Pregunta 4

a) $$nP_n(x) = 2n-1\, x\, P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

$$P_0(x) = 1 \quad y \quad P_1(x) = x$$

Notamos que el polinomio de Legendre K-ésimo es un polinomio de orden K.

$$\Rightarrow \quad P_K(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_K x^K$$

Si usamos esta forma del polinomio y reemplazamos en la fórmula recursiva tenemos:

$$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$P_{n-2}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-2} x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x \left(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\right) - \frac{n-1}{n}\left(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-2} x^{n-2}\right)$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}\left(a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n\right) - \frac{n-1}{n}\left(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-2} x^{n-2}\right)$$

$$P_n(x) = -\frac{n-1}{n} b_0 + \left(\frac{2n-1}{n} a_0 - \frac{n-1}{n} b_1\right)x + \left(\frac{2n-1}{n} a_1 - \frac{n-1}{n} b_2\right)x^2 + \dots$$

$$+ \left(\frac{2n-1}{n} a_{n-3} - \frac{n-1}{n} b_{n-2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{2n-1}{n} a_{n-2}\right)x^{n-1} + \left(\frac{2n-1}{n} a_{n-1}\right)x^n$$

Podemos ver que en general el coeficiente i-ésimo de $P_n(x)$ se puede escribir como

$$\frac{2n-1}{n} a_{i-1} - \frac{n-1}{n} b_i$$ excepto por los términos en los extremos

Para corregir esos detalles podemos agregar 0 s en los vectores de coeficientes de $P_{n-1}(x)$ y $P_{n-2}(x)$:

$$\quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^{n-2} \quad x^{n-1} \quad x^n$$

$$\text{Coef } P_{n-1} = (0, a_0, a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) \times \frac{2n-1}{n}$$

$$\text{Coef } P_{n-2} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-2}, 0, 0) \times -\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Ambos vectores son de longitud $n+1$. Si sumamos

Coef P_{n-1} + Coef P_{n-2} obtenemos los coeficientes Coef P_n en una lista:

$$\text{Coef } P_n = \Big(\underbrace{0 - \frac{n-1}{n} b_0}_{0}, \underbrace{\frac{2n-1}{n} a_0 - \frac{n-1}{n} b_1}_{1}, \underbrace{\frac{2n-1}{n} a_1 - \frac{n-1}{n} b_2}_{2}, \dots, \underbrace{\frac{2n-1}{n} a_{i-1} - \frac{n-1}{n} b_i}_{i\text{-ésimo}}$$

$$, \dots, \underbrace{0 + \frac{2n-1}{n} a_{n-1}}_{n\text{-ésimo}}\Big)$$