Linjär Algebra
Föreläsning 14 - Baser och linjärt beroende

Erik Sjöström

December 2, 2015

1 Linjärt beroende

Obs:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Definition 1.1. *Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ är linjärt oberoende om enda lösningen till ekvationen:*

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + x_n \cdot \vec{v}_n = \emptyset \qquad \text{är} \qquad x_1 = x_2 = ... = x_n = 0 \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

Definition 1.2. *Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ är linjärt beroende om enda lösningen till ekvationen:*

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + x_n \cdot \vec{v}_n = \emptyset$$

har en lösning där åtminstonde något $x_i \neq 0$

Exempel 1.1.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende ty:

$$x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Exempel 1.2.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

är <u>linjärt oberoende</u> ty:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + x_3 \cdot \vec{v}_3 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 0\\1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Exempel 1.3.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$$

Är <u>linjärt beroende</u> ty:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 0 x_2 \cdot \vec{v}_2 + x_3 + \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 3 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Vi har en fri kolumn, och en fri variabel x_3, vilket ger lösningarna:

$$\begin{cases} x_1 = -(-2t) - t = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vi får:

$$t \cdot \vec{v}_1 - 2t \cdot \vec{v}_2 + t \cdot \vec{v}_3 = \emptyset$$

t är ett godtyckligt reellt tal. Om vi sätter $t = 1$ får vi:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Vi har då:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

- Två vektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är linjärt beroende om de är parallella, ty $\vec{v}_1 = t \cdot \vec{v}_2$, $t \in \mathbb{R}$
- n stycken vektorer är linjärt beroende om minst en av dom kan uttryckas som en linjärkombination av dom andra vektorerna.
  (dvs: denna vektor är "överflödig" i den mening att man kan uttrycka lika många linjärkombinationer om man tar bort denna vektor)

Exempel: 1.3. (igen)
Ta bort $\vec{v}_3$, vi kan fortfarande uttrycka lika många linjärkombinationer med $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$

2 Baser

Definition 2.1. *Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ utgör en bas för en mängd $\mathbb{V}$ om de är linjärt oberoende och om varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$.*

- **Dimensionen** för $\mathbb{V}$ är antalet vektorer i basen.

Exempel 2.1.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas i $\mathbb{R}^2$ eftersom de är linjärt oberoende och alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$

Exempel 2.2.
Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då är $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}$ ej parallella.

INFOGA FIGUR HÄR

så vi vet att de är linjärt oberoende Alla andra vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas so en linjärkombination ($\vec{e}_1$, $\vec{v}$), t.ex.:

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\vec{e}_1 + \vec{v} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eller som en gausselimination:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Exempel 1.2. (igen)

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är tre stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$, och utgör därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

Exempel 1.3. **(igen)**

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är inte en bas för $\mathbb{R}^3$ eftersom de är linjärt beroende.

Vi måste alltså ha tre stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ för att få en bas för $\mathbb{R}^3$, det finns alltså en vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ som ej kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, t.ex. $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

I exempel **1.3.** fick vi en gausseliminering som gav:

$$... \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Om det hade stått $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i högerledet så hade vi fått ett system som saknar lösningar, ty vi hade då fått en ekvation:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Vilket saknar lösning. Alltså har vi funnit en vektor som ej är en linjärkombinationen av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

- Om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ är linjärt beroende så har ekvationen:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + ... + \vec{v}_n \cdot x_n = \vec{b}$$

- oändligt många lösningar om $\vec{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$.
- inga lösningar om $\vec{b}$ ej kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$.

Eller uttryckt i matrisform:
Om $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$ har linjärt beroende kolumner så har:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

- oändligt många lösningar om $\vec{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna.
- inga lösningar om $\vec{b}$ ej kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna.

Om vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende så har:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + ... + \vec{v}_n \cdot x_n = \emptyset$$

Bara lösningen $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$
Vilket betyder att:

$$\vec{v}_1 \cdot x_1 + \vec{v}_2 \cdot x_2 + ... + \vec{v}_n \cdot x_n = \emptyset \qquad\qquad \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

har en entydig lösning.
Eller uttryckt i matriform: Om $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ har linjärt oberoende kolumner så har $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ en entydigt bestämd lösning. Dvs den homogena ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \emptyset$$

Vilket har den triviala lösningen: $\vec{x} = \emptyset$

Sats 2.1.
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ oom $r = n$ (och $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$) och dom är linjärt oberoende

Proof. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_r \end{bmatrix}$ och gausseliminera $\mathbf{A}$ till $\mathbf{T}$ (trappstgsform). Om:

- $r > n$, då har vi fler obekanta än ekvationer. Vilket betyder att vi får fria kolumner i lösningen, dvs vi får oändligt många lösningar, dvs kolumnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt beroende. De utgör alltså ej en bas för $\mathbb{R}^n$.

- $r < n$, få har vi fler ekvationer än obekanta. Vilket betyder att minst en rad ej kommer innehålla ett pivotelement. Eftersom $\vec{b}$ kan väljas fritt, jämför exempel **1.3.**. Välj $\vec{b}$:

  $$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  detta är ej lösbart av samma anledning som i exempel **1.3.**. Dvs $\vec{b}$ kan ej skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$. Dvs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ är ej en bas för $\mathbb{R}^n$

- $r = n$, är det enda kvarstående alternativet.

$\square$