FYS-MEK 1110 / Vår 2018 / Ukesoppgaver #14 (9.-15.5.)

Test deg selv: (Disse oppgavene bør du gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen.)

T1. Du står på taket av fysikkbygningen og observerer en romskip gjennom et stjernesikkert. Kapteinen til romskipet slår på lyset og, etter hans klokke, slår av lyset igjen etter 10 s. Du måler at lyset er på i 20 s.

a. Hvem måler egentiden, du eller kapteinen i romskipet? Begrunn!
Kapteinen måler egentid siden de to hendelser «lys på» og «lys av» skjer på samme sted i system romskip.

b. Hvor rask beveger seg romskipet i forhold til deg?
Du måler tidsintervallet:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Vi er interessert i relativhastigheten u:

$$\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$$

$$u = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = c\sqrt{1-0.5^2} = 0.87c$$

T2. En observatør på jorden måler at landebanen på en flyplass er 4000 m lang. Et romskip flyr forbi langs landebanen med hastighet $1.8 \cdot 10^8$ m/s.

a. Hvilken lengde måler piloten i romskipet?
Observatøren på jorden er i ro i forhold til landebanen og måler derfor egenlengden. Piloten beveger seg med relativhastighet u og måler en legde som er kortere:

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/v^2} = 4000\text{ m}\sqrt{1-0.6^2} = 3200\text{ m}$$

b. Observatøren på jorden starter klokken når romskipet er over den ene og stopper klokken når romskipet er over den andre enden av landebanen. Hva måler han?
Fra hans perspektiv beveger romskipet seg med hastighet u langs banen med lengde l_0. Han måler $\Delta t = \frac{l_0}{u} = \frac{4000\text{ m}}{1.8\cdot 10^8\text{ m/s}} = 2.2 \cdot 10^{-5}\text{ s} = 22\ \mu\text{s}$.

c. Piloten måler også tiden det tar fra den ene til den andre enden av banen. Hva måler hun?
Fra hennes perspektiv beveger landebanen med lengde $l = 3200\text{ m}$ seg med hastighet u. Hun måler: $\Delta t = \frac{l}{u} = \frac{3200\text{ m}}{1.8\cdot 10^8\text{ m/s}} = 1.8 \cdot 10^{-5}\text{ s} = 18\ \mu\text{s}$. Hun måler egentid mellom de to hendelser «romskip er over startpunktet» og «romskip er over endepunktet av landebanen». Observatøren på jorden beveger seg relativ til hennes system og måler et tidsintervall som er lenger.

Gruppeoppgaver: (Disse oppgaver skal du jobbe med i gruppetimen.)

G1. Et pion π^- oppstår i en kollisjon mellom høyenergetiske protoner i en partikkelakselerator. Etter det er skapt beveger pionet seg med konstant høy hastighet nær lysets hastighet før det henfaller. Et pion i sitt hvilesystem har levetiden $\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s. Finn hastigheten til pionet hvis du som observatør i laboratoriet måler at pionet henfaller etter $4.2 \cdot 10^{-7}$ s.

Levetid til pionet er tidsintervallet mellom skapning og henfall. I sitt hvilesystem skjer begge hendelser på samme sted. Levetid til pionet i hvilesystem er egentid $\Delta t_0 = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s. I et referansesystem so beveger seg relativ til pionet er tidsintervallet lenger. Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$.

$$\gamma^2 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2 = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = 0.998$$

G2. To koordinatsystemer S og S' er orientert slik at tilsvarende akser peker i samme retning. System S' beveger seg med hastighet u i forhold til system S langs x-aksen. Lorentz transformasjonen fra system S til system S' kan da skrives som:

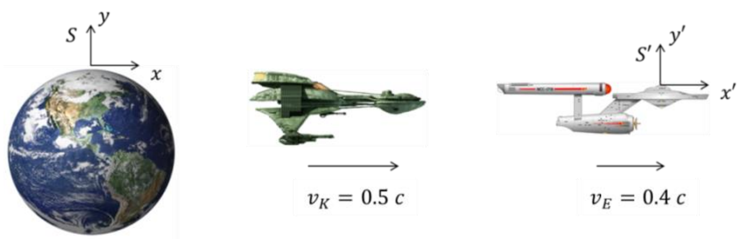
$$x' = \gamma(x - ut),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right).$$

En observatør i system S måler en konstant hastighet til en partikkel i x-retning og finner $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. En observatør som befinner seg i system S' måler hastigheten $v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. Vis at sammenhengen mellom $v_x{}'$ og v_x er:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

G3. Romskipet Enterprise er forfulgt av et fiendtlig Klingon Bird-of-Prey romskip. En observatør på jorden (i system S) måler at hastigheten til Enterprise er $v_E = 0.4\ c$ i retning bort fra jorden og hastigheten til Klingon skipet er $v_K = 0.5\ c$ i samme retning. Hva er hastigheten $v_K{}'$ til Klingon skipet som Captain Kirk måler fra Enterprise (i system S')?

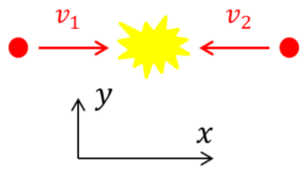


Relativhastighet mellom system S og S': $u = v_E$

Det søkes hastighet $v_K{}'$ til Klingon skipet i system S'. Vi bruker Lotrentz transformasjon:

$$v_K' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_K - v_E}{1 - \frac{1}{c^2}v_K v_E} = \frac{0.1\ c}{1 - 0.5 \cdot 0.4} = 0.125\ c$$

G4. I et eksperiment akselereres to protoner til høy hastighet i motsatt retning slik at de kolliderer. I laboratoriesystemet S måler vi hastighetene $v_1 = 0.8\,c$ og $v_2 = -0.8\,c$. Vi definerer systemet S' slik at det andre protonet er i ro, $v_2' = 0$, målt i dette systemet. Hva er hastigheten til det første protonet i system S'? Med andre ord, hvis du er et av protonene, hva er hastigheten som du måler for protonet som kommer mot deg?



I system S er:

$v_1 = v = 0.8\,c,$ $\qquad\qquad v_2 = -v = -0.8\,c$

I system S' er det andre protonet i ro: $v_2{}' = 0$

Relativhastigheten mellom de to systemer er dermed: $u = -v = -0.8\,c$

Vi bruker resultatet fra oppgave G1:

$$v_1' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_1} = \frac{v - (-v)}{1 - \frac{(-v)}{c^2} v} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1.6\,c}{1 + 0.8^2} = \frac{1.6}{1.64} c = 0.976\,c$$