

LISTA 07 – FUV GRADMAT

“ABSQUE REPROBATIO ET GLUTEN NULLUM GRADUATIO PERFECTUM EST”

RESOLUÇÃO PASSÍVEL DE ERROS, USE COM MODERAÇÃO



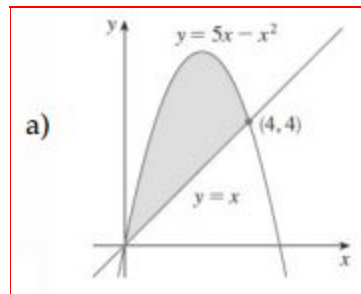
contatos p/ dúvidas ou sexo:

abreu.carlos@aluno.ufabc.edu.br | fb.com/carlos.ea.batista | (11) 986421854

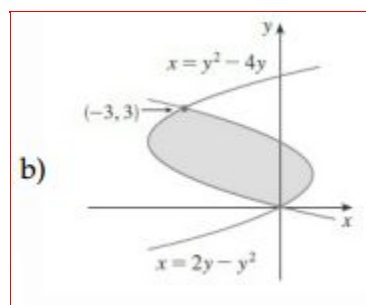
Aplicações de Integração

(malz pela letra feia, qlqr coisa me pergunta)

1 — Determine a área da região em cinza:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x=0}^{x=4} (y_T - y_B) dx = \int_0^4 [(5x - x^2) - x] dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx \\
 &= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \left(32 - \frac{64}{3} \right) - (0) = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

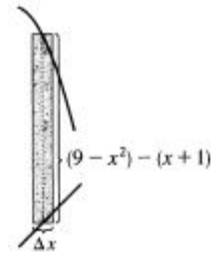
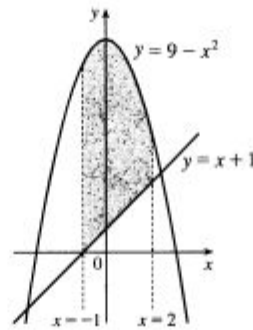


$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 [(2y - y^2) - (y^2 - 4y)] dy = \int_0^3 (-2y^2 + 6y) dy \\
 &= \left[-\frac{2}{3}y^3 + 3y^2 \right]_0^3 = (-18 + 27) - 0 = 9
 \end{aligned}$$

2 — Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feito com relação a variável x ou y. desenhe um retângulo típico com sua altura e largura. Finalmente ache a área da região.

$$\text{a) } y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(9 - x^2) - (x + 1)] dx \\ &= \int_{-1}^2 (8 - x - x^2) dx \\ &= \left[8x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left(16 - 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 22 - 3 + \frac{1}{2} = \frac{39}{2} \end{aligned}$$

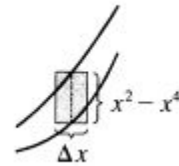
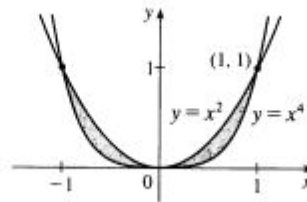


$$\text{b) } y = \sin(x), \quad y = x^2$$

vish

$$\text{c) } y = x^2, \quad y = x^4$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

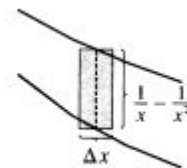
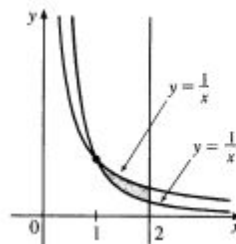


$$\text{d) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad x + y = 1$$

vish(2)

$$\text{e) } y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) - (\ln 1 + 1) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.19 \end{aligned}$$

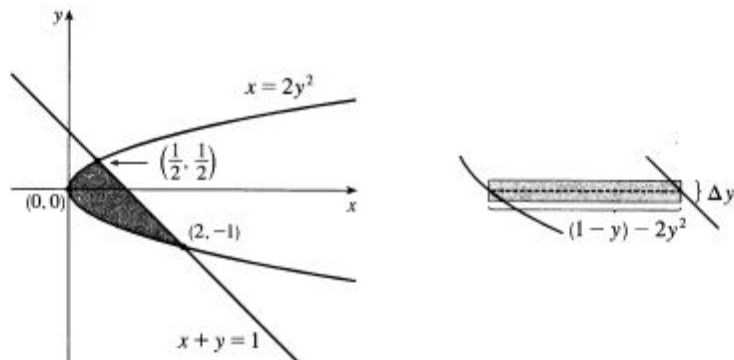


$$\text{f) } x = 2y^2 \quad x + y = 1$$

$$2y^2 = 1 - y \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \quad y = -1 \quad x = \frac{1}{2} \quad x = 2$$

$$A = \int_{-1}^{1/2} [(1 - y) - 2y^2] dy = \int_{-1}^{1/2} (1 - y - 2y^2) dy = \left[y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_{-1}^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{24} - \left(-\frac{5}{6} \right) = \frac{7}{24} + \frac{20}{24} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$$

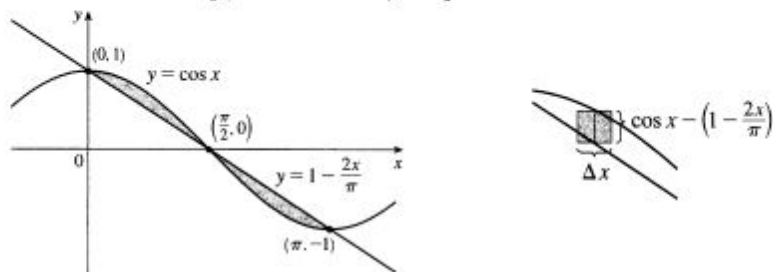


$$\text{g) } y = \cos(x) \quad y = 1 - 2x/\pi$$

Do gráfico vemos que as curvas se interceptam em $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, e $x = \pi$. Por simetria:

$$A = \int_0^{\pi} \left| \cos x - \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \right| dx = 2 \int_0^{\pi/2} \left[\cos x - \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \right] dx = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi} \right) dx$$

$$= 2 \left[\sin x - x + \frac{1}{\pi} x^2 \right]_0^{\pi/2} = 2 \left[\left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) - 0 \right] = 2 \left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$



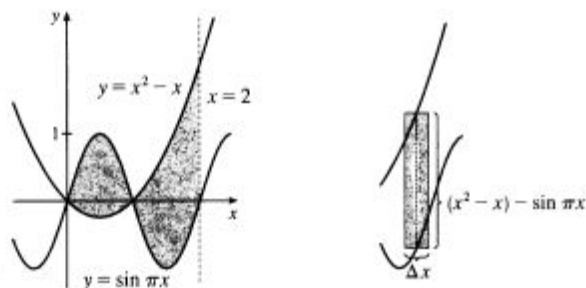
$$\text{h) } y = \sin(\pi x) \quad y = x^2 - x \quad x = 2$$

$$A = \int_0^1 [\sin \pi x - (x^2 - x)] dx + \int_1^2 [(x^2 - x) - \sin \pi x] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_1^2$$

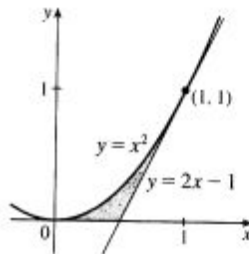
$$= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{\pi} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{\pi} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} + 1$$



$$\text{i) } y = \sec^2(x) \quad y = \cos(x), \quad x = -\frac{\pi}{3} \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

3 — Ache a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ a reta tangente a esta parábola no ponto $(1, 1)$ e o eixo x .



Começamos procurando a equação da reta tangente para $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$:

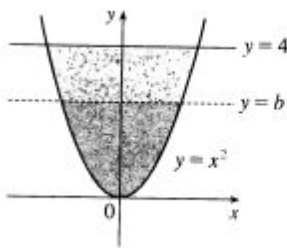
$y' = 2x$ então a inclinação da tangente é $2(1) = 2$, e sua equação é $y - 1 = 2(x - 1)$, ou $y = 2x - 1$.

Precisamos de duas integrais para integrar em relação a x , mas de apenas uma para integrar em relação a y .

$$A = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(y+1) - \sqrt{y} \right] dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

4 — Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.



Por simetria do problema, consideramos apenas o primeiro quadrante onde $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$. Procura-se um número b que satisfaz

$$\int_0^b \sqrt{y} dy = \int_b^4 \sqrt{y} dy \Rightarrow \frac{2}{3} \left[y^{3/2} \right]_0^b = \frac{2}{3} \left[y^{3/2} \right]_b^4$$

$$b^{3/2} = 4^{3/2} - b^{3/2} \Rightarrow 2b^{3/2} = 8 \Rightarrow b^{3/2} = 4 \Rightarrow b = 4^{2/3} \approx 2.52.$$

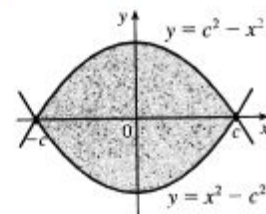
5 — Determine c para que a área da região delimita pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

Por simetria, a área cinza corresponde a 4 vezes a área do primeiro quadrante

$$A = 4 \int_0^c (c^2 - x^2) dx = 4 \left[c^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^c$$

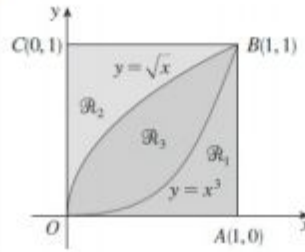
$$= 4 \left(c^3 - \frac{1}{3}c^3 \right) = 4 \left(\frac{2}{3}c^3 \right) = \frac{8}{3}c^3$$

$$A = 576 \Leftrightarrow \frac{8}{3}c^3 = 576 \Leftrightarrow c^3 = 216 \Leftrightarrow c = \sqrt[3]{216} = 6.$$



note que -6 é outra solução factível, pq corresponde ao msm gráfico \Rightarrow

6 — Dada a figura abaixo ache o volume do sólido gerado rotacionando a região indicada em torno da reta especificada:



a) \mathcal{R}_1 ao longo de OA

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi(x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{\pi}{7}$$

b) \mathcal{R}_1 ao longo de OC

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \left[\pi(1)^2 - \pi(\sqrt[3]{y})^2 \right] dy = \pi \int_0^1 (1 - y^{2/3}) dy = \pi \left[y - \frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}$$

c) \mathcal{R}_1 ao longo de AB

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \pi(1 - \sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^1 (1 - 2y^{1/3} + y^{2/3}) dy \\ &= \pi \left[y - \frac{3}{2} y^{4/3} + \frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} \right) = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

d) \mathcal{R}_1 ao longo de BC

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 [\pi(1)^2 - \pi(1 - x^3)^2] dx = \pi \int_0^1 [1 - (1 - 2x^3 + x^6)] dx \\ &= \pi \int_0^1 (2x^3 - x^6) dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \frac{5\pi}{14} \end{aligned}$$

e) \mathcal{R}_2 ao longo de OA

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 [\pi(1)^2 - \pi(\sqrt{x})^2] dx = \pi \int_0^1 (1 - x) dx = \pi \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

f) \mathcal{R}_2 ao longo de OC

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \pi(y^2)^2 dy = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

g) \mathcal{R}_2 ao longo de AB

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 [\pi(1)^2 - \pi(1 - y^2)^2] dy = \pi \int_0^1 [1 - (1 - 2y^2 + y^4)] dy \\ &= \pi \int_0^1 (2y^2 - y^4) dy = \pi \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{7\pi}{15} \end{aligned}$$

h) \mathcal{R}_3 ao longo de OA

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \left[\pi(\sqrt{x})^2 - \pi(x^3)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (x - x^6) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \frac{5\pi}{14}.$$

Obs.:

$$V(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3, \text{ id est, cilindro de raio 1 rotacionado }) = \pi r^2 h = \pi(1)^2 \cdot 1 = \pi$$

$$\text{pelos itens anteriores, } \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{14} = \left(\frac{2+7+5}{14} \right) \pi = \pi.$$

i) \mathcal{R}_3 ao longo de OC

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \left[\pi(\sqrt[3]{y})^2 - \pi(y^2)^2 \right] dy = \pi \int_0^1 (y^{2/3} - y^4) dy$$

$$= \pi \left[\frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}$$

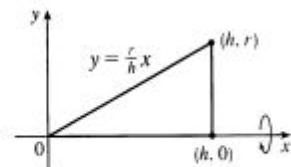
$$\text{pelos itens anteriores, } \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \pi.$$

7 — Determine o volume dos sólidos S, usando integração.

a) Um cone circular reto de altura h e base r.

Revolução de $y = \frac{r}{h}x$ em OX

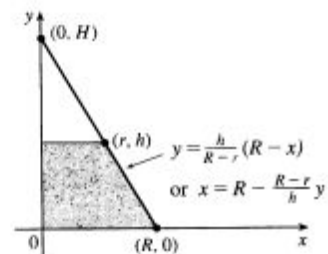
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^h \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{1}{3}h^3 \right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$



b) Um cone truncado de base circular



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(R - \frac{R-r}{h}y \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^h \left[R^2 - \frac{2R(R-r)}{h}y + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^2 \right] dy \\ &= \pi \left[R^2 y - \frac{R(R-r)}{h}y^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^3 \right]_0^h \\ &= \pi \left[R^2 h - R(R-r)h + \frac{1}{3}(R-r)^2 h \right] \\ &= \frac{1}{3}\pi h [3Rr + (R^2 - 2Rr + r^2)] = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2) \end{aligned}$$

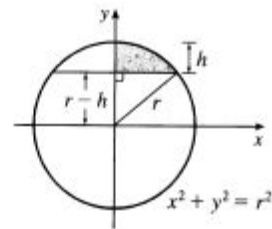


c) Uma calota esférica

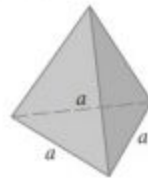


$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 = r^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - y^2) dy = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^r \\ &= \pi \left\{ \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right] \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{2}{3} r^3 - \frac{1}{3} (r-h) [3r^2 - (r-h)^2] \right\} \\ &= \frac{1}{3} \pi \{ 2r^3 - (r-h) [3r^2 - (r^2 - 2rh + h^2)] \} \\ &= \frac{1}{3} \pi \{ 2r^3 - (r-h) [2r^2 + 2rh - h^2] \} \\ &= \frac{1}{3} \pi (2r^3 - 2r^3 - 2r^2 h + rh^2 + 2r^2 h + 2rh^2 - h^3) \\ &= \frac{1}{3} \pi (3rh^2 - h^3) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$



d) Uma pirâmide de altura h e base um triângulo equilátero de lado a.



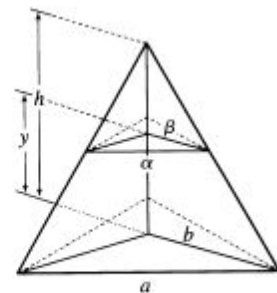
Semelhança de triângulos:

$$a/b = \alpha/\beta \Rightarrow \alpha = a\beta/b. \quad b/h = \beta/(h-y) \Rightarrow \beta = b(h-y)/h.$$

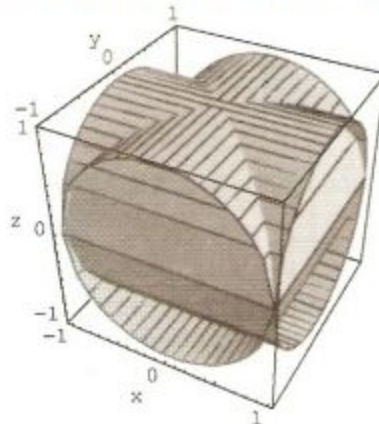
Resolvendo o sistema: $\alpha = a(1 - y/h)$.

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha = \frac{a^2(1 - y/h)^2}{4} \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy \\ &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left[-\frac{h}{3} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 \right]_0^h = -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h (-1) = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h \end{aligned}$$



e) A região delimitada por dois cilindros circulares retos que se interceptam perpendicularmente.



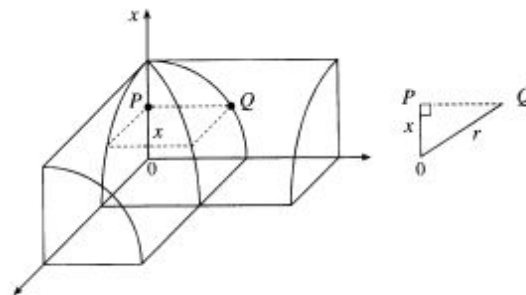
Olhe o esboço aí do lado!

Por simetria, o volume em comum entre os dois "pedaços de cilindro" do esboço é 4 vezes o volume dos cilindros inteiros

Por Pitágoras, $|PQ|^2 = r^2 - x^2$

$$A(x) = 4(r^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = 4 \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 8 \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = \frac{16}{3} r^3 \end{aligned}$$

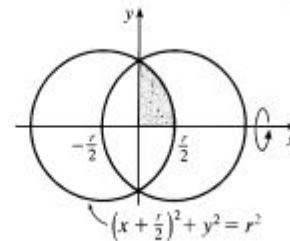


f) Ache o volume comum a duas esferas de raio r se o centro de cada esfera está na superfície da outra.

$$V = \pi \int_0^{r/2} y^2 dx = \pi \int_0^{r/2} \left[r^2 - \left(\frac{1}{2} r + x \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} r + x \right)^3 \right]_0^{r/2} = \pi \left[\left(\frac{1}{2} r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(0 - \frac{1}{24} r^3 \right) \right] = \frac{5}{24} \pi r^3$$

Por simetria, o volume pedido é duas vezes isso, logo $\frac{5}{12} \pi r^3$.

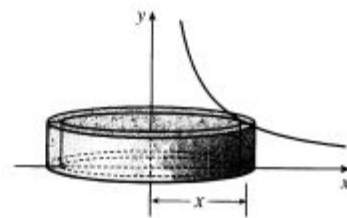
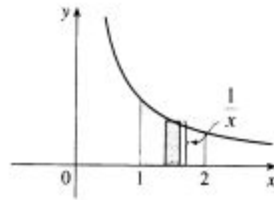


8 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo y da região delimitada pelas curvas abaixo:

a) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

$$V = \int_1^2 2\pi x \cdot \frac{1}{x} dx = 2\pi \int_1^2 1 dx$$

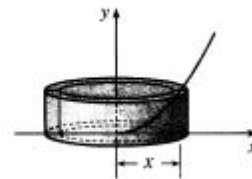
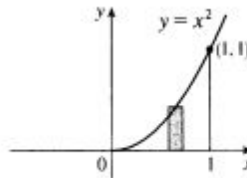
$$= 2\pi [x]_1^2 = 2\pi(2-1) = 2\pi$$



b) $y = x^2$, $y = 0$ $x = 1$

$$V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$



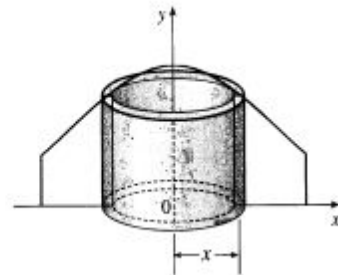
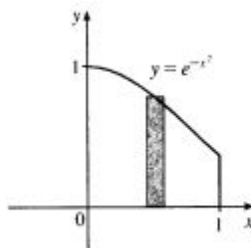
c) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} dx, \quad u = x^2.$$

$$du = 2x dx,$$

$$V = \pi \int_0^1 e^{-u} du = \pi [-e^{-u}]_0^1$$

$$= \pi(1 - 1/e)$$

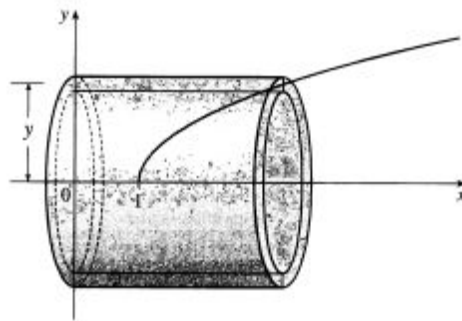
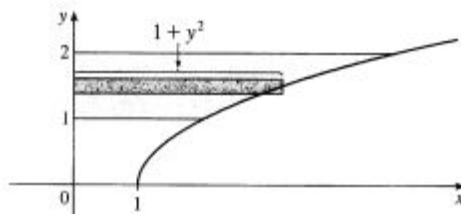


9 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas abaixo:

a) $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

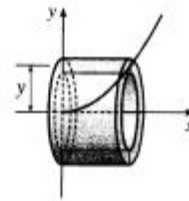
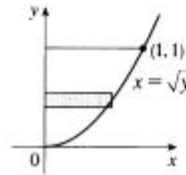
$$V = \int_1^2 2\pi y(1 + y^2) dy = 2\pi \int_1^2 (y + y^3) dy = 2\pi \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 \right]_1^2$$

$$= 2\pi \left[(2 + 4) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] = 2\pi \left(\frac{21}{4} \right) = \frac{21\pi}{2}$$

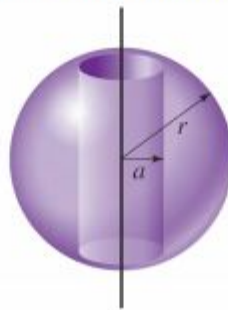


$$\text{b) } x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$$

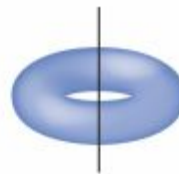
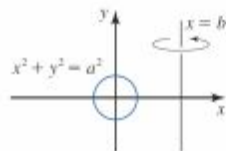
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi y \sqrt{y} \, dy = 2\pi \int_0^1 y^{3/2} \, dy \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$



10 — Encontre o volume do sólido que permanece depois que um furo circular de um raio a é perfurado através do centro de uma esfera sólida de raio $r > a$.



11 — Um toro (um objeto em forma de anel) é formado pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ em torno do eixo vertical $x = b$, onde $0 < a < b$. Encontre o seu volume.



12 — Encontre o comprimento de arco do gráfico da equação dada entre os pontos P e Q ou no intervalo especificado.

$$\text{a) } y = -2x + 3 \quad P : (-1, 5), Q : (2, -1);$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \cosh(x) \quad [0, \ln(2)]$$

$$\text{c) } \ln \cos x \quad [0, \pi/4]$$

$$\text{d) } \sqrt{4 - x^2} \quad [0, 2]$$

13 — Calcule o trabalho realizado pela força $F(x)$ quando a partícula se desloca de a até b :

$$\text{a) } F(x) = 3 \text{ de } a = 0 \text{ até } b = 2$$

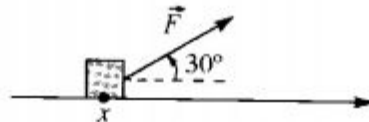
$$\text{b) } F(x) = x^2 + 3x \text{ de } a = -1 \text{ até } b = 2$$

$$\text{c) } F(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ de } a = 1 \text{ até } b = 2$$

$$\text{d) } F(x) = \sin(x) \text{ de } a = 0 \text{ até } b = \pi$$

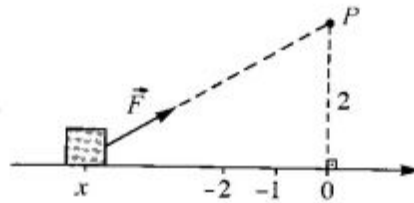
$$\text{e) } F(x) = x^5 \text{ de } a = 1 \text{ até } b = 3$$

14 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força \vec{F} de intensidade $3x$ e que forma com o eixo x um ângulo de 30°



Calcule o trabalho realizado por \vec{F} ao deslocar a partícula de $x = 0$ até $x = 3$.

15 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força \vec{F} sempre dirigida para o ponto P e cuja intensidade é igual ao inverso do quadrado da distância da partícula a P

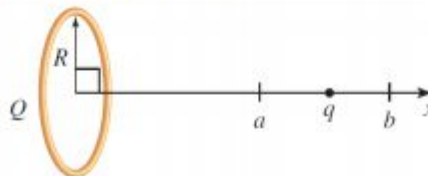


Calcule o trabalho realizado por \vec{F} ao deslocar a partícula de $x = -2$ até $x = -1$.

16 — Trabalho feito por uma Carga Repulsiva. Uma carga elétrica Q uniformemente distribuída ao longo de um condutor em forma de anel de raio a repele uma carga q como ao longo da linha perpendicular à plano do anel, através do seu centro. A magnitude do força que atua sobre a carga q quando está no ponto x é dado por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQx}{x^2 + R^2}^{\frac{3}{2}}$$

e a força atua na direção do eixo x positivo. Encontre o trabalho realizado pela força de repulsão em mover o carga q de $x = a$ a até $x = b$.



17 — Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma função velocidade $v(t) = t^2 e^{-t}$. Qual a distância percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 5$?