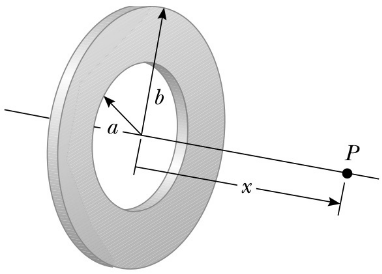
Prova Substitutiva - Noturno

Nome____ RA________________

1) a) [10 pt] Calcule o potencial elétrico no ponto P sobre o eixo que passa pelo centro do anel, mostrado na figura abaixo, que possui uma densidade de carga uniforme σ.
b) [10 pt] Determine o campo elétrico em P. (Dica: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.)
c) [5 pt] Encontre o campo elétrico no limite $b \to \infty$.



Gabarito

a)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2+r^2}\right]_a^b = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

b)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\right), \qquad E_y = E_z = 0$$

c)

$$\lim_{b\to\infty}\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath}$$

2) Seja um capacitor esférico formado por duas cascas esféricas concêntricas e condutoras de raios a e b, sendo $a < b$, carregadas com cargas $+q$ e $-q$, respectivamente. Calcule:
a) [10 pt] O campo elétrico na região $a < r < b$.
b) [10 pt] A diferença de potencial entre as cascas positiva e negativa.
c) [5 pt] A capacitância.

Gabarito
a)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

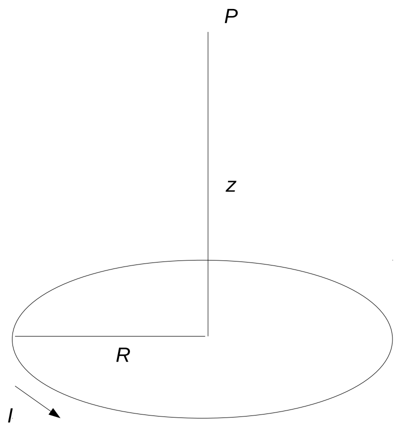
b)

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab}$$

c)

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

3) Considere uma espira circular de raio R, percorrida por uma corrente I, conforme a figura abaixo. Em um ponto P, a uma distância z do centro da espira, determine:
a) [15 pt] O vetor campo magnético $\vec{B}$.
b) [5 pt] O valor aproximado do campo, encontrado no item a), para $z \gg R$.
c) [5 pt] E reescreva o item b) em função do momento magnético $\vec{\mu}$.



Gabarito
a) Por simetria $B_x = B_y = 0$ e

$$B_z = \int dB_z = \int dB \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \int \frac{\mu_0 I \, ds}{4\pi(z^2+R^2)} \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}} \underbrace{\int ds}_{=2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}$$

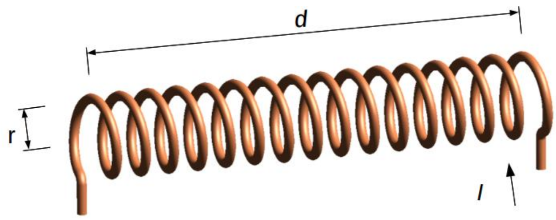
b)

$$z \gg R \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \hat{k}$$

c)

$$\vec{\mu} = I\pi R^2 \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{\mu}$$

4) Seja um solenoide de comprimento d, formado por N espiras circulares de raio r, percorridas por uma corrente I, como na figura abaixo. Supondo $d \gg r$, calcule:
a) [15 pt] O campo magnético dentro do solenoide.
b) [5 pt] O fluxo magnético total através das N espiras.
c) [5 pt] A indutância.



Gabarito
a)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{en}} \quad \Rightarrow \quad B\, d = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{d}$$

b)

$$\Phi_B = NBA = N \left(\frac{\mu_0 N I}{d} \right) \pi r^2 = \frac{\pi \mu_0 N^2 I r^2}{d}$$

c)

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\pi \mu_0 N^2 r^2}{d}$$