Analys
Föreläsning 3

Erik Sjöström

January 25, 2016

1 Polynomdivision

Exempel 1.1.

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \text{ grad(P) = 3}$$
$$Q(x) = x^2 + 1 \text{ grad(Q) = 2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 3 \\ \hline x^2+1 & 2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \\ & -2x^3 \qquad\quad - 2x \\ \hline & -3x^2 + x + 4 \\ & 3x^2 \qquad + 3 \\ \hline & x + 7 \end{array}$$

Vi har:

$$P(x) = \underbrace{2x - 3}_{\text{grad 1 = grad(P) - grad(Q)}} Q(x) + \underbrace{x + 7}_{\text{grad 1 < grad Q}}$$

<u>Allmänt:</u> Givet polynom $P(x), Q(x)$ där grad $Q \leq grad(P)$.
Då finns polynom $K(x)$ (kvotpolynom) och $R(x)$ (restpolynom), sådana att:

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x)$$
$$grad(K) = grad(P) - grad(Q)$$
$$grad(R) < grad(Q)$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2 Elementära funktioner

Polynomfunktioner:

$$f(x) = P(x), \qquad x \in \mathbb{R} = D_f$$

Rationella funktioner:

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}, \text{ där } P_1(x), P_2(x) \text{ är polynom} \qquad x \in \{x \in \mathbb{R} : P_2(x) \neq 0\} = D_f$$

Trigonometriska funktioner:

$$cos(x) \qquad sin(x) \qquad tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

FIGUR

Vi mäter vinklar i radianer. En vinkel är x radioner om motsvarande cirkelbåge har längden x. Vi räknar vinklar med tecken (positiv i moturs riktning, negativ i medurs). Omkretsen av enhetscirkeln har längden 2π per definition. Omvandling mellan grader och radianer. Givet en vinkel av storlek t radianer, $\tilde{t}$ grader ges av:

$$t = \tilde{t} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

Vi räknar från och med nu med radianer.
Definition av $\cos(t), \sin(t)$:

FIGUR

Egenskaper för $\cos(t), \sin(t)$:

- $\cos(t), \sin(t) \in [-1, 1]$, $t \in \mathbb{R}$
- $\cos(t), \sin(t)$ 2π-periodiska funktioner på $\mathbb{R}$
- $\cos(t)$, jämn funktion ty $\cos(-t) = cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $\sin(t)$, udda funktion ty $\sin(-t) = -\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $\cos(t), \sin(t)$, för $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$
  - $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
  - $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
  - $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
- $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$
- $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$

Graferna för cos(t) och sin(t)

FIGUR

Additionsformler för cos, och sin

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
  Eftersom:

$$a = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$
$$b = (\cos(\beta), \sin(\beta))$$
$$a \cdot b = |a||b| \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Kan även uttryckas som:
$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \text{ ty } |a| = |b| = 1$$

Trigonometriska ettan:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \tag{1}$$

Ersätt β med $-\beta$ i (1) $\Rightarrow$

- $\cos(\alpha+\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos(\alpha)\overbrace{\cos(-\beta)}^{\text{jämn}} + \sin(\alpha)\overbrace{\sin(-\beta)}^{\text{udda}} \tag{2}$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{3}$$

- $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)\cdot\overbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}^{0} - \sin(\alpha)\overbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}^{1} = -\sin(\alpha)$

- $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \overbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}^{0}\cos(\alpha) + \overbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}^{1}\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$

- $\sin(\alpha+\beta)$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)) \tag{4}$$
$$= \cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta) \tag{5}$$
$$= \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-a)}_{\sin(\alpha)}\cos(\beta) + \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}_{\cos(\alpha)}\sin(\beta) \tag{6}$$
$$= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{7}$$

Ersätt β med $-\beta$ i (7) vi får då:

- $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Formler för dubbla vinkeln för sin och cos:

- $\cos(2t)$

$$\begin{aligned}\cos(2t) = \cos(t+t) &= \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t)\\ &= \cos^2(t) - \sin^2(t)\\ &= \text{ trigonometriska ettan}\\ &= \cos^2(t) - (1-\cos^2(t))\\ &= 2\cos^2(t) - 1\\ &= \text{ trigonometriska ettan}\\ &= 1 - 2\sin^2(t)\end{aligned}$$

- $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$

Produktformler

- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

Definition av tan(t)

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad t \in \{t \in \mathbb{R} : \cos(t) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + m\cdot\pi : \text{ m heltal}\}$$

FIGUR

Triangeln ... och ... är likformiga $\Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$

Additionsregel för tan(t)

- $\tan(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$