LISTA 02 - FUV GRADMAT

"ABSQUE REPROBATIO ET GLUTEN NULLUM GRADUATIO PERFECTUM EST"

RESOLUÇÃO PASSÍVEL DE ERROS, USE COM MODERAÇÃO

contatos p/ dúvidas ou sexo:
abreu.carlos@aluno.ufabc.edu.br | fb.com/carlos.ea.batista |(11)986421854

---

1 — Calcule as seguintes derivadas

a) $e^{\operatorname{sen} x}$

b) $\ln(1+x^2)$

$$y = \ln(1+x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{(x^2+1)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

c) x^x

d) $\cos(x)^x$

e) $\sinh(x)^{\tanh(x)}$

f) $x^\pi + \pi^x$

g) $(2x+1)^x$

h) $\ln(\ln(\ln(x)))$

i) $\ln(x)^x$

j) x^{e^x}

k) $x^{\cosh(x)}$

$\boxed{* \text{ I) } \; x^{x^x}}$

$$y = x^{x^x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = x^x \ln x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x\left(\frac{1}{x}\right), \text{ porque } z = x^x \quad \Rightarrow$$

$$\ln z = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{z} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow$$

$z' = x^x(\ln x + 1)$. Portanto,

$$y' = x^{x^x}[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}].$$

$\boxed{\textbf{2 —} \text{ Prove que}}$

$\boxed{\text{a) } \frac{d}{dx}(\text{cossec}(x)) = -\text{cossec}(x)\,\text{cotg}(x)}$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{(\sin x)(0) - 1(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

$\boxed{\text{b) } \frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\,\text{tg}(x)}$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x)(0) - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$\boxed{\text{c) } \frac{d}{dx}(\text{cotg}(x)) = -\text{cossec}^2(x)}$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$\boxed{\text{d) } \frac{d}{dx}\text{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\text{e) } \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\text{f) } \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

$\boxed{\text{g) } \frac{d}{dx}\text{arccossec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$

$\boxed{\textbf{3 —} \text{ Calcule as seguintes derivadas}}$

a) $\text{tgh}(4x)$

b) $\text{senh}(x^3 + 3x)$

c) $\text{senh}(x)\,\text{tgh}(x)$

d) $e^{\cosh x}$

e) $x^2\,\text{senh}(3x)$

f) $\text{arcsen}(x^3)$

g) $\arccos(\sin(x))$

h) $\text{arccossec}(\cos(x))$

---

4 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4}\,\text{sen}(10\pi t)$$

a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos

$$v = \frac{dy}{dt} = 0 + \frac{1}{4}\cos(10\pi t) \cdot 10\pi$$

$$v = \frac{5\pi}{2} \cdot \cos 10\pi t$$

b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?

$0 = \frac{5\pi}{2} \cdot \cos 10\pi t$

$\cos 10\pi t = 0 \therefore \cos 10\pi t + 2k\pi$

$\arccos 0 = 10\pi t + 2k\pi$

$\frac{\cancel{\pi}}{2} = 10\cancel{\pi}t + 2k\cancel{\pi}$

$\frac{1}{2} - 2k = 10t$

$\boxed{\frac{1-4k}{20} = t}$ $, k \in \mathbb{Z}$

c) Em quais instantes de tempo a partícula está subindo?

$0 < \frac{5\pi}{2} \cdot \cos 10\pi t$

$0 < \cos \underbrace{10\pi t}$

$-\frac{\pi}{2} < 10\pi t < \frac{\pi}{2}$

$|10\pi t| < \frac{\pi}{2}$

$10\pi |t| < \frac{\pi}{2}$

$|t| < \frac{1}{20}$

---

5 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\,\text{sen}(2\pi t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

a) Encontre a velocidade após t segundos.

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\frac{d}{dt}\, e^{-1,5t} \cdot \operatorname{sen}(2\pi t) = 2\left(\left(e^{-1,5t}\right)' \operatorname{sen} 2\pi t + \left(\operatorname{sen} 2\pi t\right)' \cdot e^{-1,5t}\right)$$

$$\left(\frac{1}{e^{1,5t}}\right)' = \frac{-\left(e^{1,5t}\right)'}{\left(e^{1,5t}\right)^2} = \frac{-e^{1,5t} \cdot 1,5}{e^{3t}} = -1,5 \cdot e^{-1,5t}$$

$$\left(\operatorname{sen} 2\pi t\right)' = \cos 2\pi t \cdot 2\pi$$

$$v = 2\left(-1,5 \cdot e^{-1,5t} \operatorname{sen} 2\pi t + \cos 2\pi t \cdot 2\pi \cdot e^{-1,5t}\right)$$

$$v = 2 \cdot e^{-1,5t}\left(2\pi \cdot \cos 2\pi t - 1,5 \cdot \operatorname{sen} 2\pi t\right) \ cm/s$$

b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.

$$0 = 2 \cdot e^{-1,5t}\left(2\pi \cdot \cos 2\pi t - 1,5 \cdot \operatorname{sen} 2\pi t\right)$$

$$2\pi \cos 2\pi t = 1,5 \cdot \operatorname{sen} 2\pi t$$

$$\frac{2\pi}{1,5} = \operatorname{tg}\left(2\pi t + 2k\pi\right)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{4\pi}{3} = 2\pi t + 2k\pi = 2\pi\,(t + k)$$

$$-\sqrt{3} = 2\pi(t+k) \rightarrow \frac{-\left(\sqrt{3} + 2\pi k\right)}{2\pi} s = t$$

$$S\left(\frac{-\left(\sqrt{3} + 2k\pi\right)}{2\pi}\right) = 2 e^{-1,5 \cdot -\frac{\left(\sqrt{3}+2\pi k\right)}{2\pi}} \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot \frac{-\left(\sqrt{3}+2k\pi\right)}{2\pi}\right)$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3} + 2k\pi}{2\pi}\right) = \frac{3\left(\sqrt{3} + 2k\pi\right)}{4\pi}$$

$$S(t) = 2 e^{\left(\frac{3\sqrt{3}+2k\pi}{4\pi}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(-\sqrt{3} - 2k\pi\right) \ cm, \ k \in \mathbb{Z}$$

c) Mostre que $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

$$\lim_{t\to\infty} \alpha \cdot e^{-1,5t} \operatorname{sen}(2\pi t)$$

$$\lim_{t\to\infty} -\alpha \cdot e^{-1,5t} = \frac{-\alpha}{\infty} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha e^{-1,5t} = \frac{\alpha}{\infty} = 0$$

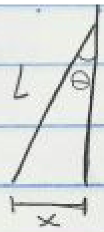
Pelo Teorema do Confronto:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$$

A mola tende a parar por causa da força de atrito, já que o equilíbrio tende a ser estabelecido.

---

6 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando θ = π/3?



$L = 10\,m$

$$\frac{x}{L} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{x = L \cdot \operatorname{sen}\theta} = f(\theta)$$

$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = 10 \cdot \cos\theta$

ii) $\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

5 é a taxa de variação, então

$\frac{d}{d\theta} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \ m/rad$

---

7 — Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x:

$V = x^3$

a) Calcule $\frac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.

$\frac{d}{dx} V = 3x^2$

$x = 3mm \rightarrow V = 27 \ mm^2$

Significa que o cristal evapora (quando em água) a uma taxa de $27 mm$.

b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$S = 6 \cdot x^2$$

$$\frac{S}{\frac{dV}{dx}} = \frac{1}{2}$$

---

8 — Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de 60m/s. Encontre a taxa segundo a área dentro do círculo está crescendo depois de a) 1s b) 3s c) 5s. O que você pode concluir?

60 m/s

$$S = S_0 + V \cdot t \longrightarrow S(t) = \overset{60}{V} \cdot t$$

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (S(t))^2 = \pi V^2 t^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \pi V^2 \cdot t^2 = \pi \cdot V^2 \frac{d}{dt} t^2 = 2\pi V^2 \cdot t = 7200\pi t$$

a) $t = 1s$

$$\frac{dA}{dt} = 7200\pi \ m^2/s$$

b) $t = 3s$

$$\frac{dA}{dt} = 21600\pi \ m^2/s$$

c) $t = 5s$

$$\frac{dA}{dt} = 36000\pi \ m^2/s$$

---

9 — A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: PV = C

$$PV = C \longrightarrow V = \frac{C}{P}$$

a) Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.

$$\frac{d}{dP}V = \frac{d}{dP}C.P^{-1} = \frac{-C(P)'}{P^2} = \frac{-V.P}{P^2} = -\frac{V}{P}$$

$$\therefore \frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$$

b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por 10min. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.

O volume decresce mais rapidamente no início dos 10 minutos, pois o volume será máximo e a pressão, mínimo, justamente o inverso do que ocorre ao final dos 10 min.

---

10 — Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a percentagem da população que é colhida.

a) Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?

A população se estabiliza quando $\frac{dP}{dt} = 0$

b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05\left(1 - \frac{P(t)}{10^4}\right)P(t) - 0{,}04\,P(t)$$

$$0 = 0{,}05\,P(t) - \frac{5P(t)^2}{10^6} - 0{,}04\,P(t)$$

$$-5 \cdot 10^{-6}P(t)^2 + 10^{-2}P(t) = 0$$

$$\Delta = (10^{-2})^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-5 \cdot 10^{-6})$$

$$P(t) = \frac{-10^{-2} \pm 10^{-2}}{-5 \cdot 10^{-6}} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \frac{2 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-6}} = \frac{2}{5} \cdot 10^4 = \boxed{4 \cdot 10^3}$$

∴ O nível estável da população é de 4000 peixes.

c) O que acontece se β é elevado a 5%?

Se $\beta = 0{,}05$

$$-\frac{5\,P(t)^2}{10^6} = 0$$

$P(t) = 0$ → a população é extinguida

---

11 — Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $x^2y + xy^2 = 3x$

c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}=6 \quad \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}(x+y)^{-1/2}(1+y')+\tfrac{1}{2}(xy)^{-1/2}(y+xy')=0 \quad \Rightarrow$$
$$(x+y)^{-1/2}+(x+y)^{-1/2}y' + (xy)^{-1/2}y+(xy)^{-1/2}xy'=0 \quad \Rightarrow$$
$$y'=-\frac{(x+y)^{-1/2}+(xy)^{-1/2}y}{(x+y)^{-1/2}+(xy)^{-1/2}x}\cdot\frac{(x+y)^{1/2}(xy)^{1/2}y}{(x+y)^{1/2}(xy)^{1/2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{xy}+y\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}+x\sqrt{x+y}}$$

d) $x\,\text{sen}(y)+\cos(2y)=\cos(y)$

$$x\,\text{sen}\,y+\cos 2y=\cos y \quad \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,y+(x\cos y)y'-(2\,\text{sen}\,2y)y'=(-\text{sen}\,y)y' \quad \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,y=(2\,\text{sen}\,2y)y'-(x\cos y)y'-(\text{sen}\,y)y' \quad \Rightarrow$$
$$y'=\frac{\text{sen}\,y}{2\,\text{sen}\,2y-x\cos y-\text{sen}\,y}$$

e) $x^y=y^x$

f) $y=\ln(x^2+y^2)$

---

12 — Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ no ponto $(-5, 9/4)$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{8}-\frac{2yy'}{9}=0 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{9x}{16y}.$$

Quando $x=-5$ e $y=\frac{9}{4}$, temos $y'=\frac{9(-5)}{16(9/4)}=-\frac{5}{4}$, de modo que uma equação da reta tangente é

$y-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}(x+5)$ ou $y=-\frac{5}{4}x-4$.

b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ no ponto $(-1, 4\sqrt{2})$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{9}+\frac{yy'}{18}=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{4x}{y}.$$

Quando $x=-1$ e $y=4\sqrt{2}$, temos $y'=-\frac{4(-1)}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

logo uma equação da reta tangente é $y-4\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$ ou $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+9)$.

c) $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1,1)$

$y^2 = x^3(2-x) = 2x^3 - x^4 \Rightarrow$

$2yy' = 6x^2 - 4x^3 \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{y}$.

Quando $x = y = 1$, $y' = \dfrac{3(1)^2 - 2(1)^3}{1} = 1$, logo uma equação da reta tangente é $y - 1 = 1\,(x-1)$ ou $y = x$.

---

13 — A função $y = f(x)$, $y > 0$ é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa 1.

---

14 — Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = f(x)$$

$$\frac{2\cdot x}{a^2} + \frac{2\cdot y\cdot y'}{b^2} = 0$$

$$\frac{2yy'}{b^2} = -\frac{2x}{a^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{-x b^2}{a^2\cdot y}}$$

No ponto (x_0, y_0)

$$y' = \frac{-b^2 x_0}{a^2\cdot y_0}$$

Eq. da reta:

$$y - y_0 = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

$$\frac{y - y_0}{b^2} = \frac{-x_0(x - x_0)}{a^2 y_0} \rightarrow \frac{-y_0^2 + y y_0}{b^2} = \frac{-x_0(x - x_0)}{a^2}$$

Como $\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

$$\frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \rightarrow \therefore \frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = 1$$

---

15 — Mostre que a soma dos interseptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

Soma dos interceptos $= c$ p/

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$$

$y = f(x)$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{y} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(x - x_0)$$

$$y = y_0$$

Quando $y = 0$ (intercepção em x):

$$y' = 0$$

$$\underset{0}{\sqrt{y_0}} + \sqrt{x_0} = \sqrt{c} \rightarrow \boxed{x_0 = c}$$

$x = f(y)$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} x' + \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0$

$x' = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2\sqrt{x} = \frac{-\sqrt{x}}{y}$

$x - x_0 = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{y}}(y - y_0)$

$x = x_0$

Quando $x = 0$ (intercepção em y)

$x' = 0$

$\sqrt{x_0}' + \sqrt{y_0} = \sqrt{c}$

$\boxed{y_0 = c}$

Como se aplica a quaisquer valores de y_0 ou x_0, o teor é confirmado.

---

16 — Encontre as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passa através do ponto $(12, 3)$

---

17 — A água flui a partir de um tanque de área de secção transversal constante 50m^2 através de um orifício de área de secção transversal de constante 14m^2 localizado na parte inferior do tanque. Inicialmente, a altura da água no tanque era de 20m, e t segundos mais tarde, era dada pela a equação

$$2\sqrt{h} + \frac{1}{25}t - 2\sqrt{20} = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant 50\sqrt{20}$$

Quão rápido a altura da água está diminuindo quando a altura era de 9 pés?