RESUMO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL – PARTE 1: LIMITES
(de acordo com o programa do concurso da EFOMM 2013)

0. CONCEITOS PRELIMINARES

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, a **vizinhança** de centro a e raio δ é o conjunto $V(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[$.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, a **vizinhança reduzida** de centro a e raio δ é o conjunto $V^*(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x-a| < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[- \{a\}$.

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** de A se, $\forall \delta > 0 \Rightarrow A \cap V^*(a,\delta) \neq \varnothing$, ou seja, toda vizinhança reduzida de centro em a tem interseção não vazia com o conjunto A. Essa é uma condição necessária para que se possa calcular o limite da função em um ponto.

1. LIMITES

Seja p um ponto de acumulação do domínio da função f. O **limite** da função f quando x tende a p é dado por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad x \in V^*(p,\delta) \Rightarrow f(x) \in V(L,\varepsilon) \end{cases}$$

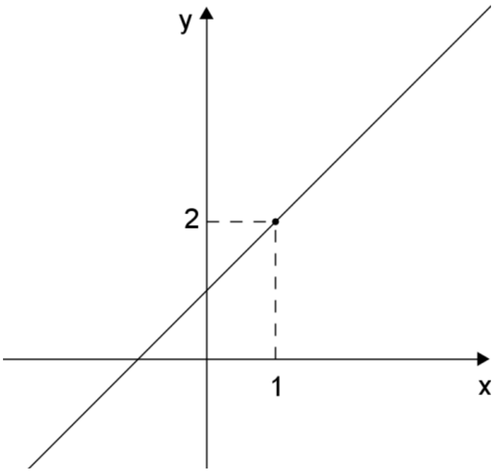
Isso significa que quando x se aproxima de p, sem assumir o valor p, o valor da função f se aproxima de L.

EXEMPLO: Prove que $\lim_{x \to 1/2} (2x+1) = 2$.

$$f(x) = 2x+1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |(2x+1)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < \left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1/2} f(x) = 2$$

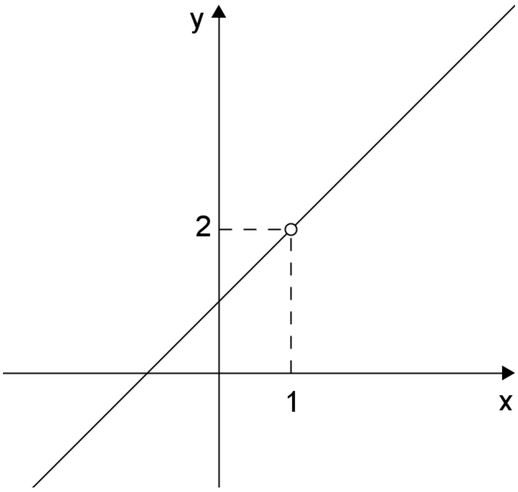
Observe os gráficos das funções a seguir:



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x+1$

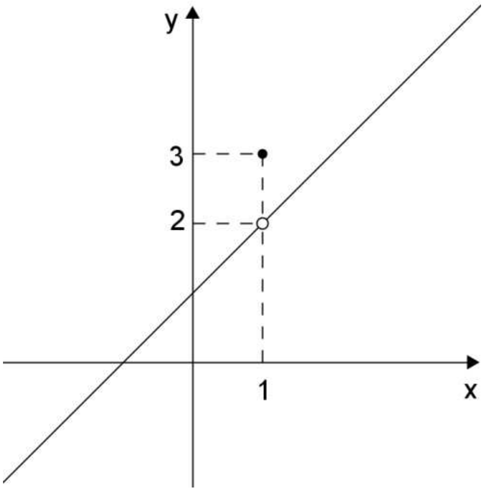
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$



$f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x+1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\neq 1 \\ 3, & \text{se } x=1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$

As três funções possuem o mesmo limite quando x tende a 1, pois nas proximidades de $x=1$ as funções são exatamente iguais e o valor da função em $x=1$ não afeta o limite no ponto.

1.2. Unicidade do limite

Supondo que haja dois limites L_1 e L_2 de $f(x)$ em p.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1,\delta_2>0$ tais que $\forall x\in D_f$

$0 < |x-p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$0 < |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon$

Seja $x_0 \in D_f$ tal que $0 < |x_0 - p| < \delta$ (x_0 existe, pois p é ponto de acumulação de D_f), então

$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \le |L_1 - f(x_0)| + |f(x_0) - L_2|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow L_1 = L_2$

2. CONTINUIDADE

Seja p um ponto de acumulação do domínio da função f.

$$f \text{ é contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \text{ ou } x \in V(p,\delta) \Rightarrow f(x) \in V(f(p),\varepsilon) \end{cases}$$

Isso significa que se f é uma função contínua, então, quando x se aproxima de p, inclusive para $x = p$, o valor de $f(x)$ se aproxima do valor de $f(p)$.

EXEMPLO: Prove que a função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é contínua.

$p \in D_f \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \Leftrightarrow |(ax+b) - (ap+b)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-p| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ é contínua em } p$$

Teorema: Considerando a unicidade do limite.

$$f \text{ é contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Esse teorema permite que se calcule o valor do limite de funções contínuas simplesmente calculando o valor da função no ponto.

EXEMPLO: $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 2) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

Teorema: Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$, $x \neq p$, e se existir $\lim\limits_{x \to p} g(x)$, então $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ também existirá e $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p} g(x)$.

Demonstração:

$\lim\limits_{x \to p} g(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D_g, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

Assumindo $\delta < r$, então em $0 < |x - p| < \delta$, temos $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D_f, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = L$

Esse teorema permite o cálculo de limites inicialmente indeterminados, como se pode observar no exemplo a seguir.

EXEMPLO: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

$\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \ \forall x \neq 1$ e $g(x) = x + 1$ é contínua em $x = 1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

Teorema: Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, então existem $r > 0$ e $m > 0$ tais que, $\forall x \in D_f$, $0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

Demonstração:

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f, \ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Tomando $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f, \ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Leftrightarrow L - 1 < f(x) < L + 1$

Seja $M = \max\{|L - 1|, |L + 1|\} \Rightarrow -M < f(x) < M$

Portanto, sejam $r = \delta > 0$ e $M = \max\{|L - 1|, |L + 1|\}$, então $0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

Isso significa que se uma função possui limite em um ponto, então a função é limitada nesse ponto.

3. PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LIMITES

Seja k constante e supondo que f e g possuam limites finitos em p.

$$\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x)$$

$$\lim_{x \to p} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to p} f(x)$$

$$\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \cdot \lim_{x \to p} g(x)$$

$$\lim_{x \to p} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = \frac{1}{\lim\limits_{x \to p} f(x)}$$

$$\lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to p} f(x)}{\lim\limits_{x \to p} g(x)}$$

4. LIMITE DA FUNÇÃO COMPOSTA

Teorema: Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}_f \subset D_g$. Se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$ e g é contínua em a, então $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to a} g(u)$.

Demonstração:

$|g(f(x)) - g(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow g(a) - \varepsilon < g(f(x)) < g(a) + \varepsilon$

g é contínua em a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to p} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1$

Assim, temos: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$0 < |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(a)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(a) = \lim\limits_{u\to a} g(u)$

Esse teorema permite que se façam substituições de variáveis para o cálculo de limites.

EXERCÍCIOS

QUESTÃO 1

(EFOMM 2011) Analise a função a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3p-5, & x = 2 \end{cases}$$

Para que a função acima seja contínua no ponto $x = 2$, qual deverá ser o valor de p?

a) $1/3$

b) 1

c) 3

d) -1

e) -3

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

f é contínua no ponto $x = 2$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 = 3p-5 \Leftrightarrow p = 3$$

QUESTÃO 2

(EN 1998) O valor de "a" para que a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & \text{se } x \neq 3\\ a, & \text{se } x=3\end{cases}$ seja contínua em $x=3$ é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

e) $\dfrac{1}{6}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A função f é contínua em $x=3$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=a$.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=a \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

QUESTÃO 3

(EFOMM 2006) O valor do limite $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right\}$ é

a) $-1/4$

b) $-1/2$

c) 0

d) $1/4$

e) $1/2$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

QUESTÃO 4

(EFOMM 2006) O valor do limite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(1/x\right)-\left(1/2\right)}{x^2-4}$ é

a) $-1/8$
b) $-1/16$
c) 0
d) $1/16$
e) $1/8$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(1/x\right)-\left(1/2\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x(x+2)}=\frac{-1}{2\cdot 2\cdot(2+2)}=-\frac{1}{16}$$

QUESTÃO 5

(EFOMM 2003) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

a) $-\infty$
b) 0
c) 1
d) 2
e) $+\infty$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2-\left(\sqrt{1-2x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-(1-2x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1+2\cdot 0}+\sqrt{1-2\cdot 0}}=2$$

QUESTÃO 6

(EFOMM 2012) O valor do $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)$ é:

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$
b) $\sqrt{a}$
c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$
d) $2\sqrt{a}$

e) 0

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\cancel{a}-\cancel{a}}{x\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{0+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

QUESTÃO 7

(EFOMM 1993) O $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{3}{5}$

d) $\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{2}{5}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$\sqrt[6]{1+x}=y\Rightarrow\sqrt{1+x}=y^3\ \wedge\ \sqrt[3]{1+x}=y^2$

Se $x\to 0$, então $y\to 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

QUESTÃO 8

(EFOMM 2001) O valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\sqrt[3]{3x-5}=y \Leftrightarrow 3x-5=y^3 \Leftrightarrow 3x-6=y^3-1 \Leftrightarrow x-2=\frac{y^3-1}{3}$

Se $x \to 2$, então $y \to 1$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{y^3-1}{3}}{y-1}=\frac{1}{3}\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{y-1}=\frac{1}{3}\lim_{y\to 1}(y^2+y+1)=\frac{1}{3}(1^2+1+1)=1$$

QUESTÃO 9

(EN 2004) O $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$ é igual a:

(A) 0
(B) 1/16
(C) 1/12
(D) 1/2
(E) 1

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$\sqrt[6]{x}=y \Rightarrow \sqrt[3]{x}=y^2$ e $\sqrt{x}=y^3$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)=\lim_{y\to 1}\left(\frac{1}{2(1-y^3)}-\frac{1}{3(1-y^2)}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 1}\left(\frac{1}{2(1-y)(1+y+y^2)}-\frac{1}{3(1-y)(1+y)}\right)==\lim_{y\to 1}\frac{3(1+y)-2(1+y+y^2)}{6(1-y)(1+y)(1+y+y^2)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{1+y-2y^2}{6(1-y)(1+y)(1+y+y^2)}=\lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(1-y)}(1+2y)}{6\cancel{(1-y)}(1+y)(1+y+y^2)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(1+2y)}{6(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{3}{6\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{12}$$

5. LIMITES NO INFINITO

Seja f uma função e suponhamos que exista $a\in\mathbb{R}$ tal que $]a,+\infty[\subset D_f$, então

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{com } \delta>a, \text{ tal que } x>\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Supondo agora que exista $a\in\mathbb{R}$ tal que $]-\infty,a[\subset D_f$, então

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{com } -\delta<a, \text{ tal que } x<-\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

As mesmas propriedades operatórias que valem para os limites em um ponto valem também para os limites no infinito.

6. LIMITES LATERAIS

$$\lim_{x\to p+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } p < x < p+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to p-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } p-\delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

EXEMPLO: Se $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 1 \\ 2, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$, então $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2$.

Teorema: O limite da função f no ponto p existe e é igual a L se, e somente se, existem os limites laterais de f à esquerda e à direita de p e ambos são iguais a L.

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to p-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to p+} f(x) = L$$

EXEMPLO: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe, pois $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$ e $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$.

7. LIMITES INFINITOS

Suponhamos que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $]a, +\infty[\subset D_f$, então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Suponhamos que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $]-\infty, a[\subset D_f$, então

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que } x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que } x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ e supondo que exista $b \in \mathbb{R}$ tal que $]p, b[\subset D_f$, então

$$\lim_{x\to p+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } p+\delta < b, \text{ tal que } p < x < p+\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ e supondo que exista $b \in \mathbb{R}$ tal que $]b, p[\subset D_f$, então

$$\lim_{x\to p-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ com } p-\delta > b, \text{ tal que } p-\delta < x < p \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

Definições análogas podem ser escritas quando os limites laterais são iguais a $-\infty$.

7.1. Propriedades operatórias dos limites infinitos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\begin{cases}+\infty, & \text{se } L>0\\ -\infty, & \text{se } L<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} g(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\begin{cases}-\infty, & \text{se } L>0\\ +\infty, & \text{se } L<0\end{cases}$$

EXERCÍCIOS

QUESTÃO 10

(EFOMM 1993) Calculando o $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2+x}}$, encontramos:

a) –1
b) +∞
c) +1
d) –∞
e) +1/3

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt[3]{\frac{0-1}{1+0}}=-1$$

onde usamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

QUESTÃO 11

(EFOMM 1999) Resolvendo $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-4x^2+5}{6x^3+3x-7}$, encontramos:

a) ∞
b) $-\infty$
c) 0
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{4}{\,}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-4x^2+5}{6x^3+3x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^3-4x^2+5}{x^3}}{\frac{6x^3+3x-7}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}}{6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

QUESTÃO 12

(EFOMM 2004) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log(x+1)-\log x\right]$.

(A) $+\infty$
(B) 0
(C) 1
(D) -1
(E) $-\infty$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(x+1)-\log x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\log 1=0$$

QUESTÃO 13

(EN 1990) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right]$ é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $+\infty$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3}\right)}{\left(\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}=+\infty$$

QUESTÃO 14

(EFOMM 2010) Seja f uma função de domínio $D(f)=\mathbb{R}-\{a\}$. Sabe-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, se para todo $\varepsilon>0$, existir $\delta>0$, tal que se $0<|x-a|<\delta$ então $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I – Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 3 & \text{se } x=1\end{cases}$, logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

II – Na função $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{se } x<1\\ -1 & \text{se } x=1\\ 3-x & \text{se } x>1\end{cases}$, tem-se $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-3$.

III – Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)^n(x)=(L\cdot M)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$.

Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I – FALSA

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2 = -1$$

Note que o limite quando x tende a 1 é calculado para valores em uma vizinhança reduzida de 1, ou seja, que não inclui o número 1.
II – FALSA

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-4\right) = 1^2-4=-3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3-x) = 3-1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq -3 = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

III – VERDADEIRA
O produto dos limites é igual ao limite do produto.

QUESTÃO 15
(EFOMM 2001) Das afirmativas abaixo:
I. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = +\infty$.
II. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = +\infty$.
III. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = +\infty$.
IV. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Estão incorretas:
(A) II e IV
(B) I e IV
(C) III e IV
(D) apenas a II
(E) II e III

RESPOSTA: A

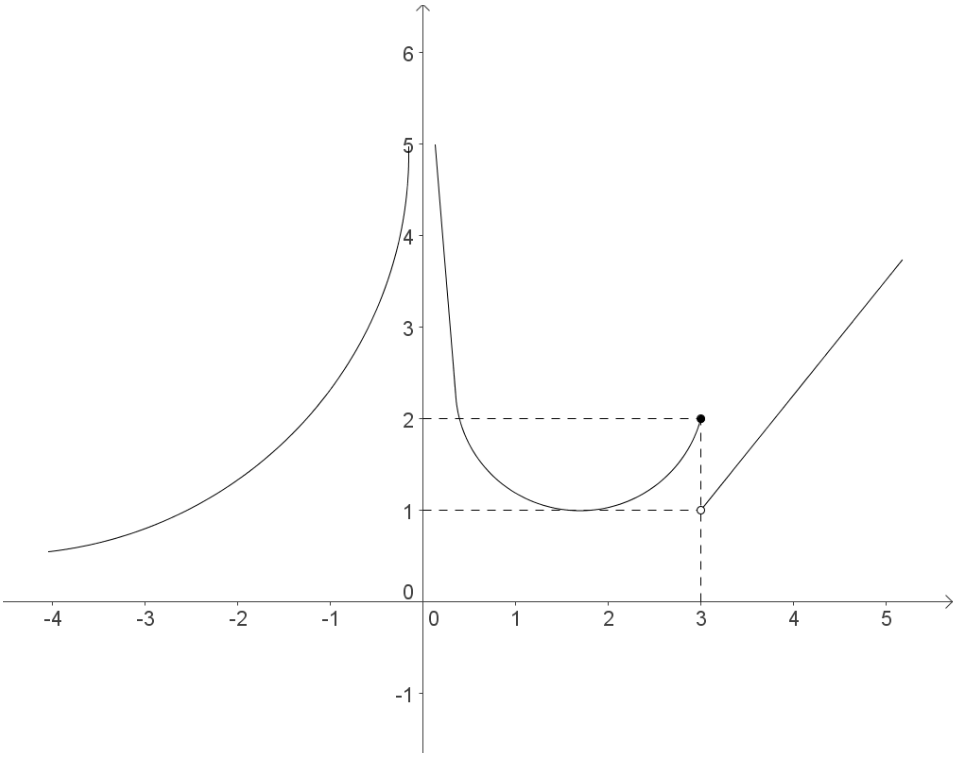
RESOLUÇÃO:
I. VERDADEIRA
II. FALSA
Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = -\infty$.
III. VERDADEIRA
IV. FALSA
Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.
As propriedades operatórias do limites apresentadas nas afirmativas podem ser demonstradas a partir das definições abaixo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

QUESTÃO 16

(EFOMM 1999) Em relação à função $y = f(x)$, representada pelo gráfico abaixo, podemos afirmar que:



I – $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = 2$

II – $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 2$

III – $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

IV – $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

a) apenas II é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas II e III verdadeiras.
d) apenas I, II e IV são verdadeiras.
e) todas são verdadeiras.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Observando o gráfico, temos:

I – FALSA: $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = 1$

II – VERDADEIRA: $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 2$

III – VERDADEIRA: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

IV – FALSA: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = +\infty$

8. LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

8.1. Teorema do Confronto:

Sejam f, g e h três funções e suponhamos que exista $r>0$ tal que $f(x)\le g(x)\le h(x)$, para $0<|x-p|<r$. Nestas condições, se $\lim\limits_{x\to p} f(x)=L=\lim\limits_{x\to p} h(x)$, então $\lim\limits_{x\to p} g(x)=L$.

Demonstração:

$\lim\limits_{x\to p} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0 \text{ tq } 0<|x-p|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to p} h(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0 \text{ tq } 0<|x-p|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow 0<|x-p|<\delta \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)\le g(x)\le h(x)<L+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon$

Assim, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ tq } 0<|x-p|<\delta \Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} g(x)=L$.

Teorema: Sejam f e g duas funções com o mesmo domínio A tais que $\lim\limits_{x\to p} f(x)=0$ e $|g(x)|\le M$, $\forall x\in A$, onde $M>0$ é um número real fixo, então $\lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot g(x)=0$.

Demonstração:

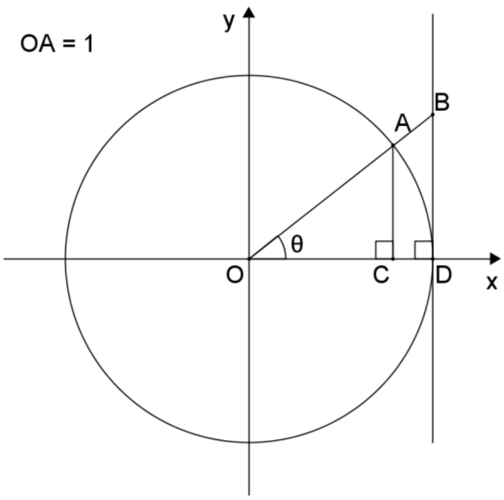
$0\le|f(x)\cdot g(x)|\le M\cdot|f(x)|$

$\lim\limits_{x\to p} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to p}|f(x)|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} M\cdot|f(x)|=M\cdot 0=0$

Como $\lim\limits_{x\to p} 0=0=\lim\limits_{x\to p} M\cdot|f(x)|$, então $\lim\limits_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot g(x)=0$.

Isso significa que é nulo o limite do produto de uma função que tem limite nulo em um ponto por outra limitada nesse ponto.

8.2. Continuidade da função seno



$S_{OAD} = \dfrac{OD \cdot AC}{2} = \dfrac{1 \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2}$

$S_{setor\ OAD} = \dfrac{1 \cdot \theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$

$S_{OBD} = \dfrac{OD \cdot DB}{2} = \dfrac{1 \cdot \operatorname{tg}\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{2}$

$S_{OAD} \le S_{setor\ OAD} \le S_{OBD} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \le \theta \le \operatorname{tg}\theta \Rightarrow |\operatorname{sen}\theta| \le |\theta|$

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| = 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{x-p}{2} \cdot \cos\dfrac{x+p}{2}\right| = 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{x-p}{2}\right| \cdot \left|\cos\dfrac{x+p}{2}\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{x-p}{2}\right| \le 2\left|\dfrac{x-p}{2}\right| = |x-p|$

Como $0 \le |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| \le |x-p|$ e $\lim\limits_{x \to p} 0 = 0 = \lim\limits_{x \to p} |x-p|$, então

$\lim\limits_{x \to p} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} p$

Logo, a função seno é contínua.

8.3. Limite trigonométrico fundamental

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Demonstração:
1° caso: $\theta > 0$

$0 < \operatorname{sen}\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta \Leftrightarrow 0 < 1 < \dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta} \Leftrightarrow 0 < \cos\theta < \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$

$\lim\limits_{\theta \to 0^+} \cos\theta = 1 = \lim\limits_{\theta \to 0^+} 1 \Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

2° caso: $\theta < 0$

$-\theta > 0 \Rightarrow 0 < \operatorname{sen}(-\theta) < (-\theta) < \operatorname{tg}(-\theta) \Leftrightarrow 0 < -\operatorname{sen}\theta < -\theta < -\operatorname{tg}\theta \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta < \theta < \operatorname{sen}\theta < 0$

$\Leftrightarrow 0 < 1 < \dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta} \Leftrightarrow 0 < \cos\theta < \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$

$\lim\limits_{\theta \to 0^-} \cos\theta = 1 = \lim\limits_{\theta \to 0^-} 1 \Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Como $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ e $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$, então $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.

EXEMPLOS:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \dfrac{2x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{5x} = 1 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2 \cdot \dfrac{1}{4} = 2 \cdot 1^2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

QUESTÃO 17

(EFOMM 95) O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2}$ é:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(1-\cos^2 x\right)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot \operatorname{sen}^2 x}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2}{x-1}=1^2\cdot\frac{-2}{0-1}=2$$

QUESTÃO 18

(EFOMM 2007) O valor do limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$ é:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^5\cdot\frac{32x^5}{4x^5}=1^5\cdot 8=8$$

QUESTÃO 19

(EFOMM 99) Sendo $A=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sqrt{x\cdot\operatorname{sen} 6x}}{\operatorname{cossec} 6x\left(1-\cos^2 6x\right)}\right]$ e $B=\lim\limits_{x\to\log_2 3}\left[2^{(2x+1)}\right]$, $\dfrac{A^2B}{2}$ vale:

a) $2\sqrt{3}$
b) 6
c) 12
d) $6\sqrt{3}$
e) 18

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sqrt{x\cdot \operatorname{sen}6x}}{\operatorname{cossec}6x\left(1-\cos^2 6x\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sqrt{x\cdot \operatorname{sen}6x}}{\frac{1}{\operatorname{sen}6x}\cdot \operatorname{sen}^2 6x}\right]=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x\cdot \operatorname{sen}6x}}{\operatorname{sen}6x}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{x\cdot \operatorname{sen}6x}{\operatorname{sen}^2 6x}}\right)=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen}6x}}\right)=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{6x}{\operatorname{sen}6x}}\right)=2\cdot\sqrt{\frac{1}{6}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$B=\lim_{x\to \log_2 3}\left[2^{(2x+1)}\right]=2^{(2\log_2 3+1)}=2^{\left(\log_2 3^2\right)}\cdot 2^1=9\cdot 2=18$$

$$\frac{A^2B}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2\cdot 18=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot 18=6$$

9. LIMITES EXPONENCIAIS

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

onde $e\approx 2,71$ é um número irracional que é a base dos logaritmos neperianos.

EXEMPLOS:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}=1$, onde fizemos $u=e^x-1\Leftrightarrow \ln(u+1)=x$ e $(x\to 0)\Leftrightarrow(u\to 0)$.

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(u+1)}=\ln a$, onde fizemos $u=a^x-1\Leftrightarrow \log_a(u+1)=x$ e $(x\to 0)\Leftrightarrow(u\to 0)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\cdot\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-2}\right]=e\cdot 1^{-2}=e$$

EXERCÍCIOS

QUESTÃO 20

(EFOMM 2005) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$

a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) $\sqrt{3}$
d) 0
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-3}{x^3+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}}=+\infty$$

$$0<\frac{1}{\sqrt{3}}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}=0$$

QUESTÃO 21
(EFOMM 2008) Analise as afirmativas abaixo:

I. $\lim\limits_{a\to1}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

II. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt[x]{\dfrac{k+x}{k-x}}\right)=e^{\frac{2}{k}}$

III. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=1$

Assinale a alternativa correta:
a) Apenas a afirmativa III é falsa.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) As afirmativas I e III são verdadeiras.
d) As afirmativas II e III são falsas.
e) As afirmativas I e III são verdadeiras.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
I. V

$$\lim_{a\to1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right)=\lim_{a\to1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}\right)=\lim_{a\to1}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

II. V

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[x]{\frac{k+x}{k-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{k-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{k-x}\right)^{\frac{k-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{k-x}}=e^{\frac{2}{k}}$$

III. F

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(2y+\pi)}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(2y+\pi)}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}2y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}2y}{2y}\cdot 2=1\cdot 2=2\neq 1$$

$$y=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=2y+\pi \text{ e } \left(x\to\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow(y\to 0)$$

QUESTÃO 22

(EFOMM 2002) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$.

a) e^5
b) 0
c) e
d) 1
e) 5

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot 5=1\cdot 5=5$$

QUESTÃO 23

(EFOMM 2001) O valor de $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ é:

a) e^{-3}
b) e^{-1}
c) e
d) e^2
e) e^3

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Lembrando que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, temos: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(x/3)}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3$

QUESTÃO 24

(EFOMM 1993) O $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$ é igual a:

a) e
b) e^2
c) e^3
d) e^4
e) 1

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(x+5)/2}\right)^{\frac{x+5}{2}}\right]^{\frac{2\cdot(2x+4)}{x+5}}=e^4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot(2x+4)}{x+5}=2\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{1+\frac{5}{x}}=2\cdot\frac{2+0}{1+0}=4$$

QUESTÃO 25

(EFOMM 1999) Sabendo que $y=\lim\limits_{x\to0}e^{\sqrt[x]{1+2x}}$, o logaritmo neperiano de y vale:

a) e^2
b) $\sqrt{e}$
c) e^e
d) $2e$
e) $-3e$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2$$

$$y=\lim_{x\to0}e^{\sqrt[x]{1+2x}}\Rightarrow\ln y=\lim_{x\to0}\ln e^{\sqrt[x]{1+2x}}=\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+2x}=e^2$$

10. INFINITESIMAIS E EQUIVALÊNCIA

Diz-se que $\alpha(x)$ é um infinitesimal quando $x\to a$ se $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

EXEMPLO: $\text{sen}(x-a)$ é um infinitesimal quando $x \to a$.

Sejam $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ infinitesimais quando $x \to a$, temos:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L \neq 0 \Rightarrow$ $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são infinitesimais de mesma ordem.

EXEMPLO: $\text{sen}\,2x$ e $3x$ são infinitesimais de mesma ordem quando $x \to 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow$ $\alpha(x)$ é um infinitesimal de ordem superior a $\beta(x)$ e denota-se por $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

EXEMPLO: $(1-\cos x)$ é um infinitesimal de superior a x quando $x \to 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = L \neq 0 \Rightarrow$ $\alpha(x)$ é um infinitesimal de ordem k em relação a $\beta(x)$.

EXEMPLO: $(1-\cos x)$ é um infinitesimal de ordem 2 em relação a x quando $x \to 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow$ $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são infinitesimais equivalentes e denota-se por $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

EXEMPLO: $\text{sen}\,x$ e x são infinitesimais de mesma ordem quando $x \to 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x} = 1$.

Teorema: A diferença de dois infinitesimais equivalentes é um infinitesimal de ordem superior a cada um deles.

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha) \,\wedge\, \alpha - \beta = o(\beta)$$

Teorema: Sejam os infinitesimais $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$ e $g_1(x)$, quando $x \to a$, tais que $f(x) \sim f_1(x)$ e $g(x) \sim g_1(x)$. Se existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ também existe e $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Demonstração:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

EXEMPLO: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,5x}{\text{tg}\,4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{4x} = \dfrac{5}{4}$, pois $\text{sen}\,5x \sim 5x$ e $\text{tg}\,4x \sim 4x$ quando $x \to 0$.

10.1. Equivalências Notáveis

Todas as equivalências listadas a seguir ocorrem quando $u \to 0$:

$$u \sim \operatorname{sen} u \sim \operatorname{tg} u \sim \operatorname{arcsen} u \sim \operatorname{arctg} u \sim \ln(1+u) \sim e^u - 1$$

$$1-\cos u \sim \frac{u^2}{2} \qquad a^u - 1 \sim u \cdot \ln a \qquad \log_a(1+u) \sim \frac{u}{\ln a}$$

$$(1+u)^p - 1 \sim pu \qquad \sqrt[n]{1+u} - 1 \sim \frac{u}{n}$$

EXERCÍCIOS

Note que alguns exercícios a seguir já foram feitos anteriormente utilizando outra técnica.

QUESTÃO 26

(EFOMM 2002) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x}$.

a) e^5
b) 0
c) e
d) 1
e) 5

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{x} = 5$$

QUESTÃO 27

(EFOMM 2007) O valor do limite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$ é:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Quando $x \to 0$, temos $\operatorname{sen} x \sim x$, isto é, $\operatorname{sen} x$ e x são infinitesimais equivalentes.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^5}{4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{32x^5}{4x^5}=8$$

QUESTÃO 28

O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\right)\right)}{\ln(\cos 3x)}$ é

a) $-\dfrac{1}{9}$

b) $\ln 6$

c) $-\dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{1}{6}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\ln(\cos 3x)=\ln[1+(\cos 3x-1)]\sim(\cos 3x-1)\sim-\frac{(3x)^2}{2}=-\frac{9x^2}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right)\sim\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\sim\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)\sim\frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right)}{\ln(\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{9x^2}{2}}=-\frac{1}{9}$$

QUESTÃO 29

Sobre o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos[2(x-2)]}}{x-2}\right)$ podemos afirmar que

a) não existe

b) é igual a $\sqrt{2}$

c) é igual a $-\sqrt{2}$

d) é igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

RESPOSTA:

RESOLUÇÃO:

Quando $x \to 2$, $1-\cos[2(x-2)] \sim \frac{[2(x-2)]^2}{2} = 2(x-2)^2$.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{1-\cos[2(x-2)]}}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2(x-2)^2}}{x-2} = \sqrt{2}\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2} = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{1-\cos[2(x-2)]}}{x-2}\right) = \sqrt{2}\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ não existe.

REFERÊNCIA: AIEEE 2011

11. TEOREMA DE L'HÔPITAL

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ são tais que ambos tendem para 0 ou ambos tendem para $\pm\infty$, então

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

onde usamos "lim" para representar qualquer um dos seguintes limites $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, $\lim\limits_{x\to p}$, $\lim\limits_{x\to p+}$ ou $\lim\limits_{x\to p-}$.

No caso dos três últimos limites que $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente próximo de p, e no caso dos dois primeiros que $g'(x) \neq 0$ para valores suficientemente grandes ou suficientemente pequenos de x.

EXEMPLO: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

O teorema de L'Hôpital permite resolver grande parte dos limites onde aparecem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Em alguns casos, indeterminações de outros tipos como $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞ podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, a fim de se aplicar o teorema de L'Hôpital.

11.1. Indeterminação tipo $0\cdot\infty$.

EXEMPLO: $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0$

11.2. Indeterminação tipo $\infty-\infty$.

EXEMPLO:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cossec} x-\frac{1}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\cdot \operatorname{sen} x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1\cdot \operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1\cdot\cos x+x\cdot(-\operatorname{sen} x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\cdot\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2\cdot 1-0\cdot 0}=0$$

11.3. Indeterminação tipo 0^0, ∞^0 ou 1^∞.

EXEMPLOS:

$$y=\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x}\ \left(0^0\right)\Leftrightarrow \ln y=\lim_{x\to 0+}\ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0+}\operatorname{sen} x\cdot\ln x\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-\operatorname{cossec} x\cdot\operatorname{cotg} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\operatorname{tg} x=1\cdot 0=0\Leftrightarrow y=e^0=1$$

$$y=\lim_{x\to 0+}|\ln x|^x\ \left(\infty^0\right)\Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 0+} x\ln|\ln x|=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln|\ln x|}{1/x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\ln x}=0\Leftrightarrow y=e^0=1$$

$$y=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)}}\ \left(1^\infty\right)\Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=1$$

EXERCÍCIOS

Note que alguns exercícios a seguir já foram feitos anteriormente utilizando outra técnica.

QUESTÃO 30

(EFOMM 2001) O valor de $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$ é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Como o limite é da forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, vamos aplicar o teorema de L'Hôpital duas vezes.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{9x^2-8x-1}{6x^2-6x}=\lim_{x\to 1}\frac{18x-8}{12x-6}=\frac{18\cdot 1-8}{12\cdot 1-6}=\frac{5}{3}$$

QUESTÃO 31

(EFOMM 2003) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

a) $-\infty$
b) 0
c) 1
d) 2
e) $+\infty$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Como o limite é da forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, vamos aplicar o teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}-\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}}{1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+2\cdot 0}}+\frac{1}{\sqrt{1-2\cdot 0}}=2$$

QUESTÃO 32

(EFOMM 2001) O valor de $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como o limite é da forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, vamos aplicar o teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x-5)^2}}}=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{(3x-5)^2}=\sqrt[3]{(3\cdot 2-5)^2}=1$$

QUESTÃO 33

(EN 2007) O valor de $\lim_{x\to 1^+}\left[(\ln x)\cdot\ln(x-1)\right]$ é

a) $+\infty$
b) e
c) 1
d) 0
e) -1

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 1^+}[(\ln x)\cdot\ln(x-1)] = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot(\ln x)^2}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1\cdot(\ln x)^2 + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1^+}\left(-(\ln x)^2 - 2\ln x\right) = 0$$

QUESTÃO 34

(EN 2003) Se $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = p$, então:

a) $0 \le p \le \frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{3} < p \le \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2} < p \le 1$
d) $1 < p \le 2$
e) $2 < p \le 3$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = p \Rightarrow \ln p = \lim_{x\to 0}\ln(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\operatorname{cotg} x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\cdot\left(-\operatorname{cossec}^2 x\right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 \Rightarrow \ln p = -1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{e}$$

$e \approx 2,7 \Rightarrow \frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$

O último limite foi calculado considerando que x, $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ são infinitesimais equivalentes.

QUESTÃO 35

(EN 2012) Calculando-se $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x}$, obtém-se

a) ∞
b) 0
c) e
d) -1
e) 1

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Seja $y=\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x} \Rightarrow \ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\text{sen}\,x\cdot\ln(\text{cotg}\,x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\text{cotg}\,x)}{\text{cossec}\,x}$

O limite acima é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar o teorema de L'Hôpital. Assim,

$$\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\text{cotg}\,x}\cdot\left(-\text{cossec}^2\,x\right)}{-\text{cossec}\,x\cdot\text{cotg}\,x}=\lim_{x\to 0^+}\text{tg}^2\,x\cdot\text{cossec}\,x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}=0\Leftrightarrow y=e^0=1$$