FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #6 (27.-2.3.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. En eske med masse m sklir ned en rampe med helningsvinkel α. Esken starter i ro og det er ingen friksjon mellom esken og rampen. Finn farten til esken i bunnen av rampen etter den har sklidd en strekning d. Gjør det på to forskjellige måter:

a. ved å legge nullpunktet for den potensielle energien i bunnen av rampen, med y aksen vertikal oppover,

$y_1 = d \sin\alpha,\ y_2 = 0$

Bevaring av energi: $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$mgd \sin\alpha + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gd \sin\alpha}$$

b. ved å legge nullpunktet for den potensielle energien i toppen av rampen, med y aksen vertikal oppover.

$y_1 = 0,\ y_2 = -d \sin\alpha$

Bevaring av energi: $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$0 + 0 = -mgd \sin\alpha + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gd \sin\alpha}$$

Vi får samme resultat som i a.)

c. Hvorfor gjør normalkraften ingen arbeid?

Normalkraften står vinkelrett på bevegelsesretning og gjør derfor ingen arbeid.

T2. En fjær med fjærkonstant k lagrer den potensielle energien U_0 hvis den komprimeres med en lengde x_0 ut fra likevektslengden.

a. Hvor mye energi lagres når fjæren komprimeres dobbelt så mye?

Den potensielle energien til fjæren er: $U_0 = \frac{1}{2} k x_0^2$

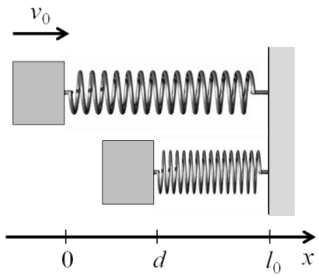
Hvis fjæren komprimeres dobbelt så mye er: $U_0 = \frac{1}{2} k (2x_0)^2 = 4U_0$

b. Hvor mye må fjæren komprimeres for å lagre dobbelt så mye energi?

Vi ønsker å finne x slik at $U = 2U_0$

$\frac{1}{2} k x^2 = 2 \frac{1}{2} k x_0^2$ og dermed: $x = \sqrt{2} x_0$

T3. Et legeme med masse m beveger seg til høyre med hastighet v_0. Ved $x = 0$ treffer legemet på en fjær som har fjærkonstant k og likevektslengde l_0. Fjæren følger Hookes lov. Legemet stanser ved $x = d$.



a. Finn arbeidet som fjærkraften gjør mens legemet beveger seg fra $x = 0$ til $x = d$.

Når fjæren komprimeres ($x > 0$) virker kraften i negativ x retning: $F_k = -kx$

$$W = \int_0^d (-kx)\,dx = -\frac{k}{2}d^2$$

b. Hvor stor er d?

Vi bruker arbeid energi teorem: $W = K_1 - K_0$

$$-\frac{k}{2}d^2 = 0 - \frac{m}{2}v_0^2$$

$$d = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

T4. En fjær som ikke følger Hookes lov kan beskrives ved kraften $F(x) = -ax - bx^2$, hvor $a = 50$ N/m og $b = 15$ N/m^2. Massen til fjæren er neglisjerbar.

a. Finn den potensielle energien $U(x)$. Du kan velge $U(0) = 0$.

Vi integrerer $F(x) = -\frac{dU}{dx}$:

$$U(x) - U(0) = U(x) = -\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x (ax + bx^2)\,dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3$$

b. Et legeme med masse $m = 1$ kg er festet til fjæren og kan bevege seg horisontalt på en friksjonsfri overflate. Du trekker legemet til høyre i positiv x retning for å strekke fjæren 1 m fra sin likevektslengde og slipper den. Hva er hastigheten når legemet er 0.5 m fra likevektslengden?

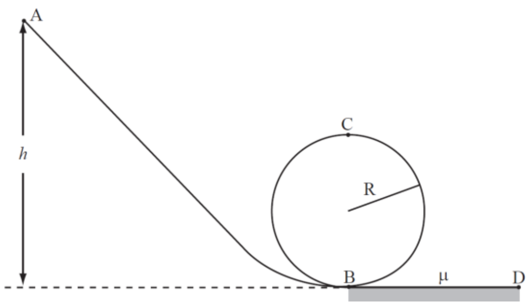
Kraften er konservativ og vi bruker energibevaring: $U(x_0) + K(x_0) = U(x_1) + K(x_1)$

$$\frac{a}{2}x_0^2 + \frac{b}{3}x_0^3 + 0 = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{3}x_1^3 + \frac{m}{2}v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{a}{m}(x_0^2 - x_1^2) + \frac{2b}{3m}(x_0^3 - x_1^3)} = 6.8\text{ m/s}$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. En blokk glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius R. Etter loopen stanser blokken i punkt D på et grovt horisontalt bord. Blokken starter i ro ved punkt A i høyde h over bordet. Friksjon på rampen og i loopen er neglisjerbart. Den dynamiske friksjonskoeffisient mellom blokken og bordet er μ.



a. Finn farten v_B av blokken ved punkt B før den går rundt loopen.

Uten friksjon virker bare gravitasjon og energi er bevart: $U_A + K_A = U_B + K_B$

$$gmh + 0 = 0 + \frac{m}{2}v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

b. Finn farten v_C ved punkt C.

Energi er fortsatt bevart:

$$U_A + K_A = U_C + K_C$$
$$mgh + 0 = 2mgR + \frac{m}{2}v_C^2$$
$$v_C = \sqrt{2g(h-2R)}$$

c. Hva er betingelsen for farten v_C slik at blokken holder kontakt med loopen?

I punkt C virker gravitasjon og normalkraften fra banen på blokken. Begge er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder sirkelen på banen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_C^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at: $N > 0$

$$N = m\frac{v_C^2}{R} - mg > 0$$
$$v_C > \sqrt{Rg}$$

d. Hvor høyt over bordet må blokken slippes for å gå rundt loopen?

Vi setter inn resultat fra b.

$$2g(h-2R) > Rg$$
$$h > \frac{5}{2}R$$

e. Hvor langt sklir blokken på bordet før den stanser?

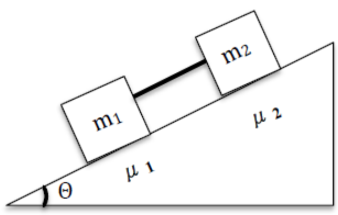
Friksjonskraften gjør arbeid på blokken:

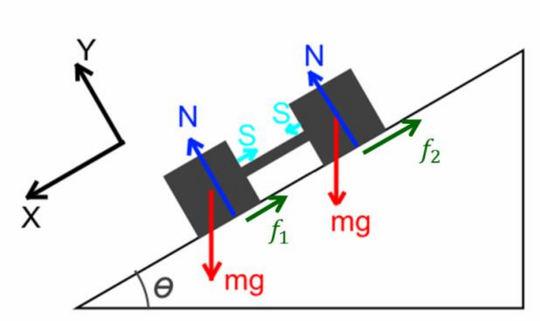
$$W_{BD} = \int_{x_B}^{x_D} f_r\, dx = -\int_{x_B}^{x_D} \mu_d N\, dx = -\mu_d mg(x_D - x_B) = -\mu_d mgs$$

Arbeid-energi teorem: $W_{BD} = K(x_D) - K(x_B)$

$$-\mu_d mgs = 0 - \frac{m}{2}v_B^2$$
$$\mu_d gs = \frac{1}{2}2gh = gh$$
$$s = \frac{h}{\mu_d}$$

G2. To klosser som er forbundet med en snor sklir nedover et skråplan med helningsvinkel θ (se figuren). Klossene har samme masse, $m_1 = m_2 = m$, men har forskjellige kinetiske friksjonskoeffisienter slik at $\mu_1 < \mu_2$. Klossene sklir derfor nedover mens snoren mellom dem forblir stram.





a. Vis at akselerasjonen er gitt ved:

$$a = g\left[\sin\theta - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)\cos\theta\right]$$

Begge klosser har samme masse. Vi finner normalkraften ved bruk av N2L i y retning: $N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$

Vi har dynamisk friksjon: $f_1 = \mu_1 N = \mu_1 mg\cos\theta$, $f_2 = \mu_2 N = \mu_2 mg\cos\theta$

N2L for kloss 1 i x retning:

$$mg\sin\theta - S - f_1 = ma$$

$$S = mg\sin\theta - \mu_1 mg\cos\theta - ma$$

N2L for kloss 2 i x retning:

$$mg\sin\theta + S - f_2 = ma$$

$$mg\sin\theta + \ mg\sin\theta - \mu_1 mg\cos\theta - ma - \mu_2 mg\cos\theta = ma$$

$$a = g\left[\sin\theta - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)\cos\theta\right]$$

b. Vis at snordraget er:

$$S = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)mg\cos\theta$$

Vi setter inn fra a):

$$S = mg\sin\theta - \mu_1 mg\cos\theta - ma$$

$$S = mg\sin\theta - \mu_1 mg\cos\theta - m\ g\left[\sin\theta - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)\cos\theta\right]$$

$$S = mg\cos\theta\left[\frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1) - \mu_1\right] = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)mg\cos\theta$$

c. Vis at systemet sklir nedover med konstant fart dersom:

$$\theta = \theta_k = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)\right]$$

Konstant fart krever $a = 0$. Vi setter inn fra a):

$$\sin\theta - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1)$$