CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

UFABC

Bases Matemáticas

2ª Prova — Turma B

18/08/2017

—A—

Prof. Dr. Stylianos Dimas Ph.D.

Nome:____

Exercício 1. Para cada uma das seguintes funções, prove, ou dê contra-exemplos, que elas sejam injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nem um ou nem outro.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$ (1 Pt)

ii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (1 Pt)

Exercício 2. Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x), g(x), (f+g)(x), (fg)(x), \frac{f}{g}(x), (f \circ g)(x), (f \circ f)(x), (g \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$, e finalmente, as expressões para $(f \circ g)(x), (f \circ g)(x), (f \circ f)(x), (g \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

i) $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$ (1 Pt)

ii) $f(x) = \frac{x}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ (1 Pt)

Exercício 3. Dê a definição dos seguintes limites:

i) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (0.5 Pts)

ii) $\lim_{y \to \infty} x(y) = -\infty$ (0.5 Pts)

Exercício 4. Prove a partir da definição de limite infinito que: 1 Pt

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exercício 5. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x\to 3}(x^3+x+2)(x^3+2)$ (0.5 Pts)

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$ (1 Pt)

iii) $\lim_{x\to 4^+}\frac{7}{4-x}$ (1 Pt)

iv) $\lim_{x\to 3}x^2$ (0.5 Pts)

v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}$ (1 Pt)

Limites Fundamentais

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Boa prova, JUSTIFIQUE todas as suas respostas e escreva CLARAMENTE !

Questão	1.	2.	3.	4.	5.	Total
Pontos	2	2	1	1	4	10
Atingido						

UFABC

FOLHA DE PROVA

NOTA

B

Nome:

R.A. Data: / /

Disciplina: Cód. Disciplina:

Professor:

P2 - A

Ex. 1)

i)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n+1$

$f(u) = f(v) \Rightarrow \cancel{3u+1} = \cancel{3v+1} \Rightarrow u = v$: é injetora

$2 \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2 \Rightarrow 3n+1 = 2 \Rightarrow n = 1/3 \notin \mathbb{N}$ Logo a função não é sobrejetora, portanto não é bijetora.

ii)

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$

$f(u) = f(v) \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{v} \Rightarrow u = v$: é injetora

Não é sobrejetora porque por exemplo para o número $-1 \in \mathbb{R}$ não existe $x \in (0,\infty)$ tal que $f(x) = -1$. Ou seja $\mathbb{R} \neq \mathrm{Im} f = (0,\infty)$ Logo, a função não é bijetora.

Ex. 2)

i)

$f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$,

$\mathrm{Dom}\, g = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0\} = [1,\infty)$

$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom}\, g = [1,\infty)$

$Dom(f/g) = Dom f \cap Dom^* g = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0,\ x-1 \geq 0\} = (1, \infty)$

$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom g \mid g(x) \in Dom f\} = [1, \infty)$

$Dom(f \circ f) = \{x \in Dom f \mid f(x) \in Dom f\} = \mathbb{R}$

$Dom(g \circ g) = \{x \in Dom g \mid g(x) \in Dom g\} = \{x \in [1, \infty) \mid \sqrt{x-1} \geq 1\} =$
$= [2, \infty)$

$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom f \mid f(x) \in Dom g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 1\} = [1, \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x-1)^3}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x^9$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^3 - 1}$

ii) $f(x) = \frac{x}{x(x-2)}$, $g(x) = \sqrt{x}$

$Dom f = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\} = \mathbb{R}^* - \{2\}$
$Dom g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

$Dom(f+g) = Dom(f \cdot g) = Dom f \cap Dom g = [0,2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R}_+ - \{2\}$

$Dom(f/g) = Dom f \cap Dom^* g = Dom f \cap \{x \in Dom g \mid g(x) \neq 0\} =$
$= (\mathbb{R}^* - \{2\}) \cap \mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}^*_+ - \{2\}$

$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom g \mid g(x) \in Dom f\} = \{x \in [0, \infty) \mid g(x) \neq 0, 2\}$
$= (0, 4) \cup (4, \infty)$

$Dom(f \circ f) = \{x \in Dom f \mid f(x) \in Dom f\} = \{x \in \mathbb{R}^* - \{2\} \mid f(x) \neq 0, 2\}$
$= \mathbb{R}^* - \{2, 5/2\}$

$Dom(g \circ g) = \{x \in Dom g \mid g(x) \in Dom g\} = \{x \in [0, \infty) \mid g(x) \geq 0\} = [0, \infty)$

$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom f \mid f(x) \in Dom g\} = \{x \in \mathbb{R}^* - \{2\} \mid f(x) \geq 0\} = (2, \infty)$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{x/x(x-2)}{x/x(x-2)\left(\frac{x}{(x-2)x} - 2\right)} = \frac{x(x-2)}{-2x^2+5x}$

$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt[4]{x}$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\frac{x}{x(x-2)}\right)^{1/2}$

Ex.3.)

i) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \mid a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)>\varepsilon$

ii) $\lim_{y\to\infty} x(y) = -\infty \iff \forall \varepsilon<0, \exists \delta>0 \mid y>\delta \Rightarrow x(y)<\varepsilon$

Ex. 4)

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \iff \forall \varepsilon<0, \exists\delta>0 \mid -\delta<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<\varepsilon$

$\frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = \varepsilon$. Portanto, $\forall \varepsilon<0, \exists \delta(=-\frac{1}{\varepsilon})>0 \mid -\delta<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<\varepsilon$

Ex.5)

i) $\lim_{x\to 3} (x^3+x+2)(x^3+2) = (27+3+2)(27+2) = 32.29 = 928$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \cdot \frac{x}{\sin(mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \cdot \left(\frac{\sin(mx)}{x}\right)^{-1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \underset{\lim_{x\to 0} t=0}{\overset{t=nx}{=\!=}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t/n} = \lim_{t\to 0} n \cdot \frac{\sin t}{t} = n$

Logo, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$. Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = n\, m^{-1} = n/m$

iii) $\lim_{x\to 4^+} \frac{7}{4-x} = -\infty$ uma vez que quando $x>4$, $4-x<0$ e $\lim_{x\to 4} (4-x) = 0$.

iv) $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} \overset{t=4x}{\underset{\lim_{x\to 0} t=0}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t/4} = 4 \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 4$

UFABC

BASES MATEMÁTICAS

2ª PROVA — TURMA B

18/08/2017

—B—

PROF. DR. STYLIANOS DIMAS PH.D.

Nome:____

Exercício 1. Determine o domínio máximo D das seguintes funções (observação: a notação $f : D \subset X \to Y$ indica uma função $f : D \to Y$, em que $D \subset X$):

i) $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$ (1 Pt)

ii) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\cos x}$ (1 Pt)

Exercício 2. Mostre que valem a seguinte propriedade: 2 Pts

$$\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$$

Exercício 3. Dê a definição dos seguintes limites:

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ (0.5 Pts)

ii) $\lim_{f\to -\infty} x(f) = a$ (0.5 Pts)

Exercício 4. Use o Teorema do Valor Intermediário, ou o Teorema de Bolzano, para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado: 1 Pt

$$\sqrt[3]{x} = 2x \quad (0,1)$$

Exercício 5. Calcule os seguintes Limites:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x}$ (0.5 Pts)

ii) $\lim_{x\to 4^+} \frac{7}{4-x}$ (0.5 Pts)

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$ (2 Pts)

iv) $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$ (1 Pt)

Limites Fundamentais

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Identidades

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Boa prova, JUSTIFIQUE todas as suas respostas e escreva CLARAMENTE !

Questão	1.	2.	3.	4.	5.	Total
Pontos	2	2	1	1	4	10
Atingido						

UFABC

FOLHA DE PROVA

NOTA

B

Nome:

R.A. Data: / /

Disciplina: Cód. Disciplina:

Professor:

P2 - B

Ex.1)

i)

$\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{N} \mid x(x+4)(3x+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0, -4, -1/3\} = \mathbb{N}^*$

ii)

$\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

Ex.2)

Preciso mostrar que $\sec(\tan^{-1}x) = \sqrt{1+x^2}$. Conheço que

$\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y \Rightarrow \sec y = \pm\sqrt{1+\tan^2 y}$

Seja $x = \tan y \Rightarrow y = \tan^{-1} x$, $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ é uma função bijetora, logo, $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Portanto,

$\sec(\tan^{-1}x) = \pm\sqrt{1+x^2}$ uma vez que no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a função sec é positiva temos que $\sec(\tan^{-1}x) = \sqrt{1+x^2}$

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon<0, \exists \delta>0 \mid a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)<\varepsilon$

ii) $\lim_{t\to -\infty} x(t) = a \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta<0 \mid t<\delta \Rightarrow |x(t)-a|<\varepsilon$

Ex. 4)

Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2x$, a função é contínua ($2x$ é um polynómio e $\sqrt[3]{x}$ a inversa da função contínua e monótona x^3). Mais,

$f(0) = 0$
$f(1) = 1-2 = -1$ } Portanto o teorema de Bolzano não é aplicável. Mais, do teorema do Valor Intermediário não podemos determinar a existência de uma raiz no intervalo $(0,1)$

Ex. 5)

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1+\cancel{x})}{x(3x^2+x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{3x^2+x+1} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to 0} (x^3+x^2) = 0$	$\lim_{x\to 0} x(x+1) = 0$
$\lim_{x\to 0} (3x^3+x^2+x) = 0$	$\lim_{x\to 0} (3x^2+x+1) = 1$

ii) $\lim_{x\to 4^+} \frac{7}{4-x} = -\infty$ uma vez $\lim_{x\to 4} (4-x) = 0$ e $4-x<0$ quando $x>4$.

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \cdot \frac{x}{\sin(mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \cdot \left(\frac{\sin(mx)}{x}\right)^{-1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \overset{t=nx}{\underset{\lim_{x\to 0} t=0}{=\!=}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t/n} = \lim_{t\to 0} n \cdot \frac{\sin t}{t} = n$$ de modo

análogo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = n \cdot m^{-1} = n/m$$

iv) $$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 9} \frac{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x-5}+2)(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)(3+\sqrt{x})}$$

$\lim_{x\to 9} (3-\sqrt{x}) = 3-\sqrt{9} = 0$

$\lim_{x\to 9} (\sqrt{x-5}-2) = \sqrt{9-5} - 2 = 0$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(9-x)(\sqrt{x-5}+2)}{(x-5-4)(3+\sqrt{x})} = -\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x-5}+2}{\sqrt{x}+3} = -\frac{2}{3}$$

$\lim_{x\to 9} (\sqrt{x-5}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$

$\lim_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$