Linjär Algebra
Föreläsning 20 - Om tentan

Erik Sjöström

December 16, 2015

1 Att kunna

- Läsa enkel matlabkod
- Frågor relaterade till lab3-lab6 kan kommma på tentan

Exempel 1.1.
*Låt **A** vara en matris med 1000 rader och 1000 kolumner, och låt $\vec{x}$ vara en 1000×1 vektor. Ungefär hur många multiplikationer och additioner av matriselement behövs göras för att beräkna $\vec{v}_1$ respektive $\vec{v}_2$ i matlabsekvensen nedan?*

```
v1 = (A * A) * v;
v2 = A * (A * v);
```

Lösning:
Skalärprodukt 2 st 1000×1 *vektorer ca:*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{1000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{1000} \end{bmatrix} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + ... + v_{1000} \cdot u_{1000} \approx 1000 addition\ och\ multiplikation$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \approx 1000^2 \ att\ beräkna,\ dvs\ 1000 \cdot 1000^2 \ oberationer,\ totalt\ 1000^3$$

$$\vec{v}_1 = \overbrace{\overbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}^{1000^3} \cdot \vec{v}}^{1000^2} \approx 1000^3 + 1000^2 \ op$$

$$\vec{v}_2 = \overbrace{\mathbf{A} \cdot \overbrace{(\mathbf{A} \cdot \vec{v})}^{1000^2}}^{1000^2} \approx 1000^2 + 1000^2 \ op$$

Exempel 1.2. *Fråga i kod och algebra*

Lösning: *Vi ska lösa:*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^T \cdot \vec{b}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 58 \\ 6 & 3 & 24 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ } svar\ \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.3.
Bestäm lösningen till det överbestämda ekvationssystemet $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ *där:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning: *Beräkna ortogonal projektion av* $\vec{b}$ *på planet* $\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{x}z$

$$\vec{b}_p = \vec{b} + \alpha \cdot \vec{n}$$

där:

$$\alpha = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

Måste uttrycka planet på normalform (F3)
Vi vet att vi har 2 vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och en punkt, t.ex $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
En normalvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Minnesregel för kryssprodukt:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi får planets ekvations på normalform:

$$\vec{a}(x-0) + \vec{b}(y-0) + \vec{c}(z-0) \Leftrightarrow \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - z = 0$$

Projicera $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$

$$\alpha = \frac{0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{b}_p = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi ska lösa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 13 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

2 Tenta 150115

2.1 Fråga 1

Lösning: Bestäm π:s ekvation på normalform:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Planet ges då av:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow \pi : x - 3y - 3z = 3$$

Linjens ekvation på parameterform:

$$\vec{v} = \overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = D + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot t \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Vilken t uppfyller planets ekvation?

$$(-t) - 3(1 + 4t) - 3(1 + 3t) = 3 \Leftrightarrow t = \frac{-9}{22}$$

Vilken punkt är det?

$$\begin{cases} x = 9/22 \\ y = 1 - 4 \cdot 9/22 = -7/11 \\ z = 1 - 3 \cdot 9/22 = 16/22 \end{cases}$$

2.2 Fråga 2

2.2.1 (a)

För att anpassa en rät linje så måste detta gälla:

$$\begin{cases} 4 = k \cdot 1 + m \\ 6 = k \cdot 2 + m \\ 14 = k \cdot 3 + m \end{cases}$$

Man får då:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$$

Man ser att detta inte har någon lösning.

2.2.2 (b)

Lös:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\cdot\vec{x} = \mathbf{A}^T\vec{b}$$

2.3 Fråga 3

Lös:

$$\vec{x}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B} + 2\vec{x}$$

där:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B =$$

Lösning:

$$\begin{gathered} \vec{x}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B} + 2\vec{x} \Leftrightarrow \\ \vec{x}\cdot\mathbf{A} - 2\vec{x} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \\ \vec{x}\cdot\mathbf{A} - \vec{x}\cdot 2 = \mathbf{B} \Leftrightarrow \\ \vec{x}\cdot\overbrace{(\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I})}^{\text{om inverterbar}} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \\ \vec{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I})^{-1} \end{gathered}$$

Bestäm inversen:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & (\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I})^{-1} \end{array}\right]$$

2.4 Fråga 4

2.4.1 (a)

Egenvärden till $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} - \mathbf{I}\cdot\lambda) = 0$$

dvs

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Bestäm egenvektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ till egenvärdena:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\cdot\mathbf{I})\vec{v}_i = \emptyset \qquad \leftarrow \text{ lös för } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

2.4.2 (b)

Visa egenvektorerna linjärt obereoende (ty 3 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$)
Lösning: Visa att

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \emptyset$$

Har bara lösningen:

$$x_1 0 x_2 = x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4.3 (c)

$\vec{u} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ Beräkna $\mathbf{A}^n \cdot \vec{u}$ där $n > 0 \in \mathbb{R}$
Lösning: $\mathbf{A}$ diagonaliserbar, dvs

$$\mathbf{A} = \vec{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{v}^{-1}$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \vec{v}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n \vec{u} = (\vec{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{v}^{-1}) \cdot \vec{u}$$
$$\vec{v} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \vec{v}^{-1} \vec{u} =$$

$$\begin{bmatrix}1/2 & -5/2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1/2 \\ -5/2 \cdot 3^n \\ 3 \cdot 2^n\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1/2 - 5/2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \\ 5 \cdot 3^n/2 - 3 \cdot 2^n \\ 3 \cdot 2^n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix}1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}$$