Universidade Federal do ABC
Comunicação e Redes – 2^o Quadrimestre 2013
Prof. Carlos da Silva dos Santos

Lista de Exercícios 2

1 - O coeficiente de agrupamento (*clustering coefficient*) de um vértice mede o quanto seus vizinhos estão interconectados. Considere um grafo não orientado $G = (V, E)$. Seja $v_i \in G$ um vértice qualquer de G; então o coeficiente de agrupamento C_i associado a v_i é determinado pela fórmula:

$$C_i = \begin{cases} \frac{\mathrm{T}_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, \text{ se } k_i > 1 \\ 0, \text{ se } k_i \leq 1 \end{cases}$$

em que k_i = grau de v_i e T_i é o número de triângulos (fechos triádicos) que têm v_i como um dos seus vértices. Isto é:

$$\mathrm{T}_i = \text{número de arestas } e_r \text{ tal que } e_r = \langle v_j, v_k \rangle \in E,\ \langle v_i, v_j \rangle \in E,\ \langle v_i, v_k \rangle \in E$$

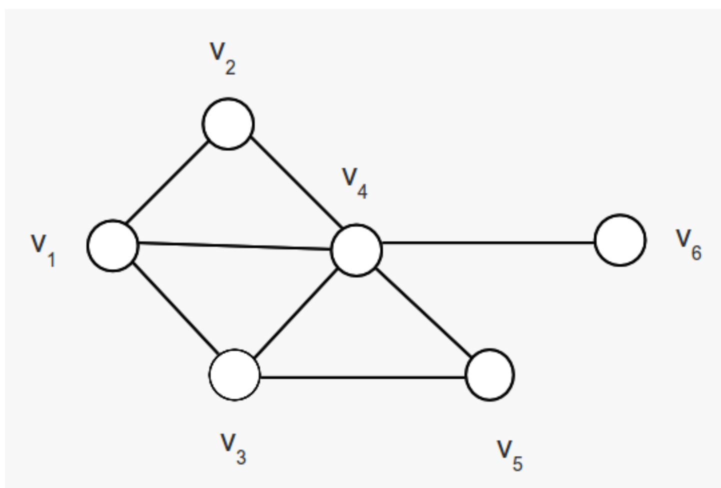

Figura 1: Diagrama de grafo para o exercício 1.

Para o grafo da Figura 1, calcule o coeficiente de agrupamento de cada vértice. Em seguida, calcule o coeficiente de agrupamento médio, dado por:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$$

A densidade de arestas $D(G)$ de um grafo não orientado $G = (V, E)$ é dada pela seguinte relação:

$$D(G) = \frac{2|E|}{N(N-1)}$$

Em que $|E|$ = número de arestas de G e N = número de vértices de G. Calcule o valor $D(G)$ para o grafo acima e compare com o valor obtido para $\langle C \rangle$. Interprete este resultado.

vértice	n^o triângulos	grau	grau $\cdot$ (grau $-$ 1)/2	C_i
v_1	2	3	3	2/3
v_2	1	2	1	1
v_3	2	3	3	2/3
v_4	3	5	10	3/10
v_5	1	2	1	1
v_6	0	1	0	0

Tabela 1: Tabela com os coeficientes de agrupamento de cada vértice.

Os coeficientes de agrupamento individuais estão calculados na Tabela 1.
Usando os valores da Tabela 1, podemos calcular o coeficiente médio $\langle C \rangle$:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{6}(2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 1 + \frac{3}{10}) \simeq 0,60$$

A densidade de G é dada por:

$$D(G) = \frac{2 \times 8}{6(5)} \simeq 0,53$$

O valor de $\langle C \rangle$ pode variar entre 0 (densidade mínima de triângulos no grafo) e 1 (densidade máxima de triângulos). A densidade de arestas de um grafo é igual a probabilidade de encontrarmos uma aresta entre dois vértices escolhidos aleatoriamente. O valor de $\langle C \rangle$ $(0,60)$ é superior à densidade de arestas $(0,53)$, sugerindo que as arestas do grafo não se formam de maneira puramente aleatória e que o surgimento de arestas entre vizinhos de um mesmo vértice é favorecido.

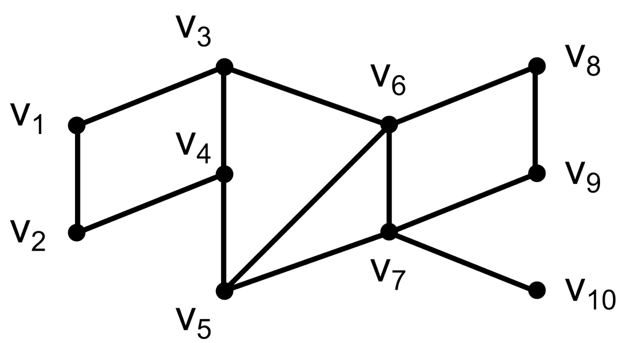

Figura 2: Grafo para as questões 2 a 5.

Para as questões a seguir,considere o grafo da Figura 2

2 - Para o grafo da Figura 2, escreva sua matriz de adjacência e calcule o grau de cada vértice.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	*grau*
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
v_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
v_3	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	3
v_4	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	3
v_5	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	3
v_6	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	4
v_7	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	4
v_8	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
v_9	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
v_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

3 - Simule o procedimento de busca em largura a partir do vértice v_4 para o grafo da Figura 2. Desenhe a árvore de caminhos mais curtos obtida, indicando em cada vértice a distância para o vértice inicial.

Ver Figura 3 para uma solução possível.

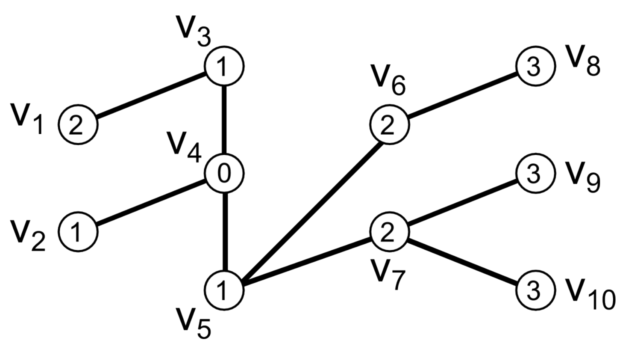

Figura 3: Resultado de busca em largura a partir de v_4.

4 - Calcule a ordem e o tamanho do grafo da Figura 2.

Ordem: 10 Tamanho: 13

5 - Calcule o coeficiente de agrupamento para cada vértice do grafo (ver exercício 1 para a fórmula).

$v_1 : C_1 = 0$ $\quad v_2 : C_2 = 0$ $\quad v_3 : C_3 = 0$ $\quad v_4 : C_4 = 0$

$v_5 : C_5 = 1/3$ $\quad v_6 : C_6 = 1/6$ $\quad v_7 : C_7 = 1/6$

$v_8 : C_8 = 0$ $\quad v_9 : C_9 = 0$ $\quad v_{10} : C_{10} = 0$

O grafo tem somente um triângulo (formado pelos vértices v_5, v_6 e v_7), então somente esses três vértices têm coeficiente de aglomeração diferente de zero. Como a maioria dos coeficientes é nula e os outros têm valor baixo, o grafo não tem formação de comunidades ou grupos locais, isto é, não há nenhum subconjunto de vértices com alta ocorrência de interligações entre eles.

6 - Considere a matriz de adjacência fornecida abaixo, de um dado grafo G, não direcionado.

(a) Calcule o grau de cada vértice.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$grau$
v_1	0	1	1	0	1	0	0	0	3
v_2	1	0	1	0	1	0	0	0	3
v_3	1	1	0	0	1	0	0	0	3
v_4	0	0	0	0	1	1	0	0	2
v_5	1	1	1	1	0	1	0	0	5
v_6	0	0	0	1	1	0	1	1	4
v_7	0	0	0	0	0	1	0	1	2
v_8	0	0	0	0	0	1	1	0	2

(b) Apresente o conjunto E de arestas do grafo G.

$$E = \{\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_3\rangle, \langle v_1, v_5\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \langle v_2, v_5\rangle, \langle v_3, v_5\rangle, \langle v_4, v_5\rangle, \langle v_4, v_6\rangle, \langle v_5, v_6\rangle, \langle v_6, v_7\rangle, \langle v_6, v_8\rangle, \langle v_7, v_8\rangle\}$$

(c) Desenhe um diagrama para o grafo.
Ver Figura 4.

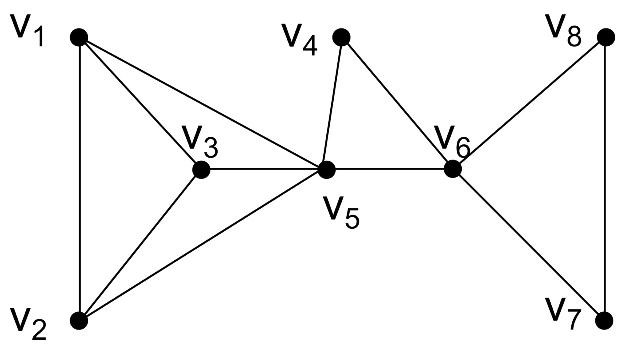

Figura 4: Diagrama para o grafo da questão 6.

7 - Simule o procedimento de busca em largura a partir do vértice v_1 para o grafo que você desenhou na questão 6. Desenhe a árvore de caminhos mais curtos obtida.
Ver Figura 5.

8 - Calcule o coeficiente de agrupamento para cada vértice do grafo da questão 6. Calcule também o coeficiente de agrupamento médio.

$$\begin{array}{cc}
v_1 : C_1 = 3/3 = 1 & v_2 : C_2 = 3/3 = 1 \\
v_3 : C_3 = 3/3 = 1 & v_4 : C_4 = 1/1 = 1 \\
v_5 : C_5 = 4/10 = 0,4 & v_6 : C_6 = 2/6 = 0,33 \\
v_7 : C_7 = 1/1 = 1 & v_8 : C_8 = 1/1 = 1
\end{array}$$

$\langle C\rangle \simeq 0,84$

A densidade do grafo é $D(G) = 12/28 \simeq 0,42$. Como o coeficiente de agrupamento médio é bastante superior à densidade de arestas, concluímos que o surgimento das arestas não ocorre de

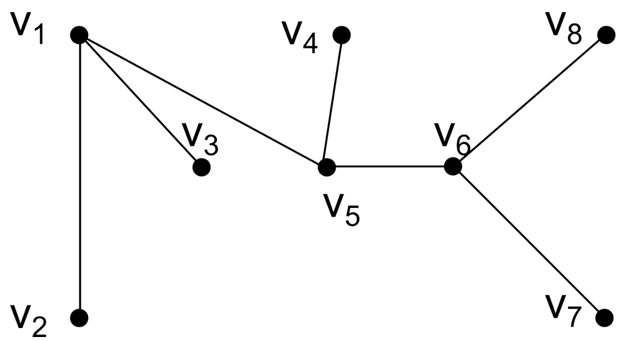

Figura 5: Árvore de caminhos mais curtos a partir de v_1 para o grafo da questão 7.

maneira aleatória e as ligações entre vizinhos de um mesmo vértice ocorrem com frequência alta.

9 - Aponte uma semelhança e uma diferença entre os modelo de redes de Erdös-Renyi (grafo aleatório) e o modelo de Watts-Strogatz (rede de mundo pequeno).

Em ambos modelos os grafos gerados têm diâmetro pequeno, em sua maioria. No modelo de grafo aleatório, o coeficiente de agrupamento médio tende a ser pequeno. No modelo de rede de mundo pequeno, a tendência é que o coeficiente de agrupamento seja mais elevado.

10 - Uma rede tem as seguintes características:
Número de vértices: 1000; Número de arestas: 10000; Diâmetro: 5; Coeficiente de agrupamento médio: 0,01.
Qual o modelo se aproxima mais das características dessa rede, grafos aleatórios ou rede de mundo pequeno? Justifique.

Esta rede tem diâmetro pequeno em relação ao número de vértices, o que é compatível com ambos modelos. O coeficente de agrupamento é bastante pequeno, por isso o modelo de grafo aleatório parece mais apropriado.