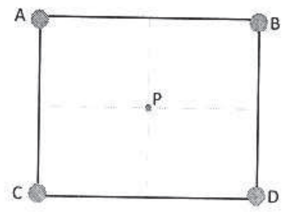
Question 6

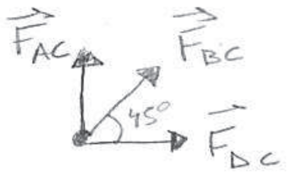
Quatro cargas pontuais estão situadas nos vértices de um quadrado de lado $\ell = a$, e cujos valores são $Q_A = 2q$, $Q_B = 4q$, $Q_C = -q$ e $Q_D = 2q$. Use $k = 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ e considere a origem do sistema cartesiano no vértice C.



a) (2 pontos) Faça um desenho mostrando o diagrama de forças que atuam no ponto C.
b) (3 pontos) Calcule a força resultante $\vec{F}$ no ponto C, em função dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.
c) (3 pontos) Calcule o potencial elétrico no ponto P. Assuma $V = 0$ no infinito.
d) (2 pontos) A intensidade do vetor campo elétrico produzido por essas cargas no ponto P.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

a)



b) $\vec{F}_r = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DC}$

$|\vec{F}_{AC}| = \dfrac{2Kq^2}{a^2}$, $|\vec{F}_{BC}| = \dfrac{4Kq^2}{2a^2}$

$|\vec{F}_{DC}| = \dfrac{2Kq^2}{a^2}$

$F_r^x = |\vec{F}_{DC}| + |\vec{F}_{BC}| \cos 45°$

$F_r^x = \dfrac{2Kq^2}{a^2} + \dfrac{2Kq^2}{a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{Kq^2}{a^2}(2+\sqrt{2})$

$F_r^y = |\vec{F}_{AC}| + |\vec{F}_{BC}| \operatorname{sen} 45°$

$= \dfrac{2Kq^2}{a^2} + \dfrac{2Kq^2}{a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{Kq^2}{a^2}(2+\sqrt{2})$

Continuação do espaço para a questão 6.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_r = \frac{Kq^2}{a^2}(2+\sqrt{2})(\hat{i}+\hat{j})}$$

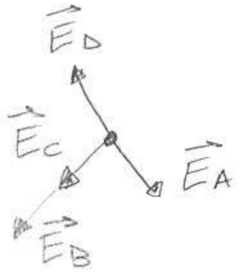
c) $V_P = \sum_i \frac{KQ_i}{d_i}$

Mas $d_A = d_B = d_C = d_D = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow V_P = \frac{\sqrt{2}K}{a}(2q + 4q - q + 2q)$$

$$\boxed{V_P = 7\sqrt{2}\frac{Kq}{a}}$$

d)



$$\vec{E}_P = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$|\vec{E}_A| = |\vec{E}_D| = 2Kq\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2$$

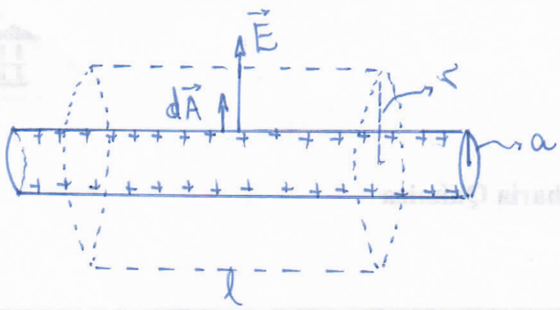
$$|\vec{E}_B| = 4Kq\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2$$

$$|\vec{E}_C| = Kq\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2$$

Logo:

$\vec{E}_A + \vec{E}_D = 0$ e $|\vec{E}_P| = |\vec{E}_B| + |\vec{E}_C|$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{E}_P| = \frac{10Kq}{a^2}}$$



Fio com densidade linear de carga λ

$V_\infty = 0$

a) Usando a lei de Gauss, temos:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\cancel{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\text{tampas}}^{0} + \underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{lateral}} = 2\pi(r)lE \Rightarrow \Phi_E = 2\pi E r l.$$

Mas: $\Phi_E = \dfrac{q_{env}}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_E = \dfrac{\lambda l}{\epsilon_0}$

$q_{env} = \lambda l$

Assim: $2\pi E r l = \dfrac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda}{r} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{2k_e\lambda}{r}}$

b) A diferença de potencial entre um ponto sobre a superfície do fio e um ponto a uma distância $r > a$ do centro do fio é dado por:

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{2k_e\lambda}{r}\hat{r}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{2k_e\lambda}{r}\,dr = -2k_e\lambda\int_a^r \frac{dr}{r}$$

$$= -2k_e\lambda \ln r \Big|_a^r \Rightarrow \boxed{\Delta V = +2k_e\lambda \ln\left(\frac{a}{r}\right)}$$

c) Uma carga q, com massa m, em movimento circular ao redor do fio está sujeita a uma força radial do tipo:

$\vec{F} = k\dfrac{q^2}{r^2}\hat{r}$. Mas $\Rightarrow F = qE = ma$, sendo $a = \dfrac{v^2}{r}$

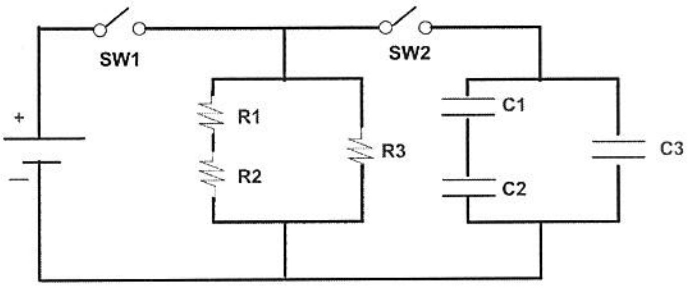
$$\therefore qE = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{qEr}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{2k_e q^2}{ml}}}$$

d) $$E_T = K + U \Rightarrow E_T = \frac{1}{2}mv^2 + q\Delta V = \frac{1}{2}m\left(\frac{2k_e q^2}{ml}\right) - q\left(2k_e\frac{q}{l}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right) = \boxed{\frac{k_e q^2}{l}\left[1 - 2\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right]}$$

Question 8

No circuito da figura, as chaves **SW1** e **SW2** estão abertas impedindo a corrente de percorrer o circuito.

a) (3 pontos) Dado que R1 = 4 k Ω, R2 = 2 k Ω, R3 = 3 k Ω e C1 = 2 μ F, C2 = 2 μ F e C3 = 4μ F, calcule a resitência equivalente e a capacitância equivalente.



b) (3 pontos) Quando a chave **SW1** é fechada, uma corrente começa a percorrer uma parte do circuito. Calcule a corrente em cada resistor considerando que a força eletromotriz da fonte é 18 V. Desconsidere a resistência interna da fonte.

c) (2 pontos) Considere agora que as 2 chaves fiquem fechadas por um período necessário para que o capacitor equivalente fique completamente carregado com a carga máxima. Qual é a carga máxima armazenada no capacitor ?

d) (2 pontos) Em seguida abrimos a chave **SW1** para cortar a fonte externa. Determine a carga do capacitor como uma função do tempo.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

a) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6\times10^3} + \frac{1}{3\times10^3}$

$\Rightarrow R = 2\times10^3\ \Omega$

$C = C_3 + \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = 4\times10^{-6} + \frac{1}{\frac{1}{2\times10^{-6}}+\frac{1}{2\times10^{-6}}}$

$C = 5\times10^{-6}\ F$

b) $\mathcal{E} = 18V \quad \Delta V_3 = \mathcal{E} \quad I_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3} \quad I_3 = \frac{18}{3\times10^3} \Rightarrow I_3 = 6\times10^{-3}\ A$

$\Delta V_{12} = \mathcal{E} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} \rightarrow I_1 = I_2 = \frac{18}{6\times10^3}$

$I_1 = I_2 = 3\times10^{-3}\ A$

c) $\Delta V_c = \mathcal{E} \quad C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C\mathcal{E}$

$Q = 5\times10^{-6}\times18 \Rightarrow Q = 9\times10^{-5}\ C$

Continuação do espaço para a questão 8.

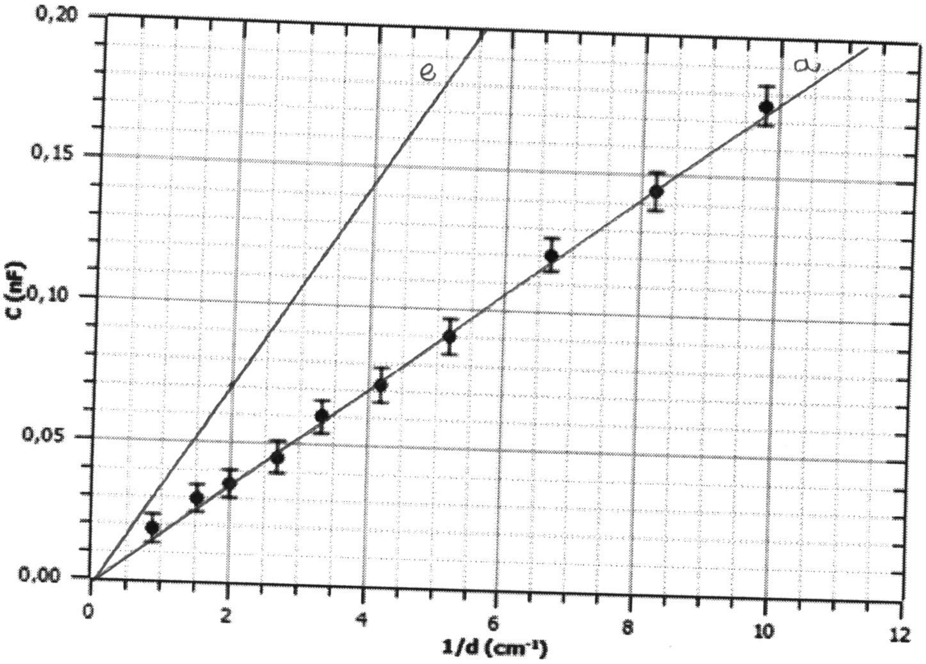
d) $-R_{eq} I_{eq} - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \ln\frac{q}{Q} = -t/RC$

$q(t) = Q e^{-t/RC}$

$q(t) = 9\times10^{-5} e^{-100t}$

Question 9 No experimento do capacitor de placas paralelas um grupo coletou valores de capacitância em função da distância d entre suas placas e os marcou no gráfico abaixo.



a) (3 pontos) No gráfico C versus $1/d$, desenhe a reta que melhor se ajusta aos dados experimentais.
b) (1 pontos) Pela reta que você traçou calcule o valor do coeficiente angular.
c) (1 ponto) Qual grandeza física que o coeficiente angular representa neste experimento?
d) (3 pontos) Utilize o ponto $d = (0,50 \pm 0,02)$cm para calcular a área do capacitor com seu respectivo erro.
e) (2 pontos) Um aluno colocou folhas de papel com constante dielétrica $\kappa = 2$, entre as placas do capacitor de modo a preencher todo o espaçamento d. Esta nova capacitancia foi medida nos mesmo espaçamentos realizados anteriormente. Trace uma reta no gráfico que represente os dados que o aluno mediu.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

b) $\alpha = \dfrac{0,145 - 0,035}{8,25 - 2} \Rightarrow \alpha = 0,176 \text{ nF} \cdot \text{cm}$

c) Em um capacitor de placas paralelos, temos:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \Rightarrow C\left(\frac{1}{d}\right) = \overbrace{\varepsilon A}^{=\alpha}\left(\frac{1}{d}\right) \Rightarrow \alpha = \varepsilon A$$

Logo, o coeficiente angular no gráfico $C \times 1/d$ representa a permissividade elétrica do meio multiplicada pela área das placas.

Continuação do espaço para a questão 9.

$d = 0{,}50\,cm \Rightarrow \frac{1}{d} = 2\,cm^{-1}$

Para $\frac{1}{d} = 2$, temos que $C = (0{,}035 \pm 0{,}005)\,nF$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{\varepsilon} \Rightarrow A = f(C, d)$$

Cálculo do erro:

$$(\sigma A)^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial d}\right)^2 (\sigma d)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)^2 (\sigma C)^2$$

$$(\sigma A)^2 = \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^2 (\sigma d)^2 + \left(\frac{d}{\varepsilon}\right)^2 (\sigma C)^2$$

Dividindo os dois lados da equação por $\left(\frac{Cd}{\varepsilon}\right)^2$,

temos:

$$\left(\frac{\sigma A}{A}\right)^2 = \left(\frac{\sigma d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma C}{C}\right)^2$$

$$\sigma A = A \sqrt{\left(\frac{\sigma d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma C}{C}\right)^2}$$

$$\sigma A = \frac{0{,}035 \times 10^{-9} \cdot 0{,}5 \times 10^{-2}}{8{,}85 \times 10^{-12}} \sqrt{\left(\frac{0{,}02}{0{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}005}{0{,}035}\right)^2}$$

$$\sigma A = 0{,}003\ m^2$$

$$A = \frac{0{,}035 \times 10^{-9} \cdot 0{,}5 \times 10^{-2}}{8{,}85 \times 10^{-12}} \Rightarrow A = 0{,}020 \pm 0{,}003\ m^2$$