Lista 6 - Álgebra Linear

Transformações Lineares (parte II)

3° quadrimestre de 2014 - Professores Maurício Richartz e Vladislav Kupriyanov

1. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. b) $[T]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. (a) $T(x, y, z) = (2x+3y-7z, 3x-y-2z, x+6y)$. b) Sim. A imagem é gerada pelos vetores $(2, 3, 1)$, $(5, 2, 7)$ e $(-2, 0, 7)$. Mostre que eles são LI e conclua que Im(T) $= \mathbb{R}^3$. c) Sim. Determine ker T (ou use o teorema do núcleo/imagem) para mostrar que o núcleo de T possui apenas o vetor nulo e, portanto, T é injetora. d) Sim, pois é injetora é sobrejetora. e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

3. $[T]_\xi^\xi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre a forma escada equivalente e conclua que o posto da matriz é 2. Esse número é igual a dimensão da imagem de T. Im T $= [(2, 1, 3), (1, 0, 1)] = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$. A nulidade da matriz é 1 e, portanto, o núcleo de T tem dimensão igual a 1. ker T $= [(1, 1, -1)]$.

4. Mostre que $T(x, y) = (6x - y, 20x - 4y)$ e encontre $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$

5. a) $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2)t + (a_1 - a_2)t^2$. b) Sim, justifique. c) Sim, justifique. d) Sim, justifique. e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. a) Veja exercício 1c da lista 1. b) Mostre que as duas propriedades que definem uma transformação linear são satisfeitas. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. d) ker T $=$ {polinomios constantes} $= [1]$ e Im T $= [1, t, t^2]$. e) Para i), comece com um polinômio genérico de grau 3 e mostre que se aplicar a derivada 4 vezes o resultado será o polinômio nulo. Para ii, faça o produto de matrizes correspondente à composição.

7. a) $T(x, y) = \left(3x, \frac{5x}{2} - \frac{y}{2}, x\right)$. b) $S(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{5x}{3} - 2y\right)$. c) $T(1, 0) = \left(3, \frac{5}{2}, 1\right)$ e $T(0, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$. d) $P(x, y) = (x, y)$. e) $Q(x, y, z) = \left(x, y, \frac{x}{3}\right)$. f) Não, pois $T \circ S$ não é a identidade. g) Para T, calcule primeiro o núcleo e mostre que a transformação é injetora. Depois, use o teorema núcleo-imagem e conclua que não é sobrejetora. Para S, calcule o núcleo e conclua que a transformação não é injetora. Depois, use o teorema núcleo-imagem e conclua que é sobrejetora.

8. $[T]_{\xi'}^{\xi} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[S]_\xi^{\xi'} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 5/3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[P]_\xi^\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, $[Q]_{\xi'}^{\xi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.