Lista 6 - Álgebra Linear

Transformações Lineares (parte II)

3° quadrimestre de 2014 - Professores Maurício Richartz e Vladislav Kupriyanov

Leitura recomendada: seções 5.3 - 5.4 do Boldrini e seções 2.10, 2.14, 2.18 do Apostol.

1 — a) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ dada por $T(p) = p'$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e com relação à base B formada pelos vetores

$$u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0), w = (-1, -1, 1).$$

Isto é, encontre $[T]_C^C$ e $[T]_B^B$.

c) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$ Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$.

2 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 3, 1), T(1, 1, 0) = (5, 2, 7) \text{ e } T(1, 1, 1) = (-2, 0, 7).$$

a) Encontre $T(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

e) Determine a matriz da transformação T em relação à base canônica.

3 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y + z, x - y, 3x - 2y + z)$. Usando a base canônica $\xi = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, escreva $[T]_\xi^\xi$. Qual é o posto de $[T]_\xi^\xi$? Esse número é igual a dim(Im(T))? Determine Im(T). Quanto vale a nulidade de $[T]_\xi^\xi$ (nº de colunas menos o posto)? Esse número é igual a dim(ker(T))? Determine ker(T).

4 — Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[T]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

5 — Seja $\mathsf{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$(\mathsf{T}(p_0))(t) = 1 + t, (\mathsf{T}(p_1))(t) = t + t^2 \text{ e } (\mathsf{T}(p_2))(t) = 1 + t - t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i, i = 0, 1, 2$.

a) Encontre $\mathsf{T}(p)$ para $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

e) Determine a matriz da transformação T em relação à base canônica.

6 — Seja o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3, P_3, e a transformação linear $D : P_3 \to P_3$, onde $D(p) = p'$ é a derivada do polinômio.

a) Mostre que P_3 é um espaço vetorial de dimensão 4.

b) Mostre que D é uma transformação linear.

c) Escreva D na forma matricial usando coordenadas relativas à base canônica $\{1, t, t^2, t^3\}$ no domínio e contra-domínio.

d) Determine kerD, ImD e encontre uma base para cada um destes subespaços. Verifique o teorema do núcleo e da imagem.

e) Mostre que $D \circ D \circ D \circ D = \mathbf{0}$, a transformação que leva qualquer polinômio para o polinômio nulo. Faça isso de dois jeitos: (i) usando a definição da derivada e (ii) usando a representação matricial do item (b).

7 — Sejam $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathsf{S} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, transformações lineares tais que $\mathsf{T}(1,1) = (3,2,1)$, $\mathsf{T}(0,-2) = (0,1,0)$, $\mathsf{S}(3,2,1) = (1,1)$, $\mathsf{S}(0,1,0) = (0,-2)$ e $\mathsf{S}(0,0,1) = (0,0)$. Encontre (a) $\mathsf{T}(x,y)$, (b) $\mathsf{S}(x,y,z)$, (c) $\mathsf{T}(1,0)$ e $\mathsf{T}(0,1)$, (d) $\mathsf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathsf{P} = \mathsf{S} \circ \mathsf{T}$, (e) $\mathsf{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathsf{Q} = \mathsf{T} \circ \mathsf{S}$. (f) T é a inversa de S? (g) Mostre que T é injetora mas não sobrejetora e S é sobrejetora mas não injetora.

8 — Sejam T, S, P e Q da questão 7. Encontre as matrizes de transformação $[\mathsf{T}]^{\xi}_{\xi'}$, $[\mathsf{S}]^{\xi'}_{\xi}$, $[\mathsf{P}]^{\xi}_{\xi}$ e $[\mathsf{Q}]^{\xi'}_{\xi'}$, relativas às bases canônicas ξ e ξ' de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Verifique que $[\mathsf{S}]^{\xi'}_{\xi}[\mathsf{T}]^{\xi}_{\xi'} = [\mathsf{P}]^{\xi}_{\xi} = I_2$ e $[\mathsf{T}]^{\xi}_{\xi'}[\mathsf{S}]^{\xi'}_{\xi} = [\mathsf{Q}]^{\xi'}_{\xi'}$.