Linjär Algebra
Föreläsning 9

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 $\mathbb{R}^n$

En vektor i $\mathbb{R}^n$ är en n-tupel av reella tal:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Anmärkning 1.
Man låter det vara en kolumnvektor av praktiska skäl

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller vektorer i planet respektive rummet. Där vi utgår från en ON-bas.
Längden av $\vec{u}$:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Addition, och multiplikation med skalär sker komponentvis:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \qquad c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Följande räkneregler gäller för vektorer i $\mathbb{R}^n$:
$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ och $c, d \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c \cdot \vec{u} + c \cdot \vec{v}$
- $(c + d) \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v}$
- $c \cdot (d \cdot \vec{u}) = (c \cdot d) \cdot \vec{v}$

Definition 1.1. *Om $\vec{u}$, $\vec{v}$är två vektorer i $\mathbb{R}^n$ definieras skalärprodukten mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ av:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

Anmärkning 2.
$\vec{u}^T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \cdots u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ *ger samma resultat. Fast vi får en matrismultiplikation.*

Anmärkning 3.
$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = ||\vec{u}||^2$

- Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är parallella om $c \cdot \vec{u} = \vec{v}$, $(c \neq 0)$
- Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

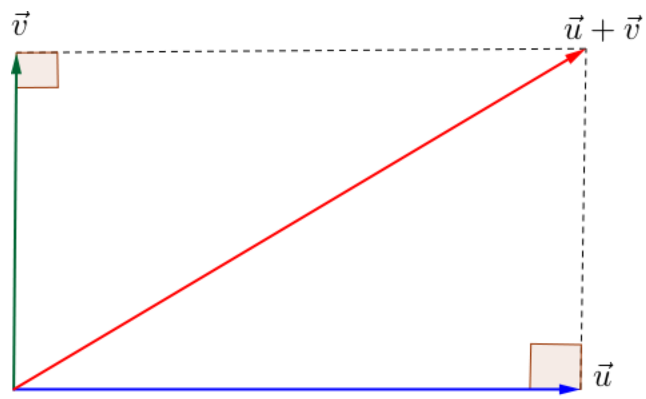
Vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är det tal som uppfyller:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Följande räkneregler gäller för skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$:
$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = c \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

2 Pythagoras sats i $\mathbb{R}^2$



$$||\,\vec{u}\,||^2 + ||\,\vec{v}\,||^2 = ||\,\vec{u} + \vec{v}\,||^2$$

3 Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$

Sats 3.1.
Två vektorer i $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala om:

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Proof.

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

Använd räkneregler för skalärprodukten:

$$\begin{aligned} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + ||\vec{v}||^2 \end{aligned}$$

dvs:

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

omm $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, dvs $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ortogonala $\square$

4 Linjärkombinationer i $\mathbb{R}^n$

En linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$ med vikterna $a_1, a_2, \cdots, a_n$ är vektorn:

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + a_n \cdot \vec{v}_n$$

Standardbasen för $\mathbb{R}^n$ består av:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$:

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + v_n \cdot \vec{e}_n$$

Exempel 4.1.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Matriser av godtycklig storlek

Se föreläsning 5

6 Linjära avbildningar i $\mathbb{R}^n$

Om avbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning så finns det en entydigt bestämd matris $\mathbf{A}$ sådan att:

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

$\mathbf{A}$ kallas standardmatrisen för avbildningen f och bestäms av:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

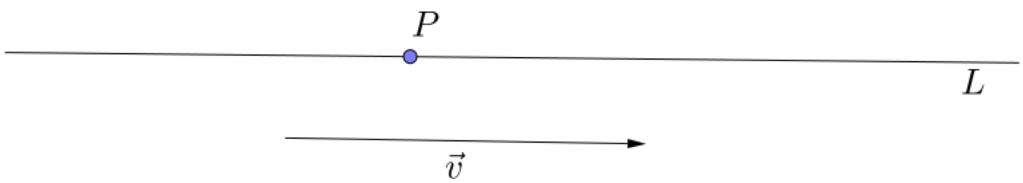
Proof. (följer direkt av att f är linjär, se föreläsning 5)

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\overbrace{x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n}^{\text{ty } f \text{ linjär}}) = x_1 \cdot f(\vec{e}_1) + x_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n \cdot f(\vec{e}_n) \\ &= \overbrace{\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

□

Vi har en linje L: $\vec{p} + t \cdot \vec{v}$

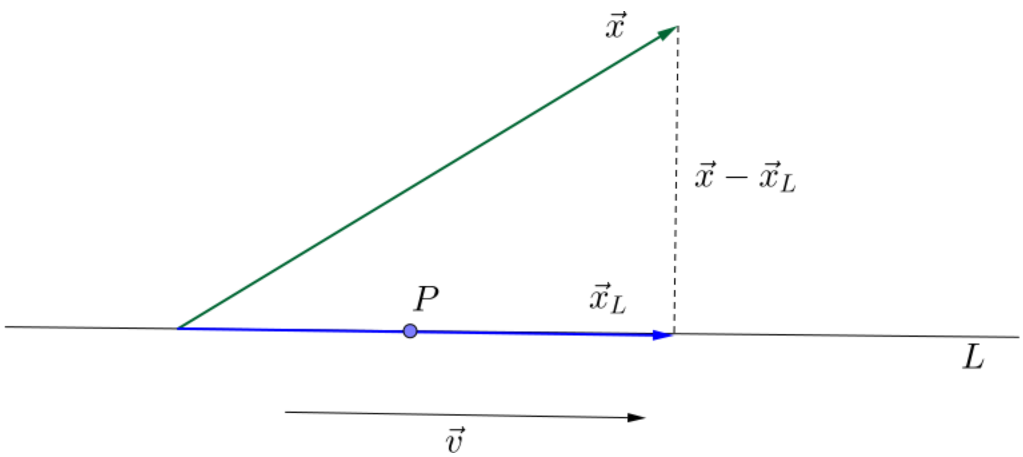
$$\overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}}^{\text{En punkt}} + \overbrace{t}^{\text{Ett tal}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}^{\text{Riktningsvektor}}$$



Låt en ortogonal projektion av $\vec{x}$ på L vara $\vec{x}_L$, $\vec{x}_L$ är parallell med $\vec{v}$, så vi kan skriva:

$$\vec{x}_L = c \cdot \vec{v}$$

och att $(\vec{x} - \vec{x}_L)$ är ortogonal mot $\vec{v}$



Formulera en linjär avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{sådan att} \qquad \vec{x}_L = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

Lösning:
Vi vet att:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{x} - \vec{x}_L) \cdot \vec{v} \\ &= (\vec{x} - (c \cdot \vec{v})) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{x} \cdot \vec{v} - c \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

Lös ut c:

$$c = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Eftersom $\vec{x}_L = c \cdot \vec{v}$, får vi:

$$\begin{aligned} \vec{x}_L &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{x})$$
$$= \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^T \cdot \vec{x}$$

Anmärkning 4.
Kom ihåg definitionen av skalärprodukt:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1, \cdots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & \cdots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & \cdots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \cdots & v_n v_n \end{bmatrix}$$

Låt:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^T$$

då får vi:

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \ (= \vec{x}_L)$$

Ortogonalprojektionen är linjär och $\vec{x}_L = f(\vec{x})$ ges av:

$$\vec{x}_L = \frac{1}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^T \cdot \vec{x}$$