FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #13 (2.-8.5.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. En massiv kule med masse m og radius R ruller uten å skli ned et skråplan med helningsvinkel θ. Treghetsmomentet til kulen om massesenteret er $I = \frac{2}{5}mR^2$. Finn akselerasjonen til kulen.

Vi definerer positiv x retning opp langs skråplanet. Krefter som virker er tyngdekraften vertikal nedover, normalkraften i y retning, og statisk friksjonskraft i x retning. Newtons andre lov i x retning gir:

$$f - mg\sin\theta = ma$$

Tyngdekraften gir ingen kraftmoment siden den angriper i massesenteret. Normalkraften gir ingen kraftmoment siden den er parallell med kraftarmen. Bare friksjonskraften gir et positivt kraftmoment om z aksen:

$$\tau = fR = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

$$f = \frac{2}{5}mR\alpha$$

Vi vet at kulen ruller uten å skli og kan bruke rullebetingelsen $v = -R\omega$ eller $a = -R\alpha$.

$$f = -\frac{2}{5}mRa$$

Vi setter inn i Newtons andre lov:

$$-\frac{2}{5}mRa - mg\sin\theta = ma$$

$$-mg\sin\theta = \frac{7}{5}ma$$

$$a = -\frac{5}{7}g\sin\theta$$

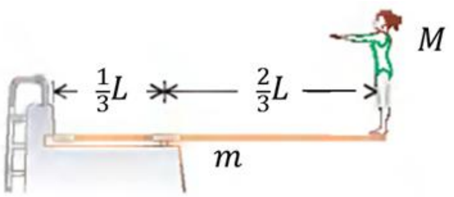
Akselerasjonen er negativ, altså ned skråplanet.

T2. Tyngdeakselerasjonen på nordpolen av Neptun er 11.25 m/s^2. Neptun har radius 24764 km, og fullfører en full rotasjon om aksen sin i løpet av 16 timer, 6 minutter og 36 sekunder. Hva er akselerasjonen på et legeme ved ekvatoren til Neptun?

Det virker en sentrifugalakselerasjon på et legeme ved ekvatoren som virker imot tyngdeakselerasjonen:

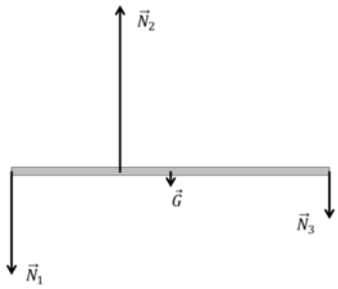
$$g = g_N - R\omega^2 = g_N - R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 11.25\ \mathrm{m/s^2} - 2.48\cdot 10^7\ \mathrm{m}\left(\frac{2\pi}{57996\ \mathrm{s}}\right)^2 = 10.96\ \mathrm{m/s^2}$$

T3. E Et stupebrett med lengde L er festet i den ene enden og støttet nedenfra i et punkt som ligger i en avstand $\frac{1}{3}L$ fra den fastspente enden (se figur). Brettet er stivt og har masse m. En person med masse M står på den frie enden av brettet.



a. Tegn et frilegeme diagram for stupebrettet og navngi alle kreftene.

Kontaktkrefter:
$\vec{F}_1$: kraft fra stigen på stupebrettet
$\vec{F}_2$: kraft fra støttepunktet på stupebrettet
$\vec{F}_1$: kraft fra personen på stupebrettet
Langtrekkende kraft: gravitasjon $\vec{G}$



b. Finn kraften som virker på støttepunktet og kraften på den fastspente enden av brettet. Skriv kreftene som funksjon av massene m og M og tyngdeakselerasjonen g.
Gravitasjonskraft: $G = mg$
Kraft fra personen: $N_3 = Mg$
Nettokraftmoment om venstre enden:

$$N_2 \frac{L}{3} - mg\frac{L}{2} - MgL = 0$$

$$N_2 = \frac{3}{2}mg + 3Mg = 3g\left(\frac{m}{2} + M\right)$$

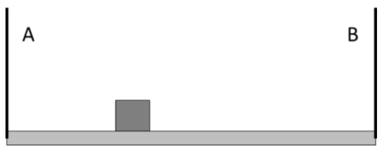
Nettokraft i vertikal retning:

$$N_2 - N_1 - mg - Mg = 0$$

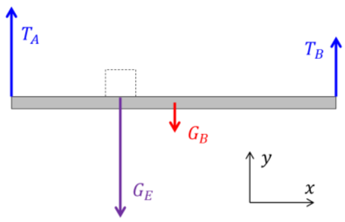
$$N_1 = N_2 - mg - Mg = \frac{1}{2}mg + 2Mg$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. En bjelke med vekt $m_B g = 100$ N og lengde $L = 2$ m er festet horisontal med to vertikale kabler, en på hver side. Det maksimale snordraget som kabel A tåler er 300 N, for kabel B er det maksimal 200 N.



a. Hvor mye vekt kan du legge på bjelken uten at en av de to kabler svikter?
For at systemet skal være i likevekt må summen over alle krefter og summen over alle kraftmomenter være null. Vi tegner et frilegemediagram for bjelken:



Vi finner maksimalvekten til esken som du kan legge på ved å bruke Newtons andre lov i vertikal retning med maksimal snordrag i begge kabler:

$$T_A + T_B - G_B - G_E = 0$$

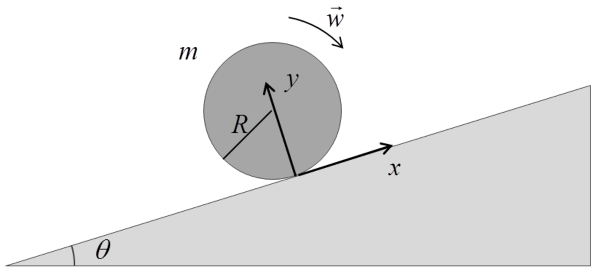
$$G_E = m_E g = T_A + T_B - G_B = 300 \text{ N} + 200 \text{ N} - 100 \text{ N} = 400 \text{ N}$$

b. Hvor på bjelken må du legge denne vekten?
For at bjelken ikke roterer må nettokraftmoment være null. Vi legger rotasjonspunktet i enden hvor kabel A er festet. Kabel B gir et positivt kraftmoment om dette punktet, mens vekten til bjelken og vekten til esken gir et negativt kraftmoment. Vi legger esken i avstand x fra rotasjonspunktet:

$$T_B L - G_B \frac{L}{2} - G_E x = 0$$

$$x = \frac{L\left(T_B - \frac{1}{2} G_B\right)}{G_E} = \frac{2(200 - 50)\ \mathrm{Nm}}{400\ \mathrm{N}} = 0.75\ \mathrm{m}$$

G2. En sylinder som roterer om massesenteret sitt er satt ned på et skråplan med helningsvinkel θ. Sylinderen har masse m, radius R og treghetsmomentet om massesenteret er $I = \frac{1}{2} m R^2$. Vi definerer x aksen langs skråplanet som vist i figuren.



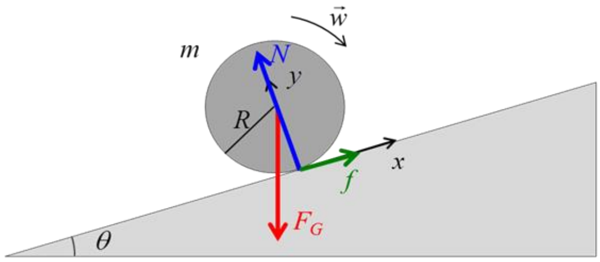
Sylinderen roterer med klokken med en initial vinkelhastighet $\vec{\omega} = -\omega_0 \hat{k}$. ($z$ aksen peker ut av papirplanet.) Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderen og overflaten til skråplanet er μ_d. Når den er satt ned på skråplanet ruller og sklir sylinderen samtidlig i en blandet bevegelse. I denne oppgaven er vi interessert i den første perioden fram til det blir en ren rullebevegelse. Du kan se bort fra luftmotstanden.

a. Tegn et frilegemediagram for sylinderen og uttrykk alle kreftene ved hjelp av m, g, μ_d, og θ.

Gravitasjonskraft $\vec{F}_G$

Normalkraft $\vec{N}$

Friksjonskraft $\vec{f}$



Med koordinatsystem som vist i figuren:

$$\vec{F}_G = -mg\sin(\theta)\,\hat{\imath} - mg\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Ingen bevegelse i y retning: $\sum F_y = N - mg\cos(\theta) = ma_y = 0$

$$\vec{N} = mg\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Siden sylinderen roterer med klokken er friksjonskraften rettet i positiv x retning.
Siden sylinderen sklir må vi bruke dynamisk friksjon:

$$\vec{f} = \mu_d N \hat{\imath} = \mu_d mg\cos(\theta)\,\hat{\imath}$$

b. Finn akselerasjonen til sylinderen langs skråplanet.

Newtons andre lov i x retning:

$$\sum F_x = f - mg\sin(\theta) = \mu_d mg\cos(\theta) - mg\sin(\theta) = ma_x$$

$$a_x = \mu_d g\cos(\theta) - g\sin(\theta)$$

c. Diskuter bevegelsen for forskjellige verdier for vinkelen θ. I hvilken retning beveger sylinderen seg i følgende tilfelle?

i. $\tan\theta < \mu$: liten helning eller mye friksjon

$\sin\theta < \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; a_x > 0$. Sylinderen beveger seg opp skråplanet.

ii. $\tan\theta > \mu$: stor helning eller liten friksjon

$\sin\theta > \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; a_x < 0$. Sylinderen beveger seg ned skråplanet.

iii. $\tan\theta = \mu$

$$\sin\theta = \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; a_x = 0$$

Sylinderen har ingen akselerasjon langs skråplanet. Siden den settes ned uten hastighet langs skråplanet, vil sylinderen forbli på samme sted. Sylinderen roterer og sklir uten at massesenteret beveger seg.

I det følgende antar vi at $\tan\theta = \mu$.

d. Sammenlign friksjonskraften med komponenten til tyngdekraften som er langs skråplanet.

Vi har: $\vec{f} = \mu_d N\hat{\imath} = \mu_d mg\cos(\theta)\,\hat{\imath} = mg\sin(\theta)\,\hat{\imath}$, som er like stor som x komponenten til tyngdekraften med omvendt fortegn. Det er friksjonskraften som kompenserer tyngdekraften, slik at sylinderen roterer på samme sted uten at massesenteret beveger seg.

e. Finn netto kraftmoment på sylinderen.

Gravitasjon angriper i massesenteret og gir ingen kraftmoment. Normalkraften er parallell med posisjonsvektoren til angrepspunktet og gir ingen kraftmoment. Bare friksjonskraften gir et kraftmoment:

$$\vec{\tau} = -R\hat{\jmath} \times f\hat{\imath} = Rf\hat{k} = \mu_d mgR\cos(\theta)\,\hat{k}$$

f. Finn vinkelakselerasjon til sylinderen. Hvilken retning har vinkelakselerasjonen og hva betyr det for rotasjonsbevegelsen til sylinderen?

Vi bruker spinnsatsen: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{\mu_d mgR\cos(\theta)}{\frac{1}{2}mR^2}\hat{k} = \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}\hat{k} = \frac{2g\sin(\theta)}{R}\hat{k}$$

Vinkelakselerasjonen er i positiv z retning. Sylinderen roterer opprinnelig i negativ z retning. Friksjonskraften bremser vinkelhastigheten, men sylinderen forblir fortsatt på samme sted.

g. Etter hvor mye tid stopper rotasjonen og hva skjer etterpå?

Vi integrerer vinkelakselerasjonen for å finne vinkelhastigheten:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) + \int_0^t \vec{\alpha}\,dt = -\omega_0\hat{k} + \frac{2g\sin(\theta)}{R}t\hat{k}$$

Vi leter etter tidspunkt når $\omega = 0$:

$$t = \frac{R\omega_0}{2g\sin(\theta)}$$

Etter denne tiden begynner sylinderen å rulle ned skråplanet. Husk at vi antok i begynnelsen at sylinderen sklir, og vi kunne derfor bruke dynamisk friksjon. Etter sylinderen har stoppet opp blir friksjonen statisk. Siden $\mu_s > \mu_d$ ruller sylinderen ned skråplanet uten å skli etterpå.