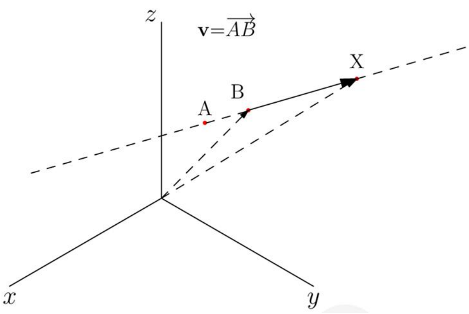
Retas e planos

Equações da reta



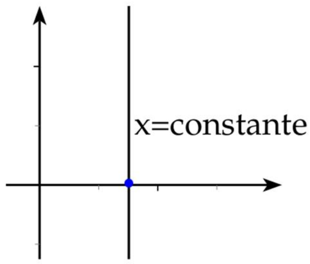
$X : (x, y, z)$
$A : (a, b, c)$
$\vec{v} : (v_1, v_2, v_3)$

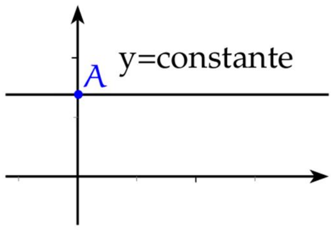
Equação vetorial:

$r: X = A + \overrightarrow{AX}$

$r: X = A + t\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\boldsymbol{r: X = A + \vec{v}t}}$

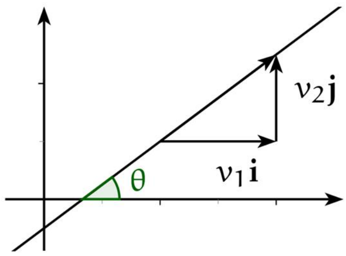




Equações paramétricas:

$$\boxed{\boldsymbol{r : \begin{cases} x = a + v_1 t \\ y = b + v_2 t \\ z = c + v_3 t \end{cases}}}$$

Equações na forma simétrica:

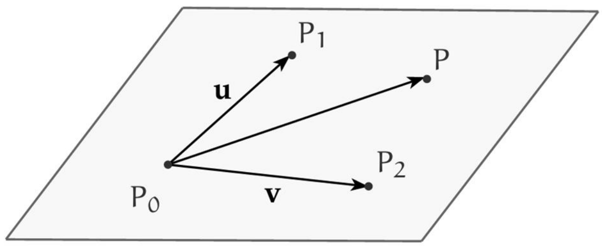


*Isolando **t** das equações paramétricas e igualando-os*

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2} = \frac{z - c}{v_3}}}$$

Deixar sempre as variáveis sem múltiplo

Equações do plano



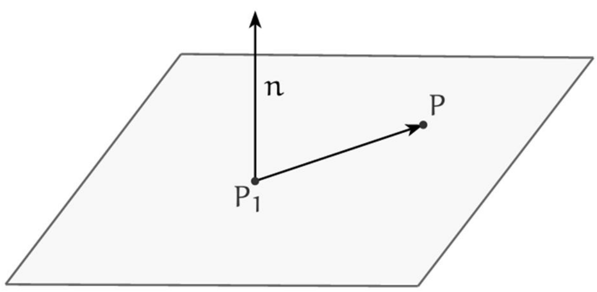
$P \ : (x, y, z)$ $\quad\quad$ $\vec{u}: (u_1, u_2, u_3)$
$P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ $\quad\quad$ $\vec{v}: (v_1, v_2, v_3)$
$\vec{n}: (a, b, c)$

Equação vetorial:

$\boxed{\boldsymbol{\pi: P = P_0 + \vec{u}s + \vec{v}t}}$

Equações paramétricas:

$$\boxed{\boldsymbol{r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 s + v_1 t \\ y = y_0 + u_2 s + v_2 t \\ z = z_0 + u_3 s + v_3 t \end{cases}}}$$



Equação geral:

$\boldsymbol{\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{n}} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

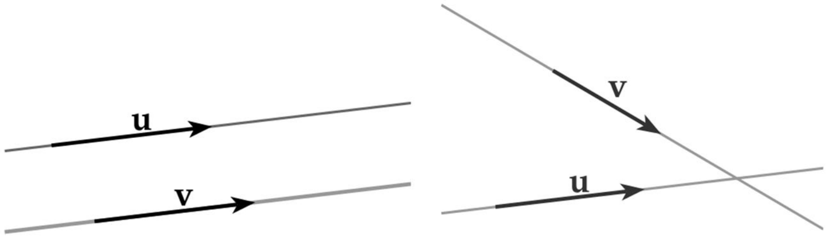
$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$

$\boxed{\boldsymbol{\pi: ax + by + cz = d}}$

Posições relativas entre retas

$r = A + \vec{u}t$

$s = B + \vec{v}t$



No plano:

Coincidentes (mesma reta) $\Rightarrow$ *possuem pontos em comum* $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{e.g.} \quad \boldsymbol{r(t) = B}}$

Paralelas $\Rightarrow$ *vetores diretores são múltiplos* $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}}$

Concorrentes (interceptam-se num único ponto) $\Rightarrow$ *vetores diretores não são paralelos*

No espaço:

Reversas (mesma reta) $\Rightarrow$ *não coplanares* $\Rightarrow$ $\boxed{\left|(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| \neq \mathbf{0}}$

Coincidentes (mesma reta) $\Rightarrow$ *possuem pontos em comum* $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{e.g.} \quad \boldsymbol{r(t) = B}}$

Paralelas $\Rightarrow$ *vetores diretores são múltiplos* $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}}$

Concorrentes (interceptam-se num único ponto) $\Rightarrow$ *vetores diretores não são paralelos*

Posições relativas entre retas e planos

$r = A + \vec{u}t$

$\vec{n}$: *reta normal ao plano*

$P = (p_1, p_2, p_3)$

$P' = (p_1', p_2', p_3')$

Paralelas $\Rightarrow$ $r \cap \pi = \{\emptyset\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}}$

Transversal $\Rightarrow$ $r \cap \pi = \{P\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \neq \mathbf{0}}$ *e* $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{n}} \neq \mathbf{0}}$

Contida $\Rightarrow$ $r \cap \pi = \{P, P', \ldots\}$ $\Rightarrow$ *a reta* $\boldsymbol{r}$ *está contida em* $\boldsymbol{\pi}$

Posições relativas entre planos

Paralelos distintos $\Rightarrow$ $\pi_1 \cap \pi_2 = \{\emptyset\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \mathbf{0}}$

Transversal $\Rightarrow$ $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \neq \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}}$

Coincidentes $\Rightarrow$ *são os mesmos planos* $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} = \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}}$

Ângulo entre duas retas

$r = A + \vec{u}t$

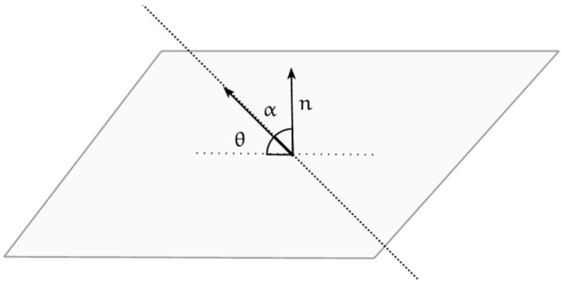
$s = B + \vec{v}t$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

$$0 \leq \boxed{\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ângulo entre reta e plano



$r = A + \vec{u}t$

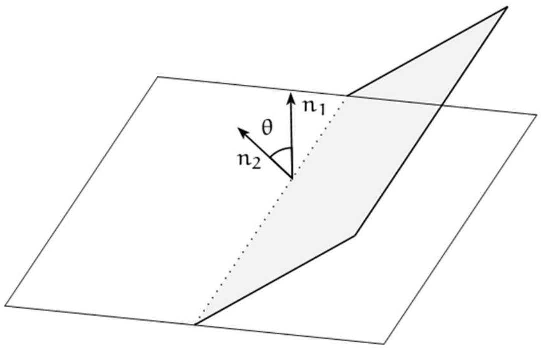
$\vec{n}$: *reta normal ao plano*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\|\|\vec{n}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\|\|\vec{n}\| \operatorname{sen}(\theta)$$

$$0 \leq \boxed{\boldsymbol{\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}\right)}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ângulo entre planos



$\overrightarrow{n_1}$: *reta normal ao plano*

$\overrightarrow{n_2}$: *reta normal ao plano*

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \|\vec{u}\|\|\vec{n}\| \cos(\theta)$$

$$0 \leq \boxed{\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}\right)}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Distância de um ponto a uma reta

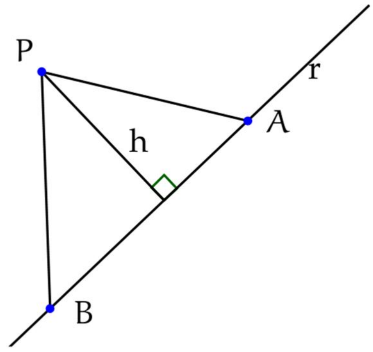
A área do triângulo ABP é:

$$A\acute{}_{rea} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|$$

$$A\acute{}_{rea} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|h}{2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|h = \left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\boxed{\boldsymbol{h = d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}}}$$



Distância de um ponto a um plano

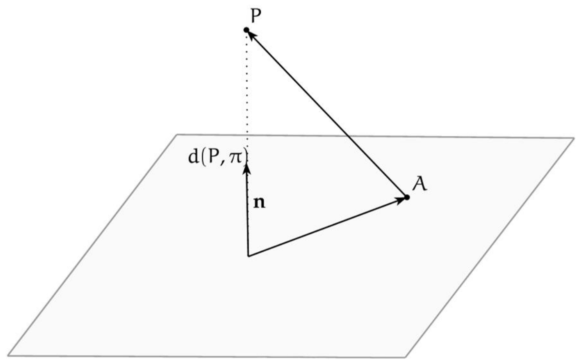
A área do triângulo ABP é:

$$d(P,\pi) = \left\|Proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}}$$



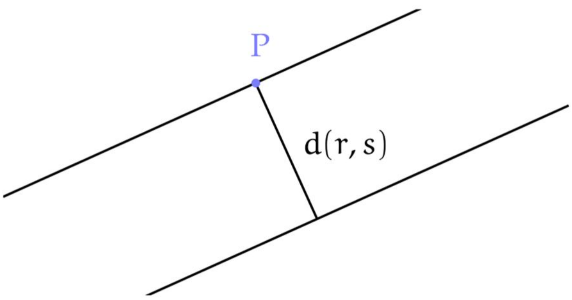
Distância entre duas retas

A área do triângulo ABP é:

$$Proj_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$$

$$d(r,s) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}}}$$



Elipse

$$\boxed{|\boldsymbol{d(F_1,P)+d(F_2,P)}|=\mathbf{2a}}$$

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(\boldsymbol{y-y_C})^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\boldsymbol{y-y_C})^2}{a^2}+\frac{(x-x_C)^2}{b^2}=1$$

x_c: *posição x do centro*

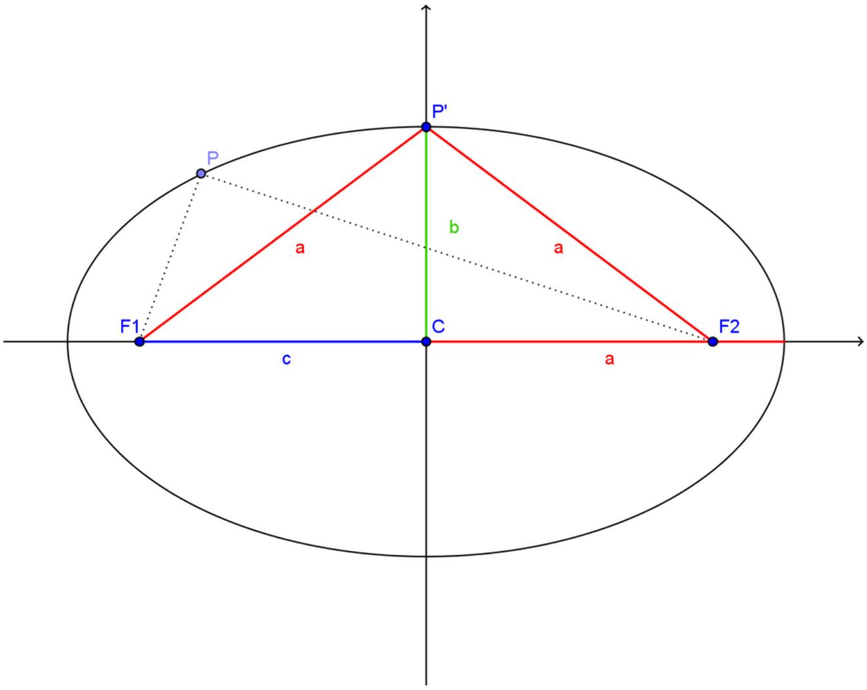
y_c: *posição y do centro*

a: *raio do eixo maior*

b: *raio do eixo menor*

c: *distância do foco ao centro*

$$\left.\begin{matrix}F_1: foco\ 1\\ F_2: foco\ 2\end{matrix}\right\}\ a^2=b^2+c^2\ \Rightarrow\ \boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$$



Hipérbole

$$\boxed{|\boldsymbol{d(F_1,P)-d(F_2,P)}|=\mathbf{2a}}$$

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}-\frac{(\boldsymbol{y-y_C})^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\boldsymbol{y-y_C})^2}{a^2}-\frac{(x-x_C)^2}{b^2}=1$$

x_c: *posição x do centro*

y_c: *posição y do centro*

Assíntotas: $\boxed{y=\pm\frac{b}{a}x}$

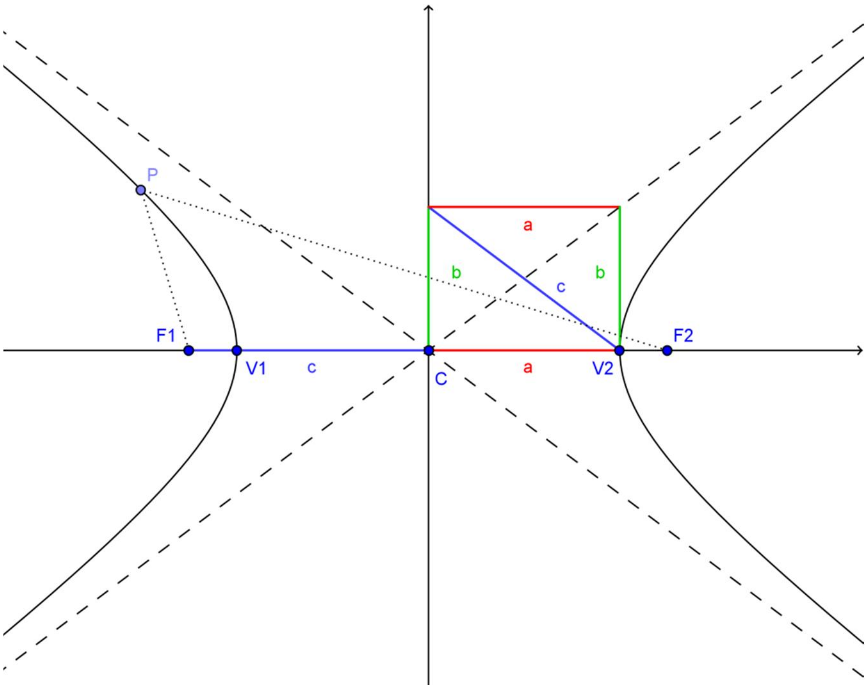
a: *distância do centro ao vértice*

$2a$: *eixo real*
(distância entre os vértices)

b: *metade da altura do retângulo que define as assíntotas*

c: *distância do foco ao centro*

$$\left.\begin{matrix}F_1: foco\ 1\\ F_2: foco\ 2\end{matrix}\right\}\ c^2=a^2+b^2\ \Rightarrow\ \boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$$



Parábola

$\boxed{\boldsymbol{d(F,P) = d(D,P) = a}}$

$y = Ax^2 + Bx + C$

$(x - x_V)^2 = 4a(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_V})$

$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_V})^2 = -4a(x - x_V)$

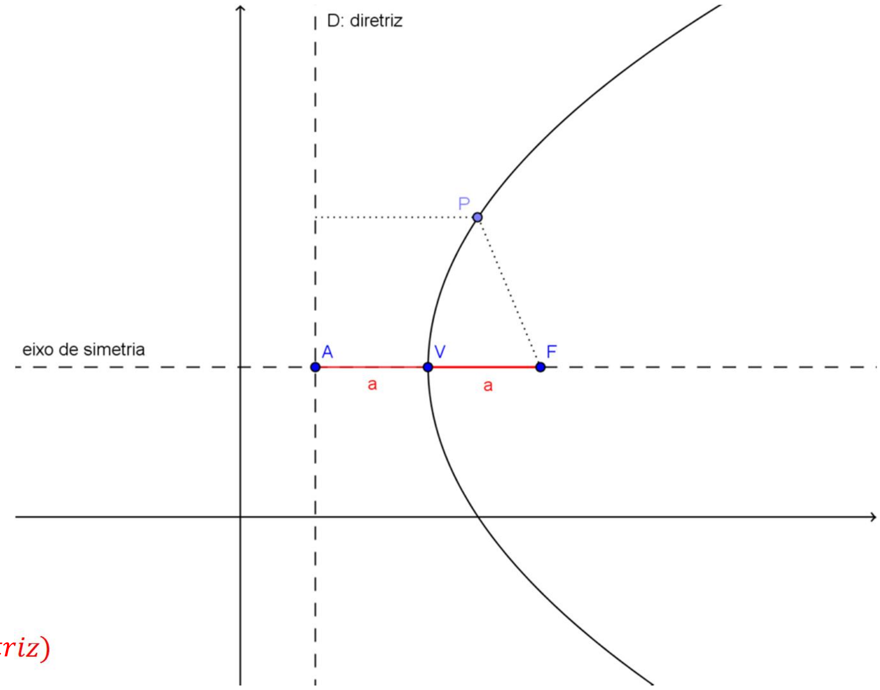
x_V: *posição x do vértice*

y_V: *posição y do vértice*

a: *distância do vértice ao foco ou diretriz*

$p = 2a$: *parâmetro da parábola (distância entre o foco e a diretriz)*

F: *foco da parábola*



Mudanças de coordenadas

$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0} \Rightarrow \boxed{Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + F' = 0} \Rightarrow \boxed{A'x'^2 + B'y'^2 + F' = 0}$

Translação

Completar quadrado (quando não existe o termo misto C):

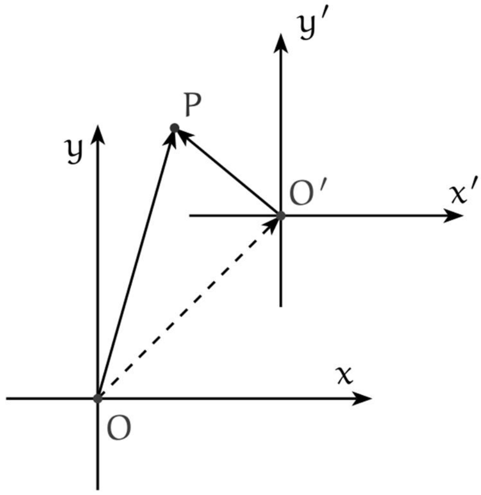
$\boxed{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0} \Rightarrow \boxed{(A'x' + D')^2 + (B'y' + E')^2 = -F - D' - E'}$

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A' = \sqrt{A}$ $\qquad B' = \sqrt{B}$

$D' = \frac{D}{2\sqrt{A}}$ $\qquad E' = \frac{E}{2\sqrt{B}}$

$\boxed{(\boldsymbol{A'x + D'})^2 + (\boldsymbol{B'y + E'})^2 = \boldsymbol{-F - D' - E'}}$



Remover os termos lineares D e E:

$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0} \Rightarrow \boxed{Ax'^2 + By'^2 + Cx}$

$f(h,k)$: $Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial h} = 2Ah + Ck + D = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial k} = Ch + 2Bk + E = 0 \end{cases}$$

Resolver o sistema para h e k

$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + F' = 0 \qquad \rightarrow \quad F' = f(h,k)$

$\boxed{\boldsymbol{Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + f(h,k) = 0}}$

Rotação

Remover o termo misto C:

$\boxed{Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + F' = 0} \Rightarrow \boxed{A'x'^2 + B'y'^2 + F' = 0}$

$$\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = \sqrt{(A+B)^2 + C^2} \end{cases}$$

Resolver o sistema para A' e B'

$\boxed{\boldsymbol{A'x'^2 + B'y'^2 + F' = 0}}$