FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #1 (23.-26.1.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. Hastigheten til en partikkel varierer kvadratisk med tiden etter formelen

$$v(t) = \frac{1}{2}At^2$$

hvor A er en konstant med enhet m/s^3. Bevegelsen starter ved $t = 0$ s og $x = 0$ m.

a. Hva blir akselerasjonen og den tilbakelagte veilengden som funksjon av tiden?
Akselerasjonen finnes ved å derivere uttrykket for hastigheten:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = At,$$

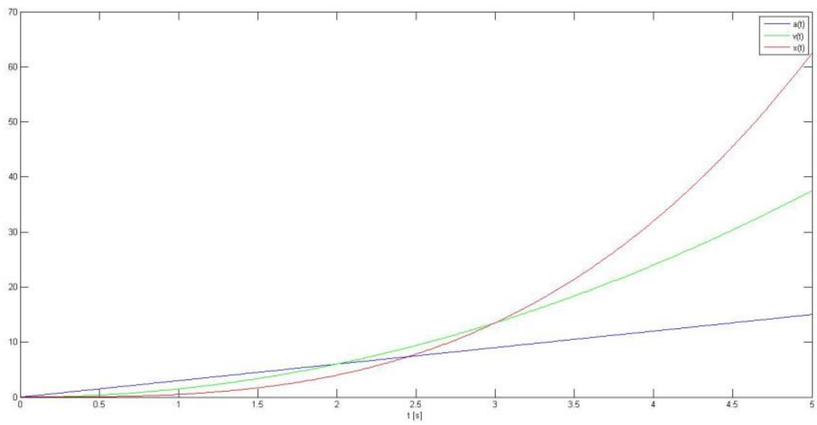
og den tilbakelagte veilengden finnes ved integralet av hastigheten:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt = \frac{1}{6}At^3$$

b. Anta at $A = 3$ m/s^3. Hvor stor er akselerasjonen ved $t_1 = 2$ s og ved $t_2 = 5$ s, og hvor stor er gjennomsnittsakselerasjonen i tidsintervallet $t_2 - t_1$?
$a(t_1) = 6$ m/s^2, $a(t_2) = 15$ m/s^2
Gjennomsnittsakselerasjonen kan finnes ved:

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = 10.5\ \mathrm{m}/s^2$$

c. Tegn grafene til $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$.
$a(t)$: blå, $v(t)$: grønn, $x(t)$: rød



T2. Posisjonen til en partikkel kan beskrives ved

$$x(t) = A\cos\omega t$$

der A og ω er konstanter. Hva blir hastigheten og akselerasjonen for denne partikkelen?

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t$$

T3. Et elektron skytes i en boks med et elektrisk felt slik at elektronet akselereres. Akselerasjonen i boksen er $a = 2000\ \mathrm{m/s^2}$. Boksen er $l = 1$ m lang og elektronet kommer inn i boksen med hastighet $v = 100$ m/s. Hva er hastigheten når elektronet forlater boksen?

For konstant akselerasjon a har vi:

$v(t) = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} + v_0 \frac{v - v_0}{a}$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - 2vv_0 + v_0^2 + 2vv_0 - 2v_0^2 = v^2 - v_0^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Vi har $x_0 = 0$, $x = 1$ m, $v_0 = 100$ m/s, $a = 2000\ \mathrm{m/s^2}$

$$v = \sqrt{14000}\ \mathrm{m/s} = 118.3\ \mathrm{m/s}$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. En bil kjører med konstant hastighet på 20 m/s og passerer en motorsykkel som er i ro. I det øyeblikket hvor bilen kjører forbi begynner motorsykkelen å kjøre med konstant akselerasjon. Motorsykkelen kjører forbi bilen etter 200 m.

a. Hvor stor akselerasjon har motorsykkelen?

Bilen kjører med konstant hastighet: $v_b = 20$ m/s, $x_b(t) = v_b t$

Motorsykkel kjører forbi bilen ved tid t_1:

$$t_1 = \frac{x_b(t_1)}{v_b} = \frac{200\ \mathrm{m}}{20\ \mathrm{m/s}} = 10\ \mathrm{s}$$

Motorsykkelen kjører med konstant akselerasjon a_{ms}:

$$v_{ms}(t) = a_{ms} t$$

$$x_{ms}(t) = \tfrac{1}{2} a_{ms} t^2$$

Vi finner a_{ms} fra $x_{ms}(t_1)$=200 m.

$$a_{ms} = \frac{2x_{ms}(t_1)}{t_1^2} = \frac{400\ \mathrm{m}}{(10\ \mathrm{s})^2} = 4\ \mathrm{m/s^2}$$

b. Hva er hastigheten til motorsykkelen når den kjører forbi bilen? Kan du finne en sammenheng mellom bilens og motorsykkelens hastighet?

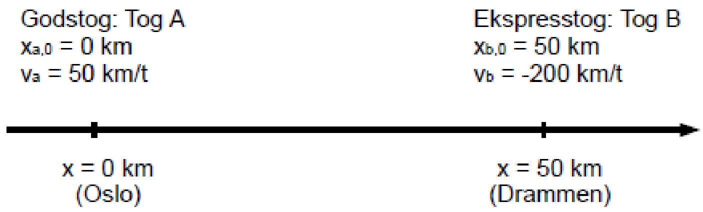
$$v_{ms}(t_1) = a_{ms} t_1 = 40\ \mathrm{m/s}$$

Vi ser også at:

$$a_{ms} = \frac{2x_b(t_1)}{t_1^2} = 2\frac{v_b}{t_1}$$

$$v_{ms} = 2v_b$$

G2. Et godstog kjører fra Oslo til Drammen med 50 km/t. Et ekspresstog kjører fra Drammen til Oslo med 200 km/t. Begge togene starter på det samme tidspunktet. Avstanden mellom Oslo og Drammen er 50 km.



$$x_a(t) = v_a t, \quad x_b(t) = x_{b0} + v_b t$$

a. Når møtes togene?

Togene møtes når $x_a(t) = x_b(t)$. Ved å sette inn ligningene og løse med hensyn til t finner man:

$t = \frac{x_{b0}}{v_a - v_b} = \frac{50 \text{ km}}{250 \text{ km/t}} = 0.2 \text{ t} = 12 \text{ min}$

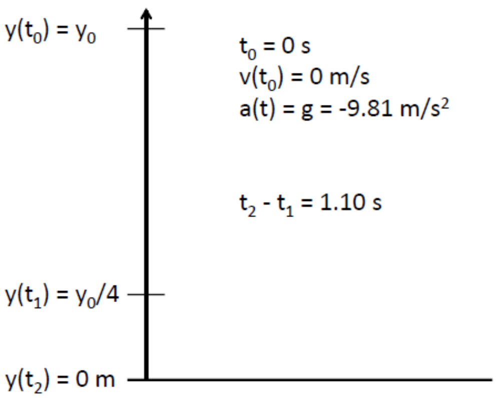
b. Hvor langt fra Oslo møtes togene?

Ta utgangspunkt i tog A som drar fra Oslo og løs ligningen med tiden som ble funnet i a.

$x_a(0.2 \text{ t}) = 10 \text{ km fra Oslo}$

G3. En mann ser en stein falle fra en klippe langt unna og måler at steinen bruker 1,1 s på å falle den siste fjerdedelen av avstanden til bakken. Du kan se bort ifra luftmotstanden. Hvor høy er klippen?

Hint: Hvis t_1 er tidspunktet steinen passerer den siste fjerdedelen av høyden, og t_2 er tidspunktet steinen treffer bakken, sett opp bevegelseslikningene for $y(t_1)$ og $y(t_2)$. Løs deretter likningssettet.



$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

Vi løser ligningen for t_1 og t_2:

$$y(t_1) = y_0 + \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{y_0}{4} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \sqrt{-\frac{3 y_0}{2g}}$$

$$y(t_2) = y_0 + \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \sqrt{-\frac{2 y_0}{g}}$$

Vi vet at $t_2 - t_1 = 1.10$ s, setter inn uttrykkene vi fant for t_1 og t_2:

$$\sqrt{-\frac{2y_0}{g}} - \sqrt{-\frac{3y_0}{2g}} = 1.1\ \mathrm{s}$$

$$y_0 = \left(\frac{1.1\ \mathrm{s}}{\sqrt{-\frac{2}{g}} - \sqrt{-\frac{3}{2g}}}\right)^2 = 330.7\ \mathrm{m}$$

Fasit:

T1.b) 6 m/s^2, 15 m/s^2, 10.5 m/s^2

T3 118.3 m/s

G1.a) 4 m/s^2, b) 40 m/s

G2.a) 12 min, b) 10 km

G3 330.7 m