1. *(a) Qual é a velocidade de um elétron cujo comprimento de onda é* $3{,}00\ cm$?

   (b) Qual a velocidade de um próton com o mesmo comprimento de onda?

   (c) Qual a razão para obter velocidades que diferem por três ordens de grandeza, uma vez que os comprimentos de onda são iguais?

   (d) Considere que um elétron e um próton tenham a mesma velocidade $v = 1{,}00 \times 10^6\ m/s$. *Quais os respectivos comprimentos de onda?*

   (e) Nessas condições, você esperaria que efeitos quânticos fossem mais importantes para o elétron ou para o próton? Justifique sua resposta.

$Resolução$

(a) De acordo com a relação de onda-partícula de de Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} = mv$$

Logo, para um elétron com $\lambda = 3{,}00 \times 10^{-2}\ m$:

$$v = \frac{h}{m\lambda}$$

$$\Rightarrow v = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{9{,}109 \times 10^{-31} \cdot 3{,}00 \times 10^{-2}} \approx \boxed{0{,}0242\ m/s}$$

(b) Para um próton com o mesmo comprimento de onda, basta adequar o valor de sua massa:

$$v = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{1{,}673 \times 10^{-27} \cdot 3{,}00 \times 10^{-2}} \approx \boxed{0{,}132 \times 10^{-4}\ m/s}$$

(c) A razão implicaria:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{h/m_1\lambda}{h/m_2\lambda}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \approx 10^3$$

$$\Rightarrow \boxed{m_2 \approx m_1 \times 10^3}$$

(d) Para um elétron com $v = 1{,}00 \times 10^6\ m/s$, temos:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\Rightarrow \lambda_e = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{9{,}109 \times 10^{-31} \cdot 1{,}00 \times 10^6} \approx \boxed{7{,}27\ \text{Å}m}$$

Enquanto que, para um próton com mesma velocidade, temos:

$$\lambda_p = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{1{,}673 \times 10^{-27} \cdot 1{,}00 \times 10^{6}} \approx \boxed{3{,}96 \times 10^{-3}\ \text{Å}m}$$

(e) Nessas condições, os efeitos quânticos seriam mais importantes para o elétron, pois sua massa é inferior e portanto as leis da Física Quântica teriam mais influência. Isso é notado pelos resultados do item anterior, onde o comprimento de onda se torna tão pequeno na medida em que a massa aumenta tal que não possamos mais medi-la por nenhum aparelho atual.

---

2. *Uma lâmpada de sódio emite luz amarela com comprimento de onda $\lambda = 550\ nm$. Quantos fótons são emitidos por segundo, se a potência da lâmpada for de (a) $1{,}00\ W$? e (b) $100\ W$?*

   (c) Qual o momento linear dos fótons emitidos pela lâmpada de sódio?

   (d) Sabendo que os fótons são emitidos por uma transição entre dois níveis eletrônicos do átomo de sódio, obtenha a diferença entre esses níveis de energia.

Resolução

(a) Como a potência da lâmpada é de $1{,}00\ W$, temos:

$$\mathcal{P} = 1{,}00\ J/s$$

Ou seja, por segundo estão sendo emitidos fótons com $1{,}00\ J$ de energia total somada.

Como o comprimento de onda da luz amarela que emite esses fótons é de $550 \times 10^{-9}\ m$, de acordo com a equação de Einstein, cada fóton possui energia:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

onde c é a velocidade da luz em que um fóton viaja.

Juntando os resultados, obtemos que a quantidade n_a de fótons emitidos por segundo é:

$$n_a = \frac{\mathcal{P}}{E} = \frac{\lambda\mathcal{P}}{hc}$$

$$\Rightarrow n_a = \frac{550 \times 10^{-9} \cdot 1{,}00}{6{,}626 \times 10^{-34} \cdot 2{,}998 \times 10^{8}} \approx \boxed{2{,}77 \times 10^{18}\ s^{-1}}$$

(b) Para uma potência de $100\ W$, temos que a quantidade n_b de fótons emitidos é:

$$n_b = \frac{100 \cdot \mathcal{P}}{E} = 100 \cdot n_a \approx \boxed{2{,}77 \times 10^{20}\ s^{-1}}$$

(c) O momento linear p desses fótons é dado pela relação de de Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{550 \times 10^{-9}} \approx \boxed{1{,}20 \times 10^{-27}\ kg \cdot m/s}$$

(d) Como cada fóton possui uma energia específica e cada um é resultado de uma mudança de nível onde sua energia específica é exatamente a diferença de energia entre esses dois níveis do átomo de sódio. Assim, sabemos que, para um fóton de qualquer lâmpada, sua energia é dependente somente de seu comprimento de onda:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \cdot 2{,}998 \times 10^{8}}{550 \times 10^{-9}} \approx \boxed{3{,}61 \times 10^{-19}\, J}$$

---

3. *Considere que a função de onda de um elétron confinado em uma caixa unidimensional de comprimento L seja dada por:*

$$\psi(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

$$\psi(x) = 0\ , \quad |x| > L/2$$

(a) Essa função de onda é quadraticamente integrável?

(b) Essa função de onda é normalizada?

(c) Em caso negativo, normalize-a.

(d) Qual a probabilidade de encontrar o elétron nos seguintes intervalos: $-L/2 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq L/2$, $-L/4 \leq x \leq L/4$?

$Resolução$

(a) Para ser quadraticamente integrável, essa função de onda precisa ter energia finita, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx < \infty$$

Por se tratar de uma função senoidal confinada, ou seja, por possui valor diferente de nulo apenas dentro de um espaço definido (neste caso, entre $-L/2$ a $L/2$), sua energia é certamente finita. Matematicamente, isso pode ser provado calculando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx = \int_{-\infty}^{-L/2} 0 \, dx + \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{\infty} 0 \, dx$$

$$cos(2a) = cos(a + a) = cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$\Rightarrow cos(2a) = cos^2(a) - [1 - cos^2(a)]$$

$$\Rightarrow cos^2(a) = \frac{1 + cos(2a)}{2}$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-L/2}^{L/2} dx + \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2} - \left(-\frac{L}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{L}{2\pi}[\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(-\pi)]$$

$$= \boxed{\frac{L}{2} < \infty}$$

(b) Essa função não está normalizada, pois o resultado final do item anterior deveria ter sido 1.

(c) Sua forma normalizada teria uma constante multiplicativa com valor $\sqrt{2/L}$, pois:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\psi^*\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\psi\right) dx = \frac{2}{L}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, dx = \frac{2}{L}\frac{L}{2} = 1$$

(d) Como o elétron está confinado em $-L/2$ e $L/2$, por simetria, a probabilidade de encontrar o elétron entre $-L/2 \le x \le 0$ *e* $0 \le x \le L/2$ é de $1/2$. Matematicamente isso é provado por:

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{0} \psi^*\psi\, dx = \frac{2}{L}\cdot\frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_{-L/2}^{0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{L}\int_{0}^{L/2} \psi^*\psi\, dx = \frac{2}{L}\cdot\frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_{0}^{L/2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Analogamente, para $-L/4 \le x \le L/4$, temos:

$$\frac{2}{L}\int_{-L/4}^{L/4} \psi^*\psi\, dx = \frac{2}{L}\cdot\frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_{-L/4}^{L/4} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}}$$

4. *Em cada caso, mostre que $f(x)$ é uma autofunção do operador dado. Ache o autovalor:*

Â	$f(x)$
(a) $\frac{d^2}{dx^2}$	$\cos(\omega x)$
(b) $\frac{d}{dt}$	$e^{i\omega t}$
(c) $\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 3$	$e^{\alpha x}$
(d) $\frac{\partial}{\partial y}$	$x^2 e^{6y}$

Resolução

Para que $f(x)$ seja uma autofunção, ao se aplicar o operador Â nela, é preciso que o resultado seja igual a um múltiplo dela mesma:

$$\hat{A}[f(x)] = \alpha f(x)$$

onde α é dito autovalor.

(a) $\frac{d^2}{dx^2}[\cos(\omega x)] = \boxed{(-\omega^2)\cos(\omega x)}$

(b) $\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = \boxed{(i\omega)e^{i\omega t}}$

(c) $\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x}) + 2\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) + 3(e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x} + 3e^{\alpha x} = \boxed{(\alpha^2 + 2\alpha + 3)e^{\alpha x}}$

(d) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 e^{6y}) = \boxed{(6)x^2 e^{6y}}$

5. *Mostre que*

(a)

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}$$

(b)

$$\int_0^a x \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{4}$$

Resolução

(a)

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx =$$

$$cos(2a) = cos(a+a) = cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$\Rightarrow cos(2a) = [1 - sen^2(a)] - sen^2(a)$$

$$\Rightarrow sen^2(a) = \frac{1 - cos(2a)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{a}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left[a - \frac{a}{2n\pi}\operatorname{sen}(n2\pi)\right]$$

$$= \boxed{\frac{a}{2}} \blacksquare$$

(b)

$$\int_0^a x \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^a x - x\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx \;\Rightarrow\; v = \frac{a}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \left[\frac{ax}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + \left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right]\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{2} - \left[\frac{ax}{2n\pi}\text{sen}(n2\pi) + \left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2[\cos(n2\pi) - 1]\right]\right]$$

$$= \boxed{\frac{a^2}{4}} \blacksquare$$

---

6. *a) Mostre que a função de onda $\Psi(x,t) = Ae^{(kx-\omega t)}$ não satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo.*

b) Mostre que a função $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ satisfaz tanto a equação de Schrödinger dependente do tempo quanto a equação de onda clássica

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$Resolução$

(a) Para satisfazer a equação de Schrödinger, basta que $\Psi(x,t)$ respeite a igualdade:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[Ae^{(kx-\omega t)}\right] + V(x,t)Ae^{(kx-\omega t)} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[Ae^{(kx-\omega t)}\right]$$

$$-\frac{\hbar^2k^2}{2m}Ae^{(kx-\omega t)} + V(x,t)Ae^{(kx-\omega t)} = -i\hbar\omega Ae^{(kx-\omega t)}$$

$$-\frac{\hbar^2k^2}{2m} + V(x,t) = -i\hbar\omega$$

$$-\frac{h^2 4\pi^2}{8\pi^2 m\lambda^2} + V(x,t) = -i\frac{h}{2\pi}2\pi\nu$$

$$-\frac{h^2}{2m\lambda^2} + V(x,t) = -ih\nu$$

$$\frac{p^2}{2m} - V(x,t) = iE$$

$$\boxed{K - V = iE} \quad Absurdo! \blacksquare$$

(b)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}{\partial x^2}+V(x,t)Ae^{i(kx-\omega t)}=i\hbar\frac{\partial\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}{\partial t}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2Ae^{i(kx-\omega t)}+V(x,t)Ae^{i(kx-\omega t)}=\hbar\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}+V(x,t)=\hbar\omega$$

$$\boxed{K+V=E}\ \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}{\partial t^2}$$

$$-k^2Ae^{i(kx-\omega t)}=-\omega^2\frac{1}{c^2}Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\frac{(2\pi\nu)^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\nu^2}{c^2}$$

$$\boxed{c=\lambda\nu}\ \blacksquare$$

7. *Determine (a) $\langle x \rangle$ e (b) $\langle x^2 \rangle$ para o segundo estado excitado ($n = 3$) de um poço quadrado infinito.*

Resolução

Em um poço quadrado infinito temos:

$$\begin{cases} V(x) = 0\,, & 0 < x < L \\ V(x) \to \infty\,, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + 0 \cdot \psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

Assumindo $\psi(x) = e^{\alpha x}$ e como $V = 0 \Rightarrow E = K$:

$$\frac{\partial^2[e^{\alpha x}]}{\partial x^2} = -\frac{2mK}{\hbar^2}e^{\alpha x}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow p = mv = m\sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\therefore p^2 = \frac{m^2 2K}{m} = 2mK$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} = -\frac{p^2}{(h/2\pi)^2}e^{\alpha x}$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 e^{\alpha x}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ik$$

$$\therefore \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Resolvendo as condições de contorno:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\begin{cases} Ae^{ik0} + Be^{-ik0} = 0 \\ Ae^{ikL} + Be^{-ikL} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{ikL} + Be^{-ikL} = 0 \end{cases}$$

$$Ae^{ikL} - Ae^{-ikL} = 0$$

$$e^{ikL} - e^{-ikL} = 0$$

$$[\cos(kL) + i\,\text{sen}(kL)] - [\cos(kL) - i\,\text{sen}(kL)] = 0$$

$$2i\,\text{sen}(kL) = 0$$

$$\text{sen}(kL) = 0$$

$$\Rightarrow kL = n\pi\ ; \quad n = 1,2,3,4,\dots$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$\therefore \psi(x) = Ae^{ikx} - Ae^{-ikx}$$

$$\psi(x) = 2Ai\,\text{sen}(kx)$$

$$\psi(x) = A'\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Normalizando a função:

$$\int_0^L \psi^*\psi\,dx = 1$$

$$A'^2 \int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 1$$

$$cos(2a) = cos(a + a) = cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$\Rightarrow cos(2a) = [1 - sen^2(a)] - sen^2(a)$$

$$\Rightarrow sen^2(a) = \frac{1 - cos(2a)}{2}$$

$$\frac{A'^2}{2}\int_0^L 1 - cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\,dx = 1$$

$$\frac{A'^2}{2}\left[x - \frac{L}{2n\pi}sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = 1$$

$$\frac{A'^2}{2}L = 1$$

$$A' = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Para o segundo estado excitado onde $n = 3$ temos:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

(a) Assim, o valor da posição esperada é:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\, x\, \psi\, dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\, dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left[\int_0^L x dx - \int_0^L x\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$u = x \qquad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx \;\Rightarrow\; v = \frac{L}{6\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right)$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2} - \left[\frac{Lx}{6\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{6\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right)\right]\right]_0^L$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{2} - \left[\frac{L^2}{6\pi}[\mathrm{sen}(6\pi) - 0] + \left(\frac{L}{6\pi}\right)^2 [\cos(6\pi) - 1]\right]\right]$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\langle x\rangle = \frac{L}{2}}$$

(b) Analogamente:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{x^2 - x^2\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right)}{2}\, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\int_0^L x^2 dx - \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow v = \frac{L}{6\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \left[\frac{L}{6\pi}x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) - \int_0^L 2x \frac{L}{6\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]\right]_0^L$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{L}{6\pi}x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \frac{L}{3\pi}\int_0^L x \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]_0^L$$

$$w = x \Rightarrow dw = dx$$

$$dq = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow q = -\frac{L}{6\pi}\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{L}{6\pi}x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \frac{L}{3\pi}\left[-\frac{L}{6\pi}x\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) - \int_0^L \left(-\frac{L}{6\pi}\right)\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]\right]_0^L$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{L}{6\pi}x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{18\pi^2}x\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{18\pi^2}\int_0^L \cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx\right]_0^L$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{L}{6\pi}x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{18\pi^2}x\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \frac{L^3}{108\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{18\pi^2}\right)$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18\pi^2}\right)}$$

8. *Uma partícula se encontra em um poço quadrado infinito de largura L. Calcule a energia do estado fundamental: (a) se a partícula é um próton e $L = 0{,}1\ nm$, o tamanho aproximado de uma molécula; (b) se a partícula é um próton e $L = 1\ fm$, o tamanho aproximado de um núcleo.*

$Resolução$

Utilizando o valor do número de onda k encontrado pelo exercício 7 no estado fundamental, temos:

$$k = \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \qquad n = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{h}{h} = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{h/\lambda}{h/2\pi} = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{p}{\hbar} = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\pi}{L} \ ; \quad E = K\ pois\ V = 0$$

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}$$

(a) Se a partícula é um próton e $L = 0{,}1\ nm$ for o tamanho aproximado de uma molécula, sua energia será:

$$E = \frac{(6{,}6 \times 10^{-34})^2}{8 \cdot 1{,}7 \times 10^{-27}(0{,}1 \times 10^{-9})^2} \approx \boxed{3{,}2 \times 10^{-21}\ J} = \boxed{3{,}2\ zJ}$$

(b) Se a partícula é um próton e $L = 1\ fm$ for o tamanho aproximado de um núcleo, sua energia será:

$$E = \frac{(6{,}6 \times 10^{-24})^2}{8 \cdot 1{,}7 \times 10^{-27}(1 \times 10^{-15})^2} \approx \boxed{3{,}2 \times 10^{-9}\ J} = \boxed{3{,}2\ nJ}$$

9. *Alguns dados para a energia cinética dos elétrons ejetados com função do comprimento de onda da radiação incidente do efeito fotoelétrico para o sódio metálico são:*

$\lambda\,/\,nm$	100	200	300	400	500
Energia / eV	10,1	3,94	1,88	0,842	0,222

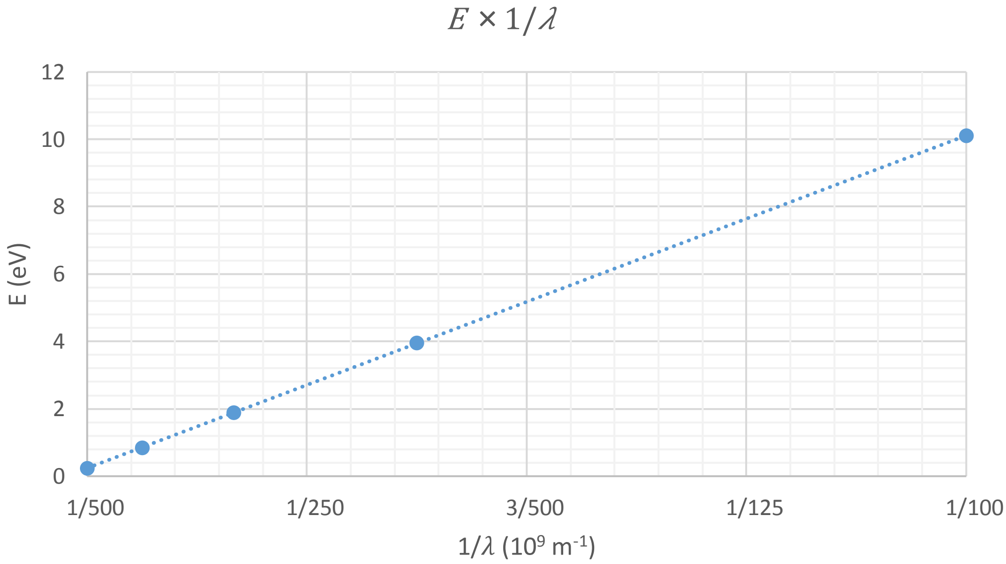
Faça o gráfico destes dados e obtenha h e a função trabalho do metal φ.

$Resolução$

Pela equação de Einstein:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Ou seja, a constante de Plank h vezes a velocidade da luz c é o coeficiente angular da reta formada pelo gráfico da energia E versus o recíproco do comprimento de onda λ. Sabendo *a priori* o valor da velocidade da luz, podemos obter com uma certa precisão o valor da constante de Plank.



De acordo com os dados e o gráfico temos que:

$$hc = \frac{10{,}1 - 0{,}222}{\frac{1}{100} - \frac{1}{500}} \times 10^{-9} \cdot 1{,}60 \times 10^{-19} = 1{,}98 \times 10^{-25}\ Jm$$

$$h \approx \frac{1{,}98 \times 10^{-25}}{3{,}00 \times 10^{8}} \approx \boxed{6{,}59 \times 10^{-34}\ Js}$$

10. Calcule $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$ e $\sigma_x\sigma_p$ para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito.

$Resolução$

Por definição, o valor esperado da posição x é:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x\psi \, dx$$

Utilizando o valor da autofunção de onda independente do tempo no estado fundamental $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ encontrada no exercício 7, temos:

$$\langle x\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{x - x\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} \, dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left[\int_0^L x dx - \int_0^L x\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{2}\right)$$

$$\langle x\rangle = \frac{L}{2}$$

Analogamente:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{x^2 - x^2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} \, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\int_0^L x^2 dx - \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{L^2 x}{2\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{L^3}{4\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{L}\left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{2\pi^2}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

Para o momento, temos então:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p \psi \, dx$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi \, dx$$

$$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d\psi}{dx} \, dx$$

$$\langle p \rangle = -\frac{2i\hbar}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$\langle p \rangle = -\frac{2i\hbar\pi}{L^2}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\langle p \rangle = -\frac{i\hbar\pi}{L^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\bigg|_0^L$$

$$\langle p \rangle = 0$$

Analogamente:

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{2\hbar^2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2\pi^2\hbar^2}{L^3}\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^3}\left[\int_0^L dx - \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^3}\left[x - \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2}$$

Assim, temos que:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right) - \frac{L^2}{4}}$$

$$\boxed{\sigma_x = L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}}$$

e:

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2}}$$

$$\boxed{\sigma_p = \frac{\pi \hbar}{L} = \frac{h}{2L}}$$

Logo:

$$\sigma_x \sigma_p = \left(L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}\right)\frac{h}{2L}$$

$$\boxed{\sigma_x \sigma_p = \left(\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}\right)\frac{h}{2} > \frac{\hbar}{2}} \quad pois \quad 2\pi\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}} > 1$$