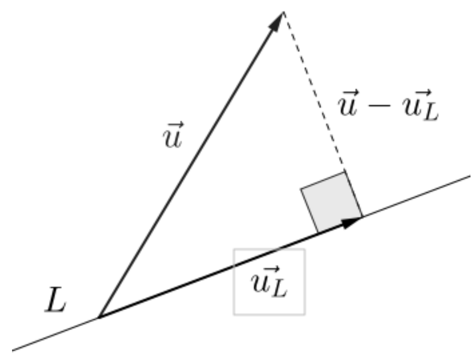
Linjär Algebra
Föreläsning 4

Erik Sjöström

December 1, 2015

1 Projektion

Definition 1.1. *Låt $\vec{u}$ vara en vektor, och L en linje med riktningsvektor $\vec{v}$. Den ortogonala projektionen $\vec{u_L}$ av $\vec{u}$ på L är den vektor som det gäller att $\vec{u_L} \parallel \vec{v}$ och ($\vec{u}$ - $\vec{u_L}$) $\perp$ $\vec{v}$.*



Exempel 1.1.
Låt:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på linjen L med riktningsvektor $\vec{v}$.
Lösning: Vi vet att:

$$\vec{u_L} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2}$$

Så nu gäller det bara att stoppa in värden:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + x \cdot 2 = 2x - 6$$
$$||\vec{v}||^2 = 3^2 + (-3)^2 + 2^2 = 22$$
$$\vec{u_L} = \frac{2x - 6}{22} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{x - 3}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vad blir $\vec{u} - \vec{u_L}$? (den del av $\vec{u}$ som är ortogonal mot L)

$$\vec{u} - \vec{u_L} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v}$$

Exempel 1.2.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix}3\\-3\\2\end{bmatrix}$$

Bestäm ortogonala komplementet av $\vec{u}$ på linjen L med riktningsvektor $\vec{v}$
Lösning:

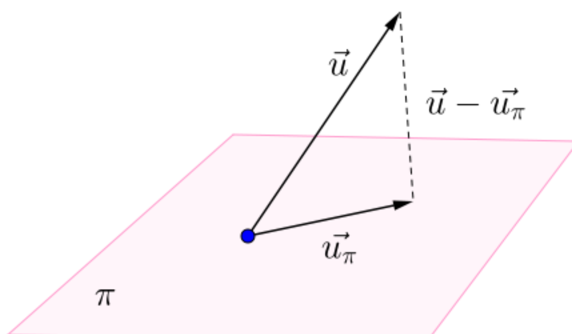
$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{0-3}{11}\cdot\begin{bmatrix}3\\-3\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + \frac{3}{11}\cdot\begin{bmatrix}3\\-3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\frac{9}{11}\\3-\frac{9}{11}\\\frac{6}{11}\end{bmatrix} = \frac{2}{11}\begin{bmatrix}10\\12\\2\end{bmatrix}$$

Denn vektor är ortogonal mot L.

Helt analogt definieras den ortogonala projektionen av vektorer på plan som:

Definition 1.2. *Den ortogonala projektionen $\vec{u_\pi}$ av vektor $\vec{u}$ på ett plan π definieras som den vektor som ligger i planet och är sådan att $(\vec{u}-\vec{u_\pi}) \perp \pi$*

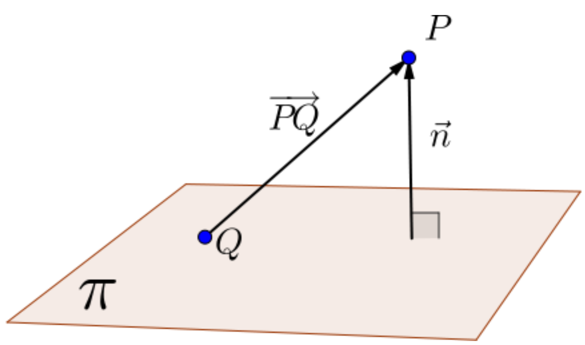


Anmärkning 1.
Vektorn $\vec{u}-\vec{u_\pi}$ är parallell med planets normal

2 Avstånd mellan punkt och plan

Givet en punkt P = (x,y,z), och ett plan $\pi : Ax + By + Cz = D$

Anmärkning 2.
Normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix}$



Vi söker minsta avståndet d mellan P och π
Härledning:
Välj en punkt Q i π och bilda $\overrightarrow{QP}$ d ges av den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på normalen $\vec{n}$ till π.

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||} = \frac{|P - Q| \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{|P \cdot \vec{n} - Q \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Vi får att:

$$P \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = Ax + By + Cz$$

$$Q \cdot \vec{n} : Q \in \pi \text{ om } Q = (x_0, y_0, z_0) \text{ så att } Q \cdot \vec{n} = D$$

$$||\vec{n}|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Vilket då ger oss:

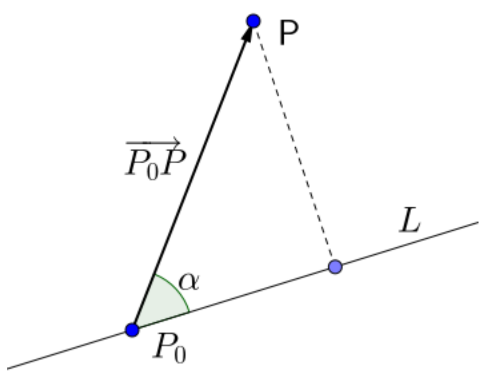
$$\frac{|Ax + By + Cz - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exempel 2.1.
Bestäm avståndet d från $P = (1, -4, -3)$ till planet $2x - 3y + 6z = -1$
Lösning:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + (-r)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

3 Avstånd mellan punkt och linje

Givet en punkt P, en linje $L : x = P_0 + t \cdot \vec{v}$, där $\vec{v}$ är riktningsvektorn till L, P_0 är en punkt på L och $t \in \mathbb{R}$
Söker: Minsta avståndet d mellan P och L
Härledning: Bilda vektor $\overrightarrow{P_0P}$.



Vi ser då at:

$$d = ||\overrightarrow{P_0P}|| \cdot \sin(\alpha) = \frac{||\overrightarrow{P_0P}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\alpha)}{||\vec{v}||} = \frac{||\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}||}{||\vec{v}||}$$

Exempel 3.1.
Bestäm avståndet d från punkten $P = (3, -2, 4)$ till linjen:

$$L : x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Lösning:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$||\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|| = ||\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}|| = \sqrt{25 + 0 + 100} = 5\sqrt{5}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

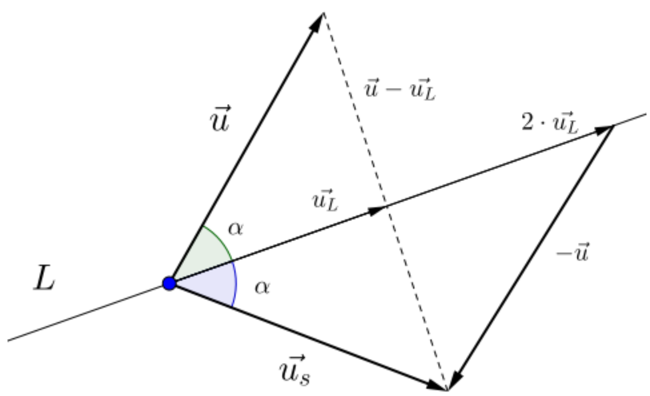
$$\textit{Svar: } d = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{5}{6}}$$

4 Spegling

Definition 4.1. *Speglingen $\vec{u_s}$ av $\vec{u}$ i en linje L ges av:*

$$\vec{u_s} = 2\vec{u_L} - \vec{u}$$

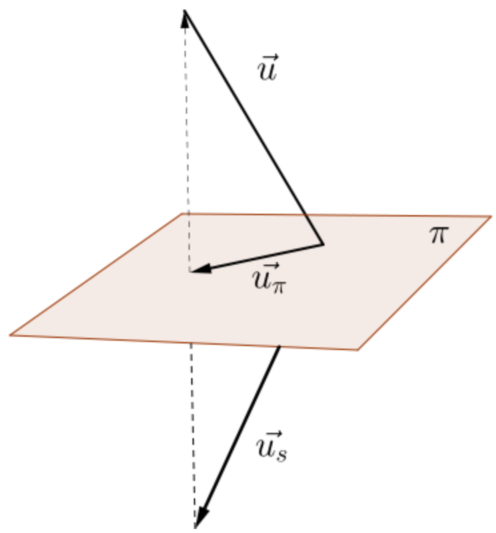
Där $\vec{u_L}$ är den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på L.



Definition 4.2. *Speglingen $\vec{u_s}$ av vektorn $\vec{u}$ i planet π ges av:*

$$\vec{u_s} = 2\vec{u_\pi} - \vec{u}$$

Där $\vec{u_\pi}$ är den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ op π



5 Matriser

En matris är ett talschema med m rader och n kolumner, betecknas oftast som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Sägs vara av typen/storleken $m \times n$
- a_{ij} betecknar elementet på rad i, kolumn j

Exempel 5.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Är av typen* 2×3
- $a_{22} = 1$

Ibland skriver man:

$$\begin{bmatrix} A = a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix}$$

Vilket är kolumnvektorerna till matrisen A

6 Räkneregler

Matrisadditionen $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definieras: Elementen i respektive kolumn adderas.

Anmärkning 3.
A *och* ***B*** *måste vara av samma typ/storlek*

Exempel 6.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär:

$$k \cdot \mathbf{A} \qquad\qquad k \in \mathbb{R}$$

Alla elementen i **A** multipliceras med k.

Exempel 6.2.
*$k = 5$, **A** som innan*

$$k \cdot \mathbf{A} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Följande räkneregler gäller för matrisaddition respektive multiplikation med skalär:
Låt: **A**, **B**, **C** vara $m \times n$ matriser, och $r, s \in \mathbb{R}$

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $\mathbf{A} + \mathbb{O} = \mathbf{A}$
- $\mathrm{r} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{r} \cdot \mathbf{A} + \mathrm{r} \cdot \mathbf{B}$
- $(\mathrm{r} + \mathrm{s}) \cdot \mathbf{A} = \mathrm{r} \cdot \mathbf{A} + \mathrm{s} \cdot \mathbf{A}$
- $\mathrm{r} \cdot (\mathrm{s} \cdot \mathbf{A}) = (\mathrm{r} \cdot \mathrm{s}) \cdot \mathbf{A}$

Anmärkning 4.
$\mathbb{O}$ är nollmatrisen, dvs den matris där alla element är 0.