FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #3 (6.-9.2.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. Et jetfly flyr på konstant høyde. Hastighetskomponentene ved tid $t_1 = 0$ er $v_x = 90$ m/s og $v_y = 110$ m/s. Ved tid $t_2 = 30$ s er hastighetskomponentene $v_x = -170$ m/s og $v_y = 40$ m/s.

a. Hvis vi definerer x aksen i retning øst og y aksen i retning nord, hva viser kompasset (i grader) ved tid t_1 og ved tid t_2?

$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y}$$

$t = 0$: $= \tan^{-1}\left(\frac{90}{110}\right) = 39.3°$

$t = 30$ s: $= \tan^{-1}\left(\frac{-170}{40}\right) = 283.2°$

b. Finn komponentene til gjennomsnittsakselerasjonen i tidsintervall mellom t_1 og t_2.

$$\bar{a}_x = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{\Delta t} = \frac{-170\text{ m/s} - 90\text{ m/s}}{30\text{ s}} = -8.67\text{ m}/s^2$$

$$\bar{a}_y = \frac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{\Delta t} = \frac{40\text{ m/s} - 110\text{ m/s}}{30\text{ s}} = -2.33\text{ m}/s^2$$

c. Finn størrelse og retning til gjennomsnittsakselerasjonen.

$$\bar{a} = |\vec{\bar{a}}| = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} = 8.98\text{ m}/s^2$$

Begge komponentene er negativ, så akselerasjonsvektor peker i retning sør-vest. Vinkel relativ til retning sør er:

$$\tan\theta' = \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_y}, \quad \theta' = 75°$$

Kompassen viser $\theta = \theta' + 180° = 255°$.

T2. En brikke tørris sklir langs en horisontal lab-benk. Brikken sklir over kanten ved tid $t_0 = 0$ med horisontalhastighet $v_{0,x} = 1.1$ m/s. Brikken treffer på bakken ved tid $t_1 = 0.48$ s. Vi ser bort fra luftmotstand.

a. Hvor høyt er lab-benken?

Den eneste kraften som virker er gravitasjon. Brikken beveger seg med konstant hastighet i horisontal og med konstant akselerasjon i vertikal retning. Fra bevegelsesligningene for disse tilfeller finner vi:

$$y - y_0 = v_{0,y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 - \tfrac{1}{2}g t^2 = -1.13\text{ m}$$

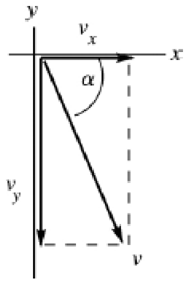
Brikken lander 1.13 m lavere enn kanten, så benken er 1.13 m høy.

b. I hvilken horisontal avstand fra benken treffer brikken på bakken?

$$x - x_0 = v_{0,x} t = 0.53 \text{ m}$$

Brikken lander 0.53 m fra kanten.

c. Finn størrelse og retning til hastighetsvektoren rett før tørrisbrikken treffer på bakken.



$$v_x = v_{0,x} = 1.1 \text{ m/s}$$

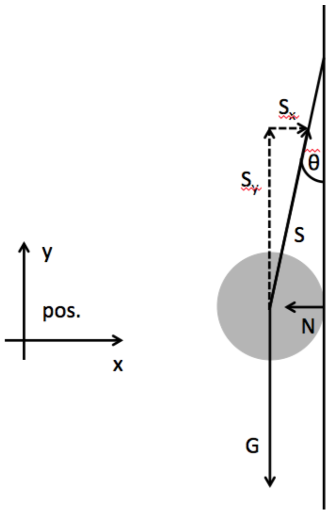
$$v_y = v_{0,y} + a_y t = 0 - gt = -4.7 \text{ m/s}$$

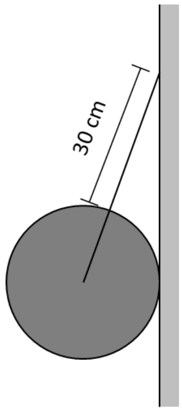
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.83 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = -76.8°$$

T3. En homogen kule med masse $m = 45$ kg og radius $R = 32$ cm er festet i en vegg med en masseløs strikk som vist i figuren.

a. Tegn et fri-legeme diagram for kulen.





b. Finn snordraget.

Vi finner først vinkelen mellom snoren og veggen. Det kan vi gjøre ved hjelp av radius til kulen $r = 32$ cm og lengden $l = r + 30$ cm $= 62$ cm.

$$\sin\theta = \frac{r}{l} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{32}{62}\right) = 31.1°$$

Under antagelsen at kulen holdes i ro er snordragets y komponent: $S_y = -G$.

$$S_y = S\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{-mg}{\cos\theta} = 515 \text{ N}$$

c. Hva er normalkraften fra veggen til ballen?

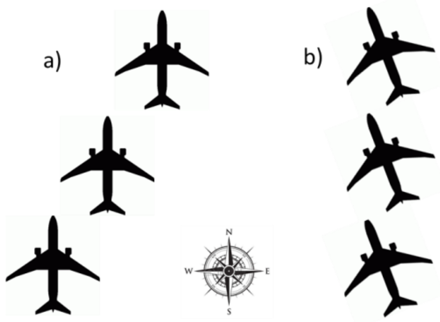
Under antagelsen at kulen holdes i ro er normalkraften fra veggen til kulen:

$$N = -S_x = -S\sin\theta = -266 \text{ N}$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. Du styrer et fly på en dag med mye vind.

a. Kompassen viser at nesen til flyet peker rett nordover. Instrumentene viser at farten til flyet (relativ til luften) er 240 km/t. Hvis vinden blåser fra vest til øst med 100 km/t, hva er hastigheten (retning og størrelse) til flyet relativ til bakken?



Vi definerer x akse i retning øst og y akse i retning nord. Hastighet til flyet relativ til luften er:
$\vec{v}_{P,A} = v_{P,A}\,\hat{j}$, der $v_{P,A} = 240$ km/t. Hastighet til luften relativ til bakken er:
$\vec{v}_{A,E} = v_{A,E}\,\hat{\imath}$, der $v_{A,E} = 100$ km/t. Hastighet til flyet relativ til bakken er derfor:

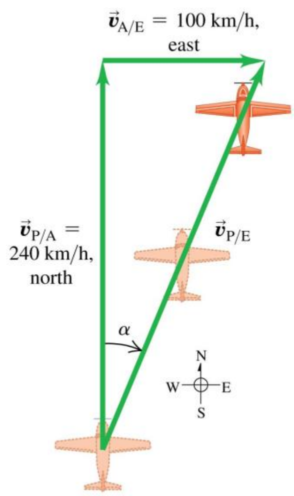
$$\vec{v}_{P,E} = \vec{v}_{P,A} + \vec{v}_{A,E} = v_{P,A}\,\hat{j} + v_{A,E}\hat{\imath}$$

Farten relativ til bakken er:

$$v_{P,E} = |\vec{v}_{P,E}| = \sqrt{v_{P,A}^2 + v_{A,E}^2} = 260 \text{ km/t}.$$

Retningen er:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_{A,E}}{v_{P,A}}\right) = 22.6°$$



b. I samme vindforhold som i a) og med samme fart, i hvilken retning burde du styre flyet hvis du skal reise nordover, og hva er i så fall hastigheten relativ til bakken?

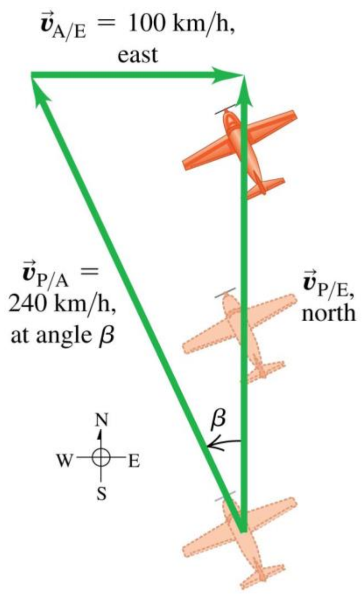
Du må styre flyet med en ukjent vinkel β i retning nord-vest for å kompensere for vinden. Farten til flyet relativ til luften er fortsatt $v_{P,A} = 240$ km/t, og ligningen som relaterer hastighetene er fortsatt gyldig:
$\vec{v}_{P,E} = \vec{v}_{P,A} + \vec{v}_{A,E}$, der $\vec{v}_{P,E} = v_{P,E}\,\hat{j}$ og $\vec{v}_{A,E} = v_{A,E}\,\hat{\imath}$. I figuren ser vi at

$$v_{P,E} = \sqrt{v_{P,A}^2 - v_{A,E}^2} = 218 \text{ km/t}$$

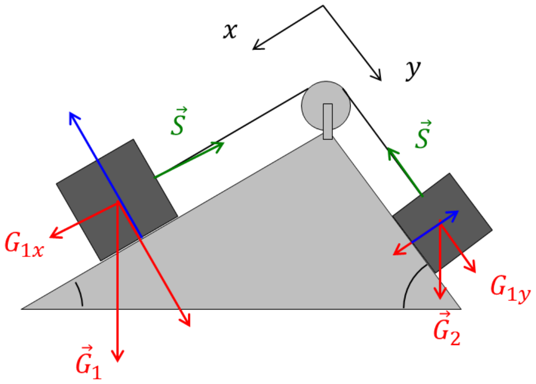
og for vinkelen finner vi:

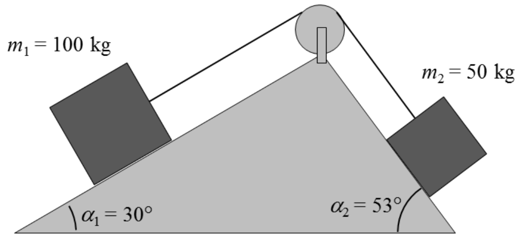
$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{v_{A,E}}{v_{P,A}}\right) = 24.6°$$

Du må styre flyet 24.6° vest fra nord, det vi sier i retning 335.4° på kompass.



G2. To klosser på to forskjellige skråplaner er knyttet sammen med en tynn, masseløs snor som går over en trinse som vist i figuren. Vi antar at det er ingen friksjon mellom klossene og overflaten, og at trinsen også er uten friksjon.





a. Hvilken vei vil systemet beveger seg etter vi slipper klossene?

Vi definerer x retning ned helningen på venstre side og y retning ned helningen på høyre side. Vi bestemmer komponentene til gravitasjonskraft $\vec{G}_1$ i x retning og til $\vec{G}_2$ i y retning:

$$G_{1x} = m_1 g \sin \alpha_1 = 490.5 \text{ N}$$
$$G_{2y} = m_2 g \sin \alpha_2 = 391.7 \text{ N}$$

Siden snordraget er det samme for begge klossene vil systemet bevege seg mot venstre langs planene.

b. Finn akselerasjon på klossene.

Begge klosser har samme akselerasjon (i x retning for kloss 1 og i y retning for kloss 2). Vi bruker Newtons andre lov:

$$G_{1x} - S = m_1 a$$
$$S - G_{1y} = m_2 a$$
$$G_{1x} - G_{1y} = (m_1 + m_2)a$$
$$a = 0.66 \text{ m}/s^2$$

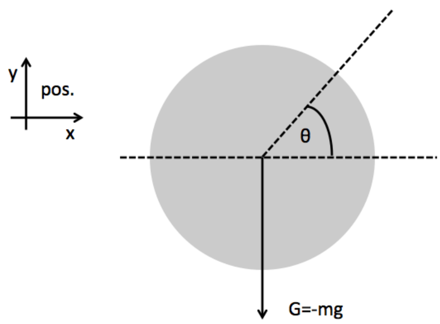
c. Hva er snordraget?

$$S = G_{1x} - m_1 a = 424.7 \text{ N}$$

G3. Du kaster en basketball som forlater hånden med en hastighet på 9.4 m/s og en vinkel $\theta = 60°$ mot horisontal. Du scorer fra 7 m avstand og kurven henger i 3.5 m høyde. Du kan ignorere luftmotstand.

a. Tegn et frilegeme diagram av ballen.

Uten luftmotstand er gravitasjon den eneste kraften som virker på ballen.



b. Finn posisjon og hastighet av ballen som en funksjon av tid.

Ingen kraft i horisontal retning, $a_x = 0$.

Gravitasjon i vertikal retning: $a_y = -g$.

Initialbetingelser: $\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} = y_0\hat{\jmath}$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\hat{\imath} + v_0 \sin\theta\,\hat{\jmath} = \frac{1}{2}v_0\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\hat{\jmath}$$

Bevegelsen i horisontal retning: $v_x(t) = v_x(0) = \frac{1}{2}v_0$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)\,dt = \frac{1}{2}v_0 t$$

Vertikal: $v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t)\,dt = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

c. Fra hvilken høyde kastet du ballen?

Vi kjenner posisjonen til ballen når den treffer kurven og leter etter posisjon i utgangspunkt. Først finner vi tiden t_1 når ballen treffer kurven:

$$x(t_1) = \frac{1}{2}v_0 t_1 = 7\text{ m}$$

$$t_1 = \frac{2x(t_1)}{v_0} = 1.49\text{ s}$$

Vi vet at kurven er i posisjon $y(t_1) = y_1 = 3.5$ m over bakken:

$$y(t_1) = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$y_0 = y(t_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 = 2.26\text{ m}$$

d. Hva er hastigheten når ballen treffer kurven?

Vi setter inn:

$$v_x(t_1) = \frac{1}{2}v_0 = 4.7\text{ m/s}$$

$$v_y(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt_1 = -6.5\text{ m/s}$$

$$\vec{v}(t_1) = (4.7\hat{\imath} - 6.5\hat{\jmath})\text{ m/s}$$