BASES MATEMÁTICAS

CONJUNTOS E PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Resolve ao menos <u>três</u> itens de cada questão.

Exercício 1. Determine a relação[1], se existe, entre as seguintes pares

i) $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$

ii) $[1,4]$ e $\{\pi\}$

iii) $\{[1,4]\}$ e $\{\pi\}$

iv) $\{\emptyset\}$ e $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

v) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$

vi) $\mathbb{R}$ e $\{\{\mathbb{R}\}\}$

vii) $\{\mathbb{R},\{\mathbb{R}\}\}$ e $\{\mathbb{R},\{\mathbb{R}\},\{\mathbb{R},\{\mathbb{R}\}\}\}$

Exercício 2. Seja o conjunto universo $\mathbb{U}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e sejam as seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned} C &= \{1,4,9\} \\ D &= \{2,3,5,7\} \\ E &= \{2,4,6,8,10\} \\ F &= \{1,2,3,4,5\} \end{aligned}$$

Determine os elementos dos seguintes conjuntos:

i) $E \cup F$

ii) $E \cap F$

[1] elemento, subconjunto ou ambos.

iii) $C \cap D$

iv) $E \setminus D$

v) $D \setminus E$

vi) $E \setminus (F \setminus D)$

vii) $E^{\complement}$

viii) $(D \cup F)^{\complement}$

Exercício 3. Considere o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e sejam as seguintes subconjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{1,2,3,4\} \\
B &= \{x \in \mathbb{U} \mid (2x-8)(x-2)^2(x-3) = 0\} \\
C &= \{x \in \mathbb{U} \mid \text{x é par}\}
\end{aligned}
$$

Para esses subconjuntos determine:

i) $A \cup B$

ii) $A \cap (B \cup C)$

iii) $C \cup A^{\complement}$

iv) $(A \cup C)^{\complement}$

v) $A^{\complement} \cap C^{\complement}$

vi) $\mathfrak{p}(B)$

vii) $\mathfrak{p}(B) \cap \mathfrak{p}(C)$

Exercício 4. Dados A, B e C conjuntos prove as seguintes afirmações

i) $A \cap A = A$

ii) $A \cap B \subset A \cup B$

iii) $A \cup (A \cap B) = A$

iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

v) $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{p}(B) = \mathfrak{p}(A \cap B)$

Exercício 5. Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A, B e C conjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Mostre que:

i) $A \subset B^{\complement} \iff A \cap B = \emptyset$

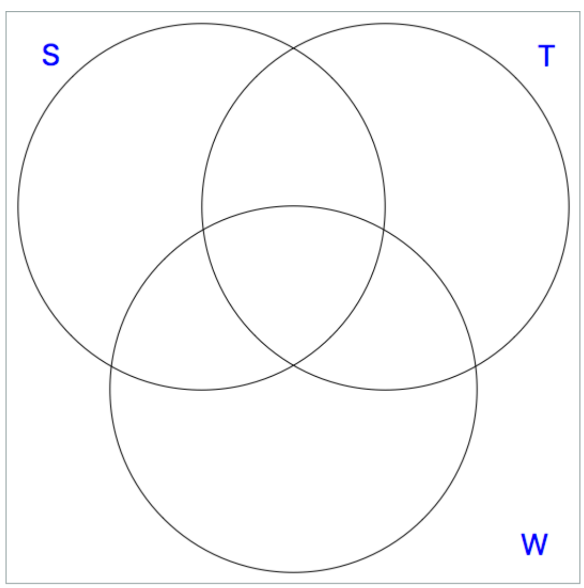
ii) $B \setminus A = A^{\complement} \cap B$

iii) $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

iv) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C \implies B = C$

v) $A \setminus B \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$

Exercício 6. Sobre a região da figura abaixo



que represente cada um das seguintes expressões.

i) $S \cap T^{\complement} \cap W$

ii) $S \cap (T^{\complement} \cap W)$

iii) $T \cup (S \setminus W)$

iv) $W \cup (S \cup T)^{\complement}$

v) $(T - S) \cup (W - S)$

vi) $(S \cap W) \setminus (T \cap W)$

vii) $((S \cup T) \cap W^{\complement})^{\complement}$

viii) $((W \cap S^{\complement})^{\complement} \cup T)^{\complement}$

Exercício 7. Baseando-se nas diagramas de Venn–Euler, determine quais das seguintes igualdades parecem ser verdadeiras. Para cada falsa, determine se um dos conjuntos seja subconjunto de outro.

i) $J \cup (K \cup L) = (J \cup K) \cap L$

ii) $J \cap (K \cup L) = (J \cap K) \cup L$

iii) $K \cap (J \setminus L) = (K \cap J) \setminus (K \cap L)$

iv) $(L \cap K) \setminus J = (L \setminus J) \cap (K \setminus J)$

v) $(L \cup K) \setminus J = (L \setminus J) \cup (K \setminus J)$

vi) $(J \setminus L) \setminus K = J \setminus (L \setminus K)$

vii) $(L \cup K) \setminus (L \cap K) = (L \setminus K) \cup (K \setminus L)$

Exercício 8. Prove que para todo inteiro positivo n vale:

i) $1+4+7+\cdots+(3n+1)=\sum_{i=0}^{n}(3i+1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$

ii) $2+5+8+\cdots+(3n-1)=\sum_{i=0}^{n}(3i-1)=\frac{(3n+1)n}{2}$

iii) $\sum_{i=0}^{n}(4i+3)=2n^2+5n+3$

iv) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

v) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

vi) $1+2\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

vii) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

viii) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

ix) $\sum_{i=0}^{n}(\frac{3}{2})^i=2(\frac{3}{2})^{n+1}-2$

x) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

xi) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

xii) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k+db_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k+d\sum_{k=1}^{n}b_k$

xiii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

xiv) $s_n=n^2$ em que define-se $s_1=1, s_2=4, s_3=9$ e para $n\geq 1,\ s_{n+3}=s_n-s_{n+1}+s_{n+2}+2(2n+3)$.

Exercício 9. Prove que:

i) $(1+\frac{1}{2})^k\geq 1+\frac{k}{2}$ para todo $k\in\mathbb{N}$

ii) $(1+\frac{5}{3})^{2n}\geq 1+\frac{10n}{3}$ para todo $n\in\mathbb{N}$

iii) $2n+1<2^n$ para todo $n>3$

iv) $2^n>n^2$ para todo $n\geq 5$

v) $\sum_{i=1}^{n}\ln(i)>n$ para todo $n>5$

vi) $n! \geq (2n)^2$, $n \geq 9$, em que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

vii) $k! > 2^k$, $k \geq 4$

viii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

ix) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}$, $z \geq 0$

x) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$,
em que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$ e $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

xi) $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n)$

xii) $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^{\complement} = X_1^{\complement} \cap X_2^{\complement} \cap \cdots \cap X_n^{\complement}$

xiii) 3 divide $2n^3 + 4n + 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$

xiv) 4 divide $5^k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$

xv) 7 divide $11^s - 4^s$ para todo $s \in \mathbb{N}$

xvi) $b_n \leq 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ em que: $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ e para $n \geq 1$, $b_{n+3} = b_n + b_{n+1} + b_{n+2}$

xvii) $\frac{1}{2} \leq c_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ em que: $c_1 = 1, c_2 = 1$ e para $n \geq 1$, $c_{n+2} = \frac{1}{c_n + c_{n+1}}$

xviii) $d_n = 8 - n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ em que: $d_1 = 7, d_2 = 6$ e para $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} - d_n$

Exercício 10. Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

i) $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

ii) $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

iii) $C = \{1 - n! \mid n \in \mathbb{N}\}$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

iv) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x\}$

v) $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x < 2\}$

vi) $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$

vii) $G = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

viii) $H = \{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

ix) $G = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

x) $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercício 11. Mostre, utilizando propriedades básicas, que:

i) Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$ então $x = 1$

ii) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

iii) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$

iv) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$

v) Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$

Exercício 12. Resolva as seguintes equações

i) $|x| = x^2$

ii) $|x^2 - 3| = 2$

iii) $|x| = x + 2$

iv) $|-x + 2| = 2x + 1$

v) $|x+1| + |x-2| = 1$

vi) $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$

vii) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

viii) $|x^2 - 2| + 2x + 1 = 0$

ix) $\frac{9}{|x-5|-3} = |x-2|$

x) $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x-1}$

xi) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$

xii) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}$

xiii) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Exercício 13. Resolva as seguintes desigualdades

i) $|x-2| - |x+2| > 2$

ii) $|x-2| - x|x+2| < 1$

iii) $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$

iv) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$

v) $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geq 0$

vi) $\frac{2-x^2}{1-x} < x$

vii) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$

viii) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$

ix) $\frac{x-\pi}{4x^2-3x-3} > 0$

x) $\frac{1-x}{2-x^2} \leq \frac{1}{x}$

xi) $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} > 1$

xii) $\frac{9}{|x-5|-3} > |x-2|$