Linjär Algebra
Föreläsning 16

Erik Sjöström

December 8, 2015

1 Basbyten

Hur utnyttjar man basbyten? Låt:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Antag att vi vill rotera $\vec{x}$ runt axeln vars riktning är $\vec{v}$ (som ej är $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$-axlarna)
Rotationen ska ske med vinkeln θ moturs. Relativt $\vec{v}$:s riktning. Vi kan via basbyte återföra denna rotation till en rotation runt t.ex. x_1-axeln (som vi ju har en rotationsmatris för,se lab 4).
Vi bildar en bas runt $\vec{v}$. Låt $\mathbf{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ vara en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ och $\vec{g}_1 = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$
Låt $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \vec{g}_1 & \vec{g}_2 & \vec{g}_3 \end{bmatrix}$ vara basbytesmatrisen, dvs:

$$\mathbf{G} \cdot \vec{x}_\mathbf{G} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}_\mathbf{G} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \vec{x}$$

Rotera $\vec{x}_\mathbf{G}$ runt $\vec{g}_1$ axeln med standardmatrisen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Vi får $\mathbf{A} \cdot \vec{x}_\mathbf{G}$ (rotationen uttryckt i basen $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$). Uttryck rotationen i standardbasen:

$$\mathbf{G} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_\mathbf{G})$$

Vi har alltså beräknat:

$$\overbrace{\mathbf{G} \cdot \quad \overbrace{\mathbf{A} \cdot \overbrace{\mathbf{G}^{-1} \cdot \vec{x}}^{\vec{x}_\mathbf{G}}}^{\text{roterad } \vec{x}_\mathbf{G} \text{ i basen } \mathbf{G}}}^{\text{roterad } \vec{x} \ (\vec{x}_\mathbf{G} \text{ uttryckt i } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))}$$

Låt en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ha matrisen $\mathbf{A}_\mathbf{G}$ relativt basen $\mathbf{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_n$
Då har avbildningen relativt standardbasen, matrisen:

$$\mathbf{A}_\mathbf{E} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^{-1}$$

2 Linjära avbildningar

Till en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hör en $(m \times n)$-matris $\mathbf{A}$ sådan att:

$$f(\vec{x})_\mathbf{E} = \mathbf{A}_\mathbf{E} \cdot \vec{x}_\mathbf{E} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(f(\vec{e}_2)) & ... & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

(i standardbasen $\mathbf{E}$). Vi har antagit förut att vi har opererat i standardbasen.

Den allmänna formulering av Bassatsen: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt $\mathbf{G} = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, ..., \vec{g}_m)$ vara en bas i $\mathbb{R}^m$ och låt $\mathbf{H} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, ..., \vec{h}_n)$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$.
Då gäller att standardmatrisen för f relativt baserna $\mathbf{G}$ och $\mathbf{H}$ ges av:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{H}\to\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} f(\vec{h}_1)_{\mathbf{G}} & f(\vec{h}_2)_{\mathbf{G}} & ... & f(\vec{h}_n)_{\mathbf{G}} \end{bmatrix}$$

där $f(\vec{h}_i)_{\mathbf{G}}$ är $f(\vec{h}_i)_{\mathbf{G}}$ i basen $\mathbf{G}$.

Exempel 2.1.
I rotationsexemplet har vi $m = n = 3$, $\mathbf{G} = \mathbf{H}$. Dvs:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos t\theta \end{bmatrix}$$

är standardmatris: $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G} : f(\vec{x}_{\mathbf{G}}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_{\mathbf{G}}$

3 Egenvärden och egenvektorer

Givet en kvadratisk matris $A_{(n\times m)}$, bestäm en vektor $\vec{v} \neq 0$ och tillhörande tal λ så att:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$ är en egenvektor till $\mathbf{A}$ om $\vec{v}$ och $\mathbf{A} \cdot \vec{v}$ är parallella.

Exempel 3.1.
Givet en matris och en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Så är vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor och $\lambda = 2$ egenvärde ty:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor och $\lambda = 1$ är det tillhörande egenvärdet ty:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är inte en egenvektor, eftersom:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är ej parallell med $\vec{v}$.

Om $\vec{v}$ är en egenvektor så är den en lösning till:

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$

ty:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} &\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{v} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset \end{aligned}$$

- Matrisen $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})$ är inte inverterbar om:

$$\overbrace{\mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I} = 0)}^{\text{karakteristiska ekvationen}}$$

Exempel 3.2.
För:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har vi att:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 4 = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Som har lösningen:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Egenvektorn som hör till egenvärdet $\lambda_1 = -1$ får vi genom att lösa ekvationen:

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = (\mathbf{A} + \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \emptyset$$

Dvs:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Låt $\vec{v}_2 = t$, vi får då $\vec{v}_1 = -2t$, dvs:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t \qquad \textit{där } t \neq 0 \textit{ kan väljas godtyckligt}$$

Egenvektorn som hör ihop med $\lambda_2 = 3$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där $t \neq 0$ kan väljas godtyckligt.

Vi ser att om $\vec{v}$ är en egenvektor så är $t \cdot \vec{v}$ $(t \neq 0)$ det också. (Ofta väljs t så att $||\vec{v}|| = 1$)

- Ett egenvärdesproblem för en $(n \times m)$-matris har n stycken egenvärden. Med tillhörande egenvektorer. (Egenvärdena kan vara multipla och behöver ej vara reella).