LISTA 05 - FUV GRADMAT

"ABSQUE REPROBATIO ET GLUTEN NULLUM GRADUATIO PERFECTUM EST"

RESOLUÇÃO PASSÍVEL DE ERROS, USE COM MODERAÇÃO

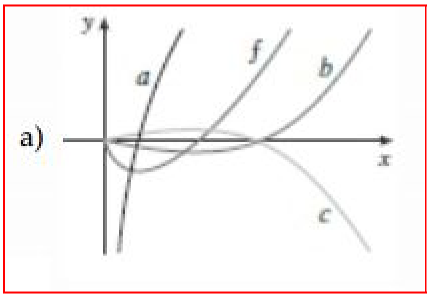
contatos p/ dúvidas ou sexo:
abreu.carlos@aluno.ufabc.edu.br | fb.com/carlos.ea.batista |(11)986421854

Antiderivadas e Integral

(malz pela letra feia, qlqr coisa me pergunta)

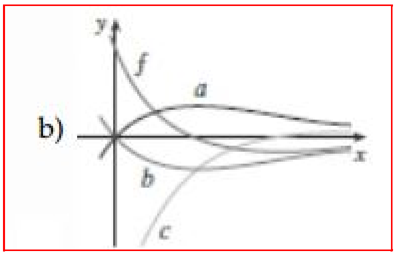
---

1 — O gráfico da função f é apresentado abaixo. Identifique o gráfico da antiderivada de f.



b é a antiderivada de f(x).

Para um x pequeno, f é negativa, então o gráfico de sua antiderivada deve decrescer e só b atende essa necessidade. Ademais, f é positivo quando b cresce, o que bate com a conclusão.



a é a antiderivada de f(x).

c NÃO é a antiderivada, pois em 0 é diferente de 0 o que não faz sentido.
Como f é positivo quando a cresce e f é negativo quando a decresce, temos que a é a antiderivada de f.

---

2 — Calcule as seguintes antiderivadas:

a) $\int x dx$

$$\int x dx \Rightarrow \frac{x^{1+1}}{1+1} + C \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

b) $\int (3x+1)dx$

$$\int (3x+1)dx \Rightarrow \int 3x dx + \int 1 dx \Rightarrow 3\int x dx + \int dx$$

$$3\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}x^2 + x + C}$$

c) $\int 3dx$

$$\int 3dx \Rightarrow 3\int x^0 dx \Rightarrow 3\frac{x^{0+1}}{0+1} + C \Rightarrow \boxed{3x + C}$$

d) $\int (x^2+x+1)\, dx$

$$\int x^2 dx + \int x dx + \int x^0 dx \Rightarrow \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C}$$

e) $\int \frac{1}{x^2}dx$

$$\int \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \int x^{-2}dx \Rightarrow \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \Rightarrow \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{-\frac{1}{x} + C}$$

f) $\int \left(x + \frac{1}{x^3}\right) dx$

$$\int\left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx \Rightarrow \int\left(x+x^{-3}\right)dx \Rightarrow$$

$$\int x\,dx+\int x^{-3}dx \Rightarrow \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)+C$$

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{x^{-2}}{-2}+C \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C}$$

g) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx \Rightarrow \int x^{1/3}dx \Rightarrow \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+C$$

$$\frac{x^{4/3}}{4/3}+C \Rightarrow \frac{3}{4}x^{4/3}+C \Rightarrow \frac{3}{4}x\,x^{1/3}+C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C}$$

h) $\int\left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right)dx$

$$\int\left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right)dx \Rightarrow \int 3\sqrt[7]{x^2}\,dx+\int\cos(x)dx$$

$$3\int x^{2/7}dx+\int\cos(x)dx \Rightarrow \frac{3x^{2/7+1}}{2/7+1}+\operatorname{sen}(x)+C \Rightarrow$$

$$\frac{3x^{9/7}}{9/7}+\operatorname{sen}(x)+C \Rightarrow \cancel{3}\cdot\frac{7}{\cancel{9}3}x^{9/7}+\operatorname{sen}(x)+C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{7}{3}x\,x^{2/7}+\operatorname{sen}(x)+C}$$

i) $\int e^{4x}dx$

$$\int e^{4x}dx \Rightarrow \quad 4x = u \;\Big|\; \frac{du}{dx} = 4$$

$$dx = \frac{du}{4}$$

$$\int e^{u}\frac{du}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}\int e^{u}du \Rightarrow \frac{1}{4}e^{u} + C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{4}e^{4x} + C}$$

j) $\int \cos(3x)dx$

$$\int \cos(3x)dx \Rightarrow \begin{array}{l} 3x = u \\ \dfrac{du}{dx} = 3 \end{array} \longrightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \cos(u)\frac{du}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\int \cos u \, du \Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + C}$$

k) $\int (x + 3e^{5x} + \cos(2x))\,dx$

$$\int (x + 3e^{5x} + \cos(2x))dx \Rightarrow$$

$$\int x dx + 3\underbrace{\int e^{5x}dx}_{\substack{5x = u \\ \frac{du}{5} = dx}} + \underbrace{\int \cos(2x)dx}_{\substack{2x = t \\ \frac{dt}{2} = dx}} \Rightarrow$$

$$\int x dx + 3\int e^{u}\frac{du}{5} + \int \cos t \frac{dt}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{3}{5}e^{u} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x^{2} + \frac{3}{5}e^{5x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C}$$

$$\boxed{\text{l) } \int \left(1 - \cos(4x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right) dx}$$

$$\int \left(1 - \cos(4x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right) dx \Rightarrow$$

$$\int dx - \underbrace{\int \cos(4x)\,dx}_{} + \underbrace{\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right) dx}_{} \Rightarrow$$

$$4x = u \qquad\qquad \frac{x}{7} = t$$

$$\frac{du}{4} = dx \qquad\qquad 7\,dt = dx$$

$$\int dx - \int \cos u \,\frac{du}{4} + \int \operatorname{sen} t \; 7\,dt \Rightarrow$$

$$\frac{x^{0+1}}{0+1} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} u - 7\cos t + C \Rightarrow$$

$$\boxed{x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) - 7\cos\left(\frac{x}{7}\right) + C}$$

$$\boxed{\text{m) } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{arcsen} x + C}$$

$$\boxed{\text{n) } \int \frac{1}{1+x^2}\,dx}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x + C}$$

o) $\int 3^x dx$

$$\int 3^x dx \Rightarrow \int e^{\ln 3^x} dx \Rightarrow \int e^{x\ln 3} dx$$

$$x\ln 3 = u, \quad \frac{du}{dx} = \ln 3, \quad dx = \frac{du}{\ln 3}$$

$$\int e^u \frac{du}{\ln 3} \Rightarrow \frac{e^u}{\ln 3} + C \Rightarrow \frac{e^{x\ln 3}}{\ln 3} + C \Rightarrow$$

$$\frac{e^{\ln 3^x}}{\ln 3} + C \Rightarrow \boxed{\frac{3^x}{\ln 3} + C}$$

p) $\int \sec^2(2x)dx$

$$\int \sec^2(2x)\,dx \Rightarrow \quad 2x = u, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \sec^2 u \frac{du}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \sec^2(u)\,du \Rightarrow \frac{1}{2}\tan u + C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\tan(2x) + C}$$

q) $\int \operatorname{sen}^2(x)dx$

$\int sen^2 x\,dx \Rightarrow$ (soma de arcos / relação fundamental)

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx \Rightarrow$

$\int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\int x^0 dx - \frac{1}{2}\int \underbrace{\cos(2x)\,dx} \Rightarrow$

$2x = u$, $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int x^0 dx - \frac{1}{4}\int \cos u\,du \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\frac{x^{0+1}}{0+1} - \frac{1}{4} sen\,u + C \Rightarrow$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} sen\,u + C \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{sen\,2x}{2}\right) + C \Rightarrow$

$\boxed{\frac{1}{2}\left(x - sen\,x\cos x\right) + C}$

---

3 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

a) $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$ e $x(0) = 2$

$\frac{dx}{dt} = 2t - 1 \Rightarrow dx = (2t-1)\,dt$

$\int dx = \int (2t-1)\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{2t^2}{2} - t + C$

$x(0) = 2$; $2 = 0^2 - 0 + C \rightarrow C = 2$

$\boxed{x(t) = t^2 - t + 2}$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\int dx = \int\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt \Rightarrow x(t) = \arctan(t) + C$$

$$x(0) = 0 \; ; \quad 0 = \arctan(0) + C \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{x(t) = \arctan(t)}$$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3 \; ; \quad \text{integrando 1 vez}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t + C \qquad \boxed{\frac{dx}{dt} = v(t)} \qquad v(0) = 1$$

$$1 = 3.0 + C \longrightarrow C = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t + 1 \Rightarrow dx = (3t+1)\,dt$$

$$\int dx = \int (3t+1)\,dt$$

$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + t + D \qquad (x(0) = 1)$$

$$1 = \frac{3\,0^2}{2} + 0 + D \longrightarrow D = 1$$

$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + t + 1$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 + 2t + 2\right)}$$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$$

$$\int a(t) = \int e^{-t}\,dt$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -e^{-t} + C \qquad (v(0) = 0)$$

$$0 = -e^{-0} + C \longrightarrow \boxed{C = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} + 1 \Rightarrow$$

$$dx = (-e^{-t} + 1)\,dt$$

Integrando

$$x(t) = e^{-t} + t + D$$

$$x(0) = 1$$

$$1 = e^{-0} + 0 + D$$

$$D = 0$$

$$\boxed{x(t) = e^{-t} + t}$$

e) $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t) \qquad v(0) = 1 \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \int \cos(3t)\,dt = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(3t) + C = v(t)$$

$$1 = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,0 + C \longrightarrow C = 1$$

$$x(t) = \int \left(\frac{1}{3}\ \text{sen}(3t) + 1\right) dt$$

$3t = u$

$dt = \frac{du}{3}$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{9}\cos(3t) + t + \frac{1}{9}}$$

$$x(t) = -\frac{1}{9}\cos(3t) + t + D \quad ; \quad x(0) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{9}\cos 0 + 0 + D \rightarrow D = \frac{1}{9}$$

---

4 — Ache os valores numéricos das seguintes somas:

a) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$

$$\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1} \Rightarrow 2^{2(0)+1} + 2^{2(1)+1} + 2^{2(2)+1} + 2^{2(3)+1}$$

$$2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 2 + 8 + 32 + 128 = \boxed{170}$$

b) $\sum_{i=0}^{6} (2i+1)$

$$\sum_{i=0}^{6} (2i+1) \Rightarrow (2(0)+1) + (2(1)+1) + \dots + (2(6)+1)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \boxed{49}$$

c) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2-2} + 2^{3-2} + 2^{4-2} + 2^{5-2} \Rightarrow$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 0 = 1 + 2 + 4 + 8 \Rightarrow \boxed{15}$$

---

5 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

provar por PIF ia demandar um rigor maior do que o dessa resolução, fiz de um jeito bem whatever pq esse exercício tb é meio nd a ver. Se vc n for aluno da Ducati ou Fresneda, nem se preocupa com esse lixo

a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \dots + a_n + b_n \\ &= (a_m + a_{m+1} + \dots a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots b_n) \\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \quad \square\end{aligned}$$

b) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} (ca)_i &= ca_m + ca_{m+1} + \dots + ca_n \\ &= c(a_m + a_{m+1} + \dots a_n) \\ &= c \sum_{i=m}^{n} a_i \quad \blacksquare\end{aligned}$$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (telescópica)

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) \Rightarrow$$

$$= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

$$= a_n + (a_{n-1} - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-2}) + \dots (a_{m+1} - a_{m+1}) - a_m$$

$$= a_n - a_m \blacksquare$$

d) $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^0 = 1 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}}$$

$$= n \blacksquare$$

---

6 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(Dica: Use que $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$)

$$\sum_{k=1}^{N} (2k-1) = \sum_{k=1}^{N} k^2 - (k-1)^2 \overset{\text{Telescópico}}{=} N^2 - (1-1)^2 = N^2$$

b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ (Dica: Use o item anterior)

$$\sum_{k=1}^{N} k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k-1+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} 2k-1 + \sum_{k=1}^{N} 1\right) = \frac{N^2+N}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

(Dica: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$)

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{2N^3+3N^2+N}{6} = \frac{N}{6}(2N^2+3N+1) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6_N}$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \sum_{k=1} \frac{k^3-(k-1)^3+3k-1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{k=1} k^3-(k-1)^3 + \frac{1}{3}\sum_{k=1} 3k-1$$

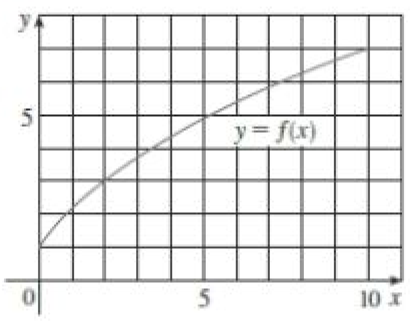
$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{N} k^3-(k-1)^3\right) + \sum_{k=1}^{N} k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} 1 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2+N}{2} - \frac{1}{3}N =$$

$$\boxed{\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}}$$

---

7 — Usando as figuras abaixo ache estimativas inferiores e superiores para a área abaixo do gráfico de $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ usando primeiramente 5 retângulos e posteriormente 10 retângulos.

a)



Usando 5 retângulos, n = 5

Δx = [(b - a) / n]

Δx = [(10 - 0) / 5]

Δx = (10 / 5) = 2

x_1 = Δx = **2**

x_2 = 2Δx = 2 * 2 = **4**

x_3 = 3Δx = 3 * 2 = **6**

x_4 = 4Δx = 4 * 2 = **8**

x_5 = 5Δx = 5 * 2 = **10**

$$R = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$$

R = [f(2)*2 + f(4)*2 + f(6)*2 + f(8)*2 + f(10)*2]

R = 2 [f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10)]

R = 2 [3 + 4,5 + 5,5 + 6,25 + 7]

R = 2 [3 + 4,5 + 5,5 + 6,25 + 7]

R = 2 (26,25)

R = 52,5

Usando 10 retângulos, n = 10

Δx = [(b - a) / n]

Δx = [(10 - 0) / 10]

Δx = (10 / 10) = 1

x_1 = Δx = **1**

x_2 = 2Δx = 2 * 1 = **2**

x_3 = 3Δx = 3 * 1 = **3**

x_4 = 4Δx = 4 * 1 = **4**

x_5 = 5Δx = 5 * 1 = **5**

x_6 = 6Δx = 6 * 1 = **6**

x_7 = 7Δx = 7 * 1 = **7**

x_8 = 8Δx = 8 * 1 = **8**

x_9 = 9Δx = 9 * 1 = **9**

x_{10} = 10Δx = 10 * 1 = **10**

o somatório vai até 10, preguiça de editar outra imagem ou usar latex

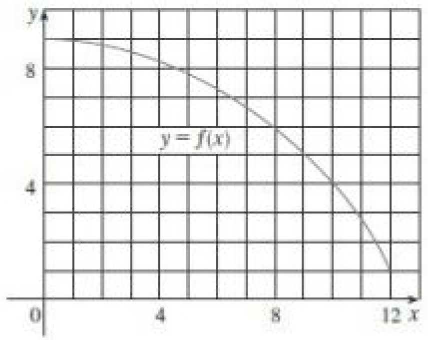
R = [f(1)*1 + f(2)*1 + f(3)*1 + f(4)*1 + f(5)*1 + f(6)*1 + f(7)*1 + f(8)*1 + f(9)*1+ f(10)*1]

R = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)]

R = (2 + 3 + 3,75 + 4,5 + 5 + 5,5 + 5,75 + 6,25 + 6,5 + 7)

R = 49,25

b)



...e a 7b é análoga a anterior, faz aí vlw flw

---

8 —

a) Defina precisamente partição de um intervalo.

Suponhamos um intervalo fechado $[a,b]$ dividido em n subintervalos pela fixação de $n-1$ pontos de subdivisão $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$, sujeitos unicamente à restrição

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b \quad (1)$$

É conveniente designar o ponto a por x_0 e o ponto b por x_n. Um conjunto de pontos satisfazendo (1) diz-se uma partição P de $[a,b]$ e representada por

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

b) Defina precisamente soma de Riemann.

Antes de definir soma de Riemann, vou definir uma função em escada

Def. Uma função s, cujo domínio é um intervalo fechado $[a,b]$, diz-se uma função em escada, se existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que seja constante em cada subintervalo fechado de P. Quer isto dizer que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ existe um número real s_k tal que

$$s(x) = s_k \quad \text{se} \quad x_{k-1} < x < x_k$$

Dito aquilo que vc n entendeu, vou pensar numa função em escada s, definida em $[a,b]$ e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a,b]$ tal que s seja constante nos subintervalos abertos de P. Designemos por s_k, o valor constante de s no subintervalo aberto de ordem k. Resumindo, uma f em escada em $k = 1, 2, \ldots, n$.

Soma de Riemann

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k (x_k - x_{k-1})$$

---

9 — Use uma soma de Riemann com extremos a direita e $n = 8$ para achar uma aproximação da integral

$$\int_0^5 x^2 - 3x$$

dei umas arredondadas meio non sense pq fiz sem usar fração até o final, malz

Calculando o comprimento do intervalo

$\Delta x = [(b - a) / n]$
$\Delta x = [(5 - 0) / 8]$
$\Delta x = (5 / 8) = 0.625$

As extremidades dos intervalos são:

$x_1 = \Delta x = (5 / 8) = 0,625$
$x_2 = 2\Delta x = 2(5 / 8) = (10 / 8) = (5 / 4) = 1,25$
$x_3 = 3\Delta x = 3(5 / 8) = (15 / 8) = 1,875$
$x_4 = 4\Delta x = 4(5 / 8) = (5 / 2) = 2,5$
$x_5 = 5\Delta x = 5(5 / 8) = (25 / 8) = 3,125$
$x_6 = 6\Delta x = 6(5 / 8) = (15 / 4) = 3,75$
$x_7 = 7\Delta fx = 7(5 / 8) = (35 / 8) = 4,325$
$x_8 = 8\Delta x = 8(5 / 8) = 5$

$$R_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x$$

R_8 = [f(0,625)*(5/8) + f(1,25)*(5/8) + f(1,875)*(5/8) + f(2,5)*(5/8) + f(3,125)*(5/8) + f(3,75)*(5/8) + f(4,325)*(5/8) + f(5)*(5/8)] =
R_8 = (5/8) [f(0,625) + f(1,25) + f(1,875) + f(2,5) + f(3,125) + f(3,75)+ f(4,325) + f(5)] =

$f(x) = x^2 - 3x$
$f(0,625) = (0,625)^2 - 3(0,625) = -1,484375$
$f(1,25) = (1,25)^2 - 3(1,25) = - 2,1875$
$f(1,875) = (1,875)^2 - 3(1,875) = - 2.109375$
$f(2,5) = (2,5)^2 - 3(2,5) = -1,25$
$f(3,215) = (3,215)^2 - 3(3,215) = 0,691225$
$f(3,75) = (3,75)^2 - 3(3,75) = 2,8125$
$f(4,325) = (4,325)^2 - 3(4,325) = 5,730625$
$f(5) = (5)^2 - 3(5) = 10$

$R_8 = (5/8) [-1,484375 - 2,1875 - 2,109375 - 1,25 + 0,691225 + 2,8125 + 5,730625 + 10]$
$R_8 = (5/8) [19,23435 - 7,03125]$
$R_8 = 12,20325(5/8)$
$R_8 = 7,627$

---

10 — Use uma soma de Riemann centrado no ponto médio para achar aproximações da integrais

essa n sei se tá certa n, to sentindo uma impressão ruim HUAHUAHUAHU

a) $\int_0^1 \text{sen}(x)dx \quad n = 4$

$$\frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = \Delta x \qquad 0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ 1$$

$$R_4 = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7}{8}\right)\right)$$

$$R_4 = 0{,}4608970094$$

b) $\int_0^1 2^x\,dx \quad n = 10$

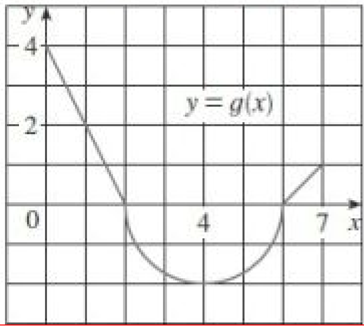
$$\Delta x = \frac{1}{10} \qquad x_1 = \frac{1}{20} \qquad x_2 = \frac{3}{20} \quad \ldots \quad x_{10} = \frac{19}{20}$$

$$R_{10} = \left(2^{1/20} + 2^{3/20} + 2^{5/20} + \ldots + 2^{19/20}\right)\frac{1}{10} = 14{,}4240627 \cdot \frac{1}{10} =$$

$$R_{10} = 1{,}44240627$$

---

11 — O gráfico de g consiste de dois segmentos de retas e um semi-circulo, conforme figura abaixo. Calcule



a) $\int_0^2 g(x)dx$

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 2 = \boxed{4}$$

área do triângulo

b) $\int_2^6 g(x)dx$

$$\int_2^6 g(x)dx = \frac{-1}{2}\pi\cdot(1\cdot 2)^2 = \boxed{-2\pi}$$

área negativa do semicírculo.

c) $\int_0^6 g(x)dx$

$$\int_0^6 g(x)\,dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^6 g(x)dx$$

$$\left| 4 - 2\pi \right|$$

---

12 — Calcule a partir da definição as seguintes integrais:

a) $\int_a^b x dx$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{b-a}{n}i\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a(b-a)}{n}n+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = a(b-a)+\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= a(b-a)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2 = (b-a)(a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}a) = (b-a)\tfrac{1}{2}(b+a) = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2)$$

alunos do Daniel Miranda, tô anexando a integral de x^2 pq direto ele cobra em prova

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{b-a}{n}i\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a^2+2a\frac{b-a}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{a^2(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{a^2(b-a)}{n}n\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+a(b-a)^2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+a^2(b-a)\right]$$
$$= \frac{(b-a)^3}{3}+a(b-a)^2+a^2(b-a) = \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3}+ab^2-2a^2b+a^3+a^2b-a^3$$
$$= \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}-ab^2+a^2b+ab^2-a^2b = \frac{b^3-a^3}{3}$$

daqui pra frente vou fazer esse exercício nas coxas, até pq é tudo variação do item a e se eu perder tempo resolvendo saporra n vai ter listas pras outras matérias ou eu vou ter que me esforçar (e mó preguiça)

$$\boxed{\text{b)} \int_0^1 2x\,dx}$$

essa porra é o item a multiplicado por 2 e assumindo b = 1 e a = 0.
se n acreditou, faz por Riemann aí, é a mesma coisa, aí vc usa a propriedade de somatório do item 5b

$$\boxed{\text{c)} \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx}$$

é a integral brinde que coloquei no item a multiplicada por (1/2), assumindo b = 1 e a = 0.
se n acredita, siga a mesma instrução da porra do item acima

$$\boxed{\text{d)} \int_0^1 x^3 dx}$$

migo, achei esse exercício com outros limites de integração, eu n vou me esforçar + q isso e é melhor q nd

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \qquad x_i = 1 + i\,\Delta x = 1 + i(1/n) = 1 + i/n.$$

$$\int_1^2 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{n}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(n^3+3n^2i+3ni^2+i^3) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{n}n^3+\sum_{i=1}^{n}3n^2i+\sum_{i=1}^{n}3ni^2+\sum_{i=1}^{n}i^3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[n\cdot n^3+3n^2\sum_{i=1}^{n}i+3n\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i^3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right] = 1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4} = 3.75$$

tenta adaptar pro seu caso e vlw flw

$$\boxed{\text{e)} \int_0^3 x^2 + x\,dx}$$

vou fazer essa porra n, é um caso especial do item abaixo, vê ele

$$\boxed{\text{f)} \int_a^b (x^2 + x)\,dx}$$

note que podemos reescrever isso como

$$\int_a^b x^2\,dx + \int_a^b x\,dx$$

logo, dá a soma das respostas dos exercícios resolvidos no item a

---

13 — Expresse as seguintes integrais como limite de somatório

saporra de lista tem uma cronologia mt nd a ver kkkkk

o caso geral é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

$x_i^* = x_i$

talvez tenha feito alguma besteira nesse item, presta atenção

a) $\int_0^{\pi} \cos(x)dx$

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx \longrightarrow \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\,\Delta x_i \to$$

$$\lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \to \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\frac{(\pi-0)}{n}$$

$$\boxed{\lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

b) $\int_0^{1} e^x dx$

$$\int_0^1 e^x\,dx \to \boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} e^{x_i}(1-0)\frac{1}{n}}$$

c) $\int_0^{5} \cos(x)e^x dx$

$$\int_0^5 \cos(x)\, e^x dx$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\, e^{x_i} \frac{(5-0)}{n}}$$

---

14 — Enuncie o teorema Fundamental do Cálculo

Pt. 1

Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e

$$g'(x) = f(x)$$

Pt. 2

Se f for contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, id est, uma função tal que $F' = f$

---

15 — Calcule

$$\text{a)} \int_0^1 (x+3)dx$$

$$\int_0^1 (x+3)dx \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}(1)^2 + 3(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 3(0)\right) = \frac{7}{2} - 0 = \boxed{\frac{7}{2}}$$

$$\text{b)} \int_0^4 \frac{1}{3}dx$$

$$\int_0^4 \frac{1}{3}dx \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x\right)\Big|_0^4 \Rightarrow \frac{4}{3} - 0 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\text{c)} \int_0^1 (5x^3 + 2x + 4)\,dx$$

$$\int_0^1 (5x^3+2x+4)dx \Rightarrow \left(\frac{5}{4}x^4 + x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{4}(1)^4 + 1^2 + 4(1)\right) - 0 \Rightarrow \frac{5}{4} + 1 + 4 \Rightarrow \boxed{\frac{25}{4}}$$

$$\text{d)} \int_1^4 (2x + 5\sqrt{x})\,dx$$

$$\int_1^4 (2x+5\sqrt{x})dx \Rightarrow \left(x^2 + \frac{10}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^4$$

$$\left(4^2 + \frac{10}{3}.4.\sqrt{4}\right) - \left(1^2 + \frac{10}{3}.1.\sqrt{1}\right) = \frac{128}{3} - \frac{13}{3} =$$

$$\boxed{115/3}$$

$$\text{e)} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2x)dx$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2x)dx \Rightarrow \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos t \frac{dt}{2} = \left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}(120)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(-120)}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x)dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \frac{dt}{3} \Rightarrow \left(\frac{-\cos(3x)}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow$$

$$\frac{-\cos(+3\pi)}{3} - \left(\frac{-\cos(-3\pi)}{3}\right) = \boxed{0}$$

g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow \arctan(t)\Big|_{0}^{1} \Rightarrow \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{45}$$

msm porra q pi/4, sla pq deixei em graus

h) $\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen}(x)dx$

$$\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi/4} = \cos(0) - \cos(45) = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

q é 1 - [1/sqrt(2)] tb, só separar em duas frações e racionalizar a segunda

i) $\int_{-1}^{1} e^{-3x}dx$

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{t}\frac{dt}{-3} \Rightarrow \left(\frac{-e^{-3t}}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\frac{e^{+3}}{3} - \frac{e^{-3}}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\left(e^{3} - \frac{1}{e^{3}}\right)}$$

dá pra reescrever essas exponenciais usando senh pra chegar numa sol. mais reduzida, mas mó rolê

$$\boxed{\text{j) } \int_{0}^{1} 2xe^{x^2}dx}$$

$$\int_{0}^{1} 2xe^{x^2}dx \underset{u=2x}{\Rightarrow} \int_{0}^{1} e^{t}dt \Rightarrow e^{2x}\Big|_{0}^{1} = \boxed{e^{2}-1}$$

$$\boxed{\text{k) } \int_{-1}^{1} x^3e^{-x^4}dx}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3e^{-x^4}dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{t}\frac{dt}{-4} \Rightarrow \left(-\frac{e^{-x^4}}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\frac{e^{-1}}{4} - \frac{e^{-1}}{4} = \boxed{0}$$

$$\boxed{\text{l) } \int_{0}^{\pi/2} \cos^2(x)dx}$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx \Rightarrow \left[\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen}x\cos x)\right]_{0}^{\pi/2} =$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{m)} \quad \int_0^{\pi/4} \sec^2(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(x)\,dx \Rightarrow \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{1}$$

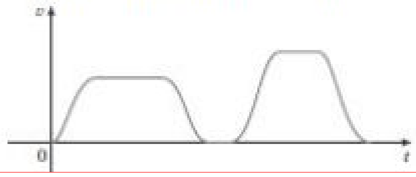
$$\text{n)} \quad \int_0^1 4^x\,dx$$

$$\int_0^1 4^x\,dx \Rightarrow \int_0^1 e^{x\ln 4}\,dx \Rightarrow \int_0^1 e^u \frac{du}{\ln 4} \Rightarrow$$

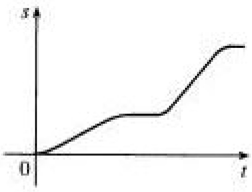
$$\left(\frac{4^x}{\ln 4}\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{3}{\ln 4}}$$

---

16 — O gráfico abaixo representa a velocidade de um carro em função do tempo. Esboce o gráfico da posição do carro em função do tempo.



a função posição é a antiderivada da função velocidade, então o gráfico é horizontal quando v(t) = 0



---

tchau, bjs me liga q+ tarde tem balada