Linjär Algebra
Föreläsning 12

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Homogena ekvationssystem

Exempel 1.1.
Låt $\mathbf{A}\cdot = \emptyset$ *ges av:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lösning är förstås:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den lösningen kallas för den triviala lösning.
Finns det fler lösningar? Vi gausseliminerar:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \cdot -\tfrac{8}{3} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = R_3 \\ = R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{8/3} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Låt $x_4 = t$*, (*x_4 *är en fri variabel)*
Vi får:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{4} \cdot t \\ x_2 = \frac{3}{4} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t = \frac{5}{4} \cdot t \\ x_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot t = \frac{1}{4} \cdot t \end{cases}$$

Vi får alltså svaret:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

Dvs: En linje i $\mathbb{R}^4$ *genom origo.*

Den homogena ekvationen $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har icke-trivial lösning omm reducering av totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \emptyset \end{array}\right]$ till trappstegsform ger minst en fri kolumn.

Sats 1.1.
Antag att ekvationen $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har en lösning $\vec{x}_p$ (partikulärlösning). Då gäller att alla lösningar till $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ kan skrivas som:

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

Där $\vec{x}_h$ är lösningen till den homogena ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \emptyset$$

Exempel 1.2.
Vi ser på $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ där:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Radreducering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} +R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

x_3 är en fri variabel. Låt $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Vi får:

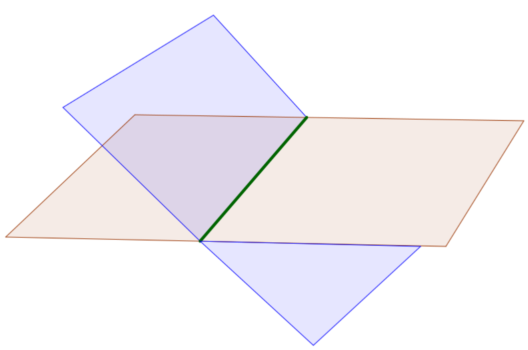
$$\begin{cases} x_1 = 8 + 7t \\ x_2 = 4 + 4t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \textit{dvs} \qquad \vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\vec{x}_p} + \overbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t}^{\vec{x}_h}$$

Obs: Vi har:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_h = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gemoetrisk tolkning: Två plan som skär:



$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ är bara en av punkterna på linjen, nämligen den då $t = 0$.

$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ är linjen i $\mathbb{R}^3$ förskjuten $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ från origo.

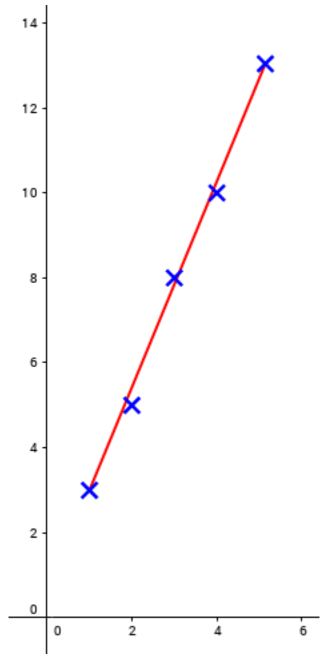
2 Överbestämda Ekvationssystem

Definition 2.1. *Ett överbestämt ekvationssystem:*

- *Fler ekvationer än obekanta.*
- *Typexempel: Man har en mängd (mät)data som ska anpassas till någon funktion.*

Exempel 2.1.

t	1	2	3	4	5	*tid*
t	3	5	8	10	13	*uppmätt data*



Mätdatan blir nästan en linje, så man vill anpassa en rät linje:

$$y = k \cdot t + m$$

till mätdatan. Då vill man att:

$$\begin{cases} 3 = k \cdot 1 + m \\ 5 = k \cdot 2 + m \\ 8 = k \cdot 3 + m \\ 10 = k \cdot 4 + m \\ 13 = k \cdot 5 + m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså 5 ekvationer och 2 obekanta.
Det finns ingen exakt lösning eftersom punkterna ligger exakt på en linje.

- *Vi vill hitta en lösning som blir så bra som möjligt i minsta kvadratmetodens mening*

Titta på $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ där:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

kan skrivas som en linjärkombination:

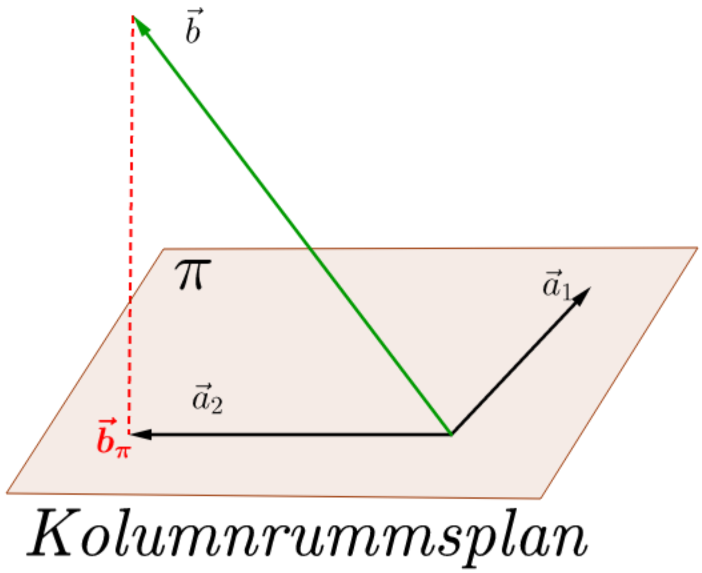
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} b1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Definition 2.2. *<u>Kolumnrummet</u> till en matris $\boldsymbol{A}$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolumnerna i $\boldsymbol{A}$.*

- För ekvationen $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gäller att den har en lösning bara om $\vec{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna i $\mathbf{A}$.
- Kolumnrummet utgör ett plan, t.ex. alla linjärkombinationer av:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

utgör ett plan i $\mathbb{R}^3$



Om $\vec{b}$ inte ligger i planet så saknas lösning till:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Grundidén för minsta kvadratmetoden är att projicera högerledsekvationen $\vec{b}$ ortogonalt på kolumnrummer för $\mathbf{A}$ och sedan lösa ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}_\pi$$

där $\vec{b}_\pi$ är ortogonala projektionen.
På så vis fås en lösning $\vec{x}_0$ där avståndet:

$$||\overbrace{\mathbf{A} \cdot \vec{x}_0}^{b_\pi} - \vec{b}|| \leq ||\overbrace{\mathbf{A} \cdot \vec{x}}^{\text{En punkt}} - \vec{b}||$$

Låt:

$$\vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_0 - \vec{b}$$

$\vec{r}$ är ortogonal mot kolumnerna i $\mathbf{A}$. Dvs:

$$\mathbf{A}^T \cdot \vec{r} = \emptyset$$

Dvs:

$$\emptyset = \mathbf{A}^T \cdot \vec{r} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}_0 - \vec{b}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x}_0 - \mathbf{A}^T \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^T \cdot \vec{b}$$

Med andra ord: $\vec{x}_0$ är lösningen till:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^T \cdot \vec{b}$$

Anmärkning 1.
Detta kallas för normalekvationen.

Exempel 2.1. (forts)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi får normalekvationerna:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^T \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142 \\ 39 \end{bmatrix}$$

Med lösningen:

$$\begin{cases} k = \frac{5}{2} \\ m = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Dvs vi får linjen:

$$y = k \cdot t + m = \frac{5}{2} \cdot t + \frac{3}{10}$$