

前川定理(The Maekawa-Justin Theorem)

潘世维

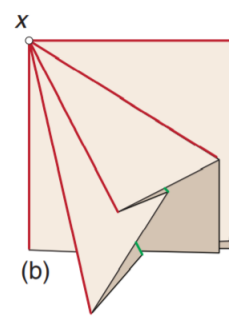
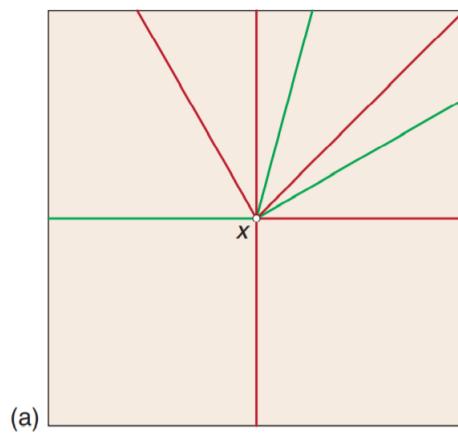
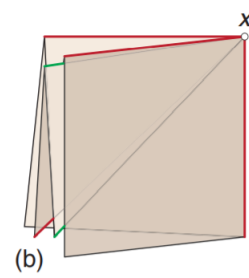
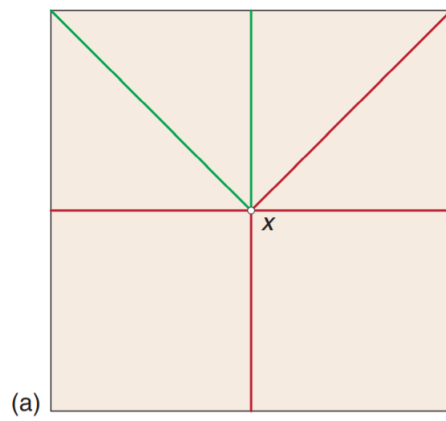
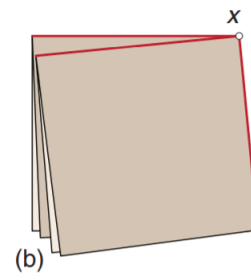
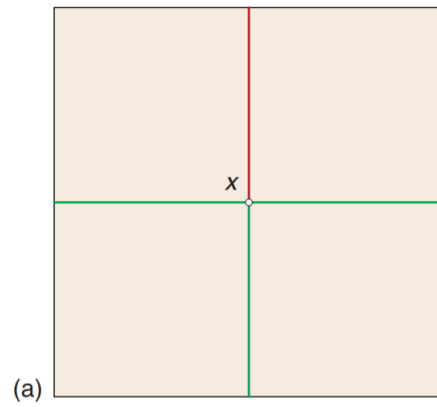
Saturday, August 15, 2020

1 简介



MAEKAWA Jun (前川淳), 日本的软件工程师, 数学家, 折纸艺术家。

2 平顶点折叠的例子



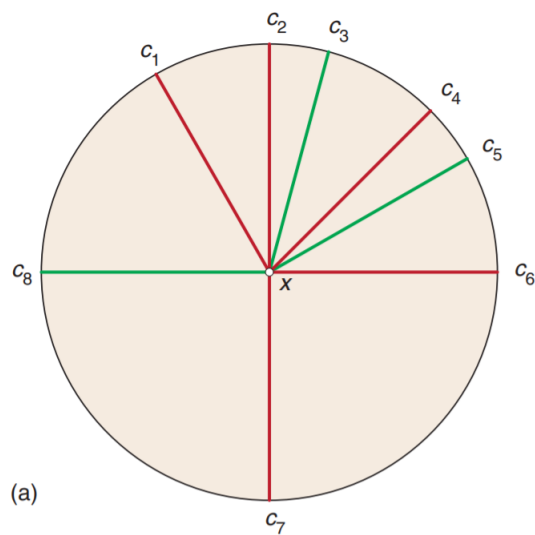
3 前川定理的证明

让 M (Mountain)和 V (Valley)分别代表平顶点折叠中山折和谷折的数量，
则前川定理可以表示为

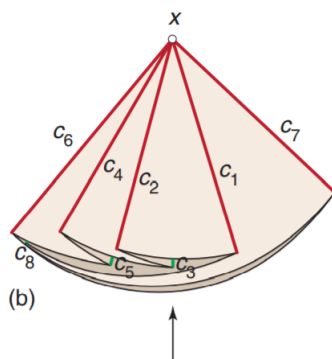
$$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2$$

$$\text{即 } |M - V| = 2$$

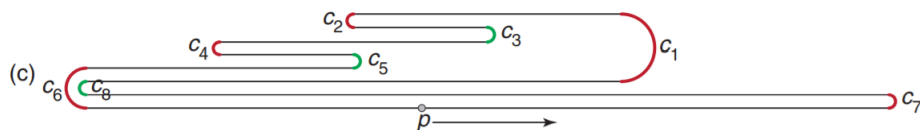
3.1 Proof 1 :



由于我们只关心顶点 x 和周围的折痕，所以可以以 x 为圆心做一个圆(a)，
按折痕折叠后形成(b)



从下往上看向顶点 x ，可以发现圆环形成了一个闭合回路(c)



想象有一个蚂蚁从 p 点出发在这个闭合回路上爬行，遇到山折便逆时针旋转 180° ，遇到谷折便顺时针旋转 180° ，最后回到原点，方向和开始一样，由于沿着闭合回路走了一周，相当于旋转了 360° 度，即

$$M \times 180^\circ + V \times (-180^\circ) = 360^\circ$$

$$M - V = 2$$

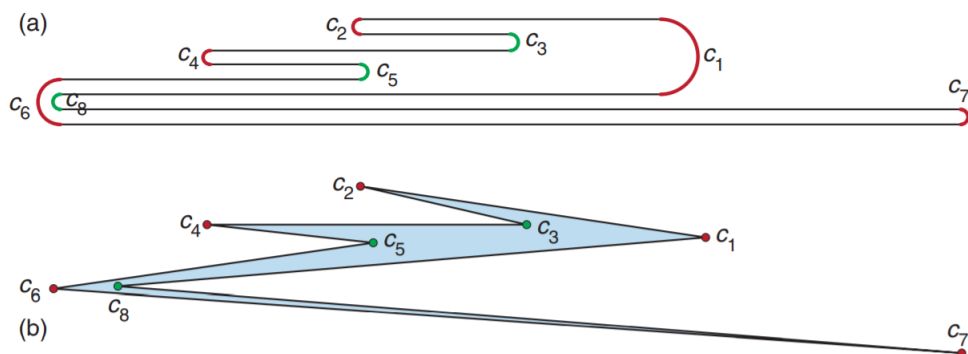
因为纸有两面，如果从另一面看，原来的山折变成了谷折，原来的谷折变成了山折，所以有

$$V - M = 2$$

这样便证明了前川定理

3.2 Proof 2 :

这个证明是由Jan Siwanowicz在他还是个高中生的时候提出的



将此前的闭合回路看作一个多边形，把山折看成内角等于 0 ，谷折看成内角等于 360°

由多边形内角和定理

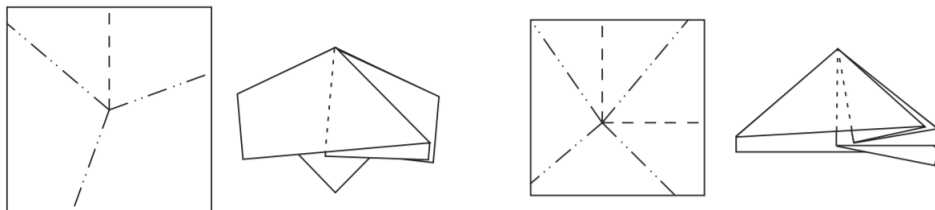
$$\sum_{i=1}^n \theta_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

推得在这个多边形中，内角和为

$$M \times 0^\circ + V \times 360^\circ$$

$$\text{所以 } V \times 360^\circ = (M + V - 2)180^\circ$$

$$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2$$



4 推广

$$M + V = 2(V + 1) \quad \text{or} \quad 2(V - 1)$$

得到偶数定理：单顶点折叠中折痕总数必为偶数，角的总数也必为偶数

powered by L^AT_EX
made by Erikpsw