Universidade Federal do ABC – UFABC
ESTA003-17: Sistemas de Controle I
Sexta lista de exercícios
Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo

1- Considere o sistema de controle com realimentação negativa e unitária apresentado na Figura 1.

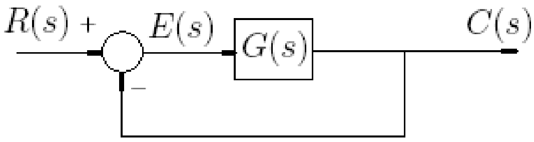


Figura 1: Sistema em malha fechada com realimentação negativa e unitária.

Considerando as seguintes funções de transferências $G(s)$, faça, de forma justificada e detalhada, o esboço do lugar das raízes.

a) $G(s) = \dfrac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+6s+25)}$

c) $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+4s+5)}$

d) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s^2+4s+13)}$

e) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+3,6)}$

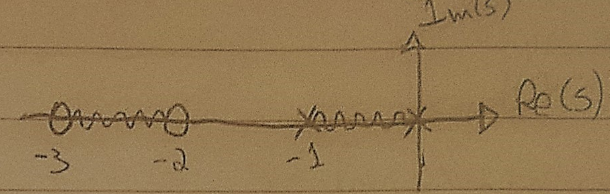
f) $G(s) = \dfrac{K(s+0,4)}{s^2(s+3,6)}$

g) $G(s) = \dfrac{K(s-1)(s^2+6s+34)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

lista 6

① $G(s) = \dfrac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$ ⓐ

① localize os pólos e zeros de malha aberta no plano complexo.



② O número de pólos de malha aberta e de zeros de malha aberta é o mesmo, significando que ñ há assíntotas $\therefore n - m = 2 - 2 = 0$

③ Pontos de partida ou de chegada ao eixo real

$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \dfrac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0 \Rightarrow$

$K = -\dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \Rightarrow$

$K = \dfrac{-s^2 + s}{s^2 + 5s + 6}$

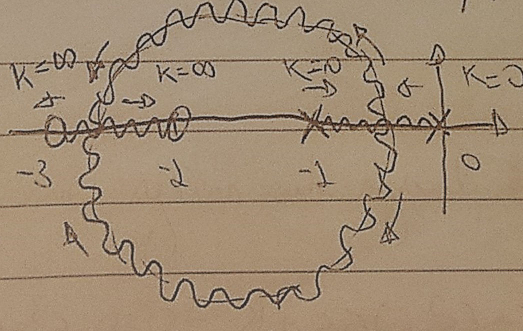
$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2} = 0$$

$\Rightarrow 4s^2 + 12s + 6 = 0 \begin{cases} s = -0{,}634 \\ s = -2{,}367 \end{cases} \Rightarrow K = \dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \Bigg|$ p/ $s = -0{,}634$ $= 0{,}0718$

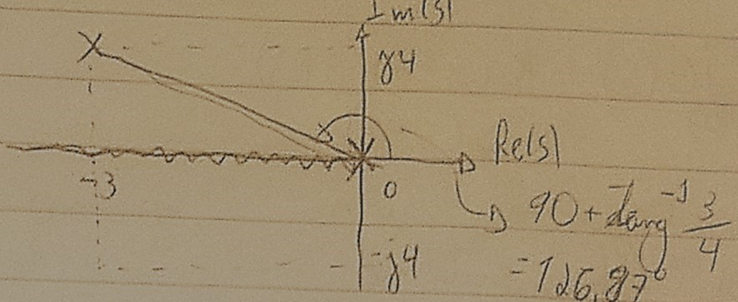
p $s = -2{,}367$ $= 13{,}9$

ponto de partida $\begin{cases} s = -0{,}634 \\ K = 0{,}0718 \end{cases}$

ponto de chegada $\begin{cases} s = -2{,}367 \\ K = 13{,}9 \end{cases}$



(6) $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+6s+25)}$



(1) localize os pólos e zeros de malha aberta e desenhe o lugar das raízes no eixo real

$s^2+6s+25=0 \Rightarrow s = -3 \pm j4$

(2) Determinar o ângulo e a localização das assíntotas

ang. assint. $= \dfrac{\pm 180°(2k+1)}{n-m}$ $K = 0,1,2\ldots$

$\sigma = \dfrac{-(p_1+p_2+\ldots p_n) - (z_1+z_2\ldots+z_m)}{n-m}$

$= \dfrac{-0+3+3}{3} = -2$

$= \dfrac{\pm 180°(2K+1)}{3-0} = \pm 60, \pm 180$

(3) Determinar os pontos de chegada ou de partida no eixo real:

$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1 + \dfrac{K}{s(s^2+6s+25)} = 0$

$\Rightarrow K = -(s^3+6s^2+25s)$

$\dfrac{dK}{ds} = -3s^2-6s-25=0$

$\cancel{s = -2 \pm j2,1}$

$\cancel{K = 34 \pm j18}$

ñ existem pontos de partida ou de chegada ao eixo real.

(4) Determinar o ângulo de partida do pólo complexo conjugado de malha aberta.

$-126,87° - 90° - \theta = -180°$

$\theta = 180 - 126,87 - 90 \Rightarrow \theta = -36,87$

(5) Determinar os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário.

$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+\dfrac{K}{s(s^2+6s+25)} = 0 \Rightarrow \dfrac{s^3+6s^2+25s+K}{s(s^2+6s+25)} = 0 \Rightarrow s^3+6s^2+25s+K=0$

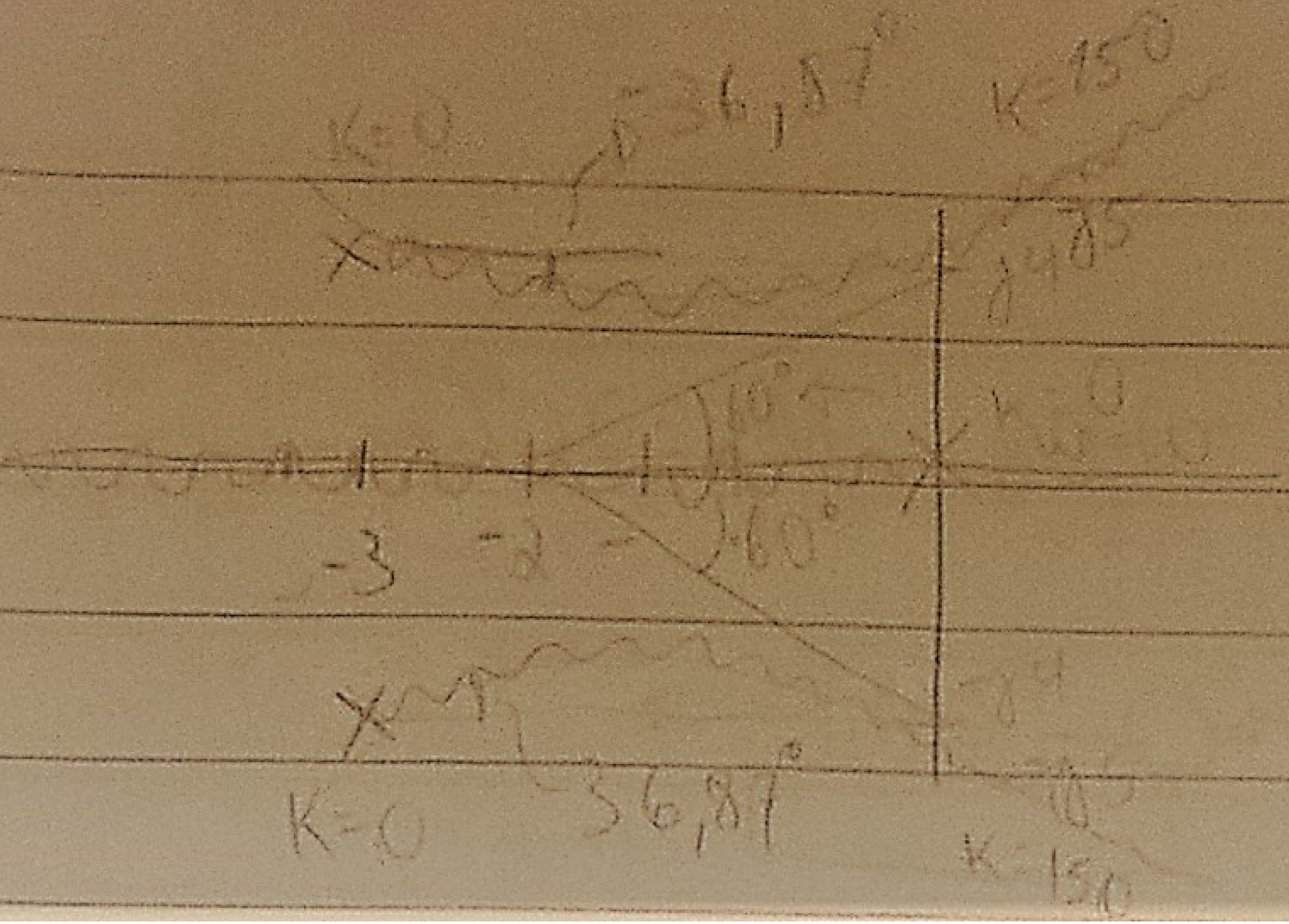
$s = j\omega$

$(j\omega)^3+6(j\omega)^2+25j\omega+K=0$

$-j\omega^3 - 6\omega^2 + 25j\omega + K = 0$

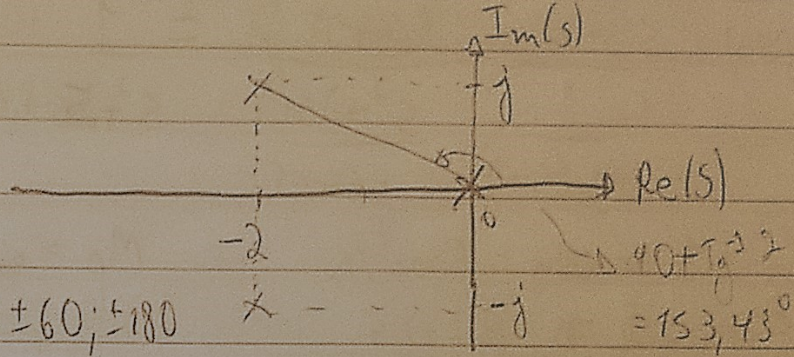
$(-6\omega^2+K) + j\omega(25-\omega^2) = 0$

$\begin{cases} 25-\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 5 \\ -6\omega^2+K=0 \Rightarrow 6.25+K=0 \quad K=150 \\ \omega = 0 \Rightarrow K = 0 \end{cases}$


K=0
36,87°
K=150
60°
-3
-2
K=0
36,87°
K=150

(c) $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+4s+5)}$

$s^2+4s+5=0 \Rightarrow s = -2 \pm j$



ang. assint. $= \dfrac{\pm 180(2K+1)}{n+m} = \dfrac{--}{3-0} = \pm 60; \pm 180$

$s = \dfrac{-(p_1 \dots + p_n) - (z_1 + \dots + z_n)}{n-m} = \dfrac{-0+2+2}{3} = -1,3$

pontos de partida do eixo real

$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{K}{s(s^2+4s+5)} = 0 \Rightarrow \dfrac{s^3+4s^2+5s+K}{s(s^2+4s+5)} = 0 \Rightarrow s^3+4s^2+5s+K=0$

$\dfrac{dK}{ds} = 3s^2+8s+5 = 0$ | $s=-1$
$s=-1,67$

$K = -s^3-4s^2-5s$ | p/ $s=-1$
$=2$

p/ $s=-1,67$
$=1,852$

ang de partida do pólo complexo conjugado

$-\theta - 153,43 - 90 = -180$

$\theta = -63,43°$

ponto de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário.

$s^3+4s^2+5s+K=0$

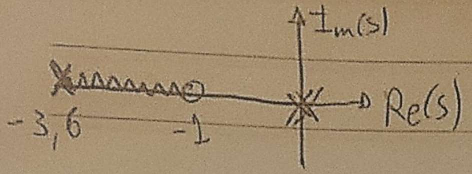
$(j\omega)^3+4(j\omega)^2+5j\omega+K=0$

$-\omega^3 j + 4\omega^2 + 5j\omega + K = 0$

$(K-4\omega^2) + j\omega(5-\omega^2)=0$

ou (e)

(c) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+3,6)}$ (1) localize os pólos e zeros de malha aberta e desenhe o lugar das raízes sobre o eixo real



(2) Determine os ângulos das assíntotas e a interseção com

$$\text{ang. assint.} = \frac{\pm 180°(2K+1)}{3-1} \quad K=0,1,2\ldots$$
$$= \pm 90°$$

$$s = -\frac{[(p_1+\ldots+p_n)-(z_1+\ldots+z_n)]}{n-m} = -\frac{0+0+3,6-1}{3-1} = -1,3$$

(3) determine os pontos de partida ou de chegada do lugar das raízes sobre o eixo real:

$$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{K(s+1)}{s^2(s+3,6)}=0 \Rightarrow \frac{s^3+3,6s^2+Ks+K}{s^2(s+3,6)}=0$$

$$s^3+3,6s^2+Ks+K=0$$
$$K(s+1) = -s^3-3,6s^2$$

$$K = \frac{-s^3-3,6s^2}{s+1}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-(3s^2+7,2s)(s+1)-(s^3+3,6s^2).1}{(s+1)^2}=0$$

$$s(s^2+3,3s+3,6)=0 \Rightarrow s=0$$

$\cancel{s = -1,65 \pm j0,937}$

(4) Determine os pontos em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário

$s=j\omega \quad s^3+3,6s^2+Ks+K=0$

$$(j\omega)^3+3,6(j\omega)^2+Kj\omega+K=0$$
$$-\omega^3 j-3,6\omega^2+K\omega j+K=0$$
$$(K-3,6\omega^2)+j\omega(K-\omega^2)=0$$

Somente é satisfeita para $K=0$ e $\omega=0$