Analys
Föreläsning 6

Erik Sjöström

January 28, 2016

1 Derivata

$f(x)$ är en reell funktion

FIGUR

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Beteckning:

$$f'(a) = \frac{df}{dc}(x) = Df(a) = ...$$

Exempel 1.1.

$$f(x) = \sqrt(x),\ D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$$

FIGUR

Fixera $a > 0$. *Betrakta:*

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+g}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \to \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ \textit{då}\ h \to 0
\end{aligned}$$

Alltså:

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}},\ a > 0$$

FIGUR

Vi säger att $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ om:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existerar.
Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ dvs } \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$$

Sats 1.1.
f deriverbar i $a \Rightarrow f$ kontinuerlig i a

Proof. Betrakta: $(x \neq a)$

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\to f'(a) \text{ då } x \to a} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\to 0 \text{ då } x \to 0}$$

$f'(a)$ existerar eftersom f deriverbar i $x = a$
Slutsats:

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$$

Vi har att f kontinuerlig i $x = a$ □

Exempel 1.2.

$$f(x) = |x|$$

FIGUR

Detta exempel visar en kontinuerlig funktion som inte är deriverbar i $x = 0$

1.1 Vänster och högerderivata

$f(x)$ har vänsterderivatan i a om:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0-}}_{h<0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) f(a)}{x - a}$$

$f(x)$ har högerderivata i a om:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0+}}_{h>0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) f(a)}{x - a}$$

Om vänsterderivatan i $a =$ högerderivatan i a så är funktionen deriverbar i a

1.2 Deriveringsregler

Antag att f, g deriverbara i a. Då gäller:

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
- $(cf)'(a) = cf'(a)$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $(\frac{1}{f})'(a) = \frac{f'(a)}{(f(a))^2}$ om $f(a) \neq 0$

Kedjeregeln: f deriverbar i $g(a)$ och g deriverbar i a

$$\frac{d}{dx} f(g(a))|_{x=a} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Exempel 1.3.

$$\frac{d}{dx}(x + (\sqrt{x})^3) = \underbrace{\frac{d}{dx}x}_{=1} + \qquad \underbrace{= \frac{d}{dx}(\sqrt{x})^3}_{f(g(x))\ \textit{där},\ f(x)=x^3, g(x)=\sqrt{x}}$$

där:

$$f'(x) = 3x^2, \qquad\qquad g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

och alltså:

$$\begin{aligned} f'(g(x)) \cdot g(x) &= 3(g(x))^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 3x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

Bevisargument för kedjeregeln: f deriverbar i $g(a)$ och g deriverbar i a

$$\frac{d}{dx}f(g(a))|_{x=a} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Definera:

$$R_u(k) = \begin{cases} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

om $f'(u)$ existerar så gäller:

$$R_u(k) \to 0, k \to 0$$

för u fixt.
Vi har:

$$f(u+k) - f(u) = (f'(u) + R_u(k)) \cdot k \text{ ,gäller för godtyckligt } k \tag{1}$$

Låt:

$$u = g(a) \qquad\qquad k = g(a+h) - g(a)$$

Insättning i (1) ger:

$$f(g(a+h)) - f(g(a)) = (f'(g(a))) + R_{g(a)}(g(a+h) - g(a)) \cdot (g(a+h) - g(a))$$

Divdera med $h \neq 0$

$$\frac{f(g(a+h) - f(g(a)))}{h} = (f'(g(a)) + R_{g(a)}(g(a+h) - g(a))) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Låt $h \to 0$:

$$\frac{d}{dx}f(g(x))|_{x=a} = f'(g(a)) \cdot g'(a),\ h \to 0$$

Exempel 1.4.
2× *kedjeregeln.*

$$\frac{d}{dx}f_1(f_2(f_3(x))) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$$

Exempel 1.5.
Antag:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Vi ser direkt att $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$.
Fråga: *Är $f(x)$ deriverbar i $x = 0$?*
För $x \neq 0$

Anmärkning 1.
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) \\ &= \underbrace{2x \cdot \sin(\frac{1}{x})}_{\to 0 \text{ då } x \to 0} - \underbrace{\cos(\frac{1}{x})}_{\text{saknar gränsvärde då } x \to 0} \end{aligned}$$

Betrakta $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} \\ &= h \cdot \sin(\frac{1}{h}) \to 0 \text{ då } h \to 0 \end{aligned}$$