FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #7 (6.-9.3.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. Et legeme beveger seg i $x - y$ planet mens det virker en kraft som kan beskrives ved potensialet $U(x,y) = a\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$, hvor a er en positiv konstant.

a. Finn et uttrykk for kraften. Bruk enhetsvektorer $\hat{\imath}$ og $\hat{\jmath}$ for å beskrive retningen til kraften.

$$\vec{F}(x,y) = -\vec{\nabla}U(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\hat{\jmath} = \frac{2a}{x^3}\hat{\imath} + \frac{2a}{y^3}\hat{\jmath}$$

b. Begrunn at er kraften konservativ.

Siden det eksisterer en potensial slik at $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ er kraften konservativ.

T2. En baseball har masse $m = 0.145$ kg. Ballen kastes med $v_0 = 45$ m/s, og etter slaget beveger ballen seg med $v_1 = 0.55$ m/s i motsatt retning.

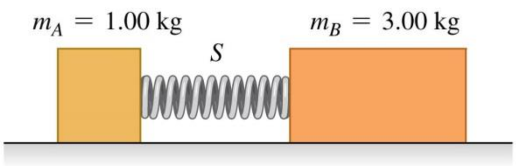
a. Hvor stor er impulsen fra balltreet?

$$J_x = \Delta p_x = m(v_1 - v_0) = 0.145\text{ kg }(55 + 45)\text{ m/s} = 14.5\text{ kg m/s}$$

b. Hvis ballen forblir i kontakt med balltreet i $\Delta t = 2$ ms, hvor stor er den gjennomsnittlige kraften fra balltreet på ballen?

$$F_{av,x} = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{14.5\text{ kg m/s}}{0.002\text{ s}} = 7250\text{ N}$$

T3. Kloss A har masse $m_A = 1.0$ kg og kloss B $m_B = 3.0$ kg. Klossene presses sammen slik at fjæren i mellom blir også komprimert. Så slippes systemet fri på et horisontalt bord uten friksjon. Fjæren, som har neglisjerbar masse, er ikke festet til klossene, slik at fjæren bare faller ned på bordet etter klossene har beveget seg fra hverandre. Kloss B beveger seg etterpå med hastighet $v_B = 1.2$ m/s til høyre.



a. Hva er hastighet til kloss A?

Det virker ingen ytre krefter i horisontal retning. Bevegelsesmengden i horisontal retning er derfor bevart:

$$0 = m_A v_A + m_B v_B$$
$$v_A = -\frac{m_B}{m_A} v_B = -3.6\text{ m/s}$$

b. Hvor mye potensiell energi var lagret i fjæren?

Bare fjærkraften gjør arbeid, og fjærkraften er konservativ. Vi kan derfor bruke bevaring av energi:

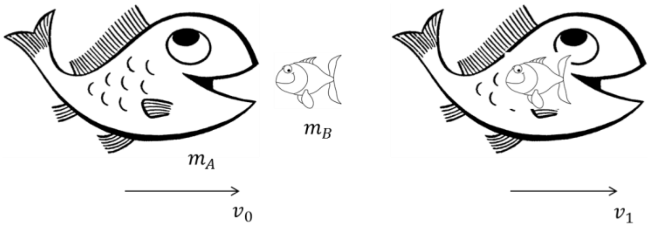
$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

Den potensielle energien som er lagret i fjæren dannes om til kinetisk energi til klossene, som etter hvert har ingen potensiell fjærenergi:

$$U_0 = K_1 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = 8.64\text{ J}$$

T4. En fisk på 20 kg svømmer i havet med $v = 1$ m/s og spiser opp en mindre fisk på 5 kg som står helt stille. Du trenger ikke ta hensyn til motstandskraften i vannet.

a. Med hvilken hastighet svømmer den store fisken videre etter den har spist den mindre?



Spisingen kan anses som en fullstendig uelastisk kollisjon hvor bevegelsesmengde er bevart: $m_A v_0 = (m_A + m_B) v_1$

$$v_1 = \frac{m_A v_0}{m_A + m_B} = \frac{20 \text{ kg}}{25 \text{ kg}} 1 \text{ m/s} = 0.8 \text{ m/s}$$

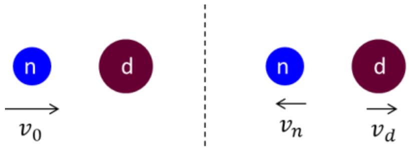
b. Hvor mye mekanisk energi ble tapt under middagen?

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_A v_0^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = 10 \text{ J} - 8 \text{ J} = 2 \text{ J}$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. I tungtvannsmodererte kjernereaktorer kolliderer nøytroner på masse $m_p = 1$ u med deuteroner på masse $m_d = 2$ u. I en slik reaktor kolliderer et neutron som har hastighet v_0 frontal og elastisk med et deuteron som er i ro.

a. Hva er hastigheten til nøytronet, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige hastigheten, etter kollisjonen?



Kollisjon er kortvarig og ytre krefter som gravitasjon er liten i forhold til de indre kreftene mellom nøytronet og deuteronet. Derfor er bevegelsesmengde under kollisjonen bevart: $m v_0 = m v_n + 2 m v_d$

$$v_d = \frac{v_0 - v_n}{2} \qquad (1)$$

Vi antar at kollisjonen er elastisk og bruker bevaring av energi:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_n^2 + m v_d^2$$

$$v_d^2 = \frac{v_0^2 - v_n^2}{2} = \frac{(v_0 - v_n)(v_0 + v_2)}{2} \qquad (2)$$

Vi deler ligning (2) på ligning (1):

$$v_d = v_0 + v_n \qquad (3)$$

Vi sammenligner (1) og (3):

$$\frac{v_0 - v_n}{2} = v_0 + v_n$$

$$3 v_n = -v_0$$

$$v_n = -\frac{1}{3} v_0$$

b. Hvor mye kinetisk energi, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige kinetiske energien, har nøytronet igjen etter kollisjonen?

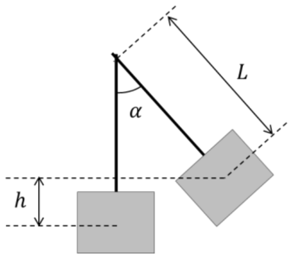
$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}E_0$$

c. Hvor mye kinetisk energi, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige kinetiske energien, har nøytronet igjen etter fem slike kollisjoner?

I hver kollisjon minker energien med en faktor 1/9. Etter 5 kollisjoner:

$$E_n = \left(\frac{1}{9}\right)^5 E_0 = \frac{E_0}{59049}$$

G2. En trekubbe på 5 kg henger i en 1 m lang snor som har neglisjerbar masse. Du skyter en pistolkule på 10 g horisontalt inn i kubben med hastighet v=400 m/s. Kulen stanser og kubben svinger opp.



a. Hvor mye kinetisk energi har kulen før kollisjonen?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 800 \text{ J}$$

b. Hvor mye kinetisk energi har kubben etter kollisjonen?

Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så vi kan ikke bruke bevaring av energi. Siden det er ingen ytre krefter i horisontal retning er bevegelsesmengde under kollisjonen bevart: $mv = (m + M)V$, hvor M og V er henholdsvis massen og hastighet til trekubben. Vi finner:

$$V = \frac{m}{m + M}v = \frac{0.01 \text{ kg}}{5.01 \text{ kg}} \cdot 400 \text{ m/s} = 0.8 \text{ m/s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(m + M)V^2 = 1.6 \text{ J}$$

c. Til hvilken vinkel svinger kubben opp?

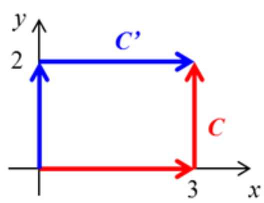
Etter kollisjonen svinger kubben opp. Hvis vi ser bort fra luftmotstanden er energi bevart siden gravitasjon er konservativ og snordraget står vinkelrett på bevegelsesretning og gjør ingen arbeid. Energibevaring: $K_1 = (m + M)gh$

$$h = \frac{K_1}{(m + M)g} = \frac{V^2}{2g} = 0.033 \text{ m}$$

$$h = L(1 - \cos\alpha)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{h}{L}\right) = 14.6°$$

G3. Et legeme som kan bevege seg i x-y planet et utsatt for en posisjonsavhengig kraft $\vec{F} = -axy^2\hat{\jmath}$, hvor $a = 2$ N/m^3.



a. Beregn arbeidet som kraften gjør på legemet når det beveger seg fra origoen $\vec{r}_0 = \vec{0}$ til posisjon $\vec{r}_1 = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$ m langs en vei C som går først langs x aksen og så i y retning.

Vi skriver kraften som: $\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\hat{\imath} + F_y(x,y)\hat{\jmath}$,
hvor $F_x(x,y) = 0$ og $F_y(x,y) = -axy^2$. Vi integrerer langs veien C først fra $x_0 = 0\text{m}$ til $x_1 = 3\text{m}$ mens $y = y_0 = 0\text{m}$ og så fra $y_0 = 0\text{m}$ til $y_1 = 2\text{m}$ mens $x = x_0 = 3\text{m}$, og vi tar bare hensyn til kraftkomponenten langs veien:

$$W_C = \int_{x_0}^{x_1} F_x(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y_1} F_y(x_1, y)\,dy = 0 - ax_1 \int_{y_0}^{y_1} y^2\,dy = -ax_1 \frac{1}{3}(y_1^3 - y_0^3)$$

$$= -2\ \text{N/m}^3 \cdot 3\ \text{m} \cdot \frac{8}{3}\ \text{m}^3 = -16\ \text{Nm}$$

b. Beregn arbeidet som kraften gjør på legemet når det beveger seg til det samme punktet langs en vei C' som går først langs y aksen og så i x retning.

$$W_{C'} = \int_{y_0}^{y_1} F_y(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x_1} F_x(x, y_1)\,dx = -ax_0 \int_{y_0}^{y_1} y^2\,dy + 0 = 0$$

c. Beregn $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} = -ay^2\hat{k}$$

d. Er kraften konservativ?

Siden arbeid utført av kraften er avhengig av veien er kraften ikke konservativ. Vi ser også at $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$. En annen nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at en kraft er konservativ er $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.