Aufgabe 2
Lösung

Bundeswettbewerb Mathematik - 2. Runde

Erik Klein

27. Februar 2019

1 Aufgabe

Es seien A, C, F, H, L und S Ziffern im Dezimalsystem, wobei $S \neq 0$ und $F \neq 0$, und $SCHLAF$ und $FLACHS$ aus diesen gebildete Zahlen in Darstellung im Dezimalsystem.
Zu beweisen war, dass die Differenz $d = SCHLAF - FLACHS$ der beiden Zahlen genau dann durch 271 teilbar ist, wenn $C = L$ und $H = A$.
Anders ausgedrückt:

$$\text{(I)} \quad (C = L \land H = A) \implies (271 \mid d)$$

$$\text{(II)} \quad \neg(C = L \land H = A) \implies \neg(271 \mid d)$$

2 Beweis

d wird folgendermaßen ausgedrückt und umgeformt:

$$\begin{aligned}
d &= SCHLAF - FLACHS \\
&= 10^5S + 10^4C + 10^3H + 10^2L + 10^1A + 10^0F - (10^5F + 10^4L + 10^3A + 10^2C + 10^1H + 10^0S) \\
&= (10^5 - 10^0)S + (10^4 - 10^2)C + (10^3 - 10^1)H + (10^2 - 10^4)L + (10^1 - 10^3)A + (10^0 - 10^5)F \\
&= 99999S + 9900C + 990H - 9900L - 990A - 99999F \\
&= 99999(S - F) + 9900(C - L) + 990(H - A) \\
&= 99999(S - F) + 990(10(C - L) + (H - A))
\end{aligned}$$

Zuerst wird (I) bewiesen.
Wenn $C = L \land H = A$, gilt $C - L = 0$ und $H - A = 0$, sodass d vereinfacht werden

kann:

$$\begin{aligned} d &= 99999(S-F) + 990(10(0) + (0)) \\ &= 99999(S-F) \\ &= 271 \cdot 369 \cdot (S-F) \end{aligned}$$

Da es dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $d = 271 \cdot k$ gibt, nämlich $369 \cdot (S-F)$, gilt $271 \mid d$. □

Nun wird (II) bewiesen.
Dazu werden folgende Sätze benötigt:

Satz 1 *Wenn* $\neg(C = L \wedge H = A)$, *gilt* $10(C-L)+(H-A) \neq 0$, *also* $H-A \neq 10 \cdot -(C-L)$.
Beweis:
Einer der folgenden Fälle tritt ein:

- ***Fall 1:*** $H = A$
  Da $\neg(C = L \wedge H = A)$, *gilt* $C \neq L$, *sodass* $C - L \neq 0$ *gilt.*
  Deshalb gilt $10 \cdot -(C-L) \neq 0$. *Da* $H - A = 0$, *ist*
  $H - A \neq 10 \cdot -(C-L)$
  wahr.

- ***Fall 2:*** $H \neq A$
  Da C *und* L *als Ziffern im Dezimalsystem ganze Zahlen sind, ist auch* $C - L$ *eine ganze Zahl, sodass* $10 \cdot -(C-L)$ *ein ganzzahliges Vielfaches von* 10 *ist.*
  Da C *und* L *als Ziffern im Dezimalsystem ganze Zahlen zwischen* 0 *und* 9 *sind, ist* $H - A$ *eine ganze Zahl zwischen* -9 *und* 9. *Da* $H \neq A$, *gilt* $H - A \neq 0$.
  Daher gilt $H - A \in \{-9, ..., 9\} \setminus \{0\}$.
  Da keiner dieser möglichen Werte von $H - A$ *ein ganzzahliges Vielfaches von* 10 *ist, ist* $H - A$ *kein ganzzahliges Vielfaches von 10.*
  Da $H - A$ *kein ganzzahliges Vielfaches von 10 ist,* $10 \cdot -(C-L)$ *jedoch ein ganzzahliges Vielfaches von 10 ist, ist*
  $H - A \neq 10 \cdot -(C-L)$
  wahr.

Wir haben bewiesen, dass der Satz für beide Fälle wahr ist. □

Satz 2 *Es sei* $x = 10(C-L) + (H-A)$. *Dann gilt* $-271 < x < 271$.
Beweis:
Der größtmögliche Wert von x *ist* 99, *nämlich wenn* C=9, L=0, H=9, A=0.
Dieser ist kleiner als 271. *Da dieser der größtmögliche Wert von* x *ist, sind auch alle anderen möglichen Werte von* x *kleiner als* 271. *Somit ist* $x < 271$ *bewiesen.*
Der kleinstmögliche Wert von x *ist* -99, *nämlich wenn* C=0, L=9, H=0, A=9.
Dieser ist größer als 271. *Da dieser der kleinstmögliche Wert von* x *ist, sind auch alle anderen möglichen Werte von* x *größer als* 271. *Somit ist* $-271 < x$ *bewiesen.* □

Satz 3 *Wenn $\neg(C = L \land H = A)$, ist $x = 10(C-L)+(H-A)$ nicht durch 271 teilbar.*
Beweis:
Nur wenn es ein ganzzahliges $k = \frac{x}{271}$ gibt, sodass $x = 271 \cdot k$ gilt, ist x durch k teilbar. Aus Satz B folgt, dass $-1 < k < 1$, aus Satz A folgt, dass $k \neq 0$.
Da es außer 0 keine ganzzahlige Zahl größer als -1 und kleiner als 1 gibt, gibt es kein k, das die Bedingungen erfüllt, weshalb x nicht durch 271 teilbar ist. □

Satz 4 *Wenn $\neg(C = L \land H = A)$, ist $x = 990(10(C-L)+(H-A))$ nicht durch 271 teilbar.*
Beweis:
$10(C-L)+(H-A)$ ist nach Satz C nicht durch 271 teilbar, 990 ist ebenfalls nicht durch 271 teilbar.
Da 271 eine Primzahl ist, ist x nur dann durch 271 teilbar, wenn 990 oder $10(C-L)+(H-A)$ durch 271 teilbar sind, weshalb x nicht durch 271 teilbar ist. □

d wird nun umgeformt zu:

$$\begin{aligned} d &= 271 \cdot 369 \cdot (S-F) + 271 \cdot \frac{990(10(C-L)+(H-A))}{271} \\ &= 271 \cdot (369 \cdot (S-F) + \frac{990(10(C-L)+(H-A))}{271}) \end{aligned}$$

Damit d durch 271 teilbar ist, muss $(369 \cdot (S-F) + \frac{990(10(C-L)+(H-A))}{271})$ eine ganze Zahl sein.
Da S und F als Ziffern im Dezimalsystem ganze Zahlen sind, sind auch $S-F$ und $369 \cdot (S-F)$ ganze Zahlen.
Da nch Satz D $990(10(C-L)+(H-A))$ nicht durch 271 teilbar ist, ist $\frac{990(10(C-L)+(H-A))}{271})$ keine ganze Zahl, sodass $(369 \cdot (S-F) + \frac{990(10(C-L)+(H-A))}{271})$ als Summe einer ganzen Zahl und einer nicht-ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, sodass d nicht durch 271 teilbar ist. □
Hiermit wurden beide Teile der Aufgabe bewiesen. □