Linjär Algebra
Föreläsning 17

Erik Sjöström

December 9, 2015

1 Egenvärden (forts)

Bestäm en vektor $\vec{v} \neq \emptyset$ och ett tal λ så att:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Om $\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}$ (osymmetrisk) och egenvärdena är multipla, så kan egenvektorerna tillhörande samma egenvärden sammanfalla.

Exempel 1.1.
För

$$A) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har vi:

$$0 = \mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\cdot(-\lambda) - n \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Egenvektor:

$$(A - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$$

Vi får bara en egenvektor:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Även om egenvärdena är multipla så behöver inte egenvektorerna sammanfalla.

Exempel 1.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = ... = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Som har lösningen:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Egenvektorn som hör till $\lambda_1 00$ blir:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektor för λ_2, λ_3:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$

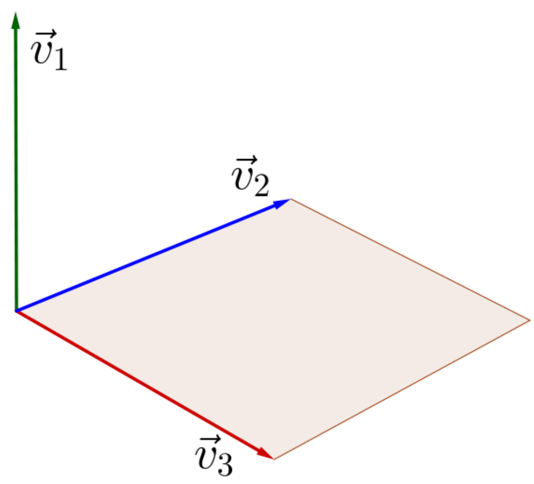
$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som har lösningarna

$$s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har två linjärt oberoende egenvektorer (men säger att $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ är en bas för egenrum, som hör samman med $\lambda_2, \lambda_3 = 1$)



- Mängden av egenvärden till en matris kallas för matrisens spektrum. Slutsatsen man kan dra om matrisens egenvärden kallas för spektralsatser.

2 Spektralsatser

Sats 2.1.
En reell och symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ *har alltid reella egenvärden.*

Exempel 2.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ *är symmetrisk.* $(\mathbf{A}^T = \mathbf{A})$ *och har reella egenvärden,* $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ *och* $\lambda_3 = 3$

Sats 2.2.
För en reell symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ *gäller egenvärden tillhörande olika egenvärden är ortogonala (vinkelräta)*

Exempel 2.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Har egenvektorerna:

$$\vec{v}_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\lambda_1=8} \qquad \vec{v}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\lambda_2=6} \qquad \vec{v}_3 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\lambda_3=3}$$

Vi ser att:

$$\vec{v}_1^T \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1)^2 + (-1) + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1^T \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ... = 0$$

$$\vec{v}_2^T \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ... = 0$$

De är alltså ortogonala mot varandra.

Sats 2.3.
En reell symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ *har alltid reella egenvärden och egenvektorerna* $\vec{v}_i$ *kan väljas ortogonal , dvs: parvis vinkelräta,* $(\vec{v}_i^t \cdot \vec{v}_j = 0$ *då* $i = j)$

Man kan formulera följande sammanfattning:

Sats 2.4.
Spektralsatsen för reella symmetriska matriser. Om $\boldsymbol{A}$ *är en reell symmetrisk* $(n \times n)$*-matris, så gäller:*

- $\boldsymbol{A}$ *har* n *reella egenvärden om man räknar multiplicitet.*

- *för varje egenvärde är egenrummets dimension samma som egenvärdets multiplicitet*
- *Egenrummen är parvis ortogonala och inom varje egenrum kan vi bilda en bas bestående av egenvektorer som är ortogonala mot varandra.*
- $\boldsymbol{A}$ *kan diagonaliseras* $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$*, med en en ortogonal matris* $\boldsymbol{V}$*. Matrisen* $\boldsymbol{V}$ *har egenvektorer som kolonner och matrisen* $\boldsymbol{D}$ *har motsvarande egenvärden på diagonalen.*

3 Diagonalisering

Exempel 3.1.
Titta på:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Som har egenvärden $\lambda_1 = 8$*,* $\lambda_2 = 6$*, och* $\lambda_3 = 3$*, och sammanhängande egenvektorer:*

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Med:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \qquad \textit{och} \qquad \mathbf{D} = \overbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}^{\textit{egenvärden på diagonalen}}$$

Har vi:

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = D$$

Alternativt:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \qquad \mathbf{A} \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \qquad \mathbf{A} \cdot \vec{v}_3 = \lambda_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 & \mathbf{A} \cdot \vec{v}_2 & \mathbf{A} \cdot \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 & \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 & \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}}$$

Kolumnerna i $\boldsymbol{V}$ *har längden 1, de är parvis ortogonala.*
Dvs: ON-matris, dvs $\boldsymbol{V}$ *är inverterbar och* $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$
Multiplicera med $\mathbf{V}^T$ *från vänster:*

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \overbrace{\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V}}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}$$

Definition 3.1. *En matris* $\boldsymbol{A}$ *är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris* $\boldsymbol{P}$ *och en diagonalmatris* $\boldsymbol{D}$ *sådan att:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Sats 3.1.
En matris $\mathbf{A}_{n\times m}$ *är diagonaliserbar om oom* $\boldsymbol{A}$ *har* n *stycken linjärt oberoende egenvektorer.*
Då är:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1} \qquad \textit{eller} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

där $\boldsymbol{V}$*:s kolumner är egenvektorerna och diagonalen i* $\boldsymbol{D}$ *motsvarande egenvärden till* $\boldsymbol{A}$ *(i samma ordning).*

Obs: Alla matriser kan inte diagonaliseras

Exempel 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hade $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ *och* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ej två stycken linjärt oberoende egenvektorer. Kan ej diagonaliseras.*

Exempel 3.3.
Låt $\boldsymbol{A}$ *vara en inverterbar* (2×2)*-matris med:*

$$\lambda_1 = 2 \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}^2$*.*

Lösning: $\boldsymbol{A}$ *har två linjärt oberoende egenvektorer, alltså diagonaliserbar. Låt:*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{och} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Vi har att:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \overbrace{\mathbf{V}^{-1}) \cdot (\mathbf{V}}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs: $\mathbf{A}^2$ *har egenvärden 4, 1, och egenvektorer:*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$