Analys
Föreläsning 4

Erik Sjöström

January 25, 2016

1 Gränsvärden

$f(x)$ reell funktion, $a \in \mathbb{R}$,
"$f(x)$ har gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ i x = a"

FIGURER

Beteckning: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

FIGUR

$\lim_{x \to a} f(x)$ existerar ej.

FIGUR

$\lim_{x \to a} f(x)$ existerar ej.

Exempel 1.1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},\ D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

Vi ser:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

Detta ger att $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

Exempel 1.2.

$$f(x) = \frac{x}{|x|},\ D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

Fråga: *Existerar* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *?*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Slutsats: $\lim_{x \to 0} f(x)$, *existerar ej.*

FIGUR

1.1 Formell definition av gränsvärde

Givet en reell funktion $f(x)$ och $a \in \mathbb{R}$. Antag:

$$D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta\} \neq \phi, \text{ för alla } \delta > 0$$

FIGUR

Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ i $x = a$, betecknat:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

eller:

$$f(x) \to L, x \to a$$

om för varje $\epsilon > 0$ finns $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sådant att $x \in D_f$ och $0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

FIGUR

1.2 Ensidiga gränsvärden

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

Om för varje $\epsilon > 0$ finns $\delta(\epsilon) > 0$ så att:

$$a \in D_f \text{ och } \overbrace{a < x < a + \delta}^{0<|x-a|<\delta \text{ och } x>a} \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Om för varje $\epsilon > 0$ finns $\delta(\epsilon) > 0$ så att:

$$a \in D_f \text{ och } \overbrace{a - \delta < x < a}^{0<|x-a|<\delta \text{ och } x<a} \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

1.3 Gränsvärden som går mot oändligheten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

om för varje $\epsilon > 0$ finns $\omega \in \mathbb{R}$ sådant att $x \in D_f$ och $x > \omega \implies |f(x) - L| < \epsilon$

$$\lim_{x \to -\infty} = L$$

På samma sätt

Exempel 1.3.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

Fråga: *Existerar* $\lim_{x \to \infty} f(x)$*?*

Notera:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}
\end{aligned}$$

$$= \{x > 0 : \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\to 1, x\to\infty}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \to \frac{1}{2}, x \to \infty$$

Slutsats:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \frac{1}{2}$$

Exempel 1.4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{x^3-1}$$

Notera:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+x-2}{x^3-1} &= \frac{x^2(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} \\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} \longrightarrow 0, x\to\infty\end{aligned}$$

1.4 Oegentliga gränsvärden

Vi skriver ($f(x)$ reell funktion, $a \in \mathbb{R}$):

$$f(x) \to \infty,\ x \to a$$

om för varje $\omega \in \mathbb{R}$ finns $\delta = \delta(\omega) > 0$ sådant att $x \in D_f$ och $0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > \omega$

FIGUR

1.5 Gränsvärdesregler

Antag:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

och:

$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$

Då gäller:

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L \cdot M$
- $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M},$ om $M \neq 0$
- $f(x) < g(x)$ alla x $\to L \leq M$

1.6 Squeezing lemma

Om $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ för alla x, och $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, så gäller:

$$\lim_{x\to a} h(x)$$

existerar, och är lika med:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

FIGUR

Exempel 1.5.

$$f(x) = 3x^2 + x - 2,\ a = 1$$

Visa att:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Utgående från definitionen av gränsvärdet.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
|f(x) - 2| &= |(3x^2 + x - 2) - 2| \\
&= |3x^2 + x - 4| \\
&= |3(x-1)^2 + x - 1 - 3(-2x+1) + (x-1) + 1 - 4| \\
&= |3(x-1)^2 + (x-1) + 7x - 7| \\
&= |3(x-1)^2 + 8(x-1)| \\
&\leq |3(x-1)^2| + |8(x-1)| (triangelolikheten) \\
&= 3|x-1||x-1| + 8|x-1| \\
&= \underbrace{(3|x-1| + 8)}_{\leq 11} \cdot |x-1| < \epsilon \textit{ om } |x-1| < \delta, \textit{ vi vill hitta } \delta > 0
\end{aligned}$$

Antag att $0 < \delta \leq 1$. *Kan välje* $\delta = \frac{\epsilon}{11}$