Linjär Algebra
Föreläsning 10

Erik Sjöström

November 25, 2015

1 System av linjär ekvationer

Ett system av linjära ekvationer med n obekanta skrivs på detta sätt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Där a_{ij}, b_j är reella tal och x_j är obekant.
Man söker en lösning sådan att alla ekvationer är uppfyllda samtidigt.
Med matris-vektor beteckning skrivs ekvationssystemet som:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}}^{\text{Koefficientmatris}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{\text{Obekanta}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}^{\text{Högerled}}$$

Två fundamentala frågor:

1. Finns det en lösning? (Existens)
2. Om det finns en lösning, finns det flera? (Entydighet)

Exempel 1.1.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 & \textit{Två ekvationer} \\ -x_1 + 3x_2 = 3 & \textit{Två obekanta} \end{cases}$$

Dessa två ekvationer kan tolkas som två linjer:

$$x_2 = \frac{x_1 + 1}{2} = l_1 \qquad\qquad x_1 = 3x_2 - 3 = l_2$$

Här ska det vara en figur

Lösningen ges av skärningen mellan linjerna:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Det finns inga fler lösningar eftersom det bara finns en skärningspunkt.

2 $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}^n$ kan vi ej rita linjer!
Det allmänna tillvägagångssättet är att bestämma en lösning med Gauseliminering på totalmatrisen som består av.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \vec{b} \end{array}\right]$$

Där $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen och $\vec{b}$ är högerledet. Tillåtna elementära radoperationer i gauseliminering är:

- Addition: Addera till en rad en multipel av en annan rad
- Platsbyte: Låt två rader byta plats
- Skalning: Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$

Dessa operationer bibehåller lösningsmängden.

Exempel 2.1.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 & \textit{Två ekvationer} \\ -x_1 + 3x_2 = 3 & \textit{Två obekanta} \end{cases}$$

Med matris-vektor beteckning:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Och om vi nu skriver om det som totalmatrisen ovan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Vi vill ha noll i det nedre vänstra hörnet. Så vi använder additionsoperationen, och adderar rad 1 till rad 2:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Nu vill vi sätta det första elementet i den andra kolumnen (-2) till 0. Det gör vi genom att kombinera skalnings- och additions-operationen. Vi adderar alltså 2 · Rad 2 till Rad 1.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2 \cdot R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Om vi nu stoppar tillbaka det i ekvationssystemet får vi:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 3 \\ 0x_1 + 1x_2 = 2 \end{cases}$$

Dvs:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Vi har nu löst ekvationssystemet med gauseliminering och:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Är skriven på reducerad trappstegsform.

Anmärkning 1.
Man använder '$\sim$' för att marker att matriserna är radekvivalenta, samma lösningsmäng.
Obs: De är ej lika.

Nu tittar vi på systemet **A**