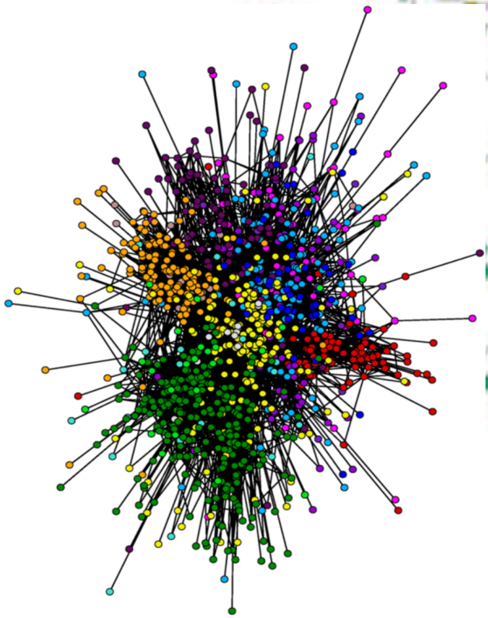
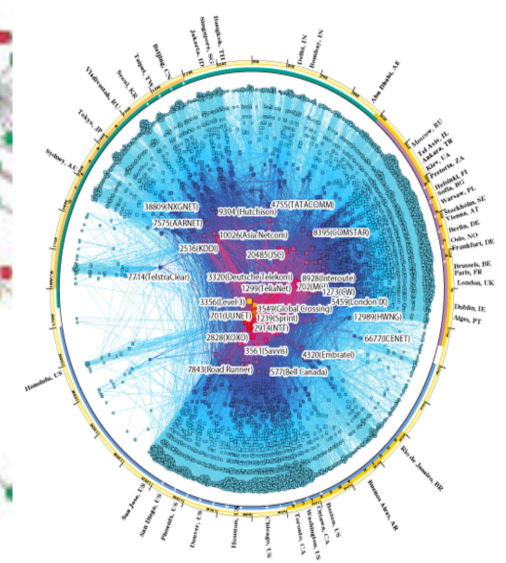
Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

# BC-0506: Comunicação e Redes

# Aula 5: Introdução aos Grafos





Santo André, 2016

# Roteiro da Aula

- Motivação: Pontes de Königsberg
- Definições, Propriedades e Exemplos
- Aplicações de Grafos
  - Caixeiro viajante
  - Caminho mais curto
  - Fluxo máximo

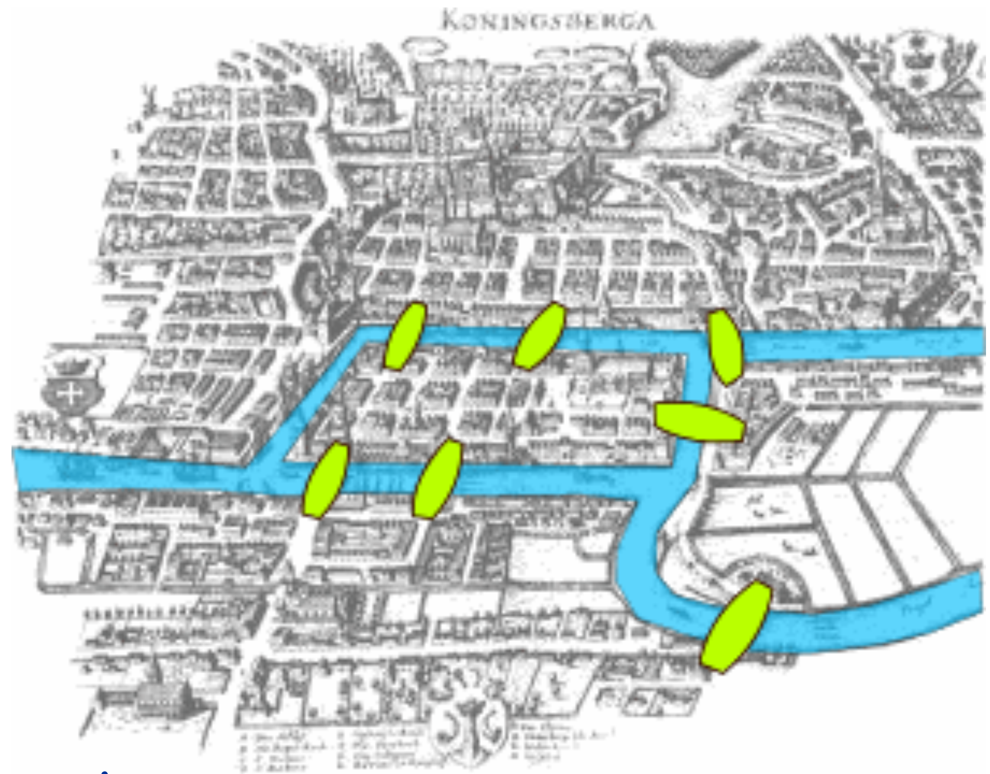
Parte das figuras desta aula foram retiradas do site http://www.wikipedia.org

Universidade Federal do ABC

# As 7 Pontes de Königsberg

# Como começou

- Cidade de Königsberg, Prussia
  - Ficava em ambos os lados do Rio Pregel
  - Tinha 2 ilhas centrais, com as áreas conectadas por 7 pontes



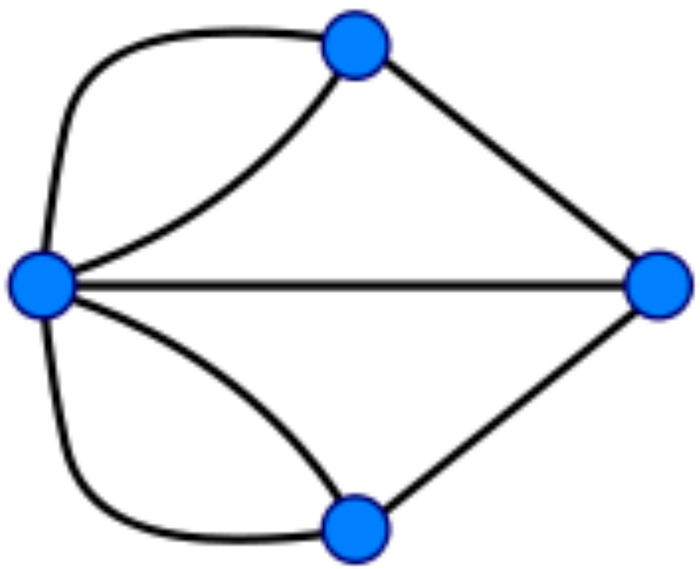

- Foi feita uma proposta a Euler
  - Como fazer para passar por toda a cidade de modo que cada ponte seja cruzada uma única vez?

# Modelagem do Problema

- Euler demonstrou em 1735 que não existe nenhuma rota que resolva o problema!
- Para tal, o primeiro passo foi simplificar o problema
  - Caminhos dentro dos pedaços de terra não interessavam
  - O que interessa são apenas as conexões entre os pedaços de terra, isto é, as pontes

# Grafos

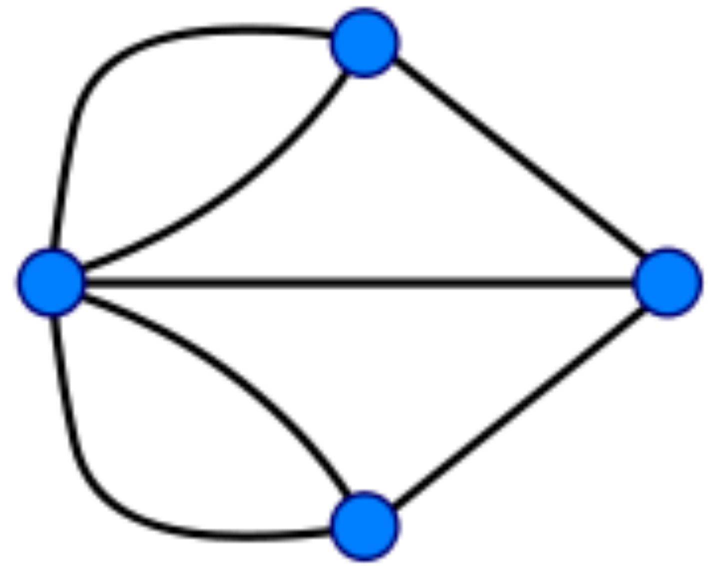
- Chamamos a estrutura matemática resultante de grafo
- Os pontos são chamados de vértices e as conexões de arestas
- A forma de um grafo influi apenas na sua visualização, mas matematicamente é insignificante



- Exercício: Tente desenhar o grafo ao lado com outras formas. Seja criativo!

# Solução

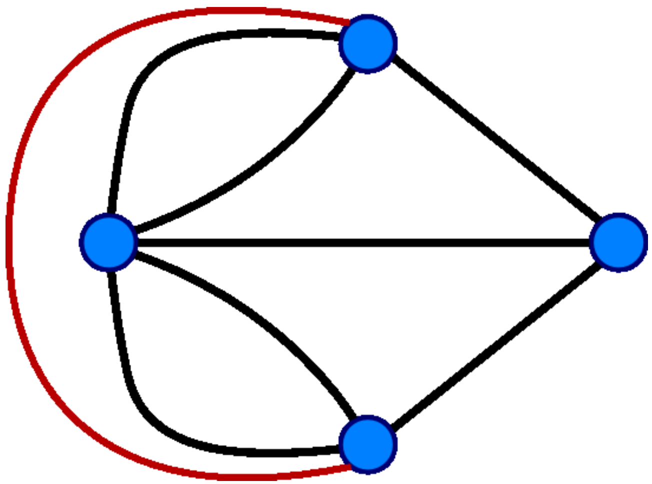
- Se uma pessoa entra em pedaço de terra e sai dele, é preciso que aquele grafo tenha um número par de vértices
  - Com exceção dos vértices onde a caminhada começa e termina
- Olhando o grafo ao lado, por que é impossível encontrar um caminho que cruze cada ponte uma única vez?



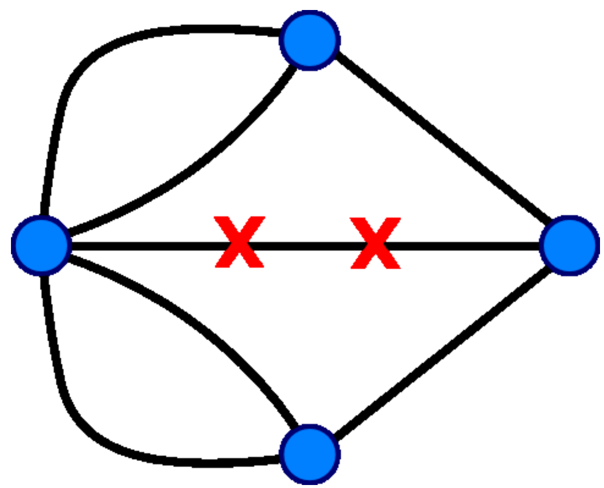
Podemos resolver o problema de dois modos:
1) Construindo uma nova ponte
2) Derrubando uma ponte existente

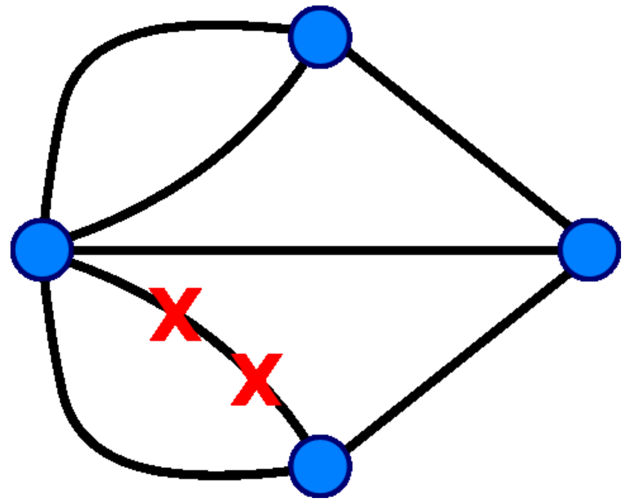
# Resolução

Construindo uma nova ponte



Derrubando uma das pontes



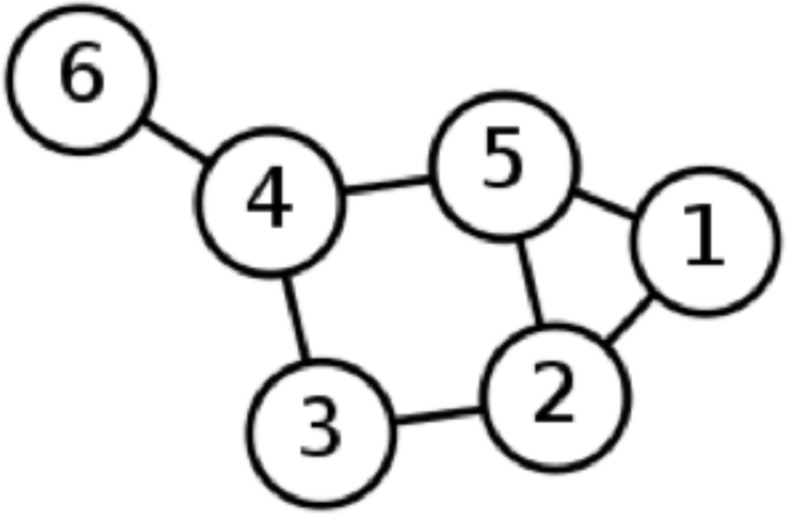


# Caminho Euleriano

- Euler demonstrou que, para que exista um caminho que percorra todos os vértices passando por cada aresta uma única vez:
  - É necessário que nenhum ou 2 dos vértices tenham um número ímpar de arestas
- Carl Hierholzer demonstrou posteriormente que esta condição é também suficiente
- E assim começou o desenvolvimento da teoria dos grafos

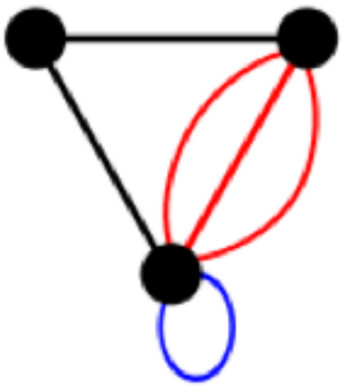
# Algumas Definições, Propriedades e Exemplos

# Definições

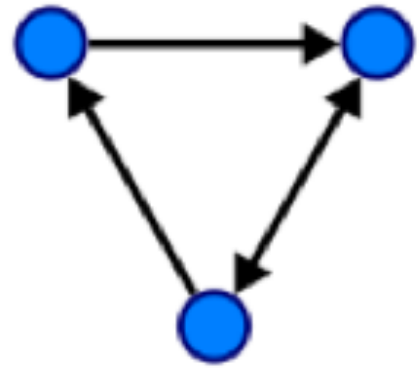



- Podemos definir um grafo por um par ordenado, $G = (V,A)$, onde:
  - $V$ é um conjunto de vértices
  - $A$ é um conjunto de arestas
- No exemplo ao lado, temos:
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $A = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,6\} \}$
- Este grafo é simples (não possui laços e possui no máximo uma aresta entre cada par de vértices) e não-direcionado (as arestas não possuem uma direção definida)

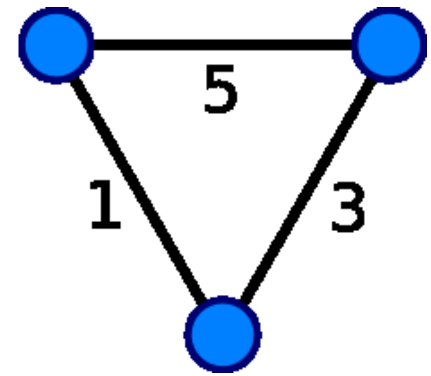
# Propriedades



Pseudo-grafo
(ou multigrafo)

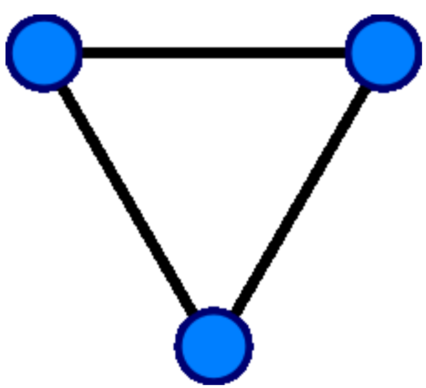


Grafo direcionado

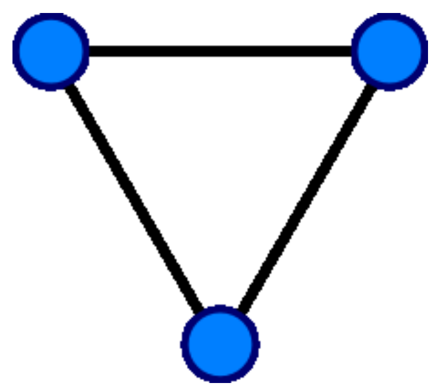



Grafo ponderado

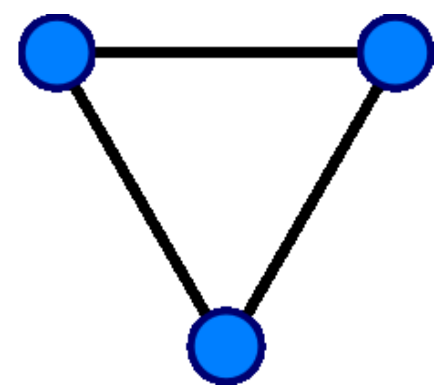
Grafo simples



Grafo
não- direcionado



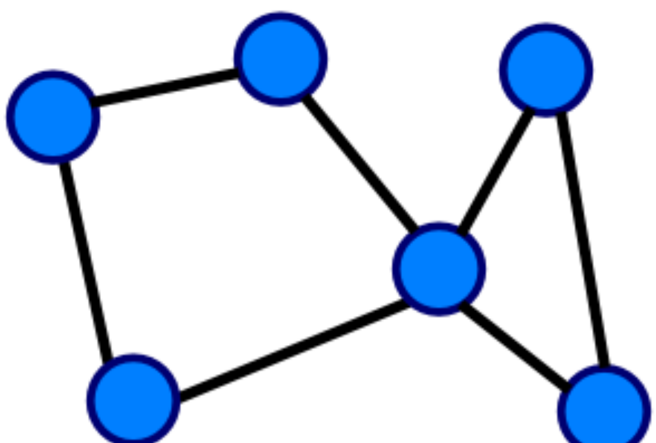
Grafo
não- ponderado

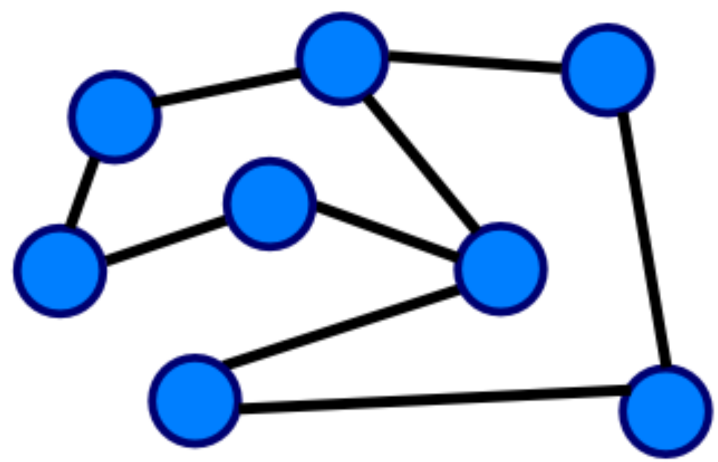


# Outras Propriedades

- Conectividade dos vértices: O menor número de vértices cuja retirada desconecta o grafo
- Conectividade das arestas: O menor número de arestas cuja retirada desconecta o grafo
- E muitas outras...

*Exercício:* Qual a conectividade dos vértices e das arestas nos grafos abaixo?

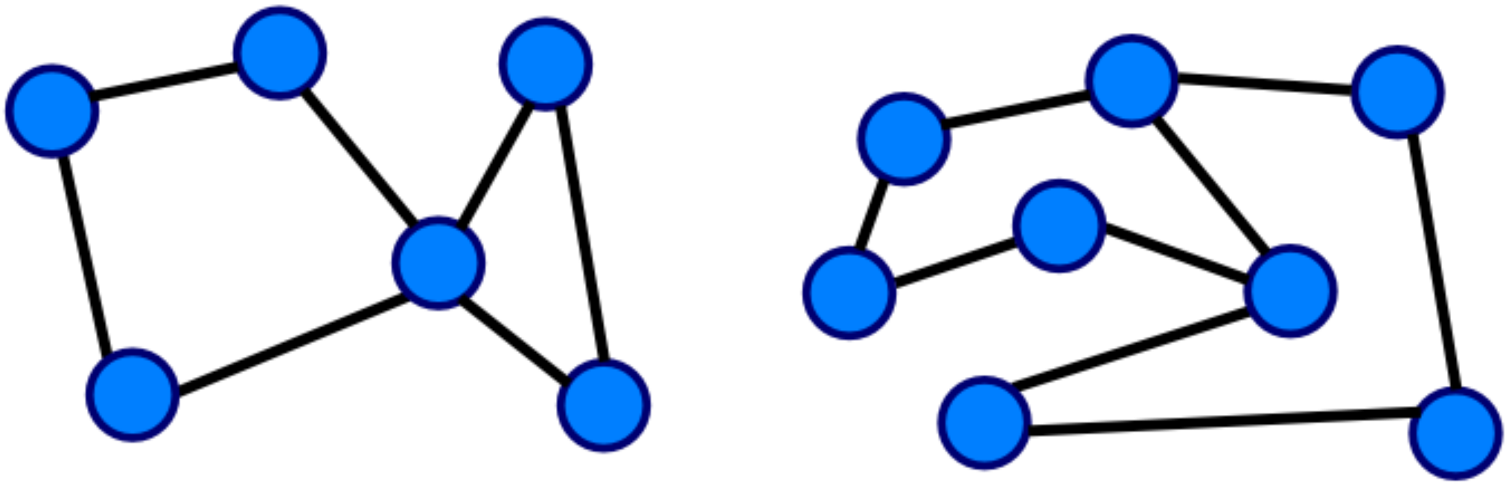




# Outras Propriedades

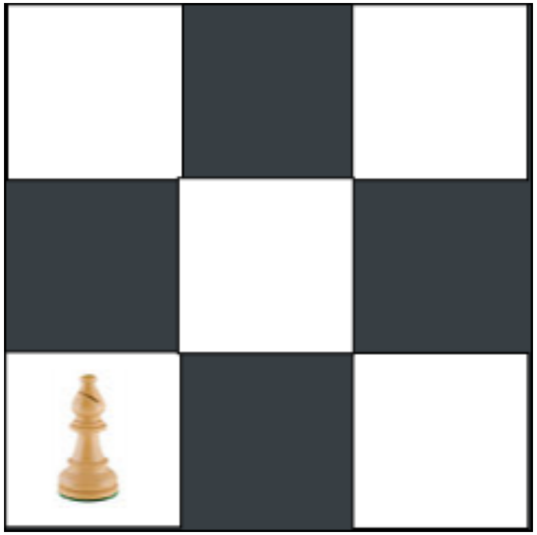
- Existem diversas outras propriedades de grafos:
  - Ordem: Número de vértices
  - Tamanho: Número de arestas
  - Diâmetro: O maior dos menores caminhos entre cada par de vértices

*Por exemplo:* Qual a ordem, tamanho e diâmetro dos grafos? ?

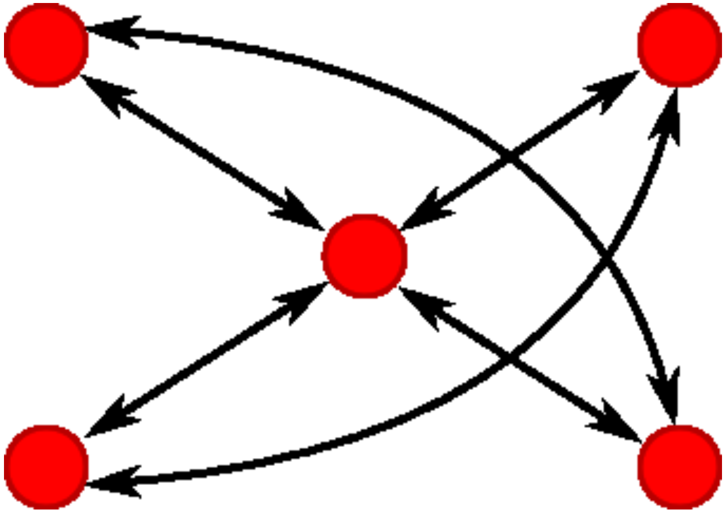


# Jogo de Xadrez 3x3

- Grafos podem ser utilizados para representar diversos problemas:
- Em um tabuleiro 3x3, você deseja mapear todos os movimentos que podem ser realizados por um bispo que se move nas casas brancas



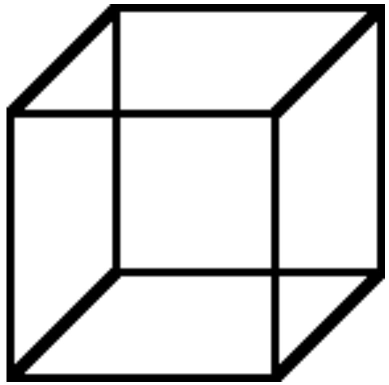
- O grafo à direita representa os movimentos deste bispo



  - *Exercício:* Desenhe um grafo que represente todos os movimentos da torre

# Cubo e grafos planares

- Grafos podem ser utilizados para representar objetos, como cubos
- Um grafo planar é aquele que pode ser desenhado em um plano sem que nenhuma aresta se cruze



- *Exercício 1:* É possível transformar o grafo do cubo em um grafo planar? Se sim, redesenhe o grafo
- *Exercício 2:* E no caso do grafo que representa todos os movimentos do bispo?
- *Exercício 3:* E para os movimentos da torre?

Universidade Federal do ABC

# Aplicação I: Otimização

# Alguns Problemas de Otimização

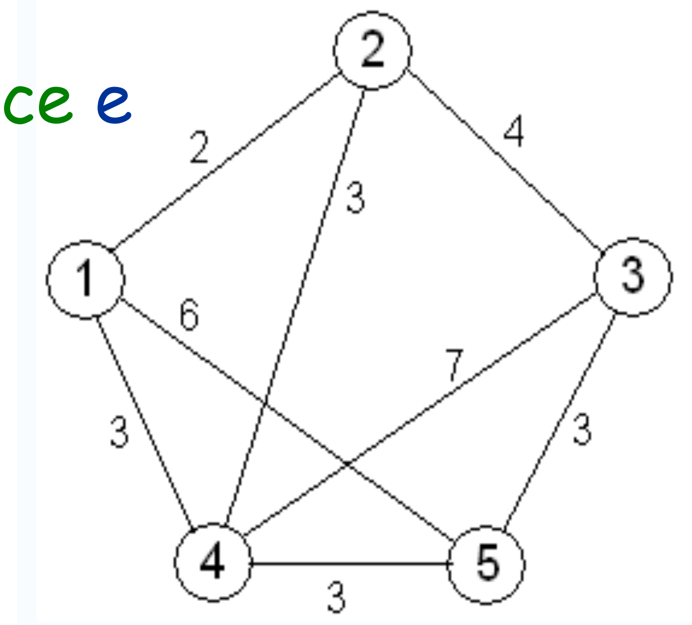
- Uma empresa que realiza entregas na Grande São Paulo possui um centro de distribuição e um caminhão
  Qual o caminho o caminhão deve percorrer de modo a realizar todas as entregas com a menor quilometragem?
- Você deseja implementar em um programa de GPS uma funcionalidade de cálculo da melhor rota entre dois pontos, de modo a minimizar o tempo de viagem
  Como calcular a rota com o menor tempo?
- Você está planejando uma rede de galerias subterrâneas para captação de águas da chuva, evitando alagamentos
  Como calcular o fluxo máximo de água que a rede de galerias é capaz de escoar?

# 1) Caixeiro Viajante

- Um problema clássico é o do caixeiro viajante
- Imagine um caixeiro viajante que deseja encontrar o caminho mais curto que passe por todas as cidades de seu país
- No exemplo ao lado, vemos o caminho mais curto que passa por diversas cidades da Alemanha

# Modelagem por grafos

- Uma maneira de resolver o problema é realizando sua modelagem por grafo ponderado
- Cada cidade é representada por um vértice e cada estrada por uma aresta, com peso igual ao comprimento da estrada
  - Mas podemos também minimizar:
    (1) Tempo gasto na viagem
    (2) Custo total da viagem




- Para Tidia:
  - Exercício 1: Qual o caminho mais curto no grafo acima?
  - Exercício 2: Como você alteraria o grafo que representa o problema de modo a minimizar os fatores (1) e (2)?

# Entrega de Encomendas

- Voltando ao nosso problema inicial:
  - Uma empresa que realiza entregas na Grande São Paulo possui um centro de distribuição e um caminhão
    Qual caminho o caminhão deve percorrer de modo a realizar todas as entregas com a menor quilometragem?

  - Exercício: Como você modelaria este problema utilizando a abordagem de grafos? Em particular, pense em como você definiria os nós e os vértices do grafo

# Solução do Caixeiro Viajante

- O número de roteiros possíveis envolvendo n cidades é `R(n)=(n-1)!`, um número que cresce rapidamente

| n | rotas por segundo | ( n - 1 )! | cálculo total |
|---|---|---|---|
| 5 | 250 milhoes | 24 | insignific |
| 10 | 110 milhoes | 362 880 | 0.003 seg |
| 15 | 71 milhoes | 87 bilhoes | 20 min |
| 20 | 53 milhoes | $1.2 \times 10^{17}$ | 73 anos |
| 25 | 42 milhoes | $6.2 \times 10^{23}$ | 470 milhoes de anos |

- Os algoritmos exatos mais rápidos requerem um tempo que cresce exponencialmente com o número de cidades
- Mas existem aproximações muito mais rápidas :-)

Tabela retirada de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/caixeiro.html

# 2) Menor Distância

- Suponha que você deseje implementar em um programa de GPS uma funcionalidade de cálculo da melhor rota entre dois pontos, de modo a minimizar o tempo de viagem
Como calcular a rota com o menor tempo?

- Exercício: Modele o problema utilizando grafos e pense em como você faria para encontrar a menor distância no grafo

# Modelagem por grafos

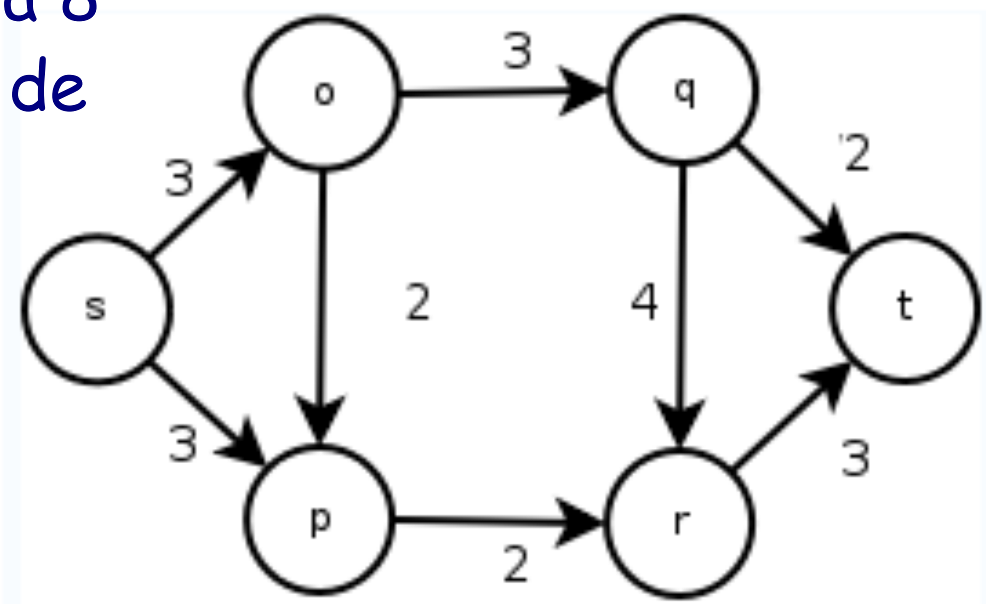
- Você pode modelar o problema atribuindo um nó a cada cruzamento e uma aresta a cada trecho de rua
  - Cada aresta deve receber um peso, que pode ser o tempo para percorrê-lo ou seu comprimento
- Atividade do Tidia:
  - Desenhe um grafo que represente as ruas de um mapa similar a figura ao lado.

# Modelagem por grafos

- A partir do modelo da cidade, seu programa pode calcular a melhor rota entre 2 pontos utilizando algoritmos bem conhecidos para encontrar a menor distância entre 2 pontos
- Ao contrário do problema do caixeiro viajante, existem algoritmos que encontram a distância entre 2 pontos de modo eficiente, isto é, polinomial com relação ao número de nós e arestas do grafo.
- Notem que sem realizar uma modelagem do problema, não seria possível escrever o programa que realiza a tarefa

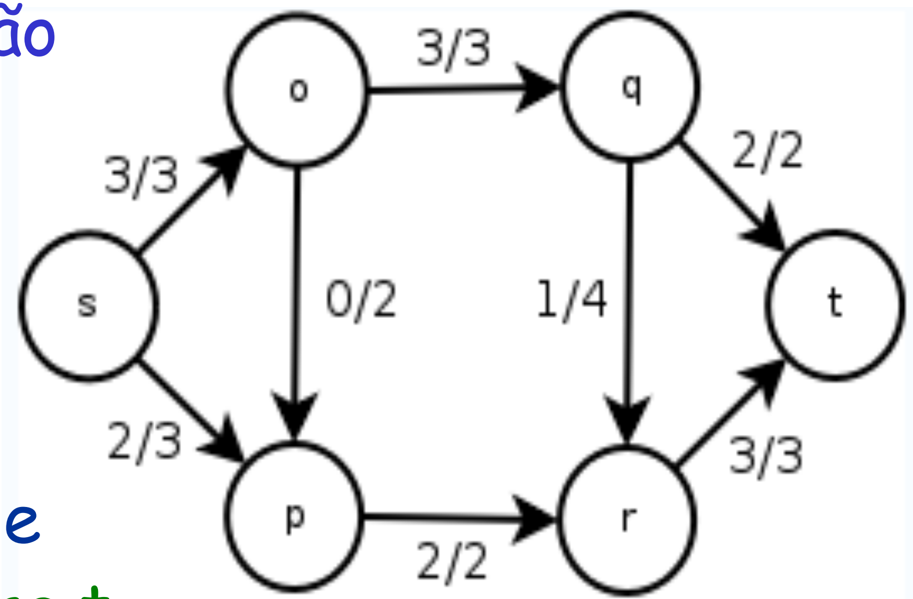
# 3) Fluxo Máximo

- Você está planejando uma rede de galerias subterrâneas para captação de águas da chuva, evitando alagamentos
  Como calcular o fluxo máximo de água que a rede de galerias é capaz de escoar?
- O gráfico ao lado representa 8 galerias pluviais e a direção de fluxo da água
- Exercício: Qual o fluxo máximo de água entre os pontos s e t?



# Problema das Tubulações

- O resultado é 5 e a solução está na figura abaixo
  - Nem todas as tubulações estão carregando sua capacidade máxima de água

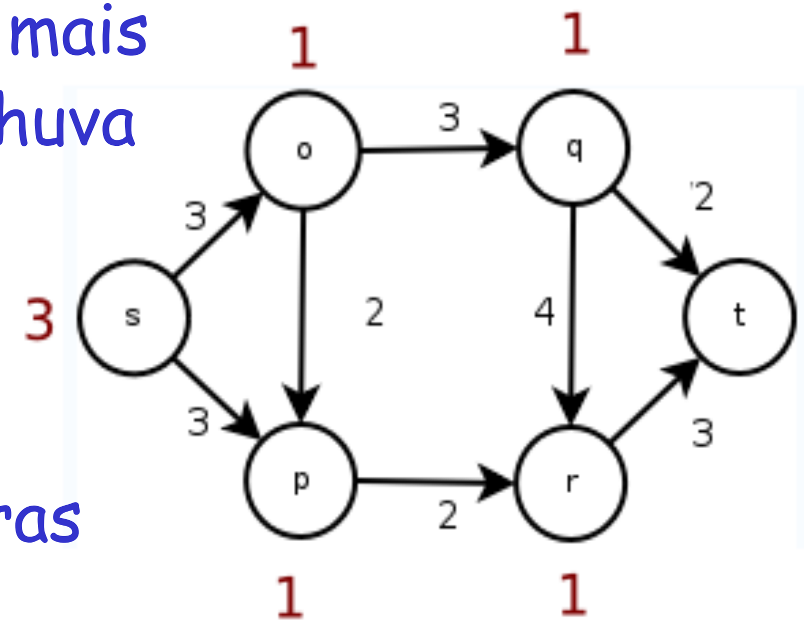



- Agora suponha que a vazão das tubulações não está sendo suficiente. Um engenheiro decide construir uma tubulação de p para t com uma vazão 3.

  - 1) Em quanto a vazão do sistema irá aumentar?
  - 2) Dada esta nova tubulação, que tubulação você alteraria para aumentar a vazão do sistema para 8?

# Cenário mais realista

- O problema dos alagamentos e do escoamento de águas é um pouco mais complicado.
  - Em cada nó há uma quantidade a mais de água sendo gerada devido à chuva
  - Se as tubulações de água saindo de um ponto não derem conta de escoar a chuva naquele ponto e a água que chega de outras tubulações, haverá alagamento




- Considerando que os números em vermelho são a chuva em um dado ponto. Esse sistema é capaz de levar toda a água para t ou haverá pontos de alagamento?

# Outras Aplicações

- O problema do fluxo máximo tem diversas outras aplicações.

  - Pense em como você modelaria

  1) A capacidade de uma rede de transmissão de dados

  2) A capacidade de tráfego de carros em um conjunto de ruas, levando em conta os semáforos