Bases Matemáticas

Lógica e Linguagem Matemática

Resolve ao menos dois itens de cada questão.

Exercício 1. Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações:

i) Para todo $x \in \mathbb{R}, x+1 > 2$.

ii) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.

iii) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ pares temos que $m+n$ é par.

iv) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2+3x+2 \geq 0$

v) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2+3x+2 \geq 0$

vi) $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2+3x+2 \geq 0$

vii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+3x+2 \geq 0$

viii) $\exists x \in \mathbb{Q} | x^3+1=0$

ix) $\exists x \in \mathbb{R} | x^3+1=0$

x) $\exists! x \in \mathbb{Q} | x^3+1=0$

xi) $\exists! x \in \mathbb{R} | x^3+1=0$

Exercício 2. O que as seguintes afirmações significam? Elas são universais ou particulares? Elas são verdadeiras?

i) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} | x < y$

ii) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} | x < y$

iii) $\exists x \in \mathbb{N} | \forall y \in \mathbb{N}, x < y$

iv) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N} | x < y$

Exercício 3. O que as seguintes afirmações significam? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contra–exemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

i) $\forall x \exists y | (2x - y = 0)$

ii) $\exists y | \forall x, (2x - y = 0)$

iii) $\exists y \exists z | (y + z = 100)$

Exercício 4. Escreve a tabela verdade para as seguintes proposições:

i) $A \vee (B \wedge \neg A)$

ii) $A \wedge \neg (A \wedge B)$

iii) $(A \vee B) \wedge (A \wedge C)$

iv) $(\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg B)$

v) $A \wedge \neg (B \wedge \neg C)$

vi) $(A \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B)$

vii) $(A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg D)$

viii) $F \vee (G \implies H)$

ix) $G \wedge (H \implies \neg F)$

x) $(H \implies G) \implies (F \wedge G)$

xi) $(F \vee \neg H) \implies (G \iff \neg F)$

xii) $(G \wedge (F \implies H)) \implies ((H \implies G) \wedge F)$

Exercício 5. Verifique se as seguintes pares são logicamente equivalentes:

i) $P \vee Q$ e $Q \vee P$

ii) $P \wedge Q$ e $Q \wedge P$

iii) $P \vee (Q \vee R)$ e $(P \vee Q) \vee R$

iv) $P \wedge (Q \wedge R)$ e $(P \wedge Q) \wedge R$

v) $P \wedge (Q \vee R)$ e $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

vi) $P \vee (Q \wedge R)$ e $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

vii) $P \vee (P \wedge Q)$ e P

viii) $P \wedge (P \vee Q)$ e P

ix) $(A \implies B) \implies C$ e $A \implies (B \implies C)$

x) $A \implies (B \implies C)$ e $B \implies (A \implies C)$

Exercício 6. Verifique se as seguintes pares são logicamente equivalentes:

i) $C \implies (A \vee B)$ e $(C \implies A) \vee (C \implies B)$

ii) $C \implies (A \wedge B)$ e $(C \implies A) \wedge (C \implies B)$

iii) $(A \vee B) \implies C$ e $(A \implies C) \wedge (B \implies C)$

iv) $(A \wedge B) \implies C$ e $(A \implies C) \vee (B \implies C)$

Exercício 7. Determine quais das seguintes pares são logicamente equivalentes. Justifique sua resposta.

i) $J \wedge \neg K$ e $\neg(K \wedge \neg J)$

ii) $L \vee \neg J$ e $\neg(J \wedge \neg L)$

iii) $J \vee \neg(K \vee L)$ e $(J \vee \neg K) \wedge (J \vee \neg L)$

iv) $K \wedge \neg(L \vee \neg J)$ e $\neg(L \wedge (J \wedge K))$

v) $(L \wedge \neg J) \vee K$ e $(K \vee L) \wedge \neg(J \wedge K)$

vi) $K \vee J) \wedge \neg L$ e $\neg(L \vee (\neg J \wedge \neg K))$

Exercício 8. Negue as seguintes proposições:

i) $3 > 4$ e 2 é par

ii) Não é verdade que (3 é par ou que 5 é ímpar).

iii) 2 é um número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.

iv) Todo elemento do conjunto $\mathscr{A}$ é elemento do conjunto $\mathscr{B}$.

v) (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.

vi) $4 > 2 \vee \exists k(k < 3 \wedge k > 5)$

vii) $X \vee (Y \wedge Z)$

viii) $Y \wedge (\neg Z \wedge \neg X)$

ix) $(X \vee \neg Y) \wedge \neg(Z \wedge \neg X)$

x) $Z \wedge ((X \vee \neg Y) \wedge W)$

Exercício 9. Negue as seguintes proposições:

i) $X \implies (Y \vee Z)$

ii) $(Y \vee Z) \implies X$

iii) $X \implies (Y \wedge \neg Z)$

iv) $X \implies (Y \implies Z)$

v) $(X \implies Y) \implies Z$

vi) $(X \implies Y) \implies (X \vee Z)$

vii) $\neg(X \implies Z) \implies (Y \implies (X \wedge Z))$

Exercício 10. Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.

i) $x > 2$ e $x < 4$

ii) $x > 2$ ou $x < 3$

iii) $x > 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$)

iv) Não é verdade que ($x > 2$ e $x < 4$)

Exercício 11. Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes frases:

i) não $p \implies q$.

ii) Se x é par, então $2x+1$ é ímpar.

iii) Se minha mãe é um trator, então eu sou uma moto-serra.

iv) Se x é ímpar, então $2x+1$ é ímpar.

Exercício 12. Atribua um valor verdade as seguintes proposições:

i) Se 2 é par, então 3 é ímpar.

ii) Se 2 não é par, então 3 é ímpar.

iii) Se 3 não é par, então 3 é ímpar.

iv) Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto–serra.

Exercício 13. Para os pares de proposições p e q diga se p é condição necessária e\ou suficiente para q. Em todos os exemplos considere x um número natural.

i) $p =$ "x é maior que 2" $q =$ "x é maior que 3".

ii) $p =$ "x é maior que 2" $q =$ "x é maior igual a 2".

iii) $p =$ "x é maior que 0 e x é menor que 2" $q =$ "x é menor que 2".

iv) $p =$ "x é maior que 0 e x é menor que 2" $q =$ "$x = 1$".

Exercício 14. Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica. Depois, para cada uma, escreva a negação simbolicamente e "em português".

i) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.

ii) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar

iii) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

iv) Para todo ε, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

v) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$.

vi) Se a e b são dois números primos, então ab é primo.

vii) Para todos números a e b reais, há um número c que é menor que b e maior que a.

Exercício 15. Reescreva cada afirmação a seguir em língua natural, sem usar notação simbólica.

i) $\forall n \in \mathbb{R}, n < n^2$.

ii) $\exists! n \in \mathbb{R}, n = n^2$.

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \mid k < n$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \mid ab = c$

Exercício 16. Para todas as afirmações a seguir n denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas:

i) $n^2 < 12$.

ii) $3n + 1 < 25$ e $n + 1 > 4$.

iii) $n < 5$ ou $n > 3$

iv) n é primo e não é verdade que $n > 17$

v) $(n-2)(n-3)(n-24)(n-100) = 0$

Exercício 17. Seja $\mathscr{A} = \{1,2,3,4\}$. Determine o valor verdade para cada uma das seguintes proposições:

i) $\exists x \in \mathscr{A} \mid x+4 = 9$.

ii) $\exists x \in \mathscr{A} \mid x < 7$.

iii) $\forall x \in \mathscr{A}, x+3 < 9$.

iv) $\forall x \in \mathscr{A}, x+3 > 9$.

Exercício 18. Determine:

i) A contrapositiva da contrapositiva de p implica q.

ii) A contrapositiva da recíproca de p implica q.

iii) A contrapositiva da inversa de p implica q.

iv) A contrapositiva de p implica não q.

v) A recíproca de p implica não q.

vi) Negue a proposição $p \iff q$.

Exercício 19. Seja a proposição $p(x,y) =$"$x+4 > y$" com $x,y \in \mathscr{D} = 1,2,3,4,5,6$. Para as seguintes proposições, reescreva-as em português e atribua um valor verdade.

i) $\forall x \in \mathscr{D}, \exists y \in \mathscr{D} \mid p(x,y)$.

ii) $\exists y \in \mathscr{D} \mid \forall x \in \mathscr{D}, p(x,y)$.

iii) $\forall x \in \mathscr{D}, \forall y \in \mathscr{D}, p(x,y)$.

iv) $\exists x \in \mathscr{D}, \exists y \in \mathscr{D} \mid p(x,y)$

Exercício 20. Demonstre as proposições

i) "Para todos x, y números inteiros, se x e y são pares então $x - y$ é par".

ii) "O produto de dois ímpares inteiros é ímpar".

iii) "A soma de um par inteiro e um ímpar inteiro é ímpar"

iv) "O produto de um par inteiro e um ímpar inteiro é par".

v) "Para inteiro qualquer z, se 4 não dividi z^2, então z não é par".

vi) "Para todos inteiros w e x, se xw é par, então w é par ou x é par"

vii) $\forall y \in \mathbb{Z}, y^6$ é ímpar $\implies y$ é ímpar

viii) $\forall z \in \mathbb{Z}, z^5$ é par $\implies z$ é par

ix) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^3 + x^4$ é ímpar $\implies x$ é ímpar

x) $\forall t \in \mathbb{R}, t^2$ irracional $\implies t$ irracional