LISTA 04 - FUV GRADMAT

"ABSQUE REPROBATIO ET GLUTEN NULLUM GRADUATIO PERFECTUM EST"

RESOLUÇÃO PASSÍVEL DE ERROS, USE COM MODERAÇÃO

NABINHO

contatos p/ dúvidas ou sexo:
abreu.carlos@aluno.ufabc.edu.br | fb.com/carlos.ea.batista |(11)986421854

Derivadas IIII

---

1 — Calcule y' e y'' para as seguintes funções:

a) $y = \text{tgh}(6x)$

$y' = \text{sech}^2(6x) \cdot 6$

$y'' = 6\left(2 \cdot \text{sech}(6x) \cdot (\text{sech}(6x))' \cdot (6x)'\right)$

$y'' = 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \text{sech}\,6x \cdot (-\text{Tgh}\,6x) \cdot (\text{sech}(6x))$

$y'' = -72 \cdot \text{Tgh}(6x) \cdot \text{sech}^2(6x)$

b) $y = \sinh(7x)$

c) $y = \text{cotgh}(\sqrt{1+x^2})$

$y = \text{cotgh}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

$y' = \text{cotgh}'\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot (1+x^2)'$

$y' = -\text{cosech}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x$

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{cosech}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

$y'' = \left(\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \cdot \text{cosech}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \left(\text{cosech}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)' \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y'' = -1\,\text{cossech}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x\cdot x}{1+x^2}\right) +$$

$$+\ \cancel{2}\cdot \text{csch}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(-\text{cotgh}\sqrt{1+x^2}\cdot\text{csch}\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x$$

$$y'' = \frac{-\text{csch}^2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}\cdot\left(1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}\right) - \frac{\text{csch}^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)\ \text{cotgh}\sqrt{1+x^2}\cdot 2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{-\text{csch}^2\sqrt{1+x^2} - \text{csch}^2\sqrt{1+x^2}\cdot\text{cotgh}\sqrt{1+x^2}\cdot 2x\,(1+x^2)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)(1+x^2)}$$

$$y'' = \frac{-\text{csch}^2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1+2x\,\text{cotgh}\sqrt{1+x^2} + 2x^3\,\text{cotgh}\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}\right)$$

$$y'' = \frac{-\text{csch}^2\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\left(1+2x\,\text{cotgh}\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)\right)$$

$\boxed{\text{d)}\quad y = \cosh(x)^x}$

$$y = e^{x\cdot\ln\cosh x}$$

$$y' = \cosh(x)^x\cdot\left(x\cdot\ln(\cosh x) + (x)'\cdot\ln(\cosh x)\right)$$

$$y' = \cosh(x)^x\left(x\cdot\frac{1}{\cosh x}\,\text{senh}\,x + \ln(\cosh x)\right)$$

$$y' = \cosh(x)^x\left(x\,\text{tgh}\,x + \ln(\cosh x)\right)$$

$$x\,\text{sech}^2 x + \text{tgh}\,x \qquad \frac{1}{\cosh x}\,\text{senh}\,x$$

$$y'' = \left(\cosh(x)^x\right)'\cdot\left(x\,\text{tgh}\,x + \ln(\cosh x)\right) + \left(x\,\text{tgh}\,x + \ln\cosh x\right)'\cdot\cosh(x)^x$$

$$y'' = \cosh(x)^x\left(x\,\text{tgh}\,x + \ln(\cosh x)\right)^2 + \left(x\,\text{sech}^2 x + 2\,\text{tgh}\,x\right)\cosh(x)^x$$

$$y'' = \cosh(x)^x \left[\left(x \operatorname{tgh} x + \ln(\cosh x) \right)^2 + x \operatorname{sech}^2 x + 2 \operatorname{tgh} x \right]$$

e) $y = \arctan(x^2)$

f) $y = \cos(x)^x$

$$y = e^{x \cdot \ln \cos x}$$

$$y' = \cos(x)^x \cdot \left(\ln(\cos x) + x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot -\operatorname{sen} x \right)$$

$$y' = \cos(x)^x \left(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x \right)$$

$$y'' = \left(\cos(x)^x\right)' \left(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x \right) + \cos(x)^x \left(\frac{1}{\cos x} (-\operatorname{sen} x) - (\operatorname{tg} x + x \cdot \sec^2 x \right.$$

$$y'' = \cos(x)^x \left(\left(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x \right)^2 - \left(2 \operatorname{tg} x + x \sec^2 x \right) \right)$$

g) $y = \ln(\cos(x^2))$

$$y' = \frac{1}{\cos(x^2)} \cdot -(\operatorname{sen}(x^2)) \cdot 2 \cdot x = -2x \operatorname{tg}(x^2)$$

$$y'' = -2 \left(x \cdot (\operatorname{tg}(x^2))' + \operatorname{tg}(x^2) \cdot 1 \right) = -2 \left(\sec^2(x^2) \cdot 2x + \operatorname{tg}(x^2) \right)$$

$$y'' = -\left(4x \sec^2(x^2) + \operatorname{tg}(x^2) \right)$$

h) $y = \log_2(1-3x)$

$$y' = \frac{1}{(1-3x) \cdot \ln 2} \cdot -3 = \frac{-3}{(1-3x) \cdot \ln 2}$$

$$y'' = -\frac{3}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-(-3)}{(1-3x)^2} \right) = -\frac{9}{\ln 2} \cdot \frac{1}{(1-3x)^2}$$

i) $y = \log_5(3x^3 + \text{sen}(x))$

j) $y = \log_{10}(\frac{a-x}{a+x})$

k) $y = \log_a(\frac{a-x}{a+x})$

l) $y = \arccos(x^2 + 3x)$

$\text{arc cos } a = b$

$\cos b = a$

$$\frac{da}{db} = -\text{sen } b$$

$$\frac{1}{-\text{sen}(b)} = \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$y = \text{arc cos}(x^2 + 3x)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+3x)^2}} \cdot 2x+3 = \frac{-(2x+3)}{\sqrt{1-9x^2-6x^3+x^4}} \rightarrow g$$

$$y'' = -\left(\frac{(2x+3)' \cdot g - g' \cdot (2x+3)}{g^2} \right)$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-9x^2-6x^3-x^4}} \cdot (-4x^3-18x^2-18x)(2x+3) - 2 \cdot \sqrt{1-9x^2-6x^3-x^4}}{1-x^4-6x^3-9x^2}$$

$$y'' = -\left(2 + \frac{(4x^3+18x^2+18x)(2x+3)}{2(1-x^4-6x^3-9x^2)\sqrt{1-9x^2-6x^3-x^4}} \right)$$

m) $y = \text{arcsen}(\cos(x))$

n) $y = \cosh(x)\cos(x)$

o) $y = \ln(\cosh(x))$

---

2 — Encontre:

a) $\frac{d^9}{dx^9} x^8 \ln(x)$

$$\frac{d}{dx} x^8 \cdot \ln x = \left(8 \cdot x^7 \cdot \ln x + x^8 \cdot \frac{1}{x}\right) = x^7 \left(8 \ln x + 1\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^8 \cdot \ln x = 7x^6 (8 \ln x + 1) + 8x^7 \cdot \frac{1}{x} = x^6 (56 \ln x + 15)$$

$$x^6 (7(8 \ln x + 1) + 8)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} x^8 \ln x = 6x^5 (7(8 \ln x + 1) + 8) + x^6 \cdot \frac{7 \cdot 8}{x}$$

$$= x^5 \left(6\left(7(8 \ln x + 1) + 8\right) + 7 \cdot 8\right)$$

$$\frac{d^9}{dx^9} x^8 \ln x = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (\ln x)' = \frac{40320}{x}$$

b) $\frac{d^4}{dx^4} \cosh(x)$

$$\frac{d^4}{dx^4} \cosh x = \cosh x$$

c) $\frac{d^5}{dx^5} \ln(x)$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\ln x = -\frac{(-2x)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\ln x = -\left(\frac{(2x)'\cdot x^4 - 4x^3\cdot 2x}{x^8}\right) = -\frac{8x^4 - 2x^4}{x^8} = -\frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^5}{dx^5}\ln x = -6\cdot\frac{-(4x^3)}{x^8} = \boxed{\frac{24}{x^5}}$$

d) $\frac{d^n}{dx^n}\ln(x)$

$$\frac{d^N}{dx^N}\ln x = \frac{1}{x}\cdot\frac{N!}{x^{N-1}} = (-1)^{N-1}\frac{(N-1)!}{x^N}$$

$$\frac{d^N}{dx^N}\ln x = \frac{(-1)^{N-1}(N-1)!}{x^N}$$

e) $\frac{d^n}{dx^n}\cosh(2x)$

$$\frac{d}{dx}\cosh(2x) = \operatorname{senh}(2x)\cdot 2$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cosh(2x) = 4\cdot\cosh 2x$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\cosh(2x) = 8\cdot\operatorname{senh}(2x)$$

$$\frac{d^N}{dx^N}\cosh(2x) = 2^N\cdot\beta,\quad \beta = \begin{cases}\operatorname{senh}(2x), & \text{se } N = 2k+1,\ k\in\mathbb{N}^*\\ \cosh(2x), & \text{se } N = 2k\end{cases}$$

f) $\frac{d^n}{dx^n}\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$

---

3 — Encontre y' se $y = \ln(x^2+y^2)$

$$y = f(x)$$

$$y' = \frac{1}{x^2+y^2}\,(2x + 2y \cdot y')$$

$$y'(x^2+y^2) = 2x + 2y \cdot y'$$

$$y'(x^2+y^2-2y) = 2x$$

$$\boxed{y' = \frac{2x}{x^2+y^2-2y}}$$

---

4 — Encontre y' se $y^x = x^y$

$$y' = \log_x y^x = x \cdot \log_x y$$

$$y' = \left((x)' \cdot \log_x y + (\log_x y)' \cdot x\right)$$

$$\frac{(\ln y)'(\ln x) - (\ln y)(\ln x)'}{\ln y^2} \qquad (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$y' = \log_x y + \left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)' \cdot x$$

$$y' = \frac{\ln y}{\ln x} + \left(\frac{\frac{y'}{y} \cdot \ln x - \frac{\ln y}{x}}{\ln^2 y}\right) x$$

$$y' = \frac{\ln y}{\ln x} + \left(\frac{\frac{y' x \ln x}{y} - \ln y}{\ln^2 y}\right)$$

$$y' = \frac{\ln y}{\ln x} + \frac{y' x \ln x}{y \ln^2 y} - \frac{1}{\ln y}$$

$$y'\left(1 - \frac{x \ln x}{y \ln^2 y}\right) = \frac{\ln y}{\ln x} - \frac{1}{\ln y}$$

$$y' = \frac{\ln^2 y - 1}{\ln x \cdot \ln y} \cdot \frac{y \ln^2 y}{(y \ln^2 y - x \ln x)}$$

$$\boxed{y' = \frac{y \ln y (\ln^2 y - 1)}{\ln x (y \ln^2 y - x \ln x)}}$$

---

5 — Seja $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Porque isso não contradiz o teorema do valor médio?

$f(x) = |x-1|$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Temos: $f(3) = 2$
$f(0) = 1$

Mas $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Como $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$

Temos $f'(c) = \dfrac{1}{3}$

$c = \dfrac{4}{3}$ ou $c = \dfrac{2}{3}$, sendo isto um absurdo

pois $\nexists\, c : f'(c) = \dfrac{1}{3}$

Isso não contradiz o Teorema do Valor Médio porque o teorema afirma que f deve ser contínua num intervalo fechado e diferenciável nesse intervalo, o que não ocorre quando $x = 1$

---

6 — Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

$f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen}(x)$

Temos que

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1 - 1 = \pi - 2 > 0$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi - 1 + 1 = -\pi < 0$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(x)$ tem uma raiz.

Provando que não há mais raízes por absurdo:

Suponhamos que há duas raízes em $[a,b]$ e $f(a) = 0 = f(b)$

$a \neq b$

Temos que $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$, pelo Teorema de Rolle.

Mas $f'(x) = 2 - \cos x \geq 1 \ \forall x \in (a,b)$

O que contradiz $f(a) = 0 = f(b)$

Assim, não há duas ou mais raízes.

$\therefore$ Há uma e não mais raízes para $f(x)$.

---

7 — Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.

Dado um polinômio qualquer

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Temos que essa equação é contínua para $\mathbb{R}$, então temos que ela também será contínua para $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$.

Temos também que a função é diferenciável no intervalo (x_1, x_2), então

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Sendo $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, x_1 e x_2 são raízes de $f(x)$, $\therefore f'(x) = 0$

Caso ocorra que $d=0$, teremos uma terceira raiz x_3 tal que $x_3 = 0$, pois

$$f(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

Não há outros valores de x tais que $f(x)=0$, então há no máximo três raízes para um polinômio de grau 3.

---

8 — Use o teorema do valor médio para provar a desigualdade:

$$|\text{sen}(a) - \text{sen}(b)| \leqslant |a - b|$$

---

9 — Prove as identidades:

a) $\text{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}$

b) $2\,\text{arcsen}(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

Como são iguais, temos que, com

$f(x) = 2\arcsen x - \arccos(1-2x^2)$,

$f'(x) = 0$

Então $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{(-1)}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \cdot (-4)x =$

$\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2(-x^2+1)}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4x}{\cancel{2x}\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

---

10 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{12x^2+2x}{5x^4} = \frac{12-2}{5} = 2$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{12}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}\cdot(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5!} = \infty$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^N} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{N!} = \infty.$$

f) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 5x}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 5x \cdot 5} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\cos^2 x} \cdot \cos^2 5x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \cos 5x \cdot - \operatorname{sen} 5x \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cos x \cdot - \operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \operatorname{sen} 5x}{\cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos 10x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5\cos(10x)}{\cos(2x)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos\left(\frac{a}{x}\right) \cdot \frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \cos\left(\frac{a}{x}\right) \cdot a = \boxed{a}$$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) \ln(x-1)$

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) \ln(x-1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x-1} \cdot 1}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} =$$

$$\lim_{x \to 1} -\frac{1}{x-1} \cdot x \ln^2 x = \lim_{x \to 1} -\left(\frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} x \ln x - \ln^2 x = 0$$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x \cdot \ln x}$$

$$\to \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\to \lim_{x\to\infty} e^{0} = 1$$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \cdot \ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} \tan x = \lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} e^{0} = 1$$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sec^3(x)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^3 x}{1-\cos x} = \infty$$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{-\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\ln^2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}} =$$

m) $\lim_{x\to\infty} x^3e^{-4x}$

$$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{4x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{4\cdot e^{4x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot2\cdot x}{4\,4\cdot e^{4x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{4^3\cdot e^{4x}} = 0$$

---

11 — Prove que a função $2x^5 + x^3 + 2x$ é crescente em todos os pontos.

---

12 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.

---

13 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = e^{-x^2/2}$ é crescente e nos quais é decrescente.

---

14 — Encontre os valores de c tal que o gráfico de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

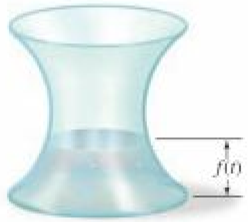
---

15 — Mostre que a função $f(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $f''(0)$ não exista.

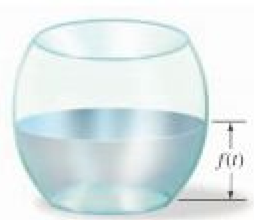
---

16 — Nas figuras a seguir, a água é vertida para o vaso a uma taxa constante (em unidades apropriadas) Esboce o gráfico de, e explique a sua forma, indicando onde é côncavo para cima e côncava para baixo. Indique o ponto de inflexão no gráfico, e explique a sua significância.

a)



b)



---

17 — Para as próximas funções:

a)Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente

b)Encontre os valores de máximo e mínimo locais

c)Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão

d)Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

a) $(x^2 - 1)^3$

$\boxed{\text{b)}\ \ 3x^{2/3} - x}$

$\boxed{\text{c)}\ \ (x+2)^{\frac{3}{2}} + 1}$

$\boxed{\text{d)}\ \ x + \cos(x)}$

$\boxed{\text{e)}\ \ x^{1/3}(x+4)}$

$\boxed{\text{f)}\ \ \ln(x^4 + 27)}$

$\boxed{\text{g)}\ \ \ln(1 - \ln(x))}$

$\boxed{\text{h)}\ \ e^{\frac{-1}{x+1}}}$

$\boxed{\text{i)}\ \ \ln(\operatorname{tg}^2(x)}$

$\boxed{\text{j)}\ \ \frac{e^x}{x^2 - 9}}$

$\boxed{\text{k)}\ \ x \operatorname{tg} x \qquad -\pi/2 < x < \pi/2}$

$\boxed{\text{l)}\ \ e^{\cos(x)}}$

$\boxed{\text{m)}\ \ \frac{1}{1 - \cos(x)} \ -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi}$
