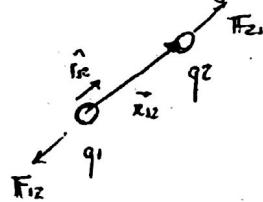


FÍSICA III - RESUMO P.J. 2015I - Conceitos Básicos

É hora de tirar a poeira dos seus conhecimentos de eletromagnetismo. Não me tire subestimando o que é carga, indução, condução, etc. Vamos as que interessa.

- i) Força entre cargas puntiformes: Sendo \hat{r}_{12} o vetor unitário da mesma direção e sentido do vetor \vec{r}_{12} (que vai da carga 1 até a 2). E sendo: \vec{F}_{12} a força que 2 provoca em 1, e vice-versa.

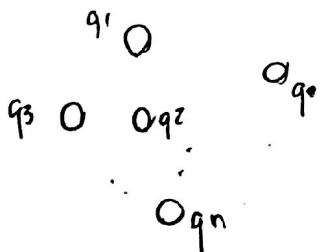


$$\vec{F}_{12} = -\frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{21} \quad (\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12})$$

Obs: por regras usamos que $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, da modo que:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}}$$

- ii) Princípio da Superposição (F): Se várias cargas geram força elétrica sobre uma carga estudada, a força total sobre ela é a soma das forças individuais.



$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}$$

- iii) Campo Elétrico de uma carga puntiforme: uma carga no espaço gera um campo elétrico E que varia conforme a distância à carga (r):

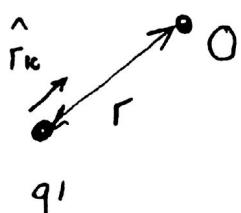


$$\boxed{E_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}_{10}}$$

$$q_1 < 0$$

$$q_1 > 0$$

Em que O é o ponto onde se deseja medir o campo:



Além disso, se colocarmos uma carga q_1 em \mathbf{r}_1 , a força sobre q_0 :

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \cdot q_1}{r_{01}^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{01} = q_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{01}^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{01} \right)$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{01} = q_0 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r})}$$

iv) Princípio da Superposição (E): o campo elétrico em um ponto é a soma dos campos gerados por cada carga presente:

$$q_2 \quad q_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

q_n

v) Densidades de Carga: para nossa infelicidade, na prova não iremos trabalhar com cargas puntiformes e sim com corpos com dimensões não-desprezíveis correspondentes.

Antes de aprendermos a calcular forças, campos, etc. para corpos carregados, temos que definir densidade de carga que pode ser:

Densidade volumétrica
de carga (ρ)

Usa para corpo 3D

$$\rho = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dr}$$

$$\Rightarrow \boxed{dq = \rho dV}$$

Densidade superficial
de carga (σ)

• Usa para corpo com 2 dimensões relevantes

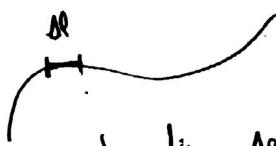


$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}$$

$$\boxed{dq = \sigma dA}$$

Densidade linear
de carga (λ)

• Usa para corpos com uma única dimensão relevantes



$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

$$\boxed{dq = \lambda dl}$$

(2)

campo Elétrico de uma distribuição contínua de cargas

Na P1, intuiitivamente há uma questão que pede para calcular o campo elétrico (E) gerado por um corpo extenso carregado.

Como fazemos isso? Dividimos o corpo em partes pequenas, calculamos o campo gerado por cada parte e somarmos. Em outras palavras, fazemos uma integral.



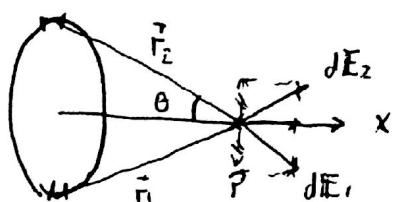
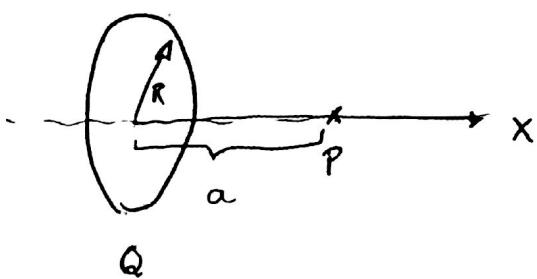
$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{corpo}} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Não São muitos os tipos de corpos que calham na prova, vemos cada um deles. O processo de resolução será:

- i) Identificam se vamos usar ρ , σ ou λ .
- ii) Dividir em partes equidistantes do ponto P
- iii) Analisar a simetria: alguma componente se cancela?
- iv) Calcular dE , o campo gerado por cada parte
- v) Integram

Vamos aos exemplos:

① Anel carregado uniformemente - sobre o eixo de simetria

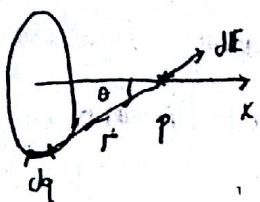


- i) O anel possui apenas uma dimensão não dirigível. Usaremos λ . Além disso
- $$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{Q}{2\pi R}$$

- ii) Como todos pontos do anel têm a mesma distância de P não dirige.
- iii) Vemos ao lado que as contribuições radiais (força do eixo x) sumam-se e cancelam as pegações dos pontos diametralmente opostos.

Assim, as somas os dE , sobrando apenas
Isso facilita muito a resolução, pois precisaremos integrar a parte \hat{x}
de dE

ir) Quanto vale dE ? Se pegarmos um pedacinho de anel de tamanho
 dl e carga dq , o campo que ele produz tem



tum módulo:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}$$

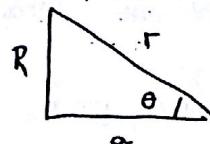
Como queremos só a componente em \hat{x} :

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta$$

$$dE_x = \frac{dq}{r^2} \cdot \cos\theta$$

Da geometria:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$



$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

v) Integrandos:

$$E(P) = \int_{\text{anel}} dE(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} \left(\frac{dq}{r^2} \cdot \cos\theta \right) \hat{x}$$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\text{anel}} \frac{dq}{R^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} dq \cdot \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x}$$

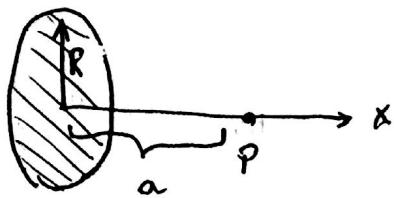
$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \hat{x} \underbrace{\int_{\text{anel}} dq}_{\text{é a carga total do anel}}$$

R e a são constantes

É a carga total
do anel.

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{aQ}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x}$$

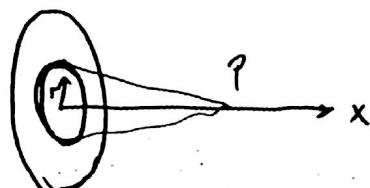
DISCO uniformemente carregado



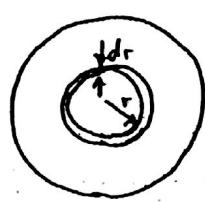
i) O disco tem 2 dimensões, logo usaremos

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

a

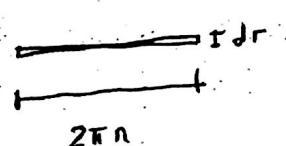


ii) Dividiremos o disco em pedaços que equidistam de P. Logo pegamos râncias amelis de raio r e largura dr



Qual a carga desse anel? $dq = \sigma \cdot dA$. Sua área será: $dA = 2\pi r \cdot dr$

Imagine que contornos & anel se roticarmos



$$\text{Assim, } dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

iii) Já sabemos calcular o campo para cada anel (exemplo 1)

O campo desse pedacinho será:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a dq}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x}$$

iv) Integrando:

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{a dq}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int \frac{a \sigma 2\pi r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \hat{x}$$

Quais os limites de integração? Note que r vai de 0 a R no disco:

$$E(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \hat{x}$$

* DICAS: na prova há formulários com a primitiva desse monstro

$$\mathbb{E}(P) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \Big|_0^R = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right) \hat{x}$$

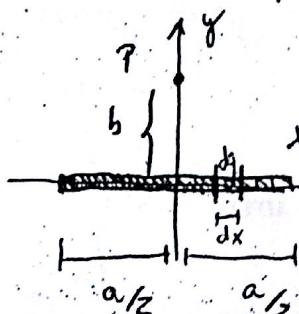
$$\mathbb{E}(P) = \frac{\sigma_0 x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1}{|a|} \right) \hat{x}$$

Obs: pode trocar σ por $\frac{\sigma}{\pi R^2}$

③ Barra uniformemente carregada - eixo passando pelo meio

i) A barra tem distribuição linear. Usaremos

$$\lambda = Q/a$$



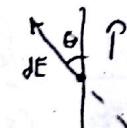
ii) Vamos dividir em pedacinhos de comprimento dx

$$e \text{ carga } dq \Rightarrow dq = \lambda dx$$

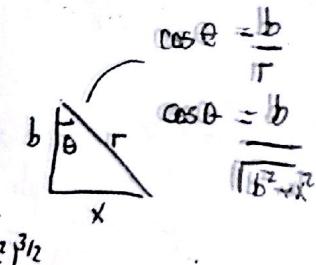
iii) Por simetria, notamos que a componente em x de calcula para pontas simétricas por y

iv) Vamos calcular a soma em y (que não é eliminada pela simetria) grande por dq

$$dE_y = dE \cdot \cos \theta$$



$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta$$



$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(\sqrt{x^2 + b^2})^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{\lambda b dx}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + x^2)^{3/2}}$$

Q3a - 2013

v) Agora integramos, lembrando que na barra, x vai de $-a/2$ até $a/2$

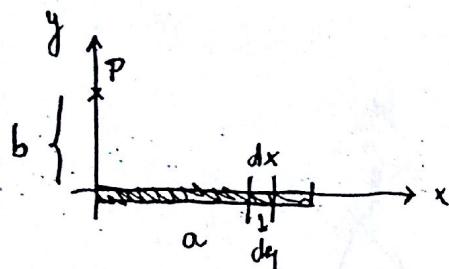
$$\mathbb{E}(P) = \int_{\text{barra}} dE_y \approx \int_{\text{barra}} dE_y \hat{y} = \int_{\text{barra}} \frac{\lambda b dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + b^2)^{3/2}} \hat{y}$$

$$\mathbb{E}(P) = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \hat{y} = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \right]_{-a/2}^{a/2} \hat{y}$$

PRIMITIVA
DADA

$$E(P) = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 b \sqrt{a^2 + 4b^2}}$$

④ Barra uniformemente carregada - eixo na extremidade



i) Normalmente usaremos λ

ii) Dividimos um ponto dq de comprimento dx
($dq = \lambda dx$)

iii) Nesse caso não há cancelamento de componentes
de dE

iv) Calculam dE

$$dE = dE (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \quad (\text{ver figura})$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j})$$

$$\star r = \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{(b^2 + x^2)} \left(\frac{-x \hat{i}}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{b \hat{j}}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} (-x \hat{i} + b \hat{j})$$

v) Integrando: $E(P) = \int_{\text{barra}} dE$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[- \int_0^a \frac{x}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} + b \int_0^a \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j} \right]$$

(...) Integrar (...)

III - Lei de Gauss

Aprendemos a calcular na força - binuta campos gerados por anéis, barras e discos. Vemos agora uma técnica que permite calcular facilmente o campo para cilindros e esferas.

A) Fluxo do Campo Elétrico : é o "número de linhas" do campo que atravessam; calcularmos como:

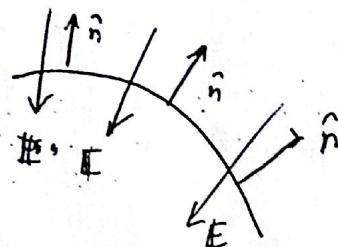
$$\oint_E = \int_{\text{sup.}} E \cdot \hat{n} dA$$

Fluxo de E

Integral sobre a superfície

de $E \cdot \hat{n}$ (produto escalar)

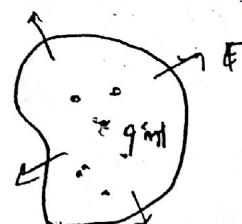
Obs: normal da superfície fechada é para fora



* Não se assuste, vamos como parametrizar e calcular facilmente.

B) A Lei de Gauss : o fluxo de E através de uma superfície fechada é proporcional à carga presente no interior dessa superfície.

$$\oint_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



Ou ainda :

$$\oint E \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

este símbolo rotulado é uma integral (\oint) numa superfície fechada (σ).

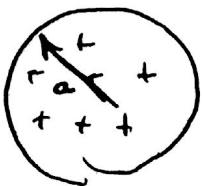
C) Aplicações : A lei de Gauss permite calcular E para corpos com certas simetrias.

bum os exemplos a seguir. Um deles cairá na prova

• Esfila com carga uniforme (carga em toda a esfera)

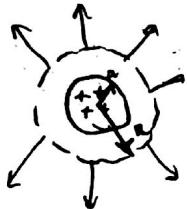
ρ = densidade de carga é constante

Q_{total}



• Para $r > a$:

(i) $q_{\text{int}} = Q_{\text{total}}$ (toda carga está dentro da esfera pontilhada)



$$(ii) \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint E(r) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint E(r) dA = E(r) \oint dA$$

Por simetria, E é
o mesmo em todos
os pontos da superfície

* E tem sempre
direção radial $\hat{\mathbf{n}}$

* Atm. disco, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = E(r) \cdot A = E(r) (4\pi r^2)$$

\uparrow

$\underbrace{}_{\text{área da casca}} \quad \text{esférica}$

$$(iii) \text{ Aplicando Gauss: } \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

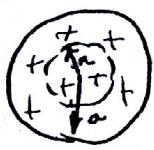
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{total}}}{r^2}$$

Ou, colocando o vetor

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{total}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}}$$

• Para $r < a$:



ii) $q_{\text{int}} \neq Q_{\text{total}}$ (noti que só parte da carga está dentro do ponto lido)

Como a carga é proporcional ao volume.

$$\frac{q_{\text{int}}}{Q_{\text{total}}} = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 n}{\frac{4\pi}{3} a^3} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{r^3}{a^3} Q_{\text{total}}$$

ii) $\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \text{Analogamente} = E(r) 4\pi r^2$

iii) Aplicando Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{r^3}{\epsilon_0 a^3} Q_{\text{total}}$$

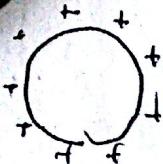
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{total}} r}{a^3} \hat{r}$$

• Conclusão: Sabemos E para qual quer ponto no espaço devido à carga esférica.

Esfera

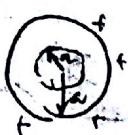
ESFérica

(carga apenas na superfície)



Q_{total}

$r > a$



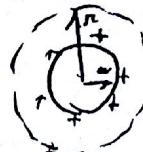
i) $q_{\text{int}} = 0$

ii) Por gauss: $\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

$\oint E(r) \cdot \hat{n} \cdot \hat{n} dA = 0$

$E(r) \oint dA = 0$

Como $\oint dA \neq 0 \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$



$r > a$

i) $q_{\text{int}} = Q_{\text{total}}$ (toda carga dentro)

ii) $\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = E(r) \oint dA = E(r) 4\pi r^2$

iii) Por gauss: $E(r) 4\pi r^2 = Q_{\text{total}}$

$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{total}}}{r^2}$

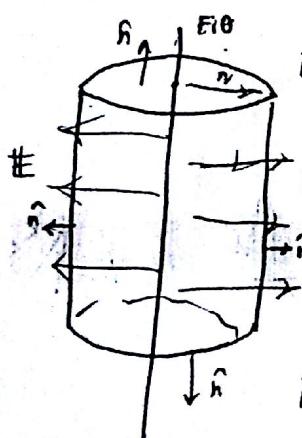
$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{total}}}{r^2} \hat{n}}$

e. Fio infinito

Neste caso temos uma simetria cilíndrica.

Queremos campo fora do fio.

Considerar densidade linear de carga.



i) Tomamos uma superfície de raio $r + h$ (ou seja, pontos que distam $r+h$ do fio)

ii) Por simetria o campo é radial saindo do fio

iii) $q_{\text{int}} = \lambda \cdot h$ (pedaco do fio dentro do cilindro)

iv) $\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{\text{lateral}} \underbrace{E(r) \hat{n} \cdot \hat{n}}_{=1} dA = E(r) \int_{\text{lateral}} dA = E(r) 2\pi r h$

Area da lateral

lateral do cilindro

Só há fluxo de E na lateral do cilindro. Nas

"topos" $\mathbf{E} \cdot \hat{n} = 0$

v) Aplicando Gauss:

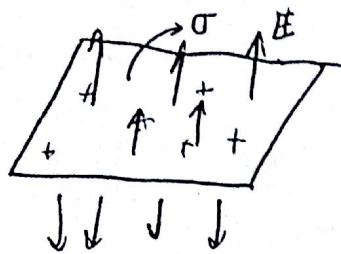
$$\frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA$$

$$\frac{\lambda h}{\epsilon_0} = E(r) 2\pi r h$$

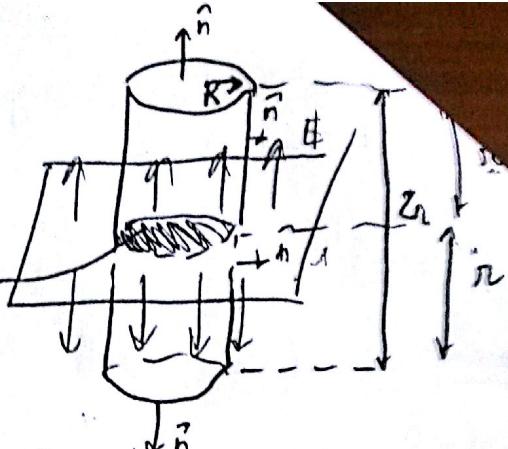
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$\boxed{E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{n}}$

D. Plano infinito



Tomamos como superfície
um cilindro que conta
o plano



ii) $q_{\text{int}} = \pi R^2 \sigma$

ii) Só há fluxo nas tampas. Pois na lateral $E \perp \hat{n}$

$$\therefore \oint E \cdot \hat{n} dA = \int_{\text{tampas}} E \cdot \hat{n} dA = E(n) \int dA = 2(\pi R^2) \cdot E(n)$$

iii) Usando Gauss:

$$E(n) = \frac{\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0 2\pi R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Ou seja :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

em qualquer ponto (independe de n)

Questões de Prova

Q2 - PJ-2014

Q3 - PJ-2013 (aub)

Q4 - PJ-2012 (aub)

Q2 - PJ-2011

Obs: se faltam o conceito de condutor, res e item IV.

Condutores

Em um condutor em equilíbrio: $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$. Caso contrário os elétrons se moveriam e não seria equilíbrio.

- Conclusão: toda a carga se concentra na superfície

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

(não há campo dentro)

- Por estarem em equilíbrio, em cada ponto \vec{E} é paralelo à normal. Além disso, por Gauss, na-superfície

$$\boxed{E = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0}}$$

Em que σ_{sup} é a densidade superficial de carga no condutor.

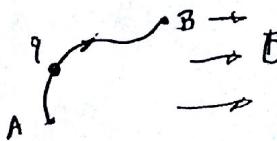
Ou ainda:

$$\boxed{\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0}}$$

V - Energia Potencial e Potencial Elétrico

A força elétrostática é conservativa, assim, podemos associar a ela uma energia potencial elétrostática. Se um sistema vai de um ponto inicial (A) para um final (B), sob ação de uma força elétrostática que exerce trabalho $W_{A \rightarrow B}$:

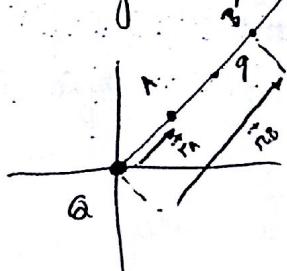
$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A \rightarrow B}$$



Além disso, podemos calcular o trabalho da força elétrostática como:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Exemplo: trabalho realizado sobre uma carga q_0 gerada por a situada na origem ($0,0$) devido a um campo \mathbf{E}



$$W_{A \rightarrow B} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Note que } \mathbf{E} \parallel d\mathbf{l} \text{ na linha do deslocamento } A \rightarrow B : \mathbf{E} = E(r) \hat{r})$$

$$W_{A \rightarrow B} = q_0 \int_A^B E(r) d\mathbf{l} \cdot (dr \hat{r}) = q_0 \int_A^B E(r) dr$$

$$W_{A \rightarrow B} = q_0 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} dr = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$\text{Pela 1ª equação: } U_A - U_B = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Note que obtemos sempre diferenças de energia potencial, e não um valor absoluto. Assim, para dar valor da energia potencial em um ponto, precisamos adotar um referencial. No caso, vamos admitir que $U_\infty = 0$ se $r \rightarrow \infty$, para $r = \infty$ a energia é nula.

Assim no exemplo anterior se tomarmos

$$r_B = \infty$$

$$U_A - U_\infty = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \cancel{\frac{1}{r_B}} \right]_0$$

$$U_A = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$$

Potencial Elétrostático

O potencial elétrostático é definido como:

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0}}$$

De modo que o potencial em um ponto independe da carga q_0 que está sendo submetida à ação do campo. Em outras palavras, V só depende de quem gera o campo.

Para campo gerado por uma carga pontual:

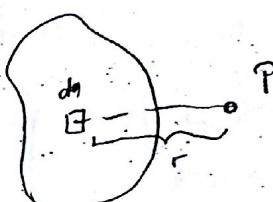
$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}} \quad (\text{diridimos } U \text{ da página anterior, por } q_0)$$

2. Potencial para uma Distribuição Contínua de Cargas

Para calcular o potencial de um corpo carregado iremos integrar a expressão anterior:

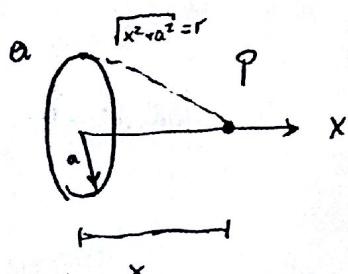
$$\boxed{VP = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{corpo}} \frac{dq}{r}}$$

Obs: note que V é uma grandeza escalar.



Exemplos:

① Anel



$$VP = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq$$

\uparrow
 $r = \text{ctc}$

$$VP = \frac{\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

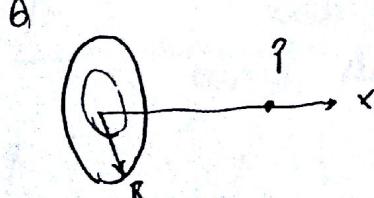
$$V_{\text{disco}} = \int dV_{\text{anil}}$$

Diridimos um anel, de modo que

$$V_{\text{disco}} = \int_{\text{disco}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{ada}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

\uparrow
 $dq = 2\pi a \sigma da$

② Disco



$$V_{\text{disco}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - |x| \right)$$

3. Cálculo de \vec{E} a partir da fórmula de V

Se tivermos uma equação para V em todos os pontos do espaço, obtemos facilmente \vec{E} :

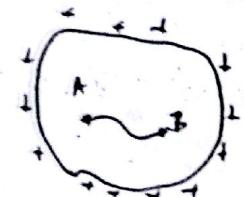
$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

$$\text{ou: } \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\text{ou para simetria radial: } \vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

Potencial dentro de um condutor carregado em equilíbrio

Dentro do condutor $E=0$. Assim,



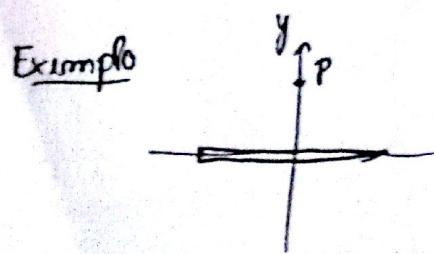
$$V_B - V_A = \int_{A}^{B} E \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

Além disso, na superfície do condutor a igualdade se mantém pois $E \cdot \vec{dl} = 0$ (E é ortogonal à superfície). Por isso digamos que o condutor em equilíbrio é um volume equipotencial (todas as pontas possuem o mesmo potencial).

Resumindo: no condutor $V_{\text{dentro}} = V_{\text{superfície}}$

* Obs: em muitos exercícios só sabemos V em um certo eixo.

Neste caso podemos definir um relações as vizinhas desse eixo para determinar a componente de \vec{E} nessa direção

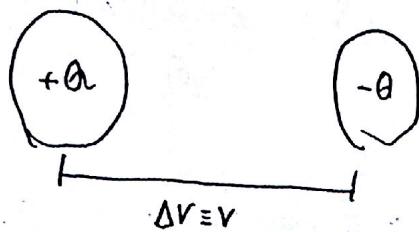


$$\text{Sei } V(0, y) \rightarrow E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

componente de \vec{E} em y

Capacitância

Um capacitor é formado por dois condutores com cargas de mesmo módulo e sinal contrário. Em circuitos, soma de suas funções armazena carga.



Se tirarmos uma diferença de potencial V entre as superfícies das cargas, definimos capacidade como:

$$C = \frac{|Q|}{|V|} \quad [C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{volt}} = F \quad (\text{Faraday})$$

Para calcular C , usaremos o seguinte método:

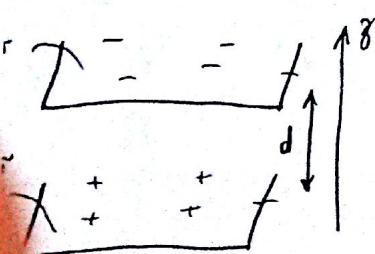
1) Calcular o campo E entre as superfícies. No geral, usaremos lei de Gauss.

2) Calcular V . Usando $V = V_A - V_B = \int_A^B E \cdot d\vec{l}$ em um caminho facilitado pela simetria.

3) Calcular C : $C = \frac{|Q|}{|V|}$

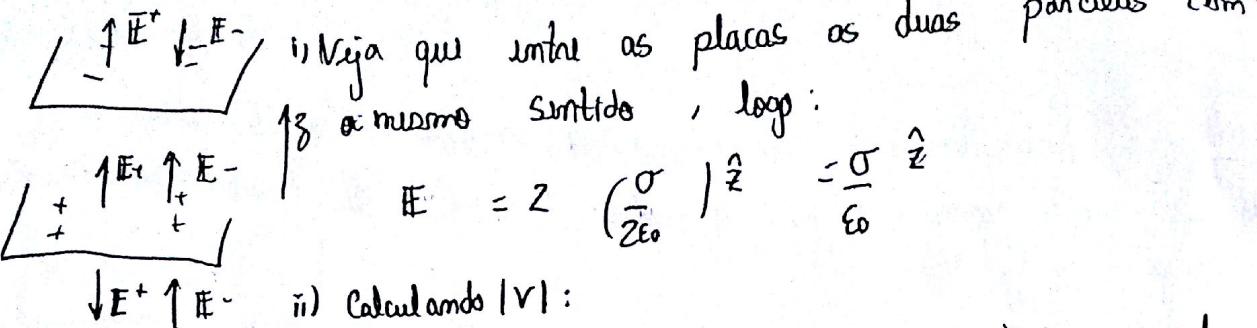
Exemplos

① Capacitor de placas planas



Já vimos que uma placa gera campo de módulo: $|E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

No desenho a seguir vamos dividido pelo lado positiva (E_+) e o gerado pelo negativo (E_-)



ii) Calculando $|V|$:

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot (d\vec{l}) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

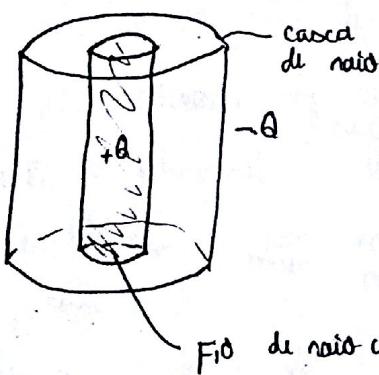
$$\Rightarrow |V| = \sigma d / \epsilon_0$$

iii) Calcular C :

$$C = \frac{|A|}{|V|} = \frac{(\sigma \cdot A)}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Aárea da placa

② Capacitor Cilíndrico



i) Obter E : usando Gauss



$$\oint E \cdot \hat{n} dA : \oint E \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) \oint dA$$

$$\oint E \cdot \hat{n} dA = E(r) \cdot \text{Área} = E(r) 2\pi r h$$

$$\Rightarrow \oint E \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi L n \epsilon_0}$$

ii) Calcular $|V|$:

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot d\vec{l} = \int_A^B E(r) \hat{r} (dr) = \int_a^b \frac{Q}{2\pi L n \epsilon_0} dr$$



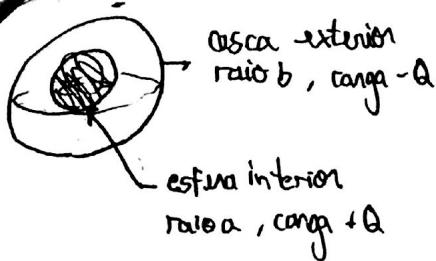
$$V_A - V_B = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

iii) Logo:

$$C = \frac{|A|}{|V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Capacitor esférico



i) Obtener E : usando Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_{\text{circular}} E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) 4\pi r^2$$

área casca esférica

$$\Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ii) Obtener $|V|$:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$V_A - V_B = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b$$

$$V_A - V_B = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab} > 0$$

$$|V| = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab}$$

iii) Calcular C :

$$C = \frac{|V|}{|V|} = \frac{Q}{Q(b-a)}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}}$$

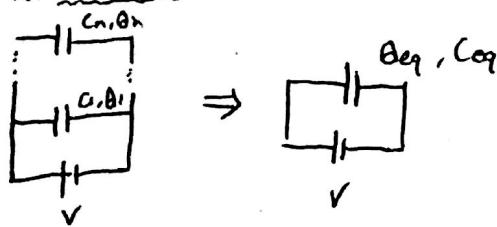
Energia almacenada no capacitor

$$U = \frac{\Phi^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

(Constará no formulário)

Combinação de Capacitores

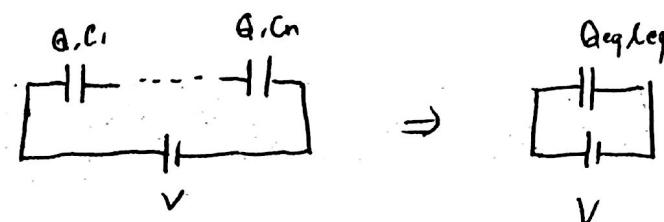
A) Paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

B) Série



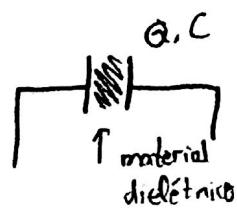
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Extra : Dielettrico

Não é comum cair em prova, mas há vezes em que a questão pede para fazer as contas de capacitância considerando que há um dieletônico entre as placas.

O dieletônico nada mais é que um material isolante, como óleo ou plástico, que pode estar no meio das placas. Até agora assumimos que há ar (ou vácuo) entre elas. O que muda, então, com o dieletônico?



Dada a constante dieletônica (k) do material. Em nossos cálculos devemos trocar:

$$E_0 \rightarrow k E_0$$

(vacuo) (com dieletônico)

Notaríamos que no fim das contas, ao colocar dieletônico entre as placas de um capacitor, a capacitância é multiplicada por k (e. $C' = kC_0$).

Especialmente, a lei de Gauss fica:

$$E_0 \oint \mathbf{k} \cdot d\mathbf{A} = q_{int}$$