Universidade Federal do ABC
1 Avaliação de bases Matemáticas - 03/07/2015
Prof.ª Gisele Ducati

Nome: ____

Questão 1. (2 pts) Resolva os itens abaixo:

(a) Encontre o conjunto solução da inequação $|\dfrac{x+1}{x}| < 1$.

(b) Considere a proposição "$\exists y \,|\, \forall x, x < y$". Defina o valor verdade e exiba um exemplo ou contra-exemplo. A seguir, determine a negação da proposição dada.

Questão 2. (2 pts) Mostre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Questão 3. (2 pts) Utilize o PIF para mostrar que, $\forall n \geq 2$,

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} .$$

Questão 4. (2 pts) Utilize os axiomas de corpo para mostrar que

(a) O oposto é único;
(b) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$.

Questão 5. (2 pts) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

(a) Determine o domínio e a image da função f.
(b) Determine se f é bijetora e, caso seja, exiba f^{-1}.

Devolva esta folha junto com a resolução da prova.

1º AVALIAÇÃO DE BM . GABARITO

① (a) $\left|\frac{x+1}{x}\right| < 1 \Rightarrow |x+1| < |x|$

- $x > 0$: $x+1 < x \rightarrow 1 < 0$ $\emptyset$
- $x \leq -1$: $-(x+1) < -x \Rightarrow x+1 > x \rightarrow 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 < x < 0$: $x+1 < -x \Rightarrow 2x+1 < 0 \Rightarrow x < -1/2$ $\therefore x \in [-1, -1/2$

$\therefore S = (-\infty, -1/2]$

(b) $\exists y \mid \forall x, x < y$ é FALSA

CONTRA EXEMPLO: $y = 10$, $x = 11$ $11 > 10$!

$\neg(\exists y \mid \forall x, x < y) = \forall y, \exists x \mid x < y.$

② $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Dem: Vamos demonstrar por absurdo. Suponha que $\sqrt[3]{2}$ é racional, isto é, $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\frac{p}{q}$ irredutível.

Então, $p^3 = 2q^3$. Logo, p^3 é par. Se p^3 é par então p é par (para demonstrar isso, supõe que p é ímpar. Então, $p = 2k+1$, logo $p^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$
$= 2[4k^3 + 6k^2 + 3k] + 1 = 2m+1$ $\therefore$ p^3 é ímpar), demonstrado por contraposição. Se p é par então $p = 2k$ logo $p^3 = 8k^3$ e, temos, $8k^3 = 2q^3 \Rightarrow$

$q^3 = 4k^3$ ∴ q par o que é absurdo pois p/q é irredutível. Logo, $\sqrt[3]{2}$ é irracional

(2) $$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} < \frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

BASE: $P(2)$ $\quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ✓

HIP. DE INDUÇÃO: $P(n)$ $\quad \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} < \frac{n-1}{n}$

$$P(n+1): \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j^2} \overset{?}{<} \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2(n-1)+1}{n(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n^2-1)(n+1)+1}{n(n+1)^2} = \frac{n^3+n^2-n-\cancel{1}+\cancel{1}}{n(n+1)^2} < \frac{n^3+n^2}{n(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

(4) (a) Vamos mostrar que o oposto é único (por absurdo).
Supõe que existam $-a$ e $-a'$ tais que

$a+(-a)=0$ $\quad$ então $\quad -a = -a+0 = -a + (a+(-a')) =$

$a+(-a')=0$ $\quad\quad = (-a+a) - a' = 0 - a' = -a'$

∴ oposto é único

(b) $\forall a \in \mathbb{R},\ a.0 = 0$

$a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$. Dos axiomas, sabemos que existe o oposto de $a.0$. Então, somando o oposto de ambos os lados temos

$$a.0 + (-a.0) = a.0 + a.0 + (-a.0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = a.0 + 0 = a.0$$

<u>ou</u>

$$a = a.1 = a.(1+0) = a.1 + a.0 = a + a.0$$

Somando $-a$ dos dois lados temos

$$-a + a = -a + a + a.0 \Rightarrow 0 = 0 + a.0 \Rightarrow 0 = a.0$$

<u>OBS</u> ACEITEI A RESPOSTA: f NÃO É SOBREJETORA POIS $1 \in \mathbb{R}$ MAS $1 \notin \operatorname{Im} f$!

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

(b) f é injetora pois se $f(a) = f(b)$, isto é,

$$\frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1} \Rightarrow a(b-1) = b(a-1) \Rightarrow ab - a = ab - b$$
$$\Rightarrow a = b.$$

3

Para verificar se f é sobre, tomamos $c \in \operatorname{Im} f$. Então

$c = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow cx - c = x \Rightarrow x = \dfrac{c}{c+1}$ logo f é sobrejetora

e $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x+1}$.