# Linjär Algebra
# Föreläsning 7

Erik Sjöström

November 17, 2015

## 1 Avbildningnar

En avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

är en regel som till varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ kallas för definitionsmängd (alla tillåtna $\vec{x}$)
- $\mathbb{R}^m$ kallas för målmängd
- För ett givet $\vec{x}$ kallas $f(\vec{x})$ för bilden av $\vec{x}$ (under avbildningen $f$)

**Exempel 1.1.**
*Låt $f(x) = 3 \cdot x$ vara avbildningen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
*Bilden av $x = \frac{5}{3}$ är 5 ty $f(\vec{x}) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$*

**Exempel 1.2.**
*Låt:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

*Dvs:*

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

*Bilden av* $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ *är* $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ *ty:*

$$f(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

*Vi har alltså en avbildning:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

**Definition 1.1.** *En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om:*

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $f(c \cdot \vec{u}) = c \cdot f(\vec{u})$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *och* $c \in \mathbb{R}$

**Sats 1.1.**
*Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och låt $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, då är $f$ en linjär avbildning.*

Visas genom att visa att matrisvektorprodukten uppfyller villkoren för en linjär avbildning.

*Proof.* Låt $\vec{x}_1$ och $\vec{x}_2$ vara två stycken $(n \times 1)$ vektorer, vi har då:

- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot \vec{x}_1 + A \cdot \vec{x}_2 = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(c \cdot \vec{x}_1) = A \cdot (c \cdot \vec{x}_1) = (c \cdot A) \cdot \vec{x}_1 = c \cdot (A \cdot \vec{x}_1) = c \cdot f(\vec{x}_1)$

□

**Sats 1.2** (Bassatsen)**.**
*Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns det en entydigt bestämd matris $A_{m \times n}$ sådan att $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$*

*Proof.* i $\mathbb{R}^2$
Varje vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna:

$$\vec{x} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har då:

$$f(\vec{x}) = f(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = x \cdot f(\vec{e}_x) + y \cdot f(\vec{e}_y) = \overbrace{\begin{bmatrix} f(\vec{e}_x) & f(\vec{e}_y) \end{bmatrix}}^{A\,=\,\text{Standardmatrisen}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Avbildningen bestäms helt av vad den gör med $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$. □

**Exempel 1.3.**
*Låt $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$ vara avbildningen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bestäm standardmatrisen $A$.*
***Lösning:*** *Eftersom:*

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*får vi:*

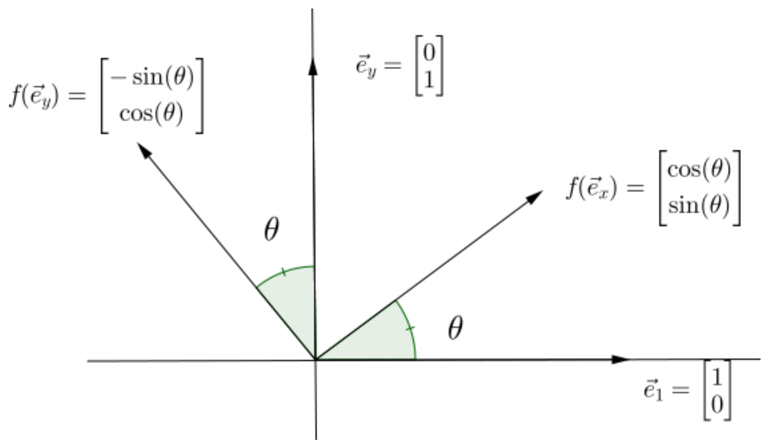
$$f(\vec{e}_x) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$f(\vec{e}_y) = f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

*Vi får då standardmatrisen:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Exempel 1.4.**
*Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkeln $\theta$. Bestäm standardmatrisen $A$.*




$$f(\vec{e}_x) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_y) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

*Kallas även rotationsmatrisen.*

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Bilden av en linje $L$ där:

$$L : \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}$$

$t \in \mathbb{R}$
Blir en linje som går genom en punkt $A \cdot \vec{x}_0$ med riktningsvektor $A \cdot \vec{v}$, ty:

$$f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}) = f(\vec{x}_0) + t \cdot f(\vec{v}) = A \cdot \vec{x}_0 + t \cdot A \cdot \vec{v}$$

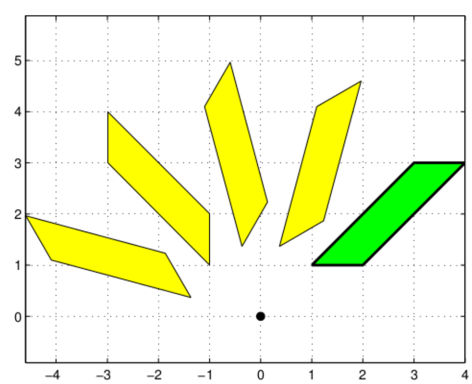
Följden blir att vi kan avbilda n-hörningar.

**Exempel 1.5.**
*Rotera ett område vars hörn består av:*

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\pi/6$ *radianer moturs.*

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\
A \cdot \vec{x}_1 &= \begin{bmatrix} cos(\pi/6) & -sin(\pi/6) \\ sin(\pi/6) & cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\
A \cdot \vec{x}_2 &= \cdots \\
A \cdot \vec{x}_3 &= \cdots \\
A \cdot \vec{x}_4 &= \cdots
\end{aligned}$$




Translation (förflyttning) med vektor $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ ges av avbildningen:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Är avbildningen linjär?
Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{t} \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

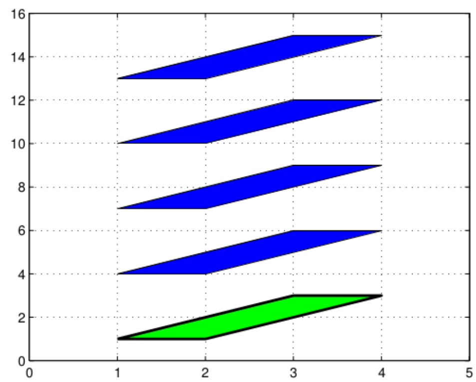
Den är ej linjär, så det finns ingen standardmatris. Men vi kan såklart fortfarande räkna på det.

**Exempel 1.6.**
*Translatera området vars hörn består av:*

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \qquad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

*Låt* $\vec{t} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

$$f(x_1) = f(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$
$$f(x_2) = f(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$




## 2 Rotation och translation i $\mathbb{R}^3$

Går till på samma sätt som i $\mathbb{R}^2$

**Exempel 2.1.**
*Rotation moturs* $\theta$ *i radianer i xy-planet*

$$A = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

*Låt* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *vara:*

$$f(\vec{e}_x) = \begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 0\end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_y) = \begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\\ 0\end{bmatrix} \qquad f(\vec{e}_z) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Standardmatris:*

$$A = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

*Vilket då blir en rota ion moturs runt Z-axeln.*