

BASES MATEMÁTICAS**LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES**

Resolve ao menos dois exercícios de cada questão.

Exercício 1. Prove a partir da definição de limite que:

- i) $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = 9$
- ii) $\lim_{y \rightarrow 3} (4 - 3y) = -5$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$
- v) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$
- vii) $\lim_{x \rightarrow a} 4 = 4$
- viii) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$
- ix) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ (dica: $1 < \sqrt{x} + 2$)
- x) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ (dica: $\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$)

Exercício 2. Prove pela definição que as seguintes funções são contínuas nos pontos especificados:

- i) $f(x) = x^4$ em $x = 1$
- ii) $f(x) = |x|$ em $x = 0$
- iii) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$
- iv) $f(x) = 5x - 2$ em $x = 1$

Exercício 3. Calcule os seguintes Limites:

- i) $\lim_{x \rightarrow 1} (7x^3 + x + 2)$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$
- v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2+2x+2}{x^3+2}$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
- vii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$
- viii) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$
- ix) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-81}{x-3}$
- x) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

Exercício 4. Calcule os seguintes Limites:

- i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x^3+1}$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$
- iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$
- v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x}$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

Exercício 5. Calcule os seguintes Limites:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^5 - 5x - 1}{x^2 + x^5}$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, m, n \in \mathbb{Z}^+$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$
- v) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x - 5} - 2}$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3}$
- vii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 5x + 6}$
- viii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$
- ix) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$
- x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}$

Exercício 6. Calcule os seguintes Limites:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
- v) $\lim_{x \rightarrow a} x \cot(3x)$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin x}$
- vii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(\pi x)}{x + 2}$

viii) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

x) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

xi) $\lim_{x \rightarrow 3} |-5x^3 + x|$

Exercício 7. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ em que

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ em que

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ em que

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq 2 \\ 6x^2, & x < 2 \end{cases}$$

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}$

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5}$

vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{5x+4}$

vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{4x^2+4}$

viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3 + 5x}{5x^4 + 6x^2 + 4}$

ix) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{4x-2}$

x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

Exercício 8. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})$

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 5x^3 - 4x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 - 4x}{-x^3 + 3x + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-x}{4+x}$

v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x-1}$

vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x+5})$

vii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-1})$

viii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7}{4-x}$

x) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x+1}{x}$

Exercício 9. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3-1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3-1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$

vi) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$

vii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$

viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$

ix) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

x) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

Exercício 10. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^{1/x} x)$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^{1/x^2} x)$

vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(x^2 + x + \frac{1}{x+1}\right)$

viii) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x^2)}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 2} \sin^{-1} \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$

x) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan^{-1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

Exercício 11. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

i) $x^4 + x = 3 \quad (1, 2)$

ii) $4x^2 = 2(x+1)^2 \quad (-1, 1)$

iii) $x^5 - x^2 = 2 \quad (0, 2)$

iv) $x^2 = \sqrt{x+2} \quad (0, 2)$

v) $\sqrt[3]{x} = 2x \quad (0, 1)$

vi) $\cos x = x \quad (0, 1)$

vii) $\ln x = e^{-x} \quad (1, 2)$

Exercício 12. Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

i)

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1, & x \leq 3 \\ cx^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$$

ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c, & x < 4 \\ cx + 20, & x \geq 4 \end{cases}$$

iii)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ c, & x = 2 \end{cases}$$

iv)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}, & x \neq 1 \\ c, & x = 1 \end{cases}$$

v)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 1}, & x \neq -1 \\ c, & x = -1 \end{cases}$$