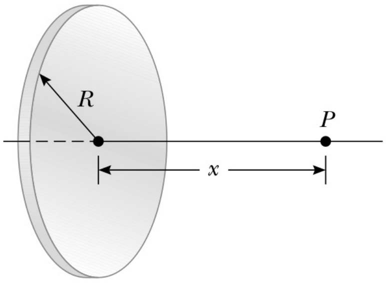
Prova Substitutiva - Diurno

Nome____ RA______________

1) Considere um disco com raio R que possui uma densidade superficial de carga σ positiva e uniforme. Em um ponto P, situado sobre o eixo do disco a uma distância x de seu centro, calcule:
a) [10 pt] O potencial elétrico, considerando $V_\infty = 0$.
b) [10 pt] O campo elétrico. (Dica: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.)
c) [5 pt] O campo elétrico no limite $R \to \infty$.



Gabarito
a)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2 + r^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right)$$

b)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right), \qquad E_y = E_z = 0$$

c)

$$\lim_{R \to \infty} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

2) Seja um capacitor cilíndrico formado por duas cascas cilíndricas concêntricas e condutoras de raios a e b, sendo $a < b$, carregadas com cargas $+q$ e $-q$, respectivamente. Suponha que o comprimento h dos dois cilindros é muito maior que ambos os raios. Determine:
a) [10 pt] O campo elétrico na região $a < r < b$.
b) [10 pt] A diferença de potencial entre as placas positiva e negativa.
c) [5 pt] A capacitância.

Gabarito
a)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\, 2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h}\hat{r}$$

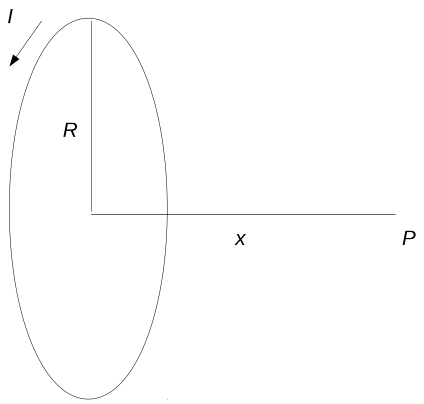
b)

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c)

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3) Considere uma espira circular de raio R, percorrida por uma corrente I, conforme a figura abaixo. Em um ponto P, a uma distância x do centro da espira, determine:
a) [15 pt] O vetor campo magnético $\vec{B}$.
b) [5 pt] O valor aproximado do campo, encontrado no item a), para $x \gg R$.
c) [5 pt] E reescreva o item b) em função do momento magnético $\vec{\mu}$.



Gabarito
a) Por simetria $B_y = B_z = 0$ e

$$B_x = \int dB_x = \int dB \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \int \frac{\mu_0 I\, ds}{4\pi(x^2+R^2)} \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}} \underbrace{\int ds}_{=2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

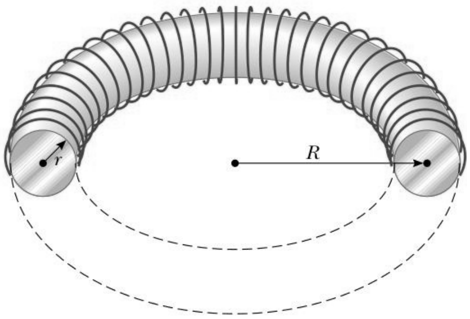
b)

$$x \gg R \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}\hat{\imath}$$

c)

$$\vec{\mu} = I\pi R^2 \hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{2\pi x^3}\vec{\mu}$$

4) Seja um toroide de raio maior R, formado por N espiras circulares de raio menor r, percorridas por uma corrente I, como na figura abaixo. Supondo $R \gg r$, calcule:
a) [15 pt] O campo magnético dentro do toroide.
b) [5 pt] O fluxo magnético total através das N espiras.
c) [5 pt] A indutância.



Gabarito
a)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{en}} \quad \Rightarrow \quad B\, 2\pi R = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

b)

$$\Phi_B = NBA = N\left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi R}\right)\pi r^2 = \frac{\mu_0 N^2 I r^2}{2R}$$

c)

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R}$$