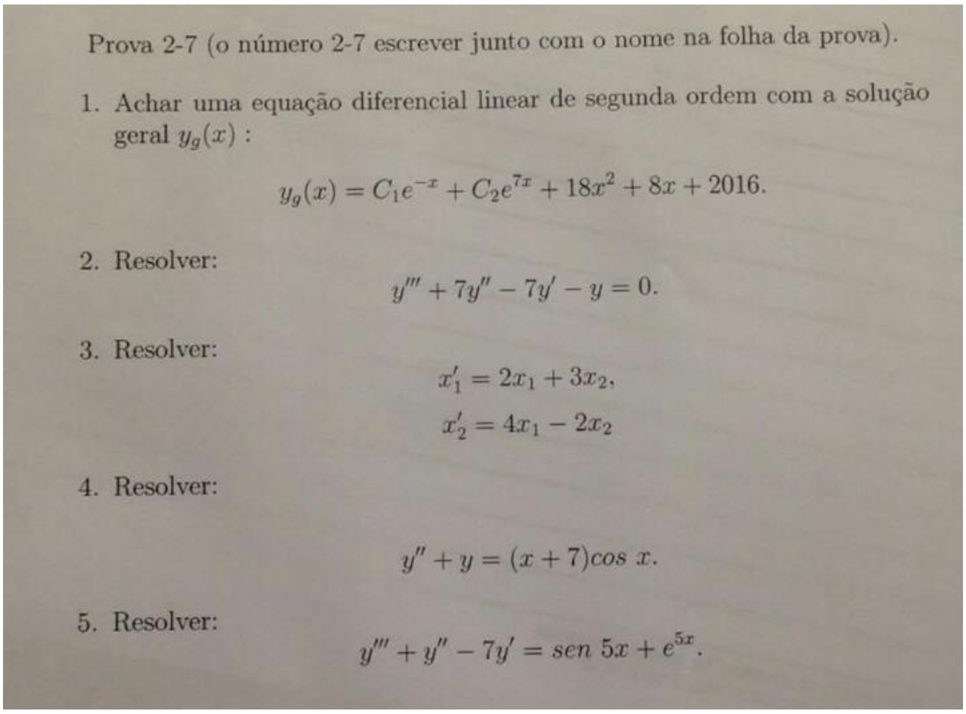
Resolução da prova 2-7

Guilherme Fortes Evangelista

19 de Novembro de 2017

Sumário



Prova 2-7 (o número 2-7 escrever junto com o nome na folha da prova).

1. Achar uma equação diferencial linear de segunda ordem com a solução geral $y_g(x)$:

$$y_g(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{7x} + 18x^2 + 8x + 2016.$$

2. Resolver:

$$y''' + 7y'' - 7y' - y = 0.$$

3. Resolver:

$$x_1' = 2x_1 + 3x_2,$$
$$x_2' = 4x_1 - 2x_2$$

4. Resolver:

$$y'' + y = (x+7)cos\ x.$$

5. Resolver:

$$y''' + y'' - 7y' = sen\ 5x + e^{5x}.$$

Figura 1: Prova 2-7.

1 Primeira questão

Achar uma equação diferencial linear de segunda ordem com a solução geral $y_g(x)$:

$$y_g(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{7x} + 18x^2 + 8x + 2016$$

Solução:

Primeiro é preciso notar que a solução $y_g(x)$ dada pode ser dividida em duas partes: a parte da solução homogêna $y_h(x)$ e a parte da solução particular $y_p(x)$.

$$y_g(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{7x} + 18x^2 + 8x + 2016$$

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Logo, podemos encontrar a solução geral $y_g(x)$ encontrando as soluções de cada parte separadamente. Devemos começar pela parte homogênea $y_h(x)$, como há duas soluções exponenciais, as soluções devem ter partido de uma EDO linear de segunda ordem da forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Onde a, b e c são constantes a se descobrir. A equação acima leva à um problema algébrico da forma

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

No qual as raízes λ_1 e λ_2 desse polinômio característico são encontradas na solução da parte homogênea que temos em mãos

$$y_h(x) = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{7x}$$

Fazendo o caminho reverso podemos encontrar o polinômio característico fazendo a seguinte operação

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1)(\lambda - 7) = \boxed{\lambda^2 - 6\lambda - 7}$$

Conseguimos então $a = 1$, $b = -6$ e $c = -7$, como os coeficientes do polinômio característico são os mesmos encontrados na EDO homogêna, temos então que a EDO é

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

Basta checar que

$$y_h'' - 6y_h' - 7y_h = \boxed{0}. \tag{1}$$

Agora, por nossa solução particular $y_p(x)$ ser um polinômio de segundo grau, é razoável propor que nossa EDO para a solução geral y_g seja da forma

$$y'' - 6y' - 7y = Ax^2 + Bx + C$$

Uma vez que $y_g = y_h + y_p$, quando substituída na EDO, a parte homogêna irá resultar em 0 e restará apenas a parte particular.

Demonstração. Substituindo o vaor de y_g na EDO temos

$$y_g'' - 6y_g' - 7y_g = Ax^2 + Bx + C$$

$$(y_h + y_p)'' - 6(y_h + y_p)' - 7(y_h + y_p) = Ax^2 + Bx + C$$

$$(y_h'' - 6y_h' - 7y_h) + (y_p'' - 6y_p' - 7y_p) = Ax^2 + Bx + C$$

Mas de (1) temos que os primeiros termos são iguais a zero, sobrando então

$$y_p'' - 6y_p' - 7y_p = Ax^2 + Bx + C$$

□

Como y_p é um polinômio de segundo grau, o grau máximo do lado esquerdo da equação acima será 2, e como as derivadas de um polinômio são também um polinômio, está justificada a nossa proposta para a forma do lado direito da equação.

Substituindo y_p na equação, temos

$$(18x^2+8x+2016)''-6(18x^2+8x+2016)'-7(18x^2+8x+2016) = Ax^2+Bx+C$$

$$(36) - 6(36x+8) - 7(18x^2+8x+2016) = Ax^2 + Bx + C$$

Fazendo todas as distributivas e depois colocando em evidência os termos x^2 e x, temos nossa equação algébrica organizada

$$(-7 \cdot 18)x^2 + (-6 \cdot 36 - 7 \cdot 8)x + (36 - 6 \cdot 8 - 7 \cdot 2016) = Ax^2 + Bx + C$$

$$-126x^2 - 272x - 14124 = Ax^2 + Bx + C$$

Logo temos $A = -126$, $B = -272$ e $C = -14124$. Portanto, a EDO da solução geral y_g é

$$y'' - 6y' - 7y = -126x^2 - 272x - 14124.$$

2 Segunda questão

Resolver:

$$y''' + 7y'' - 7y' - y = 0$$

Solução:

A EDO acima é uma equação linear de terceira ordem homogênea que tem solução geral no formato

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

Onde λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes do polinômio característico da EDO, dado por

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 1 = 0$$

Para encontrarmos as raízes λ_2 e λ_3 desse polinômio precisamos encontrar uma primeira raíz λ_1, as possíveis raízes de um polinômio Ax^3+Bx^2+Cx+D são os divisores de D positivos e negativos, e o quociente dos divisores de D por A positivos e negativos. Para esse caso nossas possíveis raízes são $+1$ e -1. Substituindo no polinômio, obtemos os seguintes resultados

$$(1)^3 + 7(1)^2 - 7(1) - 1 = 1 + 7 - 7 - 1 = \boxed{0}$$

$$(-1)^3 + 7(-1)^2 - 7(-1) - 1 = -1 + 7 + 7 - 1 = \boxed{12}$$

Podemos então colocar $\lambda_1 = 1$ como uma raíz. Dividindo o polinômio pelo termo da raíz

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 + 8\lambda + 1 \\
\quad 8\lambda^2 - 7\lambda & \\
\quad \underline{8\lambda^2 - 8\lambda} & \\
\qquad \lambda - 1 & \\
\qquad \underline{\lambda - 1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Chegamos que o polinômio pode ser escrito na forma

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 8\lambda + 1) = 0$$

As duas outras raízes podem ser encontradas usando a fórmula quadrática

$$\lambda_{(2,3)} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{60}}{2} = \boxed{-4 \pm \sqrt{15}}$$

Assim a solução geral é dada por

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{1x} + C_2 e^{(-4+\sqrt{15})x} + C_3 e^{(-4-\sqrt{15})x}}$$

3 Terceira questão

Resolver:

$$x_1' = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_2' = 4x_1 - 2x_2$$

Solução: Primeiro escrevemos o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Para encontrarmos a solução geral, é preciso encontrarmos os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Devemos começar pelos autovalores, usamos a equação

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Onde devemos encontrar todos os autovalores λ que a satisfazem. Dela, obtemos que

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 3\cdot 4 = \boxed{\lambda^2 - 16 = 0}$$

Logo temos $\lambda_1 = +4$ e $\lambda_2 = -4$. Partimos então em busca dos autovetores. Usando a equação de autovetores

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

Queremos encontrar os vetores $\mathbf{v}$ que satisfazem essa equação, para isso usaremos os autovalores λ que acabamos de encontrar, cada autovalor terá seu autovetor associado. Para λ_1 a equação acima dá origem ao sistema

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 4 & -2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os sistemas para encontrar os autovetores terão sempre infinitas soluções, bastando resolver apenas uma das equações, a solução será uma componente do autovetor em função da outra componente. Seguindo isso e usando apenas a primeira equação

$$-2v_1 + 3v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3}v_1$$

Assim, nosso autovetor $\mathbf{v_1}$ terá a forma

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{2}{3}v_1 \end{pmatrix} = \frac{v_1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Onde v_1 é constante qualquer (devido ao sistema com infinitas soluções) e por isso pôde absorver o $\frac{1}{3}$.

Encontremos agora $\mathbf{v_2}$ associado à λ_2

$$\begin{pmatrix} 2-(-4) & 3 \\ 4 & -2-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$$

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Temos agora tudo o que precisamos para escrever a solução geral, que será

$$\mathbf{x} = \mathbf{v_1} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{v_2} e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} C_1 e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C_2 e^{-4t}$$

Onde as constantes v_1 foram absorvidas pelas constantes C_1 e C_2.

4 Quarta questão

Resolver:

$$y'' + y = (x+7)\cos(x)$$

Solução:

Primeiramente resolvemos a equação homogênea

$$y'' + y = 0$$

Que tem o seguinte polinômio característico

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Esse polinômio possui as duas raízes complexas $\lambda_1 = +i$ e $\lambda_2 = -i$, logo a solução da equação homogênea é dada por

$$y_h(x) = c_1 e^{+ix} + c_2 e^{-ix}$$

Que pode ser escrito como combinação de seno e cosseno usando a relação de euler ($e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$)

$$y_h(x) = c_1[\cos(x) + i\sin(x)] + c_2[\cos(-x) + i\sin(-x)]$$

$$y_h(x) = c_1\cos(x) + ic_1\sin(x) + c_2\cos(x) - ic_2\sin(x)$$

$$y_h(x) = (c_1 + c_2)\cos(x) + i(c_1 - c_2)\sin(x)$$

$$\boxed{y_h(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)}$$

Onde usamos que $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ e colocamos $C_1 = c_1 + c_2$ e $C_2 = i(c_1 - c_2)$.

Agora devemos supor um formato para nossa solução particular que condiga com a EDO que queremos resolver. Não podemos supor que seja da forma $(Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)$ uma vez que $B\cos(x) + D\sin(x)$ faz parte da solução homogênea e por isso iria desaparecer quando substituída na EDO, não ajudando na solução (como aqueles amigos que vão à uma festa na sua casa, sujam tudo e na hora da limpeza te abandonam). Devemos supor então o formato $(Ax + B)x\cos(x) + (Cx + D)x\sin(x) = (Ax^2 + Bx)\cos(x) + (Cx^2 + Dx)\sin(x)$, sempre que a suposição fizer parte da homogênea você pode adicionar um x multiplicando os polinômios (e convidando alguns amigos responsáveis para sua festa). Para a derivação, vamos nomear as funções temporariamente por $r = Ax^2 + Bx$, $u = \cos(x)$, $s = Cx^2 + Dx$ e $v = \sin(x)$, assim

$$y_p = ru + sv$$

$$y_p' = r'u + ru' + s'v + sv'$$

$$y_p'' = r''u + r'u' + r'u' + ru'' + s''v + s'v' + s'v' + sv''$$

$$y_p'' = r''u + 2r'u' + ru'' + s''v + 2s'v' + sv''$$

Temos que $u' = -v$, $v' = u$, $u'' = -u$ e $v'' = -v$

$$y_p'' = r''u - 2r'v - ru + s''v + 2s'u - sv$$

$$y_p'' = (r'' - r + 2s')u + (-2r' + s'' - s)v$$

Substituindo na equação

$$y_p'' + y_p = (x + 7)\cos(x)$$

$$(r'' - r + 2s')u + (-2r' + s'' - s)v + (ru + sv) = (x + 7)u$$

$$(r'' + 2s')u + (-2r' + s'')v = (x + 7)u$$

$$[2A + 2(2Cx + D)]u + [-2(2Ax + B) + 2C]v = (x + 7)u$$

$$(4Cx + 2D + 2A)u + (-4Ax - 2B + 2C)v = (x + 7)u$$

Isso dá origem à um sistema com 2 equações que pode ser dividido em um sistema com quatro equações

$$\begin{cases} 4Cx + 2D + 2A = x + 7 \\ -4Ax - 2B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4C = 1 \\ 2(D + A) = 7 \\ -4A = 0 \\ 2(-B + C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{4} \\ D + A = \frac{7}{2} \\ A = 0 \\ B = C \end{cases}$$

Temos então como solução desse sistema $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ e $D = \frac{7}{2}$. Logo, nossa solução geral pode ser escrita como a soma da parte homogêna com a parte particular

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{x}{4} \cos(x) + \frac{x^2 + 14x}{4} \sin(x)$$

5 Quinta questão

Resolver:

$$y''' + y'' - 7y' = \sin(5x) + e^{5x}$$

Solução: