Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Nome:____RA:____________________

Universidade Federal do ABC

FUV — 2016.3 – Prof. Maurício Richartz – Prova 1 — Versão C - Noturno

Instruções:

- As provas são individuais e sem consulta a nenhum material. Justifique suas respostas.
- Escreva seu nome, à caneta, em todas as folhas (inclusive no rascunho, caso o tenha solicitado).
- Não é permitido o uso de calculadoras nem celulares.
- Em caso de fraudes ou plágio os alunos envolvidos serão reprovados e um processo disciplinar será aberto.

1. (2,5) (a) Defina precisamente a derivada de $f(x)$ no ponto $x = a$.
   (b) Deduza, a partir da definição, qual a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.
   (c) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de $\sqrt{x}$ em torno de $x = 9$.

2. (2,5) Calcule as derivadas e os limites abaixo, justificando cada passagem:
   a) $\frac{d}{dx}(x\cos(2x) + (3x+2)^{11})$
   b) $\frac{d}{dx}x^{\mathrm{tg}(x)}$
   c) $\lim_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$
   d) $\lim_{x\to 0+} x \ln x$

3. (2,5) Uma empresa precisa produzir um tanque cilíndrico para armazenar πm^3 de um produto químico. A base e a lateral do tanque são feitas com o metal A, enquanto a tampa é feita com o metal B. Sabendo que o preço por metro quadrado do metal B é 7 reais enquanto o preço por metro quadrado do metal A é 1 real, determine as dimensões do tanque cilíndrico (i.e. raio da base e altura) que minimizam o custo do material a ser utilizado.

4. (2,5) Seja $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.
   a) Determine o domínio de f e, caso existam, as assíntotas (horizontais e verticais).
   b) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.
   c) Estude a concavidade de f.
   d) Use os itens anteriores para esboçar o gráfico de f.

PROVA 1 - GABARITO

P1:

a) $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b)

Versões A e C) $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Versões B e D) $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = 2a$$

c) Versões A e C)

$$f(x) = \sqrt{x}\,;\ f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,;\ f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2}.(x-a)^2 = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (x-a) - \frac{1}{8a\sqrt{a}} (x-a)^2$$

Basta então substituir a pelo valor dado.

Versões B e D

$$f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$$

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 = a^2 + 2a.(x-a) + (x-a)^2$$

Basta então substituir a pelo valor dado.

2)

Versões A e B

a) $\frac{d}{dx}\left(e^x \cdot tg(2x) + (2x+3)^7\right) = \frac{d}{dx}\left(e^x \cdot tg(2x)\right) + \frac{d}{dx}\left((2x+3)^7\right) = \frac{de^x}{dx} \cdot tg(2x) + e^x \cdot \frac{d(tg(2x))}{dx} + \frac{d}{dx}\left((2x+3)^7\right)$

$= e^x \cdot tg(2x) + e^x \cdot sec^2(2x) \cdot 2 + 7 \cdot (2x+3)^6 \cdot 2 = \boxed{e^x\left(tg(2x) + 2sec^2(2x)\right) + 14 \cdot (2x+3)^6}$

b) $\frac{d}{dx}\left(x^{senx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x^{senx})}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{senx \cdot \ln x}\right) = e^{senx \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(senx \cdot \ln x) = x^{senx} \cdot \left(senx \cdot \frac{d\ln x}{dx}\right.$

$\left. + \frac{d\,senx}{dx} \cdot \ln x\right) = \boxed{x^{senx} \cdot \left(\frac{senx}{x} + cosx \cdot \ln x\right)}$

c) $\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \boxed{0}$

d) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{senx}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{senx - x^2}{x^2 senx}\right) \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{cosx - 2x}{2x\,senx + x^2 cosx} = \boxed{+\infty}$

Versões C e D:

a) $\frac{d}{dx}\left(x\cos(2x) + (3x+2)^{11}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\cos(2x)\right) + \frac{d}{dx}\left((3x+2)^{11}\right) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \cos(2x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\cos 2x) + \frac{d}{dx}\left((3x+2)^{11}\right)$

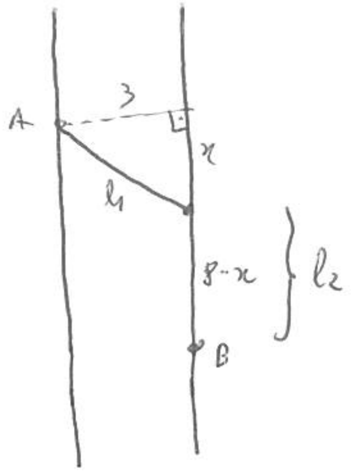
$= 1 \cdot \cos(2x) + x \cdot (-sen\,2x) \cdot 2 + 11 \cdot (3x+2)^{10} \cdot 3 = \boxed{\cos(2x) - 2x\,sen(2x) + 33(3x+2)^{10}}$

b) $\frac{d}{dx}\left(x^{tgx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x^{tgx})}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{tgx \cdot \ln x}\right) = e^{tgx \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(tgx \cdot \ln x) = x^{tgx}\left(\left(\frac{d}{dx} tgx\right) \cdot \ln x + tgx \cdot \frac{d\ln x}{dx}\right)$

$= \boxed{x^{tgx} \cdot \left(sec^2 x \cdot \ln x + tgx \cdot \frac{1}{x}\right)}$

Q3)

Versões B e D



$V_2 = \frac{5}{4} V_1$

$l_2 = 8 - x$

$l_1 = \sqrt{3^2 + x^2}$

$l_1 = v_1 \cdot t_1$

$l_2 = v_2 \cdot t_2$

$t_{total} = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{v_1} + \frac{8-x}{\frac{5}{4} v_1}$

$t(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{v_1} + \frac{4.(8-x)}{5 v_1}$, $x \in [0, 8]$

$t'(x) = \frac{1}{2 v_1 \sqrt{9+x^2}} \cdot 2x - \frac{4}{5 v_1} = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{\cancel{v_1} \sqrt{9+x^2}} = \frac{4}{5 \cancel{v_1}} \Rightarrow 5x = 4\sqrt{9+x^2}$

$25x^2 = 16(9+x^2) = 16.9 + 16x^2$

$\Rightarrow 9x^2 = 16.9 \Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow \boxed{x = 4m}$

$t(0) = \frac{3}{v_1} + \frac{32}{5v_1} = \frac{15+32}{5v_1} = \frac{47}{5v_1}$

$t(8) = \frac{\sqrt{9+64}}{v_1} = \frac{\sqrt{73}}{v_1}$

$t(4) = \frac{5}{v_1} + \frac{4.4}{5v_1} = \frac{25+16}{5v_1} = \frac{41}{5v_1}$ → mínimo absoluto

Versões A e C

Volume = 1 = (Área base). (altura) = $\pi R^2 \cdot h \Rightarrow R^2 \cdot h = 1$

$A_{base} = \pi R^2$, $A_{tampa} = \pi R^2$, $A_{lateral} = 2\pi R h$

C = Custo total = $A_{base} \cdot p_{base} + A_{tampa} \cdot p_{tampa} + A_{lateral} \cdot p_{lateral}$

Como $p_{base} = p_{lateral} = 1$ e $p_{tampa} = 7$, temos:

$C = \pi R^2 \cdot 1 + \pi R^2 \cdot 7 + 2\pi R \cdot h \cdot 1 = 8\pi R^2 + 2\pi R h$. Como $h = \frac{1}{R^2}$, temos

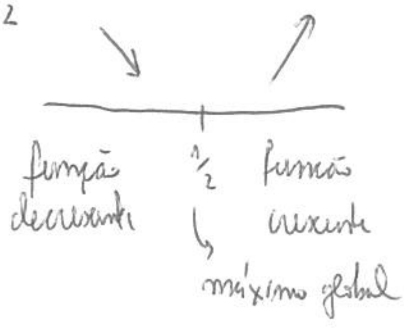
$C(R) = 8\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1}{R^2} = 8\pi R^2 + \frac{2\pi}{R} \Rightarrow C'(R) = 16\pi R - \frac{2\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 16\pi R = \frac{2\pi}{R^2}$

$\Rightarrow R^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2} m} \Rightarrow R^2 \cdot h = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot h = 1 \Rightarrow \boxed{h = 4m}$

Porque é mínimo global?

$C'(R) = \frac{16\pi R^3 - 2\pi}{R^2}$ → > 0 se $R > \frac{1}{2}$, < 0 se $R < \frac{1}{2}$

R^2 → sempre positivo



Q4)

Versão A: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ reta $x=0$ é assíntota vertical

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ reta $y=0$ é assíntota horizontal

raízes:

$f(x)=0 \Rightarrow x=-1$

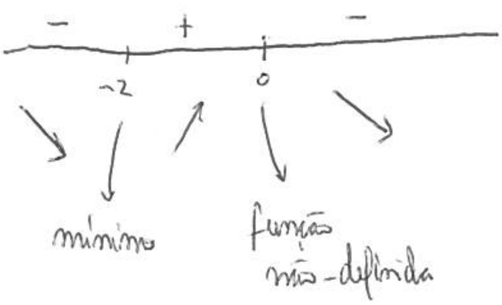
b) $f'(x) = \frac{1.x^2-(x+1).2x}{x^4} = \frac{x^2-2x^2-2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

$x^4 \to$ sempre positivo

sinal de f':

$-x^2-2x=0$

$\Rightarrow \cancel{x=0}$ ou $x=-2$



$f(-2) = \frac{-1}{4}$

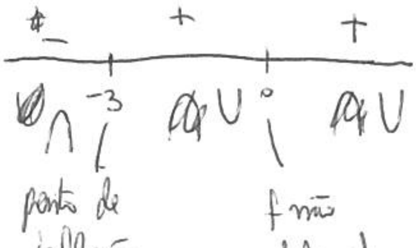
c) $f''(x) = \frac{-1.x^3-(-x-2).3x^2}{x^6} = \frac{-x^3+3x^3+6x^2}{x^6} = \frac{+2x^3+6x^2}{x^6} = \frac{+2x+6}{x^4}$

$x^4 \to$ sempre positivo

sinal de f'':

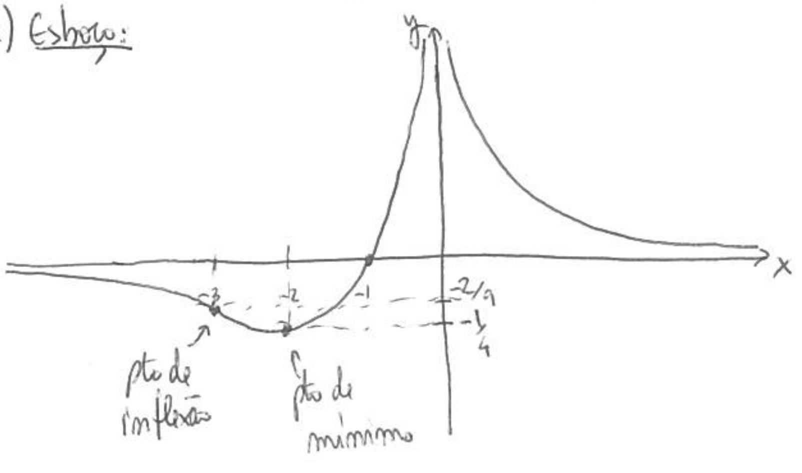
$+2x+6=0$

$x=-3$



$f(-3) = \frac{-2}{9}$

d) Esboço:



Q4)

Versão B: $f(x)=\dfrac{3x-3}{x^3}$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R}^*$, $\cancel{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ reta $x=0$ é assíntota vertical

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ reta $y=0$ é assíntota horizontal

raízes: $f(x)=0 \Rightarrow x=1$

b) $f'(x) = \dfrac{3.x^3-(3x-3).3x^2}{x^6} = \dfrac{3x^3-9x^3+9x^2}{x^6} = \dfrac{-6x^3+9x^2}{x^6} = \dfrac{-6x+9}{x^4}$ → sempre positivo

sinal de f': $-6x+9=0$

$6x=9$

$x=\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow f'(x)$

+	0	+	3/2	−

0: função não definida

3/2: ponto de ~~mínimo~~ máximo

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\frac{9}{2}-3}{\frac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{8}{27} = \dfrac{4}{9}$

c) $f''(x) = \dfrac{-6.x^4-(-6x+9).4x^3}{x^8} = \dfrac{-6x^4+24x^4-36x^3}{x^8} = \dfrac{18x^4-36x^3}{x^8} = \dfrac{18x^2(x^2-2x)}{x^8}$

$f''(x) = \dfrac{18.(x^2-2x)}{x^6}$ → sempre positivo $\Rightarrow$ sinal de f'':

+	0	−	2	+
∪		∩		∪

0: função não definida

2: ponto de inflexão

$f(2) = \dfrac{3}{8}$

d) esboço: