Analys
Föreläsning 5

Erik Sjöström

January 27, 2016

1 Förre föreläsningen

1.1 Gränsvärden

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

f är en reell funktion
$a \in \mathbb{R}$

$$D_f \cap ((a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)) \neq \emptyset$$

för alla $\delta > 0$

FIGUR

2 Kontinuitet

$f(x)$ är en reell funktion
$a \in \mathbb{R}$
Vi säger att $f(x)$ kontinuerlig i a om:

- $a \in D_f$
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Vi säger att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion om $f(x)$ är kontinuerlig i a för varje $a \in D_f$

Anmärkning 1.
Polynomfunktioner, rationella funktioner, trigonometriska funktioner är kontinuerliga funktioner.

Exempel 2.1.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

FIGUR

Anmärkning 2.
Summor, produkter och sammansättningar av kontinuerliga funktioner är också kontinuerliga.

Exempel 2.2.
f, g kontinuerliga funktioner, $D_f = D_g$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Påstår: *$f+g$ kontinuerlig funktion*
Ska visa att $f+g$ är kontinuerlig i a för varje $a \in D_f = D_g$
Vi ser att:

- $a \in D_f = D_g$
- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ *existerar ty:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\overbrace{(f+g)(x)}^{f(x)+g(x)} &= \text{f,g kontinuerliga i a och alltså existerar } \lim_{x\to a} f(x) \text{ och } \lim_{x\to a} g(x) \\ &= \{\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\}\end{aligned}$$

- $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ *ty:*

$$\begin{aligned}(f+g)(a) &= f(a) + g(a) \\ &= \{f(a) = \lim_{x\to a} f(x), g(a) = \lim_{x\to a} g(x)\} \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ &= \lim_{x\to a}(f+g)(x)\end{aligned}$$

Exempel 2.3.
Polynomfunktionen:

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Term: ax^k, k är ett positivt heltal
ax^k kan ses som $\underbrace{axx...x}_{k\ st}$

Sats 2.1.
Största och minsta värde
f reell funktion, $[a,b] \subset D_f$, f är kontinuerlig.
Slutsats: *$\alpha, \beta \in [a,b]$ sådana att:*

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)\ \forall x \in [a,b]$$

α, β behöver inte vara entydigt bestämda.

FIGUR

Anmärkning 3.
Vad kan hända om f inte är kontinuerlig på $[a,b]$?

FIGUR

Då gäller ej satsen.

Exempel 2.4. *Figur*

Sats 2.2.
Mellanliggande värden
f är en reell funktion
$[a, b] \subset D_f$
f är kontinuerlig funktion.

$$c \in (min(f(a), f(b)), max(f(a), f(b)))$$

FIGUR

Slutsats: *Det finns $\xi \in (a, b)$ sådant att $f(\xi) = c$*

Exempel 2.5.

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

Påstår: *$f(x) = 0$ har en rot i intervallet $[1, 2]$*

Anmärkning 4.
$f(x)$ är kontinuerlig.

$$f(1) = -1 < 0 \qquad f(2) = 5 > 0$$

Med $c = 0$ ger satsen om mellanliggande värden att det finns $\xi \in (1, 2)$ sådant att $f(\xi) = 0$, så ξ är en rot till $f(x) = 0$

3 Derivata

f är en reell funktion
$a \in \mathbb{R}$
Antag att $(a - \delta, a + \delta) \subset D_f$

FIGUR

$h \neq 0$ kan vara > 0 eller < 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Om gränsvärdet existerar så kallas vi det för derivatan av $f(x)$ i $x = a$
Beteckning: $f(a) = Df(a) = \frac{d}{dx} f(a)$
Geometrisk tolkning: $f\prime(a)$ = lutningen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$
Vi säger att f är deriverbar i a om:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existerar.

Exempel 3.1.

$$f(x) = x^m, \text{ } m \text{ positivt heltal}$$

Fixera $a \in \mathbb{R}$. Betrakta:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(a + h)^m - a^m}{h} \\ &= \{b^m - c^m = (b - c)(b^{m-1} + b^{m-2} \cdot c + b^{m-3} \cdot c^2 + ... + c^{m-1})\} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{h}(\underbrace{(a+h)^{m-1}}_{\to a^{m-1} \ d\mathring{a} \ h\to 0} + \underbrace{(a+h)^{m-2}}_{\to a^{m-1} \ d\mathring{a} \ h\to 0} \cdot a + ... + \underbrace{a^{m-1}}_{\to a^{m-1} \ d\mathring{a} \ h\to 0}) \to ma^{m-1}$$