Matemática Elementar: Introdução a Funções

Erik Perillo

Resumo

Nesta etapa, vamos falar de um dos conceitos mais importantes para o cálculo.

Sumário

1 Introdução

No dia a dia, precisamos o tempo todo relacionar um certo número com outro. Por exemplo: se queremos saber o quanto vamos gastar para comprar um certo número de salgadinhos de 2 reais cada, podemos pensar que o preço que vamos pagar é duas vezes o número de salgadinhos! Se chamarmos o número de salgadinhos de n e o preço de p, podemos escrever matematicamente:

$$p = 2 * n$$

Ou até mesmo:

$$p(n) = 2 * n$$

Ou seja, p é um número que depende de n. Assim, escrevemos $p(n)$.

No exemplo acima, notamos que p é um valor que depende de n. Não se pode determinar p sem saber n primeiro. Assim, dizemos que p é uma variável **dependente** e que n é uma variável **independente**. Uma relação como essas é o que chamamos de *função*.

Pensando que o número dependente da função só é sabido quando temos o termo independente, podemos pensar em uma pequena máquina, onde na entrada colocamos nossa variável independente e na saída colocamos o resultado da função. A máquina, então, seria a função nessa analogia.

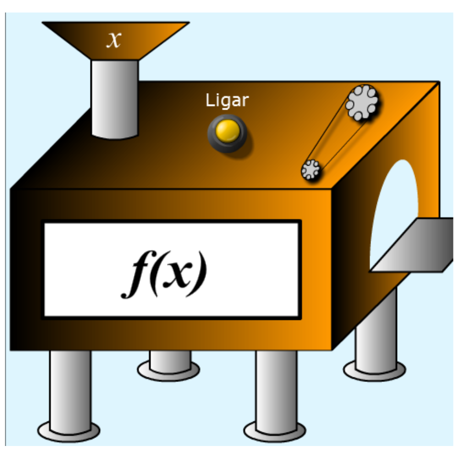


Figura 1: Uma função como uma máquina

2 Um exemplo de função

Suponha que o dono de uma lojinha de $1,99$ quer calcular quanto ele vai lucrar com a venda de bichinhos de pelúcia. Ele comprou 15 bichinhos, a $3,50$ cada um, e pretende vendê-los a 6 reais cada um. Como podemos calcular isso?

Bom, primeiro vamos deixar claro que lucro é quanto você ganha na venda de alguma coisa tirando quanto você gastou nela. Assim, se eu comprar uma bala por um real e vendê-la a $1,50$, eu tive cinquenta centavos $(1,50-1)$ de lucro. No caso do nosso vendedor, ele já gastou dinheiro com seus 15 ursinhos. O total investido foi $15 * 3,50 = 52,50$.

O que falta agora? Precisamos de um jeito de calcular quanto dinheiro ele vai ganhar com a venda dos ursinhos a 6 reais cada um. Mas perceba: isso *depende* de quantos ursinhos ele vai vender! Notamos então que podemos pensar que **o lucro do vendedor é uma função de quantos ursinhos ele vende**! Quanto ele ganha em valor bruto de acordo com o número de ursinhos? Fácil. Chamando o número de ursinhos vendidos de x, percebemos que quanto ele ganha em bruto é $6x$ (já que o preço de cada ursinho é 6 reais). Isso é só o bruto. Lembrando o que o lucro é, precisamos tirar desse valor o dinheiro que ele investiu (52.5 reais). Juntando tudo e chamando o lucro de y, temos:

$$y(x) = 6x - 52.5$$

2.1 Ilustrando uma função

Vamos continuar no caso da lojinha acima e pensar em alguns casos de lucro. Vamos pensar no caso em que ele vende 0, 5, 10, e 15 ursinhos e ver o lucro em cada um desses casos:

número de ursos vendidos	lucro
0	-52.5
5	-22.5
10	7.5
15	37.5

Quando o lucro é negativo, quer dizer que ele perdeu dinheiro. Como podemos ilustrar isso como um gráfico no *plano cartesiano*?

2.1.1 Plano cartesiano

Vamos parar nosso exemplo por um minuto para falar sobre o que é um plano cartesiano. Um plano cartesiano nada mais é que um espaço onde você pode desenhar suas funções para ter uma ideia de como elas se comportam:

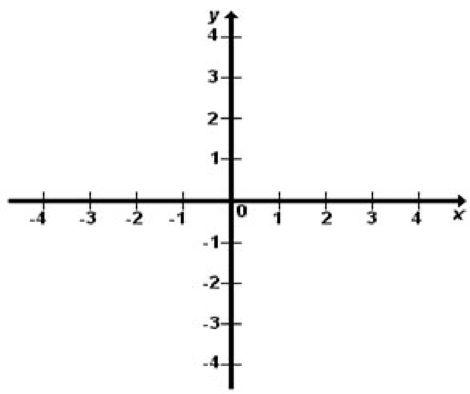


Figura 2: Um plano cartesiano

Vamos notar algumas coisas: Olha pro eixo horizontal. Não tem um x desenhado lá? É nesse eixo que, geralmente, representamos a variável independente do nosso gráfico. O chamamos de eixo da *abcissa*. No eixo vertical, com um y desenhado, representamos os valores da função de acordo com os valores de entrada em x.

Voltando ao nosso exemplo, vamos desenhar os valores da tabela em um plano cartesiano:

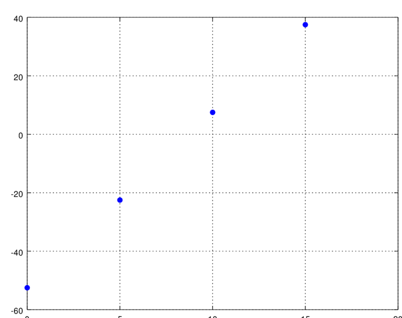


Figura 3: Pontos da função lucro

Note que no eixo x, colocamos o valor de ursinhos vendidos (variável independente) e, a cada um desses valor, há o valor de lucro correspondente no eixo y.

Podemos notar que há uma linha que liga os pontos. Se plotarmos toda a linha, teremos o seguinte:

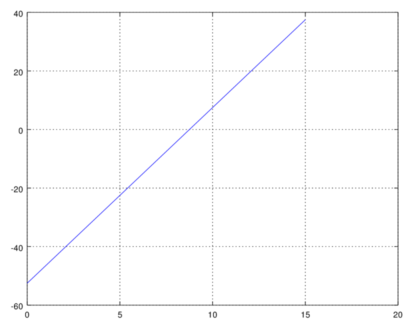


Figura 4: Linha da função lucro

Notamos que essa é uma função *linear*. E pronto, agora já temos uma ideia melhor do que é uma função!

3 Características de uma função

Vamos entender nesta seção algumas coisas que cada função tem.

3.1 O que é preciso para se ter uma função?

Há apenas uma regra para funções: **Uma função deve ter uma, e apenas uma saída para cada entrada.** Isso quer dizer que não podemos ter uma função *f(x)* tal que, por exemplo, $f(2) = 5$ e $f(2) = 7$. Para o valor 2, só pode ter apenas um valor correspondente, ou 5 ou 7, mas nunca os dois. Note que isso não impede de haver o mesmo valor de saída para duas entradas diferentes: $f(3) = 4$ e $f(5) = 4$ é permitido, por exemplo.

3.2 Domínio e Contradomínio

Uma função precisa ter bem definido qual o *tipo de entrada* e o *tipo de saída* que ela vai ter, isto é: a qual *conjunto* pertencem os valores aceitáveis de entrada e a qual *conjunto* pertencem os valores aceitáveis de saída. Ao conjunto dos valores de entrada, damos o nome de **domínio**, e aos de saída, **contradomínio**.

No exemplo do vendedor, notamos que os valores de entrada só podem ser *naturais*. Não faz sentido vender meio ursinho ou ainda -1 ursinho. Na saída, temos números quebrados, então podemos falar que o lucro pertence aos *reais*. Assim, seu domínio é $\mathbb{N}$ e seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Podemos então descrever a função de lucro $f(x)$ como:

$$f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

3.3 Raízes de uma função

No exemplo do vendedor de ursinhos, seria interessante saber qual o número mínimo de ursinhos que deve-se vender para não sair no prejuízo, né? Como poderíamos fazer isso?

Vamos notar primeiramente que, para se ter algum lucro, eu não posso ter prejuízo nenhum. Para não se ter prejuízo, o valor da minha função lucro deve ser maior ou igual a zero, caso contrário vamos estar perdendo dinheiro. Assim, queremos que $f(x) \geq 0$. Sabendo que o lucro sobe conforme o número de ursinhos sobe, precisamos apenas saber qual o valor de ursinhos que $f(x)$ se iguala a zero e então tentar vender um número maior ou igual a esse! Achar o(s) valor(es) de x da função para o(s) qual(is) ela se iguala a zero é o ato de achar as **raízes** da função. Vamos então desenvolver!

$$f(x) \geq 0$$

Procurando a raiz:

$$6x - 52.5 = 0$$
$$x = \frac{52.5}{6}$$
$$x = 8.75$$

Como sabemos que x só pode ser inteiro, então devemos arredondar pra cima. Assim, o número mínimo de ursinhos que devo vender é 9!

4 Exercícios

1. Um vendedor de biscoitos gastou 30 reais para fazer 40 biscoitos os quais ele vai vender a 2 reais cada um.
   (a) Escreva a função lucro, $f(x)$, em função do número de biscoitos que ele vendeu.
   (b) Desenhe o gráfico da função lucro no plano cartesiano. Faça um desenho com os pontos 3, 10 e 20 e ligue os pontos para formar uma reta.
   (c) Escreva o domínio e o contradomínio da função.
   (d) Qual o número mínimo de biscoitos que deve-se vender para se obter algum lucro?

2. Um engenheiro calculou que o preço da conta de energia para se manter uma luz acesa por x segundos é dado pela função:
   $$f(x) = 3.2x$$
   (a) Desenhe o gráfico da função preço no plano cartesiano.
   (b) Escreva o domínio e o contradomínio da função.
   (c) Por quantos segundos eu preciso manter a luz acesa para pagar 50 reais?

3. Indique se as funções a seguir podem ser uma função ou não:
   (a) $f(3) = 7$ e $f(5) = 9$
   (b) $f(5) = 7$ e $f(5) = 8$
   (c) $f(2) = 7$ e $f(5) = 7$

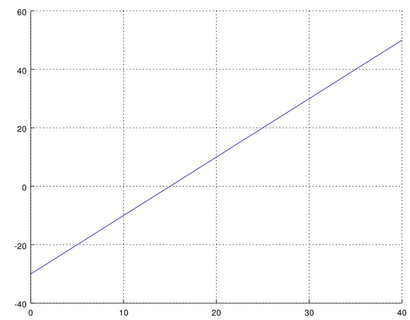
4. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:
   (a) a função $f(x) = 3.8x$ tem um contradomínio em $\mathbb{Z}$
   (b) a função de lucro com relação a venda de bonecas $f(x) = 3 * x - 4$ tem domínio em $\mathbb{N}$
   (c) a função $f(x) = 4x + 3$ é maior que zero quando x é maior que $-\frac{3}{4}$

5. Ache as raízes das funções:
   (a) $f(x) = 3x$
   (b) $f(x) = 83 - 3.2x$
   (c) $f(x) = 31.2 + \frac{1}{x}$

5 Respostas aos exercícios

1. (a) $f(x) = 2x - 30$

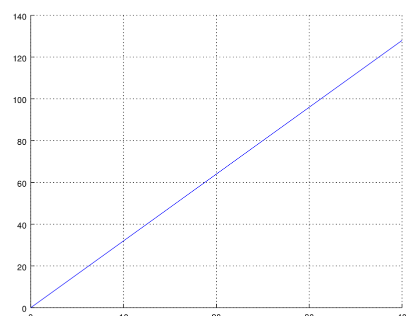
   (b) –



   (c) Domínio: $\mathbb{N}$, contradomínio: $\mathbb{Z}$

   (d) $f(x) \geq 0 \implies 2x - 30 \geq 0 \implies x \geq 15$

2. (a) –



   (b) Domínio: $\mathbb{R}$, contradomínio: $\mathbb{R}$

   (c) $f(x) = 50 \implies 3.2x = 50 \implies x = \frac{50}{3.2} = 16.625$

3. (a) Sim.

   (b) Não pois há dois valores de saída para a mesma entrada.

   (c) Sim.

4. (a) Falso.

(b) Verdadeiro.

(c) Verdadeiro.

5. (a) $x = 0$

   (b) $x = 25.938$

   (c) $x = -\frac{1}{31.2} = -0.032$