UFABC

BASES MATEMÁTICAS

1ª PROVA — TURMA B

11/07/2017

—A—

PROF. DR. STYLIANOS DIMAS PH.D.

Nome:____

Exercício 1. Determine se o seguinte par for logicamente equivalente. Justifique sua resposta. 1 Pt

$$(K \vee J) \wedge \neg L \text{ e } \neg(L \vee (\neg J \wedge \neg K))$$

Exercício 2. Negue as seguintes proposições:

i) (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar. (1 Pt)

ii) $(X \implies Y) \implies (X \vee Z)$ (1 Pt)

Exercício 3. Demonstre a proposição "Para inteiro qualquer z, se 4 não dividi z^2, então z não é par'. 2 Pts

Exercício 4. Dados A, B e C conjuntos prove a seguinte afirmação 2 Pts

$$\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{p}(B) = \mathfrak{p}(A \cap B)$$

(Dica: $x \in \mathfrak{p}(A) \iff x \subset A$)

Exercício 5. Prove que: $k! > 2^k$, $k \geq 4$ 2 Pts

Exercício 6. Resolve a seguinte desigualdade 1 Pt

$$|x^2 - 2| + 2x + 1 = 0$$

Boa prova e escreva CLARAMENTE !

Questão	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Total
Pontos	1	2	2	2	2	1	10
Atingido							

UFABC

FOLHA DE PROVA

NOTA: B

Nome: ____________________

R.A. ____________________ Data: ____ / ____ / ____

Disciplina: ____________________ Cód. Disciplina: ____________________

Professor: ____________________

— A —

1)

K	J	L	$K \vee J$	$(K \vee J) \wedge \neg L$	$\neg J \wedge \neg K$	$\neg(K \vee (\neg J \wedge \neg K))$
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Uma vez que as duas colunas que correspondem as duas afirmações são iguais o par é logicamente equivalente.

2i) p = "(Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar"

$\neg p$ = "(é verdade que 5 é um número primo) e 4 é um número par"

ii) $p =$ "$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \vee Z)$"

$\neg p =$ "$(X \Rightarrow Y) \wedge \neg(X \vee Z)$" $=$ "$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \wedge \neg Z)$"

$=$ "$(\neg X \wedge \neg Z \wedge \neg X) \vee (\neg X \wedge \neg Z \wedge Y)$" $=$ "$(\neg X \wedge \neg Z) \vee ((\neg X \wedge \neg Z) \wedge Y)$"

$=$ "$((\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Z)) \wedge ((\neg X \wedge \neg Z) \vee Y)$" $= (\neg X \wedge \neg Z) \wedge ((\neg X \wedge \neg Z) \vee Y)$

ABSQUE SUDORE ET LABORE NULLUM OPUS PERFECTUM EST

"SEM SUOR E SEM TRABALHO NENHUMA OBRA É TERMINADA"

SCHREVELIUS 1176

3) p = " se 4 não dividi $z^2 \Rightarrow z$ não é par"

Demonstrarei por contraposição:

q = " z par $\Rightarrow$ 4 dividi z^2"

Demonstração : z par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid z = 2k \Rightarrow z^2 = (2k)^2 = 4k^2$
$\Rightarrow$ 4 dividi z^2

4) $p(A) \cap p(B) = p(A \cap B)$

$\Updownarrow$

$x \in p(A) \cap p(B) \Leftrightarrow x \in p(A \cap B)$

Demonstração: $x \in p(A \cap B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B \Leftrightarrow (y \in X \Rightarrow y \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \neg(y \in X) \vee (y \in A \wedge y \in B) \Leftrightarrow (\neg(y \in X) \vee y \in A) \wedge (\neg(y \in x) \vee y \in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y \in x \Rightarrow y \in A) \wedge (y \in x \Rightarrow y \in B) \Leftrightarrow (x \subset A) \wedge (x \subset B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in p(A) \wedge x \in p(B) \Leftrightarrow x \in p(A) \cap p(B)$

5) $P(n) = "n! > 2^n"$, $n \geq 4$

Demonstração por indução finita:

PIF_1 : $n = 4$, $P(4)$ = " $4! > 2^4$ " = " $4.3.2.1 > 16$ " = " $24 > 16$ ". A propiedade vale para $n = 4$.

PIF_2: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ Logo, $(k+1)! = (k+1).k.(k-1)\ldots 2.1 =$

$(k+1).k! > (k+1)2^k > 2.2^k = 2^{k+1}$.

Portanto, a propriedade vale para todo número natural, $n \geq 4$.

6) Temos a equação:

$|x^2-2| + 2x + 1 = 0.$

• Se $x^2-2 \geq 0$, isto é, $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$, a equação fica

$x^2-2+2x+1=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0$. $\Delta = 4+4=8$, Logo

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{cases} -1+\sqrt{2} \notin (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \text{ rejeitada} \\ -1-\sqrt{2} \in (-\infty, -\sqrt{2}] \text{ aceitada} \end{cases}$

• Se $x^2-2 < 0$, isto é, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, a equação fica

$-x^2+2+2x+1=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0$. $\Delta = 4+12=16$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} -1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ aceitada} \\ 3 \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ rejeitada} \end{cases}$

Finalmente, o conjunto-solução é $S = \{-1-\sqrt{2}, -1\}$

Bases Matemáticas

1ª Prova — Turma B

11/07/2017

—B—

Prof. Dr. Stylianos Dimas Ph.D.

Nome:____

Exercício 1. Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica. Depois, para cada uma, escreva a negação simbolicamente e "em português".

i) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$. (1 Pt)

ii) Se a e b são dois números primos, então ab é primo. (1 Pt)

Exercício 2. Usando o fato que 1 Pt

$$\neg(p \implies q) = p \wedge \neg q,$$

Reescreva a implicação

$$p \implies q.$$

Exercício 3. Demonstre a proposição "O produto de dois ímpares inteiros é ímpar". 1 Pt

Exercício 4. Baseando-se nas diagramas de Venn–Euler, determine quais das seguintes igualdades parecem ser verdadeiras. Para cada falsa, determine se um dos conjuntos seja subconjunto de outro.

i) $J \cap (K \cup L) = (J \cap K) \cup L$ (1 Pt)

ii) $(J \setminus L) \setminus K = J \setminus (L \setminus K)$ (1 Pt)

Exercício 5. Prove que: 3 divide $2n^3+4n+9$ para todo $n \in \mathbb{N}$ 2 Pts

Exercício 6. Resolve a desigualdade 2 Pts

$$\frac{2-x^2}{1-x} < x$$

Boa prova e escreva CLARAMENTE !

Questão	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Total
Pontos	2	1	1	2	2	2	10
Atingido							

UFABC

FOLHA DE PROVA

NOTA

B

Nome:

R.A.

Data: / /

Disciplina:

Cód. Disciplina:

Professor:

— B —

1i) $p = $ " $\forall x \in \mathbb{Q}, x < \frac{1}{x}$ "

$\neg p = $ " $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{1}{x}$ " $= q$

$q = $ " existe número racional x tal que x é maior ou igual que $1/x$ "

ii) $p = $ " a,b primos $\Rightarrow$ a.b primo "

$\neg p = $ " (a,b primos) $\wedge$ $\neg$(a.b primo) " $= q$

$q = $ " a,b são dois números primos e a.b não é primo "

2) $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(\neg(p \Rightarrow q)) = \neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow$

$\Rightarrow p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

3) $p = $ " a,b ímpares $\Rightarrow$ a.b ímpar "

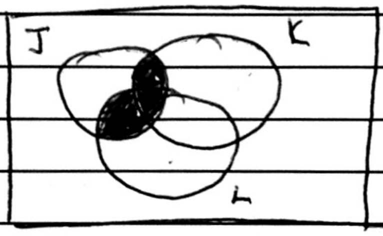
Demonstração direta: $a,b \in \mathbb{Z}$ ímpares $\Rightarrow \exists k,\lambda \in \mathbb{Z} \mid a = 2k+1,$

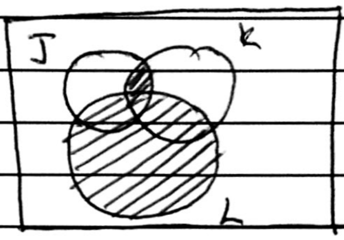
$b = 2\lambda + 1 \Rightarrow a.b = (2k+1).(2\lambda+1) = 4k\lambda + 2(k+\lambda) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a.b = 2(2k\lambda + k + \lambda) + 1 \Rightarrow$ a.b ímpar

4i)

$$J \cap (K \cup L) = (J \cap K) \cup L$$

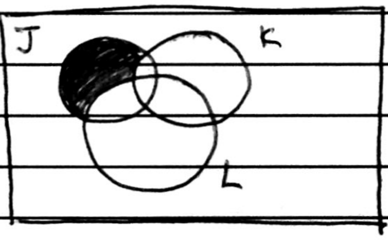


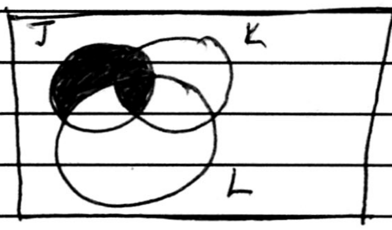


A igualdade não é verdadeira, na verdade, $J \cap (K \cap L) \subset (J \cap K) \cup L$

ii)

$$(J \setminus L) \setminus K = J \setminus (L \setminus K)$$





A igualdade não é verdadeira, na verdade, $(J \setminus L) \setminus K \subset J(L \setminus K)$

5) A propriedade é $P(n) :=$ "$\exists p \in \mathbb{Z} \mid 2n^3 + 4n + 9 = 3.p$"

Demonstração por indução finita:

PIF_1: $\underline{\underline{n=0}}$ $P(n) = P(0) =$ "$\exists p \in \mathbb{Z} \mid 9 = 3.p$", logo a propriedade vale

PIF_2: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geq 0$.

Seja então a expressão: $2(k+1)^3 + 4(k+1) + 9 =$

$= 2(k+1)((k+1)^2 + 2) + 9 = 2(k+1)(k^2 + 2k + 3) + 9 =$

$= 2k^3 + 4k + 9 + 4k^2 + 2k^2 + 6k + 6 = 2k^3 + 4k + 9 + 6(k^2 + k + 1) \overset{P(k)}{=}$

$= 3p + 6(k^2 + k + 1) = 3[p + 2(k^2 + k + 1)]$

Portanto, a propriedade vale pra $n = k+1$. Logo, por PIF a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

6) Temos a desigualdade: $\frac{2-x^2}{1-x} < x$. Então,

• Se $1-x>0 \Rightarrow \underline{x<1}$: $2-x^2 < x(1-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-\cancel{x^2} < x-\cancel{x^2} \Leftrightarrow x>2$. Rejeitada (porque $x<1$ por hypotese)

• Se $1-x \leq 0 \Rightarrow x>1$: $2-x^2 > x(1-x) \Leftrightarrow 2-\cancel{x^2} > x-\cancel{x^2} \Leftrightarrow$

$x<2$.

Portanto, o conjunto-solução é $S = (x>1) \wedge (x<2) = (1,2)$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x>1 \wedge x<2\}$.
$= 1<x<2$