

## BASES MATEMÁTICAS

### FUNÇÕES

Resolve ao menos três exercícios de cada questão.

**Exercício 1.** Expanda:

i)  $(3a + 2b)^2$

ii)  $(3a + 2b)^3$

iii)  $(3a - 2b)^3$

iv)  $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

v)  $(a + b + c)^2$

**Exercício 2.** Escreva cada expressão usando apenas um radical e simplifique:

i)  $\sqrt{\sqrt{x}}$

ii)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

iii)  $\sqrt{\sqrt[3]{5x^2}}$

iv)  $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$

v)  $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{xy}}$

vi)  $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{y}\sqrt{y}}$

vii)  $\sqrt[5]{81x^2y^6\sqrt{26a^2b^{-1}}}$

**Exercício 3.** Simplifique as expressões:

i)  $\frac{a^{3/5}a^{2/7}}{a^{1/3}}$

ii)  $\frac{a^{2/5}b^{3/4}(3a)^2}{a^{1/3}b^{3/5}}$

iii)  $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^4)^{-1/2}}$

iv)  $\frac{(a^2b^4)^{1/2}}{(81a^6b^9)^{1/3}}$

v)  $\frac{\frac{4x^3y^2}{(x-2)^4}}{\frac{6x^2y}{(x-2)^{3/2}}}$

vi)  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$

vii)  $(p^{-1} + q^{-1})^{-1}$

**Exercício 4.** Dados os conjuntos  $A = \{a, e, i, o, u\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , diga qual das relações abaixo definem uma função  $f : A \rightarrow B$ . Para elas que são funções defina o seu domínio, imagem e diga se são injetoras, sobrejetoras e/ou bijetoras.

i)  $R = \{(e, 1), (o, 2)\}$

ii)  $R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 4), (u, 2)\}$

iii)  $R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$

iv)  $R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$

v)  $R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$

vi)  $R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$

vii)  $R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$

**Exercício 5.** Determine se a expressão dada seja uma função com domínio  $X = \{1, 2, 3\}$  e contradomínio  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Se for uma função dê sua imagem, se não, explica porque não é uma função.

- i)  $f$  definida por  $f(x) = \frac{4}{3-x}$
- ii)  $g$  definida por  $g(x) = x!$ , em que  $x! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (x-1) \times x$
- iii)  $h$  definida por  $h(x) = \frac{6}{4-x}$
- iv)  $j = \{(2, 5), (3, 4), (1, 5)\}$
- v)  $k = \{(1, 3), (3, 5), (5, 2)\}$
- vi)  $m = \{(1, 4), (2, 6), (3, 3), (2, 5)\}$

**Exercício 6.** Determine o domínio máximo  $D$  das seguintes funções (observação: a notação  $f : D \subset X \rightarrow Y$  indica uma função  $f : D \rightarrow Y$ , em que  $D \subset X$ ):

- i)  $f : D \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$
- ii)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$
- iii)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- iv)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$
- v)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}-x}$
- vi)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|1+x|-|x^2|}$
- vii)  $f : D \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \sqrt{|1+n|-|n^2|}$
- viii)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{|x|-3}}$
- ix)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(1+x^2)$
- x)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(1-x^2)$
- xi)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log \frac{1+x}{x}$

xii)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log \cos x$

xiii)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan(1 - x)$

xiv)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\cos x}$

xv)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^{-1} \frac{2x}{1+x}$

xvi)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3|\cos|x|| - 1|$

**Exercício 7.** Para cada uma das seguintes funções, prove, ou dê contra-exemplos, que elas sejam injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nem um ou nem outro.

i) Se  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $f : A \rightarrow A$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

ii)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $g : A \rightarrow A$  dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \neq 7 \\ 7, & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

iii)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1$

iv)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n - |n|$

v)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$

vi)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$

vii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^5 - 5x^3$

viii)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^5 + 5x^3$

ix)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x^4 - 4x^2$

x)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

**Exercício 8.** Para cada uma das seguintes funções, prove, ou dê contra-exemplos, que elas sejam injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nem um ou nem outro.

- i)  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$
- ii)  $p : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = \frac{1}{2^x}$
- iii)  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j(x) = \frac{x}{x^2+1}$
- iv)  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
- v)  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, m(x) = \frac{x|x|}{x^2+1}$
- vi)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
- vii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, x)$
- viii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, |x|)$
- ix)  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|$
- x)  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x, y^3)$
- xi)  $f : (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$
- xii)  $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$
- xiii)  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = x \sin x$

**Exercício 9.** Para cada uma das seguintes funções, calcule  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}(\{1\})$ ,  $f^{-1}(\{2\})$ .

- i)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1$
- ii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - |(x+2)^2 - 1|$
- iii)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
- iv)  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|$

**Exercício 10.** Para as funções abaixo encontre  $f(x+2)$ ,  $f(-x)$ ,  $f(x+h)$  e  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ , sendo  $h \neq 0$ :

- i)  $x$
- ii)  $3x+4$
- iii)  $5x^2+1$
- iv)  $x^2-x$
- v)  $x^3+x^2$
- vi)  $x^2$
- vii)  $e^x$
- viii)  $\ln x$
- ix)  $\cos x$
- x)  $\csc^{-1} x$

**Exercício 11.** Quais das seguintes funções tem inversa? Dê uma fórmula de inversa para aquelas funções que tem. Explique que falta naquelas funções que não tem inversa.

- i)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , em que  $f(x) = 2x$
- ii)  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , em que  $g(x) = \sqrt{x^2}$
- iii)  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , em que  $h(x) = \sqrt{x^2}$
- iv)  $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , em que  $j(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ 1-2x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$
- v)  $k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , em que  $k(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$

**Exercício 12.** Sejam as funções  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $g(x) = 4x - x^2$  e  $h(x) = \cos x$ . Encontre as seguintes imagens e pré-imagens:

- i)  $g([-1, 1])$
- ii)  $g([-2, 5])$
- iii)  $g([-3, 0] \cup (3, 6))$
- iv)  $g^{-1}([-1, 1])$
- v)  $g^{-1}([-2, 5])$
- vi)  $g^{-1}(\{2, 4, 6, 8\})$
- vii)  $h([0, \frac{\pi}{2}])$
- viii)  $h(\mathbb{R})$
- ix)  $h(\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$
- x)  $h^{-1}(\mathbb{R})$
- xi)  $h^{-1}([2, 5])$
- xii)  $h^{-1}(\{-1\})$

**Exercício 13.** Para cada par de funções  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  abaixo, determine os domínios máximo de definição de  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $(f+g)(x)$ ,  $(fg)(x)$ ,  $\frac{f}{g}(x)$ ,  $(f \circ g)(x)$ ,  $(f \circ f)(x)$ ,  $(g \circ g)(x)$  e  $(g \circ f)(x)$ , e finalmente, as expressões para  $(f \circ g)(x)$ ,  $(f \circ g)(x)$ ,  $(f \circ f)(x)$ ,  $(g \circ g)(x)$  e  $(g \circ f)(x)$ :

- i)  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = \sqrt{x-1}$
- ii)  $f(x) = -\frac{1}{x}$  e  $g(x) = \sqrt{2-x}$
- iii)  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$
- iv)  $f(x) = \sqrt{x+2}$  e  $g(x) = |x|$
- v)  $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$  e  $g(x) = x^2$
- vi)  $f(x) = \frac{x}{x(x-2)}$  e  $g(x) = \sqrt{x}$

vii)  $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$  e  $g(x) = 2^{-x}$

viii)  $f(x) = \log(x^2)$  e  $g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

ix)  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \sqrt{x}$

x)  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = |x|$

xi)  $f(x) = \tan x$  e  $g(x) = \cos^{-1} x$

**Exercício 14.** Para as seguintes funções  $h(x)$ , decompõe-a como compostas de funções mais simples

i)  $h(x) = \sin x^2$

ii)  $h(x) = \sin(x^2 + x)$

iii)  $h(x) = \csc(\cos x)$

iv)  $h(x) = \sin \frac{\cos x}{x}$

v)  $h(x) = \sec((x+1)^2(x+2))$

vi)  $h(x) = \sin((\sin^7(x^7 + 1))^7)$

vii)  $h(x) = \tan(x^2 + \sin(x^2 + \cos^2 x))$

viii)  $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

ix)  $h(x) = \sin(\cos \frac{ax+b}{cx+d})$

x)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$

xi)  $h(x) = x^{x^x}$

xii)  $h(x) = e^{2x}$

xiii)  $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$

xiv)  $h(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$

xv)  $h(x) = 2e^{x+1}$



xvi)  $h(x) = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

**Exercício 15.** Mostre que valem as seguintes propriedades:

- i)  $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$
- ii)  $\csc^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x}$
- iii)  $\cot^{-1} x = \tan^{-1} \frac{1}{x}$ , para todo  $x > 0$
- iv)  $\cot^{-1} x = \pi + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ , para todo  $x < 0$
- v)  $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$
- vi)  $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$
- vii)  $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$
- viii)  $\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

**Exercício 16.** Use as propriedades do logaritmo para expandir as expressões abaixo o máximo possível:

- i)  $\log_9(9x)$
- ii)  $\log_9 \frac{9}{x}$
- iii)  $\log_4 \frac{64}{\sqrt{x+1}}$
- iv)  $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{25}}$
- v)  $\log \frac{1000x^4 \sqrt[3]{5-x}}{3(x+4)^2}$

**Exercício 17.** Use as propriedades do logaritmo para condensar as expressões abaixo o máximo possível:

i)  $\frac{1}{3}(\log_4 x - \log_4 y)$

ii)  $\frac{4}{3}(\log_4 x - 2\log_4 y)$

iii)  $4\log x + 7\log x + \log z$

iv)  $3\log x - \frac{1}{2}\log z$

v)  $\frac{2}{3}\log(\log_4 x - \log_4 y \log) + 2\log_4(x + 3)$

**Exercício 18.** Resolva as seguintes equações:

i)  $10^x = 15$

ii)  $10^{x-3} = 100$

iii)  $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$

iv)  $5^{2x+3} = 3^{x-1}$

v)  $\log_5(x - 7) = 2$

vi)  $\log_3(x - 4) = -3$

vii)  $\log_6(x + 5) + \log_6 x = 2$

viii)  $\log_2 \sqrt{x+3} = 1$

ix)  $\log_2(x - 3) + \log_2 x - \log_2(x + 2) = 2$