Linjär Algebra
Föreläsning 6

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Determinanter

En determinant för en matris $\mathbf{A}_{n\times n}$ är en funktion som ordnar ett tal till $\mathbf{A}$.

Definition 1.1. *Determinanten för en* (2×2)*-matris* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$*:*

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{22}$$

Exempel 1.1.

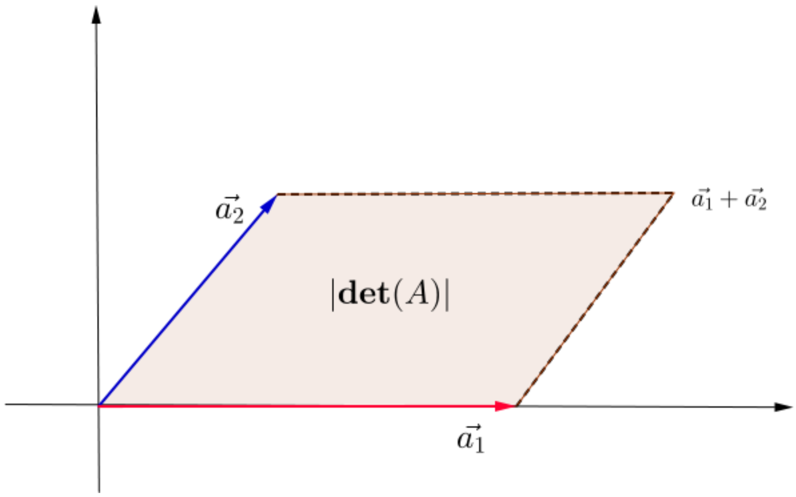
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{det}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$$

Exempel 1.2.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{det}(\mathbf{B}) = 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0$$

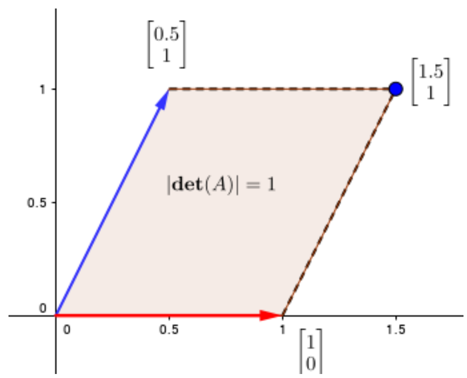
2 Geometrisk tolkning

Sats 2.1.
Låt $\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} \end{bmatrix}$ *där* $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ *är vektorer i* $\mathbb{R}^2$*. Arean av parallellogrammet som spänns upp av* $\vec{a_1}$ *och* $\vec{a_2}$ *ges av* $|\mathbf{det}(\mathbf{A})|$



Exempel 2.1.

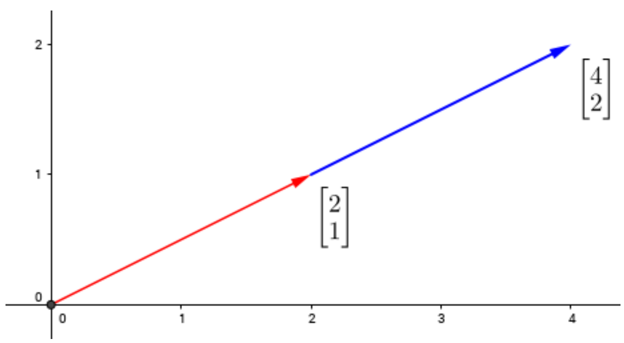
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0.5 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$



Exempel 2.2.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{det}(\mathbf{B}) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

,

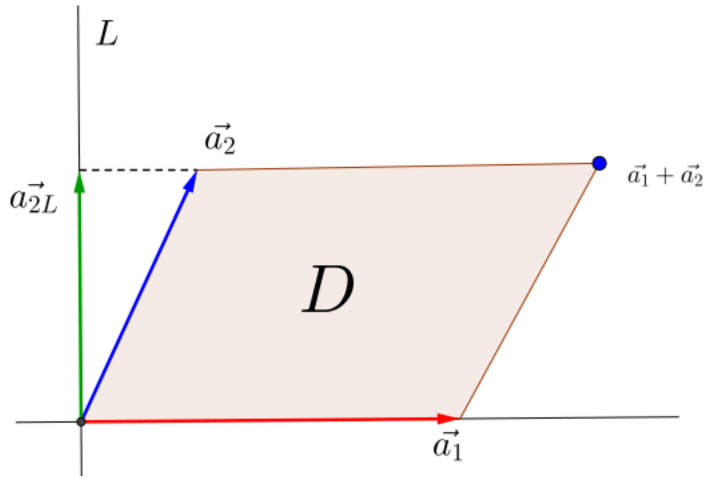


Kolumnvektorerna i $\boldsymbol{B}$ *är pararella:*

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Så arean blir följaktligen noll.

Proof. **Sats 1.1:**



- Inför en linje L ortogonal mot $\vec{a_1}$
  - Riktningsvektor för L: $\vec{v} = \begin{bmatrix}-a_{21}\\a_{11}\end{bmatrix}$

Hur kom vi fram till att $\vec{v} = \begin{bmatrix}-a_{21}\\a_{11}\end{bmatrix}$?

Vi har:

$$a_1 = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$$

Vi vill att:

$$\vec{v} \cdot \vec{a_1} = 0$$

Eftersom då är den ortogonal (definition av skalärprodukt).
Med vårt val av $\vec{v}$ får vi:

$$\vec{v} \cdot \vec{a_1} = -a_{21} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{11} = 0$$

- Låt $\vec{a_{2L}}$ vara den ortogonala projektionen av $\vec{a_2}$ på linjen L

Arean D blir då:

$$\begin{aligned} D = \text{ basen } \cdot \text{ höjden } &= ||\vec{a_1}|| \cdot ||\vec{a_{2L}}|| = ||\vec{a_1}|| \cdot \frac{|\vec{a_2} \cdot \vec{v}|}{||\vec{v}||} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} \cdot \frac{|\vec{a_2} \cdot \vec{v}|}{\sqrt{(-a_{21})^2 + a_{11}^2}} \\ &= |\vec{a_2} \cdot \vec{v}| = |\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-a_{21}\\a_{11}\end{bmatrix}| = |a_{12} \cdot (-a_{21}) + a_{22} \cdot a_{11}| \\ &= |a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}| = |\mathbf{det}(\mathbf{A})| \end{aligned}$$

□

- När blir $\mathbf{det}(\mathbf{A})$: < 0, > 0, och $= 0$?
Vi har från beviset att:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \vec{a_2} \cdot \vec{v}$$

Och detta vet vi (från definitionen av skalärprodukt) är lika med:

$$||\vec{a_2}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\alpha)$$

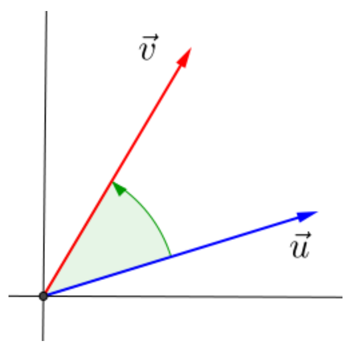
Vi ser då att:

- > 0 om α spetsig
- < 0 om α trubbig
- $= 0$ om $\vec{v}$, $\vec{a_2}$ är ortogonala

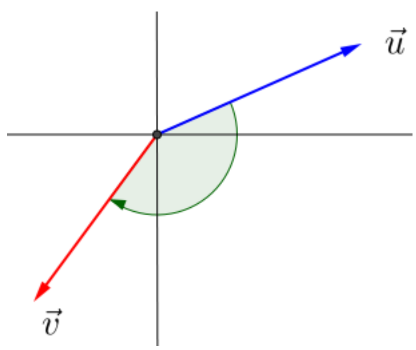
3 Orientering

Två vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ (ej parallella) i $\mathbb{R}^2$ (planet) är högerorienterade om den kortaste vägen att vrida $\vec{u}$ till $\vec{v}$ så att $\vec{u}$ får samma riktning som $\vec{v}$ är moturs, är den kortaste vägen istället medurs så är de vänsterorienterade.

Exempel 3.1.
Högerorienterat:



Vänsterorienterat:



- Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} \end{bmatrix}$ ($\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ vektorer i $\mathbb{R}^2$)
Om ($\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$) är **högerorienterade** så är vinkeln mellan $\vec{a_{2L}}$ och $\vec{a_2}$ **spetsig**, och $\mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$
Om ($\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$) är **vänsterorienterade** så är vinkeln mellan $\vec{a_{2L}}$ och $\vec{a_2}$ **trubbig**, och $\mathbf{det}(\mathbf{A}) < 0$

4 Determinant för (3×3)

Definition 4.1.

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exempel 4.1.
Beräkna:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 1) - 0 \cdot (1 \cdot 5 - (-2) \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3) \\
&= 15 + 12 = 27
\end{aligned}
$$

Exempel 4.2.
Minnesregel för kryssprodukt.
Låt:

$$
\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e_x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e_y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ går då att lösa på detta vis:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{e_x} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{e_y} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{e_z} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e_x} \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) - \vec{e_y} \cdot (u_1 \cdot v_3 - v_1 \cdot u_3) + \vec{e_z} \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) \\
&= \begin{bmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

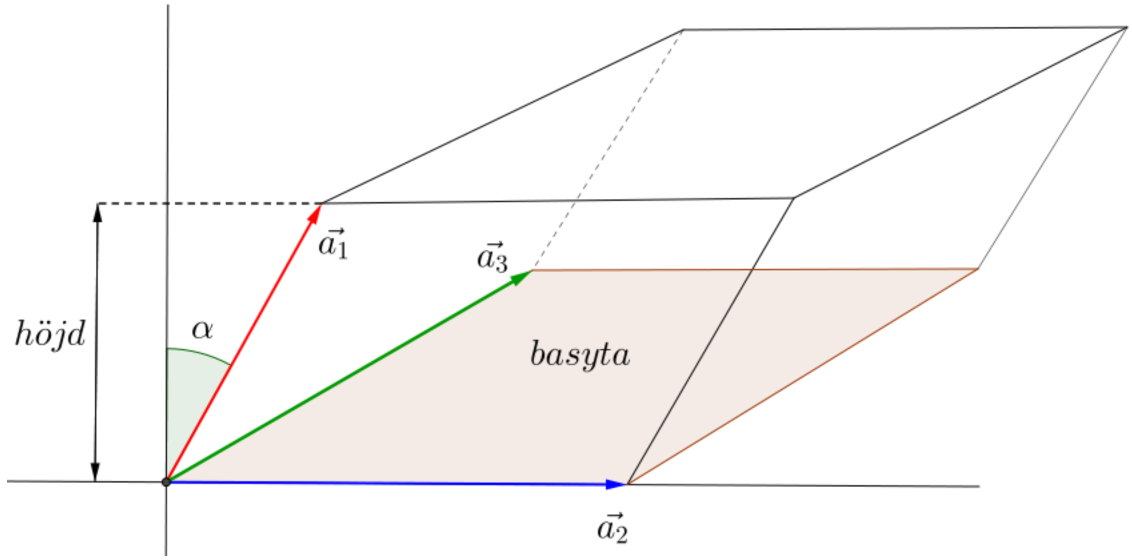
5 Geometrisk tolkning

Volymen av en parallellepiped med kanterna:

$$
\vec{a_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \vec{a_2} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} \qquad \vec{a_3} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}
$$

Ges av absolutbeloppet av:

$$
\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{a_3}) = \mathbf{det}(\begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} \end{bmatrix})
$$



$$\text{Volymen V} = \text{basytan} \;\cdot\; \text{höjden} \; = ||\vec{a_2} \times \vec{a_3}|| \cdot ||\vec{a_1}|| \cdot \cos(\alpha) = \vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{a_3})$$

$$\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{a_3}) = \vec{a_1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \mathbf{det}(\mathbf{A})$$

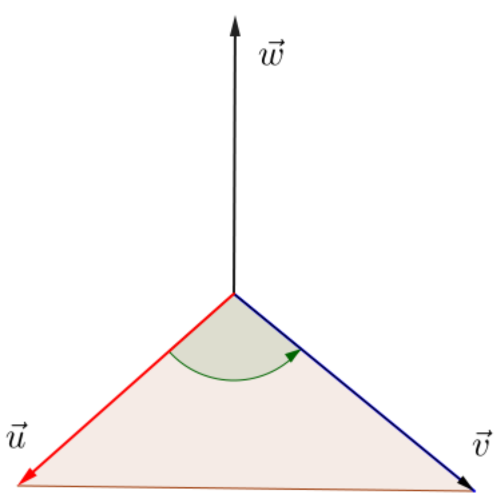
$\mathbf{det}(\mathbf{A}) =$

$$\begin{cases} \text{V om } (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) \text{ är högerorienterade} \\ \text{-V om } (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) \text{ är vänsterorienterade} \end{cases}$$

6 Orientering

Vektortrippeln ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) i den ordningen (i $\mathbb{R}^3$)är högerorienterade om vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är högerorienterade i det plan som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ sedda från spetsen av $\vec{w}$

Exempel 6.1.
Högerorientering:



Exempel 6.2.
Vänsterorienterat: