Matemática Elementar: Operações

Erik Perillo

10 de janeiro de 2016

Resumo

Nesta aula, vamos tratar das operações mais básicas que se pode fazer em problemas de matemática. Estar fera nessas coisas é muito importante pra que você possa prosseguir com segurança na construção do seu conhecimento em matemática até chegar em coisas que você verá na faculdade, como cálculo e geometria analítica.

Sumário

1 Introdução

O objetivo desta etapa é fazer com que você se lembre das regras mais básicas usadas nas continhas de matemática, como adição, multiplicação etc. Pela importância dessa parte para todo o resto, nós vamos começar desde o básico do básico (a ponto de parecer bobo), mas é melhor repetirmos o que já sabemos e ter certeza de que sabemos do que ficar na dúvida eterna. Vamos começar a rever as operações matemáticas.

O que, exatamente, são operações? A primeira coisa relacionada a matemática que toda criança (normal) aprende a fazer é a famosa conta de mais e menos, ou *adição* e *subtração*, representadas pelos símbolos $+$ e $-$. Logo depois, aprendemos a *multiplicação* e a *divisão*, representados por $*$ e $/$. Todas essas coisinhas, $+ - */$, são *operações*.

Uma operação é algo que se aplica a dois números para se obter um novo número. A adição, por exemplo, pega dois números e, com eles, forma outro número que é a soma deles. Por exemplo: $2 + 3$. Sabemos que o resultado é 5. Veja $2 * 4$. Sabemos que o resultado é 8. Já dá pra perceber como a soma e a multiplicação são mesmo operações. No caso da adição, **pegamos dois números** (2 e 3) e **obtivemos um novo número**, no caso, 5.

Toda operação tem um símbolo que a representa. No caso da adição, sabemos que é $+$.

Como sabemos o que fazer quando vemos o símbolo de $+$? Quer dizer: como sabemos que temos que somar os números? Sabemos disso porque sabemos como a adição funciona, ou seja, sabemos quais as regras da adição. **Toda operação tem regras de como ela deve funcionar**.

Nesta etapa, vamos aprender mais sobre os nomes formais das regrinhas/termos que usamos em todo tipo de operação matemática, e vamos ver as regras das operações que mais usamos no dia a dia: *adição, subtração, multiplicação, divisão, e exponenciação.*

2 Propriedades de Operações

Nesta seção, vamos ver quais as características que cada operação pode ter.

2.1 Precedência

Observe a conta a seguir:

$$34 + 2 * 5 \tag{1}$$

Qual o resultado dessa conta? Sabemos que é $34 + 10 = 44$. E a conta a seguir:

$$12 - 2 * (3 - 1) + 4 \tag{2}$$

Quanto vale? Deve ser fácil de ver que dá $12 - 2 * 2 + 4 = 12$. Agora volte e olhe para as duas contas. Como nós conseguimos resolvê-las? Como sabemos que, em $34 + 2 * 5$, nós temos que primeiro multiplicar o 2 pelo 5 e depois somar com o 34? Isso é porque sabemos que a multiplicação tem *precedência* maior que a adição, ou seja, **ela deve ser feita primeiro**. Na segunda conta, sabemos que temos que fazer a conta no parênteses primeiro, mesmo que dentro dele existe uma conta de subtração. Isso porque sabemos que **o parênteses tem a maior precedência de todas**. Não importa a conta, sabemos que temos que primeiro resolver o que está no parênteses e depois ir para o resto. E se tivermos algo como:

$$3 + 12 * (12 + 4 * (4 - 2))$$

O que fazemos? Tem um parênteses dentro do outro! Oras, cara pálida, é fácil: apenas aplique a mesma regra quando entrar no parênteses! Então, devemos olhar para $3+12*(12+4*(4-2))$ e perguntar: **qual operação tem maior precedência?** então vemos que é o que está dentro do parênteses, que é $12 + 4 * (4 - 2)$. Por que não fazer a mesma pergunta de novo? Se você perguntar novamente qual operação tem maior precedência, vai ver que é o parênteses de novo. Assim, vai conseguir fazer $4 - 2 = 2$, e vai ter $12 + 4 * 4 = 28$. Então, olhando passo a passo, você vai ter algo como:

$$3 + 12 * (12 + 4 * (4 - 2)) =$$

$$3 + 12 * (12 + 4 * (2)) =$$

$$3 + 12 * (20) =$$

$$3 + 240 = 243$$

Lindo, não? Agora você já sabe tudo sobre *precedência*!

2.2 Comutatividade

Vamos voltar para a expressão $34 + 2 * 5$ da seção anterior. Lembre-se que o valor que tivemos foi 44. E se, agora, fizermos uma coisa um pouco diferente, algo do tipo:

$$34 + 5 * 2$$

Caso você não tenha percebido o que mudou, o 5 trocou de lugar com o 2 na multiplicação. Que valor vamos ter agora? Fazendo as contas, temos $34 + 10 = 44$, que é o mesmo valor de antes! Isso sugere uma coisa: quando mudamos os números de ordem na multiplicação, **o resultado é o mesmo**. $2 * 5 = 5 * 2 = 10$. Quando uma operação tem essa propriedade, dizemos que a operação é *comutativa*.

Nem toda operação é comutativa! Veja a subtração, por exemplo. Pegue $5 - 2$. Sabemos que é 3. Pegue agora $2 - 5$. O resultado não é mais 3, mas sim -3! Isso mostra que $2 - 5$ não é igual a $5 - 2$ e, então, a subtração não é comutativa! E isso é tudo o que você tem que saber sobre essa propriedade.

2.3 Associatividade

Veja a expressão:

$$5 + 7 + 11$$

Fazendo a conta, temos $12 + 11 = 23$. Note que primeiro somamos 5 a 7 e só depois somamos o resultado, 12, com o 11. E se tivéssemos primeiro somado o 7 com o 11? Teríamos $5 + 18 = 23$. O resultado foi o mesmo, não importando a ordem com que fizemos as contas, ou seja:

$$5 + 7 + 11 =$$

$$(5 + 7) + 11 =$$

$$5 + (7 + 11) = 23$$

Notamos, então, que a adição é uma operação *associativa*, ou seja: **fazer a conta começando da esquerda pra direita ou da direita pra esquerda tanto faz**. Em qualquer operação que isso aconteça diz-se que ela é *associativa*.

2.4 Distributividade

Falar de distributividade só faz sentido se falarmos de duas operações. Não faz sentido, por exemplo, falar que a multiplicação tem distributividade. Faz sentido, entretanto, falar que a multiplicação tem distributividade com a adição. Viu a diferença? **Distributividade é uma relação entre duas operações**. O que raios é isso? Veja a expressão:

$$3 * (4 + 5)$$

Qual o resultado? Sabemos que é $3 * (9) = 27$. Agora veja a conta:

$$3 * 4 + 3 * 5$$

O que dá isso? Notamos que dá $12 + 15 = 27$. Hum, interessante: deu a mesma coisa que a conta anterior, mesmo que elas pareçam diferentes. Isso sempre vai ser verdade, porque a multiplicação é *distributiva* com relação à adição, ou seja, Você pode multiplicar os números dentro do parênteses e depois adicioná-los um a um. Veja que não precisam ser só dois números dentro do parênteses, podem ser quantos você quiser:

$$2 * (3 + 4 + 5 + 6) =$$

$$(2 * 3) + (2 * 4) + (2 * 5) + (2 * 6) =$$
$$6 + 8 + 10 + 12 = 36$$

Se tivéssemos somado tudo primeiro, teríamos $2 * (18)$, que também é igual a 36. Então vemos que a multiplicação é distributiva com relação à adição porque **podemos distribuir o 2 para dentro do parênteses, multiplicando todo número por 2, e depois somar todos os resultados das multiplicações**.

Note que o contrário não precisa ser verdade! A adição, por exemplo, não é distributiva com relação à multiplicação. Veja a expressão:

$$2 + (4 * 5)$$

O resultado é $2 + 20 = 22$. Se distribuíssemos o 2, entretanto, teríamos:

$$(2 + 4) * (2 + 5)$$

O que dá $6 * 7 = 42$, que obviamente não é igual a 22.

Parabéns! Agora que você já sabe o que é distributividade, você já conhece todas as propriedades de operações!

3 Operações comuns

Nesta seção, vamos analisar as operações matemáticas mais famosas: *adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação e radiciação.*

3.1 Adição

A adição é a operação mais simples que se pode imaginar. Seu símbolo é $+$. Todos sabemos o que fazer quando temos dois números como entrada para a operação de adição: devemos somá-los.

A adição é:

- Comutativa. Exemplo:
$$4 + 5 = 9$$
$$5 + 4 = 9$$
- Associativa. Exemplo:
$$3 + 2 + 4 = 9$$
$$(3 + 2) + 4 = (5) + 4 = 9$$
$$3 + (2 + 4) = 3 + (6) = 9$$

3.2 Subtração

A subtração é o oposto da adição. Seu símbolo é $-$.

A subtração **não** é comutativa. Exemplo:

$$4 - 5 = -1$$

$$5 - 4 = 1$$

Ela também **não** é associativa. Veja:

$$(3 - 2) - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$3 - (2 - 4) = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

3.3 Multiplicação

Seu símbolo é $*$. A multiplicação pode ser vista como uma adição repetida. Isso mesmo! Ela só diz quantas vezes você deve repetir uma soma. Veja, por exemplo:

$$4 + 4 + 4$$

O resultado é 12. Vemos que o 4 é somado três vezes. Se fizermos:

$$3 * 4$$

O resultado também é 12, o que mostra que a multiplicação é só a adição repetida!

Multiplicação tem precedência maior sobre adição/subtração. Então:

$$2 + 3 * 4 - 5 = 2 + (3 * 4) - 5 = 2 + (12) - 5 = 9$$

As multiplicação é:

- Comutativa. Exemplo:

$$4 * 5 = 20$$
$$5 * 4 = 20$$

- Associatividade. Exemplo:

$$3 * 2 * 4 = 24$$
$$(3 * 2) * 4 = (6) * 4 = 24$$
$$3 * (2 * 4) = 3 * (8) = 24$$

- Distributiva com relação à adição. Exemplo:

$$2 * (3 + 4) = 2 * (7) = 14$$
$$(2 * 3) + (2 * 4) = (6) + (8) = 14$$

- Distributiva com relação à subtração. Exemplo:

$$2 * (3 - 4) = 2 * (-1) = -2$$
$$(2 * 3) - (2 * 4) = (6) - (8) = -2$$

3.4 Divisão

Seu símbolo é /. Assim como a subtração é o oposto da adição, a divisão é o oposto da multiplicação.

Divisão tem precedência maior sobre adição/subtração. Então:

$$2 + 4/2 - 5 = 2 + (4/2) - 5 = 2 + (2) - 5 = -1$$

A divisão é:

- Distributiva com relação à adição. Exemplo:

$$(3 + 5)/2 = (8)/2 = 4$$

$$(3/2) + (5/2) = 1.5 + 2.5 = 4$$

- Distributiva com relação à subtração. Exemplo:

$$(3 - 5)/2 = (-2)/2 = -1$$

$$(3/2) - (5/2) = 1.5 - 2.5 = -1$$

A divisão **não** é comutativa. Exemplo:

$$4/5 = 0.8$$

$$5/4 = 1.25$$

Ela também **não** é associativa. Veja:

$$(3/2)/4 = (1.5)/4 = 0.375$$

$$3/(2/4) = 3/(0.5) = 6$$

3.5 Exponenciação

Assim como a multiplicação é a adição repetida, a exponenciação é a multiplicação repetida. Dá uma olhada:

$$4 * 4 * 4$$

Isso dá 64. A multiplicação do 4 por ele mesmo foi feita três vezes. Agora olhe:

$$4^3$$

Isso também dá 64, o que mostra que exponenciação é só a multiplicação repetida!

Exponenciação tem precedência maior sobre multiplicação/divisão. Então:

$$2 * 4^2 - 5 = 2 * (4^2) - 5 = 2 * (16) - 5 = 36 - 5 = 31$$

A exponenciação é:

- Distributiva com relação à multiplicação. Exemplo:

$$(3 * 2)^2 = (6)^2 = 36$$

$$(3^2) * (2^2) = (9) * (4) = 36$$

- Distributiva com relação à divisão. Exemplo:

$$(4/2)^2 = (2)^2 = 4$$

$$(4^2)/(2^2) = (16)/(4) = 4$$

Note que o contrário não é verdade, ou seja, nem a multiplicação nem a divisão são distributivas com relação à exponenciação! Veja:

$$4^{(2*3)} = 4^6 = 4096$$

$$(4^2) * (4^3) = 1024$$

As exponenciação **não** é comutativa. Exemplo:

$$2^3 = 8$$

$$3^2 = 9$$

Ela também **não** é associativa. Exemplo:

$$(2^3)^4 = 8^4 = 4096$$

$2^{(3^4)} = 2^{81}$ é um número tão grande que nem vale a pena colocar aqui!

3.6 Radiciação

A radiciação é a operação inversa da exponenciação. Primeiro, veja como é uma radiciação do número 4:

$$\sqrt{4}$$

Quanto dá isso? Bom, do jeito que está acima, nós estamos olhando para a *raiz quadrada* de 4. Tirar a raiz quadrada de um número quer dizer: **Que número multiplicado por ele mesmo dá esse número na raiz?**. Veja o exemplo do 4: Que número multiplicado por ele mesmo dá 4? Ora, é o 2, veja: $2 * 2 = 4$. Assim, $\sqrt{4} = 2$. Mas e se eu quiser saber, por exemplo, qual número multiplicado por ele **três** vezes dá 8? Isso é diferente da raiz quadrada que vimos acima. Queremos saber qual é o número x tal que $x * x * x = 8$. Representamos esse número por $\sqrt[3]{8}$. Viu que apereceu um número 3 ali em cima? Pois é. Na raiz quadrada, esse número é 2, mas a gente esconde o número 2 quando é uma raiz quadrada. Entretando, $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$, é a mesma coisa.

Radiciação tem precedência maior sobre multiplicação/divisão. Então:

$$2 * \sqrt{4} - 5 = 2 * (\sqrt{4}) - 5 = 2 * (2) - 5 = 4 - 5 = -1$$

As radiciação **não** é comutativa. Exemplo:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[8]{3} = 1.147$$

A exponenciação é:

- Distributiva com relação à multiplicação. Exemplo:

$$\sqrt[2]{(4 * 4)} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$\sqrt[2]{(4)} * \sqrt[2]{(4)} = 2 * 2 = 4$$

- Distributiva com relação à divisão. Exemplo:

$$\sqrt[2]{(16/4)} = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$\sqrt[2]{(16)}/\sqrt[2]{(4)} = 4/2 = 4$$

4 Exercícios

4.1 Seção 2

1. Ordene as precedências do parênteses, exponenciação, multiplicação e adição, da menor pra maior.

2. Dê um exemplo de uma operação que é comutativa e uma que não é. Mostre com números um exemplo para cada uma das duas.

3. Dê um exemplo de uma operação que é associativa e uma que não é. Mostre com números um exemplo para cada uma das duas.

4. Faz sentido dizer que a multiplicação é distributiva? Por quê?

4.2 Seção 3

1. Resolva as expressões:

   (a) $3 + 4 * 5$

   (b) $(3 + 4) * 5$

   (c) $5 * (3 + 4)$

   (d) $11 - (3 + 4) + 5 * (3 - (3 - 5)) * 2$

2. Resolva as expressões (use uma calculadora para facilitar):

   (a) $3 * 4^3$

   (b) $(3 - 4)^3$

   (c) $(3 * 4)^3$

   (d) $1 - (3^4) + 5 * 4^2 * 3^3$

3. Suponha que uma pessoa não sabe qual a ordem de precedência das operações. Ela só sabe que o parênteses tem que ser feito primeiro. Ajude essa pessoa colocando os parênteses nos lugares certos para que ela faça a operação corretamente. Por exemplo:

   $$4 + 3 * 2 - 2 * 4^2$$

   Tem que virar:

   $$(4 + (3 * 2)) - (2 * (4^2))$$

Sua vez! Complete com parênteses a seguinte expressão:

$$3 * 2 + 2 * 3^4 * 5$$

5 Respostas aos exercícios

5.1 Seção 2

1. Adição, multiplicação, exponenciação, parênteses.

2.
   - Comutativa: adição. Exemplo:

     $$3 + 4 = 7$$

     $$4 + 3 = 7$$

   - Não comutativa: divisão. Exemplo:

     $$4/2 = 2$$

     $$2/4 = 0.5$$

3.
   - Associativa: multiplicação: Exemplo:

     $$(2 * 3) * 4 = 6 * 4 = 24$$

     $$2 * (3 * 4) = 2 * 12 = 24$$

   - Não associativa: subtração: Exemplo:

     $$(1 - 2) - 3 = (-1) - 3 = -4$$

     $$1 - (2 - 3) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

4. Não, pois distributividade só tem sentido quando se diz respeito a duas operações.

5.2 Seção 3

1. (a) $3 + 4 * 5 = 3 + 20 = 23$
   (b) $(3 + 4) * 5 = (7) * 5 = 35$
   (c) $5 * (3 + 4) = 5 * (7) = 35$
   (d) $11 - (3+4) + 5 * (3 - (3 - 5)) * 2 = 11 - (7) + 5 * (3 - (-2)) * 2 = 11 - 7 + 5 * (5) * 2 = 4 + 25 * 2 = 54$

2. (a) $3 * 4^3 = 3 * (64) = 192$
   (b) $(3-4)^3 = (-1)^3 = -1$
   (c) $(3 * 4)^3 = (12)^3 = 1728$
   (d) $1-(3^4)+5*4^2*\sqrt[3]{3} = 1-(81)+5*(16)*(1.442) = 1-81+115.36 = 35.36$

3. $3 * 2 + 2 * 3^4 * 5$ vira:

$$(3 * 2) + ((2 * (3^4)) * 5)$$