Universidade Federal do ABC - UFABC

Álgebra Linear

Prof. Celso Nishi

Lista 6 – Transformações lineares

1. Verifique se as funções abaixo são aplicações (transformações) lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(x, y) \mapsto (x + y, x - y - 2)$

   (c) $T : M(2, 2) \to \mathbb{R}$
   $A \mapsto \det A$

   (d) $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$
   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} A$

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $(x, y) \mapsto xy$

   (f) $T : P_2 \to P_3$
   $ax^2 + bx + c \mapsto ax^3 + bx^2 + c$

   (g) $T : \mathbb{R}^2 \to M(2, 2)$
   $(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$

2. Para qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mostre que retas são levadas em "retas" e segmentos de reta são levados em "segmentos de reta". [E se fosse $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?]

3. Sendo uma transf. linear $T : V \to W$ e um subespaço vetorial $V_1 \subseteq V$, mostre que $T(V_1)$ é um subespaço vetorial de W.

4. Seja a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ que define uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Encontre e desenhe a imagem por T_A dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

   (a) $B_1 = \{(1, 1)\}$

   (b) $B_2 = \{(x, y) = t(1, 1), t \in \mathbb{R}\}$

   (c) $B_3 = \{(x, y) = t(1, 1), t \in [0, 1]\}$

   (d) $B_4 = \{(x, y) = (1, 0) + t(1, 1), t \in [0, 1]\}$

   (e) $B_5 = \{(x, y) = t(2, 1), t \in [0, 1]\}$

   (f) $B_6 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

5. Encontre a imagem dos subconj. do exe. 4 considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. (Vale o resultado do exe. 2?)

6. Dados os vetores $\mathbf{u}_1 = (2, -1), \mathbf{u}_2 = (1, 1), \mathbf{u}_3 = (-1, -4), \mathbf{v}_1 = (1, 3), \mathbf{v}_2 = (2, 3), \mathbf{v}_3 = (-5, -6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3$.

7. Sejam os vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \mathbf{u}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ que formam os vértices de um triângulo equilátero em $\mathbb{R}^2$ (desenhe!). Convença-se de que existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3, T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1$.

8. Seja uma transformação linear $T : M(n, 1) \to M(m, 1)$ definida por $T(X) = AX$, onde A é uma matriz constante $m \times n$ e X é uma matrix $n \times 1$. Para as matrizes A abaixo encontre ker$T$ e ImT. Qual a dimensão desses subespaços? (Encontre bases.)

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Encontre o núcleo e a imagem das transformações do exes. 4 e 5. Qual a relação disso com o item 4.(e)?

10. Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$. Essa transformação é única? Se não, encontre todas.

11. Ache a transf. linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$ [i.e. encontre $T(x, y, z)$]. Encontre $\mathbf{v}$ tal que $T(\mathbf{v}) = (3, 2)$. Encontre $\operatorname{Im} T, \ker T$, uma base e a dimensão dos mesmos. Verifique o teorema do núcleo e da imagem.

12. Seja o sistema linear $AX = \boldsymbol{O}$, ou, explicitamente, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podemos encarar a matriz A como uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$ e as soluções possíveis como o subespaço $\ker A \subset \mathbb{R}^3$. Encontre $\operatorname{Im} A$ e sua dimensão.

13. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.
    (a) Mostre que se $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in W$ são L.I. então $v_1, \ldots, v_n \in V$ são L.I.
    (b) Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ geram V

14. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transf. linear definida por $F(x, y, z, t) = (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$. Encontre uma base e a dimensão para $\operatorname{Im} F$ e $\ker F$.

15. Para as transf. lineares da questão 1, encontre o núcleo e a imagem. Dê uma base e a dimensão para cada caso.

16. Seja o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3, $\mathcal{P}_3$, e a transformação linear $D : P_3 \to P_3$, onde $D(p) = p'$ é a derivada do polinômio.
    (a) Mostre que D é uma transformação linear.
    (b) Escreva D na forma matricial usando coordenadas relativas à base canônica $\{t^3, t^2, t, 1\}$ no domínio e contra-domínio.
    (c) Determine $\ker D$, $\operatorname{Im} D$ e encontre uma base para cada um destes subespaços. Verifique o teorema do núcleo e da imagem.
    (d) Mostre que $D \circ D \circ D \circ D = \boldsymbol{O}$, a transformação que leva qualquer polinômio para o polinômio nulo.