Exame de Recuperação de Fenômenos Eletromagnéticos – BC0209 2014.3

Nome Completo:______________________________________

RA:______________________________

Questão 1

Uma esfera dielétrica de raio a está uniformemente carregada com densidade volumétrica ρ. A esfera está envolvida por uma casca esférica de material condutor, de raios a e $b > a$. A casca condutora está carregada com carga Q. Obtenha:

(a) (0,5 ponto) As densidades de carga superficiais nas duas superfícies da casca condutora.

(b) (1,0 ponto) O campo elétrico em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) O potencial elétrico em todo o espaço, adotando a convenção de potencial nulo no infinito.

$\boxed{\textbf{SOLUÇÃO DA QUESTÃO 1}}$

(a) Carga no dielétrico: $Q_d = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

Superfície interna: $\sigma = -\frac{Q_d}{4\pi a^2} = -\frac{\rho a}{3}$.

Superfície externa: $\sigma = \frac{Q + Q_d}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2} + \frac{\rho a^3}{3b^2}$.

(b) Lei de Gauss para $r < a \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r}$.

No condutor, na região $a \leq r \leq b$, $\vec{E} = 0$.

Lei de Gauss para $r > b \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$.

(c) $V(r) - \overbrace{V(\infty)}^{=0} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$.

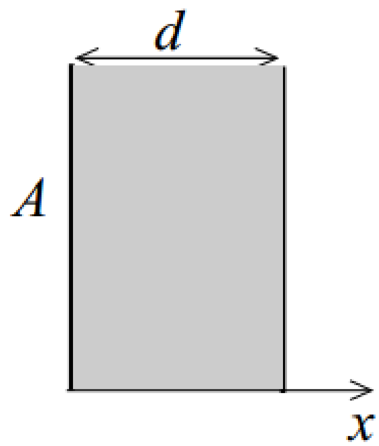
Para $r > b$, $\quad V(r) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Para $a \leq r \leq b$, $\quad V(r) = V(b) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 b}$.

Para $r < a$, $\quad V(r) = V(a) - \int_{a}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Longrightarrow V(r) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{6\epsilon_0}$.

Questão 2

Um capacitor tem placas planas paralelas de área A, separadas por uma distância d. Entre as placas do capacitor existe um material dielétrico com constante dielétrica κ. Devido a uma compactação não uniforme, a resistividade do material dielétrico varia linearmente com a coordenada x (vide figura), segundo a equação $\rho(x) = ax + b$, com a e b constantes.



(a) (1,0 pontos) Obtenha a diferença de potencial entre as placas do capacitor, como função da carga em suas placas.

(b) (1,5 ponto) Calcule a resistência elétrica R entre as placas do capacitor.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

(a) Em um capacitor de placas planas,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q_0}{\kappa\epsilon_0 A} \Longrightarrow \Delta V = Ed = \frac{Q_0\, d}{\kappa\epsilon_0 A}$$

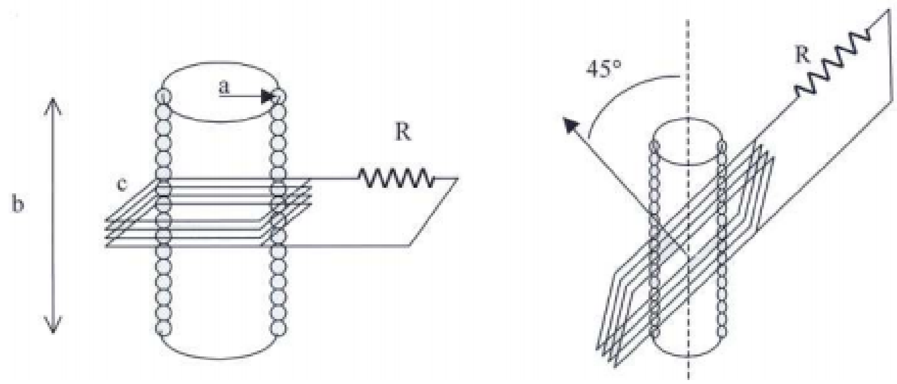
.

(b) A resistência é dada por:

$$R = \int \frac{\rho}{A} d\ell = \int_0^d \frac{ax+b}{A} dx = \frac{1}{A}\left(a\frac{d^2}{2} + bd\right)$$

Questão 3

Um solenoide longo de raio a, comprimento b e N_1 espiras é envolto por uma bobina quadrada de lado c, com N_2 espiras e resistência desprezível. Os eixos do solenoide e da bobina são coincidentes. O solenoide é alimentado com uma fonte que gera no solenoide uma corrente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. A bobina é conectada a uma resistência R.



Determine a corrente elétrica na bobina nos casos

(a) (1,0 ponto) Bobina externa ao solenoide ($c > a$).

(b) (1,0 ponto) Bobina totalmente interna ao solenoide ($c < a$).

(c) (0,5 ponto) Bobina externa ao solenoide, mas com seu eixo inclinado de 45º.

$\boxed{\text{SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3}}$

(a) O campo magnético é nulo no exterior do solenóide e igual a

$$B_{solenóide} = \frac{N_1 \mu_0 I}{b} = \frac{N_1 \mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{b}$$

no seu interior. Assim, se a **bobina é externa ao solenóide** o fluxo é determinado pela área do solenóide:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{N_1 \mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{b} \pi a^2.$$

Pela lei de Faraday, a fem na bobina é

$$V = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \Longrightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \mathrm{sen}(\omega t) \pi a^2}{bR}.$$

(b) Se a **bobina é interna ao solenóide**, o fluxo de B é determinado pela área da bobina (c^2). Um cálculo análogo ao do item (a) fornece

$$I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \mathrm{sen}(\omega t)\ c^2}{bR}.$$

(c) Enquanto a bobina estiver fora do solenóide, o fluxo é determinado pela área do solenóide, qualquer que seja o ângulo.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \mathrm{sen}(\omega t) \pi a^2}{bR}$$

Questão 4

Considere o circuito mostrado na figura 1, percorrido pela corrente I. Trata-se de uma semi-circunferência de raio R e dois trechos retilíneos e semi-infinitos.

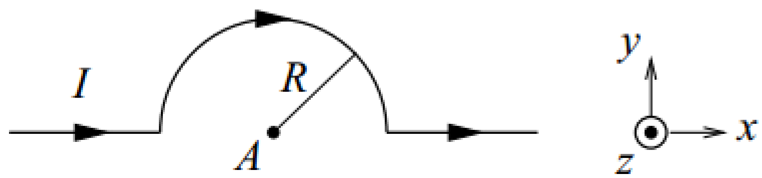


Figura 1:

(a) (1,5 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ no ponto A indicado na figura 1.

(b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético no ponto C, indicado na figura 2 (coordenadas $x = R$, $y = 0$ e $z = 0$). O circuito indicado é constituido de duas semi-circunferências, de raios R, coplanares aos planos xz e xy, e a corrente é I.

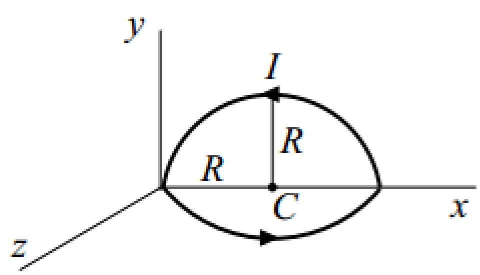


Figura 2:

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

(a) Usando a lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2},$$

concluimos que os trechos retilíneos não contribuem porque neles $d\vec{\ell} \parallel \hat{r}$. No semi-círculo,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2} \hat{z} \Longrightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \pi R \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z}.$$

(b) Usando o resultado do item (a), podemos escrever

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} (\hat{y} + \hat{z}).$$