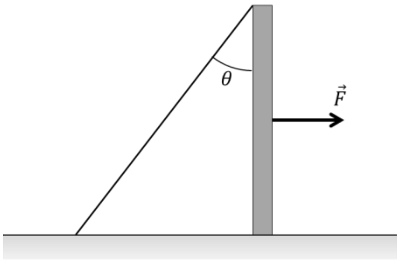
FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #14 (9.-15.5.)

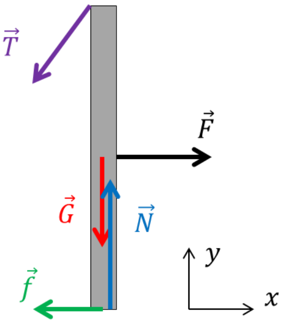
Oppgave A (14 poeng)

En stang med masse m og høyde h står på en horisontal overflate. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom stangen og bakken er μ_s. Den øvre enden av stangen er festet til bakken med et masseløst tau som vist på figuren. Tauet går ned til bakken i en rett linje med vinkel θ i forhold til vertikal retning, men uten en horisontal kraft på stangen er det ingen spenning i tauet. Dette endrer seg når en horisontal kraft $\vec{F}$ angriper midt på stangen.



a. Tegn et frilegemediagram for stangen når den horisontale kraften $\vec{F}$ virker og navngi alle krefter. (4 poeng)

Vi har gravitasjonskraten $\vec{G}$, normalkraften $\vec{N}$ fra bakken på stangen, tauspenning $\vec{T}$, den statiske friksjonskraften $\vec{f}$ og den ytre kraften $\vec{F}$ som angriper i midtpunktet av stangen.



b. Vis at spenningen i tauet er:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{F}|}{2\sin\theta}$$

(4 poeng)

Dette er en statisk situasjon. Summen av alle krefter må derfor være null og netto-kraftmomentet om hvilken som helst punkt må også være null. Vi bruker Newtons andre lov i horisontal retning:

$$F - f - T\sin\theta = 0$$

Vi ser på kraftmoment om punktet hvor tauet er festet. Kraften $\vec{F}$ gir et positivt kraftmoment om z aksen mens friksjonskraften gir et negativt kraftmoment. Gravitasjon og normalkraften gir ingen kraftmoment siden disse krefter er parallelle med kraftarmen.

$$\frac{1}{2}hF - hf = 0$$

Vi får $f = \frac{1}{2}F$ og setter inn:

$$F - \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}F = T\sin\theta$$

Dette gir $T = \frac{F}{2\sin\theta}$ som skulle vises.

c. Finn den maksimale horisontale kraften $|\vec{F}|$ som kan angriper i senteret av stangen uten å forårsake at den nedre enden sklir ut. (6 poeng)

Den nedre enden av stangen sklir når friksjonskraften blir større enn maksimalverdien. Betingelsen for at stangen ikke sklir er:

$$f \leq f_{max} = \mu_s N$$

Vi kan finne normalkraften ved å bruke Newtons andre lov i vertikal retning:

$$N - G - T\cos\theta = 0$$

Ved bruk av resultatet fra oppgave b. og $G = mg$ får vi:

$$N = G + T\cos\theta = mg + \frac{F}{2\sin\theta}\cos\theta = mg + \frac{1}{2}\frac{F}{\tan\theta}$$

Vi setter inn i betingelsen for friksjonskraften og bruker $f = \frac{1}{2}F$:

$$f \leq \mu_s N$$

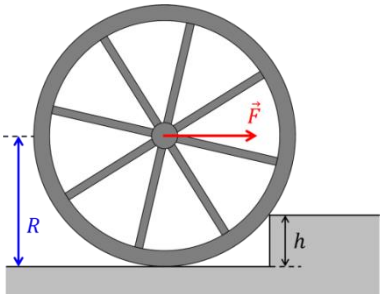
$$\frac{1}{2}F \leq \mu_s \left(mg + \frac{1}{2}\frac{F}{\tan\theta}\right)$$

$$F - \mu_s \frac{F}{\tan\theta} \leq 2\mu_s mg$$

$$F \leq \frac{2\mu_s mg}{1 - \frac{\mu_s}{\tan\theta}}$$

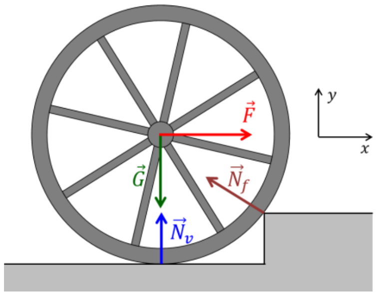
Oppgave B (11 poeng)

Du prøver å dra et sykkelhjul med masse m og radius R opp en fortauskant av høyde h. For å gjøre dette bruker du en horisontal kraft F som virker på aksen i sentrum av hjulet.



a. Tegn et frilegemediagram av hjulet og navngi alle krefter. (4 poeng)

Det virker 4 krefter: Gravitasjon G vertikalt på aksen, den horisontale kraften F som brukes for å dra hjulet, en normalkraft N_v fra veien og en kontaktkraft N_f fra fortauskanten.

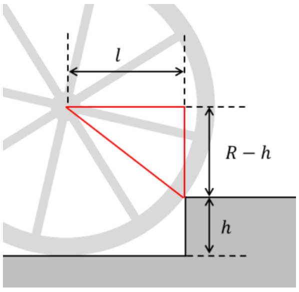


b. Forklar kvalitativt hvordan de andre kreftene endres når du øker kraften F, men før hjulet kommer opp på fortauskanten. (4 poeng)

Så lenge hjulet ikke kommer opp på fortauet er hjulet i likevekt og summen over alle krefter og kraftmomenter er null. Hvis vi øker den horisontale kraften F, så øker kraften fra fortauskanten N_f mens normalkraften fra veien N_v minker. Hjulet mister kontakten med veien når N_v blir null.

c. Hva er den minste kraften F som kreves for å dra hjulet opp på fortauskanten når radius av hjulet er $R = 20$ cm og høyden på fortauskanten er $h = 8$ cm? Uttrykk svaret som en funksjon av massen m og tyngdeakselerasjonen g. (6 poeng)

For å finne betingelsen for at hjulet kommer opp på fortauskanten ser vi på netto kraftmomentet om kontaktpunktet med kanten. Kraftarmen til kraften F om kanten er $R - h = 12$ cm. Kraftarmen til gravitasjonskraften finner vi ved hjelp av Pythagoras: $l = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 16$ cm. For å få et negativt kraftmoment (med klokken) trenger vi at:



$$F(R-h) > mgl$$

$$F > \frac{l}{R-h}mg = \frac{4}{3}mg$$