Universidade Federal do ABC
Comunicação e Redes – 2^o Quadrimestre 2013
Prof. Carlos da Silva dos Santos

Lista de Exercícios 1

1 - Desenhe o grafo com o conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e conjunto de arestas E de maneira que $|E|$ (o número de elementos de E) seja o maior possível. Determine o conjunto E.

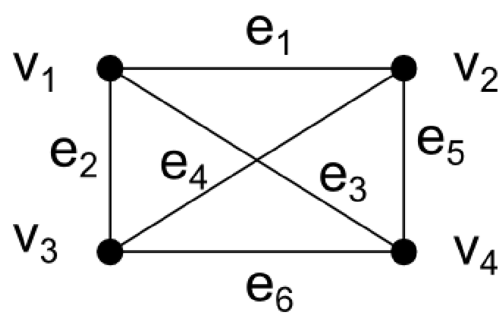

Figura 1: Grafo solução do exercício 1.

Ver Figura 1 para desenho do grafo. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, em que $e_1 = \langle v_1, v_2\rangle$, $e_2 = \langle v_1, v_3\rangle$, $e_3 = \langle v_1, v_4\rangle$, $e_4 = \langle v_2, v_3\rangle$, $e_5 = \langle v_2, v_4\rangle$, $e_6 = \langle v_3, v_4\rangle$.

2 - Dizemos que dois vértices de um grafo são *adjacentes* quanto existe uma aresta ligando ambos. Dizemos que duas arestas são adjacentes quando ambas têm um vértice em comum. Dê um exemplo de grafo de ordem 3 em que todos os pares de vértices são adjacentes e todos os pares de arestas são adjacentes. É possível construir um grafo de ordem 4 com essas características?

Seja $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, definimos as arestas $e_1 = \langle v_1, v_2\rangle$, $e_2 = \langle v_1, v_3\rangle$ e $e_3 = \langle v_2, v_3\rangle$ e o conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Então o grafo $G = (V, E)$ tem a propriedade que todos os pares de vértices são adjacentes e todos os pares de arestas são também adjacentes.

Seja $G' = (V', E')$ um grafo de ordem 4 em que todos os vértices são adjacentes. Considerando $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então obrigatoriamente existem arestas $e' = \langle v_1, v_2\rangle$ e $e'' = \langle v_3, v_4\rangle$; essas duas arestas não são adjacentes. Logo, não é possível construir um grafo de ordem 4 em que todos os vértices sejam adjacentes e todas as arestas sejam adjacentes.

3 - Considere o grafo G associado com sua turma de Comunicações e Redes, construído da seguinte forma: cada aluno está associado a um vértice; dois vértices são ligados por uma aresta se e somente se os alunos correspondentes a cada vértice fazem (ou pretendem fazer) o mesmo curso pós-BCT. Quais características o grafo G deve ter?

Vamos adotar como hipótese que nenhum aluno está ligado a mais de um curso. O grafo G é não-conexo, pois não existe caminho ligando dois vértices quando estes representam alunos de cursos diferentes. O número de componentes conexos é menor ou igual ao número de cursos pós-BCT. Se um componente conexo de G é formado por n vértices, cada vértice desse componente conexo tem grau $n - 1$.

4 - A estrutura de uma empresa é representada por um grafo dirigido em que um arco saindo de u e chegando em v é adicionado se e somente se v é um subordinado direto de u. Analise esse grafo quanto a i) grau de entrada/saída de cada vértice; ii) existência de ciclos dirigidos; iii) conectividade (um ciclo dirigido é um caminho dirigido em que o primeiro vértice é igual ao último e todos os demais vértices são distintos).

O grafo deve ter um único vértice com grau de entrada zero, correspondendo ao posto mais alto da hierarquia da empresa. Todos os demais vértices devem ter grau de entrada 1 (cada funcionário tem apenas um superior imediato). Devem existir vários vértices com grau de saída zero (funcionários que não têm subordinados). Não devem existir ciclos dirigidos, do contrário algum funcionário seria subordinado a um dos seus próprios subordinados (diretos ou indiretos).

5 - Sejam n e p dois números inteiros tal que $1 \leq n \leq p$. Forneça um exemplo de grafo de ordem p e que tenha n componentes conexos.

Possível solução (existem outras). Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ e $E = \{\langle v_i, v_j \rangle | i \equiv (j \mod n)\}$ em que $i \equiv (j \mod n)$ denota a relação de congruência, ou seja $(i - j)$ é divisível por n. Então o grafo $G = (V, E)$ tem n componentes conexos. Demonstração: considere os conjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_n$, em que $V_r = \{v_k | k \equiv (r \mod n)\}$. Então V_r, V_q são disjuntos para $r \neq q$ (isto é, $V_r \bigcap V_k = \varnothing$ para $r \neq k$). Se $u, w \in V_r$, então $\langle u, w \rangle \in E$. Portanto, existe um caminho ligando qualquer par de vértices em V_r. Se $u \in V_r$, $w \in V_q$, $r \neq q$, então $\langle u, w \rangle \notin E$. Portanto, não pode haver caminho ligando um vértice de V_r a um vértice de V_q. Isso mostra que o grafo $G = (V, E)$ possui n componentes conexos (cada componente é formado por um dos conjuntos V_r definidos acima e pela arestas incidentes aos vértices desse conjunto).

6 - Dê um exemplo de um grafo conexo G contendo um vértice v de tal maneira que $G - v$ (o grafo obtido a partir de G pela remoção de v e todas as arestas incidentes nesse vértice) tenha três componentes conexos. Uma possível solução é mostra na Figura 2.

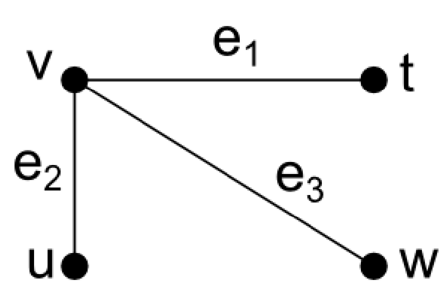

Figura 2: Possível solução do exercício 6.

7 - Se um grafo conexo contem uma aresta cuja remoção torne o grafo desconexo, esta aresta é chamada de *ponte*. Dê um exemplo de grafo conexo de ordem 5 em que toda aresta seja uma ponte. Uma possível solução é mostra na Figura 3.

8 - Considere um grafo conexo G contendo vértices u, v e w, em que todo caminho $u - w$ contem v como vértice intermediário. Qual propriedade o vértice v possui?

O vértice v é um vértice de corte, ou seja, caso v seja removido de G, o grafo resultante é

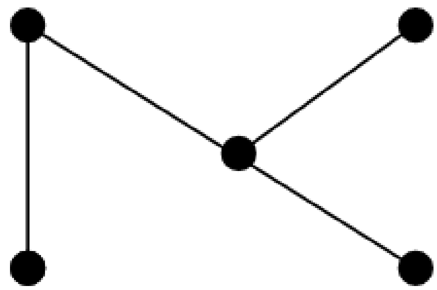

Figura 3: Possível solução do exercício 7.

desconexo. Definimos $G' = G - v$. Não existe caminho em G' ligando u e w, do contrário o mesmo caminho existiria em G e sabemos que não há caminho em G ligando u e w sem passar por v. Logo, G' é desconexo, demonstrando que v é um vértice de corte.

9 - Encontre um problema/sistema real que pode ser modelado por meio de um grafo/rede. Descreva como deve ser o mapeamento entre entidades do sistema e os vértices e arestas do grafo. Quais são as características desse grafo (p.ex. conexo/disconexo, ponderado, dirigido, etc)?

O conjunto de páginas da *world wide web* pode ser modelado por meio de um grafo dirigido. Cada página *web* é representada por um vértice. Caso uma página A contenha um *link* para uma página B, então o grafo conterá um arco iniciando em v_A e terminando em v_B, em que v_A e v_B são os vértices representando as páginas respectivas. Provavelmente, o grafo contém vértices com grau de entrada zero (páginas que não recebem nenhum link) e páginas com grau de saída zero (páginas que não apontam para nenhuma outra).

10 - Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos a *matriz de adjacência* A de G pela seguinte relação:

$$A[u,v] = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle u,v \rangle \in E(G) \text{ e } u \neq v \\ 2, & \text{se } \langle u,v \rangle \in E(G) \text{ e } u = v \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Na definição acima, os elementos de A são indexados por $V(G) \times V(G)$. Determine a matriz de adjacência para os seguintes grafos:

(a) $G_1 = (V_1, E_1)$, $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$, $E_1 = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_1, v_5 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle\}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$, $E_2 = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle \langle v_3, v_5 \rangle\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $G_3 = (V_3, E_3)$, $V_3 = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$, $E_3 = \{\langle v_1, v_3\rangle, \langle v_1, v_5\rangle, \langle v_2, v_4\rangle, \langle v_2, v_6\rangle, \langle v_3, v_5\rangle, \langle v_4, v_6\rangle\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11 - Determine o grafo $G = (V, E)$ correspondente a cada matriz de adjacência. Considere que o conjunto V é formado por vértices indexados sequencialmente: $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ e que em cada matriz, a i-ésima linha (coluna) corresponde ao vértice v_i.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_5\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \langle v_2, v_5\rangle, \langle v_4, v_5\rangle\}$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_6\rangle, \langle v_2, v_4\rangle, \langle v_2, v_6\rangle, \langle v_3, v_3\rangle, \langle v_4, v_4\rangle, \langle v_4, v_5\rangle, \langle v_5, v_6\rangle\}$

12 - Para o grafo da Figura 4, use o procedimento de busca em largura para encontrar todos os caminhos de menor comprimento a partir do vértice v_1. Qual o caminho mais curto entre v_1 e v_8? Qual é a distância entre esses dois vértices? Repita o procedimento, agora com v_2 como vértice inicial. Qual o menor caminho entre v_2 e v_7?

A árvore de caminhos mais curtos iniciados em v_1 para o grafo da Figura 4 é mostrada na Figura 5. O caminho mais curto entre v_1 e v_8 é dado por v_1, v_4, v_6, v_5, v_8 e tem comprimento

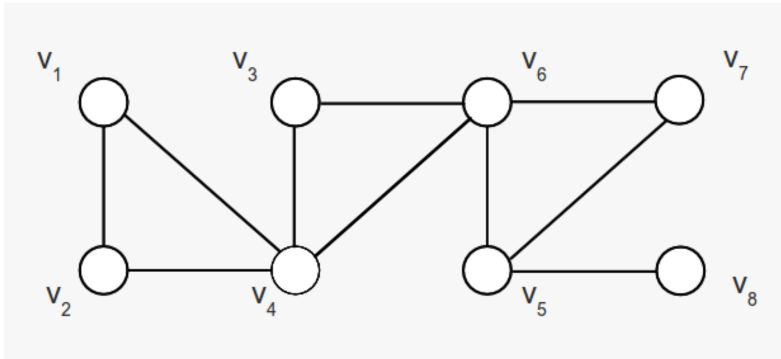

Figura 4: Diagrama do grafo para o exercício 12.

4. A árvore de caminhos mais curtos iniciados em v_2 para o grafo da Figura 4 é mostrada na Figura 6. O caminho mais curto entre v_2 e v_7 é dado por v_2, v_4, v_6, v_7 e tem comprimento 3.

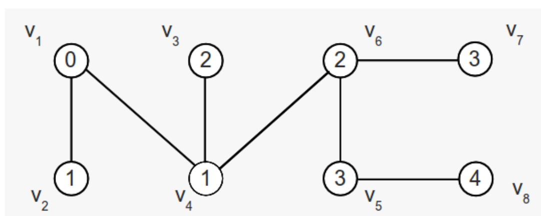

Figura 5: Árvore de caminhos mais curtos a partir de v_1 para o grafo da Figura 4.

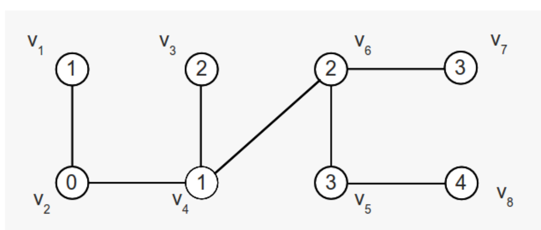

Figura 6: Árvore de caminhos mais curtos a partir de v_2 para o grafo da Figura 4.

13 - Duas medidas que buscam resumir as distâncias entre vértices em um grafo são o *diâmetro* e a *distância média*. O diâmetro é o maior valor entre todas as distâncias $d(u, v)$ em que u, v são vértices distintos de um grafo. A distância média é simplesmente a média aritmética de todas as distâncias $d(u, v)$. Calcule o diâmetro e a distância média para o grafo da Figura 7.

Uma maneira de resolver o exercício é primeiro construir uma matriz de distâncias D, em que $D[i, j] = \text{distância}(v_i, v_j)$:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

O diâmetro do grafo é o maior valor da tabela, logo diâmetro$(G) = 3$. A distância média é simplesmente a média das distâncias entre vértices distintos. Ou seja, a média dos valores que estão acima da diagonal principal da matriz:

$$\langle \text{distância} \rangle = \frac{1}{15}(7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = \frac{5}{3}$$

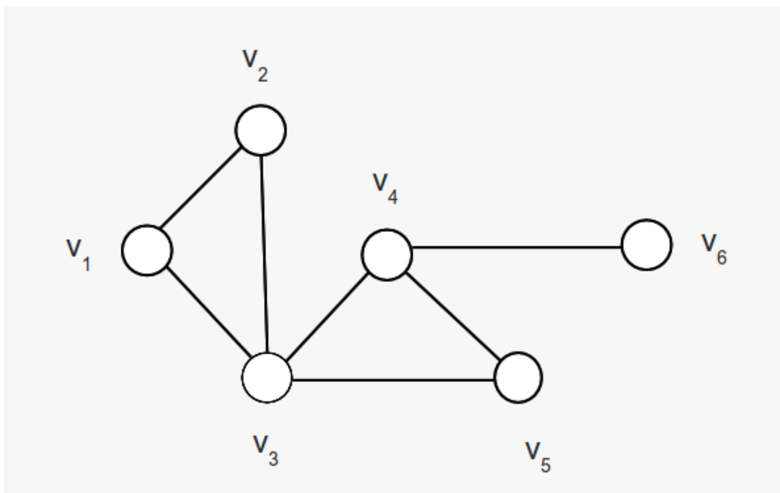

Figura 7: Diagrama do grafo para o exercício 13.

14- (Easley e Kleinberg, ex. 2.5.1) Em um grafo G com vértices u, v, w, dizemos que v é um *pivô* para os vértices (u, w) se v está contido em todos os caminhos de menor comprimento entre u e w. Por exemplo, na Figura 8, o vértice v_4 é um pivô para (v_1, v_5), enquanto v_2 não é um pivô para (v_1, v_4).

(a) Forneça um exemplo de grafo em que *todo* vértice seja um pivô para pelo menos um par de vértices.

Uma possível solução é mostrada na Figura 9, em que cada vértice é um pivô para seus dois vértices adjacentes.

(b) Forneça um exemplo de grafo em que *todo* vértice seja um pivô para pelo menos dois pares distintos de vértices.

Uma possível solução é mostrada na Figura 10, em que cada vértice é um pivô para três pares de vértices.

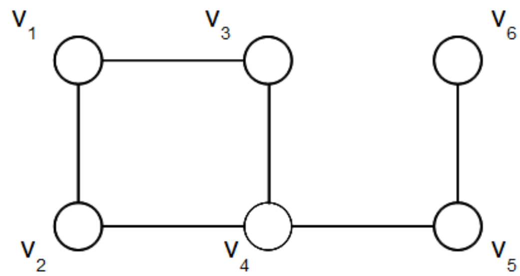

Figura 8: Neste exemplo, v_4 é um pivô para (v_1, v_5). Por outro lado, v_2 não é um pivô para (v_1, v_4).

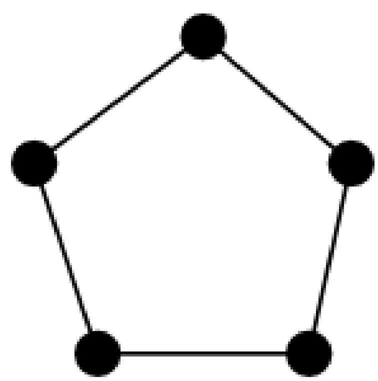

Figura 9: Neste grafo, cada vértice é um pivô para os seus dois vizinhos.

(c) Forneça um exemplo de grafo contendo ao menos 5 vértices e contendo um vértice v que seja um pivô para todos os pares de vértices distintos que não contenham v.

Uma possível solução é mostrada na Figura 11.

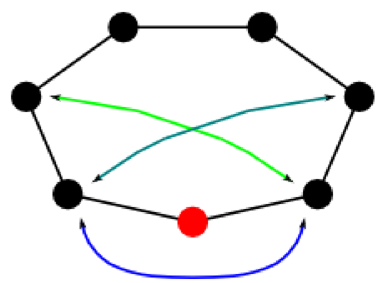

Figura 10: Neste grafo, cada vértice é um pivô para 3 pares distintos de vértices. Para o vértice destacado em vermelho, as setas indicam os pares de vértice para os quais ele é pivô. Para os outros vértices, os pares podem ser determinados por analogia.

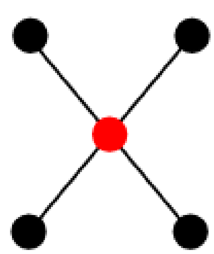

Figura 11: Neste grafo, o vértice central é um pivô para todos os outros pares de vértices.