Universidade Federal do ABC - UFABC

Álgebra Linear

Prof. Celso Nishi

Lista 8 – Autovalores e autovetores

1. Sendo $T : V \to V$ um operador linear, mostre que o conjunto $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \,|\, T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$, formado pelos autovetores associados a um autovalor λ, inclusive $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, é um subespaço vetorial de V.

2. Encontre os autovalores e autovetores associados dos operadores lineares $T : V \to V$ e matrizes $A \sim n \times n$ seguintes:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+y+z, x-y+2z, x+2y-z)$

   (c) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

   (d) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, (derivada)

   (e) $V = M(2, 2)$, $T(A) = A^\mathsf{T}$, $A \in M(2, 2)$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (h) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

   (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   (k) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

   [**OBS**: Se necessário, utilize o computador (p.ex., o WolframAlpha) para encontrar uma raíz de um polinômio cúbico. No caso do item (j), por exemplo, isso não é necessário.]

3. Rotações em três dimensões podem ser descritas como operadores lineares cujas matrizes de transformação R (em relação à base canônica) obedecem $RR^T = I_3$ (matriz ortogonal) e $\det R = 1$. (Verifique para as matrizes abaixo.) Sejam as matrizes de rotação abaixo.

   (a) rotação de θ em torno de z: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule os autovalores e autovetores reais.

   (b) rotação de $\pi/2$ em torno de (1,1,1):

   $$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

   Encontre um autovetor óbvio sem calcula-lo. Calcule o autovalor para esse autovetor.

   (c) rotação de algum ângulo em torno de algum eixo: $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

   Encontre o polinômio característico e verifique que 1 é um autovalor. [Verifique que não há mais autovalores reais.] Encontre o autovetor associado. Qual é o eixo de rotação?

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (a) Encontre os autovalores de A e A^{-1}. (b) Encontre os autovetores.

5. Dado um operador linear $T : V \to V$ inversível, seja $\mathbf{v}$ um autovetor associado ao autovalor λ_0, $\lambda_0 \neq 0$. Mostre que $\mathbf{v}$ é um autovetor de T^{-1} associado ao autovalor λ_0^{-1}.

6. Dado um operador linear $T : V \to V$, seja $\mathbf{v}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_0. Mostre que $\mathbf{v}$ é um autovetor de $T^2 = T \circ T$ associado ao autovalor λ_0^2. [Isso é generalizável para T^n?]

7. Dado um operador linear $T : V \to V$, mostre que $\ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$, desde que $\ker(T) \neq \{\vec{0}\}$. Mostre que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Mostre a recíproca: quando T é injetora, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor de T.

8. Verifique quais dos operadores e matrizes da questão 2 são diagonalizáveis.
(Um operador $T : V \to V$ é diagonalizável quando existe uma base de autovetores em V.)

9. Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A.

10. Diagonalize a matriz A em (2.j).

11. Encontre os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a, b, c, d reais. Verifique que quando a, b, c, d são positivos os autovalores são reais. Discuta para quais valores de a, b, c, d os autovalores são reais, complexos ou repetidos.

12. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x + 3y\,, \\ \dot{y} &= 3x - 3y\,. \end{aligned} \qquad \text{(utilize o exercício 9.)}$$

13. Sendo A a matriz do exercício 9, calcule A^2, A^4 e A^{10}. Utilize $A^2 = (MDM^{-1})(MDM^{-1}) = MD^2M^{-1}$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização e M é a matriz que diagonaliza A. Calcule A^2 explicitamente e compare. (Calcule A^n.)

14. (**Opcional**) Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (i.e., $T \circ T \circ \cdots \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Sendo T nilpotente,
   (a) Encontre seus autovalores;
   (b) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável;
   (c) Mostre que T dado em (2.d) é nilpotente.

15. (**Opcional**) Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é idempotente se $T^2 = T$ (i.e., $(T \circ T)(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Sendo T idempotente,
   (a) Encontre seus autovalores;
   (b) Dê um exemplo de matriz idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;
   (c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.