Linjär Algebra
Föreläsning 7

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Avbildningar

En avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

är en regel som till varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ kallas för definitionsmängd (alla tillåtna $\vec{x}$)
- $\mathbb{R}^m$ kallas för målmängd
- För ett givet $\vec{x}$ kallas $f(\vec{x})$ för bilden av $\vec{x}$ (under avbildningen f)

Exempel 1.1.
Låt $f(x) = 3 \cdot x$ vara avbildningen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Bilden av $x = \frac{5}{3}$ är 5 ty $f(\vec{x}) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$

Exempel 1.2.
Låt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Dvs:

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

Bilden av $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ är $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ty:

$$f(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså en avbildning:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Definition 1.1. *En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om:*

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $f(c \cdot \vec{u}) = c \cdot f(\vec{u})$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *och* $c \in \mathbb{R}$

Sats 1.1.
Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och låt $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$, då är f en linjär avbildning.

Visas genom att visa att matrisvektorprodukten uppfyller villkoren för en linjär avbildning.

Proof. Låt $\vec{x}_1$ och $\vec{x}_2$ vara två stycken $(n \times 1)$ vektorer, vi har då:

- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathbf{A} \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_1 + \mathbf{A} \cdot \vec{x}_2 = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(c \cdot \vec{x}_1) = \mathbf{A} \cdot (c \cdot \vec{x}_1) = (c \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{x}_1 = c \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_1) = c \cdot f(\vec{x}_1)$

□

Sats 1.2 (Bassatsen)**.**
Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *vara en linjär avbildning. Då finns det en entydigt bestämd matris* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *sådan att* $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$

Proof. i $\mathbb{R}^2$
Varje vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna:

$$\vec{x} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har då:

$$f(\vec{x}) = f(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = x \cdot f(\vec{e}_x) + y \cdot f(\vec{e}_y) = \overbrace{\begin{bmatrix} f(\vec{e}_x) & f(\vec{e}_y) \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}\,=\,\text{Standardmatrisen}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Avbildningen bestäms helt av vad den gör med $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$. □

Exempel 1.3.
Låt $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ *vara avbildningen* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Bestäm standardmatrisen* $\mathbf{A}$.
Lösning: *Eftersom:*

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

får vi:

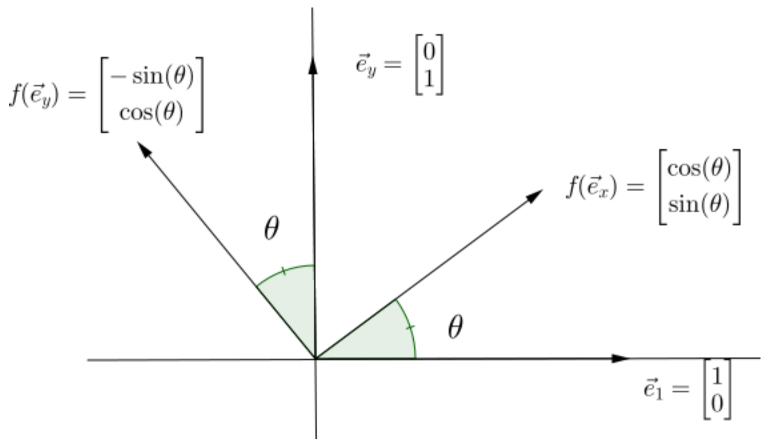
$$f(\vec{e}_x) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$f(\vec{e}_y) = f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vi får då standardmatrisen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.4.
Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkeln θ. Bestäm standardmatrisen $\mathbf{A}$.



$$f(\vec{e}_x) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_y) = f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Kallas även rotationsmatrisen.

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$. Bilden av en linje L där:

$$L : \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}$$

$t \in \mathbb{R}$
Blir en linje som går genom en punkt $\mathbf{A} \cdot \vec{x}_0$ med riktningsvektor $\mathbf{A} \cdot \vec{v}$, ty:

$$f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}) = f(\vec{x}_0) + t \cdot f(\vec{v}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_0 + t \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{v}$$

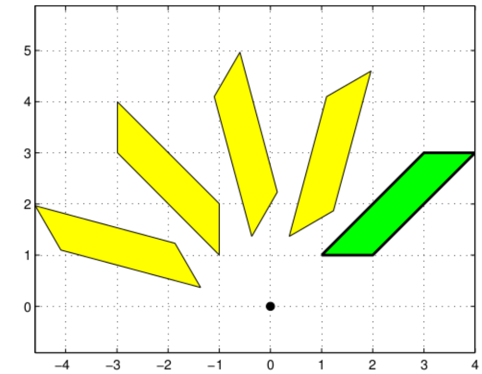
Följden blir att vi kan avbilda n-hörningar.

Exempel 1.5.
Rotera ett område vars hörn består av:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\pi/6$ *radianer moturs.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_2 = \cdots$$
$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_3 = \cdots$$
$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_4 = \cdots$$



Translation (förflyttning) med vektor $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ ges av avbildningen:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Är avbildningen linjär?
Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{t} \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

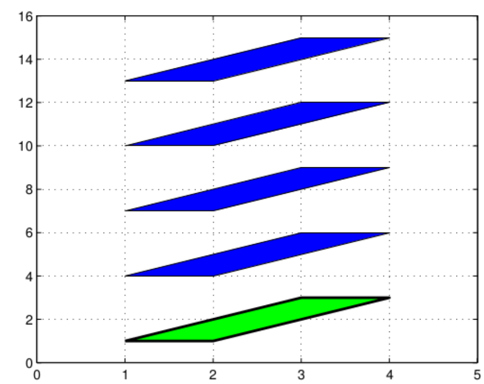
Den är ej linjär, så det finns ingen standardmatris. Men vi kan såklart fortfarande räkna på det.

Exempel 1.6.
Translatera området vars hörn består av:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt $\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$f(x_1) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$f(x_2) = f(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



2 Rotation och translation i $\mathbb{R}^3$

Går till på samma sätt som i $\mathbb{R}^2$

Exempel 2.1.
Rotation moturs θ i radianer i xy-planet

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara:

$$f(\vec{e}_x) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_y) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Standardmatris:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vilket då blir en rotation moturs runt Z-axeln.