Linjär Algebra
Föreläsning 12

Erik Sjöström

November 30, 2015

1 Homogena ekvationssystem

Exempel 1.1.
Låt $\mathbf{A}\cdot = \emptyset$ *ges av:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lösning är förstås:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den lösningen kallas för den triviala lösning.
Finns det fler lösningar? Vi gausseliminerar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \cdot -\frac{8}{3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = R_3 \\ = R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{8/3} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Låt $x_4 = t$, *(*x_4 *är en fri variabel)*
Vi får:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{4} \cdot t \\ x_2 = \frac{3}{4} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t = \frac{5}{4} \cdot t \\ x_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot t = \frac{1}{4} \cdot t \end{cases}$$

Vi får alltså svaret:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

Dvs: En linje i $\mathbb{R}^4$ *genom origo.*

Den homogena ekvationen $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har icke-trivial lösning omm reducering av totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \emptyset \end{array}\right]$ till trappstegsform ger minst en fri kolumn.

Sats 1.1.
Antag att ekvationen $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har en lösning $\vec{x}_p$ (partikulärlösning). Då gäller att alla lösningar till $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ kan skrivas som:

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

Där $\vec{x}_h$ är lösningen till den homogena ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \emptyset$$

Exempel 1.2.
Vi ser på $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ där:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Radreducering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} +R_2 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

x_3 är en fri variabel. Låt $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Vi får:

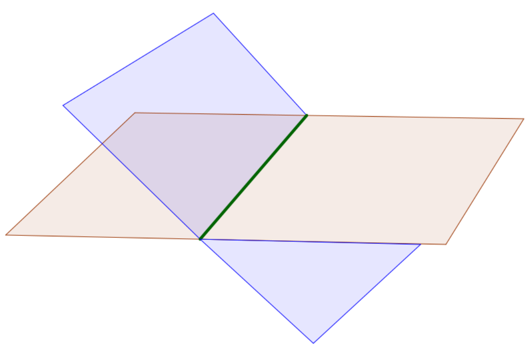
$$\begin{cases} x_1 = 8 + 7t \\ x_2 = 4 + 4t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \textit{dvs} \qquad \vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\vec{x}_p} + \overbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t}^{\vec{x}_h}$$

Obs: Vi har:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_h = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gemoetrisk tolkning: Två plan som skär:



$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ är bara en av punkterna på linjen, nämligen den då $t = 0$.

$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ är linjen i $\mathbb{R}^3$ förskjuten $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ från origo.