Matemática Elementar: Equações

Erik Perillo

Resumo

Nesta etapa, falaremos sobre uma das coisas mais importantes na matemática.

Sumário

1 Introdução

Nesta seção nós vamos aprender o que podemos e o que não podemos fazer com equações matemáticas.

O que são equações? Ora, uma equação nada mais é que uma expressão de *igualdade*. Assim, quando eu digo que $a = b$, eu estou dizendo que a e b são *idênticos*, eles equivalem um ao outro, **não importa o que é a e o que é b**. O que é mais comum de se ver em equações são *incógnitas* que temos que descobrir o valor. Por exemplo, em:

$$3x + 34 = 89$$

A incógnita é o x, ou seja, é o valor que queremos descobrir qual é.

2 Técnicas de solução de equações

Nesta seção, vamos ver modos comuns de solucionar uma equação.

2.1 Adicionando e subtraindo dos dois lados

Quando temos uma equação do tipo:

$$x + 3 = 4$$

O que podemos fazer para resolvê-la? Ora, é só passar o 3 para o outro lado, não? Ele fica negativo e obtemos $x = 4 - 3 = 1$. Por que podemos passar o 3 para o outro lado? Isso porque, no fundo, estamos tirando o 3 dos dois lados.

Por que podemos fazer isso? Pense da seguinte maneira: a gente não viu que os dois lados da equação são exatamente iguais? Ou seja: $a = b$. Se um lado é exatamente igual ao outro, eles são **a mesma coisa**. Então, se eu adicionar/multiplicar/subtrair/dividir ou qualquer outra coisa em um lado e fizer o mesmo do outro, **eles vão continuar sendo a mesma coisa**.

Olhando a equação com outros olhos agora, temos:

$$x + 3 = 4$$

$$x + 3 - 3 = 4 - 3$$

$$x = 1$$

Note que temos que ter sagacidade. Eu não tirei justo o número 3 à toa, mas sim porque eu sabia que era o que me possibilitaria de ter o resultado. Outro exemplo:

$$-7 + x = -10$$

$$-7 + x + 7 = -10 + 7$$

$$x = 7 - 10 = -3$$

2.2 Multiplicando e dividindo dos dois lados

Como foi dito na seção anterior, *qualquer* coisa que façamos na equação, contanto que seja dos dois lados, mantém a veracidade dela intacta. Vamos agora ver o exemplo:

$$3x = 9$$

Pensando em passar o 3 para o outro lado dividindo, obtemos $x = 3$. O que fizemos, na verdade, foi a divisão certa:

$$3x = 9$$

$$\frac{(3x)}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Podemos fazer também multiplicações sábias:

$$\frac{x}{4} = -2$$

$$\left(\frac{x}{4}\right) * 4 = (-2) * 4$$

$$x = -8$$

Podemos também inverter o sinal das coisas. Na equação:

$$-x = -4$$

Podemos multiplicar os dois lados por -1 para obter:

$$-x * (-1) = -4 * (-1)$$

$$x = 4$$

Temos que ter um pouco de cuidado! Pode-se dividir os dois lados por zero? Não, isso é proibido. Se pudéssemos fazer isso, chegaríamos a resultados bem absurdos como, por exemplo, que $2 = 1$.

2.3 Exponenciando dos dois lados

Continuando com as operações, podemos agora elevar os dois lados a uma mesma potência pra conseguir o nosso resultado. Por exemplo:

$$\sqrt{x} = 12$$

Elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{x})^2 = 12^2$$

$$x = 144$$

Podemos também tirar a raiz (o que é só elevar a $1/2$) dos dois lados:

$$x^2 = 16$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Por que colocamos $\pm$ no 4 acima? Bom, tanto o 4 quanto o -4, quando elevados ao quadrado, podem dar 16. Temos, então, que colocar o $\pm$ pois qualquer um dos dois satisfaz a equação.

Temos, porém, que ter **cuidado**! Quando um dos lados é negativo, a gente não pode fazer tirar raiz. Se fosse, por exemplo, $x^2 = -5$, não poderíamos tirar a raiz dos dois lados. Mais pra frente vamos ver que, fazendo certas coisas, vamos poder tirar a raiz, mas por enquanto assuma que é proibido.

2.4 Misturando várias coisas

No dia a dia você não vai encontrar uma equação que só precisa de uma operação pra ser solucionada como a que vimos até agora. É comum vermos coisa do tipo:

$$3x - 24 = 45$$

O que fazemos, então? O jeito é irmos fazendo operações, **sempre nos dois lados**, até conseguirmos *isolar* o x. É sempre melhor começar com adições/subtrações e isolar o x de um lado:

$$3x - 24 = 45$$

$$3x - 24 + 24 = 45 + 24$$

$$3x = 69$$

Agora que temos só x de um lado, podemos nos perguntar o que precisamos fazer para que o 3 suma. A resposta é dividir, claro!

$$\frac{3x}{3} = \frac{69}{3}$$

$$3 = 23$$

Se tivéssemos uma exponenciação ou raiz, é bom sempre primeiro subtrair e multiplicar pra depois exponenciar:

$$4\sqrt{x} - 13 = 3$$

$$4\sqrt{x} - 13 + 13 = 3 + 13$$

$$4\sqrt{x} = 16$$

$$\frac{4\sqrt{x}}{4} = \frac{16}{4}$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 4^2$$

$$x = 16$$

3 Exercícios

1. Resolva as equações a seguir para a incógnita:

   (a) $4x = 16$

   (b) $x - 34 = 18$

   (c) $\frac{x}{2} = 4$

   (d) $x + 3 = 5$

   (e) $3 + 4x = 12$

   (f) $2x - 9 - 4x = -7$

   (g) $3 + 2x = 3x + 8$

   (h) $-x = -9 + 3$

   (i) $3 + 3x + 10 - \frac{x}{2} = 34$

   (j) $3x + 9 = 0$

   (k) $34 + \frac{x}{3} = 4$

   (l) $4 + \frac{1}{x} = 5 - \frac{3}{x}$

   (m) $23 - 4y = 43$

   (n) $4 - \sqrt{x} = 0$

   (o) $3 + x^2 = 12$

4 Respostas aos Exercícios

1. (a) $x = 4$
   (b) $x = 52$
   (c) $x = 8$
   (d) $x = 2$
   (e) $x = \frac{9}{4}$
   (f) $x(2-4) = -7+9 \implies -2x = 2 \implies x = -1$
   (g) Tire o $2x$ dos dois lados. $3+2x-2x = 3x+8-2x \implies x+8 = 3 \implies x = -5$
   (h) $x = 6$
   (i) $\frac{6x-x}{2} = 21 \implies x = \frac{42}{5}$
   (j) $x = -3$
   (k) $x = -90$
   (l) $\frac{4}{x} = 1 \implies x = 4$
   (m) $y = -5$
   (n) $x = 16$
   (o) $x = \pm 3$