Funções de Várias Variáveis

Segunda Avaliação - 10 de julho de 2013

Nome:

---

1) Determine as seguintes integrais.

a) $\displaystyle\iiint_{B_1} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\Omega$ sendo $B_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\right\}$;

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^2 \left(x_2 + 2x_1 e^{x_2}\right) dx_1 dx_2$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x_2} \int_{x_1}^1 6x_1x_2x_3 dx_3 dx_2 dx_1$;

d) $\displaystyle\iint_R x_1 e^{x_1^2} d\Omega$, $R = [0,1] \times [0,1]$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x_1^2}^1 x_1^3 sen\left(x_2^3\right) dx_2 dx_1$;

f) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx_2 dx_1$.

2) Seja a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2$.

a) Determine $f'\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
b) Determine $\mathbf{g} = \mathbf{grad}\left(f\right)$.
c) O campo escalar f tem ponto crítico? Se sim, determine-o. Justifique sua resosta.
d) Determine $\mathbf{g}'\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)$.
e) Determine $D^2_{\mathbf{x}} f$.
f) Determine uma matriz Hessiana $\mathbf{H}\left(f\right)$.
g) f tem extremo(s) local(is)? Se sim, indique-o(s). Justifique sua resposta.

3) Determine
a) $\displaystyle\min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^2} \{2x_3\left(x_1 + x_2\right) + 10x_1x_2\}$ sujeito a $x_1x_2x_3 = 10$;

b) Três números positivos x_1, x_2 e x_3 cuja soma é 100 e o produto $x_1 x_2 x_3$ seja máximo.

Formulário: Seja $\mathbf{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$;

$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \frac{1}{2!}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{0}} \dfrac{\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|^2} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$ é linear e $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}$ é bilinear;

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$;

$D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \left. D_{\mathbf{y}}\mathbf{f} \right|_{\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})} D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$;

$\int\limits_{R} f(\mathbf{x})\, d\Omega = \int\limits_{T^{-1}(R)} (f \circ T)(\mathbf{u})(\mathbf{x})\, |D_{\mathbf{u}}T|\, d\omega$ sendo $d\Omega = dx_1 ... dx_n$ e $d\omega = du_1 ... du_n$