \vec{t} \qquad\qquad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$t_b(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t}$$

är alltså själva förflyttningen.

Exempel 3.1.
Translation



Grönt område beskrivs av hörnen:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hörnen translateras genom att addera $\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
dvs: $\vec{x}_1$ har translateras till:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

och $\vec{x}_2$ till:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

osv.

4 Affin avbildning

En affin avbildning är sammansattning av en linjär avbildning och en translation t_b
Låt:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

En affin avbildning:

$$t_b(g(\vec{x})) = t_b(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \cdot \vec{t}$$

Exempel 4.1.
Man kan alltid göra om en affin avbildning till en linjär avbildning:
Låt:

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{t}$$

vara en affin avbildning i planet, med:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Vi får då:

$$\begin{aligned} f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + t_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + t_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi bildar en linjär avbildning $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med standardamtris:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den är linjär så vi kan skriva:

$$g(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{A}_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs: representera den affina avbildningen i planet med en linjär avbildning i rummet.