

Linjär Algebra

Föreläsning 7

Erik Sjöström

November 17, 2015

1 Avbildningar

En avbildning:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

är en regel som till varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

- \mathbb{R}^n kallas för definitionsmängd (alla tillåtna \vec{x})
- \mathbb{R}^m kallas för målmängd
- För ett givet \vec{x} kallas $f(\vec{x})$ för bilden av \vec{x} (under avbildningen f)

Exempel 1.1.

Låt $f(x) = 3 \cdot x$ vara avbildningen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Bilden av $x = \frac{5}{3}$ är 5 ty $f(\vec{x}) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$

Exempel 1.2.

Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Dvs:

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

Bilden av $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ är $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ty:

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså en avbildning:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Definition 1.1. En avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om:

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $f(c \cdot \vec{u}) = c \cdot f(\vec{u})$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$

Sats 1.1.

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och låt $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, då är f en linjär avbildning.

Visas genom att visa att matrisvektorprodukten uppfyller villkoren för en linjär avbildning.

Proof. Låt \vec{x}_1 och \vec{x}_2 vara två stycken $(n \times 1)$ vektorer, vi har då:

- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot \vec{x}_1 + A \cdot \vec{x}_2 = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(c \cdot \vec{x}_1) = A \cdot (c \cdot \vec{x}_1) = (c \cdot A) \cdot \vec{x}_1 = c \cdot (A \cdot \vec{x}_1) = c \cdot f(\vec{x}_1)$

□

Sats 1.2 (Bassatsen).

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns det en entydigt bestämd matris $A_{m \times n}$ sådan att $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

Proof. i \mathbb{R}^2

Varje vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna:

$$\vec{x} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har då:

$$f(\vec{x}) = f(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = x \cdot f(\vec{e}_x) + y \cdot f(\vec{e}_y) = \overbrace{\begin{bmatrix} f(\vec{e}_x) & f(\vec{e}_y) \end{bmatrix}}^{A = \text{Standardmatrisen}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Avbildningen bestäms helt av vad den gör med \vec{e}_x och \vec{e}_y .

□

Exempel 1.3.

Låt $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$ vara avbildningen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Bestäm standardmatrisen A .

Lösning: Eftersom:

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

får vi:

$$f(\vec{e}_x) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

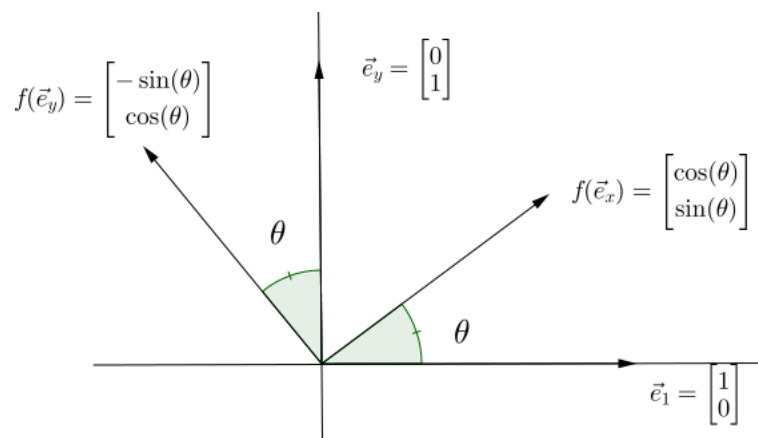
$$f(\vec{e}_y) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vi får då standardmatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.4.

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkeln θ . Bestäm standardmatrisen A .



$$f(\vec{e}_x) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{e}_y) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Kallas även rotationsmatrisen.

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Bilden av en linje L där:

$$L : \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}$$

$t \in \mathbb{R}$

Blir en linje som går genom en punkt $A \cdot \vec{x}_0$ med riktningsvektor $A \cdot \vec{v}$, ty:

$$f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}) = f(\vec{x}_0) + t \cdot f(\vec{v}) = A \cdot \vec{x}_0 + t \cdot A \cdot \vec{v}$$

Följden blir att vi kan avbilda n-hörningar.

Exempel 1.5.

Rotera ett område vars hörn består av:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\pi/6$ radianer moturs.

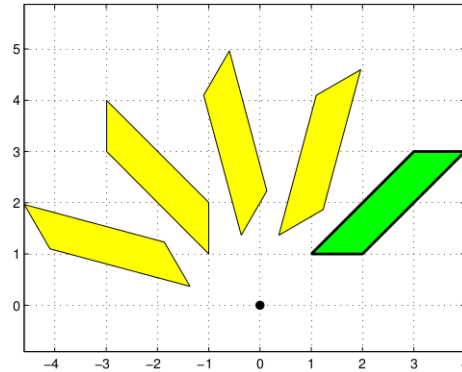
$$A = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x}_2 = \dots$$

$$A \cdot \vec{x}_3 = \dots$$

$$A \cdot \vec{x}_4 = \dots$$



Translation (förflyttning) med vektor $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ ges av avbildningen:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Är avbildningen linjär?

Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{t} \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Den är ej linjär, så det finns ingen standardmatris. Men vi kan såklart fortfarande räkna på det.

Exempel 1.6.

Translatera området vars hörn består av:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

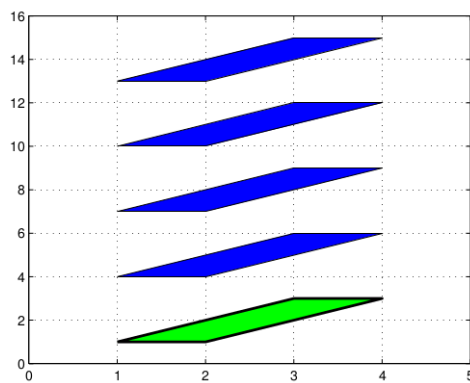
$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt $\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$f(x_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$f(x_2) = f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



2 Rotation och translation i \mathbb{R}^3

Går till på samma sätt som i \mathbb{R}^2

Exempel 2.1.

Rotation moturs θ i radianer i xy -planet

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara:

$$f(\vec{e}_x) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{e}_y) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{e}_z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Standardmatris:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vilket då blir en rotation moturs runt Z -axeln.