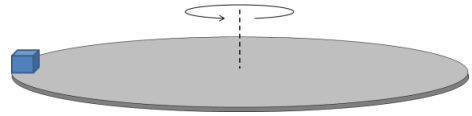


FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #11 (17.-20.4.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

- T1. En eske med masse $m = 75$ kg står på kanten av en homogen sylindrisk skive med masse $M = 150$ kg og radius $R = 2$ m som roterer med vinkelhastighet $\omega = 0.5$ omdreinger per sekund om en akse



gjennom massesenteret som vist i figuren. Beregn spinn til hele systemet som består av skiven og esken. Du kan anta at esken er liten i forhold til skiven og behandle esken som et massepunkt. Treghetsmoment til en sylindrisk skive som roterer om massesenteret er $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Vi beregner treghetsmoment til hele systemet: $I_{tot} = I_s + I_e = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 600 \text{ kg m}^2$. Vinkelhastigheten er $\omega = 0.5 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} = \pi \text{ s}^{-1}$, og spinn: $L = I_{tot}\omega = 600\pi \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

- T2. En homogen kule med masse $m = 10$ kg og radius $R = 0.2$ m roterer om en akse gjennom massesenteret. Treghetsmomentet til kulen er $I = \frac{2}{5}MR^2$. Vi kan beskrive rotasjonsvinkelen som funksjon av tiden som $\theta(t) = At^2 + Bt^3$, hvor $A = 1.5 \text{ rad/s}^2$ og $B = 1.2 \text{ rad/s}^3$. Finn spinn og kraftmoment ved tiden $t = 2$ s.

Vi har $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 2At + 3Bt^2$ og $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 2A + 6Bt$.

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2(2At + 3Bt^2) = 3.264 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$\tau = I\alpha = \frac{2}{5}MR^2(2A + 6Bt) = 2.784 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

- T3. Ved slutten av sitt liv, når brenselet til kjernereaksjoner er brukt opp, kan en stjerne kollabere under sin egen gravitasjon og bli en nøytronstjerne. Tettheten til ren nøytronmaterie er cirka 10^{14} ganger tettere enn et vanlig faststoff. Vi antar at stjernen kan beskrives som en jevn og stiv sfære med treghetsmoment $I = \frac{2}{5}MR^2$ både før og etter kollapset. Den opprinnelige radiusen til stjernen var $R_0 = 7 \cdot 10^5$ km, radiusen til nøytronstjernen er $R_1 = 16$ km. Hvis stjernen før kollapset roterte en gang i 30 dager, hvor rask roterer nøytronstjernen etter kollapset? Du kan anta at massen ikke endrer seg.

Det virker ingen ytre kraftmomenter på stjernen under kollapset, derfor kan vi bruke bevaring av spinn: $L_0 = I_0\omega_0 = I_1\omega_1 = L_1$. En omdreining i 30 dager tilsvarer

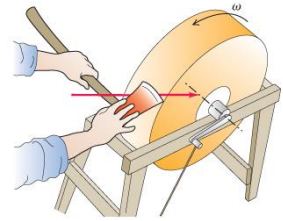
$$\omega = \frac{2\pi}{30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 2.42 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = \frac{\frac{2}{5}MR_0^2}{\frac{2}{5}MR_1^2}\omega_0 = 4.64 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

Nøytronstjernen roterer med 738.5 omdreinger per sekund.

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

- G1. En sylindrisk slipestein med masse $M = 50 \text{ kg}$ og radius $R = 0.26 \text{ m}$ roterer med 850 omdreinger per minutt. Når du presser en øks på kanten med en konstant normalkraft $N = 160 \text{ N}$ stanser steinen etter 7.5 s. Treghetsmoment til en sylinder er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Finn friksjonskoeffisienten mellom øksen og slipesteinen. Du kan se bort fra friksjon mellom slipesteinen og aksen.



Når du presser ned øksen er det den dynamiske friksjonskraften $f_d = \mu_d N$ som gir et kraftmoment som bremser slipesteinen:

$$\tau = R f_d = R \mu_d N$$

Siden normalkraften er konstant er også kraftmomentet og vinkelakselerasjon konstant. Vi har:

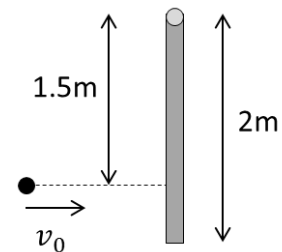
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{850 \cdot 2\pi}{60 \text{ s} \cdot 7.5 \text{ s}} = 11.9 \text{ rad/s}^2$$

Vi bruker Newtons andre lov for rotasjoner:

$$\tau = R \mu_d N = I \alpha$$

$$\mu_d = \frac{I \alpha}{R N} = \frac{MR^2 \alpha}{2 R N} = \frac{MR \alpha}{2 N} = 0.48$$

- G2. En tynn, homogen stav med masse $M = 10 \text{ kg}$ og lengde $L = 2 \text{ m}$ henger fra taket i et friksjonsfritt hengsel. En ball med masse $m = 3 \text{ kg}$ treffer horisontalt på staven med hastighet $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Etter kollisjonen spretter ballen tilbake og beveger seg med hastighet $v_1 = -6 \text{ m/s}$ i motsatt retning, og staven svinger oppover. Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om et endepunkt er $I = \frac{1}{3}ML^2$. Finn vinkelhastigheten til staven rett etter kollisjonen.

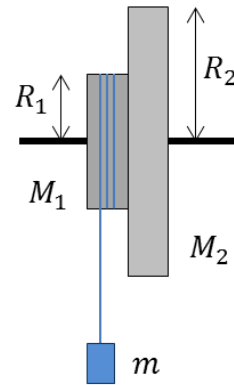


Ytre krefter som virker på staven er gravitasjonskraften og normalkraften fra hengselet på staven. Gravitasjonskraften gir ingen kraftmoment om hengslet siden kraften og kraftarmen er parallelle. Normalkraften fra hengslet gir ingen kraftmoment siden den angriper i rotasjonspunktet. Siden det virker ingen ytre kraftmomenter under kollisjonen er spinnnet bevart: $L_0 = L_1$. Spinn til ballen om hengselet før kollisjonen er $L_0 = rmv_0$, hvor r er avstanden fra hengselet. Staven har ingen spinn før kollisjonen. Etter kollisjonen er spinn $L_1 = rmv_1 + I\omega$, hvor hastigheten v_1 er negativ.

Spinnbevaring: $rmv_0 = rmv_1 + I\omega$

$$\omega = \frac{mr(v_0 - v_1)}{I} = \frac{3mr(v_0 - v_1)}{ML^2} = 5.4 \text{ rad/s}$$

G3. To metallsylindere med masse $M_1 = 1 \text{ kg}$ og $M_2 = 2 \text{ kg}$ og med radius $R_1 = 0.1 \text{ m}$ og $R_2 = 0.2 \text{ m}$ er montert på en akse som går gjennom massesenteret til begge sylindrene. Aksen roterer friksjonsfritt, og sylindrene er sveiset sammen slik at de roterer som ett legeme. Treghetsmomentet til en sylinder som roterer om sitt massesenter er $I = \frac{1}{2}MR^2$.



- a. Finn treghetsmomentet til det hele legemet.

Treghetsmoment til hele legemet er summen av treghetsmomentene for begge sylindere:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 = 0.045 \text{ kg m}^2$$

- b. En lett snor er viklet rundt den mindre sylindren, og et lodd med masse $m = 1.5 \text{ kg}$ henger fra enden. Når loddet slippes settes sylindrene i rotasjon uten at snoren sklir. Hvor stor er akselerasjonen til loddet?

Loddet er påvirket av gravitasjon og snordraget T . Newtons andre lov gir:

$$mg - T = ma$$

hvor vi måler akselerasjon i positiv retning nedover. Akselerasjonen er koblet til vinkelakselerasjonen til skivene gjennom snoren: $a = R_1\alpha$. Snordraget er årsak til et kraftmoment som setter skivene i rotasjon. Newtons andre lov for rotasjoner:

$$\tau = R_1T = I_{tot}\alpha = I_{tot}\frac{a}{R_1}$$

Vi setter inn snordraget:

$$mg - I_{tot}\frac{a}{R_1^2} = ma$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I_{tot}}{mR_1^2}} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

- c. Hvor stor er akselerasjonen til loddet når snoren vikles om den store sylindren?

Hvis snoren vikles om den store sylindren må vi erstatte R_1 med R_2 :

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I_{tot}}{mR_2^2}} = 5.61 \text{ m/s}^2$$