LISTA 03 - FUV GRADMAT

"ABSQUE REPROBATIO ET GLUTEN NULLUM GRADUATIO PERFECTUM EST"

RESOLUÇÃO PASSÍVEL DE ERROS, USE COM MODERAÇÃO

contatos p/ dúvidas ou sexo:
abreu.carlos@aluno.ufabc.edu.br | fb.com/carlos.ea.batista |(11)986421854

Derivadas III

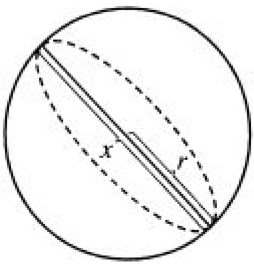
Taxas Relacionadas

---

1 — Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1\text{cm}^2/\text{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10cm.

é dado que a tx de decrescimento da área de superfície é $1\ \text{cm}^2/\text{min}$.
pensando num tempo t em minutos e numa área superficial S em cm^2 podemos dizer que

$dS/dt = -1\ \text{cm}^2/\text{s}$



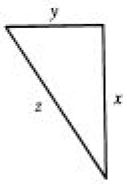
queremos saber (dx/dt) quando x = 10 cm, sendo x o diâmetro da bolinha

$$x = 2r$$
$$r = \frac{1}{2}x$$
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \pi x^2$$
$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\frac{dx}{dt} = 2\pi x\frac{dx}{dt}$$
$$-1 = \frac{dS}{dt} = 2\pi x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi x}$$
$$x = 10,\ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{20\pi}$$

sendo assim, a taxa de decrescimento do diâmetro é $\frac{1}{20\pi}\ \text{cm}/\text{min}$

---

2 — Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60km/h e o outro para oeste a 25km/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?



$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

$z^2 = x^2 + y^2$

$\frac{dx}{dt} = 60$ km/h

$\frac{dy}{dt} = 25$ km/h

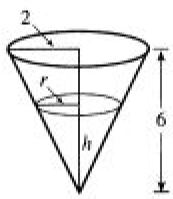
2 horas dps...

$$\begin{aligned} x &= 2\,(60) = 120 \\ y &= 2\,(25) = 50 \end{aligned} \Rightarrow \quad z = \sqrt{120^2 + 50^2} = 130,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{120(60) + 50(25)}{130} = 65\text{km/h}$$

---

3 — A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000\text{cm}^3/\text{min}$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e o diâmetro no topo é 4m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20\text{cm}/\text{min}$ quando a altura da água for 2m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.



se C for a tx que a água é bombeada

$$\frac{dV}{dt} = C - 10{,}000.$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

por semelhança de triângulos...

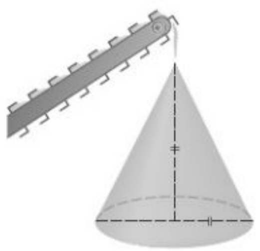
$$\frac{r}{2} = \frac{h}{6} \quad \Rightarrow \quad r = \tfrac{1}{3}h \quad \Rightarrow \quad V = \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{1}{3}h\right)^2 h = \tfrac{\pi}{27}h^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \tfrac{\pi}{9}h^2\,\frac{dh}{dt}.$$

$$C - 10{,}000 = \tfrac{\pi}{9}h^2\,\frac{dh}{dt}.$$

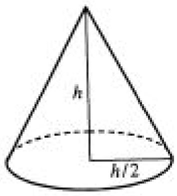
$$h = 200\text{ cm} \qquad \frac{dh}{dt} = 20\text{ cm/min}.$$

$$C - 10{,}000 = \tfrac{\pi}{9}(200)^2(20) \quad \Rightarrow$$

$$C = 10{,}000 + \tfrac{800{,}000}{9}\pi \approx 289{,}253\text{ cm}^3/\text{min}.$$



4 — Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30\text{m}^3/\text{min}$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de 10m.



$\frac{dV}{dt} = 30\text{m}^3/\text{min}.\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$

$\Rightarrow\ \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}\ \Rightarrow\ 30 = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dh}{dt} = \frac{120}{\pi h^2}.$

$h = 10\text{m}.$

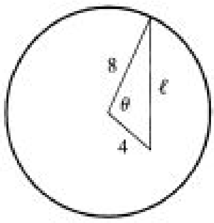
$\frac{dh}{dt} = \frac{120}{10^2\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38\,\text{m/min}.$

---

5 — O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8mm, enquanto o das horas tem 4mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre as pontas dos ponteiros quando o relógio está marcando 1 hora?

ponteiro das horas: $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad/h.

ponteiro dos segundos: 2π rad/h



taxa de variação do ângulo entre os ponteiros:

$d\theta/dt = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$ rad/h.

vamos relacionar theta e l usando a lei dos cossenos

$\ell^2 = 4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cdot\cos\theta = 80 - 64\cos\theta$

derivando implicitamente em relação a t

$$2\ell\frac{d\ell}{dt} = -64(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

às 1:00, o angulo entre os ponteiros é (1/11) do círculo

$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad

usando a lei dos cossenos dnv pra descobrir l em 1:00

$\ell = \sqrt{80 - 64\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{80 - 32\sqrt{3}}.$

substituindo

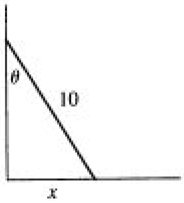
$$2\ell\frac{d\ell}{dt} = 64\sin\tfrac{\pi}{6}\left(-\tfrac{11\pi}{6}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{64\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{11\pi}{6}\right)}{2\sqrt{80-32\sqrt{3}}} = -\frac{88\pi}{3\sqrt{80-32\sqrt{3}}} \approx -18.6$$

ou seja um decrescimento de 18.6 mm/h ≈ 0.005 mm/s.

---

6 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de 2m/s. Quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando o ângulo é $\pi/4$?.

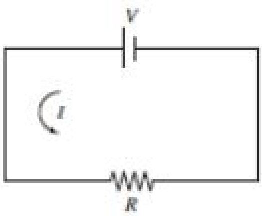


$$\frac{dx}{dt} = 2\,\text{m/s}.\ \sin\theta = \frac{x}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 10\sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = 10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ 2 = 10\cos\frac{\pi}{4}\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{10(1/\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{5}\ \text{rad/s}.$$



7 — Circuito Elétrico A tensão V em volts (V) em um circuito elétrico está relacionada com o a corrente em amperes (A) e a resistência R, em ohms pela equação de

$$V = IR.$$

Quando V= 12, I=2, V está aumentando a uma taxa de 2 V/seg, e I está crescendo a uma taxa de 12 A / seg, a que taxa a resistência está mudando?

Diferenciais e Aproximações
Diferenciais

---

8 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{3.9}$ e $\sqrt{4.1}$.

---

9 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ em $a = 0$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{0.95}$ e $\sqrt{1.05}$.

---

10 — O lado de um cubo é medido com um erro máximo possível de 2%. Use diferenciais para estimar o percentagem de erro máxima no volume computado.

---

11 — O período de um pêndulo simples é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

sendo L o comprimento do pêndulo, g a aceleração de gravidade e T é medido em segundos. Suponha que o comprimento do pêndulo é medido com um erro máximo de 0.5%. Qual a percentagem de erro máximo no período?

Máximos e Mínimos

---

12 — Encontre os pontos críticos da função:

a) $f(x) = 5x^2 + 4$

$f(x) = 5x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 10x + 4.\ f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{5}$

b) $f(\theta) = \theta + \text{sen}(\theta)$

$g(\theta) = \theta + \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad g'(\theta) = 1 + \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\cos\theta = -1$. Os números críticos são $\theta = \pi + 2n\pi = (2n+1)\,\pi$,
n um inteiro.

c) $f(x) = |2x + 3|$

$$g(x) = |2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & 2x+3 \geq 0 \\ -(2x+3) & 2x+3 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \begin{cases} 2 & x > -\frac{3}{2} \\ -2 & x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$x = -\frac{3}{2}$

d) $f(x) = xe^{2x}$

$$f(x) = xe^{2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x(2e^{2x}) + e^{2x} = e^{2x}(2x+1). \quad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x+1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\tfrac{1}{2}$$

e) $f(x) = x\ln(x)$

$$f(x) = x\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x(1/x) + (\ln x)\cdot 1 = \ln x + 1. \quad f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1} = 1/e$$

f) $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$

$$g(t) = \sqrt{t}\,(1-t) = t^{1/2} - t^{3/2} \quad \Rightarrow \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{t}.$$

$$0 = g'(t) = \frac{1-3t}{2\sqrt{t}}$$

$t = \frac{1}{3}.$

$t = 0$

g) $g(t) \;=\; 5t^{2/3} + t^{5/3}$

$$g'(t) = \frac{2}{3}\cdot 5 \cdot t^{-1/3} + \frac{5}{3}\cdot t^{2/3} = \frac{10}{3\sqrt[3]{t}} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{t^2}$$

$$= \frac{10 + 5t}{3\sqrt[3]{t}}$$

$$g'(t) = 0 = 10 + 5t \qquad \boxed{t = 0 \quad e \quad t = -2}$$

$$\boxed{t = -2}$$

---

13 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

a) f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?

Sim, pelo Teorema do Valor Extremo, cujo diz: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então f assume valores máximo e mínimo globais (em $[a, b]$).

b) Como podemos encontrar esses pontos?

Pelo Teorema de Fermat, basta verificarmos os pontos em que não permitem a diferenciação ou os pontos que igualam a derivada a zero.

---

14 — Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+1}$ no intervalo $[-4, 4]$

$$f'(x) = \frac{(x^4-4)'(x^2+1) - (x^4-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3(x^2+1) - 2x(x^4-4)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^5 + 4x^3 - 2x^5 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3 + 8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^4 + 2x^2 + 4)}{(x^2+1)^2}$$

$2x^5 + 4x^3 + 8x \;|\; x^2+1$

$2x^5 + 2x^3 \;|\; 2x^3 + 2x$

$2x^3 + 8x$

$2x^3 + 2x$

$6x$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x(x^4 + 2x^2 + 4) = 0$

$x^2 = a \qquad a^2 + 2a + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$a = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x^2 = a = -1$

$x = 0$ é pto crítico

$\boxed{f(0) = -4}$

Mínimo: $(0, -4)$

$f(-4) = \frac{(-4)^4 - 4}{17} > 0$

$f(4) = \frac{4^4 - 4}{17} > 0$

b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$

$f(t) = t\sqrt{4-t^2}$, $[-1,2]$.

$f'(t) = t \cdot \frac{1}{2}(4-t^2)^{-1/2}(-2t) + (4-t^2)^{1/2} \cdot 1 = \dfrac{-t^2}{\sqrt{4-t^2}} + \sqrt{4-t^2} = \dfrac{-t^2 + (4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} = \dfrac{4-2t^2}{\sqrt{4-t^2}}$.

$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$.

$4 - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2$.

$f(\sqrt{2}) = 2$ max absoluto

$f(-1) = -\sqrt{3}$ min absoluto

c) xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$

$f(x) = xe^{-x}$, $[0,2]$. $f'(x) = x(-e^{-x}) + e^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$.

$f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1} = 1/e \approx 0.37$, $f(2) = 2/e^2 \approx 0.27$.

$f(1) = 1/e$ max absoluto

$f(0) = 0$ min absoluto

d) $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $[1,3]$. $f'(x) = \dfrac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$.

$f(1) = 0/1 = 0$, $f(e) = 1/e \approx 0.368$, $f(3) = (\ln 3)/3 \approx 0.366$.

$f(e) = 1/e$ max absoluto

$f(1) = 0$ min absoluto

---

15 — Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1 \geq 1$ para td x

$f'(x) = 0$

sendo assim, como não há solução tb n existe pto crítico e máx/min locais

---

16 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-3, 2]$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$

$f'(x) = 0 \longrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$

$f(0) = 2$

$f(\sqrt{2}) = -2$

$f(-\sqrt{2}) = -2 \rightarrow$ MÍN

$f(2) = 2$

$f(-3) = 47 \rightarrow$ MÁX

b) $g(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo $[1, 2]$

$g'(x) = \frac{(x)'(x+1) - (x+1)'x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$\nexists\, g'(x) = 0$ $\qquad \boxed{x = -1}$

$g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow$ MÍN $\qquad [1, 2]\; g(-1) = \frac{-1}{0}$ ✗

$g(2) = \frac{2}{3} \rightarrow$ MÁX

c) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$ ✗

$h'(x) = 0 = x$

$\therefore x = 0$ é pto crit.

$h(-1) = \sqrt{8}$

$h(2) = \sqrt{5} \rightarrow$ MÍN.

$h(0) = 3 \rightarrow$ MÁX

d) $f(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$

$f(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(t)$

$f'(t) = 0 = \cos t - \operatorname{sen} t$

$\cos t = \operatorname{sen} t$

$\boxed{t = \frac{\pi}{4}}$ pto. crítico

$f(0) = 1 \longrightarrow$ Mín

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1,35$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,4 \longrightarrow$ Máx

e) $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1,4]$

$f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1-3}{x} = \frac{x-3}{x}$ $\quad x = 0$

$f'(x) = 0 = x - 3 \longrightarrow x = 3$

$f(1) = 1 \longrightarrow$ MÁX $\quad f(0) = 0 - 3 \ln 0$ X

$f(4) = 4 - 3 \ln 4 \approx -0,1589$

$f(3) = 3 - 3 \ln 3 \approx -0,2959 \longrightarrow$ Mín

f) $h(t) = \ln(t)/t$ no intervalo $[1,3]$

$h'(t) = \frac{(\ln t)' \cdot t - \ln t \, (t)'}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$

$h'(t) = 0 = 1 - \ln t$

$t = e$

$h(1) = \ln 1 = 0$ Mín

$h(3) = \ln 3/3$ Máx

$h(e) = 1/e$

17 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo (a, b)

a) Diga algumas condições para que f possua máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?

→ Se $f'(x) = 0$ ou
→ se $\nexists f'(x)$ no intervalo dado
} se houverem pontos críticos

18 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\nexists f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

Não há máximos ou mínimos

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{1}{x} = -\infty$$

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$g'(x) = 0 \therefore x$

$\Rightarrow x = 0$

$\nexists \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{9-x^2}$

$g(x)$ só admite solução real no intervalo $[-3, 3]$

Máx: $g(0) = 3$, $x = 0$

Mín: $g(-3) = g(3) = 0$

c) $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

$h'(x) = 5x^4 - 14x = x(5x^3 - 14)$

$h'(x) = 0 \iff 0$; $5x^3 = 14$

$x = \sqrt[3]{\frac{14}{5}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^5\left(1 - 7/x^3 + 2/x^5\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^5\left(1 - 7/x^3 + 2/x^5\right) = -\infty$

$h(0) = 0 \longrightarrow$ MÍN GLOBAL

$h\left(\sqrt[3]{14/5}\right) = \alpha > 0$

d) $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$

$K'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim_{x\to 0} \ln x - x = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - x}{\ln x} \cdot \ln x = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right)\ln x = \lim_{x\to\infty} x\left(\underset{0^+}{\frac{1}{x}} - \underset{0^-}{\frac{1}{\ln x}}\right)\cdot \ln x = -\infty$

$K(1) = \ln 1 - 1 = -1 \longrightarrow$ Máx

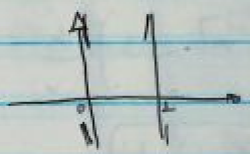
e) $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0,1)$

$M'(x) = \frac{-2x+1}{(x-x^2)^2}$

$M'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-x^2} = \infty$ $\qquad$ $\cancel{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-x^2} = -\infty}$

$\cancel{\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-x^2} = -\infty}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-x^2} = +\infty$



Mín: $f(1/2) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

---

19 — Encontre um número positivo tal que a soma do número e de seu recíproco seja mínimo.

$x \cdot y = 1 \rightarrow x + y$

$y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $Dom = \mathbb{R}^+$

$x + \dfrac{1}{x} = f(x)$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}\left(1 - \cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)}{\cancel{x}} = +\infty$

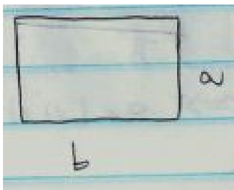
$\lim\limits_{x \to 0^+} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$

$f(1) = 1 + 1 = 2$

$\boxed{x = 1}$

---

20 — Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100m cuja área seja a maior possível.



$2a + 2b = 100 \rightarrow a + b = 50$

$a \cdot b = A_{máx}$ $\qquad$ $b = 50 - a$

$a \cdot (50 - a) = A$

$50a - a^2 = A$

$50 - 2a = A' = 0$

$50 = 2a$

$a = 25$ e $b = 25$

$\therefore$ Os lados devem valer 25 (um quadrado de lado 25)

---

21 — Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

① Assumindo $y = f(x)$ e derivando em rel a x, temos:

$$2 \cdot y \cdot y' - 2 \cdot x = 0$$

$$y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

② $$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \underbrace{y^2}_{4+x^2}}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 8}$$

① $$0 = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 4x + 8}} \cdot 4x - 4 \iff 4x = 4$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y^2 - 1 = 4 \rightarrow y = +\sqrt{3} \quad \text{1º Q}$$

$$P = (1, \sqrt{3})$$

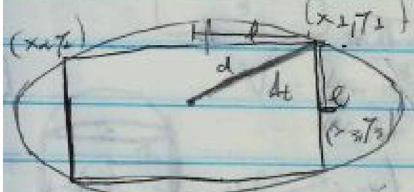
---

22 — Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Maior área de retângulo inscrito.

$$4\, \ell \cdot e = A_{máx}$$

Se d é máx, então a área também será.



$$d^2 = \ell^2 + e^2$$

Assumindo $\ell > 0$

$$e \cdot \ell = \frac{A_t(máx)}{4}$$

$$\frac{e\cdot\sqrt{d^2-e^2}}{2} = A_t$$

Derivando em rel. a e:

$$A_t' = \frac{1}{2}\left(e'\cdot\sqrt{d^2-e^2} + \left(\sqrt{d^2-e^2}\right)'\cdot e\right) = 0$$

$$\sqrt{d^2-e^2} + \frac{1}{2\sqrt{d^2-e^2}}\cdot(-2e)\cdot e = 0$$

$$\cancel{2}(d^2-e^2) = \cancel{2}e^2$$

$$d^2 = 2e^2 \iff \boxed{f=e}$$

$$A_{máx} = 4e^2$$

$$e = d_{1,3} = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

$$A_{máx} = 4\left[(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2\right]$$

$$\frac{b^2x^2+y^2a^2}{a^2\cdot b^2} = 1$$

$$y^2a^2 - a^2b^2 + x^2b^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2-x^2b^2}{a^2} = b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}$$

$$A_{máx} = 4\left[\cancel{x_1^2} - \cancel{2x_1x_3} + x_3^2 + y_1^2 - \cancel{2y_1y_3} + \cancel{y_3^2}\right]$$

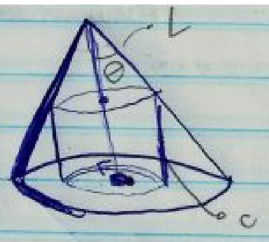
Com: $y_3 = 0 = x_1$ e $x_3^2 = y_1^2$

$$A_{máx} = 4(2\cdot y^2) = 8\cdot\left(b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}\right)$$

mas $x = 0$, então

$$\boxed{A_{máx} = 8b^2}$$

23 — Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12 cm de raio.

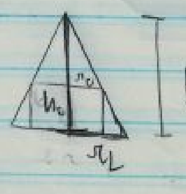


h = 20cm

r = 12cm

$$V_c = S_c \cdot h_c = r_c^2 \pi \, h_c$$

$$V_L = \frac{1}{3} S_L h_L = \frac{\pi r_L^2 \cdot h_L}{3}$$



$$\frac{h_L - h_c}{h_L} = \frac{r_c}{r_L}$$

$$-h_c = \frac{h_L r_c}{r_L} - h_L$$

$$h_c = -\frac{h_L r_c}{r_L} + h_L$$

$$V_c = r_c^2 \cdot \pi \cdot \left(h_L - \frac{h_L r_c}{r_L}\right)$$

$$V_c = 20 r_c^2 \pi - r_c^3 \pi \cdot \frac{20}{12}$$

$$V_c = 20\pi r_c^2 - \frac{5}{3}\pi r_c^3$$

Derivando em rel. a r_c

$$0 = 40\pi r_c - 5\pi r_c^2$$

$$r_c = \frac{40\pi}{5\pi}$$

$\boxed{r_c = 8}$ cm

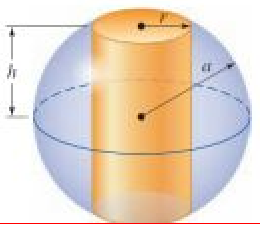
$$h_c = h_L - \frac{h_L r_c}{r_L}$$

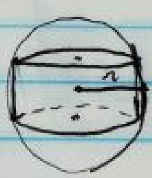
$$h_c = 20 - \frac{20 \cdot 8}{12}$$

$$h = \frac{60 - 40}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\boxed{h_c = \frac{20}{3} \text{cm}}$$

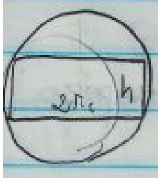
24 — Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o cilindro de maior volume possível.



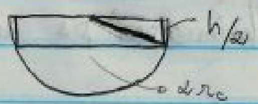


$V_e = \frac{4\pi r^3}{3}$

$V_c = \pi r_c^2 \cdot h$



$d_c = 2r = \sqrt{(2r_c)^2 + h^2}$



$4r^2 = 4r_c^2 + h^2$

$h^2 = 4r^2 - 4r_c^2$

$h = \sqrt{4r^2 - 4r_c^2} = 2\sqrt{r^2 - r_c^2}$

$V_c = \pi r_c^2 \cdot 2\sqrt{r^2 - r_c^2}$

Derivando em relação a r_c:

$0 = (\pi r_c^2)' \cdot (2\sqrt{r^2 - r_c^2}) + (\pi r_c^2) \cdot (2\sqrt{r^2 - r_c^2})'$

$0 = 2r_c\pi \cdot 2\sqrt{r^2 - r_c^2} + \pi r_c^2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - r_c^2}} \cdot (-2r_c)$

$0 = 4\pi r_c(\sqrt{r^2 - r_c^2}) - \frac{2\pi r_c^2}{\sqrt{r^2 - r_c^2}}$

$\frac{\cancel{2}\cancel{\pi} r_c^{\cancel{2}}}{\sqrt{r^2 - r_c^2}} = {}^{2}\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r_c}(\sqrt{r^2 - r_c^2})$

$$1 = 2\cdot(r^2 - rc^2)$$

$$1 = 2r^2 - 2rc^2$$

$$-2rc^2 = 1 - 2r^2$$

$$rc^2 = \frac{2r^2 - 1}{2}$$

$$rc = \sqrt{\frac{2r^2 - 1}{2}}$$

Máx Volume:

$$\sqrt{1/2}$$

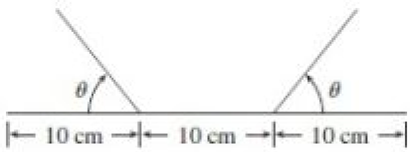
$$V = \pi rc^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{2r^2 - 1}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(\cancel{2} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{2r^2-1}{2}\right)}\right)$$

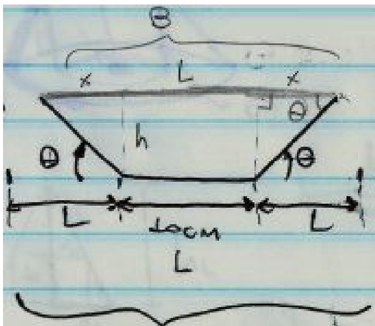
$$V = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(2r^2 - 1) = \frac{\sqrt{2}\pi \cdot \cancel{2}r^2}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \ldots$$

$$\boxed{V = \sqrt{2}\pi r^2 - \frac{\sqrt{2}\pi}{2}}$$

---

25 — Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água na calha seja máxima?





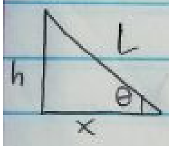
3L = 30cm

Maximização da área do trapézio

$$A = \left(\frac{B + L}{2}\right) \cdot h$$

$$B = 2x + L$$

$$A = \left(\frac{2x + 2L}{2}\right) \cdot h = (x + L) \cdot h$$



$$x = \cos\theta \cdot L$$

$$h = \operatorname{sen}\theta \cdot L$$

$$\therefore A = (L\cos\theta + L) \cdot \operatorname{sen}\theta L$$

$$A = L^2 \cdot \operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1)$$

Derivando em relação a θ:

$$A' = 0 = L^2\left((\operatorname{sen}\theta)' \cdot (\cos\theta + 1) + (\cos\theta + 1) \cdot \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= L^2\left(\cos\theta(\cos\theta + 1) + (-\operatorname{sen}\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= L^2 \cdot (\cos^2\theta - \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{1 - \cos^2\theta} + \cos\theta)$$

$$= L^2(\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta + \cos\theta)$$

$$0 = L^2 \cdot (2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$

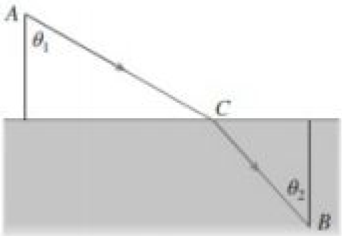
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{4}, \text{ já que } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

26 — Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o principio de Fermat um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



Minimização do tempo gasto

ACB deve ser mínimo

ACB = AC + CB

$$\frac{dAC}{dt} = v_1$$

$$\frac{d\,CB}{dt} = v_2$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

$$AC = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$CB = \sqrt{(d-x)^2+b^2}$$

Derivando em rel. a x:

$$ACB' = \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} \cdot 2(d-x) \cdot -1 = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{sen}\theta_2$$

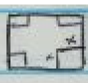
$$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2$$

As derivadas são iguais, então há uma certa constante de relaciona a divisão delas, tal qual ocorre com v_1 e v_2.

$$\frac{\frac{dAC}{dt}}{\frac{dCB}{dt}} = \frac{dAC}{dCB} \iff \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}}$$

---

27 — Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de 60cm de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter.

 ℓ $\quad \ell = 60\,cm$

 x, $\ell - 2x$

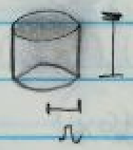
$$V = (\ell - 2x)^2 \cdot x$$
$$V = (60 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V' = 0 = 2(60-2x)\cdot(-2)x + (60-2x)^2 \cdot 1$$
$$(60-2x)^{\cancel{2}} = x4\cancel{(60-2x)}$$
$$60 - 2x = 4x$$
$$60 = 6x$$
$$\boxed{x = 10}$$

$$V_{máx} = (60-20)^2 \cdot 10 = 16000\,cm^3 \;(16L)$$

---

28 — Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber $V cm^3$ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.



$$V = \pi r^2 \cdot h \rightarrow h = V/\pi r^2$$

$$S_T = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

Como o custo é dado em função da área total de material, derivemos S_T em relação ao raio

$$S_T = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \pi\left(r^2 + \frac{2V}{r}\right)$$

$$S_T' = 2\pi \cdot r + 2V \cdot \frac{(-1)}{r^2}$$

Para ser mínimo, $S_T' = 0$, então:

$$2\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

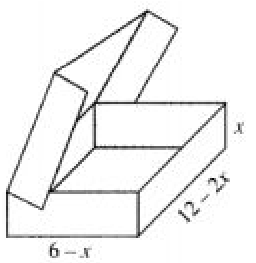
$$r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$h = V/\pi \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{2/3} = \frac{V^{1-2/3}}{\pi} \cdot \pi^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$\boxed{r = h}$$

---

29 — Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de 12cmx12cm. Encontre a caixa que optimiza o volume.



$$V = 2(6-x)^2 \cdot x$$

$$V' = 2\left(1(6-x)^2 + x\underbrace{\left((6-x)^2\right)'}_{2(6-x)\,\cdot\,-1}\right)$$

$$V' = 2\left((6-x)^2 - 2x(6-x)\right)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow (6-x)^{\cancel{2}} = 2x\,\cancel{(6-x)}$$

$$6 = 3x$$

$$\boxed{x = 2}$$

Caixa com dimensão: $2 \times 4 \times 8$ (cm)