Linjär Algebra
Föreläsning 13 - Determinanter

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Terminologi

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$

Exempel 1.1.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$25! = 25 \cdot 24 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \approx 1.5 \cdot 10^{25}$$

- Permutation är en uppräkning av {1,2,3,...,n} i en given ordning.

Exempel 1.2.
Det 3! *möjliga permutationerna av {1,2,3} nämligen:*

$$\{1,2,3\} \qquad \{1,3,2\} \qquad \{2,1,3\} \qquad \{2,3,1\} \qquad \{3,1,2\} \qquad \{3,2,1\}$$

- En permutation kallas udda om det krävs ett udda antal platsbyten för att överföra den till {1,2,...,n}, annars jämn.

Exempel 1.3.

Jämn	*Udda*	*Udda*	*Jämn*	*Jämn*	*Udda*
$\{1,2,3\}$	$\{1,3,2\}$	$\{2,1,3\}$	$\{2,3,1\}$	$\{3,1,2\}$	$\{3,2,1\}$

Låt $A_{n\times n}$ vara en 2×2-matris:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Möjliga produkter:	Permutation av kolumnindex:	Udda/jämn permutation:
$a_{11} \cdot a_{22}$	$\{1,2\}$	Jämn
$a_{12} \cdot a_{21}$	$\{2,1\}$	Udda

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exempel 1.4. *Här fattas det ett exempel eftersom Blom ej har lagt upp det på hemsidan än.*

Vi ser från determinanten av en matris $\mathbf{A}$ att:

- Om $\mathbf{A}$ innehåller en rad eller kolumn med bara nollor blir $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0$
- $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \mathbf{det}(\mathbf{A}^T)$
- Om $\mathbf{A}$ är triangulär:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & ... & x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & d_n \end{bmatrix} \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x & ... & d_n \end{bmatrix}$$

  så är $\mathbf{det}(\mathbf{A}) =$ produkten av diagonalelementent.

För att beräkna $\mathbf{det}(\mathbf{A}_{n\times n})$ behöver vi utfära cirka $n!$ multiplikationer och additioner.

Exempel 1.5.
$A_{25\times 25}$. *Det behövs cirka* $25! \approx 1.5 \cdot 10^{25}$ *operationer. Antag att en dator utför* 10^{12} *operationer/sekund då tar det cirka 500 tusen år att beräkna.*

Lösningen på detta problem är att radreducera (Gausseliminera) innan man beräknar $\mathbf{det}(\mathbf{A})$.
Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två $(n \times n)$-matriser och $\mathbf{B}$ vara resultatet av precis <u>en</u> radoperation på $\mathbf{A}$. Resultat beroende på operation blir:

- Addition: $\mathbf{det}(\mathbf{B}) = \mathbf{det}(\mathbf{A})$
- Platsbyte: $\mathbf{det}(\mathbf{B}) = -\mathbf{det}(\mathbf{A})$
- Skalning med k: $\mathbf{det}(\mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{det}(\mathbf{A})$

Exempel 1.6.
Beräkna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ + \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-5) = -20$$

Antalet operationer (mul, add, subtr) som behövs för Gausseliminering av en $(n \times n)$-matris är cirka $2n^3/3$.

Exempel 1.7.
Radreduceringen av en (25×25)*-matris blir* $2 \cdot 25^3/3 \approx 10.000$ *operationer, vilket tar mindre än 1 sekund.*

Låt $\mathbf{A}_{n\times n}$ gausselimineras till övertriangulär form:

$$\begin{bmatrix} d_1 & ... & x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & d_n \end{bmatrix}$$

med hjälp av addition och platsbyte. Då har vi att:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = (-1)^r \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$$

där r är antalet platsyten.
Om $\mathbf{A}$ ej är inverterbar så kommer minst ett av diagonalelementen att vara 0 (ty $\mathbf{A}$ ej har pivotelement i varje kolumn) $\Rightarrow \mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0$
Om $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0$, så måste något av diagonalelementen vara 0, dvs $\mathbf{A}$ har ej pivotelement i varje kolumn, dvs $\mathbf{A}$ är ej inverterbar.

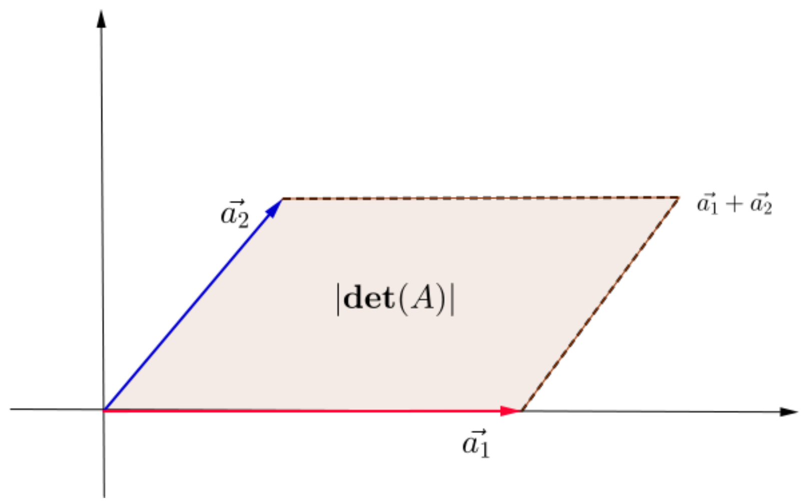
$$\underline{\mathbf{A} \text{ inverterbar} \Leftrightarrow \mathbf{det}(\mathbf{A}) \neq 0}$$

Sats 1.1.
Det gäller också att, om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är $(n \times n)$-matriser:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{det}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{det}(\mathbf{B})$$

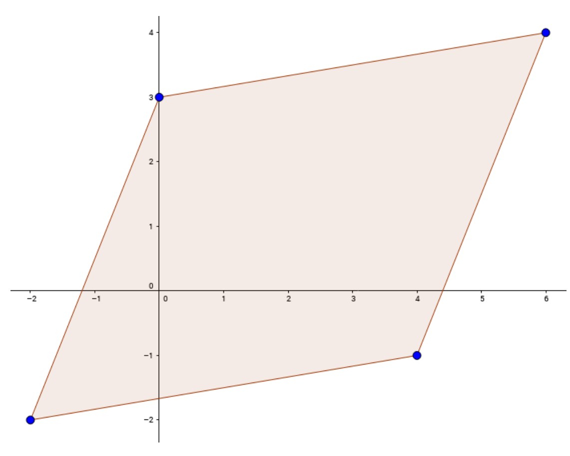
2 Area, volymskala

Kom ihåg (F6). Låt $\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$
Arean av parallellogrammet som spänns upp av $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ är: $|\mathbf{det}(\mathbf{A})|$



Exempel 2.1.
Bestäm arean av området vars hörn är:

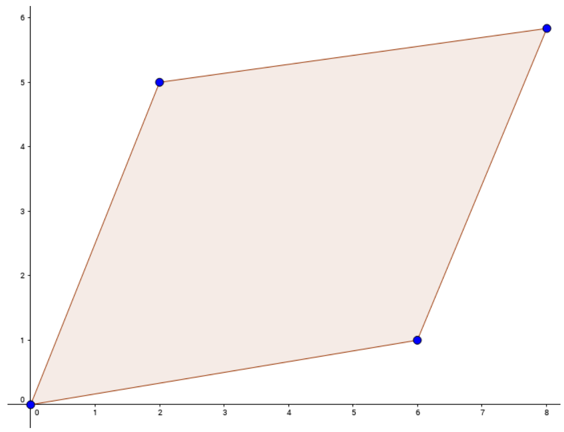
$$(-2, -2) \qquad (0, 3) \qquad (4, -1) \qquad (6, 4)$$



För att kunna beräkna arean mha determinanter måste vi translatera (flytta) parallellogrammet så att ett av hörnen hamnar i origo (0,0).

Vi translaterar med $\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Vi får:*

$(0,0)$ $(2,5)$ $(6,1)$ $(8,6)$



Arean är oförändrad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Parallellogrammet som spänns upp av $\vec{a}_1$ *och* $\vec{a}_2$ *består av alla punkter:*

$$\{s \cdot \vec{a}_1 + t \cdot \vec{a}_2 : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär transformation $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$.
Låt $\mathbf{D} : \{s \cdot \vec{d_1} + t \cdot \vec{d_2} : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ vara ett paralellogram i $\mathbb{R}^2$.
Vad blir arean av $f(\mathbf{D})$? (arean av $\mathbf{D} = |\mathbf{det}(\begin{bmatrix}\vec{d_1} & \vec{d_2}\end{bmatrix})|$)

$$f(\mathbf{D}) = f(s \cdot \vec{d_1} + t \cdot \vec{d_2}) = s \cdot f(\vec{d_1}) + t \cdot f(\vec{d_2}) = \overbrace{s \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{d_1} + t \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{d_2}}^{\text{Parallellogram}}$$

$$\text{Arean av } f(\mathbf{D}) = |\mathbf{det}(\begin{bmatrix}\mathbf{A} \cdot \vec{d_1} & \mathbf{A} \cdot \vec{d_2}\end{bmatrix})| =$$

$$\textbf{Obs:} \begin{bmatrix}\mathbf{A} \cdot \vec{d_1} & \mathbf{A} \cdot \vec{d_2}\end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix}\vec{d_1} & \vec{d_2}\end{bmatrix}$$

$$= |\mathbf{det}(\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix}\vec{d_1} & \vec{d_2}\end{bmatrix})| = |\mathbf{det}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{det}(\begin{bmatrix}\vec{d_1} & \vec{d_2}\end{bmatrix})| = |\mathbf{det}(\mathbf{A})| \cdot \text{"arean av } \mathbf{D}\text{"}$$

Exempel 2.2.
*Låt **D** vara parallellogrammet som spänns upp av:*

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *och:*

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

*Bestäm arean av bilden av **D** (f(**D**)):*
Lösning:

$$\text{"Arean av } f(\boldsymbol{D})\text{"} = |\mathbf{det}(\mathbf{A})| \cdot \text{"Arean av } \boldsymbol{D}\text{"}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = |1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)| = 2$$

$$\text{"Arean av } \boldsymbol{D}\text{"} = |\mathbf{det}(\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & 1\end{bmatrix})| = |1 \cdot 1 - 3 \cdot 5| = |-14| = 14$$

$$\text{"Arean av } f(\boldsymbol{D})\text{"} = 2 \cdot 14 = 28$$

Exempel 2.3.
Låt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *vara rotationen motsols med* θ, *dvs:*

$$f(\vec{x}) = \overbrace{\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \cos^2(\theta) - (-\sin^2(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Dvs: rotation förändrar inte arean.