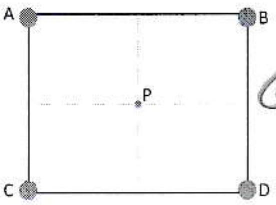
2016-2

Question 6

P1 - 21h

Quatro cargas pontuais estão situadas nos vértices de um quadrado de lado $\ell = a$, e cujos valores são $Q_A = q$, $Q_B = 2q$, $Q_C = q$ e $Q_D = 2q$. Use $k = 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ e considere a origem do sistema cartesiano no vértice C.



Gabarito
Prof. Reinaldo Cavasso

a) (1 pontos) Faça um desenho mostrando o diagrama de forças que atuam no ponto A.

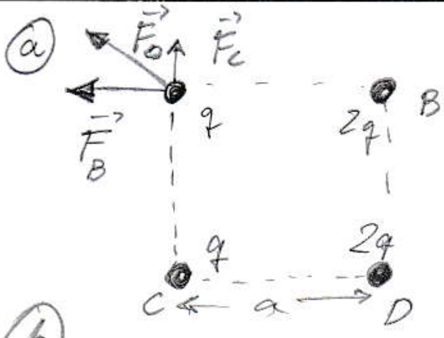
b) (3 pontos) Calcule a força resultante $\vec{F}$ no ponto A, em função dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.

c) (3 pontos) Calcule o potencial elétrico no ponto P. Assuma $V = 0$ no infinito.

d) (3 pontos) Qual o trabalho realizado para trazer uma carga $Q = 10q$ do infinito até o ponto P?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

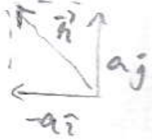
(a)



(b) $\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$

$\vec{F}_B = \dfrac{2kq^2}{a^2}(-\hat{\imath})$; $\vec{F}_C = \dfrac{kq^2}{a^2}\hat{\jmath}$

$\vec{F}_D = \dfrac{2kq^2}{r^3}\vec{r}$, $\vec{r} = -a\hat{\imath} + a\hat{\jmath}$



$r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{2}\,a$

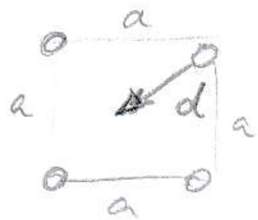
$\vec{F}_D = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{kq^2}{a^2}(-\hat{\imath} + \hat{\jmath})$

Assim, $\boxed{\vec{F} = \dfrac{kq^2}{a^2}\left[\left(-2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\imath} + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\jmath}\right]}$

Continuação do espaço para a questão 6.

(c) O ponto P é equidistante de todas as 4 cargas, assim:

$$V(P) = \frac{k}{d}\sum_{i=1}^{N} Q_i$$



$$(2d)^2 = 2a^2 \longrightarrow d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$V(P) = \frac{2k}{\sqrt{2}a}\cdot 6q = 6\sqrt{2}\,\frac{kq}{a}$$

(d) $W = Q\,V(P)$

$$W = 10q \cdot 6\sqrt{2}\,\frac{kq}{a}$$

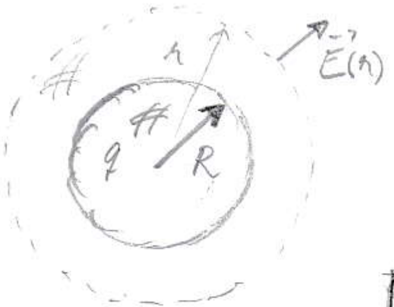
$$\boxed{W = 60\sqrt{2}\,\frac{kq^2}{a}}$$

Question 7

Um gerador de van der Graaff com uma cúpula esférica de raio R é ligado e acumula uma carga q.
a) (3 pontos) Usando a lei de Gauss calcule o módulo do campo elétrico a uma distância $d > R$ do centro da cúpula.
b) (3 pontos) Usando a definição de diferença de potencial elétrico, calcule a diferença de potencial elétrico entre pontos afastados do centro da cúpula a distâncias d e $d + \ell$, com $d > R$.
c) (3 pontos) Sabendo que a rigidez dielétrica do ar é de 30 kV/cm e que o raio do gerador de van der Graaff é de $R = 10\,\text{cm}$, qual a carga máxima que o van der Graaff comporta na sua cúpula imediatamente antes de descarregar. Use $k = 9 \times 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2$
d) (1 pontos) Faça um desenho mostrando as superfícies equipotenciais.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

(a)

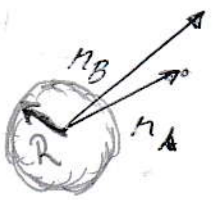


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\,\hat{r}}$$

(b) $V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$



$r_B = d + \ell$; $r_A = d$;

$$V_B - V_A = \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\, dr =$$

$$V_B - V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(-\frac{1}{r} \Big|_{r_B}^{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d+\ell} - \frac{1}{d} \right) = \frac{-q\,\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d(d+\ell)}$$

Continuação do espaço para a questão 7.

(c) Campo imediatamente acima da cúpula

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

$$E_{max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{max}}{R^2} \rightarrow q_{max} = \frac{E_{max}\cdot R^2}{k}$$

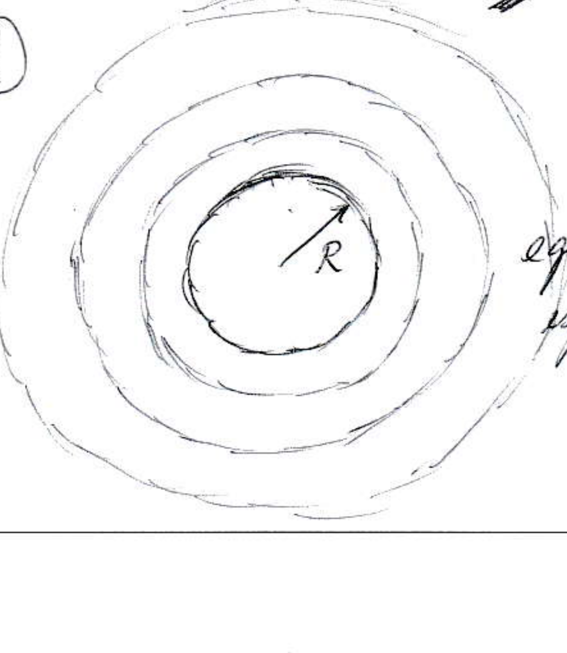
$$q_{max} = \frac{30.000\,V\cdot\cancel{cm}^{-1}\cdot(10\,\cancel{cm})\cdot(10^{-1}\,\cancel{m})}{9\cdot10^{9}\,N\,m^2\cdot C^{-2}}$$

$$q_{max} = \frac{3}{9}\cdot10^{4}\cdot10^{-9}\cdot\frac{\cancel{Nm}}{\cancel{C}}\cdot\frac{C^2}{\cancel{Nm}}$$

$$q_{max} = 0,333\cdot10\cdot10^{-6}\,C$$

$$\boxed{q_{max} = 3,33\,\mu C}$$

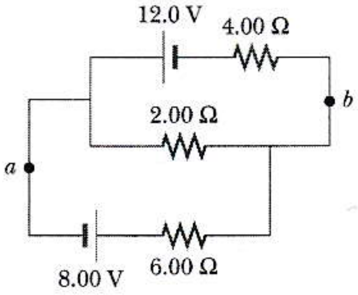
(d)



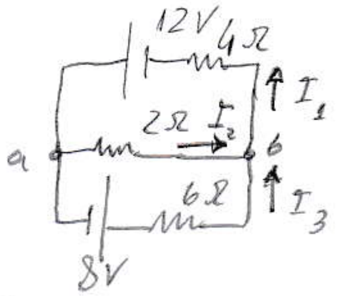
equipotenciais
esferas concêntricas

Question 8

Para o circuito da figura, calcule:
a) (4 pontos) A corrente que passa pelo resistor de 2Ω.
b) (3 pontos) A diferença de potencial entre os pontos a e b.
c) (3 pontos) A potência total dissipada no circuito.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



✱ $I_1 = I_2 + I_3$

▲ $12V - 2\Omega I_2 - 4\Omega \cdot I_1 = 0$

■ $20V - 6\Omega I_3 - 4\Omega I_1 = 0$

Aplicando ✱ em ▲ e ■:

△ $12V - 6\Omega I_2 - 4\Omega I_3 = 0$

$(20V - 4\Omega I_2 - 10\Omega I_3 = 0) \times \frac{3}{2}$

□ $30V - 6\Omega I_2 - 15\Omega I_3 = 0$

△ − □ : $-18V + 11\Omega I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{18}{11} A}$

Voltando a △:

$12V - 6\Omega I_2 - 4 \cdot \frac{18}{11} V = 0$:2.3

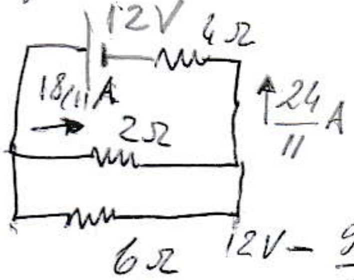
$2V - 1\Omega I_2 - \frac{2 \cdot 6}{11} V = 0$

$\boxed{I_2 = \frac{10}{11} A}$

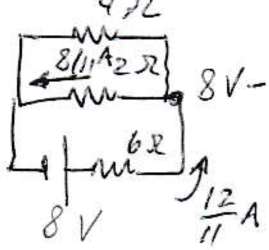
Logo $\boxed{I_1 = \frac{28}{11} A}$

Continuação do espaço para a questão 8.

• Verificando se a solução está correta:



$12V - \frac{96}{11}V = \frac{36}{11}V$



$8V - \frac{72}{11}V = \frac{16}{11}V$

$R_{eq} = 4\Omega + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)^{-1} =$

$= 4\Omega + \frac{12}{8}\Omega =$

$R_{eq} = \frac{44}{8}\Omega = \frac{22}{4}\Omega = \frac{11}{2}\Omega$

$R_{eq} = 6\Omega + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)^{-1}\Omega$

$R_{eq} = 6\Omega + \frac{4}{3}\Omega$

$R_{eq} = \frac{22}{3}\Omega$

$I = \frac{24}{22}A = \frac{12}{11}A$

Logo $I_2 = \overrightarrow{\frac{18}{11}A} \overleftarrow{- \frac{8}{11}A} = \frac{10}{11}A \longrightarrow$ OK!

(b) O ponto a está em 12V $V_a = 12V$

O ponto b está em $12V - 2\Omega I_2$

$V_b = 12V - 2\Omega \cdot \frac{10}{11}A = \frac{132-20}{11} = \frac{112}{11}V$

Logo, $\boxed{\Delta V_{ab} = -2\Omega \cdot I_2 = -\frac{20}{11}V}$

→ Alternativamente

$\Delta V_{ab} = (8V - 6\Omega I_3) = 8V - \frac{6 \cdot 18}{11}V = \frac{(88-108)}{11}$

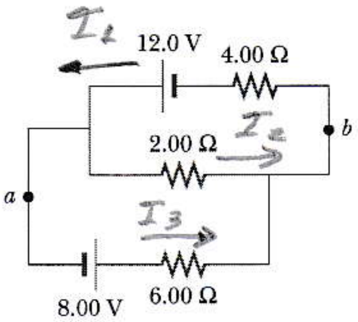
$\Delta V_{ab} = -\frac{20}{11}V$

(c) $P_{tot} = 12V \cdot I_1 + 8V \cdot I_3 = 12 \cdot \frac{28}{11}W + \frac{8 \cdot 18}{11}W$

$P_{tot} = \frac{280 + 56 + 160 - 16}{11}W = \frac{480}{11}W$ Potência Fornecida pelas duas Fontes

Question 8

Para o circuito da figura, calcule:
a) (4 pontos) A corrente que passa pelo resistor de 2Ω.
b) (3 pontos) A diferença de potencial entre os pontos a e b.
c) (3 pontos) A potência total dissipada no circuito.



☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

ⓒ Alternativamente, podemos somar as potências dissipadas nos 3 resistores

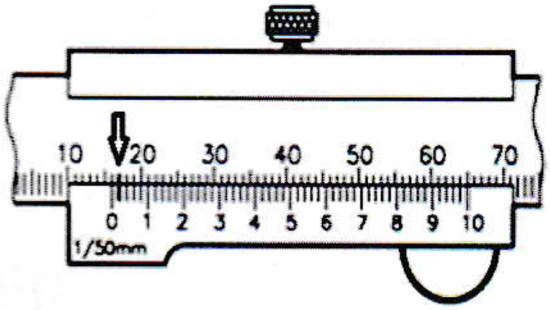
$$\mathcal{P}_{tot} = 4\Omega \cdot I_1^2 + 2\Omega \cdot I_2^2 + 6\Omega \cdot I_3^2 =$$

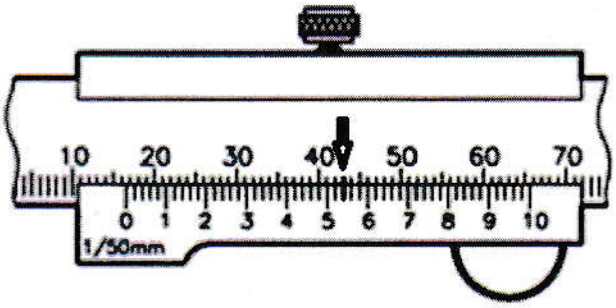
$$= \left(4 \cdot \frac{(28)^2}{11^2} + \frac{2 \cdot (10)^2}{11^2} + \frac{6 \cdot (18)^2}{11^2}\right) W =$$

$$= \frac{1}{121}\left(3136 + 200 + 1944\right) W =$$

$$\mathcal{P}_{tot} = \frac{5280}{121} W = \frac{480}{11} W$$

Question 9 Um grupo de alunos o realizar no experimento 1, na parte referente ao eletroscópio, mediu duas vezes o comprimento da folha de alumínio com um paquímetros como mostram as figuras abaixo. Em seus cálculos consideram que o ângulo θ praticamente não teve erro na medida e era $\theta = 15^o$, mas que a carga era $q = (1,22 \pm 0,02)$pC. Considere $k = 8,9 \times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$.





a) (2 pontos) Qual o valor de cada leitura com seu respectivo erro?
b) (2 pontos) Qual o valor médio do comprimento da folha com sua incerteza (desvio padrão da media)?
c) (2 pontos)Desenhe o diagrama de forças que atuam nas folhas do eletroscópio.
d) (4 pontos) Qual o valor do módulo da força elétrica que eles calcularam com sua respectiva incerteza? (Use propagação de erro)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

(a) leitura 1 $l_1 = (16,02 \pm 0,02)$ mm

$l_2 = (16,54 \pm 0,02)$ mm

(b)

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2}{2} = 16,28 \text{ mm}$$

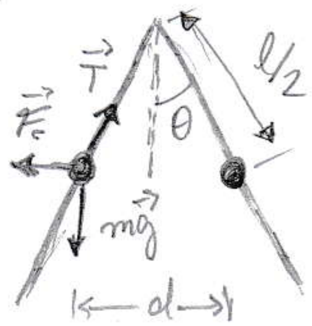
$$\sigma_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1}} \sqrt{(\bar{l} - l_1)^2 + (\bar{l} - l_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(0,26)^2 \cdot 2} = 0,26 \text{ mm}$$

$l = (16,28 \pm 0,26)$ mm $\overset{ou}{=} (16,3 \pm 0,3)$ mm

Continuação do espaço para a questão 9.

(c)



$$\vec{T} = -(m\vec{g} + \vec{F_e})$$

(d) $tg\,\theta = \frac{mg}{F_e} \rightarrow F_e = mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Não é dado m, apenas q ~~e~~ θ e l

$$F_e = \frac{kq^2}{d^2} \qquad \sin\theta = \frac{d}{l}$$

$$d = l\sin\theta$$

$$\boxed{F_e = \frac{k}{\sin^2\theta}\frac{q^2}{l^2}} \qquad \sigma_\theta = 0$$

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2\sigma_q^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^2\sigma_l^2} =$$

$$\sigma_F = 2F\sqrt{\left(\frac{\sigma_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} = 0{,}34\times10^{-10}\,N$$

$$F = \frac{8{,}9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{\sin^2(15^\circ)} \cdot \frac{(1{,}22\times10^{-12}C)^2}{(16{,}28\times10^{-3}m)^2} = 7{,}46\times10^{9-24+6-1}\,N$$

$$F = 7{,}46\times10^{-10}\,N$$

$$\boxed{F = (7{,}5\pm0{,}3)\times10^{-10}\,N}$$