Analys
Föreläsning 8

Erik Sjöström

February 4, 2016

1 Repetition

Sats 1.1.
f deriverbar i x_0 och x_0 är en lokal extrempunkt $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Anmärkning 1.
$f'(x_0) = 0 \nRightarrow x_0$ *lokal extrempunkt*

Sats 1.2.
Medelvärdessatsen:
f kontinuerlig på $[a, b]$
f deriverbar i (a, b)
$\Rightarrow$ *Finns $\xi \in (a, b)$ så att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$*

2 Dagens föreläsning

Sats 2.1.
Cauchys medelvärdessats:
f, g kontinuerliga på $[a, b]$
f, g deriverbara i (a, b)
$g' \neq 0$ *i (a, b)*
$\Rightarrow$ *Finns $\xi \in (a, b)$ så att $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$*

Anmärkning 2.
$g(x) \Rightarrow g'(x) = 1 \neq 0$

Anmärkning 3.

$$g(b) - g(a) \neq 0 \text{ eftersom } g(b) - g(a) = \overbrace{g(\xi)}^{\neq 0}\overbrace{(b - a)}^{\neq 0}$$

Proof. Sätt:

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$$

Här gäller:

- h kontinuerlig på $[a, b]$
- h deriverbar i (a, b)
- $h(a) = (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$
- $h(b) = (f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) \cdot f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

Medelvärdessatsen ger att det finns $\xi \in (a,b)$ så att:

$$h'(\xi) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a} = 0$$

Vi får:

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

dvs:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

eftersom $g' \neq 0$ och $g(b) - g(a) \neq 0$ $\square$

Tillämpning av medelvärdessatsen:
Antag f kontinuerlig på $[a,b]$
Om:

1. $f'(x) \geq 0$ för $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ är växande på $[a,b]$
2. $f'(x) > 0$ för $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ är strängt växande på $[a,b]$
3. $f'(x) \leq 0$ för $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ är avtagande på $[a,b]$
4. $f'(x) < 0$ för $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ är strängt avtagande på $[a,b]$

eftersom:

1. Fixera godtyckligt $x, \tilde{x}$ $a \leq x < \tilde{x} \leq b$

$$f(\tilde{x}) - f(x) = \underbrace{f'(\xi_{x,\tilde{x}})}_{\geq 0}\underbrace{(\tilde{x} - x)}_{\geq 0}$$

vilket följer av medelvärdessatsen tillämpat på f på intervallet $[x, \tilde{x}]$
Vi har $f(x) \leq f(\tilde{x})$

Anmärkning 4.
f kontinuerlig på $[a,b]$
$f'(x) > 0$ på (a,b) utom i ändligt många punkter i (a,b)
$\Rightarrow f$ strängt växande på $[a,b]$

3 Primitv funktion = ”antiderivata”

Givet funktion $g(x)$
Vi säger att $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$ om:

$$G'(x) = g(x)$$

Fråga:

1. Krav på $g(x)$ för att en $G(x)$ ska existerar?
2. $G(x)$ entydigt bestämt av $g(x)$?

Fråga 2: Antag att $G(x)$ och $\tilde{G}(x)$ är primitiva funktioner till $g(x)$

$$G'(x) = g(x) \qquad \qquad \tilde{G}(x) = g(x)$$

Sätt:

$$h(x) = G(x) - \tilde{G}(x) \ , \ x \in \mathbb{I}$$

Då gäller:

- h är kontinuerlig på $\mathbb{I}$, eftersom $G, \tilde{G}(x)$ deriverbar på $\mathbb{I}$ och alltså kontinuerlig på $\mathbb{I}$

- h deriverbar på $\mathbb{I}$
- $h'(x) = G'(x) - \tilde{G}'(x) = g(x) - g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$

Fixera $c \in \mathbb{I}$

$$h(x) - h(c) = h'(\xi)(x - c) = 0 \ , \forall x \in \mathbb{I}$$

Alltså finns konstant C, så att

$$G(x) = \tilde{G}(x) + C \ , \forall x \in \mathbb{I}$$

Svar på fråga (1):
Om $g(x)$ är en kontinuerlig funktion så existerar primitiv funktion till $g(x)$

3.1 Beteckning

$$\underbrace{\int g(x)dx}_{\text{obestämd integral}} = \underbrace{G(x)}_{\text{primitiv funktion}} + \underbrace{C}_{\text{godtycklig konstant}}$$

3.2 Tabell