Nome: **Ra:**

Gabarito da Prova 2
Funções de Uma Variável

Avisos:

- Resolva as questões na ordem que melhor lhe convier. Mas explicite que questão ou item você está resolvendo.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

Ex. 1 — Explique, justificando cada uma de suas afirmações, porque a seguinte afirmação é incorreta.
O $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ não existe já que, pela regra de L'hôspital, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)+x^2+x+1}{x^2+x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+2x+1}{2x+1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sin(x)+2}{2}.\end{aligned}$$

Como este último limite não existe, concluimos que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ não existe.
Gabarito: A regra de L'Hôspital não pode ser aplicada porque a expresão

$$\frac{-\sin(x)+2}{2} = \tag{1}$$

não tende a nenhum limite quando $x \to \infty$. Entretanto, note que

$$\frac{\sin(x)+x^2+x+1}{x^2+x+1} = 1 + \frac{\sin(x)}{x^2+x+1} \tag{2}$$

que tende a 1 quando $x \to \infty$.

Ex. 2 — Para a função $f(x) = \frac{-x^2+5x-1}{x-2}$

1. Encontre o dominio; os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente; os valores de máximo e mínimo locais; os intervalos de concavidade, convexidade e possíveis pontos de inflexão e as assíntotas da função.
2. Esboçe o gráfico, utilizando as informações do ítem anterior.
   Gabarito:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^2+4x-9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-(x^2-4x+9)}{(x-2)^2} \\ &= -\frac{\left((x-2)^2+5\right)}{(x-2)^2} \\ &= -\left(1+\frac{5}{(x-2)^2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

$$f''(x) = \frac{10}{(x-2)^3}$$

Veja o gráfico no arquivo extra.

Ex. 3 — Calcule

1. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \arcsin(s)ds.$

   Gabarito: $\arcsin(\sqrt{x})\left(\sqrt{x}\right)' = \arcsin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

2. O polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ em torno de $x = \frac{1}{2}$.

   Gabarito: $P_{3,\frac{1}{2}}(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})\left(x-\frac{1}{2}\right) + f''(\frac{1}{2})\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + f'''(\frac{1}{2})\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{3!}.$

3. $\int \cos^3(x)\sin^3(x)dx.$

   Gabarito:

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin^3(x) &= \sin^3(x)\cos^2(x)\cos(x) \\ &= \sin^3(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cos(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Logo,

$$\int \cos^3(x)\sin^3(x)dx = \int \sin^3(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cos(x)dx. \tag{5}$$

Faça $u = \sin(x)$. Logo, $\frac{du}{dx} = \cos(x)$. Logo,

$$\int \sin^3(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cos(x)dx = \int \left(u^3 - u^5\right)du. \tag{6}$$

Ex. 4 — Calcule as seguintes integrais definidas:

1. $\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx.$

   Gabarito:

$$\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{-\frac{1}{2}(-2x+4)+3}{\sqrt{-x^2+4x-3}}.$$

Logo,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx. \tag{7}$$

Por um lado,

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{u}}du \tag{8}$$

onde $u = \sqrt{-x^2+4x-3}$.
Por outro lado,

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx \tag{9}$$

e

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv \tag{10}$$

onde $v = x-2$.

2. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)dx.$

Gabarito: Partes 2 vezes, $\int \ln^2(x)dx =?$ Faça $f(x) = \ln^2(x), g'(x) = 1$. Logo, $f'(x) = 2\frac{\ln(x)}{x}$ e $g(x) = x$. Logo,

$$\int \ln^2(x)dx \quad = \quad x\ln^2(x) - 2\int \frac{\ln(x)}{x} x dx.$$

Agora, $\int \ln(x)dx =?$. Faça $f(x) = \ln(x), g'(x) = 1$. Logo, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Logo,

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int dx. \tag{11}$$

3. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-3}{x^2+3x+2}dx.$

Gabarito: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x^2+3x+2} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2))} \\ &= \frac{(A+B)x + (2A+B)}{(x+1)(x+2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A + B &= -3. \end{aligned}$$

Logo, $A = -4$ e $B = 5$. Logo,

$$\int \frac{x-3}{x^2+3x+2}dx \quad = \quad -4\int \frac{1}{x+1}dx + 5\int \frac{1}{x+2}dx. \tag{13}$$