

Linjär Algebra

Föreläsning 13 - Determinanter

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Terminologi

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$

Exempel 1.1.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$25! = 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 1.5 \cdot 10^{25}$$

- Permutation är en uppräkningsordning av $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ i en given ordning.

Exempel 1.2.

Det 3! möjliga permutationerna av $\{1, 2, 3\}$ nämligen:

$$\{1, 2, 3\} \quad \{1, 3, 2\} \quad \{2, 1, 3\} \quad \{2, 3, 1\} \quad \{3, 1, 2\} \quad \{3, 2, 1\}$$

- En permutation kallas udda om det krävs ett udda antal platsbyten för att överföra den till $\{1, 2, \dots, n\}$, annars jämn.

Exempel 1.3.

Jämn	Udda	Udda	Jämn	Jämn	Udda
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 3, 2\}$	$\{2, 1, 3\}$	$\{2, 3, 1\}$	$\{3, 1, 2\}$	$\{3, 2, 1\}$

Låt $A_{n \times n}$ vara en 2×2 -matris:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Möjliga produkter:	Permutation av kolumnindex:	Udda/jämn permutation:
$a_{11} \cdot a_{22}$	$\{1, 2\}$	Jämn
$a_{12} \cdot a_{21}$	$\{2, 1\}$	Udda

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exempel 1.4. INFOGA KOPIA HÄR

Vi ser från determinanten av en matris \mathbf{A} att:

- Om \mathbf{A} innehåller en rad eller kolumn med bara nollor blir $\det(\mathbf{A}) = 0$
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$
- Om \mathbf{A} är triangulär:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

så är $\det(\mathbf{A}) =$ produkten av diagonalelementent.

För att beräkna $\det(\mathbf{A}_{n \times n})$ behöver vi utföra cirka $n!$ multiplikationer och additioner.

Exempel 1.5.

$A_{25 \times 25}$. Det behövs cirka $25! \approx 1.5 \cdot 10^{25}$ operationer. Antag att en dator utför 10^{12} operationer/sekund då tar det cirka 500 tusen år att beräkna.

Lösningen på detta problem är att radreducera (Gausseliminera) innan man beräknar $\det(\mathbf{A})$.

Låt \mathbf{A} och \mathbf{B} vara två $(n \times n)$ -matriser och \mathbf{B} vara resultatet av precis en radoperation på \mathbf{A} . Resultat beroende på operation blir:

- Addition: $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$
- Platsbyte: $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$
- Skalning med k : $\det(\mathbf{B}) = k \cdot \det(\mathbf{A})$

Exempel 1.6.

Beräkna:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} \boxed{-}^2 \\ \leftarrow + \end{array} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} \boxed{-}^{-1} \\ \leftarrow + \end{array} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right| = 1 \cdot 4 \cdot (-5) = -20$$

Antalet operationer (mul, add, subtr) som behövs för Gausseliminering av en $(n \times n)$ -matris är cirka $2n^3/3$.

Exempel 1.7.

Radreduceringen av en (25×25) -matris blir $2 \cdot 25^3/3 \approx 10.000$ operationer, vilket tar mindre än 1 sekund.

Låt $\mathbf{A}_{n \times n}$ gausselimineras till övertriangulär form:

$$\begin{bmatrix} d_1 & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

med hjälp av addition och platsbyte. Då har vi att:

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^r \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$$

där r är antalet platsbyten.

Om \mathbf{A} ej är inverterbar så kommer minst ett av diagonalelementen att vara 0 (ty \mathbf{A} ej har pivotelement i varje kolumn) $\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$

Om $\det(\mathbf{A}) = 0$, så måste något av diagonalelementen vara 0, dvs \mathbf{A} har ej pivotelement i varje kolumn, dvs \mathbf{A} är ej inverterbar.

$$\underline{\mathbf{A} \text{ inverterbar} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0}$$

Sats 1.1.

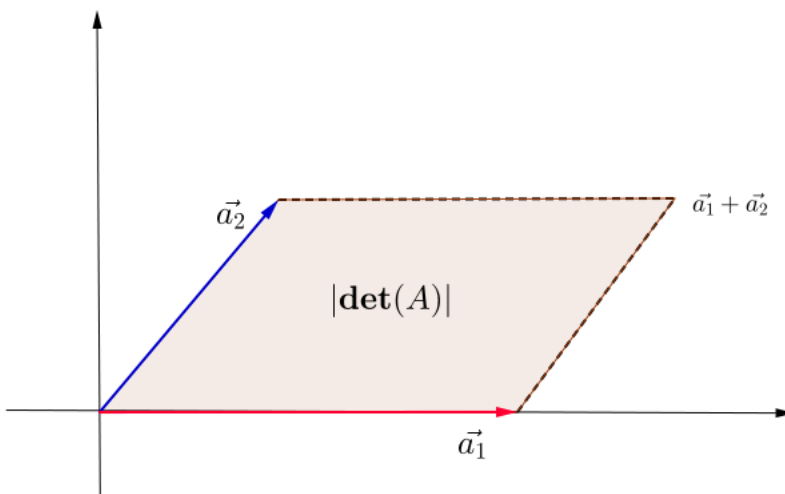
Det gäller också att, om \mathbf{A} och \mathbf{B} är $(n \times n)$ -matriser:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

2 Area, volymskala

Kom ihåg (F6). Låt $\mathbf{A}_{2 \times 2} = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2]$

Arean av parallelogrammet som spänns upp av \vec{a}_1, \vec{a}_2 är: $|\det(\mathbf{A})|$

**Exempel 2.1.**

Bestäm arean av området vars hörn är:

$(-2, -2)$

$(0, 3)$

$(4, -1)$

$(6, 4)$

INFOGA FIGUR HÄR

För att kunna beräkna arean mha determinanter måste vi translatera (flytta) parallelogrammet så att ett av hörnen hamnar i origo $(0, 0)$.

Vi translaterar med $\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi får:

$(0, 0)$

$(2, 5)$

$(6, 1)$

$(8, 6)$

INFOGA FIGUR

Arean är oförändrad

$$\mathbf{A} = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelogrammet som spänns upp av \vec{a}_1 och \vec{a}_2 består av alla punkter:

$$\{s \cdot \vec{a}_1 + t \cdot \vec{a}_2 : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär transformation $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$.

Låt $\mathbf{D} : \{s \cdot \vec{d}_1 + t \cdot \vec{d}_2 : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ vara ett parallelogram i \mathbb{R}^2 .

Vad blir arean av $f(\mathbf{D})$? (arean av $\mathbf{D} = |\det(\begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix})|$)

$$f(\mathbf{D}) = f(s \cdot \vec{d}_1 + t \cdot \vec{d}_2) = s \cdot f(\vec{d}_1) + t \cdot f(\vec{d}_2) = \overbrace{s \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{d}_1 + t \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{d}_2}^{\text{Parallelogram}}$$

$$\text{Arean av } f(\mathbf{D}) = |\det(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \vec{d}_1 & \mathbf{A} \cdot \vec{d}_2 \end{bmatrix})| =$$

$$\text{Obs: } \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \vec{d}_1 & \mathbf{A} \cdot \vec{d}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$= |\det(\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix})| = |\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix})| = |\det(\mathbf{A})| \cdot \text{arean av } \mathbf{D}$$

Exempel 2.2.

Låt \mathbf{D} vara parallelogrammet som spänns upp av:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och:

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bestäm arean av bilden av \mathbf{D} ($f(\mathbf{D})$):

Lösning:

$$\text{Arean av } f(\mathbf{D}) = |\det(\mathbf{A})| \cdot \text{Arean av } \mathbf{D}$$

$$\det(\mathbf{A}) = |1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)| = 2$$

$$\text{Arean av } \mathbf{D} = |\det(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix})| = |1 \cdot 1 - 3 \cdot 5| = |-14| = 14$$

$$\text{Arean av } f(\mathbf{D}) = 2 \cdot 14 = 28$$

Exempel 2.3.

Låt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotationen motsols med θ , dvs:

$$f(\vec{x}) = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \cos^2(\theta) - (-\sin^2(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Dvs: rotation förändrar inte arean.