Lista 2 - Álgebra Linear
Espaços e subespaços vetoriais

3° quadrimestre de 2014 - Professores Maurício Richartz e Vladislav Kupriyanov

1 — Determine quais dos conjuntos abaixo, com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, formam um espaço vetorial real. Justifique sua resposta.

a) O conjunto dos vetores $\mathbf{v} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$

b) O conjunto $M(2, 2)$ das matrizes reais 2×2.

c) O conjunto P_3 dos polinômios de grau menor igual a 3.

d) O conjunto das funções reais.

e) O conjunto das matrizes 2×2 cujo traço é zero.

f) O conjunto das matrizes 2×2 cujo determinante é zero.

g) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$.

h) O conjunto das funções reais tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

2 — Seja $S = \mathbb{R}^2$ o conjunto de pares ordenados reais (x_1, x_2). Em cada um dos itens abaixo, determine se S é um espaço vetorial para as operações indicadas. Justifique sua resposta.

a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$.

b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0), \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2), \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

e) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (3x_1 + 3y_1, 5x_2 + 5y_2), \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

3 — Para cada espaço vetorial V abaixo, determine se o subconjunto $W \subset V$ é um subespaço de V.
Obs: as operações de soma e multiplicação por escalar são as usuais em cada caso.

a) $V =$ o conjunto $M(2, 2)$ das matrizes reais 2×2
$W =$ conjunto das matrizes 2x2 cujo traço é zero. [comparar com 1e]

b) $V =$ o conjunto $M(2, 2)$ das matrizes reais 2×2
$W =$ conjunto das matrizes 2x2 cujo determinante é zero. [comparar com 1f]

c) $V =$ o conjunto das funções reais
$W =$ conjunto das funções reais tais que $f(0) = f(1)$. [comparar com 1g]

d) $V =$ o conjunto das funções reais
$W =$ conjunto das funções reais tais que $f(0) = 1 + f(1)$. [comparar com 1h]

e) $V =$ o conjunto $M(3,3)$ das matrizes reais 3×3
$W =$ conjunto das matrizes 3x3 triangulares superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

f) $V =$ o conjunto $M(2,2)$ das matrizes reais 2×2
$W =$ conjunto das matrizes 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

g) $V =$ o conjunto das funções reais
$W =$ conjunto das funções reais crescentes.

h) $V =$ o conjunto das funções reais
$W =$ conjunto das funções contínuas em $[0,1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

i) $V = \mathbb{R}^3$
$W =$ conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $z = 0$.

j) $V = \mathbb{R}^3$
$W =$ conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $5x + 2y + 3z = 0$.

k) $V = \mathbb{R}^3$
$W =$ conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $5x + 2y = 0$ e $z = 0$.

l) $V = \mathbb{R}^3$
$W =$ conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem simultaneamente $2x + 4y + z = 0$, $x + y + 2z = 1$, $x + 3y - z = 0$.

4 — Sejam V um espaço vetorial, $\mathbf{v} \in V$ um elemento qualquer de V e $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que:

a) $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$.

b) $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) se $\alpha.\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

5 — A intersecção de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial? E a união de dois subespaços vetoriais? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

6 — Defina a média $\mathbf{u} \star \mathbf{v}$ entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no espaço vetorial V pondo $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Prove que $(\mathbf{u} \star \mathbf{v}) \star \mathbf{w} = \mathbf{u} \star (\mathbf{v} \star \mathbf{w})$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.