Linjär Algebra
Föreläsning 15 - Baser och basbyten

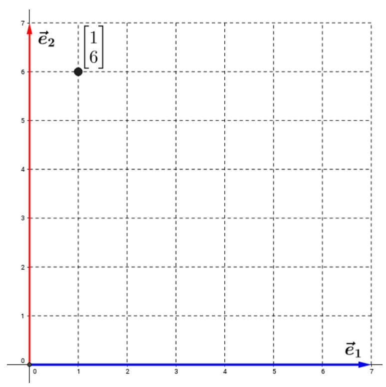
Erik Sjöström

December 3, 2015

1 Basbyte

Exempel 1.1.
Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$*, om vi använder standardbasen* ($\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}r$)*. Så menar vi:*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

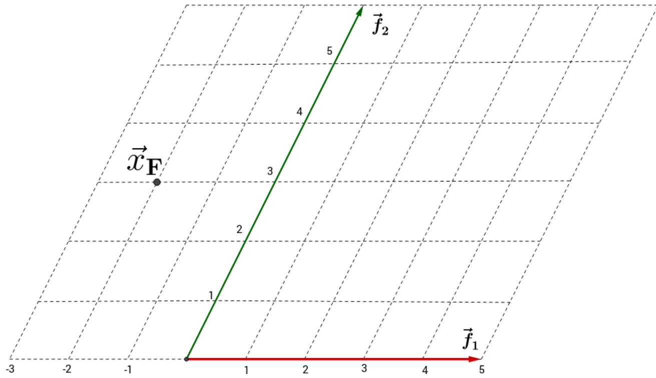


När vi anger en vektor så är det relativt en bas. Byter vi bas så ändras koordinaterna.

Exempel 1.2.
Låt:

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vara en bas i $\mathbb{R}^2$ *Låt* $x_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *vara en punkt uttryckt i* $\boldsymbol{F}$*-basen.*



Bestäm $\vec{x}_{\mathbf{F}}$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\vec{x}_{\mathbf{F}]} = \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{\vec{f}_1} \cdot -2 + \overbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}^{\vec{f}_2} \cdot 3 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 1\\x_2 = 6\end{cases}$$

dvs $\vec{x}_{\mathbf{F}}$ uttryckt i $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ är: $\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$

- *Bestäm $(\vec{e}_2)_{\mathbf{F}}$ (bestäm $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ i basen $\mathbf{F}$)*

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{\vec{e}_1} + 1 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{\vec{e}_2} = x_1 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{\vec{f}_1} + x_2 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}^{\vec{f}_2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -1/2\\x_2 = 1/2\end{cases}$$

Vi har alltså $(\vec{e}_2)_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix}$

Basbyten mellan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ och $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ i $\mathbb{R}^n$ ges a v följande:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & ... & \vec{f}_n\end{bmatrix}}^{\mathbf{F}\text{: basbytesmatris}} \cdot \vec{u}_{\mathbf{F}} = \vec{u}$$

där $\vec{u}_F$ är koordinaterna av $\vec{u}$ i basen $\mathbf{F}$.

2 Räkneregler

$$\mathbf{F} \cdot \vec{u}_{\mathbf{F}} = \vec{u} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{u} = \vec{u}_{\mathbf{F}}$$

$\mathbf{F}$ är inverterbar ty kolumnerna i $\mathbf{F}$ är n stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$

- Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & ... & \vec{f}_n\end{bmatrix}$ och $\mathbf{G} = \begin{bmatrix}\vec{g}_1 & \vec{g}_2 & ... & \vec{g}_n\end{bmatrix}$.

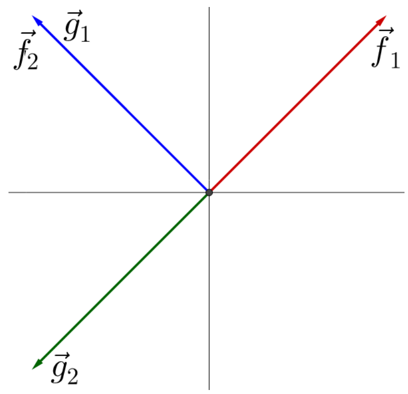
Låt $\vec{x}$ vara en vektor med koordinaten $\vec{x}_{\mathbf{F}}$ i basen $\mathbf{F}$ och $\vec{x}_{\mathbf{G}}$ i basen $\mathbf{G}$, då gäller:

$$\text{Basbytesformeln}: \begin{cases}\mathbf{G} \cdot \vec{x}_{\mathbf{G}} = \mathbf{F} \cdot \vec{x}_{\mathbf{F}}\\ \vec{x}_{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{x}_{\mathbf{F}}\\ \vec{x}_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \vec{x}_{\mathbf{G}}\end{cases}$$

Exempel 2.1.
Låt:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vara två matriser vars kolumner bildar två olika baser i $\mathbb{R}^2$



Antag $\vec{v}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, *bestäm* $\vec{v}_{\mathbf{G}}$

$$\mathbf{F} \cdot \vec{v}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G} \cdot \vec{v}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dvs:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \sim .. \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Dvs:

$$\vec{v}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3 Baser

En bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^n$ om vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ är parvis ortogonala och har längden 1. Dvs:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 \text{ om } i = j \\ 0 \text{ om } i \neq j \end{cases}$$

(om ett antal vektorer är parvis ortogonala så är de linjärt oberoende)

Exempel 3.1.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. Vi ser att:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 & \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 & & \end{array}$$

Exempel 3.2.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *är en bas i $\mathbb{R}^2$ (ty de är ej linjärt oberoende). Men ej en ON-bas, ty:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

4 Isometriska avbildningar

Definition 4.1. *En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ är <u>isometrisk</u> om den bevarar längden. Dvs:*

$$||f(\vec{x})|| = ||\mathbf{A} \cdot \vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Exempel 4.1.
Rotation bevara längden.

Vad innebär det för $\mathbf{A}$ (avbildningsmatrisen) att f är isometriskt?. Låt:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vi har att:

$$||\vec{x}||^2 = \vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2 + ... + \vec{x}_n^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$$

$$\overbrace{||f(\vec{x})||^2}^{\text{Längden av bilden}} = ||\mathbf{A} \cdot \vec{x}||^2 = (\mathbf{A} \cdot \vec{x})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \text{ Matrisvektorproduktregler } = (\vec{x}^T \cdot \mathbf{A}^T) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \overbrace{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \cdot \vec{x}$$

Eftersom $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ är symmetrisk och den ända symmetriska matris som uppfyller villkoret är $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ (identitetsmatrisen) så måste $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Dvs kolumnerna i $\mathbf{A}$ är parvis ortogonala.

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 1 \text{ om } i = j \\ 0 \text{ om } i \neq j \end{cases}$$

En linjär avbildning är isometrisk då avbildningsmatrisens kolumn utgör en ON-bas. En sådan matris kallas för ON-matris.

Exempel 4.2.
Rotation är en isometrisk avbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{x}) = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Eftersom:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Om $\mathbf{A}$ är ON-matris så gäller också att:

$$(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

för $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Dvs den isometriska avbildningen bevarar även vinklar. Vinkeln mellan $f(\vec{x})$ och $f(\vec{y})$ är samma som mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$

Vinkeln i $\mathbb{R}^n$ (rep)

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$

Sats 4.1.
Om $\boldsymbol{A}$ är en ON-matris så är $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$:

Proof. Vill visa att:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \end{cases}$$

Vi vet att:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \end{cases}$$

Så:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \overbrace{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}}^{\mathbf{I}} = \overbrace{\mathbf{C}}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A}$$

□