# Linjär Algebra
# Föreläsning 17

Erik Sjöström

December 9, 2015

## 1 Egenvärden (forts)

Bestäm en vektor $\vec{v} \neq \emptyset$ och ett tal $\lambda$ så att:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Om $\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}$ (osymetrisk) ocg egenvärdena är multipla, så kan egenvektorerna tillhörande samma egenvärden sammanfalla.

**Exempel 1.1.**
*För*

$$A) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*har vi:*

$$0 = \mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\cdot(-\lambda) - n \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

*Egenvektor:*

$$(A - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$$

*Vi får bara en egenvektor:*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Även om egenvärdena är multipla så behöver inte egenvektorerna sammanfalla.

**Exempel 1.2.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

*Egenvärdena:*

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = ... = -\lambda(\lambda-1)^2 = 0$$

*Som har lösningen:*

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

*Egenvektorn som hör till $\lambda_1 00$ blir:*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Egenvektor för $\lambda_2, \lambda_3$:*

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Som har lösningarna*

$$s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Vi har två linjärt oberoende egenvektorer (men säger att $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ är en bas för egenrum, som hör samman med $\lambda_2, \lambda_3 = 1$)*

***Infoga bild!***

**-** Mängeden av egenvärden till en matris kallas för matrisens spektrum. Slutsatsen man kan dra om matrisens egenvärden kallas för spektralsatser.

# 2 Spektralsatser

**Sats 2.1.**
*En reell och symetrisk matris $\boldsymbol{A}$ har alltid reella egenvärden.*

**Exempel 2.1.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

*$\boldsymbol{A}$ är symmetrisk. $(\mathbf{A}^T = \mathbf{A})$ och har reella egenvärden, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ och $\lambda_3 = 3$*

**Sats 2.2.**
*För en reell symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ gäller egenvärden tillhörande olika egenvärden är ortogonala (vinkelräta)*

**Exempel 2.2.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

*Har egenvektorerna:*

$$\vec{v}_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\lambda_1=8} \qquad \vec{v}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\lambda_2=6} \qquad \vec{v}_3 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\lambda_3=3}$$

*Vi ser att:*

$$\vec{v}_1^T \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1)^2 + (-1) + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1^T \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ... = 0$$

$$\vec{v}_2^T \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ... = 0$$

*De är alltså ortogonala mot varandra.*

**Sats 2.3.**
*En reell symetrisk matris* $\boldsymbol{A}$ *har alltid reella egenvärden och egenvektorerna* $\vec{v}_i$ *kan väljas ortogonal , dvs: parvis vinkelräta,* ($\vec{v}_i^t \cdot \vec{v}_j = 0$ *då* $i = j$)

Man kan formulera förljande sammanfattning:

**Sats 2.4.**
*Spektralsatsen för reella symmtrisa matriser. Om* $\boldsymbol{A}$ *är en reell symmetrisk* $(n \times n)$*-matris, så gäller:*

- $\boldsymbol{A}$ *har* $n$ *reella egenvärden om man räknar multiplicitet.*
- *för varje egenvärde är egenrummets dimension samma som egenvärdets multiplicitet*
- *Egenrummen är parvis ortogonala och inom varje egenrum kan vi bilda en bas bestående av egenvektorer som är ortogonala mot varandra.*
- $\boldsymbol{A}$ *kan diagonaliseras* $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$*, med en en ortogonal matris* $\boldsymbol{V}$*. Matrisen* $\boldsymbol{V}$ *har egenvektorer som kolonner och matrisen* $\boldsymbol{D}$ *har motsvarande egenvärden på diagonalen.*

# 3 Diagonalisering

**Exempel 3.1.**
*Titta på:*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

*Som har egenvärden $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$, och $\lambda_3 = 3$, och sammanhängande egenvektorer:*

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

*Med:*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{bmatrix} \qquad \textit{och} \qquad \mathbf{D} = \overbrace{\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}}^{\textit{egenvärden på diagonalen}}$$

*Har vi:*

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = D$$

*Alternativt:*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \qquad \mathbf{A} \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \qquad \mathbf{A} \cdot \vec{v}_3 = \lambda_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 & \mathbf{A} \cdot \vec{v}_2 & \mathbf{A} \cdot \vec{v}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 & \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 & \lambda_3 \cdot \vec{v}_3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} = \overbrace{\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}}^{\mathbf{D}}$$

*Kolumnerna i **V** har längden 1, de är parvis ortogonala.*
*Dvs: ON-matris, dvs **V** är inverterbar och $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$*
*Multiplicera med $\mathbf{V}^T$ från vänster:*

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \overbrace{\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V}}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}$$

**Definition 3.1.** *En matris **A** är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris **P** och en diagonalmatris **D** sådan att:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

**Sats 3.1.**
*En matris $\mathbf{A}_{n\times m}$ är diagonaliserbar om oom **A** har n stycken linjärt oberoende egenvektorer.*
*Då är:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1} \qquad \textit{eller} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

*där **V**:s kolumner är egenvektorerna och diagonalen i **D** motsvarande egenvärden till **A** (i samma ordning).*

**Obs:** Alla mtriser kan inte diagonaliseras

**Exempel 3.2.**

$$A = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

*hade $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ och $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ej två stycken linjärt oberoende egenvektorer. Kan ej diagonaliseras.*

**Exempel 3.3.**
*Låt **A** vara en iverterbar* $(2 \times 2)$*-matris med:*

$$\lambda_1 = 2 \qquad\qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad\qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Bestäm egenvärden och egenvektorer till* $\mathbf{A}^2$.

**Lösning:** ***A*** *har två linjärt oberoende egenvektorer, alltså diagonaliserbar. Låt:*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{och} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

*Vi har att:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \overbrace{\mathbf{V}^{-1}) \cdot (\mathbf{V}}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Dvs:* $\mathbf{A}^2$ *har egenvärden 4, 1, och egenvektorer:*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$