Linjär Algebra
Föreläsning 5

Erik Sjöström

November 11, 2015

1 Matrisvektorprodukt

Definition 1.1. *Låt* $A = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \end{bmatrix}$ *och* $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ *Då defineras matrisvektorprodukten som:*

$$A \cdot \vec{v} = v_1 \cdot a_1 + v_2 \cdot a_2 + \cdots + v_n \cdot a_n$$

Exempel 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Anmärkning 1.
Man får samma svar om man beräknar skalärprodukten mellan raderna i A och kolmunen i $\vec{v}$

Räkneregler för matrisvektorprodukten:
A och B är $(m \times n)$ matriser och $\vec{v}$, $\vec{u}$ $(nx1)$ kolumnvektorer, $k \in \mathbb{R}$

- $A(\vec{v} + \vec{u}) = A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}$
- $(A + B) \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{v} + B \cdot \vec{v}$
- $A(k \cdot \vec{v}) = k \cdot (A \cdot \vec{v}) = (k \cdot A) \cdot \vec{v}$

2 Matrismultiplikation

Definition 2.1. *Låt en matris A vara av storlek $(m \times n)$, och en matris B vara av storlek $(n \times p)$ med kolumnerna $b_1, b_2, \ldots, b_p$ då är matrismultiplikationen $A \cdot B$ den $(m \times p$ matris vars kolumner är, $A \cdot b_1, A \cdot b_2, \ldots, A \cdot b_p$ dvs:*

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_p \end{bmatrix}$$

Exempel 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Problemt blir nu att räkna ut tre matrisvektorprodukter:

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 6 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 4 - 5\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-5)(-2) & 1\cdot 6 - 5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Det är oftast enklare att beräkna skalärprodukten mellan raderna i A och kolumnerna i B.

Anmärkning 2.
Storlekarna (typerna) måste stämma överens för att matrismultiplikation skall var definierad. Dvs om A är en $(m \times n)$ matris, och B en $(i \times j)$ matris, så är matrismultiplikationen:

$$A_{m\times n} \cdot B_{i\times j}$$

definierad omm $n = i$. Storleken på den resulterande matrisen blir $m \times j$

2.1 Räkneregler

Låt A,B,C vara matriser, och $\vec{v}$ en kolumnvektor definierade så att följande operationer är giltiga. Då gäller:

- $A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$ för $k \in \mathbb{R}$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- $A \cdot (B \cdot \vec{v}) = (A \cdot B) \cdot \vec{v}$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Anmärkning 3.
OBS!

- *Det gäller oftast att $A \cdot B \neq B \cdot A$*
- *Om $A \cdot B = A \cdot C$ kan man inte dra slutsatsen att $B = C$*
- *Om $A \cdot B = \mathbb{O}$, kan man ej dra slutsatsen att $A = \mathbb{O}$ eller $B = \mathbb{O}$*

Exempel 2.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

Exempel 2.3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Då är:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Transponat

Definition 3.1. *Transponatet av en matris A ges av A^T vars kolumner är raderna i A.*

Exempel 3.1.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ så är } A^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exempel 3.2.
Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ vara en kolumnvektor. Då är:

$$\text{Den inre produkten: } \vec{u}^T \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1^2 + u_2^2$$
$$\text{Den yttre produkten: } \vec{u} \cdot \vec{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

3.1 Räkneregler

Låt A,B vara matriser så att följande operationer är giltiga, $k \in \mathbb{R}$.

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \leftarrow$ observera ordningen.

Definition 3.2. *En $A_{n\times n}$ matris är symetrisk om $A = A^T$*

Exempel 3.3.
Om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ *så är* $\vec{u} \cdot \vec{u}^T$ *symertrisk.*

4 Inverterbara matriser

Definition 4.1. *En $(n \times n)$ matris vars diagonalelement är 1 och alla andra element är 0 kallas identitetsmatris, betecknas $\mathbb{I}_n$*

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel 4.1.

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition 4.2. *En $(n \times n)$ matris A är inverterbar om det finns en matris $C - n \times m$ så att:*

$$C \cdot A = \mathbb{I}_n$$
$$A \cdot C = \mathbb{I}_n$$

C kallas då för inversen till A. Betecknas A^{-1}

Exempel 4.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Då är:

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$$
$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$$

dvs $C = A^{-1}$

Sats 4.1.
Låt $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. *Om* $d = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$. *Så är* A *inverterbar, och inversen ges av:*

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exempel 4.3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad d = 2(-7) - (-3)5 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

d kallas för determinanten till A.