**Nome:** **Ra:**

| Exercício | Pontos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Total | |

**Gabarito - A - 03/11/2015**
Funções de Uma Variável
Prof. Cristian Favio Coletti
3o Quadrimestre 2015

**Ex. 1 —** Resolva uma das seguintes questões.

1. Um balão meteorológico é lançado do solo a uma distância de $20m$ de um observador fixo no solo. Sabendo que o balão sobe verticalmente à razão de $30m/min$, determine a taxa de variação em relação ao tempo, do ângulo de visão do observador quando o balão estiver a $60m$ do solo?
   **Resposta**: Seja

   $$x = \text{ distância inicial no solo do observador ao balão meteorológico}$$

   e seja

   $$h = \text{ altura do balão meteorológico.}$$

   Como

   $$\tan(\theta) = \frac{h}{x}$$

   e $x = 20$ tem-se que

   $$\tan(\theta) = \frac{h}{20}. \tag{1}$$

   Então, derivando em ambos lados tem-se que

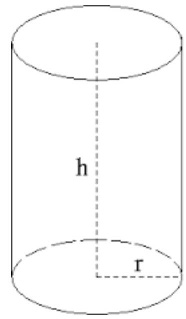
   $$\left(1 + \tan^2(\theta)\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\frac{dh}{dt}. \tag{2}$$

   Como $\frac{dh}{dt} = 30$ e quando $h = 60, \tan(\theta) = \frac{60}{20} = 3$, então

   $$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{20}\left(\frac{\frac{dh}{dt}}{1+\tan^2(\theta)}\right)\\ &= \frac{1}{20}\frac{30}{1+3^2}\\ &= \frac{1}{20}\frac{30}{10}\\ &= \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

2. Uma lata cilíndrica sem tampa superior tem volume $5cm^3$. Determine as dimensões da lata, de modo que a quantidade de material para sua fabricação seja mínima.
   **Resposta**: A área a ser minimizada é

   $$A(r,h) = 2\pi rh + \pi r^2.$$




Como $5 = V = \pi r^2 h$ então $h = \frac{5}{\pi r^2}$ e, então,

$$A(r) = \frac{10}{r} + \pi r^2.$$

A derivada se anula quando

$$A'(r) = -\frac{10}{r^2} + 2\pi r = 0.$$

Isto é, quando $r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$.
Como

$$A''(r) = \frac{20}{r^3} + 2\pi$$

e

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right) = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^3} + 2\pi > 0$$

então, concluimos que $r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ é um ponto de mínimo. As dimensões da lata são $r = h = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ cm.

Dica: A área da tampa inferior é $\pi r^2$, a área lateral é $2\pi r h$ e o seu volume é de $\pi r^2 h$.

**Ex. 2 —** Assuma que a equação abaixo define $y$ como função de $x$ de forma implícita. Calcule a equação da reta tangente à curva $y(x)$ no ponto $(1,1)$, isto é, sabendo que $y(1) = 1$.

$$\frac{\ln(x)}{x^2+1} = \operatorname{sen}(\pi x y).$$

**Resposta**: Derivando ambos lados da igualdade tem-se que

$$\left(\frac{\ln(x)}{x^2+1}\right)' = (\operatorname{sen}(\pi x y))'$$

e, portanto,

$$\frac{\frac{1}{x}\left(x^2+1\right) - \ln(x)2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \cos(\pi x y)\left(\pi y + \pi x y'\right).$$

Como $y(1) = 1$ tem-se que

$$y'(1) = -\left(\frac{1}{2\pi} + 1\right).$$

A equação da reta tangente é

$$\begin{aligned} y_t(x) &= y'(1)(x-1) + y(1) \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi} + 1\right)(x-1) + 1. \end{aligned}$$

**Ex. 3 —** Resolva dois dos exercícios abaixo justificando cada uma das passagens. Para calcular os limites abaixo use a regra de L'hôspital.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$.

   **Resposta**:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\operatorname{sen}(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}}{-\cos(x)} \\ &= -2. \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 - \cos(x))\ln(x)$.

   **Resposta**:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} (1-\cos(x))\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{(1-\cos(x))}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\operatorname{sen}(x)}{(1-\cos(x))^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{(1-\cos(x))^2}{x\operatorname{sen}(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2(1-\cos(x))\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\operatorname{sen}^2(x) + 2(1-\cos(x))\cos(x)}{2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(4x)^x$.

   **Resposta**:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(4x)^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen}(4x))} \\
&= e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(\operatorname{sen}(4x)))\right)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Agora calculamos $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen}(4x))$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen}(4x)) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(4x))}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos(4x)}{\operatorname{sen}(4x)}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{4\cos(4x)x^2}{\operatorname{sen}(4x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\cos(4x)x}{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(4x)^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen}(4x))} \\
&= e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(\operatorname{sen}(4x)))\right)}. \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4. Seja $f(x) = \sqrt{x+1}$. Calcule o polinómio de Taylor associado a $f$ de grau 2 centrado em 0 e use-lo para estimar $\sqrt{1,1}$.

   **Resposta**: O polinómio de Taylor associado a $f$ de grau 2 em 0 é

$$p_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

   No nosso caso, $a = 0, f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}$ e $f''(0) = -\frac{1}{4}$. Logo,

$$p_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

   Agora, $\sqrt{1,1} = \sqrt{0,1+1} = f(0,1) \approx p_{2,0}(0,1) = 1 + \frac{1}{2}(0,1) - \frac{1}{8}(0,1)^2 = \frac{839}{800}$.

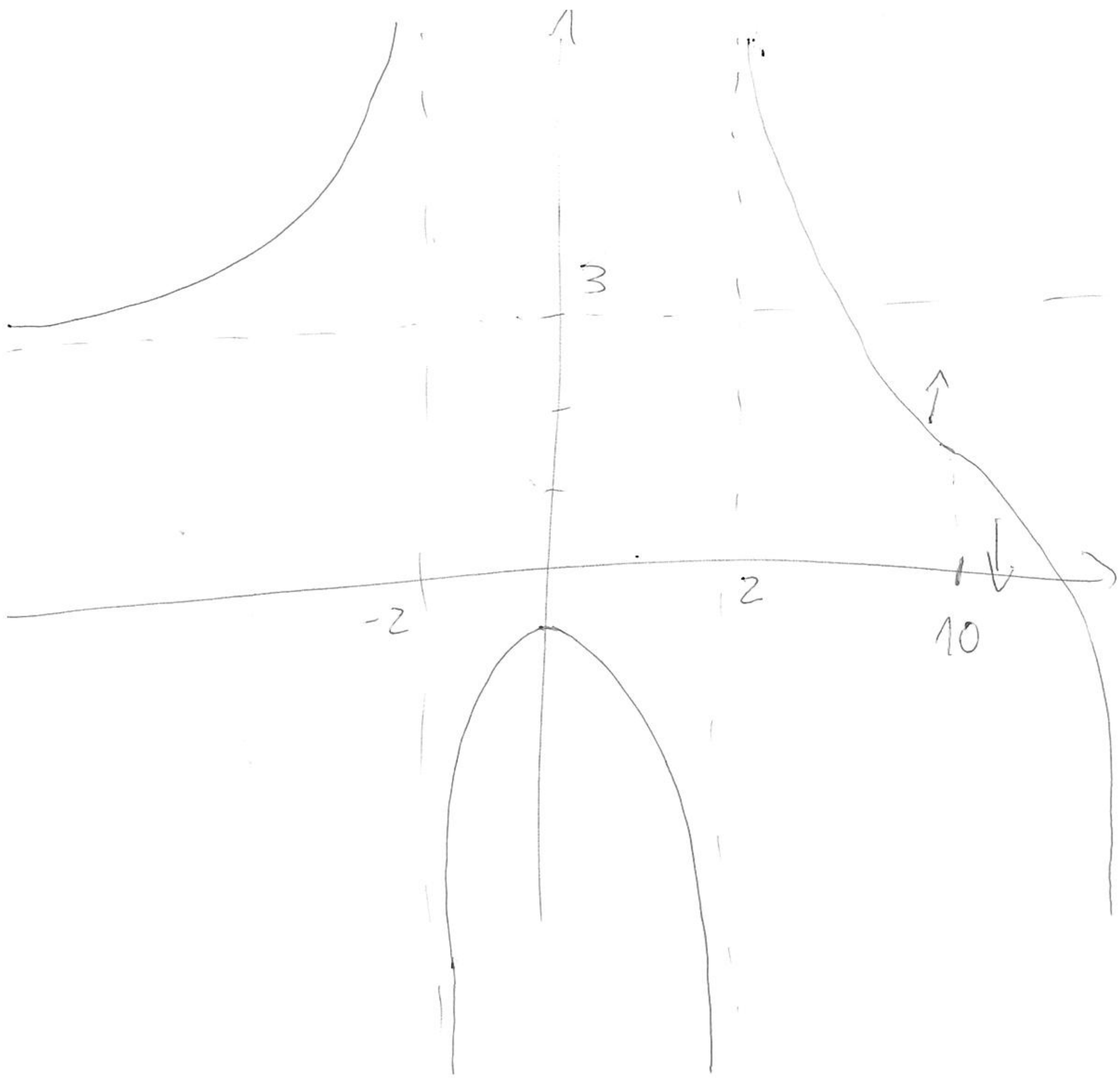
**Ex. 4 —** Esboçe o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \to \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -2$ e para $-2 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e para $2 < x$.

3. $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$.

4. $f''(x) > 0$ para $-\infty < x < -2$ e para $2 < x < 10$ e $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 2$ e para $10 < x$.

Assinale, no esboço, os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento, intervalos de concavidade para cima e para baixo. Assinale, também, os eventuais pontos de máximo, mínimo e de inflexão. Justifique suas respostas.


3
-2
2
10