Funções de Várias Variáveis

Primeira Avaliação - 10 de junho de 2013

Nome:

---

1) Seja a função $\mathbf{f} : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1^3 x_2}{2x_1^6 + x_2^2}\hat{\mathbf{e}}_1$.
a) Defina formalmente o conceito de limite de uma função;
b) Determine o dominio máximo de $\mathbf{f}$;
c) Detemine $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pelo caminho $C : x_1 = t,\ x_2 = t^3$;
d) Defina formalmente o conceito de continuidade de uma função;
e) Existe uma extensão contínua para $\mathbf{f}$ na origem?

2) Seja a função $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto e^{\|\mathbf{x}\|^2}$.

a) Defina formalmente o conceito de diferenciabilidade;
b) Determine $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \in S$;
c) Determine a transformação linear $T_{\mathbf{a}}$;
d) Determine a derivada direcional em $\mathbf{a} = 4\hat{\mathbf{e}}_7 - 3\hat{\mathbf{e}}_2$ na direção de $\mathbf{y} = 12\hat{\mathbf{e}}_6 - 5\hat{\mathbf{e}}_2 3$;
e) Determine o valor máximo da derivada direcional em $\mathbf{a}$ e a direção de máxima variação.

3) Mostre que se $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in S$, a expressão de Taylor de primeira ordem é única.

Questão Bonus: Seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$ tal que $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear. Tal função assume seus extremos? Justifique sua resposta.

Formulário: Seja $\mathbf{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$;
$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \frac{1}{2!}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) + \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \dfrac{\mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|^2} = \mathbf{0}, \mathbf{T}_{\mathbf{x}}$

é linear e $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}$ é bilinear;
$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$;
$\mathrm{D}_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}\right) \left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{D}_{\mathbf{y}} \mathbf{f}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \ \mathrm{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{g} \left(\mathbf{x}\right)$