f é diferenciável em (x_0, y_0)?

Verifique se as derivadas parciais, no ponto, existem e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \ .$$

Caso ambas as condições sejam satisfeitas, f é diferenciável em (x_0, y_0) ou você pode fazer a seguinte análise:

(i) f é contínua em (x_0, y_0)?

- Não. Então f não é diferenciável neste ponto.
- Sim.

(ii) Analise se as derivadas parciais são contínuas em (x_0, y_0).

- Sim. Então f é diferenciável neste ponto.
- Não. Verifique se $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$. Se for diferente, então f não é diferenciável.

Atenção! A existência da derivada direcional em (x_0, y_0) em todas as direções não implica na diferenciabilidade da função $f(x, y)$ neste ponto.

Exemplo: A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua no ponto $(0, 0)$, admite derivada direcional em todas as direções neste ponto mas não é diferenciável em $(0, 0)$.