Linjär Algebra
Föreläsning 5

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Matrisvektorprodukt

Definition 1.1. *Låt* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \end{bmatrix}$ *och* $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ *Då defineras matrisvektorprodukten som:*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = v_1 \cdot a_1 + v_2 \cdot a_2 + \cdots + v_n \cdot a_n$$

Exempel 1.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Anmärkning 1.
Man får samma svar om man beräknar skalärprodukten mellan raderna i $\boldsymbol{A}$ *och kolmunen i* $\vec{v}$

Räkneregler för matrisvektorprodukten:
$\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är $(m \times n)$ matriser och $\vec{v}$, $\vec{u}$ $(nx1)$ kolumnvektorer, $k \in \mathbb{R}$

- $\mathbf{A}(\vec{v} + \vec{u}) = \mathbf{A} \cdot \vec{u} + \mathbf{A} \cdot \vec{v}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{v} + \mathbf{B} \cdot \vec{v}$
- $\mathbf{A}(k \cdot \vec{v}) = k \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{v}$

2 Matrismultiplikation

Definition 2.1. *Låt en matris* $\boldsymbol{A}$ *vara av storlek* $(m \times n)$*, och en matris* $\boldsymbol{B}$ *vara av storlek* $(n \times p)$ *med kolumnerna* $b_1, b_2, \ldots, b_p$ *då är matrismultiplikationen* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *den* $(m \times p$ *matris vars kolumner är,* $\mathbf{A} \cdot b_1, \mathbf{A} \cdot b_2, \ldots, \mathbf{A} \cdot b_p$ *dvs:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}b_1, \mathbf{A}b_2, \ldots, \mathbf{A}b_p \end{bmatrix}$$

Exempel 2.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$$

Problemt blir nu att räkna ut tre matrisvektorprodukter:

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 6 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 4 - 5\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-5)(-2) & 1\cdot 6 - 5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Det är oftast enklare att beräkna skalärprodukten mellan raderna i $\mathbf{A}$ och kolumnerna i $\mathbf{B}$.

Anmärkning 2.
Storlekarna (typerna) måste stämma överens för att matrismultiplikation skall var definierad. Dvs om $\boldsymbol{A}$ är en $(m \times n)$ matris, och $\boldsymbol{B}$ en $(i \times j)$ matris, så är matrismultiplikationen:

$$\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{B}_{i\times j}$$

definierad omm $n = i$. Storleken på den resulterande matrisen blir $m \times j$

2.1 Räkneregler

Låt $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ vara matriser, och $\vec{v}$ en kolumnvektor definierade så att följande operationer är giltiga. Då gäller:

- $\mathbf{A}\cdot(k\cdot\mathbf{B}) = k\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (k\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$ för $k \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
- $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\vec{v}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\vec{v}$
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

Anmärkning 3.
OBS!

- *Det gäller oftast att* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
- *Om* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ *kan man inte dra slutsatsen att* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$
- *Om* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbb{O}$*, kan man ej dra slutsatsen att* $\mathbf{A} = \mathbb{O}$ *eller* $\mathbf{B} = \mathbb{O}$

Exempel 2.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

Exempel 2.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Då är:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Transponat

Definition 3.1. *Transponatet av en matris* $\boldsymbol{A}$ *ges av* $\mathbf{A}^T$ *vars kolumner är raderna i* $\boldsymbol{A}$*.*

Exempel 3.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ så är } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exempel 3.2.
Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ *vara en kolumnvektor. Då är:*

$$\text{Den inre produkten: } \vec{u}^T \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1^2 + u_2^2$$
$$\text{Den yttre produkten: } \vec{u} \cdot \vec{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

3.1 Räkneregler

Låt $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ vara matriser så att följande operationer är giltiga, $k \in \mathbb{R}$.

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- $(k \cdot \mathbf{A})^T = k \cdot \mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \leftarrow$ observera ordningen.

Definition 3.2. *En* $\mathbf{A}_{n \times n}$ *matris är symetrisk om* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

Exempel 3.3.
Om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ *så är* $\vec{u} \cdot \vec{u}^T$ *symertrisk.*

4 Inverterbara matriser

Definition 4.1. *En $(n \times n)$ matris vars diagonalelement är 1 och alla andra element är 0 kallas identitetsmatris, betecknas* $\mathbb{I}_n$

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel 4.1.

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition 4.2. *En $(n \times n)$ matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar om det finns en matris $\mathbf{C} - n \times m$ så att:*

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{I}_n$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbb{I}_n$$

$\boldsymbol{C}$ kallas då för inversen till $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{B}$etecknas $\mathbf{A}^{-1}$

Exempel 4.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Då är:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$$

dvs $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$

Sats 4.1.
Låt $\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. *Om* $d = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$. *Så är* $\boldsymbol{A}$ *inverterbar, och inversen ges av:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exempel 4.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad d = 2(-7) - (-3)5 = 1 \neq 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

d kallas för determinanten till $\mathbf{A}$.