FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #9 (3.-6.4.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. NASA bruker en sentrifuge ved Ames Research Center for å studere effekten av store akselerasjoner på astronauter. Hvis sentrifugen roterer med en vinkelhastighet på 45 omdreiinger per minutt (rpm) føler astronauten en akselerasjon som er 20 ganger større enn tyngdeakselerasjonen på jorden, $a_{\mathrm{rad}} = 20\,g$. (Det er tvilsomt om astronauten vil overleve det.) Hvor stor er radiusen til sentrifugen?

Sentripetalakselerasjon: $a_s = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

$$R = \frac{a_s}{\omega^2} = \frac{20 \cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2}}{\left(\frac{45 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}}\right)^2} = 8.84\ \mathrm{m}$$

T2. En vifte slås av og vinkelhastigheten avtar jevnt fra 400 til 200 omdreiinger per minutt i løpet av 4 sekunder.

a. Finn vinkelakselerasjonen.

Siden vinkelhastigheten avtar jevnt er vinkelakselerasjonen konstant:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{200 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}} - \frac{400 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}}}{4\ \mathrm{s}} = -5.24\ \frac{\mathrm{rad}}{s^2}$$

b. Hvor mange omdreininger gjorde viften i løpet av disse 4 sekunder?

For bevegelser med konstant vinkelakselerasjon har vi:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{400 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}} \cdot 4\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 5.24 \frac{\mathrm{rad}}{s^2} \cdot (4\ \mathrm{s})^2 = 125.63\ \mathrm{rad}$$

Viften gjorde $\frac{125.63\ \mathrm{rad}}{2\pi} = 20$ omdreiinger.

c. Hvor mye mer tid trenger viften for å stanse rotasjonen fullstendig hvis vi antar at vinkelakselerasjonen er konstant?

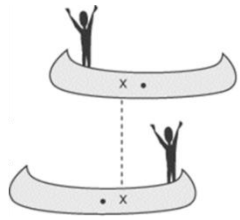
For bevegelser med konstant vinkelakselerasjon har vi:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - \frac{400 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}}}{-5.24\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = 8\ \mathrm{s}$$

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. En person på 80 kg står helt bak i en båt som veier 320 kg og som er 5 m lang på innsiden. Båten, som er symmetrisk, ligger på en rolig innsjø uten strømning og vind. Personen går 5 m relativ til båten helt til den andre enden. Vi skal finne ut hvor mye båtens massesenter har flyttet seg.

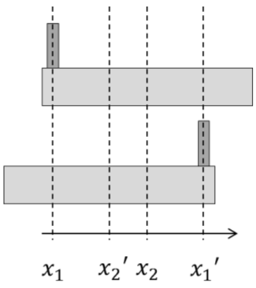


a) Definer et koordinatsystem festet til vannet (ikke båten) og bestem posisjon til personens og båtens massesenter i dette systemet.

b) Finn massesenteret til systemet som består av båten og personen i dette systemet. Er massesenterets posisjon det samme før og etter forflytning? Forklar!

c) Hvor mye har båtens massesenter forflyttet seg?

Sett utenfra (fra stranden) befinner personen seg i posisjon x_1 og massesenter til båten er i posisjon $x_2 = x_1 + d$, hvor $d = 2.5$ m er den halve lengden til båten. Ettervert er massesenteret til båten i den nye posisjonen x_2' og personen har flyttet seg til den andre enden til båten til $x_1' = x_2'$+d. Vi velger et koordinatsystem hvor $x_1 = 0$.



Massesenteret til hele systemet som består av båt og person befinner seg i:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Siden det virker ingen ytre krefter på systemet i horisontal retning forblir massesenteret til hele systemet på samme plass og vi har ettervert:

$$x'_{cm} = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m_1 + m_2} = x_{cm}$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2'$$

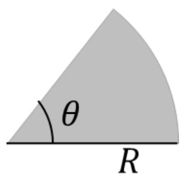
$$m_2 d = m_1(x_2' + d) + m_2 x_2'$$

$$d(m_2 - m_1) = x_2'(m_1 + m_2)$$

$$x_2' = d\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 2.5\text{ m}\frac{240\text{ kg}}{400\text{ kg}} = 1.5\text{ m}$$

Massesenteret til båten har flyttet seg 1 m til venstre fra $x = 2.5$ m til $x = 1.5$ m.

G2. Vi skal finne massesenteret til en sektor med vinkel θ av en flat, homogen sylinder med radius R og tykkelse d («kakestykke»).



a) Uttrykk koordinatene x, y, z og volumelement dV i sylinderkoordinater.

b) Bestem massen til kakestykket ved hjelp av integrasjon:

$M = \int_V \rho dV$

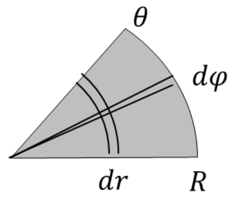
c) Hvilken betydning har det at sylinderen er homogen?

d) Finn massesenteret i x, y og z retning. Hint: $MX = \int_V x\rho dV$

Legemet er homogent og har derfor konstant tetthet ρ.

Vi bruker sylinderkoordinater: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\,,\ z$

Volumelement: $dV = rdrd\varphi dz$



$$M = \int_V \rho\, dV = \rho \int_0^R rdr \int_0^\theta d\varphi \int_0^d dz = \frac{1}{2}\rho R^2\theta d$$

For massesenteret har vi:

$$MX = \int_V x\rho dV = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\theta \cos\varphi\, d\varphi \int_0^d dz = \frac{1}{3}\rho R^3 \sin\theta\, d$$

$$X = \frac{\frac{1}{3}\rho R^3 \sin\theta\, d}{\frac{1}{2}\rho R^2\theta d} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$MY = \int_V y\rho dV = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\theta \sin\varphi\, d\varphi \int_0^d dz = \frac{1}{3}\rho R^3(-\cos\theta + 1)\, d$$

$$Y = \frac{\frac{1}{3}\rho R^3(1 - \cos\theta)\, d}{\frac{1}{2}\rho R^2\theta d} = \frac{2}{3}R\frac{1 - \cos\theta}{\theta}$$

På grunn av symmetri er $Z = \frac{1}{2}d$