Analys
Föreläsning 7

Erik Sjöström

February 1, 2016

1 Kedjeregeln

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Sats 1.1.

$$\lim_{h \to o} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Sats 1.2.

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin(h)}{h} &= \{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\} \\
&= \frac{1}{h}(\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)) \\
&= \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \cdot \cos(x) + \frac{1}{h}(\underbrace{\cos(h)}_{-2\sin^2(\frac{h}{2})} - 1) \cdot \sin(x) \\
&= \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \overbrace{-2 \cdot \underbrace{\frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \frac{1}{4}}^{\to 0} \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

Eftersom $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
och $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \text{trigettan} = 1 - 2\sin^2(a)$
Alltså:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

□

Sats 1.3.

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Bevis: *Se förra föreläsningen*

Sats 1.4.

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{(\frac{d}{dx}\sin(x))\cos(x) - \sin(x)(\frac{d}{dx}\cos(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})^2 = 1 + (\tan(x))^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Exempel 1.1.

$$f(x) = 3 \cdot \sin^2(4\tan(\cos(x)))$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= 3 \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2(4\tan(\cos(x)))) \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \sin(4\tan(\cos(x))) \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\sin(4\tan(\cos(x)))}_{\cos(4\tan(\cos(x)))\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(3\tan(\cos(x))}_{4(1+\tan^2(\cos(x)))\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\cos(x)}_{-\sin(x)}}} \\
&= -24\sin(4\tan(\cos(x))) \cdot \cos(4\tan(\cos(x))) \cdot (1 + \tan^2(\cos(x))) \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

2 Implicit derivering

Exempel 2.1.

$$\begin{cases} y(x)\sin(x) = x^3 + \cos(y(x)) \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Beräkna $y'(0)$
Vi får:

$$\frac{d}{dx}(y(x)\sin(x)) = \frac{d}{dx}(x^3 + \cos(y(x)))$$

$$y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x) = 3x^2 + (-\sin(y(x))) \cdot y'(x)$$

Sätt $yx = 0$. *Vi får:*

$$y'(0) \cdot 0 + \underbrace{y(0) \cdot 1}_{\frac{\pi}{2}} = 0 - \underbrace{\sin(y(0))}_{1} \cdot y'(0)$$

Dvs:

$$y'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Exempel 2.2.

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}}$$

n är ett positivt heltal.
Notera:

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Implicit derivering:

$$n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = 1$$

Vi får:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x^{\frac{1}{n}(n-1)})^{-1} &= \frac{1}{n}(x^{1-\frac{1}{n}})^{-1} \\ &= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

Exempel 2.3.

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}}$$

Dubbelkolla! asdålawd

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})^m &= m \cdot (x^{\frac{1}{m}})^{m-1} \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\end{aligned}$$

Antag att $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Vi säger att: f växande på $[a, b]$ om $f(x) \leq f(\tilde{x})$ för alla $a \leq x \leq \tilde{x} \leq b$

FIGUR

f strängt växande på $[a, b]$ om $f(x) < f(\tilde{x}$ för alla $a \leq x < \tilde{x} \leq b$

FIGUR

Avtagande ... om $f(x) \geq f(\tilde{x})$ för alla $a \leq x < \tilde{x} \leq b$ osv fyll i asfafasf
Om f är växande är $-f$ avtagande och omvänt.
Om f är strängt växande är $-f$ strängt avtagande och omvänt.
Vi säger att f har ett heltal max i x_0 om det finns ett $\epsilon > 0$ sådant att:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ för all } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

FIGUR

x_0 kallas för lokal maxpunkt.
Vi säger att ... min ...

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ för all } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

...kallas för lokal minpunkt.
Vi säger att att x_0 är en lokal extrempunkt om x_0 är en lokal maxpunkt eller en lokal minpunkt.

Sats 2.1.
Antag att $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion.
Antag att $x_0 \in (a, b)$ är en lokal extrempunkt, och att f är deriverbar i x_0.
Då gäller:

$$f'(x_0) = 0$$

Proof. Antag att x_0 är en lokal maxpunkt.

$$h > 0 : \ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to \underbrace{f'(x_0)}_{\leq 0} \text{ då } h \to 0+$$

Samma differeanskvot:

$$h < 0 : \ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0} \text{ då } h \to 0-$$

Analogt bevisargument för x_0 lokal minpunkt. □

Sats 2.2.
Antag att $f[a, b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion.
Antag att f är deriverbar för alla $x \in (a, b)$, och att $f(a) = f(b)$
Då finns:

$$\xi \in (a, b) \textit{ så att } f'(\xi) = 0$$

Proof. FIGURER

FIGURER

FIGURER

FIGURER

□

Sats 2.3.
Medelvärdessatsen:
Antag att $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion.
Antag att f är deriverbar i (a, b)
Då finns:

$$\xi \in (a, b) \textit{ så att } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

FIGUR

Exempel 2.4.

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f'(0) = 0$$