UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 1 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Combinatória

1 — Uma sala tem 6 portas. De quantas maneiras é possível entrar e sair dessa sala?

2 — De quantas formas é possível entrar e sair da sala anterior por portas distintas?

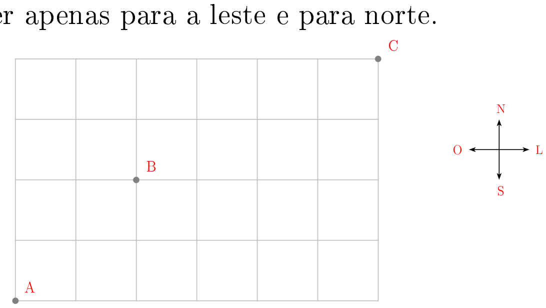
3 — Quantos inteiros entre 10000 e 100000 existem cujos dígitos são somente $6, 7$ ou 8?

4 — Quantos inteiros entre 10000 e 100000 existem cujos dígitos são somente $0, 6, 7$ ou 8?

5 — Quantos inteiros entre 1000 e 9999 (inclusive) existem com todos os dígitos distintos? Desses quantos são ímpares? Desses quantos são pares?

6 — Calcule: **a.)** $\frac{12!}{10!}$ **b.)** $\frac{n!}{(n-r)!}$

7 — Considere o mapa abaixo. Suponha que inicialmente você se localiza no ponto A, e que você deve se mover apenas para a leste e para norte.



a) De quantas formas é possível ir de A e C.

b) De quantas formas é possível ir A e C passando por B.

c) De quantas formas é possível ir A e C não passando por B.

d) De quantas formas é possível ir de A até C e depois retornar a B.

8 — Dados 20 pontos não colineares no plano. Quantas retas podem ser formadas ligando dois pontos? Quantos triângulos podem ser formados ligando uma tripla de pontos?

9 — Numa estante temos 13 livros: 6 de cálculo, 3 de geometria analítica e 4 de física básica. De quantas maneiras é possível ordenar os livros se:

a) Não colocarmos nenhuma restrição.

b) Se pedirmos para que os livros de cálculo sejam colocados primeiro, depois os de geometria analítica e por fim os de física básica.

c) Se pedirmos para que os livros do mesmo assunto fiquem juntos.

10 — Imagine que na coleção de livros anteriores, 3 livros de cálculo eram iguais. Agora, de quantas maneiras é possível ordenar os livros se:

a) Não colocarmos nenhuma restrição.

b) Se pedirmos para que os livros de cálculo sejam colocados primeiro, depois os de geometria analítica e por fim os de física básica.

c) Se pedirmos para que os livros do mesmo assunto fiquem juntos.

11 — Quantas placas de carro podem ser feitas se, ao invés de utilizar 3 letras e 4 números, forem utilizados 2 letras seguidas de 4 números? E se nenhuma letra ou número possa se repetir?

12 — Quantas conjuntos de três letras é possível formar tal que nenhum par de letras seja formado por letras consecutivas?

13 — Um estudante precisa vender 3 CDs de sua coleção que conta com 7 CDs de jazz, 6 de rock e 4 de música clássica. Quantas escolhas ele possui, se

a) ele quiser vender quaisquer CDs?

b) ele quiser vender os três do mesmo estilo?

c) ele quiser vender pelo menos dois do mesmo estilo?

14 — Quantos anagramas (combinação de letras) podem ser criados com as letras das palavras:

a) MISSISSIPPI

b) LISTA

c) PROBABILIDADE

d) BANANA

15 — Considere um grupo de 5 pessoas. Se todos apertam as mãos, quantos apertos de mão teremos?

16 — Neste grupo há 3 mulheres e 2 homens. As mulheres se beijam entre si com 3 beijos, homens não se beijam e mulheres e homens trocam somente 1 beijo. Quantos beijos teremos nos cumprimentos?

17 — Quantas soluções inteiras positivas têm a equação $x + y + z + w = 23$?

18 — Qual a probabilidade de tirar 7 jogando dois dados?

19 — Formule os seguintes problemas em termos de soluções inteiras de equações:

a) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos k bolas na primeira caixa.

b) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com nenhuma caixa com menos de duas bolas.

c) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas tal que as duas primeiras caixas tenham juntas p bolas.

20 — Formule os seguintes problemas em termos de soluções inteiras de equações e distribuição de bolas em caixas:

a) Seleção de seis sorvetes a partir de 31 sabores

b) Seleção de cinco camisas de um grupo de cinco vermelhas, quatro azuis e duas amarelas.

c) Seleção de 12 cervejas de 4 tipos com pelo menos duas de cada tipo.

d) Seleção de 20 refrigerantes de 4 tipos com número par de cada tipo e não mais que oito do mesmo tipo.

21 — **a.)**De quantas maneiras podemos dispor 8 peças brancas idênticas e 8 peças pretas idênticas num tabuleiro de xadrez (8 x 8)? **b.)**Quantas são simétricas (a disposição fica a mesma quando rotacionamos o tabuleiro de 180 graus)?

22 — Para jogar uma partida de futebol, 22 crianças dividem-se em dois times de 11 cada. Quantas divisões diferentes são possíveis?

23 — De quantas maneiras pode ocorrer que num grupo com 25 pessoas 2 ou mais pessoas façam aniversário no mesmo dia.

24 — Em uma caixa há 100 bolas enumeradas de 1 a 100. Cinco bolas são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade de que os números correspondentes as cinco bolas escolhidas sejam consecutivos?

25 — Um apostador possui 18 fichas e quer aposta-las em 4 cavalos, de modo que a aposta em cada cavalo seja de pelo menos uma ficha, de quantos modo o apostador pode realizar sua aposta?

26 — Uma pessoa tem 8 amigos, dos quais 5 serão convidados para uma festa.

a) Quantas escolhas existem se dois dos amigos estiverem brigados e por esse motivo não puderem comparecer?

b) Quantas escolhas existem se dois dos amigos puderem ir apenas se forem juntos?

27 —

** a) Mostre que o número de soluções inteiras não negativas de uma equação da forma $x_1 + x_2 +$

$\cdots + x_r = n$, com n inteiro é

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

b) Quantas soluções inteiras não negativas têm a equação $x+y+z+w=23$?

28 — Temos 20 mil reais que devem ser aplicados entre 4 carteiras diferentes. Cada aplicação deve ser feita em múltiplos de mil reais, e os investimentos mínimos que podem ser feitos são de 2,2,3 e 4 mil reais. Quantas estratégias de aplicação diferentes existem se

a) uma aplicação tiver que ser feita em cada carteira?

b) aplicações tiverem que ser feitas em pelo menos 3 das quatro carteiras?

* **29** — Quantas sequências de quatro letras é possível formar tal que nenhum par de letras seja consecutivo?

Respostas dos Exercícios

1 $6 \cdot 6 = 36$

2 $6 \cdot 5 = 30$

3 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

4 $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 768$

5 $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ e 2240 já que temos 5 escolhas para a unidade, 8 para o milhar, 8 para a centena e 7 para a dezena.

Pares existem 2296.

7 **a.)**$\binom{10}{4}$) **b.)**$\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2}$ **c.)**$\binom{10}{4}$) - $\binom{4}{2} + \binom{6}{2}$

8 $\binom{20}{2}$ e $\binom{20}{3}$

9 **a.)**$13!$
b.)$6!3!4!$ **c.)**$3! \cdot 6!3!4!$

10 **a.)**$\frac{13!}{3!}$
b.)$\frac{6!3!4!}{3!}$ **c.)**$6!3!4!$

11 $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ e $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

12 Assumindo que o alfabeto contém 26 letras.

Dica: conte o número total e retire os formados por letras consecutivas 2024

13 **a.)**$\binom{17}{3}$ **b.)**$\binom{7}{3} + \binom{6}{3} + \binom{4}{3}$

14 **a.)**$\frac{11!}{4!4!2!}$ **b.)**$5!$

15 $\binom{5}{2}$

17 $\binom{22}{3}$

18 O espaço amostral pode ser escolhido como (i, j) com $i \in 1, \ldots 6$ e $j \in 1, \ldots 6$. Logo o espaço amostral tem 36 elementos.

Os eventos favoráveis nesse caso são os pares que satisfazem $i + j = 7$ que são $\binom{7-1}{2-1} = 6$

Logo a probabilidade é $1/6$

19 **a.)**O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos k bolas na primeira caixa é igual ao número de soluções não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots x_r = n$ com $x_1 \geq k$.

Outro modo de descrever a equação acima é fazendo $x_1' = x_1 + k$ (o que garante que $x_1' \geq k$ $(x_1' + k) + x_2 + \cdots x + r = n$ ou seja o número de maneiras é igual ao número de soluções não negativas da equação

$(x_1) + x_2 + \cdots x_r = n - k$.

b.)O número é igual ao número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \cdots x_r = n$ com $x_i \geq 2$.

De modo análogo ao anterior fazendo $x_1' = x_1 + 2$, o que assegura que todo x_1' é maior que 2. teremos que o número de maneiras é igual ao número de soluções não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots x_r = n - 2r$

21 **a.)**Dica multinomial. De 64 casas, queremos escolher 8 para colocar as peças brancas, 8 para as pretas e 48 para deixarmos vazias.

b.) Dica: Basta dispor 4 peças pretas e 4 brancas em metade do tabuleiro.

23 Vamos contar de quantas maneiras 25 pessoas podem fazer aniversários 365^{25}. O número de maneiras dessas pessoas fazerem aniversários em dias diferentes é $365!/340!$. Assim o número de maneiras que pode ocorrer que num grupo com 25 pessoas 2 ou mais pessoas façam aniversário no mesmo dia é $365^{25} - 365!/340!$.

27 Dica: Observe que o número de soluções não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ é igual ao número de soluções positivas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n + r$ o que pode ser visto fazendo a troca de variáveis $y_i = x_i + 1$

27 Usando o exercício anterior temos $\binom{23-4+1}{4-1} = \binom{26}{3} = 15600$

1. *Para cada porta que é possível entrar* (6), *é possível sair por qualquer outra porta* (6):

Entra pela 1ª: sai pela 1,2,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 6 *possibilidades*

Entra pela 2ª: sai pela 1,2,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 6 *possibilidades*

Entra pela 3ª: sai pela 1,2,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 6 *possibilidades*

⋮

Entra pela 6ª: sai pela 1,2,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 6 *possibilidades*

Logo: $6+6+6+6+6+6 = 6 \cdot 6 = 36$ *possibilidades diferentes*

→ *possibilidades de entradas*

→ *possibilidades de saídas*

---

2. *Agora, para cada porta que é possível entrar* (6), *é possível sair por apenas portas disintas* (5):

Entra pela 1ª: sai pela 2,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 5 *possibilidades*

Entra pela 2ª: sai pela 1,3,4,5 *ou* 6ª *porta* → 5 *possibilidades*

Entra pela 3ª: sai pela 1,2,4,5 *ou* 6ª *porta* → 5 *possibilidades*

⋮

Entra pela 6ª: sai pela 1,2,3,4 *ou* 5ª *porta* → 5 *possibilidades*

Logo: $5+5+5+5+5+5 = 6 \cdot 5 = 30$ *possibilidades diferentes*

→ *possibilidades de entradas*

→ *possibilidades de saídas*

---

3. *Entre* 10.000 *e* 100.000 *temos de* 5 *a* 6 *caracteres de espaço disponíveis*: _ _ _ _ _ *ou* _ _ _ _ _ _ .

No entanto, o único número entre 10.000 *e* 100.000 *com* 6 *caracteres é o número* 100.000.

Como devemos utilizar apenas os caracteres 6,7 *ou* 8, *os caracteres de* 100.000, *que são* 1 *e* 0 *não podem aparecer. Assim, toda a nossa gama de possibilidades terá apenas* ***5 caracteres***.

Podemos utlilizar números como 67.678 *ou* 88.888. *Então, cada espaço de posição possui* ***3 possibilidades***.

Logo: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ *números inteiros*

→ *espaços disponíveis (caracteres)*

→ *possibilidades em cada espaço (alfabeto)*

---

4. *Entre* 10.000 *e* 100.000 *temos de* 5 *a* 6 *caracteres de espaço disponíveis*: _ _ _ _ _ *ou* _ _ _ _ _ _ .

No entanto, o único número entre 10.000 *e* 100.000 *com* 6 *caracteres é o número* 100.000.

Como devemos utilizar apenas os caracteres 0,6,7 *ou* 8, *o caractere* 0 *não pode aparecer no começo.*
Toda a nossa gama de possibilidades terá apenas **5 *caracteres***.

Podemos utlilizar números como 61.786 *ou* 88.111. *Então, cada espaço de posição possui* **4 *possibilidades***.

Logo: $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^4 =$ 768 *números inteiros*

espaços disponíveis (caracteres) menos o primeiro que é restrito

possibilidades em cada espaço (alfabeto)

apenas 6,7 e 8

---

5. *Entre* 1.000 *e* 9.999 (*inclusive*) *temos* **4 *caracteres*** *de espaço disponíveis*: _ _ _ _ .

Como devemos utilizar apenas os caracteres distintos, depois de selecionar cada dígito, o próximo fica com o número de ***possibilidades limitado*** *a não selecionar nenhum dos anteriores.*

Podemos utlilizar números como 61.786 *mas não como* 88.111.

Logo: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9 \cdot 9!}{(10-5)!} =$ 4.536 *números inteiros distintos*

espaços disponíveis (caracteres)

possibilidades em cada espaço (alfabeto)

Para ser par, o número precisa terminar apenas com 2,4,6,8 *ou* 0. *No entanto, existem eventos diferentes*:

Quando tiver **4 *ímpares*** *e* ***nenhum par*** → $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 600$ *pares*

Quando tiver **3 *ímpares*** *e* **1 *par*** → $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$ *pares*

Quando tiver **2 *ímpares*** *e* **2 *pares*** → $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ *pares*

Quando tiver **1 *ímpar*** *e* **3 *pares*** → $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ *pares*

Quando tiver ***nenhum ímpar*** *e* **4 *pares*** → $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ *pares*

Repare que o último obrigatoriamente é par.

Logo: $600 + 1200 + 1200 + 600 + 120 - 24 = \sum_{i=1}^{5} \frac{5!}{i!} \cdot \frac{5!}{(5-i)!} - 4! =$ 3.696 *números pares distintos*

número de pares possíveis

números de ímpares possíveis

espaços disponíveis (caracteres)

---

6. *a*) $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 12 \cdot 11 = 12 \cdot (10 + 1) = 120 + 12 = 132$

***b*)** $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$

---

7. *a*) *Considerando que só podemos andar para o norte* (N) *e para o leste* (L) *e como* A *está a* 10 *pontos de distância de* C, *o número de caminhos possíveis é uma permutação de* 4 *para* N *e* 6 *para* L:

Exemplos: $L\,L\,L\,L\,N\,N\,N\,N\,N\,N$, $L\,N\,L\,L\,L\,N\,N\,N\,N\,N$, $L\,N\,N\,L\,N\,N\,L\,N\,N\,L$.

Logo: $\binom{10}{4,6} = \binom{10}{4} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\,6!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$ *formas diferentes*

***b*)** $\binom{4}{2,2} \cdot \binom{6}{2,4} = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} + \frac{6!}{2!\,4!} = 3! + 3 \cdot 5 = 21$ *formas diferentes*

***c*)** $\binom{10}{4,6} - \binom{4}{2,2} = \binom{10}{4} - \binom{4}{2} = \frac{10!}{4!\,6!} - \frac{4!}{2!\,2!} = 10 \cdot 7 \cdot 3 - 3! = 204$ *formas diferentes*

***d*)** $\binom{10}{4,6} + \binom{6}{2,4} = \binom{10}{4} + \binom{6}{2} = \frac{10!}{4!\,6!} + \frac{6!}{2!\,4!} = 10 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 225$ *formas diferentes*

---

8. $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,(20-2!)} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2!\,18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 10 \cdot 19 = 190$ *retas ligando dois pontos*

$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\,(20-3!)} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3!\,17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 19 \cdot 6 = 1140$ *retas triângulos por triplas*

---

9. *a*) $13! = 6.227.020.800$ *maneiras diferentes*

***b*)** $6!\,3!\,4! = 103.680$ *maneiras diferentes*

***c*)** $(6!\,3!\,4!) \cdot 3! = 622.080$ *maneiras diferentes*

---

10. *a*) $\frac{13!}{3!} = 1.037.836.800$ *maneiras diferentes*

***b*)** $\frac{6!}{3!}3!\,4! = 17.280$ *maneiras diferentes*

***c*)** $\left(\frac{6!}{3!}3!\,4!\right)3! = 103.680$ *maneiras diferentes*

---

11. $26^2 \cdot 10^4 = (26 \cdot 26) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 6.760.000$ *placas diferentes*

$\frac{26!}{(26-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!} = (26 \cdot 25) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 3.276.000$ *placas diferentes*

$\mathbf{12.}\ \binom{26}{3} - [26-(2-1)]\binom{26}{3-2} = \binom{26}{3} - 25\binom{26}{1} = 1950\ \mathit{conjuntos\ de\ letras\ sem\ pares\ consecutivos}$

$\mathbf{13.}\boldsymbol{a})\ \binom{7+6+4}{3} = \binom{17}{3} = 680\ \mathit{escolhas\ diferentes}$

$\boldsymbol{b})\ \binom{7}{3} + \binom{6}{3} + \binom{4}{3} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5 + 6\cdot 5\cdot 4 + 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2} = 7\cdot 5 + 5\cdot 4 + 4 = 59\ \mathit{escolhas\ diferentes}$

$\boldsymbol{c})\ \binom{7}{2}\left[\binom{6}{1}+\binom{4}{1}\right] + \binom{6}{2}\left[\binom{7}{1}+\binom{4}{1}\right] + \binom{4}{2}\left[\binom{7}{1}+\binom{6}{1}\right] =$

$= \binom{7}{2}10 + \binom{6}{2}11 + \binom{4}{2}13 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 10 + 6\cdot 5\cdot 11 + 4\cdot 3\cdot 13}{2}$

$= 7\cdot 6\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot 11 + 2\cdot 3\cdot 13 = 453\ \mathit{escolhas\ diferentes}$

$\mathbf{14.}\boldsymbol{a})\ MISSISSIPPI \rightarrow 11\ posições\ /\ I, S\ repetem\ 4x\ /\ P\ repete\ 2x$

$\rightarrow \binom{11}{4,4,2} = \dfrac{11!}{4!\,4!\,2!} = 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 5\cdot 2 = 34.650\ \mathit{anagramas}$

$\boldsymbol{b})\ LISTA \rightarrow 5\ posições\ /\ nenhum\ repete \rightarrow \dfrac{5!}{0!} = 5! = 120\ \mathit{anagramas}$

$\boldsymbol{c})\ PROBABILIDADE \rightarrow 14\ posições — R\ repete\ 1x\ e\ B, A, I, D\ repetem\ 2x$

$\rightarrow \binom{13}{1,2,2,2,2} = \dfrac{13!}{1!\,2!\,2!\,2!\,2!} = 389.188.800\ \mathit{anagramas}$

$\boldsymbol{d})\ BANANA \rightarrow 6\ posições\ /\ A\ repete\ 3x\ /\ N\ repete\ 2x \rightarrow \binom{6}{3,2} = \dfrac{6!}{3!\,2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60\ \mathit{anagramas}$

$\mathbf{15.}\ \binom{5}{2} = 20\ \mathit{apertos\ de\ mão}$

$\mathbf{16.}\ \binom{3}{2}\cdot 3 + 3\cdot 2 = 15\ \mathit{beijos}$

$\mathbf{17.}\ \binom{23-1}{4-1} = 1540\ \mathit{soluções\ inteiras\ positivas}$

$\mathbf{18.}\ x_1 + x_2 = 7 \rightarrow \bullet\_\bullet\_\bullet\_\bullet\_\bullet\_\bullet\_\bullet$ $\quad$ $(cada\ espaço\ representa\ uma\ divisão)$

$Exemplo:\ \ \bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\ \ indica\ 3+4$

$Então:\ \binom{6}{1} = 6\ possibilidades\ diferentes\ para\ 6^2\ totais\ probabilidades$

$Logo: \dfrac{\binom{6}{1}}{6^2} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ $de\ probabilidade \cong 17\%$

---

19. $\boldsymbol{a})$ $\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet|\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet|||\cdots| = \binom{r-k+n-1}{r-k} = \binom{r-k+n-1}{n-1}$ $maneiras\ diferentes$

k *bolas na primeira caixa*

1 *divisão para indicar a primeira caixa*

permutações entre: $(\boldsymbol{r-k})$ ***bolas restantes*** $+$ $(\boldsymbol{n-1})$ ***divisões de caixas***

EXTRA

$x_1' + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$x_1' = x_1 + k$

$k + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r - k\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r - k\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r - k\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{b})$ $x_1' + x_2' + x_3' + \cdots + x_n' = r\ ;\quad x_i' \in \mathbb{N}$

$x_i' = x_i + 2$

$(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) + \cdots + (x_n + 2) = r\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$n \cdot 2 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r - 2n\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r - 2n\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{c})$ $\_\_\bullet\_\_\bullet\_\_\cdots\bullet\_\_|\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet|||\cdots| = (p+1)\binom{r-p+n-3}{r-p} = (p+1)\binom{r-p+n-3}{n-3}$ $maneiras\ dif.$

selecionar entre as $(\boldsymbol{p+1})$ ***posições***, *a divisão da primeira caixa*

1 *divisão para indicar a segunda caixa*

permutações: $(\boldsymbol{r-p})$ ***bolas restantes*** $+$ $(\boldsymbol{n-2}) - \boldsymbol{1}$ ***divisões restant.***

EXTRA

$(x_1 + x_2) + x_3 + \cdots + x_n = r\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$x_1 + x_2 = p$

$p + x_3 + \cdots + x_n = r\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$x_3 + \cdots + x_n = r - p\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=3}^{n} x_i = r - p \ ; \quad x_i \in \mathbb{N}$$

$$\mathbf{20}.\boldsymbol{a})\ \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,||\cdots|}_{} = \binom{6+31-1}{6} = \binom{6+31-1}{31-1} = 1.947.792\ seleções\ diferentes$$

$$permutações: 6\ bolas + (31-1)\ divisões\ para\ sabores$$

$$\sum_{i=1}^{31} x_i = 6 \ ; \quad x_i \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{b})\ \ x_1' + x_2' + x_3' = 5$

$x_1' = 5 - x_1$

$x_2' = 4 - x_2$

$x_3' = 2 - x_3$

$(5 - x_1) + (4 - x_2) + (2 - x_3) = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = (5 + 4 + 2) - 5$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,||= \binom{(5+4+2)-5}{3-1} = \binom{6}{2} = 15\ seleções\ diferentes$$

$\boldsymbol{c})\ \ x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 12$

$x_i' = x_i + 2$

$(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) + (x_4 + 2) = 12$

$4 \cdot 2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 - 4 \cdot 2$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\ \ |||= \binom{(12 - 4\cdot 2) + 4 - 1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35\ seleções\ diferentes$$

$\boldsymbol{d})\ \ x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 20$

$x_i' = 2x_i'' \ \ \Rightarrow \ \ 2x_1'' + 2x_2'' + 2x_3'' + 2x_4'' = 20$

$x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'' = 10$

$x_i'' = 8/2 - x_i$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \cdot 8/2 - 10$

$$\begin{matrix}\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\end{matrix}\,|||= \binom{4\cdot 8/2 - 10}{4-1} = \binom{6}{3} = 20\ seleções\ diferentes$$

$\mathbf{21}.\ 8x8 \to 64\ posições\ possíveis \to \binom{64}{8}\binom{64-8}{8} = \frac{64!}{8!\,(64-8)!} \cdot \frac{(64-8)!}{8!\,(64-8-8)!} = \frac{64!}{8!\,8!\,48!}$

$= 6.287.341.680.214.194.600\ posições\ possíveis$

$simetria\ de\ 180° \to cada\ escolha\ implica\ em\ uma\ escolha\ do\ outro\ lado$

$\to 64 \cdot 1 \cdot 62 \cdot 1 \cdot 60 \cdot 1 \cdot 58 \cdot 1 \cdot 56 \cdot 1 \cdot 54 \cdot 1 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 50 \cdot 1 = 108.569.051.136.000\ posições\ possíveis$

$\mathbf{22}.\frac{\binom{22}{11}}{\mathbf{2}!} = 352.716\ divisões\ diferentes$

$\mathbf{23}.\ 365^{25} - \frac{365!}{(365-25)!}$

$= 6.489.401.033.174.836.353.736.053.814.447.511.804.192.464.972.003.836.221.236.578.125\ maneiras\ dif.$

$\mathbf{24}.\ \frac{100-(5-1)}{\binom{100}{5}} = \frac{1}{784245} \cong 0{,}0001275\%$

$\mathbf{25}.\ (c_1+1)+(c_2+1)+(c_3+1)+(c_4+1) = 18\,; \quad c_i \in \mathbb{N},\ \ 1 \le i \le 4$

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 18 - 4 \cdot 1$

$\binom{18-4\cdot 1+4-1}{4-1} = \binom{17}{3} = 680\ modos\ de\ aposta\ diferentes$

$\mathbf{26}.\ \boldsymbol{a})\ \binom{8}{5} - \binom{2}{2}\binom{8-2}{5-2} = \binom{8}{5} - \binom{5}{3} = 46\ escolhas\ diferentes$

$\boldsymbol{b})\ \binom{2}{2}\binom{8-2}{5-2} = \binom{5}{3} = 10\ escolhas\ diferentes$

$\mathbf{27}.\ \boldsymbol{a})\ x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n\,; \quad x_i \in \mathbb{N},\ \ 1 \le i \le r$

$Soluções\ não\ negativas \to x_i \ge 0 \to x_i = x_i' - 1; \quad x_i' > 0$

$(x_1' - 1) + (x_2' - 1) + \cdots + (x_r' - 1) = n\,; \quad x_i' \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \le i \le r$

$x_1' + x_2' + \cdots + x_r' - r = n\,; \quad x_i' \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \le i \le r$

$x_1' + x_2' + \cdots + x_r' = n + r\,; \quad x_i' \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \le i \le r$

$\bullet\_\_\bullet\_\_\cdots\bullet\_\_\bullet \quad |\,|\,|\cdots| = \binom{n+r-1}{r-1}\ \blacksquare$

$\boldsymbol{b})\ \binom{23+4-1}{4-1} = \binom{26}{3} = 2600\ soluções\ diferentes$

28. ***a***) $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 3) + (x_4 + 4) = 20\ ; \quad x_i \in \mathbb{N},\ \ 1 \leq i \leq 4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 - (2 + 2 + 3 + 4)\ ; \quad x_i \in \mathbb{N},\ \ 1 \leq i \leq 4$

$\binom{20 - (2 + 2 + 3 + 4) + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{9}{3} = 84\ \mathit{estratégias\ de\ aplicação\ diferentes}$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9\ ; \quad x_k = 0\ \ e\ \ x_i \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \leq i \leq 3,\ \ i \neq k$

$\rightarrow\ \ 4\binom{9 - 1}{3 - 1} = 112\ \mathit{estratégias\ diferentes\ caso\ uma\ bolsa\ não\ seja\ aplicada}$

---

29. $\binom{26}{4} - [26 - (2 - 1)]\binom{26}{4 - 2} = \binom{26}{4} - 25\binom{26}{2} = 6825\ \mathit{conjuntos\ de\ letras\ sem\ pares\ consecutivos}$