# Linjär Algebra
# Föreläsning 8

Erik Sjöström

November 20, 2015

## 1 Linjära avbildningar (forts)

Kom ihåg:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{och} \qquad f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

Låt:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

vara två linjära avbildningar och:

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \qquad g(\vec{x}) = \mathbf{B} \cdot \vec{x}$$

Då gäller för $f + g$ att:

$$f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{B} \cdot \vec{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \vec{x}$$

$(f + g)$ är också linjär avbildning med standardmatris $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
För $c \cdot f$ där $c \in \mathbb{R}$ gäller:

$$c \cdot f(\vec{x}) = c \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = (c \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{x}$$

dvs $(c \cdot f)$ är också en linjär avbildning med standardmatris $(c \cdot \mathbf{A})$
Låt

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

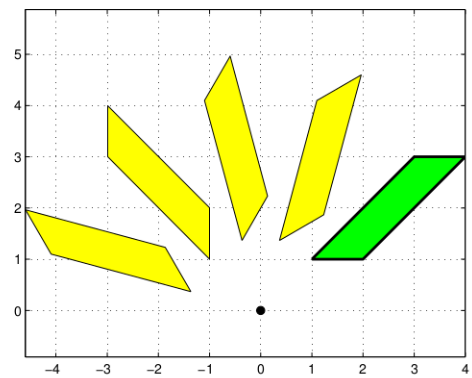
vara två linjära avbildningar med standardmatriser, $\mathbf{A}_{p \times n}$ repektive $\mathbf{B}_{m \times p}$
Då gäller för den sammansatta avbildningen:

$$g(f(\vec{x})) = g(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{x}$$

dvs en linjär avbildning med standardmatris $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$

**Anmärkning 1.**
*Den sammansatta funktionen $g(f(\vec{x}))$ skrivs vanligtvis som $g \circ f(\vec{x})$*

**Exempel 1.1.**
***Rotation***




*Grönt område beskrivs av hörnen:*

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *och* $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ *där:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix}$$

*Hörnpunkten i 1:a gula 4-hörningen ges av:*

$$\vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_1, \qquad \vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_2, \qquad \vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_3, \qquad \vec{y}_4 = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_4$$

*Hörnpunkterna för den andra gula 4-hörningen fås genom att rotera bilderna* $\vec{y}_1 \cdots \vec{y}_4$

$$A \cdot \vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_1), \quad A \cdot \vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_2), \quad A \cdot \vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_3), \quad A \cdot \vec{y}_4 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_4)$$

*Vi har alltså en sammansatt avbildning* $f(f(\vec{x}))$

**Exempel 1.2.**
*Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildninger* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *som först roterar* $(\pi/6)$ *radianer moturs och sedan projiceras ortogonal på x-axeln.*

$$\textit{Rotationen: } f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\textit{Projektionen: } g(\vec{x}) = \mathbf{B} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} g(\vec{e}_x) & g(\vec{e}_y) \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{e}_x & \emptyset \end{bmatrix}}^{\textit{projektion på } x} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

*Så om vi först roterar och sedan projicerar får vi:*

$$g(f(\vec{x})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

*Om vi istället först projicerar och sedan roterar får vi:*

$$f(g(\vec{x})) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & 0 \\ \sin(\pi/6) & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

*Vi kan alltså se att ordningen spelar roll:*

$$f(g(\vec{x})) \neq g(f(\vec{x}))$$

*De har alltså olika sandardmatriser, detta kommer från räknereglerna för matriser:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

# 2 Invertering

En avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

kallas inverterbar om det finns en linjär avbildning:

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sådan att:

$$\begin{cases} g(f(\vec{x})) = \vec{x} \\ \\ f(g(\vec{x})) = \vec{x} \end{cases} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$g$ kallas då för inversen till $f$ och betecknas $f^{-1}$
Om $f$ har standardmatrisen $\mathbf{A}$ ($f(\vec{x} = \mathbf{A} \cdot \vec{x})$ så är $f$ inverterbar om $\mathbf{A}$ är inverterbar, då har $g = f^{-1}$ standardmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$ ($g(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{x}$)

**Exempel 2.1.**
*Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen motsols med vinkeln $\theta$*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

*Inversen:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

*där $d$ är determinanten av $\boldsymbol{A}$:*

$$d = det(\mathbf{A}) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - (-\sin(\theta) \cdot \sin(\theta)) = \cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

*Genom att uttrycka:*

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

*får vi:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

*dvs: En rotation $-\theta$ moturs*
*dvs: Rotation $\theta$ medurs*
*En rotation moturs med vinkeln $\theta$ följt av en rotation medurs med vinkeln $\theta$ gör att vi är tillbaka där vi startade. dvs: $\boldsymbol{A}$ och $\mathbf{A}^{-1}$ är inverser.*

# 3 Translation

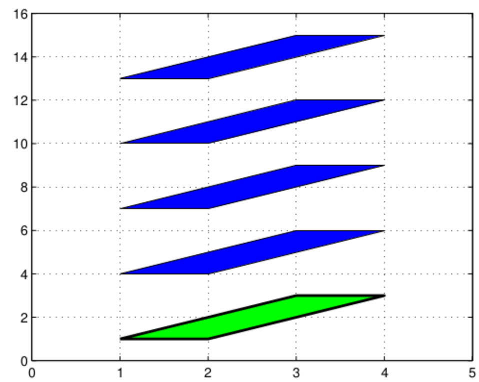
En translation:

$$t_b : \vec{x} + \vec{t} \qquad\qquad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$t_b(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t}$$

är alltså själva förflyttningen.

**Exempel 3.1.**
***Translation***




*Grönt område beskrivs av hörnen:*

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

*Hörnen translateras genom att addera* $\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
*dvs:* $\vec{x}_1$ *har translateras till:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*och* $\vec{x}_2$ *till:*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*osv.*

# 4 Affin avbildning

En affin avbildning är sammansattning av en linjär avbildning och en translation $t_b$
Låt:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

En affin avbildning:

$$t_b(g(\vec{x})) = t_b(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \cdot \vec{t}$$

**Exempel 4.1.**
*Man kan alltid göra om en affin avbildning till en linjär avbildning:*
*Låt:*

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{t}$$

*vara en affin avbildning i planet, med:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

*Vi får då:*

$$\begin{aligned} f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + t_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + t_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Vi bildar en linjär avbildning $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med standardamtris:*

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*den är linjär så vi kan skriva:*

$$g(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{A}_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Dvs: representera den affina avbildningen i planet med en linjär avbildning i rummet.*