Matemática Elementar: Manipulações Algébricas

Erik Perillo

18 de janeiro de 2016

Resumo

Nesta etapa, nós vamos ver os macetes mais usados no dia a dia das manipulações algébricas, mais conhecidas como continhas.

Sumário

1 Introdução

Manipulações algébricas são importantíssimas para qualquer área da matemática que envolva contas. Muitas vezes, as contas que fazemos se encontram em um estado complicado, feio, difícil de se resolver. Com truques clássicos de manipulação, é possível simplificar e resolver um montão de contas que você vai encontrar por aí. Veja, por exemplo, a conta:

$$\frac{6x^2 + 36x + 48}{\frac{2}{1/3}}$$

Parece meio complicada, não? Entretanto, no fim desta etapa, você vai estar capaz de bater o olho em algo como isso e perceber que ela é equivalente a:

$$(x+3)^2 - 1$$

Muito mais simples, não? Por isso é tão importante estar fera nessa parte!

2 Operações e suas técnicas

Nesta seção vamos ver as técnicas associadas a cada tipo de operação, uma de cada vez.

2.1 Adição e subtração

- $a - (-b) = a + b$

  Exemplo:

  $$4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

- $b - a = -(a - b)$

  Apenas distribua o -1 $(-(a-b) = -1 * (a-b)!!)$ para ver:

  $$-1 * (a - b) = (-1 * (a)) - (-1 * (b)) = -a + b = b - a$$

Exemplos:

1.
$$-(5-4) = -(1) = -1$$
$$(4-5) = -1$$

2.
$$5-(4-5) = 5-(5-4) = 4$$

2.2 Multiplicação

- $a * (b + c) = a * b + a * c$ (distributiva)

  Exemplo:
  $$4 * (5 + 6) = 4 * (11) = 44$$
  $$4 * 5 + 4 * 6 = 20 + 24 = 44$$

- $a * b + a * c = a * (b + c)$ (distributiva!)

  Note que essa é só a distributiva sendo feita ao contrário. Exemplo:
  $$6 + 9 = 15$$
  $$6 + 9 = 3 * 2 + 3 * 3 = 3 * (2 + 3) = 3 * (5) = 15$$

- $(a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d$

  Exemplo:
  $$(2 + 3) * (4 + 5) = (5) * (9) = 45$$
  $$(2 + 3) * (4 + 5) = 2 * 4 + 2 * 5 + 3 * 4 + 3 * 5 = 8 + 10 + 12 + 15 = 45$$

  Isso traz uma propriedade importante:
  $$(a + b)^2 = a^2 + 2 * a * b + b^2$$

  Para ver isso, é só fazer $(a + b) * (a + b)$ e você vai ter o resultado. Saber isso de cabeça vai te poupar tempo, pois isso acontece bastante. Outra forma é:
  $$(a - b)^2 = a^2 - 2 * a * b + b^2$$

2.3 Divisão

Antes de entrar nesta seção, vamos relembrar um conceito importante: *frações*. O que são frações? **Uma fração é a representação de uma divisão**. Quando você divide 10 por 4, por exemplo, você pode representar o resultado (2.5) através de uma fração:

$$\frac{10}{4}$$

A parte de cima, chamamos de *numerador*. A parte de baixo, chamamos de *denominador*. Vamos agora ver as propriedades de frações.

- **Dividir por um número é igual a multiplicar pelo inverso**. Veja a fração $\frac{4}{2}$, por exemplo. O número resultante é exatamente igual ao produto de 4 com o inverso de 2, ou seja, $4 * (\frac{1}{2}) = 4 * (0.5) = 2$. Saber disso se torna mais útil em casos como:

  $$\frac{4}{\frac{1}{3}}$$

  Como resulver isso? Oras, sabendo que dividir é multiplicar pelo inverso, podemos ver que:

  $$\frac{4}{\frac{1}{3}} = 4 * 3 = 12$$

- **Soma de frações**:

  $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{(a+b)}{c}$$

  Exemplo:

  $$\frac{10}{2} + \frac{4}{2} = 5 + 2 = 7$$

  $$\frac{10}{2} + \frac{4}{2} = \frac{(10+4)}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

  Note que **o denominador tem que ser o mesmo entre as duas frações**. Não podemos, por exemplo, somar as partes de cima de $\frac{4}{3} + \frac{5}{8}$, pois os denominadores são diferentes (3 e 8). Mais pra frente vamos ver como contornar isso. Por ora, podemos ver o motivo. Lembra que dividir por um número é multiplicar pelo inverso dele? Pois bem, podemos então escrever a expressão anterior na forma:

  $$\frac{10}{2} + \frac{4}{2} = 10 * (\frac{1}{2}) + 4 * (\frac{1}{2}) =$$

$$(10+4)*(\frac{1}{2}) = \frac{(14)}{2} = 7$$

Ou seja: no fundo, estamos aplicando a distributiva! então não faz sentido quando o denominador é diferente, pois então não podemos distribuir.

- **Multiplicação de frações**:

$$(\frac{a}{b})*(\frac{c}{d}) = \frac{(a*c)}{(b*d)}$$

Ou seja, multiplicamos os de cima com os de cima e os de baixo com os de baixo. Exemplo:

$$\frac{4}{2}*\frac{9}{3} = 2*3 = 6$$

$$\frac{4}{2}*\frac{9}{3} = \frac{(4*9)}{(2*3)} = \frac{36}{6} = 6$$

- **Simplificações de frações**:

Observe a fração:

$$\frac{400}{300}$$

Será que temos mesmo que dividir 400 por 300? Não há uma forma de simplificar as coisas? Claro que há, amiguinho (a)! Sabemos que $400 = 4*100$ e $300 = 3*100$, então podemos escrever:

$$\frac{400}{300} = \frac{(4*100)}{(3*100)} = (\frac{4}{3})*(\frac{100}{100}) = \frac{4}{3}*1 = \frac{4}{3}$$

A gente aplicou a regra da multiplicação de frações pra separar as duas frações. Então fica a regra: **Quando o numerador e o denominador são múltiplos de um mesmo número, podemos dividir os dois por esse número**. No exemplo de cima, nós vimos que tanto 400 quanto 300 são **múltiplos de 100**. A gente, então, pode **simplificar** a fração, ou seja, sumir com o 100 dividindo o 400 e o 300 por 100.

Outros exemplos:

1. $\frac{8}{6} = \frac{2*4}{2*3} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{169}{26} = \frac{13*13}{13*2} = \frac{13}{2}$
3. $\frac{1000}{100} = \frac{100*10}{100*1} = \frac{10}{1} = 10$

- **Adição de frações com denominadores diferentes**:

Veja a expressão:

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{5}$$

Como adicionamos isso? Podemos reescrever a expressão como:

$$\frac{4}{3} * \frac{5}{5} + \frac{7}{5} * \frac{3}{3}$$

Veja que o número resultante não mudou em nada: a gente apenas multiplicou por 5/5 e por 3/3, ou seja, multiplicamos por 1. Então o resultado tem que ser a mesma coisa! mas olha agora o que dá pra fazer:

$$\frac{4}{3} * \frac{5}{5} + \frac{7}{5} * \frac{3}{3} = \frac{4 * 5}{3 * 5} + \frac{7 * 3}{5 * 3}$$

Opa! Agora os denominadores das duas frações são iguais! Agora sim podemos adicionar as duas:

$$\frac{4 * 5}{3 * 5} + \frac{7 * 3}{5 * 3} = \frac{4 * 5}{15} + \frac{7 * 3}{15} = \frac{(4 * 5 + 7 * 3)}{15} = \frac{41}{15}$$

Mágico, não? Como regra geral, a gente tem:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a * d + b * c)}{b * d}$$

2.4 Exponenciação

Primeiramente, vamos dar nomes aos bois. Quando vemos algo como:

$$4^5$$

Nós dizemos que o 4 é a *base* e o 5 é o *expoente*. Agora as propriedades:

- $a^0 = 1$

  Isso mesmo. **Para qualquer número** (tirando o zero), elevar ele a zero dá 1. Exemplos:

  1. $1^0 = 1$
  2. $1343434^0 = 1$
  3. $0.34398^0 = 1$
  4. $-10^0 = 1$

  E -1? Veja só:

- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Isso é verdade para qualquer número diferente de zero. Vale para qualquer número negativo além de -1:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Isso explica por que $a^0 = 1$! Veja só:

$$\frac{a^b}{a^b} = 1$$

$$\frac{a^b}{a^b} = a^b * (\frac{1}{a^b}) = a^b * a^{-b} = a^{(b-b)} = a^0$$

Que tem que dar 1.

- $(a * b)^c = a^c * b^c$

  Exemplo:

  $$(3 * 2)^2 = (6)^2 = 36$$
  $$(3 * 2)^2 = 3^2 * 2^2 = 9 * 4 = 36$$

  Note que isso não é verdade para a soma:

  $$(3 + 2)^2 = (5)^2 = 25$$

  O que é diferente de:

  $$3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

- $a^b * a^c = a^{(b+c)}$

  Exemplo:

  $$3^2 * 3^5 = (9) * (243) = 2187$$
  $$3^2 * 3^5 = 3^{(2+5)} = 3^{(7)} = 2187$$

  Note que **a base tem que ser a mesma**.

- $\frac{a^b}{a^c} = a^{(b-c)}$

Exemplos:

1.

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{(5-2)} = 3^3 = 27$$

2.

$$\frac{3^2}{3^5} = \frac{9}{243} = 0.037$$

$$\frac{3^2}{3^5} = 3^{(2-5)} = 3^{-3} = 0.037$$

Note que **a base tem que ser a mesma**. Note também que isso vem da regra de que $a^{-1} = \frac{1}{a}$:

$$\frac{a^b}{a^c} = a^b * (\frac{1}{a^c}) = a^b * a^{(-c)} = a^{(b-c)}$$

- $(a^b)^c = a^{(b*c)}$

  Exemplo:

$$(3^2)^3 = (9)^3 = 729$$

$$(3^2)^3 = 3^{(2*3)} = 3^6 = 729$$

2.5 Radiciação

Primeiro, vamos notar uma coisa:

$$\sqrt{4} = 4^{1/2} = 2$$

Essa é uma propriedade importantíssima da radiciação! Veja o caso geral:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{a}}$$

Ou seja, tirar a raiz n de um número é a mesma coisa que elevá-lo a $1/n$! Uau! Isso é especialmente importante porque, se olharmos desse jeito, vamos ver que as mesmas regras da exponenciação se aplicam à radiciação. Vamos listá-las:

- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

Exemplos:

1.

$$\sqrt{4*9} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{4*9} = \sqrt{4}*\sqrt{9} = 2*3 = 6$$

2.

$$\sqrt{5}*\sqrt{3} = \sqrt{5*3} = \sqrt{15}$$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exemplos:

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

- $\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = \sqrt[\frac{n*m}{n+m}]{a}$

Isso vem de:

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} * a^{\frac{1}{m}} =$$
$$a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m*n}}$$

Parabéns! Agora você já sabe todos os macetinhos básicos que vão te permitir fazer uma infinidade de contas.

3 Exercícios

1. Resolva as expressões a seguir:
   (a) $4 - (-3)$
   (b) $5 - (34 - (43 - 100))$
   (c) $4 * (-3 - 23)$
   (d) $(1 + 2) * (3 - 4)$
2. Escreva as expressões a seguir como uma soma/subtração de quadrados. Exemplo:

$$4 + 12 + 9 \implies 2^2 + 2*2*3 + 3^2 = (2+3)^2$$

(a) $25 + 40 + 16$

(b) $25 - 30 + 9$

(c) $16 + 32 + 16$

3. Simplifique as expressões a seguir. Deixe o resultado em forma de fração. Exemplo:
$$\frac{1}{3} + \frac{6}{3} = \frac{7}{3}$$

   (a) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$

   (b) $\frac{1}{293} + \frac{22}{293} - \frac{14}{293}$

   (c) $\frac{2}{3} * \frac{4}{5}$

   (d) $\frac{\frac{10}{5}}{\frac{3}{7}}$

   (e) $(\frac{(\frac{10}{5})}{(\frac{3}{5})}) * \frac{2}{4} - \frac{3}{12}$

   (f) $\frac{3}{5} + \frac{5}{6}$

   (g) $\frac{2}{3} - \frac{7}{6}$

4. Aplique a distributiva na expressão:
$$(a + b * c) * (c - d)$$

5. Simplifique as frações a seguir:

   (a) $\frac{a}{x} + \frac{b*c}{x}$

   (b) $\frac{a}{x*y} + \frac{c}{x*y}$

   (c) $\frac{\frac{a}{b}+c}{x} + \frac{d}{x}$

   (d) $\frac{a}{x} + \frac{a}{y}$

   (e) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

   (f) $\frac{a}{x} + \frac{1}{\frac{b}{y}}$

6. Resolva as expressões a seguir:

   (a) $4^2 * 4^2$

   (b) $3^{(2*3)}$

   (c) $3^2 * 2^2 + 3 * (2 + 3^3)$

   (d) $\sqrt{4} * \sqrt{16}$

(e) $\sqrt{4} * 3^2$

7. Assinale as afirmações a seguir como verdadeiro ou falso:

    (a) $\sqrt{(x+y)} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

    (b) $x^{(a+b)} = x^a * x^b$

    (c) $x^{(a+b)} = x^a + x^b$

    (d) $x^{(a+b)} * y^c = (x * y)^{(a+b+c)}$

    (e) $\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[a+b]{\frac{x}{y}}$

    (f) $\sqrt{x} * \sqrt{x^{-1}} = 1$

    (g) $x^a * \sqrt[b]{x} = x^{\frac{a*b+1}{b}}$

4 Respostas aos exercícios

1. (a) 7

    (b) -86

    (c) -104

    (d) -3

2. (a) $(5+4)^2$

    (b) $(5-3)^2$

    (c) $(4+4)^2$

3. (a) $\frac{8}{2}$

    (b) $\frac{9}{293}$

    (c) $\frac{8}{15}$

    (d) $\frac{10}{5} * \frac{7}{3} = \frac{70}{15}$

    (e) $\frac{10}{3} * \frac{2}{4} - \frac{3}{12} = \frac{20}{12} - \frac{3}{12} = \frac{17}{12}$

    (f) $\frac{3*6}{5*6} + \frac{5*5}{5*6} = \frac{3*6+5*5}{5*6} = \frac{43}{30}$

    (g) $\frac{2*6-7*3}{3*6}$

4. $a*d-a*e+b*c*d-b*c*e = a*(d-e)+b*c*(d-e) = (a+b*c)*(c-d)$