LISTA 3 - BASES MATEMÁTICAS
Resolução

Indução

1 — Calcule:

a) A soma dos n primeiros pares.

Os números pares formam uma progressão aritmética de razão 2: $(0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$
O termo geral dessa PA pode ser obtido pela equação $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde a_n é o n-ésimo valor, a_1 é o primeiro e r a razão. O n-ésimo termo (termo geral) é, então, $a_n = 0 + 2(n-1) = 2n-2$. A progressão aritmética pode ser representada como

$$(0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n-2).$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão artimética é obtida por meio de $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. Então, a soma dos n primeiros pares é

$$S_{pares} = \frac{n(0+2n-2)}{2} = \frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

$\blacksquare$

b) A soma dos n primeiros ímpares.

Os números ímpares formam uma progressão artimética de razão 2: $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$
O n-ésimo termo é $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$. A soma dos n primeiros termos é, então

$$S_{impares} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = \frac{n(2n)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

$\blacksquare$

2 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1^2 = \tfrac{1(2\cdot 1+1)(1+1}{6} = \tfrac{1\cdot 3\cdot 2}{6} = 1$$

P(1) é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$
Tese – $P(k+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}_{\frac{k(2k+1)(k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \tfrac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 = \tfrac{k(2k+1)(k+1)+6(k+1)^2}{6} =$$
$$\tfrac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \tfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \tfrac{(k+1)2(k+2)(k+\frac{3}{2})}{6} = \tfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

$\blacksquare$

Nota: Polinômios, ou seja, expressões do tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ podem ser reescritas como $P(x) = a_n(x - r_n)(x - r_{n-1})\cdots(x - r_2)(x - r_1)$, onde $r_n, r_{n-1}, \cdots, r_1$ são zeros do polinômio.

3 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1^3 = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1(1+1)\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = 1^2 = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^2$
Tese – $P(k+1) : 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right)^2$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3}_{\left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^2} + (k+1)^3 = \left(\tfrac{1}{2}k(k+1)\right)^2 + (k+1)^3 = \tfrac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 =$$
$$(k+1)^2\left[\tfrac{1}{4}k^2 + (k+1)\right] = (k+1)^2\left[\tfrac{1}{4}k^2 + k + 1\right] = (k+1)^2\left(\tfrac{1}{4}(k+2)^2\right) = \left(\tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)\right)^2$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

$\blacksquare$

b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1 = 4 - \tfrac{1+2}{2^{1-1}} = 4 - \tfrac{3}{1} = 4 - 3 = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + k(\frac{1}{2})^{k-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}$
Tese – $P(k+1) : 1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + k(\frac{1}{2})^{k-1} + (k+1)(\frac{1}{2})^k = 4 - \frac{(k+1)+2}{2^{(k+1)-1}} = 4 - \frac{k+3}{2^k}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + k(\frac{1}{2})^{k-1}}_{4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}} + (k+1)(\tfrac{1}{2})^k = 4 - \tfrac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1)(\tfrac{1}{2})^k = 4 - \tfrac{k+2}{\frac{2^k}{2}} + (k+1)(\tfrac{1}{2^k}) =$$
$$4 + \tfrac{-2k-4}{2^k} + (\tfrac{k+1}{2^k}) = 4 + \tfrac{-2k-4+k+1}{2^k} = 4 + \tfrac{-k-3}{2^k} = 4 - \tfrac{k+3}{2^k}$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

$\blacksquare$

c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})\cdots(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{1+1}$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$
Tese – $P(k+1) : (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k+1})(1-\frac{1}{k+2}) = \frac{1}{k+2}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k+1})}_{\frac{1}{k+1}}(1-\tfrac{1}{k+2}) = (\tfrac{1}{k+1})(1-\tfrac{1}{k+2}) = (\tfrac{1}{k+1})(\tfrac{k+2-1}{k+2}) = (\tfrac{1}{k+1})(\tfrac{k+1}{k+2}) = \tfrac{1}{k+2}$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$
Tese – $P(k+1) : 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}}_{2^k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^1 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

e) $n < 2^n$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1 < 2^1 \Rightarrow 1 < 2$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : k < 2^k$
Tese – $P(k+1) : k + 1 < 2^{k+1}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos, $k < 2^k$.
Multiplicando ambos os lados da desigualdade por 2, obtemos

$$2k < 2 \cdot 2^k \Rightarrow 2k < 2^{k+1}$$

Claramente, para $k \geq 1$ temos $k + 1 \leq 2k$. Então, $k + 1 \leq 2k < 2^{k+1}$. Logo, $k + 1 < 2^{k+1}$.

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$(-1)^{1+1}\cdot 1^2 = 1^2 = 1 = (-1)^{1+1}\tfrac{1(1+1)}{2} = 1\cdot\tfrac{2}{2} = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}$
Tese – $P(k+1) : 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2 = (-1)^{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k+1}k^2}_{(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}} + (-1)^{k+2}(k+1)^2 &= \\
= (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k+1)^2 &= \\
= (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)(-1)^{k+1}(k+1)^2 &= \\
= (-1)^{k+1}(k+1)[\frac{k}{2} - (k+1)] &= \\
= (-1)^{k+1}(k+1)[-\frac{k}{2} - 1] &= \\
= (-1)^{k+1}(k+1)(-1)\frac{1}{2}(k+2) &= \\
= \frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

4 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \cdots, a_n = r^{n-1}a, \cdots$ é denominada progressão geométrica de razão r. Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r-1}.$$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$a_1 = a = \frac{r^1 a - a}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : a + ra + r^2a + \cdots + r^{k-1}a = S_k = \frac{r^k a - a}{r-1}$
Tese – $P(k+1) : a + ra + r^2a + \cdots + r^{k-1}a + r^k a = S_{k+1} = \frac{r^{k+1}a - a}{r-1}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{a + ra + r^2a + \cdots + r^{k-1}a}_{\frac{r^k a - a}{r-1}} + r^k a = \tfrac{r^k a - a}{r-1} + r^k a = \tfrac{r^k a - a + (r-1)r^k a}{r-1} = \tfrac{r^k a - a + rr^k a - r^k a}{r-1} = \tfrac{-a + rr^k a}{r-1} =$$

$$\tfrac{r^{k+1}a - a}{r-1}$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

5 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

i) Testando a propriedade para $n = 4$:

$$2 \cdot 4 + 1 < 2^4 \Rightarrow 9 < 16$$

$P(4)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : 2k + 1 < 2^k$
Tese – $P(k+1) : 2(k+1) + 1 = 2k + 3 < 2^(k + 1)$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade, na hipótese, obtemos

$$2(2k+1) < 2 \cdot 2^k \Rightarrow 4k + 2 < 2^{k+1}.$$

Mas, $2k + 3 < 4k + 2$ para valores naturais tais que $k \geq 1$ (basta resolver a inequação). Então

$$2k + 3 < 4k + 2 < 2^{k+1}.$$

Logo,

$$2k + 3 < 2^{k+1}.$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$.

■

6 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1+x)^n > 1 + nx, \text{ para todo } n \geq 2.$$

i) Testando a propriedade para $n = 2$:

$$(1+x)^2 > 1 + 2x \Rightarrow 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \Rightarrow x^2 > 0 \because \text{ todo número elevado à 2 é positivo}$$

$P(2)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : (1+x)^k > 1 + kx$
Tese – $P(k+1) : (1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x$

Na hipótese indutiva, multiplicando-se ambos os lados da desiguldade por $(1 + x)$, obtém-se [1]

$$(1+x)(1+x)^k > (1+x)(1+kx) \Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1 + kx + x + kx^2 \Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2$$

Como $kx^2 > 0$, temos $1 + (k+1)x < 1 + (k+1)x + kx^2$. Então

$$1 + (k+1)x < 1 + (k+1)x + kx^2 < (1+x)^{k+1}.$$

Logo,

$$1 + (k+1)x < (1+x)^{k+1} \text{ou, equivalentemente} (1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x.$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$.

■

[1] x é um inteiro positivo (informado no enunciado), então $(x + 1)$ é também positivo. Por isso foi possível multiplicar ambos os lados da desigualdade sem se preocupar com a alteração do sinal.

7 — Prove que:
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

i) Testando a propriedade para $n=1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k):\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$
Tese – $P(k+1):\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

A implicação $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n\in\mathbb{N}:n\geq 1$.

■

8 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

i) Se $n=1$, é trivial que $2^{2\cdot 1}-1=3$ é divísivel por 3.

ii) Hipótese indutiva – $P(k):2^{2k}-1$ é divisível por 3, *id est*, $2^{2k}-1=3m, m\in\mathbb{Z}$
Tese – $P(k+1):2^{2(k+1)}-1=2^{2k+2}-1$ é divisível por 3, *id est*, $2^{2k}-1=m', m'\in\mathbb{Z}$

Multiplicando por 4 ambos os lados da igualdade que representa $P(k)$, temos

$$4\cdot 2^{2k}-1=4\cdot 3m\Rightarrow 2^2\cdot 2^{2k}-1=3(4m)\Rightarrow 2^{2k+2}-1=3(4m).$$

$4m$ é um número inteiro qualquer, assim como m', então podemos impor que $m'=4m$. Obtemos $2^{2k+2}-1=3m'$.

Logo, para todo inteiro $n\geq 1$ o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

■

10 — Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados $(n\geq 3)$ é $(n-2)\pi$.

i) Testando a propriedade para um triângulo, i.e., $n=3$:

$$\text{Soma dos ângulos internos}=(3-2)\pi=\pi=180^\circ$$

Claramente, $P(3)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k):\sum_{i=1}^{k}\varphi_i=(k-2)\pi$.
Tese – $P(k+1):\sum_{i=1}^{k+1}\varphi_i=\sum_{i=1}^{k}\varphi_i+\varphi_{k+1}=(k-1)\pi$.

Onde φ é um ângulo interno do polígono de k lados.

Pela hipótese indutiva, assumida como verdadeira, conclui-se que o aumento de um lado no polígono implica em um aumento de π rad na soma dos ângulos internos. Exemplificando, a soma dos ângulos internos de um triângulo ($n = 3$) é π rad, de um quadrilátero ($n = 4$) é $2\pi = \pi + \pi$ rad. Genericamente,

$$\text{Soma dos ângulos internos } (k+1 \text{ lados}) = \pi + \text{Soma dos ângulos internos } (k \text{ lados})$$

Temos,

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i + \varphi_{k+1} = (k-2)\pi + \varphi_{k+1} = (k-2)\pi + \pi = \pi(k-2+1) = (k-1)\pi$$

Logo, a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo com $n \geq 3$ lados é dado por $(n-2)\pi$.

$\blacksquare$

11 — Prove que:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$2^1 = 2^{1+1} - 2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \displaystyle\sum_{k=1}^{m} 2^k = 2^{m+1} - 2$

Tese – $P(m+1) : \displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} 2^k = \sum_{k=1}^{m} 2^k + 2^{m+1} = 2^{m+2} - 2$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{k=1}^{m} 2^k + 2^{m+1} = 2^{m+1} - 2 + 2^{m+1} = 2 \cdot 2^{m+1} - 2 = 2^{m+2} - 2$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $n > 0$, onde n é um inteiro.

$\blacksquare$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
Tese – $P(m+1) : \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} = \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $n > 0$, onde n é um inteiro.

■

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{m}{2m+1}$
Tese – $P(m+1) : \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)} = \frac{m+1}{2(m+1)+1}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$= \frac{(2m+3)m+1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{2m^2+3m+1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{(m+1)(2m+1)}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{m+1}{2m+3}$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $n > 0$, onde n é um inteiro.

■

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1(1+1) = 1\cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \sum_{j=1}^{m} j(j+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
Tese – $P(m+1) : \sum_{j=1}^{m+1} j(j+1) = \sum_{j=1}^{n} j(j+1) + (m+1)(m+2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) + (m+1)(m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} + (m+1)(m+2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $\forall n \in \mathbb{Z}$

■

e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$(2\cdot 1-1) = 2-1 = 1 = 1^2$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \sum_{j=1}^{m} (2j-1) = m^2$
Tese – $P(m+1) : \sum_{j=1}^{m+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{m} (2j-1) + [2(m+1)-1] = (m+1)^2$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{j=1}^{m}(2j-1)+[2(m+1)-1]=m^2+2(m+1)-1=m^2+2m+2-1=m^2+2m+1=(m+1)^2$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\blacksquare$

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$1(1!) = 1 = 1(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(m) : \sum_{i=1}^{m} i(i!) = (m+1)! - 1$
Tese – $P(m+1) : \sum_{i=1}^{m+1} i(i!) = \sum_{i=1}^{m} i(i!) + (m+1)(m+1)! = (m+2)! - 1$

Assumindo como verdadeira a hipótese indutiva temos,

$$\sum_{i=1}^{m} i(i!) + (m+1)(m+1)! = (m+1)! - 1 + (m+1)(m+1)! =$$

$$= (m+1)![1+m+1] - 1 = (m+2)(m+1)! - 1 = (m+2)! - 1$$

A implicação $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ foi verificada. Então $P(n)$ é válida para $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\blacksquare$

12 — Use indução para mostrar que um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos:

Notação: $\wp(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A e $|A|$ é o número de elementos do conjunto A.

i) Para o conjunto $B = \{u\}$, de um único conjunto, i.e., $|B| = 1$ temos que seu conjunto potência é $\wp(B) = \{\varnothing, \{u\}\}$. Logo, $|\wp(B)| = 2^1 = 2$.
Portanto, $P(1)$ é válida.

ii) Hipótese Indutiva – $P(n)$: Um conjunto de n elementos tem 2^n subconjuntos, *i.e.*, $|C| = n \Rightarrow |\wp(C)| = 2^n$.
Tese – $P(n+1)$: Um conjunto de $n+1$ elementos tem 2^{n+1} subconjuntos, *i.e.*, $|D| = n+1 \Rightarrow |\wp(D)| = 2^{n+1}$.

Sem perda de generalidade, supomos que $C = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$, logo $|C| = n$ e $D = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, n+1\}$, logo, $|D| = n+1$. Então, $D = C \cup \{n+1\}$. Pela hipótese indutiva temos que $|\wp(C)| = 2^n$ e, sabendo que $|\wp(D)| = 2|\wp(C)|$ (demonstração abaixo), então, $|\wp(D)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
Portanto, $P(n)$ é válida para todo inteiro $n > 0$.

Demonstração de $|C| = n$ e $|D| = n+1 \Rightarrow |\wp(D)| = 2|\wp(C)|$.

Tomando o conjunto $C = \{1, 2, \cdots, n\}$. Sendo $D = C \cup \{n+1\}$. Todos os subconjuntos de D são também subconjuntos de C. Os demais subconjuntos são obtidos incluindo o elemento $\{n+1\}$. Logo, $|\wp(D)| = 2|\wp(C)|$.

$\blacksquare$

14 — Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2.$$

i) Testando a propriedade para $n = 9$:

$$9! \geq (2 \cdot 9)^2 \Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \geq 4 \cdot 9 \cdot 9 \Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \geq 9$$

Claramente, $P(9)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : k! \geq (2k)^2$
Tese – $P(k+1) : (k+1)! \geq [2(k+1)]^2 \Rightarrow (k+1)! \geq [2k+2]^2$

Multiplicando ambos os lados da desiguladade, na hipótese indutiva por $(k+1)$ (pois $k+1 > 0$), temos

$$(k+1)k! \geq (2k)^2(k+1) \Rightarrow (k+1)! \geq 4k^3 + 4k^2.$$

Mas, $(2k+2)^2 < 4k^3 + 4k^2$ para $k \in \mathbb{Z} : k > 1$. Então

$$(2k+2)^2 < 4k^3 + 4k^2 \leq (k+1)! \Rightarrow (2k+2)^2 \leq (k+1)! \text{ ou, equivalentemente, } (k+1)! \geq (2k+2)^2$$

A implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ foi verificada. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

■

15 — Prove para todo $n > 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

i) Testando a propriedade para $n = 1$:

$$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 \Rightarrow 1 \leq 1$$

$P(1)$ é verdadeira.

ii) Hipótese indutiva – $P(k) : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$
Tese – $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$

Somando $\frac{1}{(k+1)^2}$ em ambos os lados da hipótese indutiva, temos

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Para confirmar a tese, precisamos mostrar que

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}.$$

Resolvendo a equação:

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} < 0 \Rightarrow \frac{k - (k+1)^2 + (k+1)}{k(k+1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{-k^2}{k(k+1)^2} < 0$$

Como $k > 0$, o numerador da fração é negativo e o denominador positivo.
Portanto, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$; $\frac{-k^2}{k(k+1)^2} < 0$.
Assim sendo, temos que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}.$$

Então, $P(n)$ é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

■