Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Nome:____RA:____________________

Universidade Federal do ABC

FUV — 2016.3 – Prof. Maurício Richartz – Prova 2 — Versão A - Noturno

Instruções:

- As provas são individuais e sem consulta a nenhum material. Justifique suas respostas.
- Escreva seu nome, à caneta, em todas as folhas (inclusive no rascunho, caso o tenha solicitado).
- Não é permitido o uso de calculadoras nem celulares.
- Em caso de fraude ou plágio os alunos envolvidos serão reprovados e um processo disciplinar será aberto.

1. (2,0) Calcule:

   a) $\frac{d}{dt}\int_1^t \operatorname{sen}(\ln(x))\,dx$

   b) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^3} e^{\operatorname{sen}(t^2)}dt$

2. (3,0) Resolva quatro das seis integrais abaixo:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^4 dx$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

   e) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

3. (2,5) Considere as seguintes regiões no plano: (I) região delimitada pelas curvas $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$; (II) região delimitada pelas curvas $y = |2x|$ e $y = -x^2+3$. Então,

   a) faça um esboço de (I) e escreva uma integral que sirva para calcular a sua área;

   b) faça um esboço de (II) e escreva uma integral que sirva para calcular a sua área;

   c) escolha um dos itens (a) ou (b) acima para calcular explicitamente a integral e determinar a área correspondente.

4. (2,5) Considere o sólido (I), formado pela rotação da elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ em torno do eixo y, e o sólido (II), formado pela rotação em torno do eixo x da região delimitada no primeiro quadrante por $x = 0$, $y = 0$ e $y = \cos x$. Então,

   a) faça um esboço de (I) e escreva uma integral que sirva para calcular o seu volume;

   b) faça um esboço de (II) e escreva uma integral que sirva para calcular o seu volume;

   c) escolha um dos itens (a) ou (b) acima para calcular explicitamente a integral e determinar a volume correspondente.

PROVA 2 - VERSÃO A

1)

a) Pelo TFC, $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$; logo, $\frac{d}{dt}\int_1^t \text{sen}(\ln(x))\,dx = \boxed{\text{sen}(\ln(t))}$

b) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^3} e^{\text{sen}(t^2)}dt = \frac{d}{dx}\int_x^0 e^{\text{sen}(t^2)}dt + \frac{d}{dx}\int_0^{x^3} e^{\text{sen}(t^2)}dt = -\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\text{sen}(t^2)}dt + \frac{d}{dz}\int_0^z e^{\text{sen}(t^2)}dt \cdot \frac{dz}{dx}$,

onde $z = x^3$. Logo, usando o TFC, temos:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^3} e^{\text{sen}(t^2)}dt = -e^{\text{sen}(x^2)} + e^{\text{sen}(z^2)} \cdot 3x^2 = \boxed{-e^{\text{sen}(x^2)} + 3e^{\text{sen}(x^6)}x^2}$$

2)

a) $\cos^2 x = ?$; $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} \Rightarrow \int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\text{sen}(2x)}{4}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$

b) $\int_0^1 (2x+1)^4 dx = ?$; $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \int (2x+1)^4 dx = \int u^4 \frac{du}{2} = \frac{u^5}{10} = \frac{(2x+1)^5}{10}$

$\int_0^1 (2x+1)^4 dx = \frac{1}{10}\cdot(2x+1)^5\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\left(3^5 - 1^5\right) = \frac{242}{10} = \boxed{\frac{121}{5}}$

c) $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx = ?$ $u = x+1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int (u-1)u^{1/2}du = \int\left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}$

$x = u-1$

$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \Rightarrow \int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6-10}{15} = \boxed{\frac{-4}{15}}$

d)

Frações parciais: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4.1.2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

Logo, $\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B.(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B).x + (-2A-B)}{x^2-3x+2} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ -2A-B = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow A = -4, B = 5$

$-A = 4$

$\Rightarrow \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx = -4\int \frac{1}{x-1}dx + 5\int \frac{1}{x-2}dx = \boxed{-4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C}$

e) $I = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = ?$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ $\Rightarrow I = -x^2\cos x - \int(-\cos x)2x\,dx = -x^2\cos x + 2\underbrace{\int x\cos x\,dx}$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$

$\Rightarrow I = -x^2\cos x + 2(x\operatorname{sen} x + \cos x) = \boxed{-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C}$

f) $I = \int x e^x \, dx = ?$

$u = x \Rightarrow du = dx$ $\Rightarrow I = x.e^x - \int e^x\,dx = \boxed{xe^x - e^x + C}$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

g) $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$; seja $x = 3\operatorname{sen}\theta$, $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ $\Rightarrow I = \int \frac{27\operatorname{sen}^3\theta}{\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}}\,3\cos\theta\,d\theta = \int \frac{27.\operatorname{sen}^3\theta.3\cancel{\cos\theta}}{3.\cancel{\cos\theta}}\,d\theta$

$= \int 27.\operatorname{sen}^2\theta.\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 27\int(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$; $\cos\theta = u \Rightarrow du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$\Rightarrow I = 27\int(1-u^2)(-du) = -27\left(u - \frac{u^3}{3}\right)$; mas $u = \cos\theta \Rightarrow I = -27\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right) + C$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \Rightarrow \boxed{I = -27\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + 9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{3/2} + C}$

OU

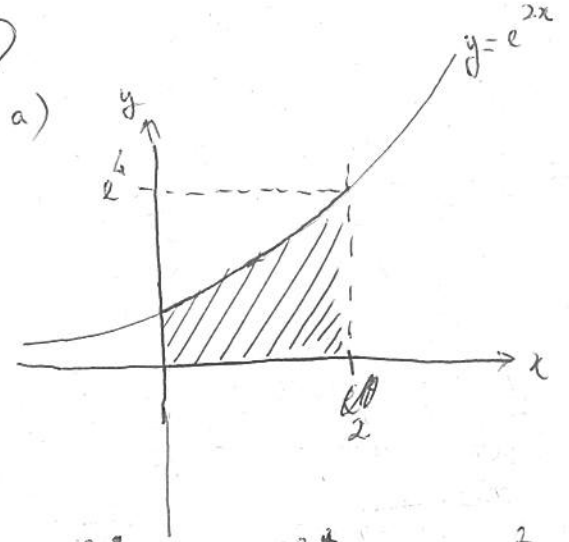
$9 - x^2 = u \Rightarrow I = \int \frac{x^2.x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{(9-u)}{\sqrt{u}}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int\left(9u^{-1/2} - u^{1/2}\right)du = -\frac{9}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}$

$du = -2x\,dx$

$x^2 = 9 - u$ $\Rightarrow \boxed{I = -9\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + C}$

3)

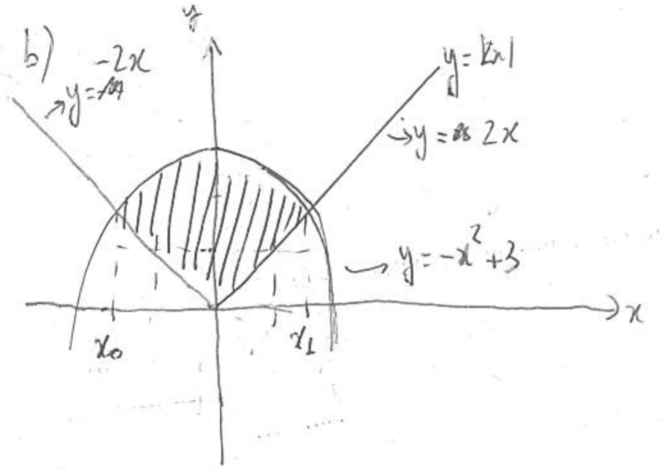
a)



$$A = \int_0^2 (e^{2x} - 0)\,dx = \int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$$

b)



x_0: $\begin{cases} y = -x^2+3 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow -x^2+3 = -2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 16$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_0 = \cancel{\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}}$ $\quad x_0 = -1$

x_1: $\begin{cases} y = -x^2+3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4\cdot 1(-3) = 16$

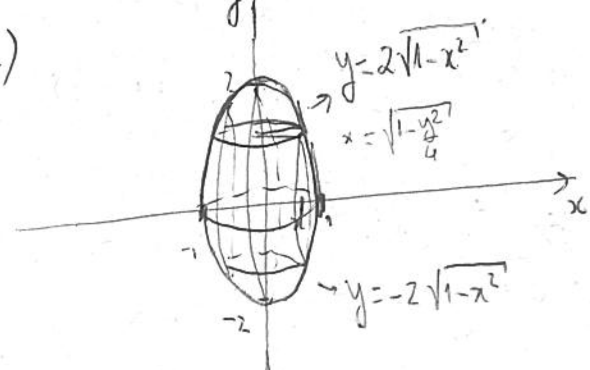
$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{0} (-x^2+3+x)\,dx + \int_0^1 (-x^2+3-x)\,dx$$

$$2\cdot\left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 6\right) = \left[\frac{8}{3}\right]$$

Por simetria, $I = 2\cdot\displaystyle\int_0^{2} (-x^2 - x + 3)\,dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_0^{2}$

4) a)



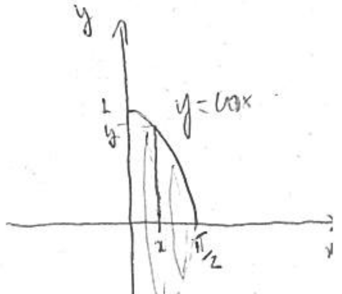
$$dV = \pi\cdot x^2\,dy = \pi\cdot\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$\cancel{dV = \pi\cdot\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\cdot 4\cdot(1-x^2)\,dx}$

$V = \displaystyle\int_{-2}^{2} \pi\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)dy = \cancel{4\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 4\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 4\pi\left(-1 + \frac{1}{3}\right)}$

$\cancel{V = 4\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = \boxed{\frac{16\pi}{3}}}$ $\quad V = \pi\left(y - \dfrac{y^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{2} = \boxed{\dfrac{8\pi}{3}}$

b)



$$dV = \pi\cdot y^2\,dx = \pi\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi\cos^2 x\,dx \underset{\text{item 2a}}{=} \pi\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$