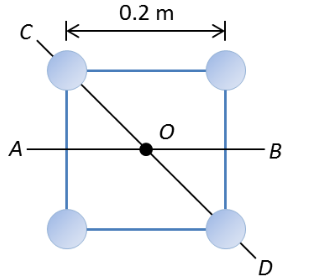
FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #10 (10.-13.4.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)



G1. Fire små kuler med masse $m = 0.2$ kg arrangeres i et kvadrat som vist i figuren. Kulene kan betraktes som punktmasser og forbindelsen mellom kulene betraktes som vektløs. Finn treghetsmomentet til legemet for en akse

a. som går gjennom senteret O vinkelrett på planet.

Avstand mellom massene og rotasjonsaksen er $\rho_i = \sqrt{(0.1\text{ m})^2 + (0.1\text{ m})^2}$ for alle fire kuler. Siden kulene betraktes som punktmasser er treghetsmomentet:

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 = 4 \cdot 0.2\text{ kg} \cdot 0.02\text{ m}^2 = 0.016\text{ kg m}^2$$

b. AB som halverer kvadratet.

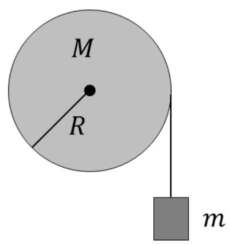
Vi har $\rho_i = 0.1\text{ m}$ for alle kulene.

$$I_z = 4 \cdot 0.2\text{ kg} \cdot 0.01\text{ m}^2 = 0.008\text{ kg m}^2$$

c. CD som går diagonalt gjennom to hjørner av kvadratet.

To kuler har avstand $\rho_i = 0\text{ m}$ fra aksen og to $\rho_i = \sqrt{(0.1\text{ m})^2 + (0.1\text{ m})^2}$.

$$I_z = 2 \cdot 0.2\text{ kg} \cdot 0.02\text{ m}^2 = 0.008\text{ kg m}^2$$



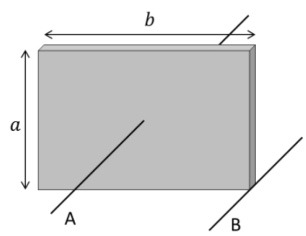
G2. En eske med masse $m = 1$ kg er festet til enden av en masseløs snor som er viklet rundt en sylinder med masse M og radius $R = 0.1$ m. Når systemet slippes fri beveger esken seg nedover og sylinderen roterer. Hva må massen M til sylinderen være for at sylinderen og esken skal ha samme kinetisk energi? Hva endrer seg hvis sylinderen har radius $R = 0.2$ m?

Kinetisk energi til esken og sylinderen skal være likt: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Siden snoren er viklet rundt sylinderen er lineær- og vinkelhastighet relatert som: $v = R\omega$. Treghetsmomentet til en full sylinder som roterer om symmetriaksen er: $I = \frac{1}{2}MR^2$. Vi setter inn:

$$\frac{1}{2}m(R\omega)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

$$M = 2m$$

Resultatet gjelder uavhengig av radiusen til sylinderen.



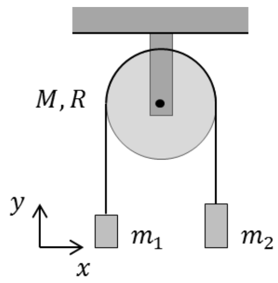
G3. Teghetsmomentet til en tynn, rektangulær plate med sidelengde a og b og masse M som roterer om en vinkelrett akse A gjennom massesenteret er: $I_A = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$. Finn treghetsmoment I_B for rotasjon om akse B gjennom et hjørnepunkt.

Siden akse A går gjennom massesenteret kan vi bruker Steiners sats for å beregne treghetsmoment om akse B: $I_B = I_A + Ms^2$, hvor strekningen s er etter Pythagoras: $s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$. Vi får:

$$I_B = \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + \frac{1}{4}M(a^2+b^2) = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. To lodder med masse $m_1 = m$ og $m_2 = 2m$ er knyttet sammen med en masseløs snor som går over et hjul med masse $M = 2m$ og radius R. Hjulet kan rotere om en stasjonær akse uten friksjon, og treghetsmomentet er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Opprinnelig er loddene på samme høyde $y = 0$. Når du slipper loddene fri synker m_2 ned mens m_1 går opp uten at snoren sklir over hjulet. Finn hastigheten til loddene som funksjon av den vertikale posisjonen. Du kan se bort fra luftmotstanden.



Uten friksjon og luftmotstand er det bare gravitasjon som virker og den mekaniske energien i systemet er bevart. Med definisjon av koordinatsystemet som vist i figuren er den potensielle energien til loddene i begynnelsen null. Etterhvert får m_1 positiv og m_2 negativ potensiell energi, og begge to får kinetisk energi. Trinsen befinner seg ved høyde h og har potensiell energi som er konstant siden massesenteret til trinsen beveger seg ikke, men trinsen får kinetisk rotasjonsenergi. Vi setter opp en ligning for energibevaring:

$$Mgh = m_1gy - m_2gy + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + Mgh + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Loddet m_1 går like mye opp som m_2 går ned med samme hastighet v. Siden snoren ikke sklir over trinsen vet vi at et punkt på overflaten til trinsen beveger seg med samme fart v som snoren, og vi finner en relasjon mellom vinkelhastighet og hastighet til snoren: $\omega = \frac{v}{R}$. Vi setter inn massene:

$$0 = mgy - 2mgy + \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = -mgy + 2mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}gy}$$

G2. Et hjul med radius $R = 0.1$ m roterer uten friksjon om en stasjonær horisontal akse gjennom sitt senter. En konstant tangensial kraft $F = 100$ N virker på hjulet i avstand R fra aksen. Hjulet starter i ro og etter en tid $t = 2$ s roterer hjulet med 10 omdreiinger per sekund. Hvor stor er hjulets treghetsmoment?

Den tangensiale kraften i avstand R fra aksen gir et kraftmoment:

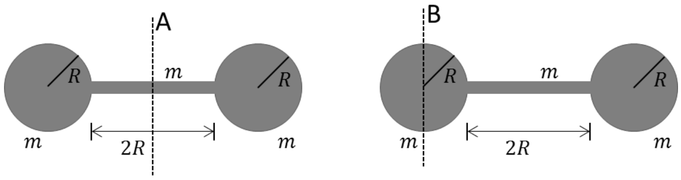
$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = RF\hat{k} = I\vec{\alpha} = I\alpha\hat{k}$$

Siden kraften er konstant har vi konstant vinkelakselerasjon. Derfor er $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Hjulet starter i ro: $\omega_0 = 0$.

$$\alpha = \frac{\omega(t)}{t} = \frac{10 \cdot 2\pi}{2\ \text{s}^2} = 10\pi\ \text{s}^{-2}$$

$$I = \frac{RF}{\alpha} = \frac{0.1\ \text{m}\ \cdot 100\ \text{N}}{10\pi\ \text{s}^{-2}} = \frac{1}{\pi}\ \text{kg m}^2$$

G3. Et legeme består av to kuler med masse m og radius R og en tynn stav med samme masse m og lengde $L = 2R$. Treghetsmomentet for en kule som roterer om en akse gjennom massesenteret er $I_k = \frac{2}{5}mR^2$, treghetsmomentet for en tynn stav som roterer om en akse som er vinkelrett på staven gjennom massesenteret er $I_s = \frac{1}{12}mL^2$. Finn treghetsmomentet for legemet som roterer om aksene A og B som vist i figuren.



For å finne treghetsmoment til kulene må vi flytte rotasjonsaksen en avstand $s = 2R$ fra massesenteret. Vi finner treghetsmomentet ved bruk av parallellakseteoremet:

$$I_{A,k} = I_k + (2R)^2 m = \left(\frac{2}{5} + 4\right) mR^2 = \frac{22}{5} mR^2$$

Treghetsmoment for hele legemet om A er:

$$I_A = 2I_{A,k} + I_s = \frac{44}{5} mR^2 + \frac{1}{12} m(2R)^2 = \frac{137}{15} mR^2$$

For å finne treghetsmomentet om B bruker vi parallellakseteoremet for staven og én kule:

$$I_B = I_k + I_s + (2R)^2 m + I_k + (4R)^2 m = \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + 4 + 16\right) mR^2 = \frac{317}{15} mR^2$$