教材习题解答

第一章 常用逻辑用语

§1 命题

【练习(第5页)】

1. (1)逆命题:"若 $x=0$,则 $xy=0(x,y\in\mathbf{R})$";
否命题:"若 $xy\neq0$,则 $x\neq0(x,y\in\mathbf{R})$";
逆否命题:"若 $x\neq0$,则 $xy\neq0(x,y\in\mathbf{R})$"。
逆命题、否命题是真命题,逆否命题是假命题。
(2)逆命题:"若 $a^2=ab$,则 $a=b$";
否命题:"若 $a\neq b$,则 $a^2\neq ab$";
逆否命题:"若 $a^2\neq ab$,则 $a\neq b$"。
逆命题、否命题是假命题,逆否命题是真命题。
(3)逆命题:"若方程 $x^2+x-q=0$ 有实数解,则 $q\geqslant-\frac{1}{4}$";
否命题:"若 $q<-\frac{1}{4}$,则方程 $x^2+x-q=0$ 没有实数解";
逆否命题:"若方程 $x^2+x-q=0$ 没有实数解,则$q<-\frac{1}{4}$"。
逆命题、否命题是真命题,逆否命题也是真命题。
(4)逆命题:"若一个数的平方是正数,则这个数是负数";
否命题:"若一个数不是负数,则这个数的平方不是正数";
逆否命题:"若一个数的平方不是正数,则这个数不是负数"。
逆命题、否命题是假命题,逆否命题是真命题。
(5)逆命题:"若一个四边形的四条边相等,则这个四边形是正方形";
否命题:"若一个四边形不是正方形,则这个四边形的四条边不相等";
逆否命题:"若一个四边形的四条边不相等,则这个四边形不是正方形"。
逆命题、否命题是假命题,逆否命题是真命题。
2. 逆命题:"若 $a+c<b+c$,则 $a<b$";
否命题:"若 $a\geqslant b$,则 $a+c\geqslant b+c$";
逆否命题:"若 $a+c\geqslant b+c$,则 $a\geqslant b$"。
原命题、逆命题、否命题、逆否命题都是真命题。

【习题1-1(第5页)】

1. (1)逆命题:"若 a 是无理数,则 $a-2$ 是无理数";
否命题:"若 $a-2$ 不是无理数,则 a 不是无理数";
逆否命题:"若 a 不是无理数,则 $a-2$ 不是无理数"。
逆命题、否命题、逆否命题都是真命题。
(2)逆命题:"若一个四边形的两条对角线相等,则这个四边形是矩形";
否命题:"若一个四边形不是矩形,则这个四边形的两条对角线不相等";
逆否命题:"若一个四边形的两条对角线不相等,则这个四边形不是矩形"。
逆命题、否命题是假命题,逆否命题是真命题。
2. (1)真命题。(2)假命题。
3. 逆命题:"若 $a\neq b$,则 $a>b$",假命题。
4. 否命题:"若一个四边形不是正方形,则这个四边形不是平行四边形";
逆否命题:"若一个四边形不是平行四边形,则这个四边形不是正方形"。
否命题是假命题,逆否命题是真命题。

§2 充分条件与必要条件

【练习(第8页)】

1. (1)充分不必要 (2)必要不充分 (3)充要 (4)充分不必要
(5)必要不充分
2. 略。

【练习(第9页)】

(1)必要不充分 (2)充要 (3)充要 (4)充要 (5)充分不必要

【习题1-2(第10页)】

1. (1)充分不必要 (2)充分不必要 (3)既不充分也不必要 (4)充要 (5)充要 (6)必要不充分 (7)充分不必要
(8)必要不充分 (9)充分不必要 (10)必要不充分
2. (1)正确 (2)正确 (3)正确
3. (1)$a<-1$(答案不唯一) (2)$\exists$平面 γ,使 $\gamma\perp\alpha,\gamma\perp\beta$ (3)$b\geqslant0$
4. 略。

§3 全称量词与存在量词

【练习(第12页)】

(1)是全称命题。意思为:"方程 $x^2+x-1=0$ 的每一个解都是实数解。"
(2)是全称命题。含有全称量词"每一个"。
(3)是特称命题。含有存在量词"有一个"。
(4)是全称命题。省略了全称量词"所有的",意思为:"所有的末位数字是0或5的整数,都能被5整除。"
(5)是全称命题。省略了全称量词"所有的",意思为:"所有的棱柱都是多面体。"
(6)是全称命题。含有全称量词"所有的"。

【练习(第14页)】

(1)命题的否定为:"三个数 $-3,2.5,\sqrt{2}$ 都是自然数"。
(2)命题的否定为:"存在实数 x_0,使得 $2x_0+4<0$"。

【习题1-3(第14页)】

1. (1)全称命题。因为含有全称量词"一切"。
(2)特称命题。因为含有存在量词"有些"。
(3)全称命题。省略了全称量词"所有的",原意为:"所有的菱形都是正方形。"
(4)全称命题。因为含有全称量词"任何"。
(5)特称命题。因为含有存在量词"至少有一个"。
(6)特称命题。因为含有存在量词"存在"。
2. (3)假命题。因为只有内角为直角的菱形才是正方形。
其否定为:"有些菱形不是正方形"。
(6)是假命题。因为 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$,所以不存在实数 x,使得 $x^2+2x+2\leqslant0$。
其否定为:"对任何实数 x,都有 $x^2+2x+2>0$"。
3. (1)原命题:二次方程都有实数解。
逆命题:有实数解的方程都是二次方程。
否命题:非二次方程没有实数解。
逆否命题:没有实数解的方程都不是二次方程。
(2)上述命题均为假命题。
(3)原命题的否定:存在一个二次方程,它没有实数解。
逆命题的否定:存在一个有实数解的方程,不是二次方程。
否命题的否定:存在一个非二次方程,该方程有实数解。
逆否命题的否定:存在一个没有实数解的方程,该方程是二次方程。
4. (1)全称命题。其否定为:"我们班至少有一个同学的身高不超过1.85 m。"
(2)全称命题。其否定为:"我们组至少有一个女生。"
(3)特称命题。其否定为:"学生会中高二年级的学生一个也没有。"
5. 略。

§4 逻辑联结词"且""或""非"

【练习(第17页)】

日常生活中有很多和逻辑联结词有关的命题,如:
(1)"小刚的数学和英语成绩都很好"就是一个"p 且 q"形式的命题。
(2)"这些文学作品或者艺术上有缺点,或者政治上有错误"就是一个"p 或 q"形式的命题。

【习题 1－4（第 18 页）】

1. (1)且　(2)或　(3)且

2. (1)“p 或 q”形式的命题：“24 是 8 的倍数或 24 是 6 的倍数”，真命题；“p 且 q”形式的命题：“24 是 8 的倍数且 24 是 6 的倍数”，真命题；“非 p”形式的命题：“24 不是 8 的倍数”，假命题。

(2)“p 或 q”形式的命题：“矩形的对角线相等或互相平分”，真命题；“p 且 q”形式的命题：“矩形的对角线相等且互相平分”，真命题；“非 p”形式的命题：“矩形的对角线不相等”，假命题。

(3)“p 或 q”形式的命题：“正方形的四条边相等或四个角相等”，真命题；“p 且 q”形式的命题：“正方形的四条边相等且四个角相等”，真命题；“非 p”形式的命题：“正方形的四条边不相等”，假命题。

(4)“p 或 q”形式的命题：“π 是无理数或 π 是有理数”，真命题；“p 且 q”形式的命题：“π 是无理数且 π 是有理数”，假命题；“非 p”形式的命题：“π 不是无理数”，假命题。

【复习题一（A 组）（第 21 页）】

1. (1)充分不必要条件　(2)必要不充分条件　(3)充要条件　(4)必要不充分条件

2. A　3. C　4. B

5. “a,b 都不等于 0”的必要条件是(2)；“a,b 都等于 0”的充要条件是(5)(6)。

6. (1)的否定：1 994 和 2 000 不都是 5 的倍数；
(2)的否定：存在一个整数，不是奇数；
(3)的否定：没有实数 a，能使 $a^2+1=0$ 成立；
(4)的否定：存在一个不是等差数列的数列；
(5)的否定：存在一个没有一项为“1”的数列；
(6)的否定：存在一个有理数不是实数。

7. “且”命题：“$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$，也属于集合 $\mathbf{R}$”。
此命题是“p 且 q”的形式，其中 p：“$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$”，q：“$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{R}$”，因为 p 为假命题，q 为真命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，故原命题是假命题。
“或”命题：“1 是偶数或奇数”。
此命题是“p 或 q”的形式，其中 p：“1 是偶数”，q：“1 是奇数”，因为 p 为假命题，q 为真命题，所以 $p\vee q$ 是真命题，故原命题是真命题。
“非”命题：“不等式 $(x+2)^2\leqslant 0$ 没有实数解”。此命题为“$\neg p$”的形式，其中 p：“不等式 $(x+2)^2\leqslant 0$ 有实数解”，因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以 p 是真命题，即 $\neg p$ 是假命题，所以原命题是假命题。

【复习题一（B 组）（第 21 页）】

1. “充分性”证明：
$\because a+b+c=0$，$\therefore c=-a-b$。
则方程 $ax^2+bx+c=0$，即为 $ax^2+bx-a-b=0$。
化简，得：$a(x^2-1)+b(x-1)=0$，
即：$(x-1)(ax+a+b)=0$。
所以，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一解为 1。
“必要性”证明：
$\because x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解，
$\therefore a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$，$\therefore a+b+c=0$。
综上所述，“关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一解为 1”的充要条件是“$a+b+c=0$”。

2. 逆命题：“若 $a+b$ 是偶数，则 a,b 都是偶数”。为假命题。
否命题：“若 a,b 不都是偶数，则 $a+b$ 不是偶数”。为假命题。
逆否命题：“若 $a+b$ 不是偶数，则 a,b 不都是偶数”。为真命题。

第二章　空间向量与立体几何

§1　从平面向量到空间向量

【练习（第 27 页）】

1. (1)相等的向量要求方向相同，模的大小相同，如：$\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{DD'}$。
(2)相反的向量要求方向相反，模的大小相同，如：$\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{D'D},\overrightarrow{A'A}$。
(3)平行的向量要求方向相同或相反，如：$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC},\overrightarrow{CE}$。

2. (1)$\because AA'\perp$平面 $ABCD$，$\therefore$ 以向量$\overrightarrow{AA'}$为法向量的一个平面为平面 $ABCD$。
(2)连接 $B'D$，$\because \overrightarrow{B'D}\perp$平面 ACD'，$\therefore$ 平面 ACD'的一个法向量为$\overrightarrow{B'D}$。

【习题 2－1（A 组）（第 27 页）】

1. 平面的法向量与平面中任意一个向量的夹角为 90°。

2. (1)如：$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{A'D'}$。
(2)如：$\overrightarrow{CB},\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{D'A'},\overrightarrow{DA}$。
(3)如：$\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{D'C},\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{CD'},\overrightarrow{FE}$。

3. 只要与直线平行的向量即为它的一个方向向量，则直线 AD 的一个方向向量为$\overrightarrow{AD}$，直线 BC 的一个方向向量为$\overrightarrow{BC}$，直线 $B'C'$的一个方向向量为$\overrightarrow{B'C'}$。

4. 平面 $ABCD$ 的法向量可以是 $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{DD'}$，或 $\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{D'D}$。
平面 $A'B'C'D'$ 的法向量可以是 $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{DD'}$，或 $\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{D'D}$。
平面 $A'B'BA$ 的法向量可以是 $\overrightarrow{A'D'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$，或 $\overrightarrow{D'A'},\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$。
平面 $C'D'DC$ 的法向量可以是 $\overrightarrow{A'D'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$，或 $\overrightarrow{D'A'},\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$。

【习题 2－1（B 组）（第 28 页）】

1. 由题图易得：(1)$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$，所以$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\pi}{2}$，$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{\pi}{2}$，$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\pi}{2}$。
(2)$\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BC'}$二者为相等向量，则$\langle\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BC'}\rangle=0$；
$\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}$二者为相反向量，则$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\rangle=\pi$。

2. $\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{CC'}\rangle=0$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{C'D'}\rangle=\pi$，$\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{D'C}\rangle=\pi$。

§2　空间向量的运算

【练习（第 31 页）】

1. 向量加法的运算律有交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
结合律：$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。
向量的数乘运算满足下列运算律：
设 λ,μ 为实数，则
①$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；②$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；③$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（分配律）。
向量的数量积满足下列运算律：
①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；②分配律：$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；③实数对向量的结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$。

2. 证明：若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线；当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\because \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，$\therefore \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\therefore 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{a}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}$，即$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线。

3. (1)$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'A}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；
(2)$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；
(3)连接 $D'C$，则 $EF=\frac{1}{2}D'C$，
$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'C}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$。

4. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数；$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 是一个向量。

【习题 2－2（A 组）（第 31 页）】

1. (1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线；当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，当$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线。
(2)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线；当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$与 $\boldsymbol{b}$ 共线；当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，若 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，若 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$与 $\boldsymbol{b}$ 共线。
(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不一定成立。

2. $\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，
$\therefore (2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})=-2|\boldsymbol{a}|^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+$

$6|\boldsymbol{b}|^2-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+8|\boldsymbol{c}|^2=-2+6+8=12$。

3. $\because(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\cdot(-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-3|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2|\boldsymbol{c}|^2=-3|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+4|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2|\boldsymbol{c}|^2$,

$\because|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3},\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{2},\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\cdot(-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-3-4\times\frac{1}{2}+7\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4-2=-1-2+\frac{7\sqrt{2}}{2}=-3+\frac{7\sqrt{2}}{2}$。

4. 连接 AF,

$\because M,N$ 分别是 BC,BD 的中点,

$\therefore MN=\frac{1}{2}CD,\therefore\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$。

又 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-|\overrightarrow{AC}|^2)$。

$\because AD\perp AB,AD\perp AC,AB\perp AC,AB=AC=AD=1$,

$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0,|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|$。

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\therefore\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$。

【习题 2－2(B 组)(第 32 页)】

取 $A'D'$ 的中点 M',连接 $M'M$,则 M,O,M' 三点共线,且 $M'M/\!/D'C$。

$\therefore\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'C}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'})$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$。

同理:$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$。

§3 向量的坐标表示和空间向量基本定理

【练习(第 34 页)】

1. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$。

2. $\because\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直,

$\therefore\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0,\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=0,\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0$。

$\because\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_1=2|\boldsymbol{e}_1|^2+3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_2=2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+3|\boldsymbol{e}_2|^2-4\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2=3,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_3=2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3-4|\boldsymbol{e}_3|^2=-4$。

【练习(第 36 页)】

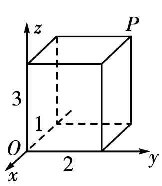
1. $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{B'C'}$。

2. $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=-\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AD}$。

【练习(第 38 页)】

1. $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$。

2. 点 P 的坐标为$(-1,2,3)$,点 P 的位置如图所示。



第 2 题图

3. (1)$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-2,3)\cdot(1,2,1)=1-4+3=0,\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直。

(2)$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-3,2,4)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\neq0$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直。又 $6\boldsymbol{b}=(-3,2,4)$,$\therefore\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行。

(3)$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(0,-3,3)\cdot(0,1,-1)=0-3-3\neq0$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直。又 $-3\boldsymbol{b}=(0,-3,3)$,$\therefore\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行。

(4)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 既不垂直,也不平行。

4. $\because\boldsymbol{a}=(x,y,z),\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$\because x:y:z=5:(-2):4$,

设 $x=5k,y=-2k,z=4k$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{25k^2+4k^2+16k^2}=\sqrt{45}|k|$,

$\therefore\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(5k,-2k,4k)}{3\sqrt{5}|k|}$。

当 $k>0$ 时,$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{3\sqrt{5}}(5,-2,4)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{-2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$。

当 $k<0$ 时,$\boldsymbol{a}_0=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2\sqrt{5}}{15},-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$。

5. $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1),\therefore\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=(1,0,0)\cdot(0,1,0)=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=(0,1,0)\cdot(0,0,1)=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=(1,0,0)\cdot(1,0,0)=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=(0,1,0)\cdot(0,1,0)=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=(0,0,1)\cdot(0,0,1)=1$。

【习题 2－3(A 组)(第 38 页)】

1. 由 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2),\boldsymbol{b}=(1,0,1)$ 知

(1)$2\boldsymbol{a}=(2,4,-4);\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1,2,-2)-2(1,0,1)=(1,2,-2)-(2,0,2)=(-1,2,-4);2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,4,-4)+(1,0,1)=(3,4,-3)$。

(2)$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-1,2,-4)\cdot(3,4,-3)=-3+8+12=17$。

2. $\because\boldsymbol{a}=(-1,2,3),\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$。

$\therefore$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\boldsymbol{a}_0=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,3)$,

$\therefore\boldsymbol{a}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$或 $\boldsymbol{a}_0=\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$。

3. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OA}=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)$,

$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OB}=(0,1,1)-(1,0,0)=(-1,1,1)$,

$\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OA}=(0,1,1)-(0,0,0)=(0,1,1)$。

4. 设 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3$,

$\therefore\begin{cases}3=2\lambda_1+\lambda_2,\\4=-\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\\5=\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3,\end{cases}\therefore\begin{cases}\lambda_1=\frac{7}{6},\\\lambda_2=\frac{2}{3},\\\lambda_3=\frac{3}{2}.\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{a}=\frac{7}{6}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{3}{2}\boldsymbol{e}_3$。

5. (1)$\because\boldsymbol{a}=(1,-3,2),\boldsymbol{b}=(1,1,-1)$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{14},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3},\therefore|-3\boldsymbol{a}|=3\sqrt{14}$。

又 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,-6,4)-(1,1,-1)=(1,-7,5)$,

$\therefore|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$。

(2)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1-3-2}{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}=\frac{-4}{\sqrt{42}}=-\frac{2\sqrt{42}}{21}$。

6. 由题图可知 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,2,0),D'(0,2,3),C'(1,2,3)$。

(1)$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OA}=(1,2,3),\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OB}=(0,2,3)-(1,0,0)=(-1,2,3),\overrightarrow{AD'}=(0,2,3)$。

(2)$\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{BD'}=(1,2,3)+2(-1,2,3)=(-1,6,9),\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BD'}-2\overrightarrow{AD'}=(1,2,3)+(-1,2,3)-(0,4,6)=(0,0,0)$。

7. 由题图易知 $A\left(-\frac{1}{2},0,0\right),C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),C_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},2\right),B\left(\frac{1}{2},0,0\right)$。$\therefore\overrightarrow{AC_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)-\left(-\frac{1}{2},0,0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$,

$\overrightarrow{BC}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)-\left(\frac{1}{2},0,0\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$。

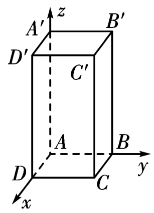
8. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$。

【习题 2-3(B 组)(第 39 页)】

1. $\because A(0,0,0),A'(0,0,1),C(1,1,0),C'(1,1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{A'C}=(1,1,-1),\overrightarrow{AC'}=(1,1,1)$。$\therefore \overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{AC'}=1$。

2. 以 A 为坐标原点,AD,AB,AA' 所在的直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,可得:$A(0,0,0),A'(0,0,4),B'(0,2,4),C(2,2,0)$,$C'(2,2,4),D'(2,0,4)$,则有 $\overrightarrow{B'C}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{A'D'}=(2,0,0),\overrightarrow{AC'}=(2,2,4)$。



第 2 题图

(1) $|\overrightarrow{B'C}|=\sqrt{4+0+16}=2\sqrt{5},|\overrightarrow{A'D'}|=2,\overrightarrow{B'C}\cdot\overrightarrow{A'D'}=(2,0,-4)\cdot(2,0,0)=4+0+0=4$。

所以 $\cos\langle\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{A'D'}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{B'C}\cdot\overrightarrow{A'D'}}{|\overrightarrow{B'C}||\overrightarrow{A'D'}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

(2) $|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$。

3. $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'C}=\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'C'}-2\overrightarrow{DD'}$。

§4 用向量讨论垂直与平行

【练习(第 41 页)】

1. (1) $\because \boldsymbol{s}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{s}_2=(-1,2,3)$,

$\therefore \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=-1-2+3=0,\therefore l_1\perp l_2$。

(2) $\because \boldsymbol{s}_1=(1,-2,0),\boldsymbol{s}_2=(-1,2,0)$,

$\therefore \boldsymbol{s}_1=-\boldsymbol{s}_2,\therefore l_1/\!/l_2$。

2. (1) $\because \boldsymbol{n}_1=(1,2,3),\boldsymbol{n}_2=(-1,-2,-3)$,

$\therefore \boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}_2$,$\therefore$ 平面 $\pi_1/\!/$平面 π_2。

(2) $\because \boldsymbol{n}_1=(2,2,-3),\boldsymbol{n}_2=(-1,-2,-2)$,

$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-2-4+6=0$,$\therefore$ 平面 $\pi_1\perp$平面 π_2。

3. (1) $\because \boldsymbol{s}=(-1,1,1),\boldsymbol{n}=(1,4,-3)$,

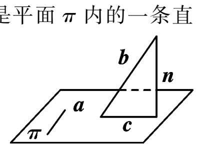
$\therefore \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=-1+4-3=0$,$\therefore$ 直线 $l/\!/$平面 π。

(2) $\because \boldsymbol{s}=(-1,3,2),\boldsymbol{n}=(2,-6,-4)$,

$\therefore \boldsymbol{s}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{n}$,$\therefore$ 直线 $l\perp$平面 π。

【习题 2-4(A 组)(第 42 页)】

1. 已知:直线 b 是平面 π 外的一条直线,直线 a 是平面 π 内的一条直线,直线 c 是 b 在平面 π 上的投影,且 $a\perp b$,求证:$a\perp c$。



第 1 题图

证明:如图所示,过 b 上任一点作平面 π 的垂线 n,设直线 a,b,c,n 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}$,只需证明:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$。

由于 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}$ 共面,由平面向量基本定理,存在实数 λ,μ,使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{n}$。

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\mu\boldsymbol{n})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})$。

$\because a\perp b,n\perp a,\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$。

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0,\therefore a\perp c$。

2. $\because D(0,0,0),B(1,1,0),B'(1,1,1),C(0,1,0),A'(1,0,1),A(1,0,0)$,

又 G 是 AA' 上的点,设 $GA=t$,则 $G(1,0,t)$。

又 E,F 分别是 BC,BB' 的中点,

$\therefore E\left(\dfrac{1}{2},1,0\right),F\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right),\overrightarrow{DG}=(1,0,t)$。

$\because DG/\!/EF,\therefore \overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DG}$。$\therefore \left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)=(\lambda,0,\lambda t)$。

$\therefore \begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\ \lambda t=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore t=1$。$\therefore$ 当 G 与 A' 重合时 $EF/\!/DG$。

3. $\because \triangle ABC$ 中,$BC=1,\angle BAC=30^\circ,\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore AC=\sqrt{3}$,

$\therefore C'(0,0,\sqrt{6}),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),B'(0,1,\sqrt{6}),A'(\sqrt{3},0,\sqrt{6})$。

$\because M$ 是 CC' 的中点,$\therefore M\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$。

$\because \overrightarrow{AB'}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{6}),\overrightarrow{A'M}=\left(-\sqrt{3},0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{A'M}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=0,\therefore AB'\perp A'M$。

4. 由坐标系可知 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),C(0,\sqrt{2},0),D'(0,0,1),B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0\right)$,

$C'(0,\sqrt{2},1),B'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},1\right),A'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,1\right)$。

$\because E$ 是 $D'C'$ 的中点,$\therefore E\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$。

$\because \overrightarrow{A'E}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right),\overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

设平面 $AA'E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A'E}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0。\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}-x+y=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_1+z_1=0。\end{cases}$

令 $x_1=1$,则 $y_1=1,z_1=0,\therefore \boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$。

又 $\overrightarrow{BB'}=(0,0,1),\overrightarrow{B'E}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$。

设平面 $BB'E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BB'}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B'E}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}z_2=0,\\ x_2+y_2=0。\end{cases}$

令 $x_2=1$,则 $y_2=-1,\therefore \boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$。

$\because \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(1,1,0)\cdot(1,-1,0)=0,\therefore \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,

$\therefore$ 平面 $AA'E\perp$平面 $BB'E$。

5. 略。(提示:依照教材的例题进行证明即可)。

【习题 2-4(B 组)(第 42 页)】

如图所示,记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,

则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$。

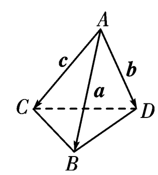
$\because \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

由 $AB\perp CD,DB\perp AC$ 知 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

$\therefore DA\perp BC$。



第 1 题图

§5 夹角的计算

【练习(第 45 页)】

1. $\because \boldsymbol{s}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{s}_2=(-1,2,0)$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{-1-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$。

故 $\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle>90^\circ$,$\therefore l_1$ 与 l_2 的夹角为 $\pi-\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle$。

$\therefore l_1$ 与 l_2 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$。

2. $\because \boldsymbol{n}_1=(1,2,3),\boldsymbol{n}_2=(-1,0,2)$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{-1+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$。

$\therefore$ 两个平面夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{70}}{14}$。

【练习(第 46 页)】

$\because \boldsymbol{s}=(-1,1,1),\boldsymbol{n}=(1,2,-3)$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-1+2-3}{\sqrt{3}\times\sqrt{14}}=-\dfrac{\sqrt{42}}{21}<0$。

设直线与平面的夹角为 θ,则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{42}}{21}$,

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{399}}{21}$。

【习题 2-5(第 47 页)】

1. 由坐标系可知 $A'(0,0,1),B(1,0,0),D'(0,1,1),D(0,1,0)$,$C(1,1,0),E\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$。

$\therefore \overrightarrow{A'B}=(1,0,-1),\overrightarrow{CE}=\left(-1,-\frac{1}{2},1\right)$。

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{CE}\rangle=\frac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故直线 $A'B$ 与直线 CE 夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

2. 由坐标系知 $D(0,4,0),D'(0,4,2),B(2,0,0),C'(2,4,2),A'(0,0,2)$。

$\therefore \overrightarrow{AC'}=(2,4,2),\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$。

$\because A'A\perp$平面 ABD,$\therefore \overrightarrow{A'A}$为平面 ABD 的法向量。

设平面 $AC'D$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AC'}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x+2y+z=0,\\ y=0。\end{cases}$

令 $x=1$,则 $z=-1$,$\therefore \boldsymbol{n}_1=(1,0,-1)$。

又$\because \overrightarrow{A'A}=(0,0,-2)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{A'A},\boldsymbol{n}_1\rangle=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 平面 $AC'D$ 与平面 ABD 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

3. 由坐标系可知 $B(1,0,0),D(0,2,0),D'(0,2,2),B'(1,0,2),C(1,2,0)$,$\therefore \overrightarrow{B'C}=(0,2,-2)$。

设平面 $B'BDD'$的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$。

又$\overrightarrow{B'D'}=(-1,2,0),\overrightarrow{BB'}=(0,0,2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B'D'}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BB'}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}2y-x=0,\\ z=0。\end{cases}$

令 $x=2$,则 $y=1$,$\therefore \boldsymbol{n}_1=(2,1,0)$。

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{B'C},\boldsymbol{n}_1\rangle=\frac{\overrightarrow{B'C}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\overrightarrow{B'C}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{2}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$。

设 $B'C$ 与平面 $B'BDD'$的夹角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$。

4. 由坐标系可知,$S(0,0,1),B(1,0,0),D\left(0,\frac{1}{2},0\right),C(1,1,0)$。由题意易知 $DA\perp$平面 SAB,$\therefore \overrightarrow{DA}\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$为平面 SAB 的一个法向量,设平面 SCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$。

$\because \overrightarrow{SC}=(1,1,-1),\overrightarrow{SD}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$,

$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SD}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x+y-z=0,\\ \frac{y}{2}-z=0,\end{cases}$

令 $y=2$,则 $z=1,x=-1$,$\therefore \boldsymbol{n}_1=(-1,2,1)$。

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{DA},\boldsymbol{n}_1\rangle=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{-1}{\frac{1}{2}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$。

$\therefore$ 平面 SAB 与平面 SCD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$。

5. 由坐标系知:$A'(0,0,1),B(2,0,0),D(0,2,0),C'(2,2,1)$。

$\because \overrightarrow{A'B}=(2,0,-1),\overrightarrow{C'D}=(-2,0,-1)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{C'D}\rangle=\frac{-4+1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\frac{3}{5}$,

$\therefore A'B$ 与 $C'D$ 夹角的余弦值为$\frac{3}{5}$。

§6 距离的计算

【练习(第 50 页)】

1. $\because \overrightarrow{OA}=(1,-1,2),\boldsymbol{n}=(0,2,1)$,且$\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{n}=(1,-1,2)\cdot(0,2,1)=0-2+2=0$,$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\boldsymbol{n}$。故点 A 到直线 l 的距离为 $d=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$。

2. $\because \overrightarrow{OM}=(-1,1,-2),\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$,$\therefore$ 点 M 到平面 π 的距离为

$d=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\cos\theta|=|\overrightarrow{OM}|\cdot\frac{|\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{7}{3}$。

【习题 2－6(A 组)(第 50 页)】

1. $\because B(1,0,0),D(0,1,0),B_1(1,0,1),A(0,0,0)$。

又$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}$,设 $M(x,y,z)$。又$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$,

$\therefore x=\frac{1}{3},y=0,z=\frac{1}{3}$,$\therefore M\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$。

设 $N(x_1,y_1,z_1)$,$\therefore \overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$,

$\therefore (x_1-1,y_1,z_1)=\frac{1}{3}(-1,1,0)$,

$\therefore x_1=\frac{2}{3},y_1=\frac{1}{3},z_1=0$。

$\therefore N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$,$\therefore \overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$。

$\therefore |\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 MN 的长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$。

2. 由坐标系可知 $B(0,1,0),D(2,0,0),A_1(0,0,3),C(2,1,0),A(0,0,0),C_1(2,1,3)$。

$\because M$ 是 AD 的中点,$\therefore M(1,0,0)$。

$\because \overrightarrow{A_1C_1}=(2,1,0),\overrightarrow{A_1M}=(1,0,-3)$,

又$\overrightarrow{A_1M}$在$\overrightarrow{A_1C_1}$上的投影的大小为$\frac{|\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore$ 点 M 到 A_1C_1 的距离为

$d=\sqrt{|\overrightarrow{A_1M}|^2-\frac{4}{5}}=\sqrt{10-\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{230}}{5}$。

3. $\because A(1,2,0),B(-2,0,1),C(0,2,2)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-3,-2,1),\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$。

设平面 π 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$。

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3x_1+2y_1-z_1=0,\\ -x_1+2z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$,则 $x_1=2,y_1=-\frac{5}{2}$,$\therefore \boldsymbol{n}_1=\left(2,-\frac{5}{2},1\right)$。

$\because \overrightarrow{AM}=(-2,0,3)$,$\therefore \overrightarrow{AM}$在 $\boldsymbol{n}_1$ 上的投影的大小为$\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$。

即点 M 到平面 π 的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{15}$。

【习题 2－6(B 组)(第 51 页)】

由坐标系可知 $B(1,0,0),D(0,2,0),A'(0,0,2),B'(1,0,2),D'(0,2,2),C(1,2,0)$,

又 E,F 分别是 DD'和 BB'的中点,

$\therefore E(0,2,1),F(1,0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{CE}=(-1,0,1),\overrightarrow{A'F}=(1,0,-1)$。

$\because \overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{A'F}$,$\therefore \overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{A'F}$共线且无公共点,

$\therefore CE/\!/A'F$。

点 F 到 CE 的距离就是两平行线的距离,设为 d。

$\because \overrightarrow{CF}=(0,-2,1)$,

$\therefore \overrightarrow{CF}$在$\overrightarrow{CE}$上的投影的大小为$\frac{|\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{CE}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore$ 所求距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{CF}|^2-\frac{1}{2}}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

【复习题二(A 组)(第 56 页)】

1. 略。 2. 略。

3. (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{2}$。

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$。

(3) $\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=0$。

(4) $\cos\langle(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\rangle=0$。

4. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\sqrt{2}\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\sqrt{2}\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-2|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

$\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2},\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

$\therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\sqrt{2}\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\sqrt{2}\boldsymbol{c})=0$。

$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\sqrt{2}\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\sqrt{2}\boldsymbol{c}$。

5. (1) $\because \boldsymbol{a}=(0,-1,1),\boldsymbol{b}=(2,2,1)$,

$\therefore |\boldsymbol{a}|=\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=3,|-3\boldsymbol{a}|=3\sqrt{2}$。

$\because 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-2,2)-(2,2,1)=(-2,-4,1)$,

$\therefore |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$。

(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times3}=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$。

(3) $\because 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,-4,1),-3\boldsymbol{a}=(0,3,-3),\therefore 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $-3\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $\dfrac{3\times(-4)+(-3)\times1}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$。

6. (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,0,1)-(1,1,-1)=(0,-1,2)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,1,2)-(1,1,-1)=(-1,0,3)$,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(-1,2,1)-(1,1,-1)=(-2,1,2)$。

(2) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2(0,-1,2)-(-1,0,3)+(-2,1,2)=(-1,-1,3)$。

(3) $\because \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(0,-1,2)-(-1,0,3)+(-2,1,2)=(-1,0,1)$,

$\therefore |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-1)^2+0+1^2}=\sqrt{2}$。

7. 设 $P(x,y,z)$,则有 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2,z-3)$,过点 A 的直线 l 平行于 x 轴,不妨设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,0,0)$,所以 $\overrightarrow{AP}/\!/\boldsymbol{s}$,又知 $|\overrightarrow{AP}|=1,\therefore x-1=1,y-2=0,z-3=0\Rightarrow x=2,y=2,z=3$,或 $x-1=-1,y-2=0,z-3=0\Rightarrow x=0,y=2,z=3$。则有 $P(2,2,3)$ 或 $(0,2,3)$。

8. 设 $P(x\ y,z)$,$\because A(-2,1,1),B(1,0,-3),\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}$,

$\therefore (x+2,y-1,z-1)=-(3,-1,-4)$。

$\therefore x+2=-3,y-1=1,z-1=4$。

$\therefore x=-5,y=2,z=5$。$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-5,2,5)$。

9. (1) $\because P(1,2,3),A(-1,1,1),B(1,-1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=(2,1,2),\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)$。

$\because$ 不存在实数 λ 使 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

$\therefore$ 点 P 不在直线 AB 上。

(2) $\because P(1,-2,-1),A(-1,-4,1),B(2,1,2)$。

$\therefore \overrightarrow{AP}=(2,2,-2),\overrightarrow{AB}=(3,5,1)$。

$\because$ 不存在实数 λ 使 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

$\therefore$ 点 P 不在直线 AB 上。

10. $\because D(2,0,0),B(0,3,0),C'(0,0,2),E,F$ 分别是 $C'D,C'B$ 的中点,

$\therefore E(1,0,1),F\left(0,\dfrac{3}{2},1\right)$。设 EF 的中点为 M,则 $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},1\right)$。

11. $\because A'(0,0,1),D'(1,0,1),B(0,1,0),C(1,1,0)$。设平面 $BCD'A'$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$。$\because \overrightarrow{A'D'}=(1,0,0),\overrightarrow{A'B}=(0,1,-1)$,

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'D'}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'B}=0。\end{cases}\therefore \begin{cases}x=0,\\ y-z=0。\end{cases}$ 令 $y=1$,则 $z=1$。$\therefore$ 平面 $BCD'A'$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$。

12. 设平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_2=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}x-y+2z=0,\\ y+z=0。\end{cases}$

令 $y=1$,得 $z=-1$,代入 $x-y+2z=0$,得 $x=3$。

$\therefore \boldsymbol{n}=(3,1,-1)$ 是平面 π 的一个法向量。

13. 设过直线 l 和点 $A(1,2,3)$ 的平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\because \overrightarrow{AP_0}=(0,-2,-4),\boldsymbol{s}=(2,1,1)$,

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP_0}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}2y+4z=0,\\ 2x+y+z=0。\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $y=-4,z=2$。

$\therefore$ 过直线 l 和点 $A(1,2,3)$ 的平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-4,2)$。

14. $B(1,0,0),D(0,1,0),C(1,1,0),B'(1,0,1),A'(0,0,1)$,设平面 $A'B'CD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$。

$\because \overrightarrow{A'B'}=(1,0,0),\overrightarrow{A'C}=(1,1,-1)$,

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{A'B'}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{A'C}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}x=0,\\ x+y-z=0。\end{cases}$

令 $y=1$,则 $z=1$。$\therefore \boldsymbol{n}=(0,1,1)$。

$\because \overrightarrow{AB}=(1,0,0),\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,AB\not\subseteq$ 平面 $A'B'CD$,

$\therefore AB/\!/$ 平面 $A'B'CD$。

$\because \overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,又 $\overrightarrow{BC}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的射影长为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore AB$ 与平面 $A'B'CD$ 之间的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

15. $\because$ 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°,AB=2,\therefore AC=BC=\sqrt{2}$。

$\therefore A(\sqrt{2},0,0),B(0,\sqrt{2},0),C_1(0,0,2),A_1(\sqrt{2},0,2)$。

$\because D,E$ 分别是 CC_1,A_1B 的中点,

$\therefore D(0,0,1),E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$。

设平面 ADE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$。

$\because \overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},0,1),\overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}z-\sqrt{2}x=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+z=0。\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=-1,z=\sqrt{2},\therefore \boldsymbol{n}=(1,-1,\sqrt{2})$。

$\because \overrightarrow{A_1A}=(0,0,-2)$,

$\therefore \overrightarrow{A_1A}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的射影长为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{A_1A}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$。

$\therefore A_1$ 到平面 AED 的距离为 $\sqrt{2}$。

16. $\because B'(2,0,2),C(2,2,0),D(0,2,0),A'(0,0,2),D'(0,2,2),C'(2,2,2),\therefore E(0,1,2),H(0,2,1),G(2,2,1),F(2,1,2)$。

设平面 $A'B'CD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$。

$\because \overrightarrow{A'B'}=(2,0,0),\overrightarrow{A'C}=(2,2,-2)$,

$\therefore \begin{cases}x_1=0,\\ x_1+y_1-z_1=0。\end{cases}$

令 $y_1=1$,则 $z_1=1$。$\therefore \boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$。

设平面 $EFGH$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$。

$\because \overrightarrow{EF}=(2,0,0),\overrightarrow{EG}=(2,1,-1)$,

$\therefore \begin{cases}x_2=0,\\ 2x_2+y_2-z_2=0。\end{cases}$ 令 $y_2=1$,则 $z_2=1,\therefore \boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$。

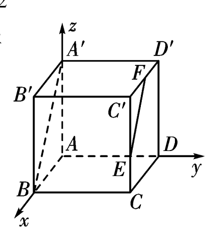
$\therefore \boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_1,\therefore$ 平面 $A'B'CD/\!/$ 平面 $EFGH$。

$\because \overrightarrow{EA'}=(0,-1,0)$,

$\therefore \overrightarrow{EA'}$ 在 $\boldsymbol{n}_1$ 上的射影长为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{EA'}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore$ 平面 $EFGH$ 与平面 $A'B'CD$ 之间的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

17. 如图所示,以 A 为坐标原点,建立空间直角坐标系,则 $A'(0,0,1),B(1,0,0),C(1,1,0),C'(1,1,1)$。



第 17 题图

$\because$ 点 E 在 CC' 上,$\therefore$ 设 $E(1,1,z)$。

$\because 2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EC'},\therefore 2(0,0,z)=(0,0,1-z)$。

$\therefore 2z=1-z,\therefore z=\dfrac{1}{3}$。$\therefore E\left(1,1,\dfrac{1}{3}\right)$。

$\because \overrightarrow{A'B}=(1,0,-1)$,又 F 在 $C'D'$ 上,

$\therefore$ 设 $F(x,1,1)$,则 $\overrightarrow{EF}=\left(x-1,0,\dfrac{2}{3}\right)$。

$\because A'B/\!/EF,\therefore \overrightarrow{A'B}=\lambda\left(x-1,0,\dfrac{2}{3}\right)=(1,0,-1)$。

$\therefore \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda=-1, \\ \lambda(x-1)=1, \end{cases} \therefore \begin{cases} \lambda=-\frac{3}{2}, \\ x=\frac{1}{3}。 \end{cases} \therefore F\left(\frac{1}{3},1,1\right)。$

$\therefore \overrightarrow{EF}=\left(-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right)。$

又$\because \overrightarrow{A'F}=\left(\frac{1}{3},1,0\right)$，$\therefore \overrightarrow{A'F}$在$\overrightarrow{EF}$上的射影长为$\left|\frac{\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|}\right|=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}。$

$\therefore$ 直线 EF 与 $A'B$ 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{A'F}|^2-\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{38}}{6}。$

18. (1)$\because B(1,0,0),B'(1,0,1),C(1,1,0),C'(1,1,1),D'(0,1,1),E,F$ 分别是棱 $C'D'$ 和 $B'C'$ 的中点，

$\therefore E\left(\frac{1}{2},1,1\right),F\left(1,\frac{1}{2},1\right)。$

设平面 BEB' 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$。

$\because \overrightarrow{B'E}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right),\overrightarrow{BB'}=(0,0,1)，$

$\therefore \begin{cases} y-\frac{1}{2}x=0, \\ z=0, \end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(2,1,0)$。

又$\overrightarrow{AF}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}\times\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}。$

$\therefore AF$ 与平面 BEB' 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$。

(2)$\because \overrightarrow{AB'}=(1,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{AB'}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的射影长为$\left|\frac{\overrightarrow{AB'}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}。$

$\therefore$ 点 A 到平面 BEB' 的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

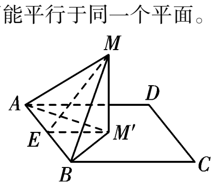
【复习题二（B 组）（第 57 页）】

1. 假设它们平行于同一个平面，设此平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}=0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x+2y+3z=0, \\ -2x+z=0, \\ 2x-y+2z=0, \end{cases} \therefore x=y=z=0。$

$\therefore$ 此平面的法向量不存在，故向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不可能平行于同一个平面。

2. 如图所示，$\because MM'\perp$ 平面 $ABCD$，在平面 $ABCD$ 内过点 M' 作 $M'E\perp AB$，则由三垂线定理知 $ME\perp AB$。



第 2 题图

$\therefore \angle MEM'$ 是平面 ABM 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角 θ。

$\because \cos\theta=\frac{M'E}{ME}$，$\therefore ME\cdot\cos\theta=M'E$。

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot ME\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}AB\cdot M'E$。

$\therefore S_{\triangle ABM}\cdot\cos\theta=S_{\triangle ABM'}$。

第三章 圆锥曲线与方程

§1 椭圆

【练习 1（第 64 页）】

1. 略。

2. 不是，$\because |PF_1|+|PF_2|=|F_1F_2|$，$\therefore$ 动点 P 的轨迹是线段。

3. 以两定点所在的直线为 x 轴，两定点连线的中点为原点建立平面直角坐标系，两定点分别为$F_1(-3,0),F_2(3,0)$。$\because |MF_1|+|MF_2|=10$，$\therefore a=5,c=3,b=4$。$\therefore$ 动点 M 的轨迹方程是$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$。草图略。

4. 圆、椭圆、线段。

【练习 2（第 66 页）】

1. 14

2. (1)$\frac{x^2}{5}+y^2=1$。(2)$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$。草图略。

3. 方法一：$\because \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标为 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$，$\therefore |PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(2\sqrt{5}+4)^2+(2\sqrt{3}-0)^2}+\sqrt{(2\sqrt{5}-4)^2+(2\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{48+16\sqrt{5}}+\sqrt{48-16\sqrt{5}}=4\sqrt{3+\sqrt{5}}+4\sqrt{3-\sqrt{5}}=4\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}+4\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1)=4\sqrt{10}$。

$\therefore a=2\sqrt{10}$，$\therefore b^2=24$。$\therefore$ 椭圆的方程为$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$。

方法二：$\because \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标为 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$，$\therefore c=4$。

设所求椭圆的长半轴长为 a，则 $b^2=a^2-16$。

$\therefore$ 椭圆的方程可设为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$。

将点 $P(2\sqrt{5},2\sqrt{3})$ 代入方程得$\frac{20}{a^2}+\frac{12}{a^2-16}=1$。

解得 $a^2=40$ 或 $a^2=8$（舍去）。

$\therefore$ 椭圆的方程为$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$。

【练习（第 69 页）】

1. 焦点坐标为 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，顶点坐标为 $A_1(-\sqrt{10},0),A_2(\sqrt{10},0),B_1(0,-\sqrt{6}),B_2(0,\sqrt{6})$。

2. (1)$\because e=\frac{1}{3},a=6$，$\therefore c=2$，$\therefore b=4\sqrt{2}$。

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$ 或$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$。草图略。

(2)$\because c=3,e=\frac{3}{5}$，$\therefore a=5$，$\therefore b=4$。

$\because$ 焦点在 y 轴上，$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$。草图略。

(3)$\because a=3b$，若焦点在 x 轴上，设椭圆方程为$\frac{x^2}{9b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，将点$P(3,0)$代入椭圆方程得 $b^2=1$，

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$。

若焦点在 y 轴上，则$\frac{y^2}{9b^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，易得 $b^2=9$。

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$。

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或$\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$。草图略。

(4)$\because \begin{cases} a+c=10, \\ a-c=4, \end{cases} \therefore a=7,c=3$。$\therefore b=\sqrt{40}$。

$\therefore$ 椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$ 或$\frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{40}=1$。草图略。

【习题 3－1（A 组）（第 69 页）】

1. 以两点所在的直线为 x 轴，两定点连线的中点为原点建立平面直角坐标系，由已知得点 M 的坐标满足椭圆方程，则 $a=5,c=3$，$\therefore b=4$。$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$。草图略。（若以两定点所在直线为 y 轴，两定点连线的中点为原点，则椭圆方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$）

2. $\because F_1(-10,0),F_2(10,0)$，$\therefore c=10$。

又 $a=12$，$\therefore b^2=44$，

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$。草图略。

3. (1)$\because a=10,e=\frac{3}{5}$，$\therefore c=6$。$\therefore b=8$。

又$\because$ 焦点在 x 轴上，$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$。草图略。

(2)$\because c=3,e=\frac{1}{2}$，$\therefore a=6$。$\therefore b=\sqrt{27}$。

又$\because$ 焦点在 y 轴上,$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{27}=1$。草图略。

(3)设 $a=2b$,当焦点在 x 轴上时,$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

将 $P(3,0)$代入可得 $b^2=\frac{9}{4}$,

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{4y^2}{9}=1$。

当焦点在 y 轴上时,$\frac{y^2}{4b^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$,

将 $P(3,0)$代入可得 $b^2=9$,

$\therefore$ 椭圆方程为$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{9}=1$。

$\therefore$ 椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$ 或$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{9}=1$。草图略。

4. 设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$。

由题意知$\begin{cases}4m+3n=1,\\m+12n=1,\end{cases}$$\therefore\begin{cases}m=\frac{1}{5},\\n=\frac{1}{15},\end{cases}$

$\therefore$ 所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{15}=1$。草图略。

5. $\because|AB|,|BC|,|AC|$成等差数列,

$\therefore 2|BC|=|AB|+|AC|$。

$\because B(0,-2),C(0,2)$,$\therefore|BC|=4$。

$\therefore|AB|+|AC|=8$。

$\therefore$ 顶点 A 的轨迹是以 B,C 为焦点,且长轴长为 8 的椭圆。

$\therefore a=4,c=2$。$\therefore b^2=16-4=12$。

$\therefore$ 顶点 A 的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1(x\neq0)$。

6. $\because$ 设 $M(2,y)$,代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$,$\therefore\frac{4}{16}+\frac{y^2}{25}=1$,

$\therefore y=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$。$\therefore M$ 的纵坐标为 $\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$。

当 M 的坐标为$\left(2,\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$时,$M$ 到上焦点的距离为$\sqrt{4+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-3\right)^2}=5-\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

又 $2a=10$,所以 M 到下焦点的距离为 $5+\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

当 M 的坐标为$\left(2,-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$时,$M$ 到上焦点的距离为 $5+\frac{3\sqrt{3}}{2}$,到下焦点的距离为 $5-\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

7. (1)$\because x^2+4y^2=16$,$\therefore\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$。

$\therefore a=4,b=2$,即长轴长为 8,短轴长为 4。

$\because a=4,b=2,c=2\sqrt{3}$,$\therefore e=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

$\therefore F_1(-2\sqrt{3},0),F_2(2\sqrt{3},0),A_1(-4,0),A_2(4,0),B_1(0,-2)$,$B_2(0,2)$。草图略。

(2)$\because 9x^2+y^2=81$,$\therefore\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1$。

$\therefore a=9,b=3$。$\therefore c=\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$。

$\therefore$ 长轴长为 18,短轴长为 6。$\therefore e=\frac{6\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

$\therefore F_1(0,-6\sqrt{2}),F_2(0,6\sqrt{2}),A_1(0,-9),A_2(0,9),B_1(-3,0)$,$B_2(3,0)$。草图略。

8. 设 $C(x,y)$,则 $k_{AC}=\frac{y}{x+6}$,$k_{BC}=\frac{y}{x-6}$。

$\because k_{AC}\cdot k_{BC}=-\frac{4}{9}$,$\therefore\frac{y^2}{x^2-36}=-\frac{4}{9}$。

$\therefore\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1(y\neq0)$。草图略。

9. 设卫星轨道的长半轴长为 a,短半轴长为 b,半焦距为 c,则 $a+c=6\,370+2\,384=8\,754$,$a-c=6\,370+439=6\,809$。

解之得:$a=7\,781.5$。

又 $b^2=a^2-c^2=(a+c)(a-c)=8\,754\times6\,809$
$=59\,605\,986$,

$\therefore$ 卫星运行轨道的轨迹方程为$\frac{x^2}{7\,781.5^2}+\frac{y^2}{59\,605\,986}=1$。

即$\frac{x^2}{60\,551\,742}+\frac{y^2}{59\,605\,986}=1$。

【习题 3-1(B 组)(第 70 页)】

1. (1)$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$,化简得$\frac{y^2}{4}=1-\frac{x^2}{9}$。

$\therefore\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(y\geqslant0)$。图略。

(2)$x=\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$,化简得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1(x\geqslant0)$。图略。

2. $\because\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$,$\therefore c=\sqrt{13^2-12^2}=5$。

$\therefore F_1(-5,0),F_2(5,0)$。

设 $M(x,y)$,$\therefore\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=\frac{2}{3}$。

$\therefore\frac{\sqrt{(x+5)^2+y^2}}{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}=\frac{2}{3}$,整理得 $x^2+26x+y^2+25=0$。

即$(x+13)^2+y^2=144$。此即为点 M 满足的方程,草图略。

3. $\because a=1.50\times10^8,e=0.02$,

$\therefore c=ae=1.50\times10^8\times0.02=3\times10^6$。

$\therefore a+c=1.53\times10^8,a-c=1.47\times10^8$。

$\therefore$ 地球到太阳的最远距离为 1.53×10^8 km,最近距离为 1.47×10^8 km。

§2 抛物线

【练习 1(第 73 页)】

1. $\because$ 焦点到准线的距离为 3,且焦点在 x 轴正半轴上,

$\therefore$ 抛物线的标准方程为 $y^2=6x$。

2. $y^2=12x$　$y^2=8x$

3. B

【练习 2(第 74 页)】

1. (1)$y^2=-12x$。(2)$y^2=2x$。

2. (1)$y^2=2\times4\sqrt{3}x$,$\therefore p=4\sqrt{3}$。

$\therefore$ 焦点坐标为$(2\sqrt{3},0)$,准线方程为 $x=-2\sqrt{3}$。

(2)$x^2=2\times8y$,$\therefore p=8$。

$\therefore$ 焦点坐标为$(0,4)$,准线方程为 $y=-4$。

(3)$2y^2+5x=0$,$\therefore y^2=-\frac{5}{2}x=-2\times\frac{5}{4}x$。

$\therefore p=\frac{5}{4}$。$\therefore$ 焦点坐标为$\left(-\frac{5}{8},0\right)$,准线方程为 $x=\frac{5}{8}$。

(4)$x^2+8y=0$,$\therefore x^2=-8y=-2\times4y$。$\therefore p=4$。

$\therefore$ 焦点坐标为$(0,-2)$,准线方程为 $y=2$。

3. $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$　$y=-\frac{1}{4a}$

4. $\because$ 动点 M 到定点 $F(3,0)$的距离比 M 到直线 $x=-1$ 的距离大 2,$\therefore$ 动点 M 到定点 $F(3,0)$的距离和 M 到直线 $x=-3$ 的距离相等。$\therefore\frac{p}{2}=3$,$\therefore p=6$。$\therefore$ 抛物线标准方程为 $y^2=12x$。草图略。

【练习(第 76 页)】

1. D

2. (1)设抛物线方程为 $y^2=2px$,

$\therefore 16=2p\times4$,$\therefore p=2$,$\therefore y^2=4x$。

(2)$\because\frac{p}{2}=5$,$\therefore p=10$。

又焦点为 $F(0,5)$,$\therefore$ 抛物线方程为 $x^2=20y$。

(3)$\because-\frac{p}{2}=-8$,$\therefore p=-16$。

又准线为 $y=8$,$\therefore$ 抛物线方程为 $x^2=-32y$。

3. x 的系数越大抛物线开口越大(草图略)。

【习题3-2(A组)(第76页)】

1. 点 M 的轨迹是以 $F(3,0)$ 为焦点,$x=-3$ 为准线的抛物线,它的方程是 $y^2=12x$。(草图略)。

2. (1)∵ 焦点到准线的距离为6,∴ $p=6$。又焦点在 x 轴上,∴ 抛物线方程为 $y^2=12x$ 或 $y^2=-12x$。

(2)∵ 准线方程为 $x=-\frac{5}{2}$,∴ $p=5$。∴ 抛物线方程为 $y^2=10x$。

3. 焦点为(2,0)的抛物线方程为 $y^2=8x$,焦点为(0,2)的抛物线方程为 $x^2=8y$。

4. (1)焦点坐标为 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,准线方程为 $y=\frac{1}{2}$。

(2)$4x^2-3y=0$ 变形为 $x^2=\frac{3}{4}y=2\times\frac{3}{8}y$。

∴ 焦点坐标为 $\left(0,\frac{3}{16}\right)$,准线方程为 $y=-\frac{3}{16}$。

(3)$2y^2=-\sqrt{3}x$ 变形为 $y^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}x=-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}x$。

∴ 焦点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$,准线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{8}$。

(4)$y^2-6\sqrt{2}x=0$ 变形为 $y^2=6\sqrt{2}x=2\times3\sqrt{2}x$,

∴ 焦点坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$,准线方程为 $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

5. ∵ 点 M 到定点 $F(2,0)$ 的距离比它到直线 $x=-3$ 的距离小1,∴ 点 M 到定点 $F(2,0)$ 的距离和它到直线 $x=-2$ 的距离相等。∴ 点 M 的轨迹是以 $F(2,0)$ 为焦点,$x=-2$ 为准线的抛物线。∴ 其方程是 $y^2=8x$。

6. (1)∵ 准线方程是 $y=2$,∴ $\frac{p}{2}=2$,∴ $p=4$。

∴ 抛物线方程是 $x^2=-8y$。草图略。

(2)∵ 顶点与焦点的距离是8,∴ $\frac{p}{2}=8$,∴ $p=16$。

∴ 抛物线方程是 $y^2=32x$ 或 $y^2=-32x$。草图略。

(3)设抛物线方程为 $x^2=2py$。将 $P(-6,-3)$ 代入得 $36=2p\times(-3)$,∴ $p=-6$。抛物线方程为 $x^2=-12y$。草图略。

(4)∵ 焦点在 $3x-4y-12=0$ 上,对称轴是 x 轴,∴ 令 $y=0$ 得 $x=4$。当焦点为(4,0)时,方程为 $y^2=16x$。草图略。

7. 设 $M(x_0,y_0)$,∵ $y^2=2px$ 的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$,

∴ 点 M 到准线的距离是 $x_0+\frac{p}{2}$。

又 $|MF|=2p$,∴ $2p=x_0+\frac{p}{2}$,∴ $x_0=\frac{3}{2}p$。

将 $x_0=\frac{3}{2}p$ 代入 $y^2=2px$ 得 $y_0=\pm\sqrt{3}p$。

∴ $M\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$ 或 $M\left(\frac{3}{2}p,-\sqrt{3}p\right)$。

8. 设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,∵ $B\left(\frac{7}{2},\frac{7}{10}\right)$,

∴ $\frac{49}{4}=2p\times\frac{7}{10}$,∴ $p=\frac{35}{4}$。

∴ 抛物线的方程为 $x^2=\frac{35}{2}y$。

9. 以拱桥的顶点为原点,过拱桥顶点垂直于水面的直线为 y 轴建立直角坐标系,设其方程为 $x^2=-2py(p>0)$。

易知点 $(2,-2)$ 在抛物线上,

∴ $4=-2p\times(-2)$,∴ $p=1$。∴ $x^2=-2y$。

当 $y=-3$ 时,$x^2=-2\times(-3)$,∴ $x=\pm\sqrt{6}$。

∴ 水面下降1 m后,水面宽为 $2\sqrt{6}$ m。

10. 方法一:由对称性可设正三角形一个顶点的坐标为 $A(x_0,y_0)$,则另一个顶点坐标为 $B(x_0,-y_0)$。

由 $|OA|=|OB|=|AB|$ 知 $2y_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,

又 $y_0^2=2px_0$,∴ $y_0=\pm2\sqrt{3}p$。

∴ 正三角形的边长为 $2|y_0|=4\sqrt{3}p$。

方法二:设正三角形一条边所在的直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$。代入 $y^2=2px$ 得,$\frac{1}{3}x^2=2px$,∴ $x=6p$,∴ $y=2\sqrt{3}p$。

∴ 正三角形边长为 $\sqrt{36p^2+12p^2}=4\sqrt{3}p$。

【习题3-2(B组)(第77页)】

1. ∵ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,∴ $a=5,b=3,c=4$。∴ 左焦点为 $(-4,0)$。∴ 以 $(-4,0)$ 为焦点,原点为中心的抛物线方程是 $y^2=-16x$。

2. B 3. B

4. 设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$,设直线方程为 $y=t$。

由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=t,\end{cases}$ 得 $x=\frac{t^2}{2p}$。

∴ 与抛物线的轴平行的直线和抛物线只有一个交点。

§3 双曲线

【练习(第80页)】

1. (1)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$。

(2)$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$。

(3)∵ $c=5$,且焦点为 $(0,-5),(0,5)$,

∴ 设其方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{25-a^2}=1$。

又双曲线过点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$,∴ $\frac{45}{4a^2}-\frac{4}{25-a^2}=1$。

解之得 $a^2=9$ 或 $a^2=\frac{125}{4}$(舍去)。

∴ 所求双曲线方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$。

2. ∵ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 中 $a^2=25,b^2=9$,∴ $F_1(-4,0),F_2(4,0)$。

又 $x^2-15y^2=15$,即 $\frac{x^2}{15}-y^2=1$,∴ $F_1'(-4,0),F_2'(4,0)$。

∴ 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 有相同的焦点。

【练习(第82页)】

1. (1)∵ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$,∴ $2a=4,2b=4,2c=4\sqrt{2},e=\sqrt{2}$。

(2)∵ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{81}=1$,

∴ $2a=6,2b=18,2c=6\sqrt{10},e=\frac{3\sqrt{10}}{3}=\sqrt{10}$。

(3)∵ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$,∴ $2a=8,2b=10,2c=2\sqrt{41},e=\frac{\sqrt{41}}{4}$。

(4)∵ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$,∴ $2a=10,2b=6,2c=2\sqrt{34},e=\frac{\sqrt{34}}{5}$。

2. ∵ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 中 $a=3,c=5$,∴ $e_1=\frac{5}{3}$;

又 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ 中 $a=4,c=5$,∴ $e_2=\frac{5}{4}$。

∴ $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=\frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2}=1$,

即两双曲线的离心率满足 $e_1^{-2}+e_2^{-2}=1$。

【习题3-3(A组)(第83页)】

1. (1)$F_1(-5,0),F_2(5,0)$。

(2)$F_1(-3\sqrt{5},0),F_2(3\sqrt{5},0)$。

(3)$F_1(0,-4),F_2(0,4)$。

(4)$F_1(0,-5),F_2(0,5)$。

2. ∵ $F_1(-4,0),F_2(4,0)$,且 $||PF_1|-|PF_2||=6$,

∴ $2a=6$,∴ $a=3,c=4$。∴ $b^2=16-9=7$。

∴ 曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$。草图略。

3. ∵ $F_1(0,-5),F_2(0,5)$,且 $||PF_1|-|PF_2||=6$,

$\therefore 2a=6,\therefore a=3,c=5$。$\therefore b^2=16$。

$\therefore$ 曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$。草图略。

4. 设双曲线方程为 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$,

$\therefore \begin{cases}9m+32n=1,\\ \frac{81}{16}m+25n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{9},\\ n=\frac{1}{16}。\end{cases}$

$\therefore$ 双曲线的方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$。

5. (1)$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 中,$2a=8,2b=6,2c=10,\therefore e=\frac{5}{4}$。草图略。

(2)$5x^2-20y^2=100$,即$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 中 $2a=4\sqrt{5},2b=2\sqrt{5},2c=10$,

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{2}$。草图略。

(3)$x^2-y^2=1$ 中 $2a=2,2b=2,2c=2\sqrt{2},\therefore e=\sqrt{2}$。草图略。

(4)$16x^2-9y^2=-144$,即$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ 中 $2a=8,2b=6,2c=10,\therefore e=\frac{5}{4}$。草图略。

6. $\because \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 短轴的两个顶点为 $F_1(0,3),F_2(0,-3)$,

$\therefore$ 双曲线的标准方程可设为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{9-a^2}=1$。

将$A(4,-5)$代入得$\frac{25}{a^2}-\frac{16}{9-a^2}=1$,解得 $a^2=5$ 或$a^2=45$(舍去)。

$\therefore$ 所求双曲线方程为$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{4}=1$。

7. 以 AB 所在的直线为 x 轴,AB 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系可知 $A(-700,0),B(700,0)$,设爆炸点 $P(x,y)$,则$||PA|-|PB||=3\times340=1\ 020$。

$\because 1\ 020<|AB|$,

$\therefore$ 点 P 在以 A,B 为焦点的双曲线上。

$\therefore c=700,a=510$。$\therefore b^2=c^2-a^2=229\ 900$。

$\therefore$ 点 P 的轨迹方程为$\frac{x^2}{260\ 100}-\frac{y^2}{229\ 900}=1$。

【习题 3-3(B 组)(第 83 页)】

$\because \frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1,\therefore a=\sqrt{5},c=\sqrt{5+m}$。

$\therefore 1<\sqrt{\frac{5+m}{5}}<2$。$\therefore 0<m<15$。

§4 曲线与方程

【思考交流(第 86 页)】

(1)由题意知$\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{16}{5}\right|}=\frac{5}{4}$,

即 $4\sqrt{(x-5)^2+y^2}=|5x-16|$。

将上式两边平方并化简,得$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$,

即该曲线的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$。

(2)与例 2 的相同之处是:到定点的距离与到定直线的距离之比是常数。其中例 2 的轨迹是椭圆,该比值为$\frac{1}{2}$;本题的轨迹是双曲线,该比值是$\frac{5}{4}$。

【练习(第 86 页)】

1. 以抛物线标准方程的解为坐标的点都在抛物线上,抛物线上点的坐标都是这个标准方程的解;以双曲线标准方程的解为坐标的点都在双曲线上,双曲线上点的坐标都是这个标准方程的解。

2. 点 $A(1,3),B(-1,-1)$在方程 $y=x^2+2x$ 的曲线上;点$C(2,2)$不在方程 $y=x^2+2x$ 的曲线上。

3. $\because k_{AB}=\frac{2}{1-(-1)}=1$,又 AB 的中点为 $M(0,1)$,

$\therefore$ 点 P 满足的方程是 $y-1=-(x-0)$,即 $x+y-1=0$。

【练习(第 87 页)】

1. 由题意知$\frac{|MF|}{|x-8|}=2$,即$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-8|}=2$,

化简整理,得 $3x^2-60x-y^2+252=0$。

2. 设 $P(x,y)$,$\because |PF_1|=3,\therefore \sqrt{(x+3)^2+y^2}=3$,

$\therefore (x+3)^2+y^2=9$。

由$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\\ (x+3)^2+y^2=9,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=-\frac{10}{3},\\ y=\frac{4\sqrt{5}}{3},\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\frac{10}{3},\\ y=-\frac{4\sqrt{5}}{3}。\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 到直线 $x=-\frac{25}{3}$的距离是$-\frac{10}{3}+\frac{25}{3}=5$。

【练习(第 89 页)】

1. 点 $A(-1,-1),C(2,3)$不在方程 $x^2+xy+y^2=1$ 的曲线上,点$B(1,-1)$在方程 $x^2+xy+y^2=1$ 的曲线上。

2. 由 $\begin{cases}x-y=0,\\ 2x^2+y^2=2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ y_1=\frac{\sqrt{6}}{3},\end{cases}\begin{cases}x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3},\\ y_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}。\end{cases}$ $\therefore$ 弦长为

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

【习题 3-4(A 组)(第 89 页)】

1. 设 $M(x,y)$,则$|xy|=1,\therefore xy=\pm1$。

$\therefore$ 点 M 满足的方程为 $y=\frac{1}{x}$或 $y=-\frac{1}{x}$。

2. 设 $P(x,y)$,则$|PA|^2+|PB|^2=64$,即$(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=64$。$\therefore x^2+y^2=16$,故点 P 满足的方程为 $x^2+y^2=16$。

3. 由$\begin{cases}3x-2y=0,\\ 4x^2+y^2=25,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\ y=-3。\end{cases}$$\therefore$ 直线与曲线的交点坐标为$(2,3),(-2,-3)$。

4. 设圆心 $C(x,y)$。$\because$ 圆心到定点 $F(0,2)$的距离与它到定直线 $y=-2$ 的距离相等,$\therefore$ 圆心 C 的轨迹是以 F 为焦点,$y=-2$ 为准线的抛物线。$\therefore$ 抛物线的方程为 $x^2=8y$。

5. $\because y^2=4x$,$\therefore$ 焦点坐标为 $F(1,0)$。$\therefore$ 直线方程为$y=x-1$,代入 $y^2=4x$ 得交点坐标为$(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$和$(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$。$\therefore |AB|=\sqrt{32+32}=8$。

6. 设 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,当直线斜率不存在时,直线方程为 $x=\frac{p}{2}$,代入$y^2=2px$ 得 $y=\pm p$,$\therefore y_1y_2=-p^2$;当直线斜率存在时,设斜率为 $k(k\neq0)$,则直线方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$,即 $x=\frac{y}{k}+\frac{p}{2}$,将其代入 $y^2=2px$,消去 x 得$ky^2-2py-p^2k=0$。由根与系数的关系知 $y_1y_2=-p^2$。综上可得:$y_1y_2=-p^2$。

7. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由弦长公式知

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$。

直线 $x-2y+2=0$ 可化为 $y=\frac{1}{2}x+1$,代入 $x^2+4y^2=4$ 得 $x^2+4\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)=4$。

$\therefore 2x^2+4x=0,\therefore x_1=0,x_2=-2$。

$\therefore |AB|=2\times\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{5}$。

8. 当斜率不存在时,直线方程为 $x=0$,此时只有一个公共点;当斜率存在时,设斜率为 k,则直线方程为 $y-2=kx$,即 $y=kx+2$,将其代入 $y=x^2+1$ 得 $x^2+1-kx-2=0$,即 $x^2-kx-1=0$。

$\because \Delta=k^2+4>0$,$\therefore$ 当斜率存在时,过点 $P(0,2)$的直线与抛物线$y=x^2+1$ 有两个公共点。

综上,当过点 $P(0,2)$的直线的斜率不存在时,直线与抛物线只有一个公共点;当斜率存在时,过点 $P(0,2)$的直线与抛物线有两个公共点。

【习题 3－4(B 组)(第 90 页)】

1. 由$\begin{cases}y=kx-1,\\x^2-y^2=4,\end{cases}$消去 y 得$(1-k^2)x^2+2kx-5=0$，

∵ 直线 $y=kx-1$ 与双曲线没有公共点，

∴ $\begin{cases}1-k^2\neq0,\\\Delta=4k^2-4(1-k^2)(-5)<0,\end{cases}$

∴ $k^2>\frac{5}{4}$，即 $k>\frac{\sqrt{5}}{2}$或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{2}$。

2. 设点 B 的坐标为(x_1,y_1)，AB 的中点为 $C(x,y)$，因为 $A(0,-1)$，所以$\begin{cases}y_1=2y+1,\\x_1=2x,\end{cases}$所以 $2y+1=2(2x)^2+1$，经化简得 $y=4x^2$。

3. 因为两条曲线的交点为 $P(x_0,y_0)$，所以 $f_1(x_0,y_0)=0$，$f_2(x_0,y_0)=0$，所以 $f_1(x_0,y_0)+\lambda f_2(x_0,y_0)=0$，所以方程 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ 的曲线经过点 P。

4. 设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$P(x,y)$，因为点 P 分线段 AB 所成的比为$1:2$，所以$\begin{cases}b=3x,\\a=\frac{3}{2}y,\end{cases}$因为$|AB|=2$，所以 $a^2+b^2=4$，所以点 P 满足的方程为$\frac{9}{4}y^2+9x^2=4$，即$\frac{y^2}{\frac{16}{9}}+\frac{x^2}{\frac{4}{9}}=1$。

【复习题三(A 组)(第 96 页)】

1. (1)将 $x^2+4y^2=16$ 变形得$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，所以 $a=4$，$b=2$，$c^2=a^2-b^2=12$，从而 $c=2\sqrt{3}$。长轴长$2a=8$，短轴长 $2b=4$，焦点坐标为$(\pm2\sqrt{3},0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，顶点坐标为$(\pm4,0)$和$(0,\pm2)$。草图略。

(2)将 $9x^2+y^2=81$ 变形得$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1$，所以 $a=9$，$b=3$，$c^2=a^2-b^2=72$，从而 $c=6\sqrt{2}$。长轴长$2a=18$，短轴长$2b=6$，焦点坐标为$(0,\pm6\sqrt{2})$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，顶点坐标为$(\pm3,0)$和$(0,\pm9)$。草图略。

2. (1)当 $m<2$ 时，$5-m>2-m>0$，方程$\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆。

(2)当$2<m<5$ 时，$5-m>0$，$2-m<0$，方程$\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 可以变形为$\frac{x^2}{5-m}-\frac{y^2}{m-2}=1$，表示焦点在 x 轴上的双曲线。

3. 当 $\alpha=0$ 时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 即为 $x^2+y^2=1$，表示单位圆；

当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆；

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 即为 $x^2=1$，$x=\pm1$，表示两条直线；

当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线；

当 $\alpha=\pi$ 时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 即为 $x^2-y^2=1$，表示焦点在 x 轴上的等轴双曲线。

4. 设动圆圆心 C 的坐标为(x,y)，半径为 r，因为动圆与直线 $x+5=0$ 相切，所以有 $|x+5|=r$。又因为圆经过点 $F(5,0)$，所以 $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=r$，从而有 $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=|x+5|$，整理得$y^2=20x$。图略。

5. 直线 $3x-5y-36=0$ 与两坐标轴的交点为$(12,0)$和$\left(0,-\frac{36}{5}\right)$，已知抛物线的顶点在坐标原点，当焦点为$(12,0)$时，方程为$y^2=48x$；当焦点为$\left(0,-\frac{36}{5}\right)$时，方程为 $x^2=-\frac{144}{5}y$。

6. 由抛物线方程 $y^2=4x$ 知，焦点坐标为 $F(1,0)$，所以过点 F 垂直于 x 轴的直线的方程为 $x=1$，由$\begin{cases}x=1,\\y^2=4x,\end{cases}$解得 $A(1,2)$，$B(1,-2)$，所以以 F 为圆心、AB 为直径的圆的方程为$(x-1)^2+y^2=4$。

7. 因为$\angle F_1PF_2=90°$，所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2=20$，由双曲线的定义知$||PF_1|-|PF_2||=2a=4$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=1$。

8. (代点作差法)设以 $P(2,-1)$为中点的弦为 AB，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$。因为$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$，$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1$，两式相减得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{16}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{4}=0$，因为点 $P(2,-1)$为弦 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=-2$，代入上式得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$，即直线 AB 的斜率为$\frac{1}{2}$，所以所求直线的方程为 $y-(-1)=\frac{1}{2}(x-2)$，化简得 $x-2y-4=0$。

9. 不妨设圆经过双曲线的右焦点$(5,0)$和右顶点$(3,0)$，那么圆心的坐标为 $M(4,y_0)$，因为圆心在双曲线上，所以$\frac{16}{9}-\frac{y_0^2}{16}=1$，解得 $y_0^2=\frac{112}{9}$，所以圆心到双曲线中心的距离$|MO|=\sqrt{16+\frac{112}{9}}=\sqrt{\frac{256}{9}}=\frac{16}{3}$。

【复习题三(B 组)(第 96 页)】

1. 由双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$ 知 $a=3|k|$，圆 $x^2+y^2=1$ 的半径为 1，数形结合观察图像可知，当 $a=3|k|>1$ 时，双曲线与圆没有公共点，所以$|k|>\frac{1}{3}$，即 $k>\frac{1}{3}$或 $k<-\frac{1}{3}$。

2. 由椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 知 $a=5$，$b=3$，$c=4$，焦点为$(0,\pm4)$，离心率为 $e_1=\frac{4}{5}$，所以双曲线的离心率为 $e_2=2$，由双曲线的焦点为$(0,\pm4)$，知 $c'=4$，所以 $a'=2$，$b'^2=12$，故双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$。

3. 双曲线$\frac{(x-8)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的中心为$(8,0)$，$a=4$，$b=3$，$c=5$，左焦点为$(3,0)$，左顶点为$(4,0)$，所以椭圆的右焦点为$(3,0)$，右顶点为$(4,0)$，所以在椭圆中有 $a-c=1$。又椭圆焦点到相应准线的距离为 $p=\frac{a^2}{c}-c=2.25$，解得 $a=5$，$c=4$，所以椭圆的中心为$(-1,0)$，且 $b^2=a^2-c^2=9$，故椭圆的方程为$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$。