Matemática Elementar: Conjuntos numéricos

Erik Perillo

Resumo

Nesta etapa, falaremos sobre os tipos de números que podemos encontrar por aí na aventura da matemática.

Sumário

1 Conjuntos Numéricos

No nosso dia a dia, nós vivemos classificando as coisas. Classificamos, por exemplo, comidas em diferentes tipos. Temos as frutas, os legumes, as carnes etc. Por que fazemos isso? Ora, porque cada um desses tipos de alimentos tem características bem únicas deles, e é útil separá-los. Frutas são em geral doces, carnes em geral se deve cozinhar antes de comer. Sabemos que misturar frutas em uma salada de frutas é uma boa ideia, mas misturar carnes e frutas em uma mesma coisa quase nunca dá certo!

Como matemáticos também são humanos, eles fizeram a mesma coisa com números. Ao longo do tempo, foi-se percebendo que os números são diferentes, e alguns deles têm características bem especiais, de um modo que faria sentido separá-los em classes distintas. Foi dessa ideia que foram desenvolvidos os *conjuntos numéricos*. Os conjuntos numéricos colocam uma ordem nos números e nos permitem analisar as características deles, de forma que fica mais fácil saber o que podemos e o que não podemos fazer com os números!

Nas próximas seções, então, vamos aprender mais sobre esses números.

1.1 Números Naturais

No começo, a gente só sabia contar ovelhas. O pastor só precisava saber quantas ovelhinhas ele tinha: se eram 1, 5, 10 ou até mesmo nenhuma (0).

O mínimo que ele podia ter era nenhuma ovelha, ou seja, 0 ovelhas. Faz sentido eu ter -2 ovelhas? Essa ideia não era muito bem vista ainda, então isso não existia naquela época. Eu posso ter meia ovelha? Se estiver viva, não, então não fazia sentido também pensar em coisas como o número 0.5. Fica claro, então, que só se precisava de números *inteiros* e *positivos*. É daí, então, que surgem os números **naturais**, que são representados pelo símbolo $\mathbb{N}$. Os números naturais são:

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

E assim vão até o infinito.

1.2 Números Inteiros

Depois de muito contar ovelhinhas, a gente começou a ser ganancioso e lidar com dinheiro. Agora se podia comprar e vender ovelhinhas. Com isso, naturalmente, começaram a aparecer dívidas. Muita gente começou a dever moedinhas e a gente precisava manter isso documentado. Mas como a gente representaria que estamos devendo 3 moedinhas? Foi daí que começou a aparecer o conceito de o que é um *número negativo*. A gente ainda não pensava em coisas como meias moedas, então só começamos pensando na falta de coisas inteiras, como moedas.

Foi daí, então, que surgiram os números **inteiros**, representados pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Os números inteiros são só uma extensão dos números naturais, adicionando o *negativo* deles:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

E assim vai, desde o infinito negativo até o infinito positivo.

Quando eu digo que os inteiros são só uma extensão dos naturais, eu não estou exagerando! Percebeu como os inteiros têm todos os números naturais possíveis? Então ele realmente é uma extensão. Podemos dizer, então, que **todo número natural também é um número inteiro**. Por exemplo, o 3 é inteiro e também é natural. Não dá pra dizer o contrário, porém. Nem todo número inteiro é natural. O -3, por exemplo, é inteiro, mas não é natural.

A gente pode, então, dizer que os naturais estão **contidos** nos inteiros. Dá pra representar isso pelo desenho:

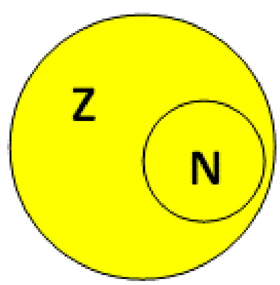

Figura 1: Números naturais estão dentro dos inteiros

1.3 Números Racionais

Chegou uma hora que os cachaceiros começaram a mexer com matemática. A partir desse momento, era importante saber contar, por exemplo, quanto custava meia garrafa de pinga, ou seja, uma **fração** da garrafa. Como representar isso então? Surgiu daí a necessidade de inventar números para isso. No caso de meia garrafa, precisamos então de algo como $\frac{1}{2}$. Esse número certamente é diferente dos que existiam antes: Ele **não é inteiro**, porque meia garrafa de pinga certamente não é uma garrafa inteira.

Surgiu então a necessidade de classificá-los como outra classe de número, e então apareceu o conceito de números **racionais**, representados pelo símbolo $\mathbf{Q}$. Entre eles, estão os números:

$$-\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{23}{54}, \ldots$$

Ou seja, todo número que você representa como uma fração.

Dá também pra escrevê-los na forma de números decimais. $\frac{1}{2}$, por exemplo, também é 0.5, mas não é porque escrevemos dessa forma que o 0.5 deixa de ser racional. Alguns racionais, quando representados desse jeito, ficam bem estranhos. Por exemplo: o $\frac{1}{3}$, quando representado na forma decimal, fica:

$$0.33333333333\ldots$$

Esses 3 acabam? Não! Nunquinha! Isso certamente é um número muito estranho, mas ainda é racional, porque ele **tem uma representação como uma fração**.

M-mas e os números inteiros? São racionais também? Pra responder isso, temos que responder: Conseguimos representar um inteiro como uma fração? A resposta é: claro que sim! Pegue o número 4, por exemplo. Pra escrevê-lo como uma fração, podemos simplesmente escrevê-lo como $\frac{4}{1}$. Fácil, não? Então este é o fato: **todo número inteiro é também racional**. Do mesmo jeito que os naturais estão dentro dos inteiros, os inteiros estão dentro dos racionais. Podemos representá-los desta maneira:

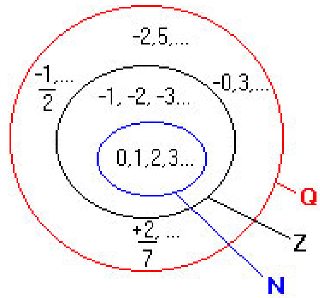

Figura 2: Números racionais engolem os inteiros

1.4 Números Irracionais

Parece que com os naturais, inteiros e racionais, já da pra formar todos os números que se possa imaginar, né? Infelizmente, não é assim. Tem alguns números que, pasme: não são inteiros, e nem dá pra representar usando uma fração! Isso é muito estranho, mas é a verdade. Pegue, por exemplo, o número $\sqrt{2}$. Você consegue representá-lo como uma fração? Nem perca seu tempo, porque já foi provado matematicamente que não. Logicamente, então, temos que criar uma nova classe para números assim. Eles então são os números **irracionais**. Todo número que **não pode ser representado como uma fração** é irracional. Ele é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$. Outros números como π também foram provados ser irracionais.

Os números irracionais, diferente dos que nós vimos até agora, não englobam os outros. Os inteiros não estão contidos nos irracionais, por exemplo. Então, no desenho que estamos fazendo, eles ficam assim:

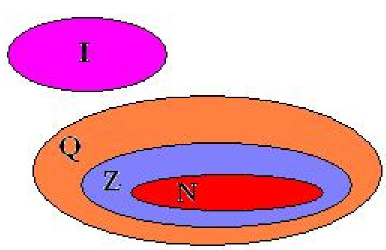

Figura 3: Números irracionais não contém os outros

1.5 Números Reais

Os números **reais**, representados por $\mathbb{R}$, não são nada em especial. Eles são apenas a **união dos racionais com os irracionais**. É como se você pegasse um saco, jogasse todos os números racionais, todos os irracionais lá dentro, e dissesse: "Tudo isso aqui são números reais."

Qualquer número, então, é um número real. Daí vem seu nome: real. Qualquer número que existe na realidade é real. Nosso diagrama, cada vez mais completo, fica assim, então:

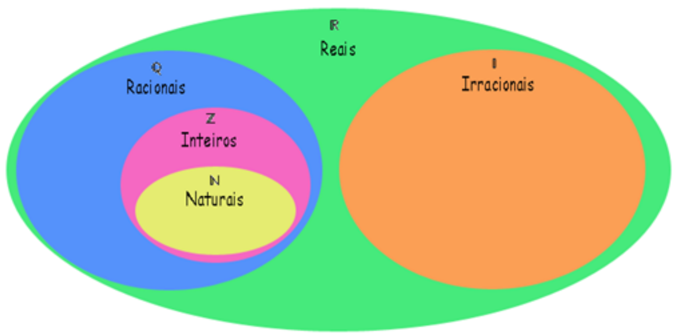

Figura 4: Qualquer número que existe na natureza é real

1.6 Números Complexos

Só para você saber, existem outros tipos de números que são chamados de complexos. A gente não vai falar sobre eles agora, mas saiba que eles existem.

2 Outros Conjuntos

2.1 Conjuntos personalizados

Além dos conjuntos que nós vimos, nós podemos criar conjuntos. Podemos, por exemplo, só querer saber dos números pares de 2 a 8. Podemos, então, criar um conjunto A:

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

E é dessa forma que se escreve.

2.2 Intervalos fechados

Na subseção acima, usamos um conjunto pequeno. E se quiséssemos representar um conjunto bem grande? Escreveríamos um a um? Claro que não. Podemos então representar os conjuntos como $[x, y]$. Isso se chama um **intervalo**. Os números $1, 2, 3 \ldots$ até 98, por exemplo, ficaria:

$$[1,\ 98]$$

Isso é um intervalo **fechado**, ou seja, os números nos extremos estão incluidos no intervalo.

2.3 Intervalos abertos

Os intervalos abertos são parecidos com os fechados, mas os números do extremo não são incluídos. Para eles, usa-se um parênteses normal. Por exemplo, se queremos representar os números de 1 a 96, sem contar o 1 e o 96, escrevemos:

$$(1,\ 96) = 2,\ 3,\ \ldots\ , 95$$

Você pode misturar as coisas. Um intervalo pode ser fechado de um lado e aberto do outro, tanto faz os lados. Por exemplo: os números de 1 a 96 sem contar só o 96 ficam $[1,\ 96)$.

3 Símbolos para Conjuntos

Na seção passada, falamos bastante sobre um conjunto **conter** o outro. Frases do tipo são o tempo todo usadas em matemática, então eles criaram símbolos que significam essas frases. Alguns símbolos são:

- $\subseteq$ – Está contido em. Exemplo:

  Os naturais **estão contidos** nos inteiros $\implies \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $\nsubseteq$ – **Não** está contido em. Exemplo:

  Os inteiros **não estão contidos** nos naturais $\implies \mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$

- $\supseteq$ – Contém. Exemplo:

  Os inteiros **contêm** os naturais $\implies \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$

- $\nsupseteq$ – **Não** contém. Exemplo:

  Os inteiros **não contêm** os reais $\implies \mathbb{Z} \nsupseteq \mathbb{R}$

- $\in$ – Pertence a. Exemplo:

  O número 3 **pertence a**os naturais $\implies 3 \in \mathbb{N}$

- $\notin$ – **Não** pertence a. Exemplo:

  O número π **não pertence a**os racionais $\implies \pi \in \mathbb{R}$

Note que os símbolos que lembram uma letra C (ex. $\subseteq$) são usados apenas em conjuntos. É como se falássemos de bolsas: uma bolsa está contida em outra. Não faz sentido escrever, por exemplo, $3 \subseteq \mathbb{R}$. Por que não? Porque o 3 é um **elemento**, e não um conjunto. Ele é um lápis, e não uma bolsa. Quando falamos sobre um elemento estar em um conjunto, usamos o $\in$.

4 Exercícios

1. Escreva a que conjunto pertence cada um dos números abaixo.

   (a) -3

   (b) 0

   (c) 23

   (d) 0.5

   (e) $\frac{3}{4}$

   (f) π

   (g) $-\frac{1}{3}$

2. Escreva os números que os intervalos a seguir contêm. Exemplo:

$$[1,3] = 1, 2, 3$$

   (a) $[4,8]$

   (b) $[-2,3]$

   (c) $[-3,-1]$

   (d) $(1,6)$

   (e) $(-1,6)$

   (f) $(1,7]$

   (g) $[0,4)$

3. Assinale as alternativas como verdadeiro ou falso.

   (a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

   (b) $3 \subseteq \mathbb{Z}$

   (c) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

   (d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

   (e) $\pi \notin \mathbb{R}$

5 Respostas aos Exercícios

1. (a) Inteiros ($\mathbb{Z}$)
   (b) Naturais ($\mathbb{N}$
   (c) Naturais ($\mathbb{N}$
   (d) Racionais ($\mathbb{Q}$
   (e) Racionais ($\mathbb{Q}$
   (f) Irracionais ($\mathbb{I}$
   (g) Racionais ($\mathbb{Q}$

2. $$[1,3] = 1,2,3$$
   (a) $\{4,5,6,7,8\}$
   (b) $\{-2,-1,0,1,2,3\}$
   (c) $\{-3,-2,-1\}$
   (d) $\{2,3,4,5\}$
   (e) $\{0,1,2,3,4,5\}$
   (f) $\{2,3,4,5,6,7\}$
   (g) $\{0,1,2,3\}$

3. (a) Verdadeiro.
   (b) Falso. (Não se compara elementos com conjuntos com esse operador)
   (c) Verdadeiro.
   (d) Verdadeiro.
   (e) Falso.