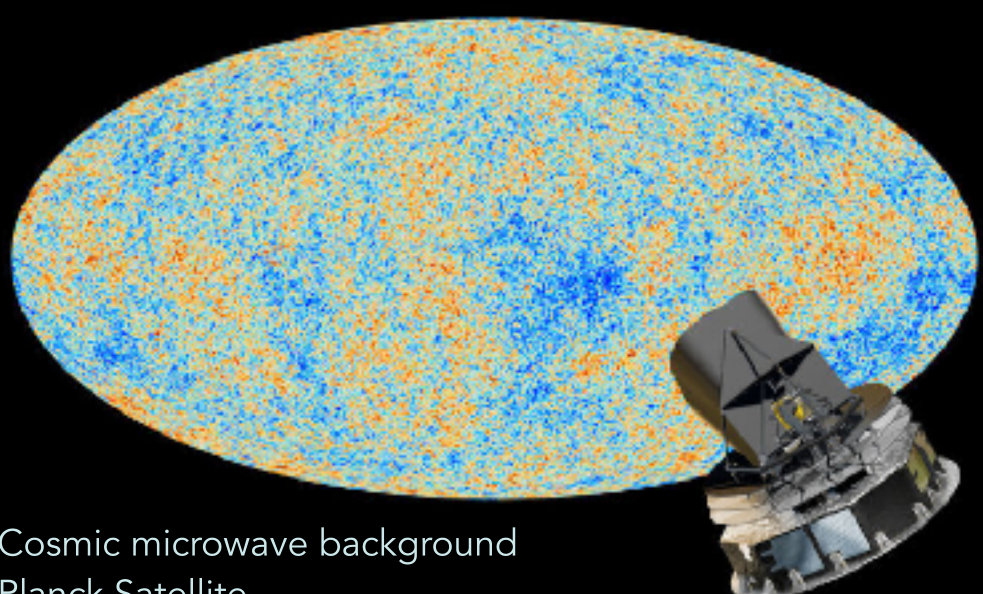
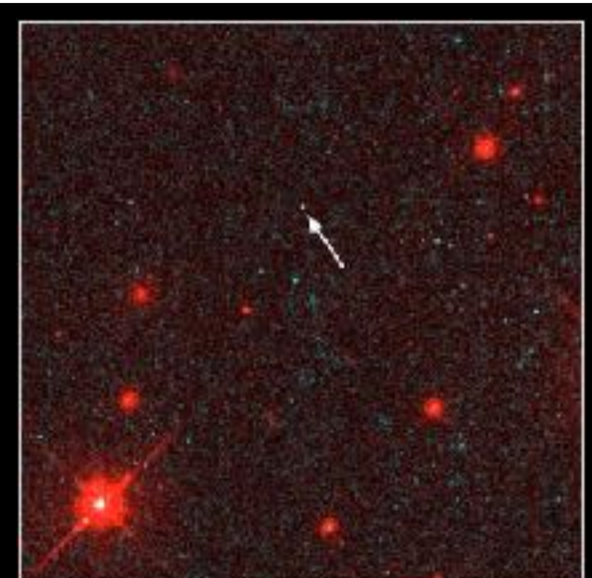
UFABC - Física Quântica - Curso 2017.3

Prof. Germán Lugones

Aula 1
Evidências experimentais da teoria quântica : radiação do Corpo Negro.



Cosmic microwave background
Planck Satellite

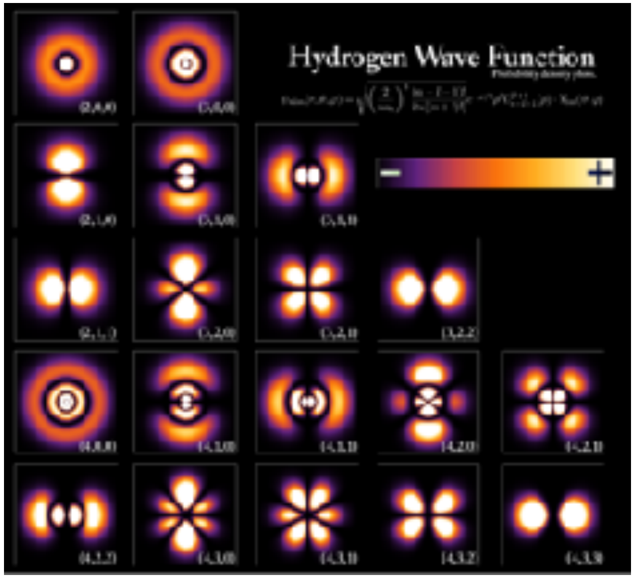


Motivações para se estudar física quântica

A mecânica quântica (também conhecida como física quântica ou teoria quântica), é a teoria física que descreve a natureza nas pequenas escalas (átomos e partículas subatômicas).

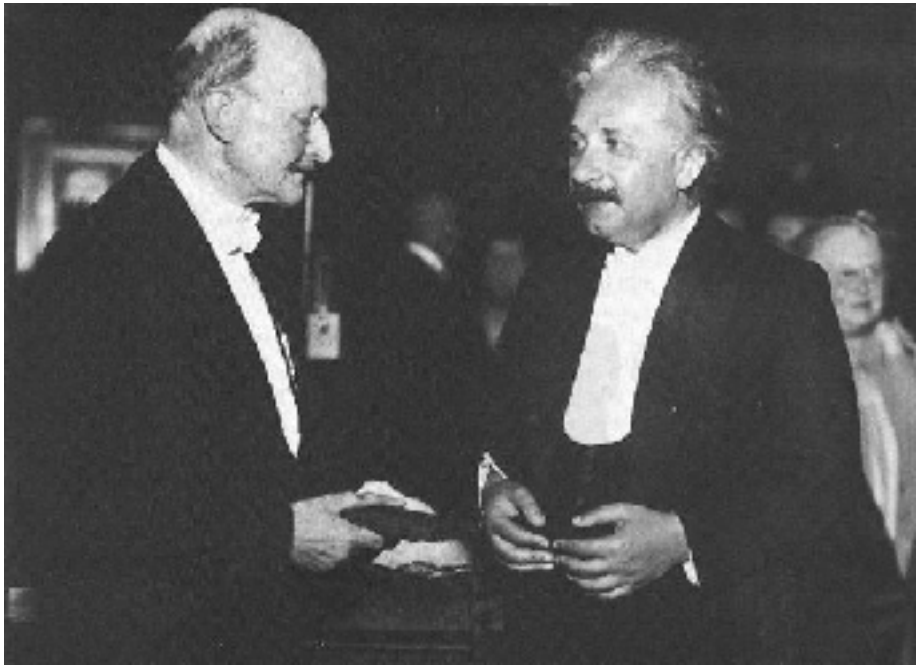
A mecânica quântica é muito diferente da física clássica, por exemplo:

- a energia, o momento e outras quantidades são freqüentemente restritas a valores discretos (quantização),
- os objetos possuem características de partículas e ondas (ou seja, dualidade onda-partícula), e
- há limites para a precisão com que as quantidades podem ser conhecidas (princípio da incerteza).



A Física Quântica muitas vezes desafia o senso comum!

A física quântica foi surgindo gradualmente a partir do início do século XX.



Os primeiros indícios do comportamento quântico da natureza foram obtidos por Max Planck em 1900 analisando o problema da radiação do corpo negro e por Albert Einstein em 1905 analisando o efeito fotoelétrico.

A física quântica é essencial em vários ramos da ciência e da tecnologia:

- química, nanotecnologia: a dinâmica dos átomos e moléculas é regida pela mecânica quântica.
- microeletrônica, componentes como transistores e diodos, que fazem parte dos dispositvos eletrônicos, funcionam com base nas leis da mecânica quântica.
- Fisica de Partículas
- Astrofísica, Cosmologia, origem do Universo
- etc… etc.…

Corpo negro

A primeira pista da natureza quântica da radiação veio do estudo da radiação térmica emitida por corpos opacos.

Quando a radiação incide sobre um corpo opaco, parte dela é refletida e parte é absorvida.

Os corpos de cor clara refletem a maior parte da radiação visível incidente sobre eles, enquanto os corpos escuros absorvem a maior parte.

A parte de absorção do processo pode ser descrita brevemente da seguinte forma.

- A radiação absorvida pelo corpo aumenta a energia cinética dos átomos constituintes, que oscilam sobre suas posições de equilíbrio.
- Como a energia cinética translacional média dos átomos determina a temperatura T do corpo, a energia absorvida faz com que T aumente.
- No entanto, os átomos contêm cargas (os elétrons) e são acelerados pelas oscilações.
- Cargas aceleradas devem emitir radiação eletromagnética → a emissão de radiação reduz a energia cinética das oscilações dos átomos e portanto reduz T.
- Quando a taxa de absorção é igual à taxa de emissão, T fica constante e dizemos que o corpo está em **equilíbrio térmico com seus arredores**.

A radiação eletromagnética emitida nessas circunstâncias é chamada de **radiação térmica**.

A lei de Stefan Boltzmann

Um corpo que absorve todas as radiações que incidem sobre isso é chamado de **corpo negro ideal**.

Em 1879, Josef Stefan encontrou uma relação empírica entre a potência irradiada por um corpo negro ideal e a temperatura:

$$R = \sigma T^4 \qquad \text{Lei de Stefan-Boltzmann}$$

onde:

- R é a potência irradiada por unidade de área. R também é chamada de radiância. R nos diz a taxa em que a energia é emitida pelo objeto.
- Unidades de R: W/m^2
- T é a temperatura absoluta
- $\sigma = 5.6705 \times 10^{-8}\ W/m^2 \cdot K^4$ é a constante de Stefan-Boltzmann

R de um corpo negro depende apenas de T e não de qualquer outra característica do objeto, como a cor ou o material do qual é composto.

Emissividade

Objetos que não são corpos negros ideais irradiam energia por unidade de área a uma taxa R **inferior** à de um corpo negro à mesma T.

Para esses objetos, a taxa R depende de propriedades além de T, como por exemplo a cor e a composição da superfície.

Os efeitos dessas dependências são combinados em um fator chamado de **emissividade** ε, que multiplica o lado direito da Lei de Stefan-Boltzmann:

$$R = \varepsilon \, \sigma T^4$$

- Os valores de ε são sempre menores do que a unidade: $0 < \varepsilon < 1$
- A emissividade ε pode depender da temperatura e de outros fatores.

Potência espectral

A **radiância total** R definida antes leva em consideração a radiação emitida em todos os comprimentos de onda.

Definimos agora a **radiância espectral** R(λ) (ou distribuição espectral) de maneira que dR=R(λ)dλ seja a potência emitida por unidade de área no intervalo de comprimentos de onda entre λ e λ+ dλ.

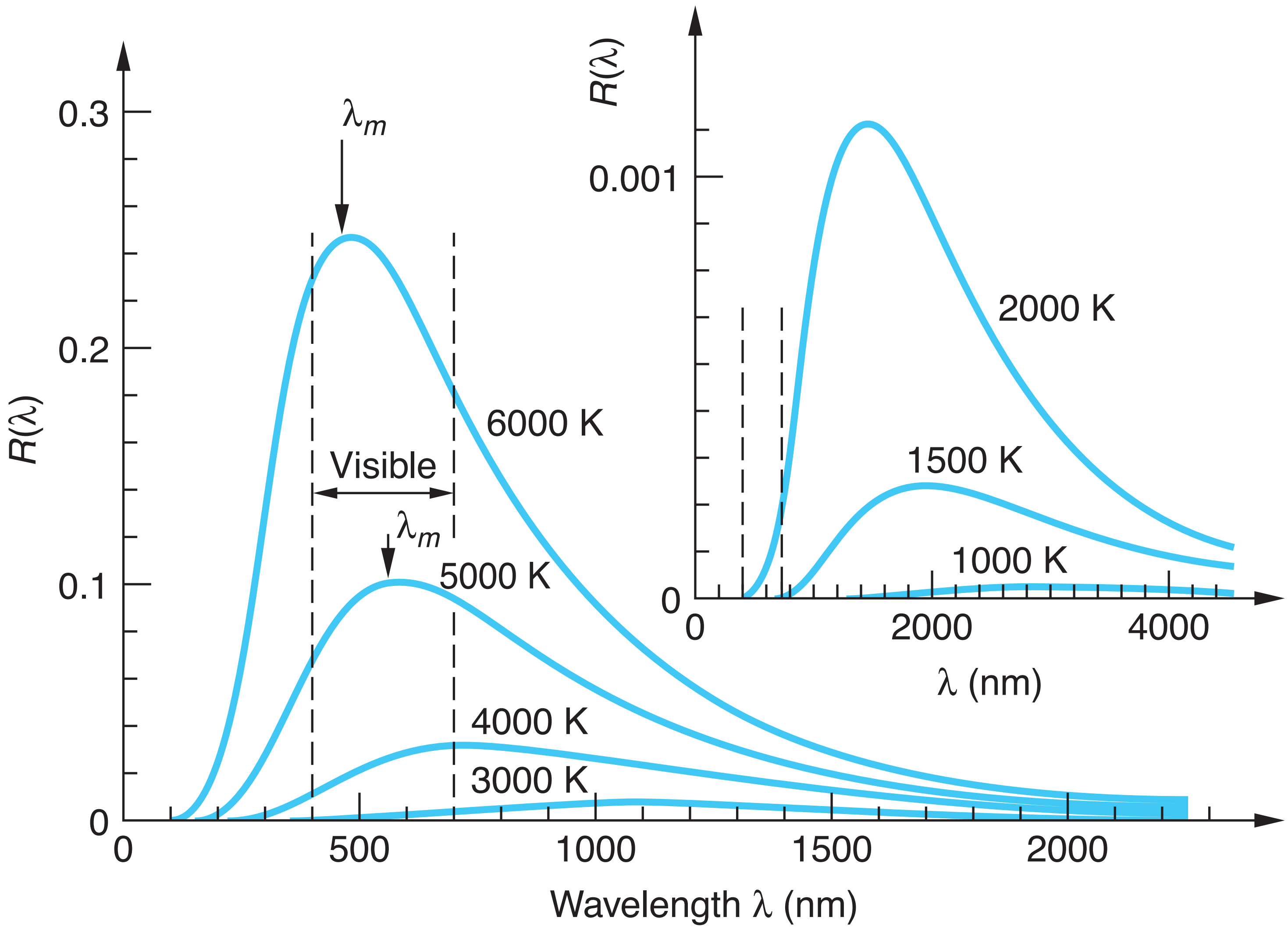
Pela definição anterior, dR=R(λ)dλ, temos:

$$R(\lambda) = \frac{dR}{d\lambda}$$

e, portanto:

$$R = \int_0^\infty R(\lambda) d\lambda$$

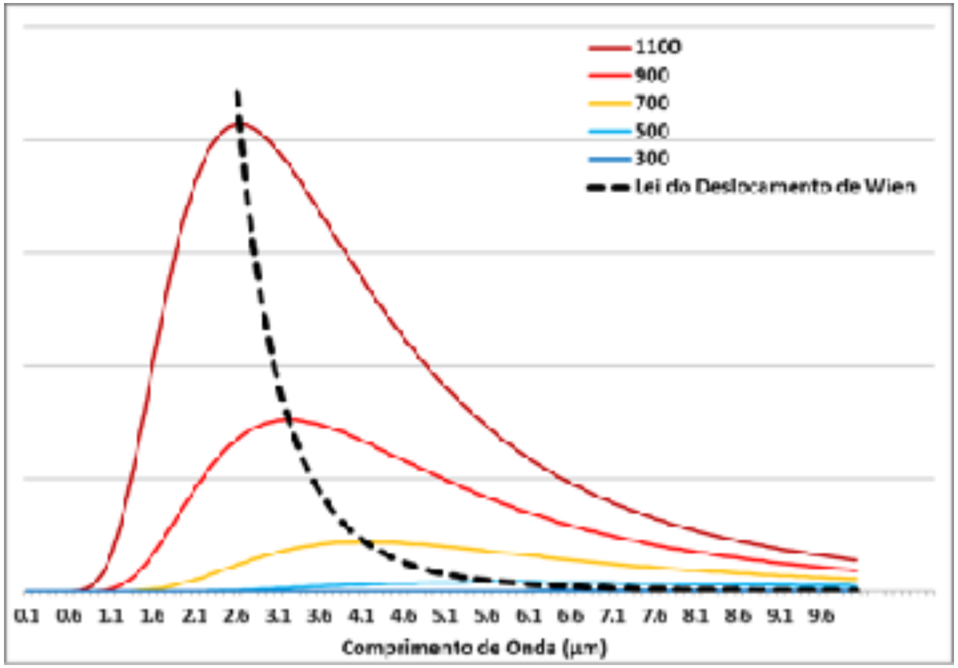
- Na figura vemos a radiância espectral R(λ) medida a diferentes T.
- O eixo vertical está em unidades arbitrárias apenas para comparação.
- O intervalo de λ está no espectro visível.
- O Sol emite radiação muito próxima da de um corpo negro a T=5800 K.



Lei de deslocamento de Wien

Para uma T dada, se observa que a radiância espectral R(λ) tem um máximo (pico).

O comprimento de onda λ_m do pico da distribuição se desloca para comprimentos de onda menores à medida que T aumenta:



Wien descobriu empiricamente que

$$\lambda_m \propto \frac{1}{T} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_m T = \text{constante} = 2.898 \times 10^{-3} m \cdot K$$

Este resultado é conhecido como **lei de deslocamento de Wien**. Foi obtido por Wien em 1893.

Exemplo: Determinação do tamanho de uma estrela.

Questão: A medição do comprimento de onda em que a radiância $R(\lambda)$ de uma determinada estrela é máxima, indica que $T = 3000K$ na superfície da estrela.

Também é medida a potência total emitida pela estrela, e o valor obtido é $100\ P_{\odot}$, onde $P_{\odot}$ é a potência irradiada pelo Sol,

Qual é o raio da estrela?

A temperatura da superfície do Sol é de 5800 K.

Resolução: Suponhamos que o Sol e a estrela irradiam como corpos negros (os astrônomos quase sempre fazem essa suposição, com base, entre outras coisas, no fato de que o espectro solar é quase o de um corpo negro ideal).

Pela Lei de Stefan-Boltzmann, R = σ T^4 , temos:

- para a estrela: $$R_{\text{star}} = \frac{P_{\text{star}}}{(\text{area})_{\text{star}}} = \frac{100\ P_{\odot}}{4\pi r_{\text{star}}^2} = \sigma T_{\text{star}}^4$$

- para o Sol: $$R_{\odot} = \frac{P_{\odot}}{(\text{area})_{\odot}} = \frac{P_{\odot}}{4\pi r_{\odot}^2} = \sigma T_{\odot}^4$$

Portanto:

$$r_{\text{star}}^2 = 100\ r_{\odot}^2 \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\text{star}}}\right)^4$$

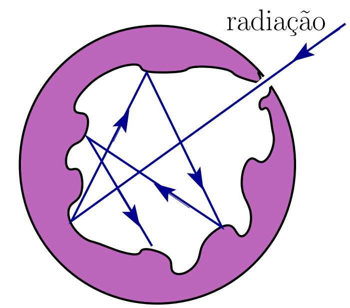
$$r_{\text{star}} = 10\ r_{\odot} \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\text{star}}}\right)^2 = 10 \left(\frac{5800}{3000}\right)^2 r_{\odot}$$

$$r_{\text{star}} = 37.4\ r_{\odot}$$

Como r = 6.96×10^8 m, esta estrela tem um raio de cerca de 2.6×10^{10} m, ou cerca de metade do raio da órbita de Mercúrio. Esta estrela é uma gigante vermelha.

A catástrofe ultravioleta

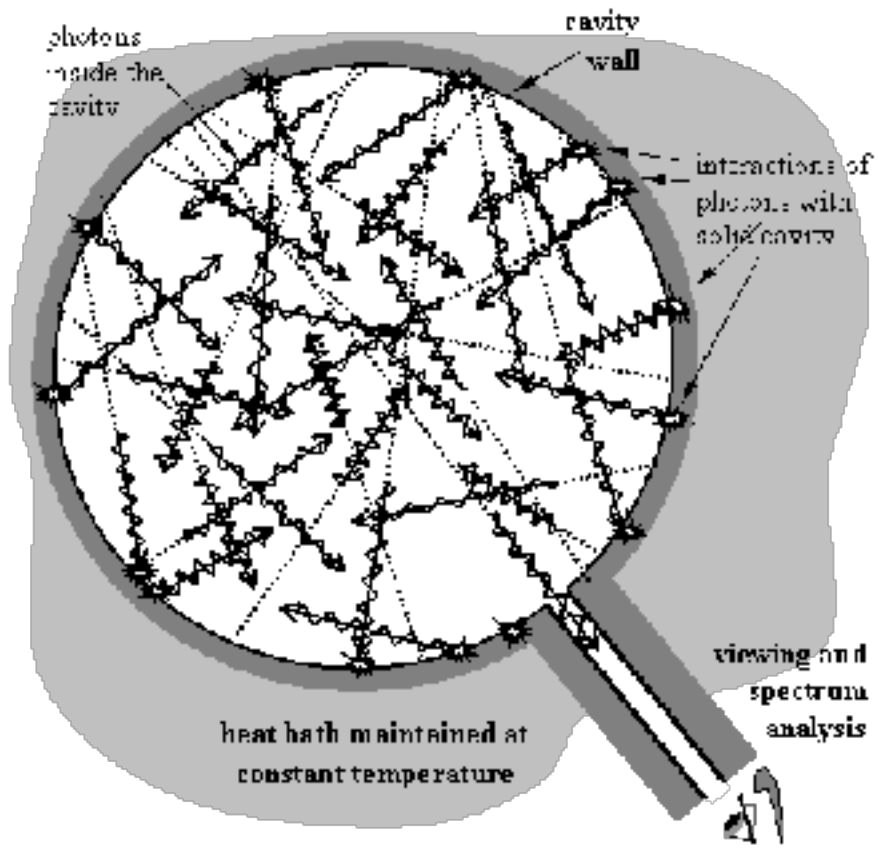
Alguns materiais pretos como o lampblack se aproximam de um corpo negro ideal, mas a melhor realização prática de um corpo negro ideal é uma **cavidade com um pequeno orifício**.



A radiação que incide no buraco entra na cavidade e é refletida inúmeras vezes até ser completamente absorvida.

Os átomos das paredes da cavidade absorvem a radiação. Na situação de equilíbrio térmico, as paredes possuem uma temperatura T e emitem radiação térmica.

Parte dessa radiação pode escapar da cavidade através do orifício e ser observada.



A potência irradiada para fora do furo é proporcional à densidade de energia total U (a energia por unidade de volume da radiação na cavidade). É possível mostrar que a constante de proporcionalidade é c/4, onde c é a velocidade da luz.

$$R = \frac{1}{4}cU$$

Da mesma forma, a distribuição espectral da potência, R(λ), emitida a partir do furo é proporcional à distribuição espectral da densidade de energia na cavidade, u(λ).

Se u(λ)dλ é a fração da energia por unidade de volume na cavidade no intervalo dλ, então u(λ) e R(λ) estão relacionados por

$$R(\lambda) = \frac{1}{4}cu(\lambda)$$

$u(\lambda)$ pode ser calculada a partir da física clássica de maneira direta:

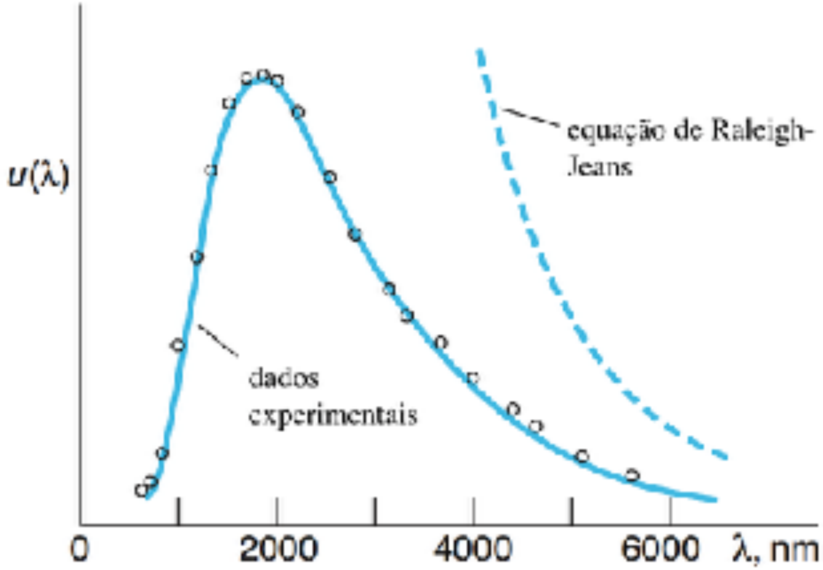
- O método envolve encontrar o número de modos de oscilação do campo eletromagnético na cavidade com comprimentos de onda no intervalo $d\lambda$ e multiplicar pela energia média por modo (ver livro do Eisberg)

- O resultado é que o número de modos de oscilação por unidade de volume, $n(\lambda)$, é independente da forma da cavidade e é dado por: $n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}$

- De acordo com a teoria cinética clássica, a energia média por modo de oscilação é $\bar{E} = kT$ onde k é a constante de Boltzmann (o mesmo que para um oscilador harmônico unidimensional). Assim, a teoria clássica prevê:

$$u(\lambda) = \bar{E}\, n(\lambda) = kTn(\lambda) = 8\pi kT\lambda^{-4}$$

Esta previsão, inicialmente derivada por Lord Rayleigh, é chamada de **equação de Rayleigh-Jeans**.



A equação de Rayleigh-Jeans (RJ) e a distribuição espectral de energia determinada experimentalmente.

- Para λ grande, a eq. de RJ concorda com a distribuição espectral determinada experimentalmente.
- Para λ pequeno (região do ultravioleta), a eq. de RJ prevê que u(λ) se torne grande.
- Mais ainda, de acordo com a eq. de RJ, u(λ) diverge quando $\lambda \rightarrow 0$,
- No entanto, os dados experimentais mostram que a distribuição realmente se aproxima de zero quando $\lambda \rightarrow 0$.

Esse enorme desacordo entre a medida experimental de u(λ) e a predição das leis fundamentais da física clássica em comprimentos de onda curtos foi chamado de **catástrofe ultravioleta**.

A equação de Rayleigh-Jeans apresenta outro severo problema. Se calculamos a **radiância total** obtemos:

$$R = \int_0^\infty R(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{4}cu(\lambda)d\lambda = 2\pi kTc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} \to \infty$$

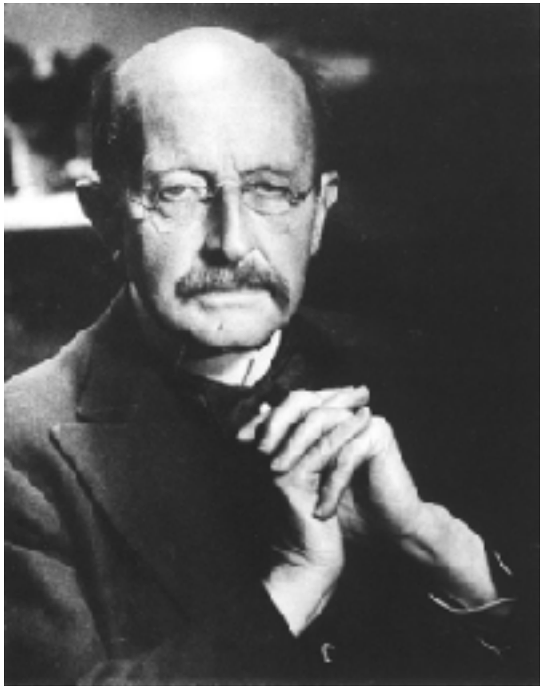
Ou seja, o corpo negro teria uma radiância infinita, em contradição com os experimentos.

A Lei de Planck

Em 1900, o físico alemão Max Planck anunciou que, ao fazer pressupostos um tanto estranhos, poderia derivar uma função u(λ) que concordava com os dados experimentais.

Sabemos que, para qualquer cavidade, quanto menor o comprimento de onda, mais ondas estacionárias (modos) serão possíveis.

Planck raciocinou que, para que u(λ) se aproxime de zero quando λ é pequeno, a energia média por modo devia depender de λ, em vez de ser igual ao valor kT previsto pela teoria clássica.



Max Planck 1858-1947

Planck considerou que os átomos das paredes da cavidade emitiam radiação com apenas alguns valores de energia, especificamente com valores **0, ϵ, 2ϵ, ... , nϵ,.... ,** com n inteiro.

Assim, a energia emitida por um átomo pode ser:

$$E_n = n\epsilon = nhf \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

onde h é uma constante universal e f é a frequência da radiação eletromagnética.

A constante h é conhecida hoje como a constante de Planck e possui o valor h=6.626×10^{-34} J·s = 4.136×10^{-15} eV·s.

Para obter a energia média, usamos a função de distribuição de Boltzmann. Com a hipótese de quantização da energia emitida pelo corpo negro, a função de distribuição de Boltzmann se torna discretizada:

$$f_n = Ae^{-E_n/kT} = Ae^{-n\epsilon/kT}$$

onde $k=1{,}38\times10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

Como f(E) é uma função de distribuição de probabilidade, ela deve ser normalizada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = A\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT} = 1$$

Portanto:

$$A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT}}$$

A energia média dos modos de radiação é:

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n A e^{-n\epsilon/kT} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon \, e^{-n\epsilon/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT}}$$

Realizando as somas acima obtemos (ver Apêndice):

$$\bar{E} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Para obter a função de distribuição de densidade de energia u(λ) da radiação na cavidade, devemos fazer:

$$u(\lambda) = \bar{E} \, n(\lambda)$$

isto é, multiplicamos a energia média pelo número de modos de oscilação por unidade de volume.

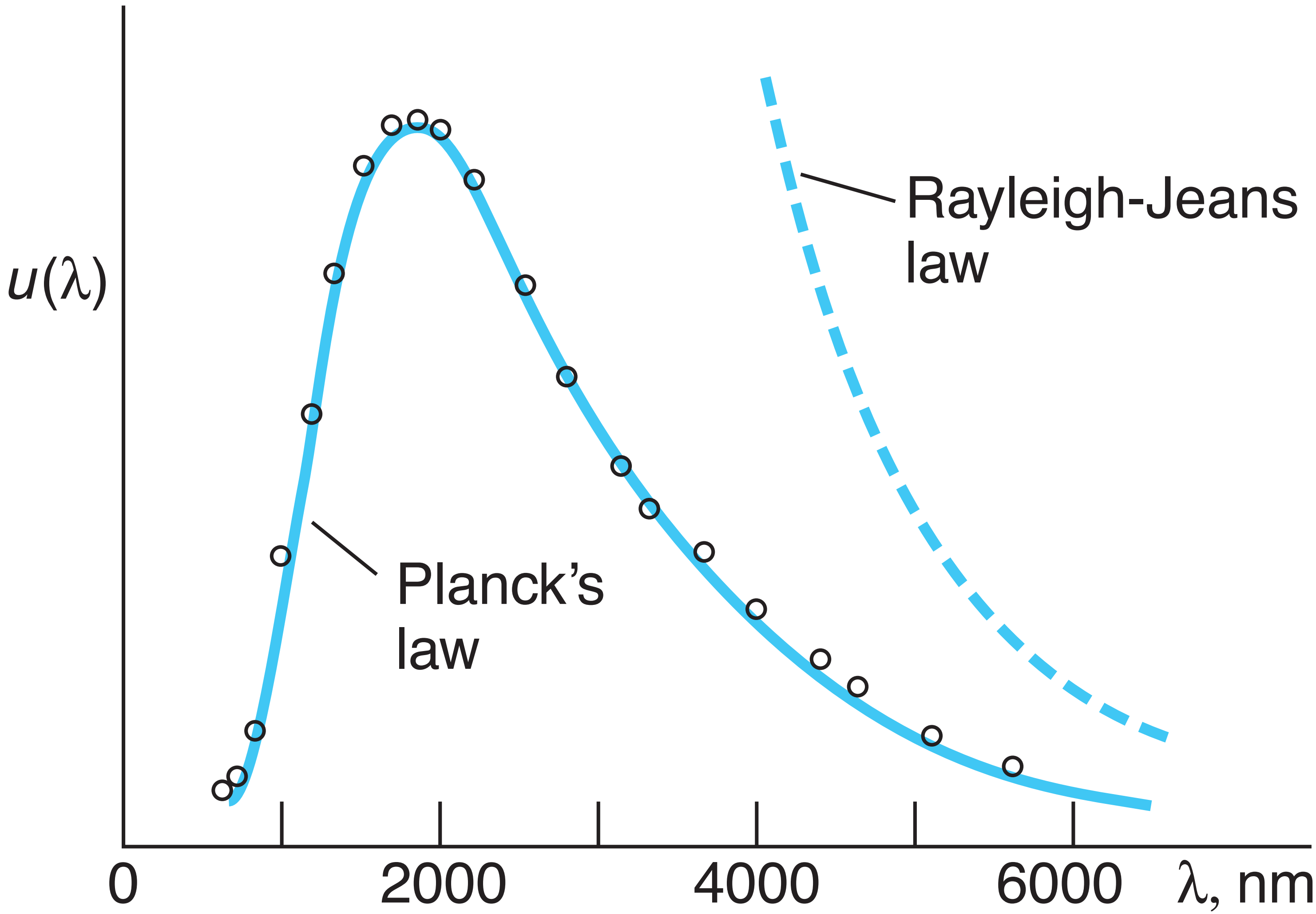
No slide 15, mostramos que n(λ) = 8πλ^{-4}; logo obtemos:

$$u(\lambda) = \bar{E}\, n(\lambda) = \left(\frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right) \left(\frac{8\pi}{\lambda^4} \right)$$

Portanto:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Esta função é chamada Lei de Planck. É claro a partir da figura que o resultado se adequa muito bem aos dados experimentais.



$u(\lambda)$
Rayleigh-Jeans law
Planck's law
0
2000
4000
6000
λ, nm

Casos limite da lei de Planck

Para comprimentos de onda grandes, podemos expandir em série de potências a exponencial que aparece na lei de Planck:

$$e^x \approx 1 + x + \cdots \qquad x \ll 1$$

$$e^{hc/\lambda kT} \approx 1 + hc/\lambda kT + \cdots \qquad hc/\lambda kT \ll 1$$

Logo,

$$e^{hc/\lambda kT} - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

Substituindo na Lei de Planck temos:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{\lambda kT}{hc} = 8\pi kT\lambda^{-4}$$

Portanto, **para comprimentos de onda grandes**, a Lei de **Plank** apresenta o mesmo comportamento que a Lei de **Rayleigh-Jeans**.

Para comprimentos de onda pequenos, podemos negligenciar o 1 no denominador da Lei de Plank:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

Portanto, a Lei de Planck resolve o problema da **catástrofe ultravioleta**.

Lei de Stefan-Boltzmann a partir da lei de Planck

Usando a lei de Planck, é possível mostrar que a densidade de energia em uma cavidade de corpo negro é proporcional a T^4 de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann (Lista 1, questão 6).

A densidade de energia total U é obtida a partir da função de distribuição $u(\lambda)$. Lembremos que $u(\lambda)d\lambda$ representa a energia por unidade de volume considerando apenas a radiação com comprimento de onda entre λ e $\lambda+d\lambda$.

Portanto, integrando sobre λ, obtemos a energia por unidade de volume U que leva em consideração as ondas com todos os comprimentos de onda possíveis:

$$U = \int_0^\infty u(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Para realizar a integração, introduzimos a variável adimensional x:

$$x = hc/\lambda kT \quad \Rightarrow \quad dx = -(hc/\lambda^2 kT)\,d\lambda \quad \Rightarrow \quad d\lambda = -\lambda^2(kT/hc)\,dx$$

Substituindo na integral, temos:

$$U = -\int_{\infty}^{0} \frac{8\pi hc\lambda^{-3}}{e^x - 1}\left(\frac{kT}{hc}\right)dx = 8\pi hc\left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

Como a integral é adimensional, isso mostra que U é proporcional a T^4.

O valor da integral é $\pi^4/15$. Portanto:

$$U = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3}\,T^4$$

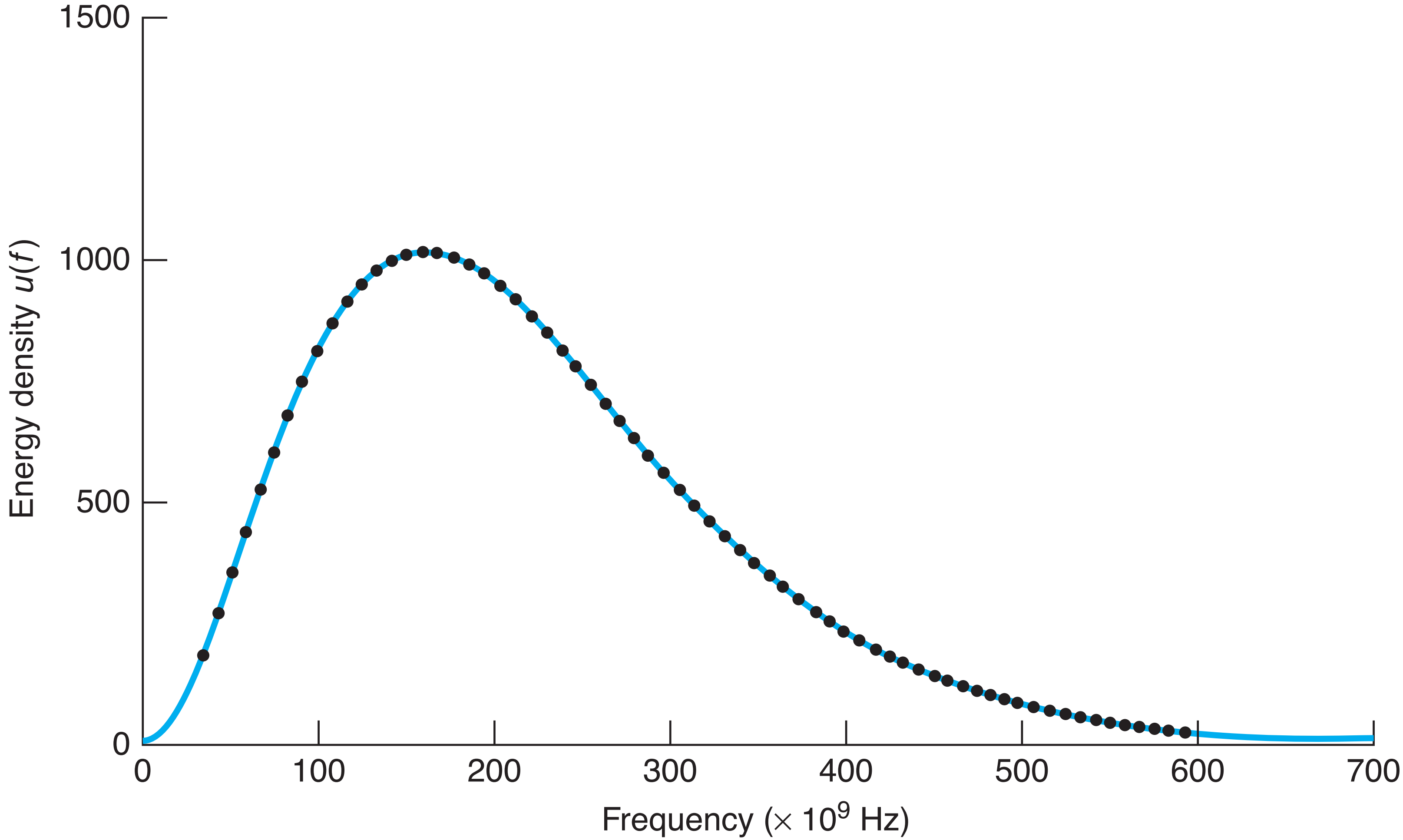
Lembrando que a radiância total é R = 1/4 c U (slide 14) temos:

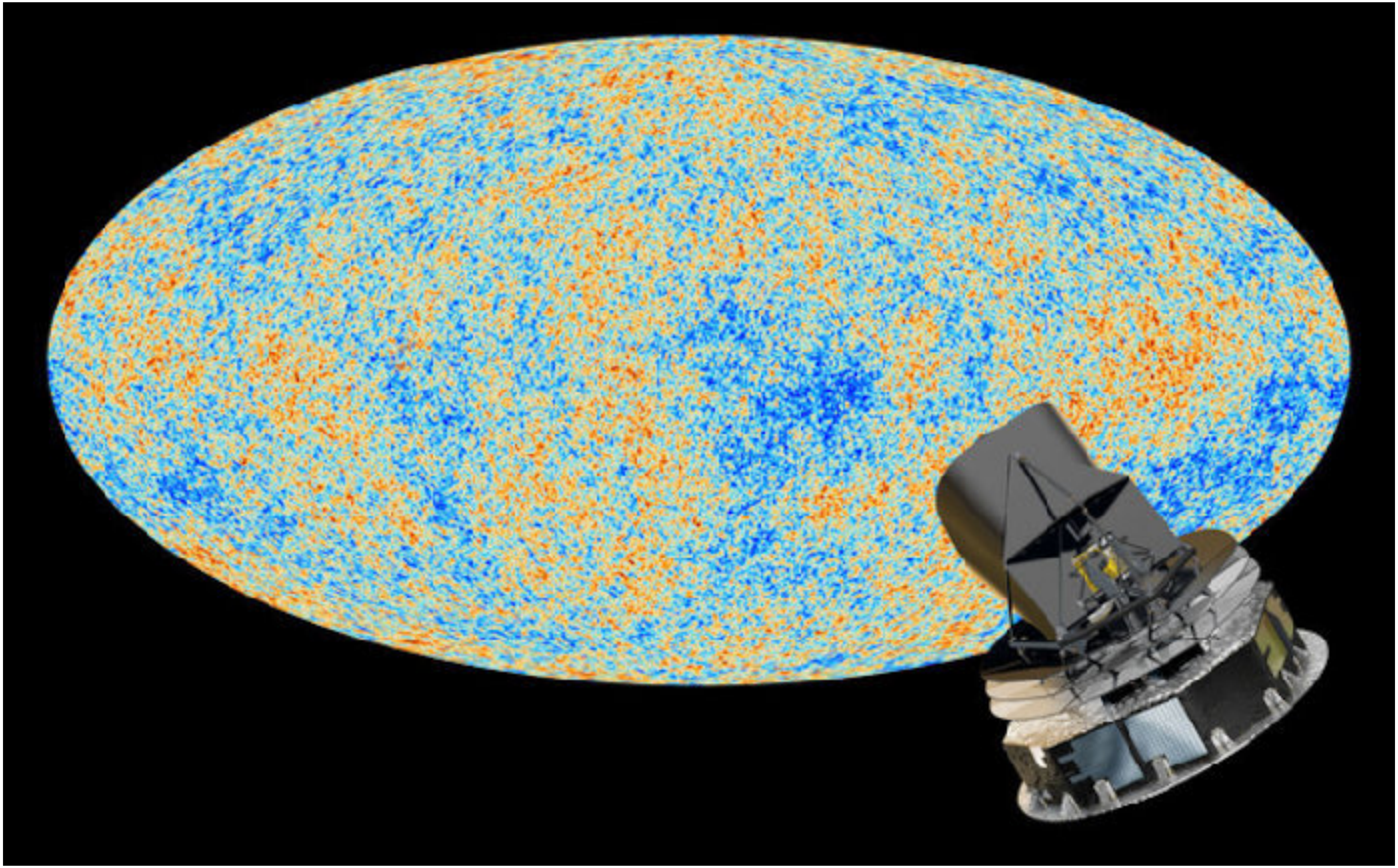
$$R = \frac{c}{4}U = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}\; T^4$$

Comparando com a Lei de Stefan R = σ T^4 descobrimos que a constante de Stefan-Boltzmann é:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}$$

O fundo de radiação cósmica





Estrelas de nêutrons emitem como corpos negros