

Linjär Algebra

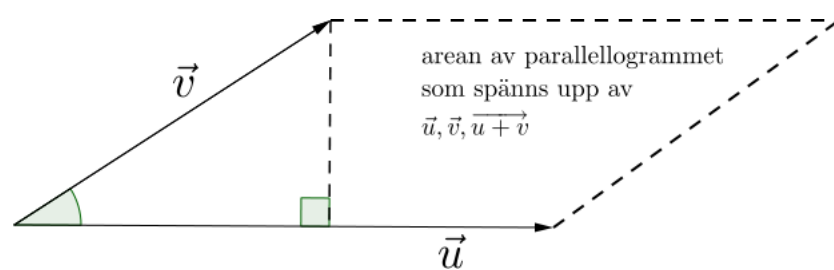
Föreläsning 3

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Mer om kryssprodukten

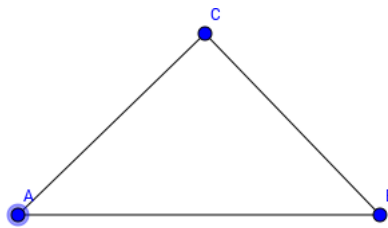
Det gäller också att:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha \quad (1)$$


Exempel 1.1.

Beräkna arean av triangeln med hörn i:

$$A = (1, 1, 0), \quad B = (3, 0, 2), \quad C = (0, -1, 1)$$



Lösning:

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{9+16+25} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

2 Linjer och plan

För att beskriva en linje i \mathbb{R}^2 behövs en skärning med y-axeln (m) och lutningen (k).

$$y = k \cdot x + m \quad \text{Linjens ekvation} \quad (2)$$

För att beskriva ett plan i \mathbb{R}^3 behövs en punkt $p_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]$ i planet och en vektor $\vec{n} = [A \ B \ C]$, ortogonal mot planet.

Varje annan punkt $Q = [x \ y \ z]$ ligger i planet om vektorn $\overrightarrow{P_0Q} \perp \vec{n}$. Dvs att:

$$\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n} = 0$$

Eftersom:

$$\overrightarrow{P_0Q} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

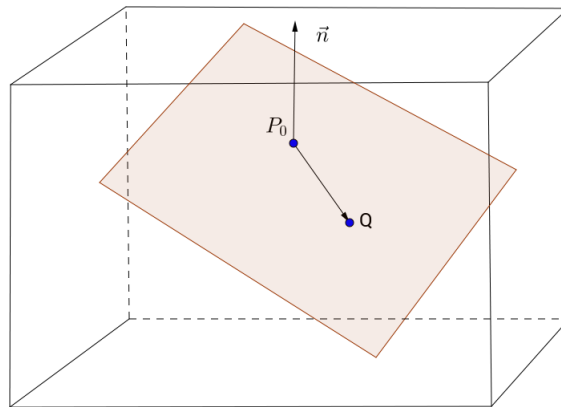
får vi att:

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n} &= [x - x_0 \ y - y_0 \ z - z_0] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \\ &= Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \end{aligned}$$

Vi ersätter $(Ax_0 - By_0 - Cz_0)$ med en konstant D , och får då:

$$Ax + By + Cz = D$$

Vilket är planets ekvation på normalform. Med normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$



Exempel 2.1.

Bestäm planet på normalform, givet:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

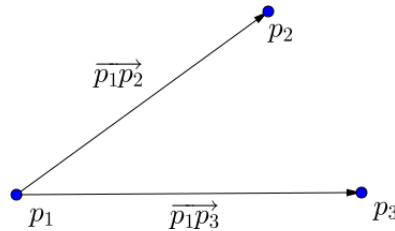
Lösning: Vi får:

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) \\ &= 4x + 2y - 5z + 25 = 0 \end{aligned}$$

Exempel 2.2.

Bestäm planets ekvation på normalform för planet mellan punkterna:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Lösning: Eftersom p_1, p_2, p_3 ligger i planet är:

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{p_1 p_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

parallella med planet.

Och:

$$\vec{n} = \overrightarrow{p_1 p_2} \times \overrightarrow{p_1 p_3} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

är ortogonal mot planet. Och alltså en normalvektor.

Dvs: Vi får

$$9(x-1) + y - 5z - 16 = 0$$

Ett plan kan också ges av en punkt P_0 och två vektorer $\vec{u} = [u_1 u_2 u_3]$ och $\vec{v} = [v_1 v_2 v_3]$ i planet. Planet består av alla punkter P så att:

$$P = P_0 + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Exempel 2.3.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eller på parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 - s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 3 + 2s + 5t \end{cases}$$

Byt representation till normalform genom att bestämma $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

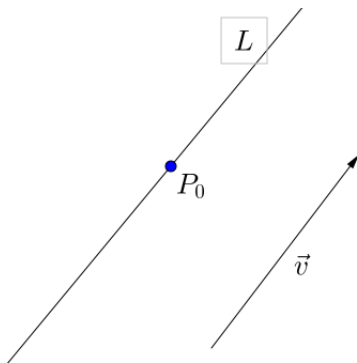
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Och planet:

$$8(x - 1) + 9(y - 2) - 5(z - 3) = 8x + 9y - 5z = 11$$

3 Linjer i \mathbb{R}^3

Antag att att Linjen L är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ och går igenom punkten $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}$



L består av alla punkter $P = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ sådana att $\overrightarrow{P_0P}$ är parallell med \vec{v} .

Dvs:

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Eller:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

Exempel 3.1.

Linjen genom punkten $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ parallell med $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ kan parameterframställas som:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = -3 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lös ut t :

$$t = \frac{x-1}{4}, \quad t = \frac{y-2}{5}, \quad t = \frac{z+3}{-7}$$

Vi får:

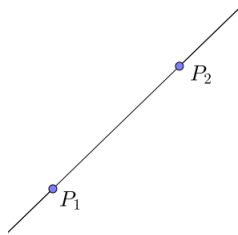
$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{-7}$$

Exempel 3.2.

(a)

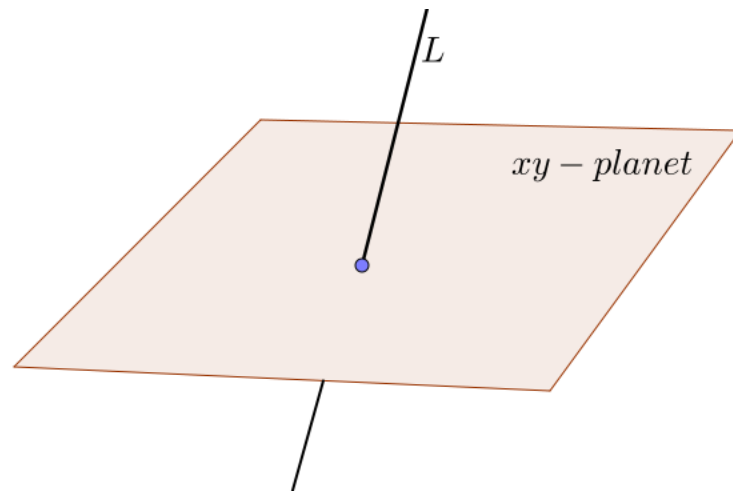
Bestäm en ekvation för linjen L som går genom punkterna:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$



Lösning: Eftersom $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ är parallell med L , och P_1 ligger på L ges linjen av:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exempel 3.3.*(b)**I vilken punkt skär linjen från exemplet ovan xy -planet?**Sätt $z = 0$:*

$$0 = -1 + 8t \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$$

Vi får:

$$x = 2 + 3\frac{1}{8} = \frac{19}{8}$$

$$y = 4 - 4\frac{1}{8} = \frac{7}{2}$$

Svar: Den skär i punkten:

$$\left[\frac{19}{8} \quad \frac{7}{2} \quad 0 \right]$$