UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC0003 - Bases Matemáticas

A1 - Noturno, Prof. Vladimir Perchine

Prova - 1 (gabarito)

1. **Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica: (a) Alguns estudantes comem pizza. (b) Todo estudante come pizza. (c) Não somente estudantes comem pizza.**

   O conjunto universo = todas as pessoas, $E(x) = x$ é estudante, $P(x) = x$ come pizza.

   (a) $\exists x(E(x) \wedge P(x))$, (b) $\forall x(E(x) \to P(x))$, (c) $\exists x(E'(x) \wedge P(x))$

2. **Determine o conjunto $B^C \cup (A \cap C)$, onde $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 > 2\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.**

   $A \cap C = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $B = (-\infty - \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, $B^C = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

   $B^C \cup (A \cap C) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup \{2, 3, 4, \ldots\}$

3. **Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$**

   Para $n = 1$ temos $1^2 = \dfrac{1 \cdot (4-1)}{3}$. Suponhamos que a fórmula seja válida para algum n. Para $n+1$, o membro esquerdo

   $$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 + 12n^2 + 11n + 3)$$

   será igual ao membro direito

   $$\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3} = \frac{1}{3}(4n^3 + 12n^2 + 11n + 3)$$

   Logo, pelo princípio de indução, a fórmula está provada para todo n.

4. **Demonstre a identidade**

   $$\frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} = \frac{x}{a}$$

   Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, temos:

   $$\frac{\frac{a+x}{a-x} - 1}{\frac{a+x}{a-x} + 1} = \frac{a + x - (a-x)}{a + x + a - x} = \frac{x}{a}$$

5. **Verifique se a função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.**

   Escolhendo $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ temos $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$. Logo, $f(x)$ não é injetora.

   Escolhendo $f(x) = 2$, temos $\frac{1}{1+x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. Tal x não esxite. Logo, $f(x)$ não é sobrejetora.