Linjär Algebra
Föreläsning 18

Erik Sjöström

December 10, 2015

1 Egenvärdensproblemet som linjär avbildning

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

Man ställer sig frågan: Vilka $\vec{x}$ avbildas på $\lambda \cdot \vec{x}$?

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Exempel 1.1.
Projektion (se lab 4) på ett plan π:

$$a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z} = 0 \text{ ,genom origo}$$

är en linjär avbildning och kan skrivas som:

$$\vec{x}_\pi = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

Egenvärden, egenvektorer till $\boldsymbol{A}$*?*

- *Alla vektorer $\vec{x}_\pi$ i planet kommer att vara offörändrade så de kommer att vara egenvektorer med egenvärde 1.*

$$1 \cdot \vec{x}_\pi = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_\pi$$

- *Alla vektorer vinkelräta mot planet (dvs: parallella med normalen $\vec{n}$).*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{n} = 0 \cdot \vec{n}$$

  dvs: $\vec{n}$ egenvektor med egenvärde 0.

Exempel 1.2.
Spegling genom plan som går genom origo är en linjär avbildning: $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$

- *Alla $\vec{x}_\pi$ i planet förblir oförändrade, dvs de är egenvektorer med egenvärde 1.*
- *Alla vektorer vinkelräta mot planet (parallell med $\vec{n}$) har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i motsatt riktning, dvs $\vec{n}$ är egenvektor med egenvärde -1:*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{n} = -1 \cdot \vec{n}$$

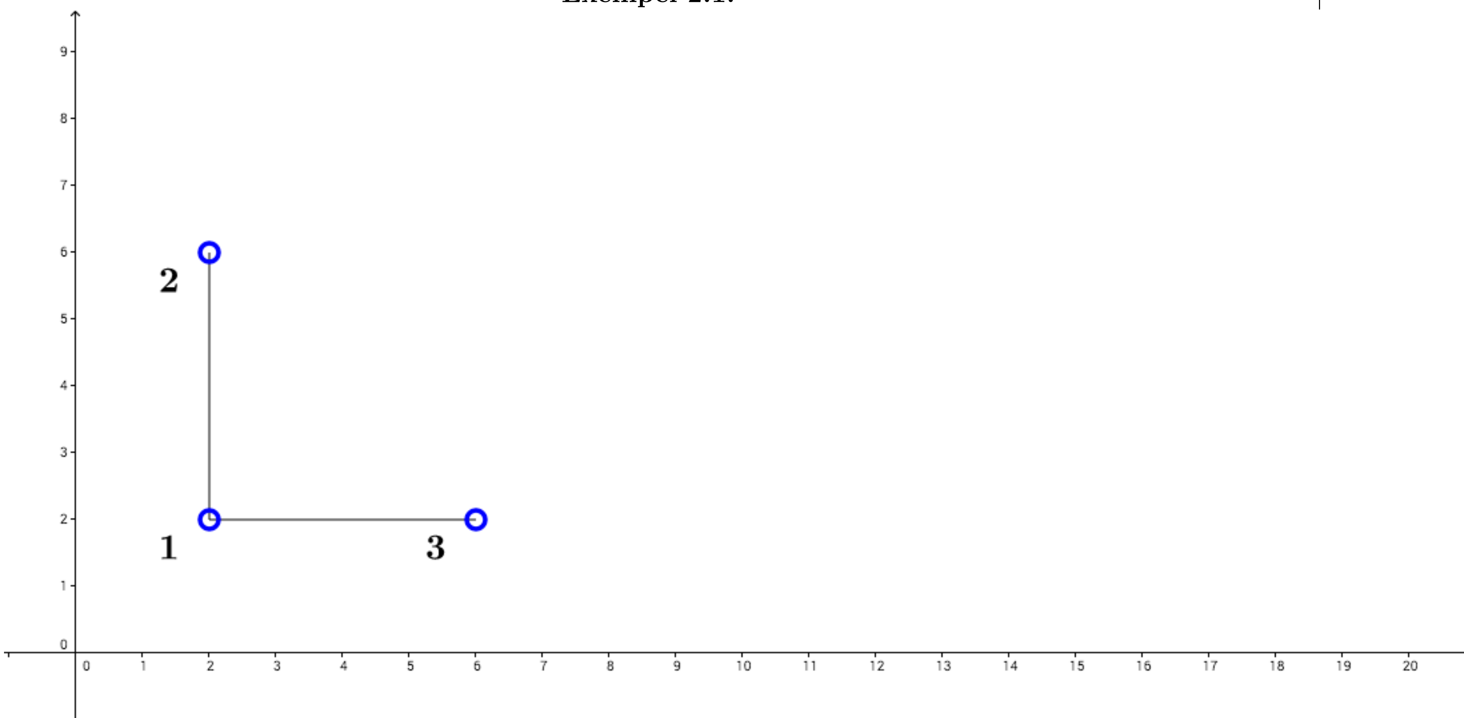
2 Grafer

Definition 2.1. *En graf* $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{R})$ *består av noder* $\boldsymbol{V}$*, och kanter* $\boldsymbol{E}$*. Kanterna består av oordnade element* $\{v_i, v_j\}$ *ur* $\boldsymbol{V}$*. Om grafen är riktad så består* $\boldsymbol{E}$ *av ordnade par* (v_i, v_j)
Graden $d(v_i)$ *för en nod* v_i *är antalet grannar till* v_i

Definition 2.2. *Låt* $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ *vara en graf med* n *noder. Elementen i grannmatrisen* $\mathbf{A}_G$ *ges av:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{v_i, v_j\} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \overbrace{a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}}^{\text{Riktad graf}}$$

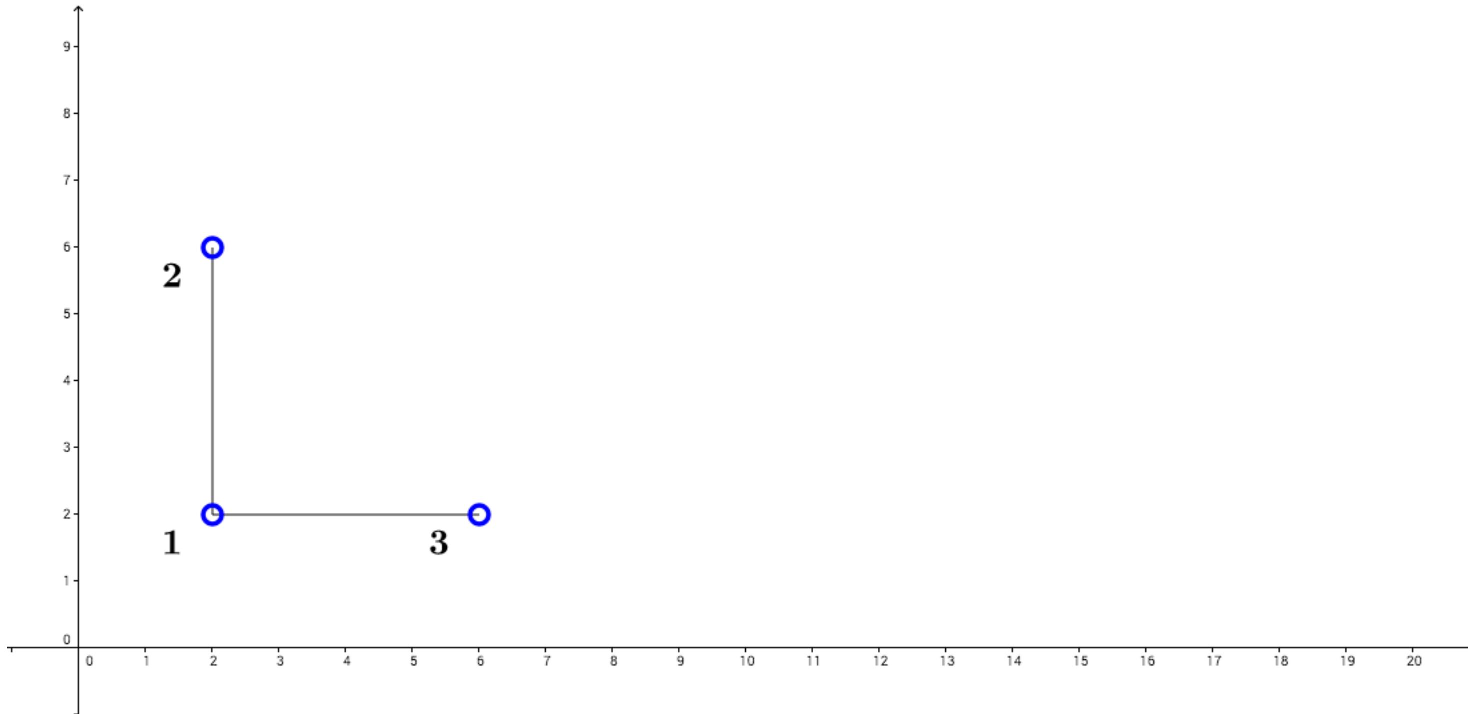
Exempel 2.1.



$$\mathbf{E} = \{\{1,2\},\{1,3\}\} \qquad \mathbf{V} = \{1,2,3\}$$

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exempel 2.2.
Riktad grad:



$$\mathbf{E} = \{(1,2),(1,3)\} \qquad \mathbf{V} = \{1,2,3\}$$

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats 2.1.
Element (i,j) i grannmatris $\mathbf{A}_G^K$ *ger antal vägar av längd* k *från* v_i *till* v_j

Exempel 2.3.

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna antal vägar av längd 3.
Lösning:

$$\mathbf{A}_G \cdot \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Övergångsmatris

Om $\mathbf{A}_G$ är grannmatris till graf $\mathbf{G}$ med n noder, så $\mathbf{M}_G$ övergångsmatris till $\mathbf{G}$ om:

$$m_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \qquad \mathbf{A}_G \text{ fast alla radsummor är 1}$$

Exempel 2.4.

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element på plats (i,j) i $\mathbf{M}_G^k$ är sannolikheten för att man befinner sig i nod v_j efter k steg om man startat i nod v_i

3 Slumpvandring

Definition 3.1. *Om vi befinner oss i en nod v_i så beger vi oss till någon av dess grannar med sannolikheten $1/d(v_i)$, ($1/$antal grannar). Vi vill veta "vilken är sannolikheten att vara i en given nod vid en viss tidpunkt."*

Man studerar oftast slumpvandring med markovkedjor.

Definition 3.2. *Låt $\vec{x}_o$ vara en startfördelning och låt en matris $\boldsymbol{P}$ vara en stokastisk matris (övergångsmatris). En markovkedja är en sekvens av fördelningsvektorer:*

$$\vec{x}_o, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ...$$

Sådana att:

$$\vec{x}_1 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_0 \qquad \vec{x}_2 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_1 \qquad \vec{x}_3 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_2 \qquad ....$$

Övergångsmatrisen:

- $\mathbf{P} = \mathbf{M}_G^T$ (alla kolumnsummor i $\mathbf{P}$ är 1).
- I $\mathbf{P}$ kan förekomma andra element än $1/d(v_i)$.
- $\mathbf{P}$ har ofta element på diagonalen.
- $\mathbf{P}$ mpste vara en stokastisk matris. (Kolumnsummorna måste vara 1, och alla element ≥ 0)

Exempel 3.1.
Utför slumpvandring på två websidor.

Infoga exempelbild

- *Antag att 95% att jag forsätter läsa ①, i nästa tidsteg, 5% att jag byter till sida ②*
- *Antag att 97% att jag forsätter läsa ②, i nästa tidsteg, 3% att jag byter till sida ①*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$$

Låt $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ *vara andel som läser sida ①, ② när vi börjar.*

$$\vec{x}_1 = \mathbf{P} = \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$
$$\vec{x}_2 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.565 \\ 0.435 \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$

$$\vec{x}_n = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

Det kommer att kovergera. Stationär fördelning (steady state)
Varje markovkedja med stokastisk matris har en stationär fördelning (steady state) $\vec{q}$ sådan att:

$$\mathbf{P} \cdot \vec{q} = \vec{q}$$

Dvs $\vec{q}$ är en egenvektor till $\boldsymbol{P}$ och $\lambda = 1$

Varför konvergerar markovkedjan? Vi beräknar egenvärden, egenvektorer till $\mathbf{P}$

$$\lambda : \mathbf{det}(\mathbf{P} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{det} \begin{pmatrix} 0.95 - \lambda & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - \lambda \end{pmatrix} = ... = \lambda^2 - 1.92\lambda + 0.92 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0.92 \end{cases}$$

Egenvektor:

$$(\mathbf{P} - 1 \cdot \mathbf{I}) = \emptyset \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{P} - 0.92 \cdot \mathbf{I}) = \emptyset \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2$$
$$\vec{x}_1 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_0 = \mathbf{P}(c1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2) = c_1 \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_2 = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot 0.92 \cdot \vec{v}_2$$
$$\vec{x}_2 = \mathbf{P} \cdot \vec{x}_1 = c_1 \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot (0.92) \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_2 = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2(0.92)^2 \cdot \vec{v}$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_k = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \overbrace{(0.92)^k}^{0 \text{ då } k \to \infty} \cdot \vec{v}_2$$