Lista 8 - Álgebra Linear

Autovalores, autovetores e diagonalização

3° quadrimestre de 2014 - Professores Maurício Richartz e Vladislav Kupriyanov

Leitura recomendada: capítulos 6 e 7 do Boldrini e seções 4.1-4.10 do Apostol.

1 — Encontre os autovalores e autovetores dos seguintes operadores lineares $T : V \to V$:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, -x + 2y - z)$

c) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

d) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, (derivada)

e) $V = M(2, 2)$, $T(A) = A^T$, $A \in M(2, 2)$

2 — Encontre os autovalores e autovetores das seguintes matrizes $n \times n$:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

3 — Verifique quais dos operadores e matrizes das questões 1 e 2 são diagonalizáveis. Para o caso de operadores diagonalizáveis, encontre uma base que diagonaliza o operador e efetue explicitamente a mudança de base. Para o caso de matrizes diagonalizáveis, encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal.

4 — Encontre os autovalores e autovetores do operador linear $T : V \to V$ (quando possível, diagonalize o operador):

a) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x - y)$.

b) $V = \mathbb{R}^3, T(1, 0, 0) = (2, 0, 0), T(0, 1, 0) = (2, 1, 2), T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$.

c) $V = \mathbb{R}^4, [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

d) $V = \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$.

e) $V = \mathbb{R}^4, T(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2z + t)$.

f) $V = \mathbb{P}^2, T(p) = p'' - 2p' + p$.

g) $V = \mathbb{P}^3, T(p) = p'$.

5 — Determine (se possível sem calcular os autovetores) se as seguintes matrizes são diagonalizáveis em $\mathbb{C}$:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 2 & 1 & \sqrt{11} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

6 — Verificar em cada um dos itens abaixo (se possível sem calcular os autovetores) se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado pela sua matriz com relação à base canônica α é diagonalizável.

a) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{bmatrix}$, com $m, n \in \mathbb{R}$.

c) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

d) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 7\pi & \sqrt{7} \\ 7\pi & 43 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & 21 \end{bmatrix}$

7 — Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (a) Determine A^{-1}. (b) Encontre os autovalores de A e de A^{-1}. Qual a relação entre eles? (c) Seja B uma matriz inversível qualquer. Mostre que se $\lambda \neq 0$ é autovalor de B então λ^{-1} é autovalor de B^{-1}.

8 — Diagonalize as matrizes simétricas abaixo, encontrando uma matriz M tal que $M^T A M$ é uma matriz diagonal.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9 — Diagonalize as matrizes abaixo (i.e. encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal) e calcule A^n ($n \in \mathbb{N}$).

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, com n par.

10 — Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

a) Calcule o polinômio característico da transformação T.

b) Que condições a, b, c e d devem satisfazer para que a transformação seja diagonalizável?

c) Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ ao invés de $\mathbb{R}^2$ [i.e. considere $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$] e repita o item (b).

11 — Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (i.e. $T \circ T \circ \cdots \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Analogamente, diz-se que uma matriz A é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $A^n = 0$.

a) Encontre os autovalores de um operador (ou de uma matriz) nilpotente;

b) Dê um exemplo de um operador não-nulo (ou de uma matriz não-nula) nilpotente para $V = \mathbb{R}^2$ e verifique se é ou não diagonalizável;

c) Generalize o resultado do item (b) para mostrar que qualquer operador nilpotente (ou matriz nilpotente) não nulo não é diagonalizável.

12 — Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é idempotente se $T^2 = T$ (i.e. $T \circ T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Analogamente, diz-se que uma matriz A é idempotente se $A^2 = A$.

a) Encontre os autovalores de um operador (ou de uma matriz) idempotente;

b) O operador identidade e o operador nulo são operadores idempotentes (verifique). A matriz identidade e a matriz nula são matrizes idempotentes (verifique). Dê um outro exemplo de um operador (ou de uma matriz) idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;

c) Mostre que um operador linear idempotente (ou uma matriz idempotente) é diagonalizável.

Aplicações

Leitura recomendada: capítulos 10, 11 e 12 do Boldrini.

13 — Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

a) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = 3x - 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = 5x - 4y \end{cases}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

14 — Diagonalize as formas quadráticas abaixo (i.e. encontre a forma canônica das equações) e identifique a cônica ou quádrica em questão. Faça um esboço, indicando os novos eixos.

a) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 8xy + 4xz - 8yz = 27$ em $\mathbb{R}^3$.

b) $2x^2 + y^2 + 2xy + 2yz = 4$ em $\mathbb{R}^3$.

c) $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 4$ em $\mathbb{R}^2$.

d) $2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y = 4$ em $\mathbb{R}^2$.