Analys
Föreläsning 2

Erik Sjöström

January 25, 2016

1 Absolutbelopp

Definition 1.1.

$$|a| = \begin{cases} a \ om \ a \geq 0 \\ -a \ om \ a < 0 \end{cases}$$

1.1 Egenskaper $a, b \in \mathbb{R}$

- $|-a| = |a|$
- $a \leq |a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Notera:

$$|a+b|^2 = (\sqrt{(a+b)^2})^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot \overbrace{ab}^{\leq |ab| = |a||b|} + b^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Vi får:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Exempel 1.1.
Bestäm de $x \in \mathbb{R}$ sådana att:

$$|x^2 - 5x + 6| < 1$$

Metod 1: *Sätt* $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x \in \mathbb{R}$
Betrakta:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 6 \\ &= \underbrace{\overbrace{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{2}^2}^{=-(\frac{1}{2})^2 \ om \ x = \frac{5}{2}}}_{minimum} \\ &= (x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$= \overbrace{(x-2)(x-3)}^{\textit{Avläs nollställen}}$$

Rita grafen för $f(x)$

FIGUR

FIGUR

Beräkna $x \in \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \pm 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Svar:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\} = (\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Metod 2:

$$|x^2 - 5x + 6| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A: & -1 < x^2 - 5x + 6 \\ B: & x^2 - 5x + 6 < 1 \end{cases}$$

Svar:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 5x + 6|\} = \{x \in \mathbb{R} : \text{ Både A och B är uppfyllda}\}$$

Metod 3: Dela upp i olika fall där man kan ”ta bort beloppstecknet”

- Fall 1: $x < 2$
- Fall 2: $2 \leq x < 3$
- Fall 3: $3 \leq x$

2 Koordinatsystem

FIGUR

2.1 Räta linjens ekvation

Givet en punkt (x_0, y_0) på linjen, och linjen lutning m.

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Givet två punkter (x_0, y_0), (x_1, y_1) på linjen:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

2.2 Avståndet mellan två punkter

FIGUR

Pythagoras sats:

$$d^2 = |x_0 - x_1|^2 + |y_0 - y_1|^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

2.3 Cirkelns ekvation

Givet medelpunkten (x_0, y_0) och radie $r > 0$:

FIGUR

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Oftast skriver man:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

3 Reella funktioner

FIGUR

Definitionsmängden för $f : D_f$
Värdemängden för $f : V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$
Reella funktioner:

- $D_f \subset \mathbb{R}$
- $V_f \subset \mathbb{R}$

$A \subset B$ betyder att A är en delmängd av B, ej nödvändigtvis äkta delmängd.

Exempel 3.1.

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, \infty) \tag{1}$$

Grafen för f är mängden:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \text{ och } y = f(x)\}$$

FIGUR, eller kanske inte...

Definitionsmängdskonvention: Om D_f ej anges antas att D_f är största möjliga mängd.

3.1 Egenskaper

f, g reella funktioner med $D_f = D_g$

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D_f = D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in D_f = D_g$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in D_f = D_g$
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

3.2 Sammansatta funktioner

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \qquad x \in D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in D_f\}$$

FIGUR

OBS: Generellt så gäller:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Exempel 3.2.

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 1 \tag{2}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

3.3 Jämn/udda funktion

Antag att $D_f = \mathbb{R}$.
f kallas jämn funktion om:

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

f kallas udda funktion om:

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Jämn funktion:

FIGUR

grafen är symmetrisk runt y-axeln.
Udda funktion:

FIGUR

grafen är symmetrisk kring origo.

Exempel 3.3.
Jämna funktioner: $1, |x|, x^2, x^4, x^6, cos(x)$
Udda funktioner: $x, x^3, x^5, sin(x)$

Men $f(x) = x^2 + x^3$ är varken udda eller jämn.

4 Polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

där

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{R} \text{ och } x \in \mathbb{R}$$

Om $a_n \neq 0$, så säger vi att $P(x)$ har graden n, $grad(P) = n$
Om $P(r) = 0$ så säger vi att r är ett nollställe till $P(x)$.
Vi säger också att r är en rot till ekvationen $P(x) = 0$
Vi säger att polynomet $\widetilde{P}(x)$ är en faktor i polynomet $P(x)$ om det finns ett polynom $Q(x)$ sådant att:

$$P(x) = \widetilde{P}(x) \cdot Q(x)$$

4.1 Polynomdivision

Faktorsatsen: Givet ett polynom $P(x)$ av grad ≥ 1. Då gäller:

$$r \text{ är ett nollställe till } P(x) \iff x - r \text{ är en faktor i } P(x)$$

Division: Givet $r \in \mathbb{R}$ finns polynom $Q(x)$ och $a \in \mathbb{R}$ så att:

$$P(x) = (x - r)Q(x) + a$$

$$r \text{ nollställe till } P(x) \iff a = 0 \iff (x - r) \text{ faktor till } P(x)$$