Lista 7 - Álgebra Linear

Mudança de base e transformação inversa

2° quadrimestre de 2013 -3° quadrimestre de 2014 - Professores Maurício Richartz e Vladislav Kupriyanov

Leitura recomendada: seções 3.9, 4.7 e 5.4 do Boldrini e seções 2.6, 2.10, 2.11 e 2.19 do Apostol.

1 — Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,2)\}$, $\beta_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1,-1),(0,-1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. a) Determine as seguintes matrizes mudança de base: $[I]^{\beta_1}_{\beta_2}$, $[I]^{\beta_2}_{\beta_3}$ e $[I]^{\beta_1}_{\beta_3}$. Verifique que $[I]^{\beta_1}_{\beta_3} = [I]^{\beta_2}_{\beta_3} \cdot [I]^{\beta_1}_{\beta_2}$. b) Calcule a inversa das matrizes encontradas em a). As matrizes obtidas representam quais mudanças de base?

2 — Considere as bases $\beta_1 = \{6+3x, 1-2x, x^2+2x-2\}$ e $\beta_2 = \{2, 3+2x, 5-2x-x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

a) Encontre a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1.

b) Calcule a inversa da matriz obtida em a) para obter a matriz mudança de base de β_1 para β_2.

c) Encontre as coordenadas de $\mathbf{v} = 1-2x$ na base β_1. Use a matriz mudança de base para encontrar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base β_2.

3 — A matriz mudança de base em $\mathbb{R}^2$, da base β para a base $\alpha = \{(1,1),(1,2)\}$ é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine a base β.

4 — Seja V um espaço vetorial real e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Qual a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}$?

5 — Seja V o espaço vetorial das matrizes 2x2 triangulares superiores. Sejam

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V. Encontre a matriz mudança de base de β_2 para β_1 e a matriz mudança de base de β_1 para β_2.

6 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (2x+3y-5z, x-y-z, 2x+y+z)$. Sejam β_1 a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\beta_2 = \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,0)\}$ outra base de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine a matriz $[T]_{\beta_1}^{\beta_1}$.

b) Determine a matriz mudança de base de β_2 para β_1.

c) Usando as matrizes encontradas acima, determine $[T]_{\beta_2}^{\beta_2}$.

d) A transformação T é inversível? Caso seja, determine $[T^{-1}]_{\beta_1}^{\beta_1}$ e $[T^{-1}]_{\beta_2}^{\beta_2}$

7 — Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$ dada por $T(p) = p'$.

a) Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_2$.

b) Sejam $\alpha = \{1-x, 1+x, x^2-x^3, x^2+x^3\}$ e $\beta = \{1-x, 1+x, x^2\}$ bases de $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente. Determine a matriz mudança de base em $\mathcal{P}_3$, da base α para a base canônica. Determine a matriz mudança de base em $\mathcal{P}_2$, da base canônica para a base β.

c) Usando as matrizes encontradas acima, determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

d) A transformação derivada é inversível? Se sim, determine $[T^{-}1]_{\alpha}^{\beta}$.

8 — Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$.

a) Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}$.

b) Sejam $\alpha = \{1-x, 1+x, x^2\}$ e $\beta = \{-3\}$ bases de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Determine a matriz mudança de base em $\mathcal{P}_2$, da base α para a base canônica. Determine a matriz mudança de base em $\mathbb{R}$, da base canônica para a base β.

c) Usando as matrizes encontradas acima, determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

d) A transformação integral é inversível? Se sim, determine $[T^{-}1]_{\alpha}^{\beta}$.