UFABC - Física Quântica - Curso 2017.3

Prof. Germán Lugones

Aula 7

Exercícios

Ex. 1

Um laser pointer com uma potência de saída de 5,00 mW emite luz vermelha ($\lambda = 650$ nm). (a) Qual é o módulo do momento linear de cada fóton? (b) Quantos fótons o laser pointer emite em cada segundo?

(a)

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{6{,}50 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

$$= 1{,}02 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

(Lembre-se de que $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$.)

(b) Energia de um fóton

$$E = pc = (1{,}02 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot m/s})\,(3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})$$

$$= 3{,}06 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}91\ \mathrm{eV}$$

O laser pointer emite energia a uma taxa de $5{,}00 \times 10^{-3}$ J/s, então ele emite fotoelétrons a uma taxa de

$$\frac{5{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{J/s}}{3{,}06 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/fótons}} = 1{,}63 \times 10^{16}\ \mathrm{fótons/s}$$

Ex 2.

Realizando uma experiência do efeito fotoelétrico com uma luz de determinada frequência, você verifica que é necessária uma diferença de potencial invertida de 1,25 V para anular a corrente. Determine: (a) a energia cinética máxima; (b) a velocidade máxima dos fotoelétrons emitidos.

(a) O valor de 1,25 V é o potencial de corte V_0 nessa experiência. Podemos encontrar a energia cinética máxima dos fotoelétrons $K_{máx}$ usando

$$K_{máx} = \frac{1}{2}m{v_{máx}}^2 = eV_0$$

Com esse valor, definimos a velocidade máxima dos fotoelétrons.

$$K_{máx} = eV_0 = (1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})\,(1{,}25\ \mathrm{V}) = 2{,}00 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$K_{máx} = eV_0 = e(1{,}25\ \mathrm{V}) = 1{,}25\ \mathrm{eV}$$

pois o elétron-volt (eV) é o módulo da carga do elétron e multiplicado por um volt (1V).

(b) A partir de $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}{}^2$, obtemos

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{máx}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}00 \times 10^{-19}\ \text{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$= 6{,}63 \times 10^{5}\ \text{m/s}$$

Ex. 3

Para um certo material do catodo de uma experiência do efeito fotoelétrico, verifica-se um potencial de corte $V_0 = 1{,}0$ V para uma luz de comprimento de onda λ igual a 600 nm, 2,0 V para 400 nm e 3,0 V para 300 nm. Determine a função trabalho ϕ para esse material e o valor da constante de Planck h.

Este exemplo utiliza uma relação entre o potencial de corte V_0, a frequência f e a função trabalho no efeito fotoelétrico.

Conforme a equação:

Efeito fotoelétrico:

$$\overbrace{\underset{\text{Módulo da carga do elétron}}{e}\underset{\text{Potencial de corte}}{V_0}}^{\text{Energia cinética máxima do fotoelétron}} = \overbrace{\underset{\text{Constante de Planck}}{h}\underset{\text{Frequência da luz}}{f}}^{\text{Energia do fóton absorvido}} - \underset{\text{Função trabalho}}{\phi}$$

um gráfico do potencial de corte V_0 pela frequência f seria uma linha reta.

Tal gráfico é completamente determinado por sua inclinação e pelo valor em que ele intercepta o eixo vertical; usaremos esses dados para encontrar os valores de ϕ e h.

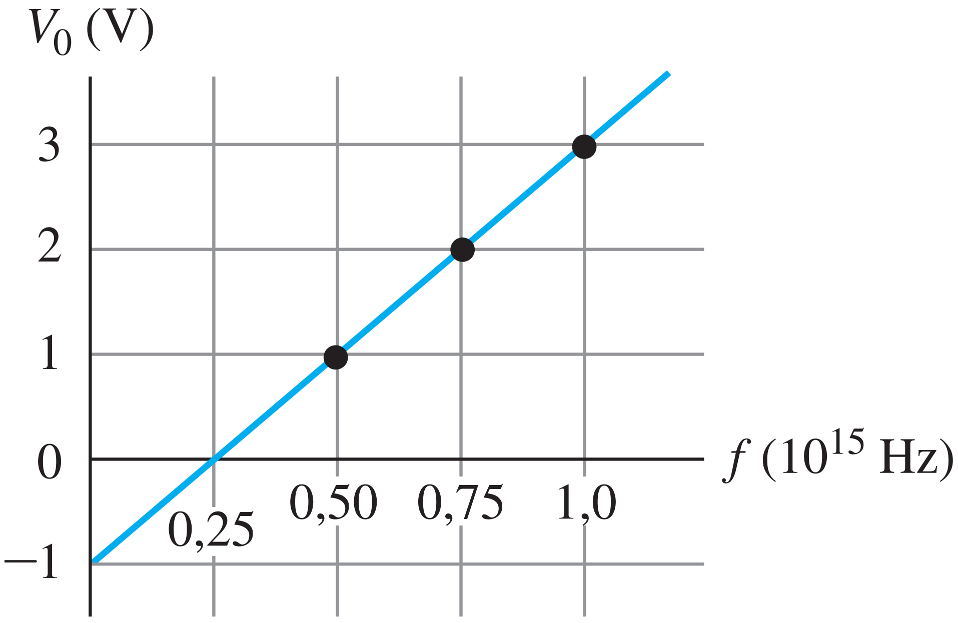
(a)reescrevemos a equação anterior na forma

$$V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

A partir dessa forma, vemos que a inclinação da linha reta é igual a h/e e a interseção com o eixo vertical (correspondente a f=0) ocorre no ponto $-\phi/e$.

As frequências, obtidas pela relação $f = c/\lambda$ e c $3,0 \times 10^8$ m/s, são:

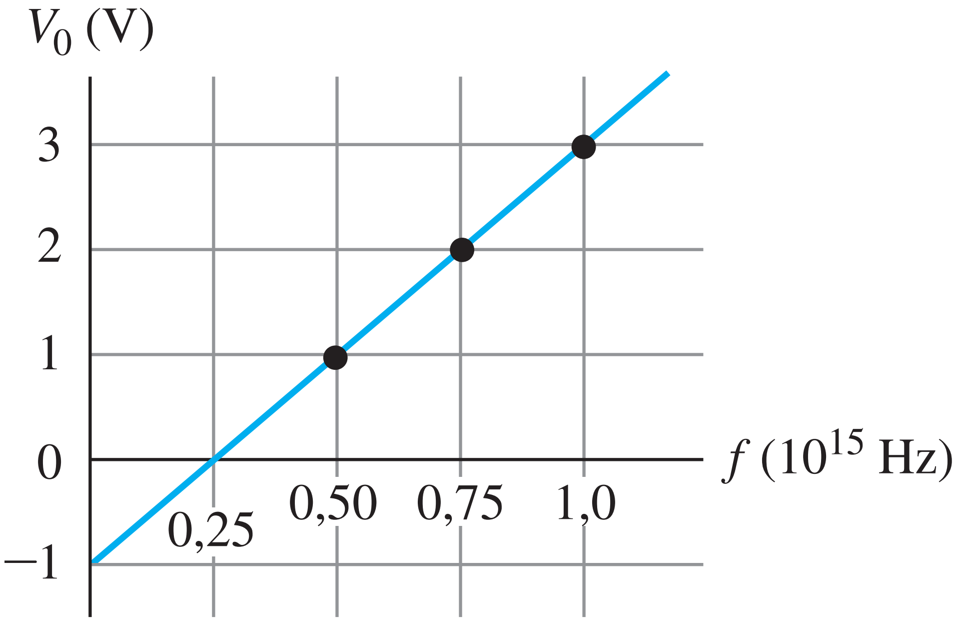
$$f = 0,50 \times 10^{15}\ \text{Hz},$$
$$f = 0,75 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$
$$f = 1,0 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$



Do gráfico, obtemos

$$-\frac{\phi}{e} = \text{interseção vertical} = -1{,}0\ \text{V}$$

$$\phi = 1{,}0\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$



$$\text{Inclinação} = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} - \frac{3{,}0\ \text{V} - (-1{,}0\ \text{V})}{1{,}00 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 0} = 4{,}0 \times 10^{-15}\ \text{J} \cdot \text{s/C}$$

$$h = \text{Inclinação} \times e = (4{,}0 \times 10^{-15}\ \text{J} \cdot \text{s/C})$$

$$(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 6{,}4 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

O valor obtido difere em 3% do valor aceito.

Ex. 4

Você usa os fótons dos raios X de 0,124 nm para uma experiência de espalhamento Compton. (a) Em que ângulo o comprimento de onda dos raios X espalhados é 1,0% maior que o comprimento de onda dos raios X incidentes? (b) E em que ângulo ele é 0,050% maior?

(a) Usaremos a relação entre ângulo de espalhamento e deslocamento de comprimento de onda no efeito Compton.

Comprimento de onda da radiação espalhada

Comprimento de onda da radiação incidente

Constante de Planck

Espalhamento Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

Ângulo de espalhamento

Massa de repouso do elétron

Velocidade da luz no vácuo

Na equação acima, queremos que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ seja igual a 1% de 0,124 nm, isto é, $\Delta\lambda = 0{,}00124$ nm $= 1{,}24 \times 10^{12}$ m.

Usando o valor h/mc = $2{,}426\times10^{12}$ m, obtemos

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

$$\cos\phi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{h/mc} = 1 - \frac{1{,}24 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}}{2{,}426 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}} = 0{,}4889$$

$$\phi = 60{,}7°$$

(b) Para que $\Delta\lambda$ seja 0,050% de 0,124 nm, isto é, $6{,}2 \times 10^{-14}$ m,

$$\cos\phi = 1 - \frac{6{,}2 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}}{2{,}426 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}} = 0{,}9744$$

$$\phi = 13{,}0^\circ$$

Os resultados mostram que ângulos menores fornecem menores deslocamentos de comprimento de onda.

Portanto, em uma colisão com ângulos rasantes, a perda de energia do fóton e a energia de recuo do elétron são menores que no caso de ângulos de espalhamento maiores.

Isso é exatamente o que esperaríamos de uma colisão elástica, quer seja entre um fóton e um elétron, quer seja entre duas bolas de bilhar.

Ex. 5

Muitas variedades de lasers emitem luz na forma de pulsos em vez de um feixe contínuo. Um laser de telúrio-safira pode produzir luz a um comprimento de onda de 800 nm em pulsos ultracurtos que duram apenas $4{,}00 \times 10^{-15}$ s (4,00 femtossegundos, ou 4,00 fs). A energia em um único pulso produzido por um laser desse tipo é $2{,}00\ \mu\text{J} = 2{,}00 \times 10^{-6}$ J, e os pulsos se propagam no sentido positivo da direção x. Determine: (a) a frequência da luz; (b) a energia e a incerteza mínima da energia de um único fóton no pulso; (c) a incerteza mínima da frequência da luz no pulso; (d) o comprimento espacial do pulso, em metros e como um múltiplo do componente; (e) o momento linear e a incerteza mínima do momento linear de um único fóton no pulso; e (f) o número aproximado de fótons no pulso.

É importante distinguir entre o pulso de luz como um todo (que contém um número muito grande de fótons) e um fóton individual dentro do pulso.

A duração do pulso de 4,00 fs representa o tempo que o pulso leva para emergir do laser; essa também é a incerteza do tempo para um fóton individual dentro do pulso, pois não sabemos quando esse fóton surge durante o pulso.

De modo semelhante, a incerteza da posição de um fóton é o comprimento do pulso, pois determinado fóton poderia ser encontrado em qualquer lugar dentro do pulso.

(a) A frequência da luz de 800 nm é

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{8{,}00 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 3{,}75 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

(b) a energia de um único fóton de 800 nm é

$$E = hf = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})\,(3{,}75 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz})$$
$$= 2{,}48 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

A incerteza do tempo é igual à duração do pulso, $\Delta t=4{,}00\times10^{-15}$s.

A incerteza mínima na energia é dada pelo princípio de incerteza:

Princípio da incerteza de Heisenberg para a energia e o tempo:

$$\overbrace{\Delta t}^{\text{Incerteza do tempo de um fenômeno}}\underbrace{\Delta E}_{\text{Incerteza da energia do mesmo fenômeno}} \geq \overset{\text{Constante de Planck dividida por }2\pi}{\hbar}/2$$

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(4{,}00 \times 10^{-15}\ \text{s})} = 1{,}32 \times 10^{-20}\ \text{J}$$

Isso é 5,3% da energia do fóton $E=2{,}48\times10^{19}$J, de modo que a energia de determinado fóton é incerta em pelo menos 5,3%.

Pela relação E=hf, a incerteza mínima da frequência é

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1{,}32 \times 10^{-20}\ \mathrm{J}}{6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}} = 1{,}99 \times 10^{13}\ \mathrm{Hz}$$

Isso é 5,3% da frequência $f = 3{,}75\times10^{14}$ Hz que encontramos no item (a).

Logo, esses pulsos ultracurtos não possuem uma frequência definida; a frequência média de muitos desses pulsos será $f = 3{,}75\times10^{14}$ Hz, mas a frequência de qualquer pulso individual pode ser qualquer coisa entre 5,3% maior a 5,3% menor.

(d) O comprimento espacial Δx do pulso é a distância que a frente do pulso atravessa durante o tempo $\Delta t = 4{,}00 \times 10^{-15}$ s necessário para o pulso emergir do laser:

$$\Delta x = c\Delta t = (3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s})(4{,}00 \times 10^{-15}\ \text{s})$$

$$= 1{,}20 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$\Delta x = \frac{1{,}20 \times 10^{-6}\ \text{m}}{8{,}00 \times 10^{-7}\ \text{m/comprimento de onda}} = 1{,}50\ \text{comprimento de onda}$$

Isso justifica o termo *ultracurto*. O pulso tem uma extensão menor que a de dois comprimentos de onda!

O momento linear de um fóton médio no pulso é

$$p_x = \frac{E}{c} = \frac{2{,}48 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 8{,}28 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$$

Mostramos antes que a incerteza espacial é $\Delta x = 1{,}20 \times 10^{-6}$ m.

A incerteza mínima do momento linear é dada pelo princípio de incerteza:

Princípio da incerteza de Heisenberg para a posição e o momento linear:

$$\underbrace{\Delta x}_{\text{Incerteza na coordenada } x}\;\underbrace{\Delta p_x}_{\text{Incerteza no componente de momento correspondente } p_x} \geq \underbrace{\hbar}_{\text{Constante de Planck dividida por } 2\pi}/2$$

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{2(1{,}20 \times 10^{-6}\ \mathrm{m})} = 4{,}40 \times 10^{-29}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Isso é 5,3% do momento linear médio p_x do fóton. Um fóton individual dentro do pulso pode ter um momento linear 5,3% maior ou menor que a média.

(f) Para estimar o número de fótons no pulso, dividimos a energia total do pulso pela energia média do fóton:

$$\frac{2{,}00 \times 10^{-6}\ \mathrm{J/pulso}}{2{,}48 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/fótons}} = 8{,}06 \times 10^{12}\ \text{fótons /pulso}$$

A energia de um fóton individual é incerta, de modo que este é o número *médio* de fótons por pulso.

Os percentuais de incerteza na energia e no momento linear são grandes porque esse pulso de laser é muito curto.

Se o pulso fosse maior, tanto Δt quanto Δx seriam maiores e as incertezas correspondentes na energia e no momento linear do fóton seriam menores.