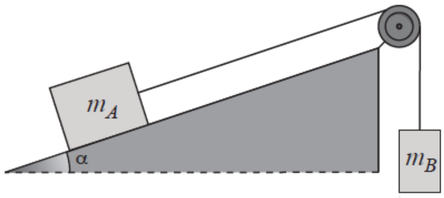
FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #8 (13.-16.3.)

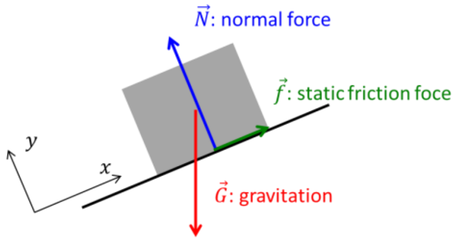
Eksamenstrening: (Du skal løse én av oppgavene i gruppetimen.)

Oppgave A (16 poeng)

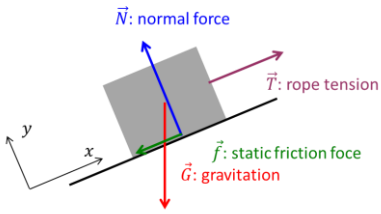


En blokk av masse m_A står på et skråplan som har en helningsvinkel α. Et tau forbinder blokken til en vekt B med masse m_B over en trinse som vist i figuren. Både tauet og trinsen kan betraktes masseløst, og trinsen roterer uten friksjon. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom blokk A og skråplanet er μ_s, den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d. Tyngdeakselerasjonen er g.

a) Tegn et fri-legeme diagram for blokk A og navngi kreftene for det tilfelle hvor det ikke er noen vekt B festet til den andre enden av tauet. (3 poeng)



b) Tegn et fri-legeme diagram for blokk A og navngi kreftene for det tilfelle hvor en vekt B er festet til den andre enden av tauet. Anta at massen m_B er slik at systemet knapt forblir i ro. (3 poeng)



c) Finn et uttrykk for den maksimale massen $m_{\mathrm{B,max}}$ som du kan henge på tauet uten at blokk A begynner å skli opp skråplanet. Uttrykk den maksimale massen $m_{\mathrm{B,max}}$ som funksjon av massen m_A, vinkelen α og den statiske friksjonskoeffisienten μ_s. (5 poeng)

Blokk A forblir i ro. Newtons andre lov for blokk A i x retning:

$$T - f - m_A g \sin\alpha = 0$$

Newtons andre lov for blokk A i y retning:

$$N - m_A g \cos\alpha = 0$$

Newtons andre lov for blokk B i ro:

$$T - m_B g = 0$$

For friksjonskraften finner vi:

$$f = T - m_A g \sin\alpha = m_B g - m_A g \sin\alpha \le \mu_s N = \mu_s m_A g \cos\alpha$$

$$m_B \le m_A(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha)$$

d) Du fester en masse som er større enn den maksimale massen fra del c., $m_{\mathrm{B,max}}$, til tauet og blokk A begynner å skli opp skråplanet. Finn akselerasjonen til de to legemene, uttrykt som funksjon av massene m_A og m_B, vinkelen α, den dynamiske friksjonskoeffisienten μ_d og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)

Klossene beveger seg med samme akselerasjon. Newtons andre lov for kloss A i x retning:

$$T - f - m_A g \sin\alpha = m_A a$$

Den dynamiske friksjonskraften er: $f = \mu_d N = \mu_d m_A g \cos\alpha$

Newtons andre lov for kloss B:

$$m_B g - T = m_B a$$

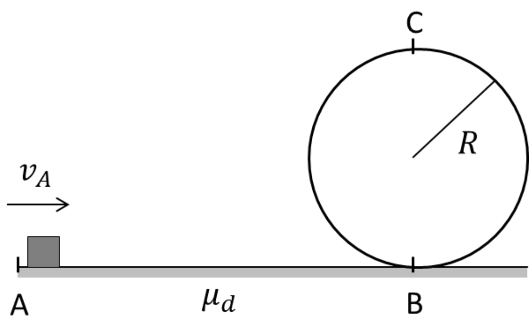
Vi tar summen av de to ligningene:

$$m_B g - f - m_A g \sin\alpha = (m_A + m_B)a$$

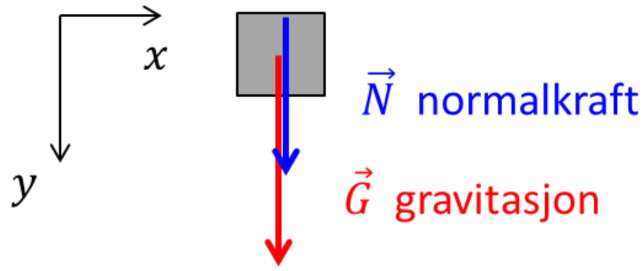
$$a = \frac{m_B - m_A(\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha)}{(m_A + m_B)} g$$

Oppgave B (16 poeng)

En kloss beveger seg langs en horisontal flate fra A til B og etterpå gjennom en looping med radius R. Avstanden mellom punktene A og B er s. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kloss og flate er μ_d. Mens klossen beveger seg gjennom loopingen er friksjon neglisjerbart. Vi ser også bort fra luftmotstanden. Klossen starter i punkt A med fart v_A.



a. Tegn et frilegeme diagram for klossen på toppen av loopingen i punkt C. (3 poeng)



b. Hvor stor må farten v_C i punkt C på toppen minst være for at klossen forblir i kontakt med loopingen? (4 poeng)

Newtons andre lov i y retning: $N + mg = ma$

For at klossen holder sirkelbanen i loopingen kreves en sentripetalakselerasjon:

$$a = \frac{v_C^2}{R}$$

Vi finner normalkraften: $N = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right)$

Klossen forblir i kontakt med loopingen hvis: $N \geq 0$

$$\frac{v_C^2}{R} - g \geq 0$$

$$v_C \geq \sqrt{gR}$$

c. Hvor stor må farten v_B in punkt B nederst i loopingen minst være for at klossen fullfører loopingen? (4 poeng)

Uten friksjon og luftmotstand er gravitasjon den eneste kraften som virker på klossen i loopingen. Gravitasjon er konservativ og vi kan bruke bevaring av energi mellom punktene B og C:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

Vi legger nullpunktet for den potensielle energien til høyden i punkt B:

$$\frac{m}{2}v_B^2 + 0 = \frac{m}{2}v_C^2 + 2mgR$$

$$v_C^2 = v_B^2 - 4gR$$

Vi kjenner den minste farten i punkt C:

$$v_C^2 = v_B^2 - 4gR \geq gR$$

$$v_B \geq \sqrt{5gR}$$

d. Hvor stor må farten v_A i punkt A være for at klossen fullfører loopingen? (5 poeng)

Det virker dynamisk friksjon på klossen mellom punktene A og B: $f = -\mu_d N$, hvor kraften er rettet mot bevegelsesretning. Vi finner normalkraften fra Newtons andre lov i vertikal retning: $N - mg = 0$. Vi beregner arbeidet som friksjonskraften gjør mellom punktene A og B:

$$W_f = \int_{x_A}^{x_B} f\, dx = -\mu_d mg \int_{x_A}^{x_B} dx = -\mu_d mg(x_B - x_A) = -\mu_d mgs$$

Gravitasjon og normalkraft er vinkelrett på bevegelsesretning og gjør ingen arbeid. Bare friksjonskraften gjør arbeid. Vi bruker arbeid-energi teoremet: $W_f = K_B - K_A$

$$-\mu_d mgs = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2$$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\mu_d gs$$

Vi kjenner den minste farten i punkt B:

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\mu_d gs \geq 5gR$$

$$v_A \geq \sqrt{5gR + 2\mu_d gs}$$

Uttrykk svarene som funksjon av radius R, tyngdeakselerasjon g, friksjonskoeffisient μ_d og strekningen s.