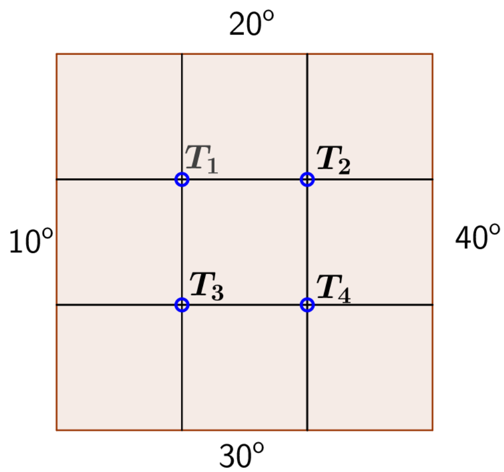
Linjär Algebra
Föreläsning 11

Erik Sjöström

November 30, 2015

1 Räkneexempel

Antag att vi har en 2D-platta vars kanttemperatur hålls konstant. Vi vill veta temperaturen i det inre av plattan.



Temperaturen kan approximeras med följande medelvärden:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{10+20+T_2+T_3}{4} \Leftrightarrow 4T_1 - T_2 - T_3 = 30 \\
T_2 &= \frac{T_1+20+40+T_4}{4} \Leftrightarrow 4T_2 - T_1 - T_4 = 60 \\
T_3 &= \frac{10+T_1+T_4+30}{4} \Leftrightarrow 4T_3 - T_1 - T_4 = 40 \\
T_4 &= \frac{T_3+T_2+40+30}{3} \Leftrightarrow 4T_4 - T_3 - T_2 = 70
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
4T_1 - T_2 - T_3 = 30 \\
-T_1 + 4T_2 - T_4 = 60 \\
-T_1 + 4T_3 - T_4 = 40 \\
-T_2 - T_3 + 4T_4 = 70
\end{cases}
$$

Dvs:

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \\ 70 \end{bmatrix}
$$

Som har totalmatris:

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 60 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \end{array}\right]
$$

Som vi kan gausseliminera till trappstegsform, så att alla rader har fler inledande nollor än raden ovanför. Svaret blir: (i reducerad trappstegsform)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 20.0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 22.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30.0 \end{array}\right]$$

Anmärkning 1.
Programmvara t.ex. "rref" i Matlab svarar i reducerad trappstegsform.

2 Elementärmatris

Man kan uttrycka gausseliminering som en matrismultiplikation.

Definition 2.1. *En elementärmatris* $\mathbf{E}$ *är en matris som erhålls genom att utföra* <u>*en*</u> *elementär radoperation på* $\mathbf{I}$*.*

Anmärkning 2.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

De elementära radoperationerna är:

- Addition: Addera till en rad en multipel av en annan rad
- Platsbyte: Låt två rader byta plats
- Skalning: Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$

Om $\mathbf{E}$ är en $(m \times n)$ elementärmatris och $\mathbf{A}$ är en $(m \times n)$-matris. Så är $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ den $(m \times n)$-matris som man får genom att på $\mathbf{A}$ utföra den radoperation som gjordes på $\mathbf{I}$ för att ge $\mathbf{E}$.

Exempel 2.1.
Låt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}}^{\frac{3}{2} \cdot R_1 \cdot R_2}$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Om vi nu bildar tre elementärmatriser till:

$$\mathbf{E}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{R_2 \cdot 2} \qquad \mathbf{E}_3 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{-5 \cdot R_2 + R_1} \qquad \mathbf{E}_4 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\frac{1}{2} \cdot R_1}$$

Så kan vi bilda matrisen:

$$\mathbf{E}_4 \cdot \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = ... = \mathbf{I}$$

Anmärkning 3.
Detta används mest i bevis-sammanhang

3 Inverterbarhet

Elementärmatrisen $\mathbf{E}$ är inverterbar.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{I}$$

Inversen av $\mathbf{E}$ kan tolkas som:

"Hur får jag radoperationen i $\mathbf{E}$ ogjord?"

Exempel 3.1.

$$\mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}}^{R_2 - \frac{3}{2} \cdot R_1} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}}^{R_2 + \frac{3}{2} \cdot R_1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Sats 3.1.
Om två matriser $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ är inverterbara så är produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ också inverterbar, och:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Sats 3.2.
Produkten av flera inverterbara matriser är inverterbara.

Sats 3.3.
Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $(n \times m)$-matris. Följande utsagor är ekvivalenta:

1. $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ *har en unik lösning för alla* $\vec{b}$.
2. *Varje reduktion av $\boldsymbol{A}$ till trappstegsform saknar fria kolumner.*
3. *Man kan reducera $\boldsymbol{A}$ till $\boldsymbol{I}$ med hjälp av elementära radoperationer.*
4. *Matrisen $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.*

Så om vi finner att en utsaga gäller, så vet vi att lla andra också gäller, och vice versa.

Bevisresonemang: Antag att (4) gäller, dvs $\mathbf{A}$ inverterbar.
Betrakta:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Eftersom $\mathbf{A}^{-1}$ är unik så är $\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ unik.
Dvs:

$$(4) \Rightarrow (1)$$

Antag att (1) gäller, dvs $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har en unik lösning.
Vi har löst $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genom gausseliminering av:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \vec{b} \end{array} \right]$$

och fått:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \vec{d} \end{array} \right]$$

Anmärkning 4.
Kom ihåg satsen från F10:

Sats 3.4.
Antag att totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \vec{b} \end{array} \right]$ *gauselimineras med elementära radoperationer till en reducerad trappstegsform och kallar den för* $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \vec{d} \end{array} \right]$. *Då gäller:*

- *Om sista kolumnen i* $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \vec{d} \end{array} \right]$ *är en pivotkolumn saknar systemet lösningar. (dvs: $\vec{d}$ är en pivotkolumn)*

- *Om sista kolumnen i* $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \vec{d} \end{array}\right]$ *inte är en pivotkolumn och antalet pivotkolumner är färre än antalet variabler så finns det oändligt många lösningar.*

- *Om alla kolumner i* $\boldsymbol{u}$ *är pivotkolumner så finns det exakt en lösning.*

Eftersom $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ har en unik lösning gäller det att alla kolumner i $\mathbf{u}$ är pivotkolumner. (inga fria kolumner)
Dvs:

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Antag att vi reducerat $\mathbf{A}$ till trappstegsform:

- Man kan få 1:or på diagonalen.
- Vi kan nollställa alla element ovanför med elementära radoperationer.

Man kan alltså reducera $\mathbf{A}$ till $\mathbf{I}$ med elementära radoperationer.
Dvs:

$$(1) \Rightarrow (3)$$

Antag (2) dvs varje reduktion av $\mathbf{A}$ saknar fria kolumner:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \vec{b} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \vec{d} \end{array}\right]$$

Men $\mathbf{A}_{n\times n}$ dvs $\mathbf{u}_{n\times n}$. Vi har ett pivotelement i varje rad i $\mathbf{u}$, dvs det finns inget pivotelement i $\vec{d}$.
Dvs: det finns exakt en lösning

$$(2) \Rightarrow (1)$$

Proof. Antag (3) (visa $\Rightarrow$ inverterbar)
Eftersom $\mathbf{A}$ kan gausselimineras till $\mathbf{I}$ så finns det

$$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_k$$

elementära matriser sådana att:

$$\overbrace{\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot ... \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1}^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_k$ är inverterbara och därmed även produkten $\mathbf{B}$.
Eftersom $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ så måste $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$.
Dvs: $\mathbf{A}$ inverterbar och $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. □

Anmärkning 5.
Detta bevis ger oss ett sätt att bestämma inversen för $\boldsymbol{A}$*. Nämligen:*

- *Bilda:*

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{u} \end{array}\right]$$

- *Om* $\mathbf{A}^{-1}$ *finns så är* $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}$

Exempel 3.2.
Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$ *om:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +R_1 \cdot \frac{3}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \qquad +R_1 \cdot -10$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -14 & -10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Så vi får att:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$