Bases Matemáticas

Prova Substitutiva— Turma B

22/08/2017

Prof. Dr. Stylianos Dimas Ph.D.

Nome:____

Exercício 1. Demonstre as proposições

i) "Para todos x, y números inteiros, se x e y são pares então $x-y$ é par". (1 Pt)

ii) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^3 + x^4$ é ímpar $\implies$ x é ímpar (1 Pt)

Exercício 2. Prove que: $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^{\complement} = X_1^{\complement} \cap X_2^{\complement} \cap \cdots \cap X_n^{\complement}$. 3 Pts

Exercício* 3. Dê a definição dos seguintes limites:

i) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (1 Pt)

ii) $\lim_{y \to -\infty} x(y) = -\infty$ (1 Pt)

Exercício 4. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ (2 Pts)

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^{x+1} + 1}{x^2}$ (1 Pt)
(Dica: Expressa o numerador como um quadrado do 2^x e fatoriza-o.)

Limites Fundamentais

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

Boa prova, JUSTIFIQUE todas as suas respostas e escreva CLARAMENTE !

Questão	1.	2.	3.	4.	Total
Pontos	2	3	2	3	10
Atingido					

UFABC

FOLHA DE PROVA

NOTA: B

Nome:

R.A. Data: / /

Disciplina: Cód. Disciplina:

Professor:

SUB

Ex. 1)

i) $p =$ " pra todos x, y números inteiros, se x e y são pares então $x-y$ é par" = " $x,y \in \mathbb{Z}$ pares $\Rightarrow$ $x-y$ par"

Demonstração direta: $x, y \in \mathbb{Z}$ pares $\Rightarrow \exists k, \lambda \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, y = 2\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y = 2k - 2\lambda = 2(k-\lambda) \Rightarrow x-y$ par

ii) $p =$ " $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x^3 + x^4$ é ímpar $\Rightarrow x$ é ímpar"

Demonstração por contraposição: vou demonstrar que

$q =$ " x par $\Rightarrow x^3 + x^4$ par"

x par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = 2k \Rightarrow x^3 + x^4 = (2k)^3 + (2k)^4 = 8k^3 + 16k^4 =$

$= 2(4k^3 + 8k^4) \Rightarrow x^3 + x^4$ par

Ex. 2) $P(n) =$ " $(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)^c = X_1^c \cap X_2^c \cap \dots \cap X_n^c$ "

Demonstração por indução finita.

PIF_1, $P(1) =$ " $(X_1)^c = X_1^c$ " a propriedade é verdadeira

PIF_2, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ~~m~~ preciso demonstrar.

$(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \cup X_{k+1})^c = [(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k) \cup X_{k+1}]^c =$

"Promover o avanço do conhecimento através de ações de ensino, pesquisa e extensão, tendo como fundamentos básicos a interdisciplinaridade, a excelência e a inclusão social." (PDI UFABC 2013 – 2022)

$$= (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k)^c \cap X_{k+1}^c \overset{P(k)}{=} X_1^c \cap X_2^c \cap \dots \cap X_k^c \cap X_{k+1}^c$$

Logo, a implicação é verdadeira. Portanto a propriedade P(n) é verdadeira para todo $n>0$.

Ex. 3)

i) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon<0, \exists \delta>0 \mid a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)<\varepsilon$

ii) $\lim_{y \to -\infty} x(y) = -\infty \iff \forall \varepsilon<0, \exists \delta<0 \mid y<\delta \Rightarrow x(y)<\varepsilon$

Ex. 4)

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x+1) = \lim_{x\to 0} \ln\left[(x+1)^{1/x}\right]$

$\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0$, uma vez que $\ln x$ é uma função contínua como a inversa da função contínua e monótona e^x

$\lim_{x\to 0} x = 0$

$\lim_{x\to 0} (x+1)^{1/x} \underset{\lim_{x\to 0} t=\infty}{\overset{t=1/x}{=}} \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Logo,

$\lim_{x\to 0} \ln\left[(x+1)^{1/x}\right] = \lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^{x+1}+1}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2^{2x}-2\cdot 2^x+1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2^x-1}{x}\right]^2 = \ln^2 2$

$\lim_{x\to 0}(4^x - 2^{x+1}+1) = 4^0 - 2^1 + 1 = 0$, uma vez que α^x é uma função contínua

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$