

Linjär Algebra

Föreläsning 14 - Baser och linjärt beroende

Erik Sjöström

December 2, 2015

1 Linjärt beroende

Obs:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Definition 1.1. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt oberoende om enda lösningen till ekvationen:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{är} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Definition 1.2. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt beroende om enda lösningen till ekvationen:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

har en lösning där åtminstone något $x_i \neq 0$

Exempel 1.1.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende ty:

$$x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Exempel 1.2.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende ty:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + x_3 \cdot \vec{v}_3 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Exempel 1.3.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Är linjärt beroende ty:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 - x_2 \cdot \vec{v}_2 + x_3 \cdot \vec{v}_3 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi har en fri kolumn, och en fri variabel x_3 , vilket ger lösningarna:

$$\begin{cases} x_1 = -(-2t) - t = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vi får:

$$t \cdot \vec{v}_1 - 2t \cdot \vec{v}_2 + t \cdot \vec{v}_3 = \emptyset$$

t är ett godtyckligt reellt tal. Om vi sätter $t = 1$ får vi:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Vi har då:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

- Två vektorer \vec{v}_1 och \vec{v}_2 är linjärt beroende om de är parallella, ty $\vec{v}_1 = t \cdot \vec{v}_2$, $t \in \mathbb{R}$
- n stycken vektorer är linjärt beroende om minst en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra vektorerna.
(dvs: denna vektor är "överflödig" i den mening att man kan uttrycka lika många linjärkombinationer om man tar bort denna vektor)

Exempel: 1.3. (igen)

Ta bort \vec{v}_3 , vi kan fortfarande uttrycka lika många linjärkombinationer med \vec{v}_1 och \vec{v}_2

2 Baser

Definition 2.1. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ utgör en bas för en mängd \mathbb{V} om de är linjärt oberoende och om varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

- **Dimensionen** för \mathbb{V} är antalet vektorer i basen.

Exempel 2.1.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas i \mathbb{R}^2 eftersom de är linjärt oberoende och alla vektorer i \mathbb{R}^2 kan skrivas som en linjärkombination av \vec{e}_1 och \vec{e}_2

Exempel 2.2.

Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då är $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och \vec{v} ej parallella, så vi vet att de är linjärt oberoende. Alla andra vektorer i \mathbb{R}^2 kan skrivas som en linjärkombination (\vec{e}_1, \vec{v}) , t.ex.:

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\vec{e}_1 + \vec{v} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eller som en gausselimination:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Exempel 1.2. (igen)

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är tre stycken linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^3 , och utgör därmed en bas för \mathbb{R}^3 .

Exempel 1.3. (igen)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är inte en bas för \mathbb{R}^3 eftersom de är linjärt beroende.

Vi måste alltså ha tre stycken linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^3 för att få en bas för \mathbb{R}^3 , det finns alltså en vektor

$\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ som ej kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, t.ex. $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

I exempel 1.3. fick vi en gausseliminering som gav:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Om det hade stått $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i högerledet så hade vi fått ett system som saknar lösningar, ty vi hade då fått en ekvation:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Vilket saknar lösning. Alltså har vi funnit en vektor som ej är en linjärkombinationen av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

- Om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt beroende så har ekvationen:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{v}_n \cdot x_n = \vec{b}$$

- oändligt många lösningar om \vec{b} kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.
- inga lösningar om \vec{b} ej kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Eller uttryckt i matrisform:

Om $\mathbf{A} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$ har linjärt beroende kolumner så har:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

- oändligt många lösningar om \vec{b} kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna.
- inga lösningar om \vec{b} ej kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna.

Om vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende så har:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{v}_n \cdot x_n = \vec{0}$$

Bara lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Vilket betyder att:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{v}_n \cdot x_n = \vec{0} \qquad \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

har en entydig lösning.

Eller uttryckt i matrisform: Om $\mathbf{A} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n]$ har linjärt oberoende kolumner så har $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ en entydigt bestämd lösning. Dvs den homogena ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Vilket har den triviala lösningen: $\vec{x} = \vec{0}$

Sats 2.1.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ är en bas för \mathbb{R}^n om $r = n$ (och $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$) och dom är linjärt oberoende

Proof. Låt $\mathbf{A} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_r]$ och gausseliminera \mathbf{A} till \mathbf{T} (trappstgsform). Om:

- $r > n$, då har vi fler obekanta än ekvationer. Vilket betyder att vi får fria kolumner i lösningen, dvs vi får oändligt många lösningar, dvs kolumnerna i \mathbf{A} är linjärt beroende. De utgör alltså ej en bas för \mathbb{R}^n .
- $r < n$, få har vi fler ekvationer än obekanta. Vilket betyder att minst en rad ej kommer innehålla ett pivotelement. Eftersom \vec{b} kan väljas fritt, jämför exempel **1.3**.. Välj \vec{b} :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

detta är ej lösbart av samma anledning som i exempel **1.3**.. Dvs \vec{b} kan ej skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$. Dvs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ är ej en bas för \mathbb{R}^n

- $r = n$, är det enda kvarstående alternativet.

□