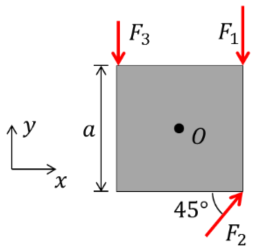
FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #12 (24.-27.4.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. En kvadratisk plate med sidelengde $a = 0.2$ m kan rotere om en akse som er vinkelrett på platen gjennom senteret O. Beregn nettokraftmomentet om denne aksen når tre krefter virker som vist i figuren. Størrelsen til kreftene er $F_1 = 10$ N, $F_2 = 12$ N og $F_3 = 6$ N. Alle krefter virker i samme planet som platen.



Kreftene $\vec{F}_2$ og $\vec{F}_3$ gir et positivt kraftmoment om z aksen, kraften $\vec{F}_1$ et negativt.

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(\frac{1}{2}a\hat{\imath} + \frac{1}{2}a\hat{\jmath}\right) \times (-F_1\hat{\jmath}) = -\frac{1}{2}aF_1\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(\frac{1}{2}a\hat{\imath} - \frac{1}{2}a\hat{\jmath}\right) \times (F_2\cos(45°)\,\hat{\imath} + F_2\sin(45°)\,\hat{\jmath}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}aF_2\hat{k}$$

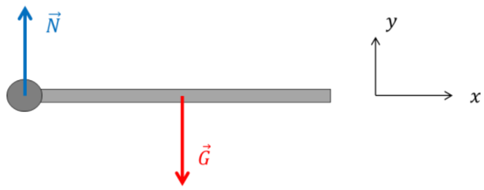
$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \left(-\frac{1}{2}a\hat{\imath} + \frac{1}{2}a\hat{\jmath}\right) \times (-F_3\hat{\jmath}) = \frac{1}{2}aF_3\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{2}F_2 + F_3 - F_1\right)\hat{k} = (1.30\ \mathrm{Nm})\hat{k}$$

Med litt øving kunne man direkte bruke komponentene til krefter og kraftarmer som står vinkelrett på hverandre uten å sette inn vektorene i kryssproduktene.

T2. En lang, tynn stav av masse 1 kg og lengde 1 m er festet i et hengsel ved den ene enden og kan bevege seg uten friksjon og luftmotstand. Når den andre, frie enden slippes fra en horisontal posisjon roterer staven. Treghetsmoment til en tynn stav som roterer om et endepunkt er $I = \frac{1}{3}mL^2$.

a. Tegn et frilegemediagram når staven er horisontal og finn alle krefter og kraftmomenter som virker.



Det virker gravitasjon og normalkraft fra hengselen. Newtons andre lov i vertikal retning: $N - mg = 0$, derfor: $N = mg$. Siden normalkraften angriper i rotasjonspunktet er kraftmoment fra normalkraften null. Kraftmoment fra gravitasjonskraften er: $|\vec{\tau}_G| = |\vec{r}_G \times \vec{G}| = \frac{1}{2}mgL\sin(90°) = 4.9$ Nm

b. Er spinn bevart?

Nei, det virker et netto kraftmoment som øker spinnet.

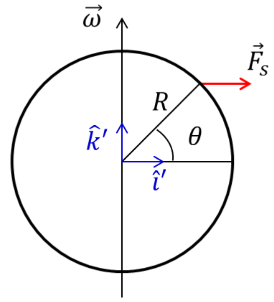
c. Finn vinkelhastighet når staven er vertikal.

Siden staven roterer uten friksjon eller luftmotstand er mekanisk energi bevart. Staven starter i ro og med potensiell energi null. Massesenteret ligger i geometrisk sentrum av staven.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mgL = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 5.42\ \mathrm{s}^{-1}$$

T3. Sentrifugalakselerasjonen som virker i et roterende referansesystem S' kan skrives som: $\vec{a}_s = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.



a. Vis at sentrifugalakselerasjonen til et legeme som befinner seg på overflaten av en kule med radius R som roterer om z' aksen med vinkelhastighet ω er: $\vec{a}_s = \omega^2 R \cos\theta\, \hat{\imath}'$, hvor vinkelen θ er definert i forhold til ekvatoren som vist i figuren.

Vi bruker koordinatsystemet som definert i figuren og får:

$$\vec{a}_s = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega\hat{k}' \times \left(\omega\hat{k}' \times \left(R\cos\theta\,\hat{\imath}' + R\sin\theta\,\hat{k}'\right)\right)$$
$$= -\omega\hat{k}' \times \left(\omega\hat{k}' \times R\cos\theta\,\hat{\imath}'\right) = -\omega\hat{k}' \times \omega R\cos\theta\,\hat{\jmath}' = \omega^2 R\cos\theta\hat{\imath}'$$

b. Hvor stor er sentrifugalakselerasjonen i Oslo ($\theta = 60°$)? Radius til jorden er 6371 km og vinkelhastighet er 1 omdreiing i 24 timer. Sammenlign resultatet med tyngdeakselerasjon.

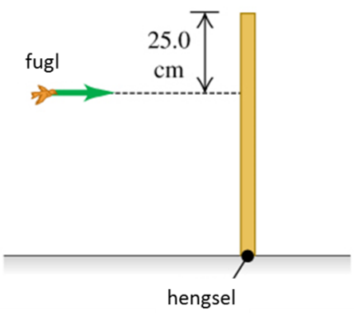
Vi har $\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60\ \mathrm{s}} = 7.27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Vi setter inn i resultatet frå a):

$$a_s = \omega^2 R\cos\theta = 0.0168\ \mathrm{m/s^2}$$

Sammenlignet med $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ er sentrifugalakselerasjonen lite.

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. En fugl på $m = 0.5$ kg flyr horisontalt med hastighet $v = 2.25$ m/s. Fuglen er uoppmerksom og krasjer i en stang som står i veien. Stangen har masse $M = 1.5$ kg og lengde $l = 0.75$ m, og fuglen treffer stangen 25 cm under toppen. Stangen er festet i et friksjonsfritt hengsel på bakken. Treghetsmomentet til en tynn stang som roterer om sitt massesenter er $I = \frac{1}{12}Ml^2$. Fuglen faller bevistløs til bakken (men er ellers uskadet og liver et lykkelig liv etterpå).



a. Hva er vinkelhastighet til stangen rett etter krasjet?

I kollisjonen mellom fuglen og stangen oppstår ingen ytre kraftmomenter og spinn er bevart. Spinn til fuglen om hengslet før kollisjonen:

$$L_i = mv(l - 0.25\text{ m}) = 0.56\text{ kg m}^2/\text{s}$$

Etter kollisjonen faller fuglen ned. Etter kollisjonen er spinn til fuglen om hengslet null fordi posisjonsvektor og bevegelsesmengde er parallelle. Etter kollisjonen er det bare stangen som har spinn: $L_f = I_h\omega$. For å finne vinkelhastigheten må vi beregne treghetsmomentet til staven om hengslet. Vi bruker parallellakseteoremet:

$$I_h = I_{cm} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

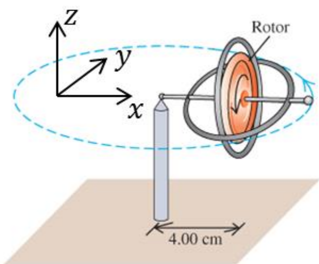
$$\omega = \frac{L_i}{I_h} = 2\text{ rad/s}$$

b. Hva er vinkelhastighet til stangen når den kommer til en horisontal posisjon?

Vi ser bort fra luftmotstanden. Gravitasjon er en konservativ kraft og vi kan bruke energibevaring:

$$\tfrac{1}{2}Mgl + \tfrac{1}{2}I_h\omega_i^2 = 0 + \tfrac{1}{2}I_h\omega_f^2 \;\Rightarrow\; \omega_f = \sqrt{\tfrac{Mgl}{I_h} + \omega_i^2} = 6.58\text{ rad/s}$$

G2. Gyroskopet har masse 0.165 kg. Treghetsmomentet om aksen er 1.2×10^{-4} kg m^2. Endepunktet til aksen ligger på et stativ, og massesenteret til gyroskopet befinner seg 4 cm fra stativet. Gyroskopet utfør en presesjonsbevegelse hvor en omdreiing tar 2.2 s. (Husk at radianer er forholdet mellom buelengden og radius!)



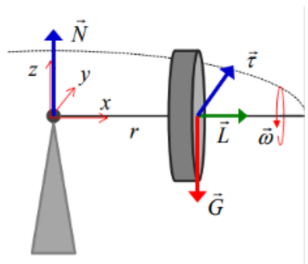
a. Hvor stor er kraften fra stativet på gyroskopet?

Vi bruker Newtons andre lov i vertikal retning: $N - mg = 0$

$N = mg = 0.165\text{ kg} \cdot 9.81\text{ m/s}^2 = 1.62\text{ N}$

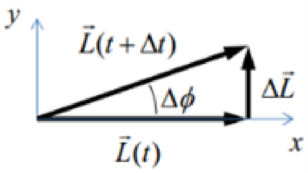
b. Finn kraftmomentet fra gravitasjonskraften om kontaktpunktet mellom gyroskopet og stativet. Hvilken retning har kraftmomentet? Hvorfor er kraftmomentet fra normalkraften om kontaktpunktet null? Hvilken retning har kraftmomentet? Tegn en figur.

Siden normalkraften angriper i kontaktpunktet gir den ingen kraftmoment. Bare gravitasjonskraften, som angriper i massesentrum til rotoren, gir et kraftmoment om kontaktpunktet.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{G} = r\hat{\imath} \times (-mg\hat{k}) = rmg\hat{\jmath} = 0.065\text{ Nm}\,\hat{\jmath}$$

c. Forklar figuren. Skriv deretter opp et uttrykk for Δϕ, og bruk dette til å finne vinkelhastigheten til rotoren.



Spinnet er opprinnelig i x retning. Kraftmomentet fra gravitasjonskraften er årsak til endringen av spinn: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L} \approx \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$. Kraftmomentet virker i y retning. Spinnendring $\Delta\vec{L}$ over et tidsintervall Δt er derfor også i y retning, og spinnvektoren dreier seg om en vinkel $\Delta\varphi$. For små tidsintervaller er $\Delta\varphi = \frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|}$.

Vi kjenner vinkelhastighet til presesjonsbevegelsen $\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2.2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Vi setter inn:

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{L}|} = \frac{rmg}{I\omega} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{rmg}{I\Omega} = 189\ \text{rad/s}$$