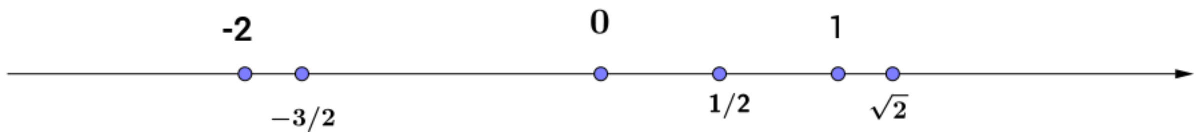
Analys
Föreläsning 1 - Reella tal och absolutbelopp

Erik Sjöström

January 18, 2016

1 Reella tal



- $\mathbb{R}$ = mängden av reella tal

- $a \in \mathbb{R}$ = a är ett element i $\mathbb{R}$ (a är ett reellt tal)

1.1 Algebraiska egenskaper

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b, a-b, a \cdot b, \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \ (a \neq 0, b \neq 0)$$

1.2 Ordningsrelation på $\mathbb{R}$

- $a < b$ om:

- $a > b$ om:

- $a \leq b$ om $a < b$ eller $a = b$

1.3 Räkneregler, $a, b \in \mathbb{R}$

- $c \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow (a+c) < (b+c)$
- $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $a < b \Rightarrow (a \cdot c) < (b \cdot c)$
- $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, $a < b \Rightarrow (a \cdot c) > (b \cdot c)$

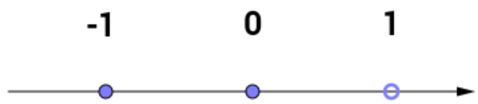
Exempel 1.1.
Bestäm $x \in \mathbb{R}$ så att:

$$1 \leq 2x + 3 < 5$$

Vi har:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq 2x+3 < 5\} &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq 2x+3, \ \textit{och} \ , 2x+3 < 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 2x, \ \textit{och} \ , 2x < 2\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x, \ \ och \ , x < 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}$$



$$= [-1, 1)$$

1.4 Intervallbeteckningar, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$-\infty, \infty \notin \mathbb{R}$

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Exempel 1.2.
Bestäm det x som uppfyller olikheten:
$$\frac{x-1}{2} < -5x$$
Lösning:
$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{2} < -5x &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + 5x < 0 \\
&\Leftrightarrow (\frac{1}{2} - 5)x - \frac{1}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{11}{2}x - \frac{1}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{11}{2}x < \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x < \frac{1}{11} \\
&\Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{11})
\end{aligned}$$

Exempel 1.3.
Bestäm det x som uppfyller olikheten:
$$\frac{x-1}{2} < \frac{-5}{x}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{2} < \frac{-5}{x} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{5}{x} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)+5\cdot 2}{2x} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-x+10}{2x} < 0\end{aligned}$$

Kvadratkomplettera!

$$x^2 - x + 10 = (x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 10 = \overbrace{\overbrace{(x-\frac{1}{2})^2}^{\geq 0} + \frac{39}{4}}^{= \frac{39}{4}\ d\aa\ x = \frac{1}{2}} \geq \frac{39}{4} > 0$$

Alltså:

$$\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2} < \frac{-5}{x}\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x+10}{2x} < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = (-\infty, 0)$$

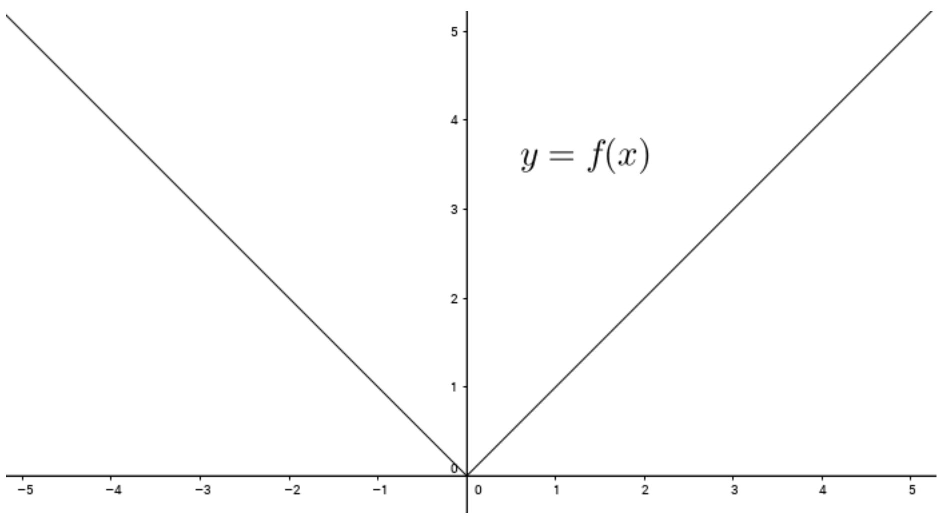
2 Absolutbelopp

Definition 2.1.

$$|a| = \begin{cases} a\ om\ \geq 0 \\ -a\ om\ < 0 \end{cases}$$

dvs $|a|$ *= avståndet mellan 0 och a.*

Sätt $f(x) = |x|$:



2.1 Räkneregler $a, b \in \mathbb{R}$

- $|-a| = |a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (triangelolikheten)
- $a \leq |a|$
- $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

Exempel 2.1.
Bestäm $x \in \mathbb{R}$ så att:

$$|x^2 - 5x + 6| < 1$$

Metod 1:

$$-1 < x^2 - 5x + 6 < 1$$

Metod 2:

Dela upp i olika fall.

Metod 3:

Studera grafen till $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$