教材习题解答

第一章 推理与证明

§1 归纳与类比

1.1 归纳推理

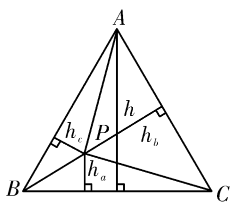
1.2 类比推理

教材课后习题答案

【练习】（教材第 7 页）

1. 解：第 8 行是“1　7　21　35　35　21　7　1”，相邻两行数之间的关系是：每一行首尾的数都是 1，其他的数都等于上一行中与之相邻的两个数的和。

2. 证明：如图所示，在△ABC 中，h 为正△ABC 的边 BC 上的高，P 为△ABC 内任意一点，h_a,h_b,h_c 分别为点 P 到三边 BC,CA,AB 的距离。



第 2 题图

$\because S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot h_a+\frac{1}{2}AC\cdot h_b+\frac{1}{2}AB\cdot h_c=\frac{1}{2}BC\cdot h$。

又$\because AB=BC=AC$。$\therefore h_a+h_b+h_c=h$（定值）。

类比面积法，可用体积法证明正四面体中的结论。

在正四面体 $A-BCD$ 中，侧棱长为 a，高为 h，P 为四面体内任意一点，h_a,h_b,h_c,h_d 分别为 P 到面 BCD,ACD,ABD,ABC 的距离。

$\because V_{P-BCD}+V_{P-ACD}+V_{P-ABD}+V_{P-ABC}=V_{A-BCD}$，

$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h_a+\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot h_b+\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot h_c+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h_d=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot h$。

又$\because S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore h_a+h_b+h_c+h_d=h$（定值）。

【习题 1－1】（教材第 7 页）

1. 解：$37\times 3n=111n$。

2. 解：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$。

3. 解：$S_1=1+(1\times 4+1)$，

$S_2=1+(1\times 4+1)+(2\times 4+1)$，

$S_3=1+(1\times 4+1)+(2\times 4+1)+(3\times 4+1)$，

由此猜想：

$S_n=1+(1\times 4+1)+(2\times 4+1)+\cdots+(n\times 4+1)=n+1+4(1+2+\cdots+n)=n+1+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2n^2+3n+1$。

4. 解：$\because (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$，

$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$，

…

$2^3-1^3=3\times 1^2+3\times 1+1$，

以上各式相加得

$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$，

$\therefore 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\frac{1}{3}\left[n^3+3n^2+3n-n-\frac{3}{2}n(n+1)\right]$

$=\frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}n(n+1)\right]$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

5. 解：在空间直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴、z 轴正方向同向的三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 作为基底，对于空间内的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，由空间向量基本定理知，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这样，空间的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以由 x,y,z 唯一确定，我们把有序实数组 (x,y,z) 叫作 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记做 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$。

§2 综合法与分析法

2.1 综合法

2.2 分析法

教材课后习题答案

【练习】（教材第 9 页）

证明：$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2$，$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，$\therefore \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a+b|\geqslant a+b$，$\therefore \sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$。

【练习 1】（教材第 11 页）

1. 证明：要证$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$（其中 $a\geqslant 3$），

只需证$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}$，

只需证$(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2<(\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2})^2$，

即证 $\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-1)(a-2)}$，

只需证 $a(a-3)<(a-1)(a-2)$，即证 $0<2$，

$\because 0<2$ 成立，

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$。

2. 证明：设球的半径为 R，正方体的棱长为 a，则 $4\pi R^2=6a^2$，$\therefore a=\sqrt{\frac{2}{3}\pi}R$，

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，$V_{正方体}=a^3=\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$。

要证 $V_{球}>V_{正方体}$，即证$\frac{4}{3}\pi R^3>\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$，

只需证 $2>\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$，只需证 $4>\frac{2}{3}\pi$，即 $6>\pi$。

$\because 6>\pi$ 成立，$\therefore V_{球}>V_{正方体}$。

【练习 2】（教材第 12 页）

证明：在 Rt△ADE 和 Rt△ADF 中，$\tan\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}\tan\angle AFD=\frac{AD}{DF}=\frac{4}{3}$，又$\because \angle BAF=\angle AFD$，$\therefore \tan\angle BAF=\frac{4}{3}$，$\therefore \tan 2\angle DAE=\frac{2\tan\angle DAE}{1-\tan^2\angle DAE}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$，$\therefore \tan 2\angle DAE=\tan\angle BAF$。又 $2\angle DAE$，$\angle BAF\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2\angle DAE=\angle BAF$，$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$。

【习题 1－2】（教材第 12 页）

1. 证明：$\because a>0,b>0$，

$\therefore \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$，

$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。要证$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$，

只需证 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b$，即证$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。

而$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$已证明，$\therefore \frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$。

要证$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，只需证$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，

即证 $a^2+2ab+b^2\leqslant 2a^2+2b^2$，

即证 $2ab\leqslant a^2+b^2$，只需证$(a-b)^2\geqslant 0$，

又$(a-b)^2\geqslant 0$ 显然成立，∴ $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$。

∴ $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$。

2. 证明：由第 1 题可知$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，

∴ $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$。

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$。

以上三个不等式相加可得，

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+b+c+c+a)=\sqrt{2}(a+b+c)$，

∴ $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$。

3. 证明：设任意 $x_1, x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

∵ $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 在$(2,+\infty)$上为增函数，

∴ $x_1^2-4x_1+3<x_2^2-4x_2+3$。

又∵ $y=2^\mu$ 在$(-\infty,+\infty)$上为增函数。

∴ $2^{x_1^2-4x_1+3}<2^{x_2^2-4x_2+3}$。

∴ $f(x)=2^{x^2-4x+3}$在$(2,+\infty)$上是增加的。

4. 证明：∵ $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，

∴ 可设 $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$，$c=\cos\alpha$，$d=\sin\alpha$，

∴ $|ac+bd|=|\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha|=|\cos(\theta-\alpha)|\leqslant 1$，

∴ $|ac+bd|\leqslant 1$。

5. 证明：要证 $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\leqslant 1$，只需证$|x+y|\leqslant|1+xy|$，只需证$(x+y)^2\leqslant(1+xy)^2$，即 $x^2+y^2+2xy\leqslant 1+x^2y^2+2xy$，只需证 $x^2+y^2-1-x^2y^2\leqslant 0$，即证$(x^2-1)(y^2-1)\geqslant 0$。

∵ $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，∴ $x^2\leqslant 1$，$y^2\leqslant 1$，

∴ $x^2-1\leqslant 0$，$y^2-1\leqslant 0$，

∴ $(x^2-1)(y^2-1)\geqslant 0$ 成立，∴ $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\leqslant 1$。

6. 证明：①当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$时，$\sin x\leqslant 1\leqslant\frac{\pi}{2}$，

∴ $\sin x<x$；

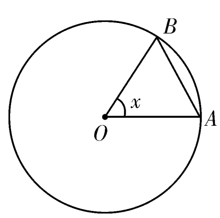
②当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，

如图所示，在以 O 为圆心，1 为半径的单位圆中，易知 $S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}$。

令 $\angle AOB=x$。则$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1^2$，

∴ $\sin x<x$。

综上可知，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$。



第 6 题图

7. 证明：∵ $a+b+c$，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ 组成公比为 q 的等比数列，

∴ $b+c-a=(a+b+c)q$，$c+a-b=(a+b+c)q^2$，$a+b-c=(a+b+c)q^3$。

以上三式相加，得

$a+b+c=(a+b+c)(q+q^2+q^3)$，

又∵ $a+b+c\neq 0$，

∴ $q+q^2+q^3=1$，即 $q^3+q^2+q=1$。

8. 证明：要证$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，

只需证$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，

即$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$，

只需证 $c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)$，

即 $c^2+a^2=ac+b^2$，

∵ $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 成等差数列，

∴ $B=60°$，

由余弦定理，有 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos 60°$，

即 $b^2=c^2+a^2-ac$，

∴ $c^2+a^2=ac+b^2$ 成立。

∴ $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$。

9. 证明：∵ $\angle ADC=\angle ABC=90°$，∴ $\triangle ADC$ 与$\triangle ABC$ 为直角三角形。又 ∵ M 为 AC 的中点，∴ $MB=MD=\frac{1}{2}AC$。∴ $\triangle BDM$ 为等腰三角形。又∵ N 为底边 BD 的中点，∴ $MN\perp BD$。

§3 反证法

教材课后习题答案

【练习 1】（教材第 14 页）

证明：假设$\sqrt{3}$不是无理数，即$\sqrt{3}$是有理数，那么它就可以表示成两个整数之比。

设$\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，$p\neq 0$，且 p，q 互质，则$\sqrt{3}p=q$，∴ $3p^2=q^2$，故 q^2 是 3 的倍数，q 也必然是 3 的倍数，

不妨设 $q=3k$，代入 $3p^2=q^2$，则有 $3p^2=9k^2$。即$p^2=3k^2$，

∴ p 也为 3 的倍数。即 p 和 q 都是 3 的倍数，它们有公约数 3。

这与 p、q 互质相矛盾。

故$\sqrt{3}$不是有理数而是无理数。

【练习 2】（教材第 15 页）

证明：假设 13 个人中任何两个人的生日都不是同一个月，那么每年将会有 13 个月，这与每年只有 12 个月相矛盾，故假设错误。

∴ 13 个人中至少有两个人的生日在同一个月。

【习题 1－3 组】（教材第 15 页）

(1) 证明：假设 400 个人中任何两个人的生日都不相同，那么就会有 400 个生日，即一年里至少有 400 天，这与每年只有 365 天或 366 天相矛盾。

故假设错误。

∴ 400 个人中至少有两个人生日相同。

(2) 证明：假设每个盒子里有一个球或没有球。

∵ 共有 90 个盒子，

∴ 最多有 90 个球，这与有 100 个球相矛盾。

故假设错误，

∴ 100 个球放在 90 个盒子里，至少有一个盒子里不少于两个球。

(3) 证明：假设$\sqrt{5}$不是无理数，即$\sqrt{5}$是有理数，那么它就可以表示成两个整数之比，

设$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$，$p\neq 0$，且 p，q 互质，则$\sqrt{5}p=q$，

∴ $5p^2=q^2$。故 q^2 是 5 的倍数，q 也必然是 5 的倍数。

不妨设 $q=5k$，代入 $5p^2=q^2$，则有 $5p^2=25k^2$，即$p^2=5k^2$，

∴ p 也为 5 的倍数，p 和 q 都是 5 的倍数，它们有公约数 5，这与 p，q 互质相矛盾。

故$\sqrt{5}$不是有理数而是无理数。

(4) 已知：$m\subsetneqq\beta$，$n\subsetneqq\beta$，$m\cap n=A$，$m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$。

求证：$\alpha\parallel\beta$。

证明：假设 $\alpha\cap\beta=a$，∵ $m\parallel\alpha$，$m\subsetneqq\beta$，$\alpha\cap\beta=a$，∴ $m\parallel a$。同理 $n\parallel a$。

$\therefore m/\!/n$,这与 $m\cap n=A$ 矛盾。$\therefore$ 假设不成立。$\therefore \alpha/\!/\beta$。

(5)已知:$l\perp\alpha$,$l\perp\beta$,垂足分别为 A,B。

求证:$\alpha/\!/\beta$。

证明:假设 $\alpha\cap\beta=a$,在 a 上取一点 C,连接 AC,BC。$\because C\in a$,$a\subsetneqq\alpha$,

$\therefore C\in\alpha$,又$\because A\in\alpha$,$\therefore AC\subsetneqq\alpha$。$\because l\perp\alpha$,$\therefore l\perp AC$,同理可得 $l\perp BC$。

$\therefore \angle CAB=\angle CBA=90°$,

$\therefore \angle CAB+\angle CBA+\angle ACB>180°$。

这与三角形内角和定理相矛盾。

$\therefore$ 垂直于同一条直线的两个平面互相平行。

§4 数学归纳法

教材课后习题答案

【练习】(教材第 19 页)

证明:①当 $n=1$ 时,$x^{2\times1}-y^{2\times1}=x^2-y^2=(x+y)\cdot(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除,命题成立。

②假设当 $n=k$($k\geqslant1$ 且 k 为正整数)时命题成立,即 $x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除,那么当 $n=k+1$ 时,

$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}=x^{2k}\cdot x^2-y^{2k}\cdot y^2$

$=x^{2k}\cdot x^2-y^{2k}\cdot x^2+y^{2k}\cdot x^2-y^{2k}\cdot y^2$

$=(x^{2k}-y^{2k})x^2+y^{2k}(x+y)(x-y)$。

由归纳假设可知,$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除,

又$\because y^{2k}(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除,

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,命题成立。

综上可知,$x^{2n}-y^{2n}$ 能被 $x+y$ 整除(n 为正整数)。

【习题 1-4】(教材第 19 页)

1\. 证明:①当 $n=1$ 时,左边 $=\frac{1}{2}$,右边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,左边 = 右边,

$\therefore$ 当 $n=1$ 时,等式成立;

②假设当 $n=k$($k\geqslant1$,$k\in\mathbf{N}^*$)时,等式成立,

即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$。

那么当 $n=k+1$ 时,$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$。

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,等式也成立。

2\. 证明:①当 $n=2$ 时,两条直线的交点有一个,

又 $f(2)=\frac{1}{2}\times2\times(2-1)=1$,

$\therefore$ 当 $n=2$ 时,命题成立;

②假设 $n=k$($k\geqslant2$,$k\in\mathbf{N}^*$)时,命题成立,即平面内满足题设的任何 k 条直线交点的个数 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$。

那么当 $n=k+1$ 时,

任取一条直线 l,除 l 以外其他 k 条直线的交点个数为 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$,

l 与其他 k 条直线的交点个数为 k,

即 $(k+1)$ 条直线共有 $f(k)+k$ 个交点,

即 $f(k+1)=f(k)+k=\frac{1}{2}k(k-1)+k=\frac{1}{2}k(k-1+2)=\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]$。

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,命题成立。

综上可知,对 $n\in\mathbf{N}_+$($n\geqslant2$),命题都成立。

3\. 证明:①当 $n=1$ 时,

左边 $=1^2=1$,右边 $=\frac{1}{6}\times1\times(1+1)\times(2\times1+1)=1$,左边 = 右边。

$\therefore$ 当 $n=1$ 时,等式成立;

②假设当 $n=k$($k\geqslant1$,$k\in\mathbf{N}^*$)时,等式成立,

即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

那么当 $n=k+1$ 时,

$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\cdot(2k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$。

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,等式也成立。

综上可知,等式对任何正整数 n 都成立。

【复习题一 A 组】(教材第 21 页)

1\.

第一定义	椭圆、双曲线都是与两定点(焦点)的关系构造而成	不同:椭圆是到两定点距离之和为常数的点的轨迹;双曲线是到两定点距离之差的绝对值为常数的点的轨迹
第二定义	椭圆、双曲线、抛物线都可用统一定义,即用到定点与到定直线的距离之比为一定值来描述	比值不同。 椭圆:$0<e<1$ 双曲线:$e>1$ 抛物线:$e=1$
几何性质	都是轴对称图形	不同:略

2\. (1)

指数函数	等比数列
函数结构:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)	通项公式:$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$($n\in\mathbf{N}_+$)
单调性:$a>1$ 时是增加的;$0<a<1$ 时是减少的	单调性:$a_1>0$,$q>1$ 时是增加的;$a_1>0$,$0<q<1$ 时是减少的($a_1<0$ 时略)
图像:x 轴上方平滑的一条曲线	图像:$a_1>0$ 时,为指数函数曲线在第一象限内一系列离散的点($a_1<0$ 时略)

(2)

线性函数	等差数列
函数结构:$y=kx+b$	通项公式:$a_n=kn+b$($n\in\mathbf{N}_+$)
单调性:$k>0$ 时是增加的;$k<0$ 时是减少的;$k=0$ 时为常函数	单调性:$k>0$ 时是增加的;$k<0$ 时是减少的;$k=0$ 时为常数列
图像:一条直线	图像:一条直线上离散的点,且在 y 轴右侧

3\.

平面几何	立体几何
①等腰三角形 ②等腰三角形的底 ③等腰三角形的腰 ④点到直线的距离	①正三棱锥 ②正三棱锥的底面 ③正三棱锥的侧面 ④直线到平面的距离

4\. 证明:$\frac{a^3+b^3}{2}=\frac{4(a+b)(a^2+b^2-ab)}{8}=\frac{(a+b)(4a^2+4b^2-4ab)}{8}$,

又 $4a^2+4b^2-4ab=2a^2+2b^2+2a^2+2b^2-4ab$,

且 $2a^2+2b^2-4ab\geqslant0$,$2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2$,

故 $2a^2+2b^2+2a^2+2b^2-4ab\geqslant(a+b)^2$,

即 $4a^2+4b^2-4ab\geqslant(a+b)^2$。

又 $a>0$,$b>0$,

所以$\frac{(a+b)(4a^2+4b^2-4ab)}{8}\geqslant\frac{(a+b)^3}{8}$，

即$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$。

5. 证明：在 BA 延长线上取一点 E。

为了证明 $BD=CD$，只需证明在$\triangle BCD$ 中，$\angle DCB=\angle DBC$。

在图中，$\angle ADB=\angle ACB$，$\angle ABD=\angle DCA$，

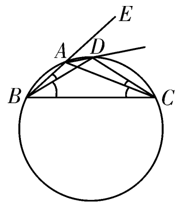
两式相加得$\angle ADB+\angle ABD=\angle DCB$，

即$\angle EAD=\angle DCB$。

又 AD 为$\angle EAC$ 的角平分线，$\angle EAD=\angle DAC$。

又在图中，$\angle DAC=\angle DBC$，所以 $\angle DBC=\angle DCB$。

即$\triangle BCD$ 为等腰三角形，故$BD=CD$。



第 5 题图

6. 证明：为了证明$(\sqrt{2}+1)^2<\frac{17}{5}\sqrt{3}$，只需证$2+1+2\sqrt{2}<\frac{17\sqrt{3}}{5}$，即 $15+10\sqrt{2}<17\sqrt{3}$，只需证$(15+10\sqrt{2})^2<(17\sqrt{3})^2$，即 $300\sqrt{2}<442$，$150\sqrt{2}<221$，

只需证$(150\sqrt{2})^2<221^2$，即 $45\ 000<48\ 841$。

此式显然成立. 以上各步可逆，故原不等式成立。

7. 证明：因为 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三条边长，且 $m>0$，

故 $a+m>0$，$b+m>0$，$c+m>0$。

为了证明$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$，

只需证明 $a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)>c(a+m)(b+m)$，

即只需证明 $m^2(a+b-c)+2mab+abc>0$。

又 $m>0$，$a+b-c>0$，故 $m^2(a+b-c)>0$，$2mab>0$。

又 $abc>0$，所以 $m^2(a+b-c)+2mab+abc>0$ 成立。

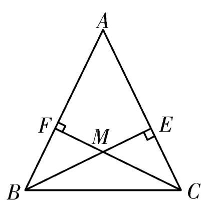
以上各步可逆，故原不等式成立。

8. 证法一：(分析法)

为了证明 $MB=MC$，只需证明 $\triangle BFM\cong\triangle CEM$。

因为 $\triangle BFM$，$\triangle CEM$ 均为直角三角形，且$\angle BMF=\angle CME$，只需证明$BF=CE$ 即可。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CEB$ 中，由于$\triangle ABC$ 为等腰三角形，所以$\angle ABC=\angle ACB$，又由于 $BC=CB$，$\angle BFC=\angle CEB=90°$，所以$\triangle BFC\cong\triangle CEB$，所以$BF=CE$。



第 8 题图

以上各步可逆，故 $MB=MC$。

证法二：(综合法)

由于$\triangle ABC$ 为等腰三角形。所以 $\angle ABC=\angle ACB$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CEB$中，$BC=CB$，$\angle BFC=\angle CEB=90°$，

所以$\triangle BFC\cong\triangle CEB$，所以 $BF=CE$。

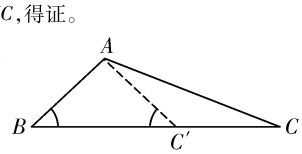
在 $\mathrm{Rt}\triangle BFM$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CEM$ 中，$\angle BMF=\angle CME$，$\angle BFM=\angle CEM=90°$，

所以$\triangle BFM\cong\triangle CEM$，所以 $MB=MC$，得证。

9. 证明：如图所示，不妨设 $AC>AB$，在 BC 边上取一点 C'，使 $AB=AC'$，

则$\triangle ABC'$ 为等腰三角形，则$\angle B=\angle AC'B$。

又因为$\angle AC'B$ 为$\triangle ACC'$的外角，所以$\angle AC'B=\angle C+\angle C'AC$，



第 9 题图

故$\angle AC'B>\angle C$，即$\angle B>\angle C$。可证大边对大角。

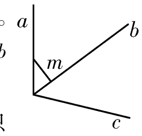
10. 证明：假设在一个三角形中，没有一个内角大于或等于 60°，即均小于 60°，则三角形的内角和小于 180°，与三角形中三内角和等于 180°矛盾。故假设不成立。原命题成立。

11. (1)证明：假设人口为 50 万人的城市中，没有人头发根数相同。首先对其中 200 001 人的头发数统计。由假设应对应 0 到 20 万中每一个数。对剩下的 299 999 人中任选 1 人出来。由前提条件，也应对应在 0 到 20 万中某一个数，这样就出现至少两人头发根数相同，与假设矛盾。故假设不成立。原命题成立。

(2)一定有。从极端情况考虑：假设 200 001 人对应 0 到 20 万中每一个数，另外 200 001 人也对应 0 到 20 万中每一个数，还剩 99 998 人，任选一人。应对应 0 到 10 万中某一个数，这样，肯定存在三个人头发根数相同。

12. 证明：假设这三条直线为 a,b,c，存在一条公垂线 m。由假设 $a\perp m$，$b\perp m$，且 a,b 相交，可知 m 垂直于 a,b 所决定的平面 α。

同理 m 垂直于 b,c 所决定的平面β，由过一点有且只有一个平面与已知直线垂直，可得平面 α 与平面 β 重合。即 a,b,c 三条直线共面。故假设不成立，原命题成立。



第 12 题图

13. 证明：假设 a,b,c,d 四个数中没有一个是负数，即 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，$c\geqslant0$，$d\geqslant0$。

由 $a+b=1$，$c+d=1$，知$(a+c)+(b+d)=2$，

即$(a+c)^2+(b+d)^2+2(a+c)(b+d)=4$，

即 $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)+2ab+2ad+2bc+2cd=4$，

即$(a^2+b^2+2ab)+(c^2+d^2+2cd)+2(ac+bd)+2(ad+bc)=4$，

即$(a+b)^2+(c+d)^2+2(ac+bd)+2(ad+bc)=4$，①

由已知 $a+b=1$，$c+d=1$，$ac+bd>1$，

得$(a+b)^2+(c+d)^2+2(ac+bd)>4$，

又 $2(ad+bc)\geqslant0$，

故$(a+b)^2+(c+d)^2+2(ac+bd)+2(ad+bc)>4$。

这与①矛盾。故假设不成立，原命题成立。

14. 证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，左边 = 右边，等式成立。

(2)假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$时等式成立，即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+k)^2$。

当 $n=k+1$ 时，$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]^2$。

即当 $n=k+1$ 时，等式成立。

由(1)(2)知对于 $n\in\mathbf{N}_+$ 等式成立。

15. 证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=(-1)^1\times(2-1)=-1$，

右边 $=(-1)^1\times1=-1$。

左边 = 右边，等式成立。

(2)假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$时，等式成立，

即 $-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^kk$。

当 $n=k+1$ 时，

$-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)$

$=(-1)^kk+(-1)^{k+1}(2k+1)$

$=(-1)^{k+1}(2k+1-k)$

$=(-1)^{k+1}(k+1)$。

即当 $n=k+1$ 时等式成立。

由(1)(2)知对于 $n\in\mathbf{N}_+$，等式成立。

16. 证明：(1)当 $n=4$ 时，四边形对角线条数为 2。

而$f(4)=\frac{4\times(4-3)}{2}=2$。命题成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant4,k\in\mathbf{N}_+)$时，命题也成立，即$f(k)=\frac{k(k-3)}{2}$。

当 $n=k+1$ 时，即增加一个顶点时，凸多边形的对角线增加$(k-1)$条。

$f(k+1)=f(k)+k-1=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-k-2}{2}=$

$\frac{(k+1)(k-2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$。

即当 $n=k+1$ 时,命题成立。

由(1)(2)知对 $n\geqslant 4(n\in\mathbf{N}_+)$,命题成立。

17. 证明:(1)设 $f(n)=(n-2)\pi$,当 $n=3$ 时,三角形的内角和为 π,而 $(3-2)\pi=\pi$,即命题成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 3,k\in\mathbf{N}_+)$时,命题成立,即 $f(k)=(k-2)\pi$。

当 $n=k+1$ 时,即多一个顶点时,凸 n 边形的内角和多了 π。

$f(k+1)=f(k)+\pi=(k-2)\pi+\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi$。

即当 $n=k+1$ 时,命题成立。

由(1)(2)知对于 $n\geqslant 3(n\in\mathbf{N}_+)$,命题成立。

【复习题一 B 组】(教材第 22 页)

证明:由题意知 $a>0,b>0,a+b=1$,所以 $0<a<1,b=1-a$,所以 $1<3^a<3,(3^a-1)(3^a-3)<0$,即 $(3^a)^2-4\times 3^a+3<0$。因为 $3^a>0$,所以 $3^a-4+\frac{3}{3^a}<0$,即 $3^a+3^{1-a}-4<0$,故 $3^a+3^b<4$。

第二章 变化率与导数

§1 变化的快慢与变化率

教材课后习题答案

【练习 1】(教材第 27 页)

解:(1)当时间 t 从 0 min 变到 30 min 时,药物浓度 c 相对于自变量 t 的平均变化率为

$\frac{0.98-0.84}{30-0}\approx 0.0047$;

当时间 t 从 30 min 变到 40 min 时,药物浓度 c 相对于自变量 t 的平均变化率为

$\frac{1.00-0.98}{40-30}=0.002$;

当时间 t 从 80 min 变到 90 min 时,药物浓度 c 相对于自度量 t 的平均变化率为

$\frac{0.63-0.79}{90-80}=-0.016$。

$\because |0.0047|<|0.002|<|-0.016|$。

$\therefore$ 服药后 80 ~ 90 min 这段时间内血液中药物的质量浓度变化最快。

(2)我们用药物质量浓度的平均变化率的绝对值 $\left|\frac{\Delta c}{\Delta t}\right|$ 的大小来刻画药物质量浓度变化的快慢。当 $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ 大于 0 时,血液中药物的质量浓度在增加,当 $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ 小于 0 时,血液中药物的质量浓度在减少。

【练习 2】(教材第 30 页)

1. 解:我们将时间间隔每次缩短为前面的 $\frac{1}{10}$,计算出相应的平均速度得到下表。

t_0/s	t_1/s	时间的改变量(Δt)/s	路程的改变量(Δs)/m	平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$/(m/s)
2	2.1	0.1	2.009	20.09
2	2.01	0.01	0.196 49	19.649
2	2.001	0.001	0.019 604 9	19.604 9
2	2.000 1	0.000 1	0.001 960 049	19.600 49
2	…	…	…	…

由上表数值可以看出,当时间 t_1 趋于 $t_0=2$ s 时,平均速度趋于 19.6 m/s。

因此,可以认为该物体在 $t_0=2$ s 时的瞬时速度为 19.6 m/s。

2. 解:自变量 x 从 1 变到 1.1,函数值的平均变化率为 $\frac{\frac{1}{1.1}-\frac{1}{1}}{1.1-1}=-\frac{1}{1.1}\approx -0.909$;

自变量 x 从 1 变到 1.01,函数值的平均变化率为 $\frac{\frac{1}{1.01}-\frac{1}{1}}{1.01-1}=-\frac{1}{1.01}\approx -0.990$;

自变量 x 从 1 变到 1.001,函数值的平均变化率为

$\frac{\frac{1}{1.001}-\frac{1}{1}}{1.001-1}=-\frac{1}{1.001}\approx -0.999$;

由此,可以估计当 $x=1$ 时,函数的瞬时变化率是 -1。

【习题 2-1 A 组】(教材第 30 页)

1. 解:(1)$\because 2'57.96''+39.83''=3'37.79''$,

$2'58.12''+39.69''=3'37.81''$,

$2'58.12''+39.74''=3'37.86''$,

$\therefore 3'37.79''<3'37.81''<3'37.86''$。

$\therefore$ 1 号运动员全程跑得最快。

(2)$\because 39.69''<39.74''<39.83''$,

$\therefore$ 2 号运动员在最后 300 m 的冲刺阶段跑得最快。

2. 解:$\because$ (1)$\Delta y=f(2)-f(1)=-2\times 2+1-(-2\times 1+1)=-2$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{-2}{1}=-2$。

$\therefore$ 当 x 从 1 变为 2 时,函数值 y 改变了 -2,此时函数值 y 关于 x 的平均变化率为 -2。

(2)$\because \Delta y=f(1)-f(-1)=-2\times 1+1-[-2\times(-1)+1]=-4$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-4}{2}=-2$。

$\therefore$ 当 x 从 -1 变为 1 时,函数值改变了 -4,此时函数值 y 关于 x 的平均变化率为 -2。

(3)这个函数均匀变化,平均变化率为定值 -2。

$\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=-2(1+\Delta x)+1-(-2\times 1+1)=-2\Delta x$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$。

$\therefore$ 当 Δx 趋于 0 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2$。

$\therefore$ 函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 -2。

同理,函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $x=3$ 处的瞬时变化率也为 -2。

3. 解:(1)$\because \Delta s=(0+\Delta t)^2-1-(0^2-1)=(\Delta t)^2$,

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{(\Delta t)^2}{\Delta t}=\Delta t$。

当 Δt 趋于 0 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋于 0。

$\therefore$ 估计物体在 $t=0$ s 时的瞬时速度为 0 m/s。

(2)$\because \Delta s=(2+\Delta t)^2-1-(2^2-1)=4\Delta t+(\Delta t)^2$,

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=4+\Delta t$。

当 Δt 趋于 0 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋于 4。

$\therefore$ 由此估计物体在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 4 m/s。

(3)$\Delta s=(4+\Delta t)^2-1-(4^2-1)=8\Delta t+(\Delta t)^2$,

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{8\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=8+\Delta t$。

当 Δt 趋于 0 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋于 8。

$\therefore$ 由此估计物体在 $t=4$ s 时的瞬时速度为 8 m/s。

4. 解:$\because \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(x+\Delta x)^2-2x^2}{\Delta x}=4x+2\Delta x$。

(1)当 $x=1$,Δx 趋于 0 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋于 4。

$\therefore$ 函数 $y=2x^2$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 4。

(2)当 $x=-1$,Δx 趋于 0 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋于 -4。

$\therefore$ 函数 $y=2x^2$ 在 $x=-1$ 处的瞬时变化率为 -4。

(3)当 $x=0$,Δx 趋于0时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于0。

$\therefore$ 函数 $y=2x^2$ 在 $x=0$ 处的瞬时变化率为0。

5. 解:$\because \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}+2-\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$,

(1)当 $x=-1$,Δx 趋于0时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于 -1。

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{x}+2$ 在 $x=-1$ 处的瞬时变化率为 -1。

(2)当 $x=1$,Δx 趋于0时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于 -1。

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{x}+2$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 -1。

(3)当 $x=2$,Δx 趋于0时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于 $-\frac{1}{4}$。

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{x}+2$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $-\frac{1}{4}$。

【习题2-1 B组】(教材第31页)

1. 解:(1)$\because 10xy=1\ 000$,$\therefore y=\frac{100}{x}$。

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=\frac{100}{x}(x>0)$。

(2)由(1)得 $y=\frac{100}{x}$。设 $y=f(x)$,则 $f(x)=\frac{100}{x}$。

$\therefore f(1)=100$,$f(2)=\frac{100}{2}=50$,

$\therefore f(2)-f(1)=50-100=-50(\text{cm})$;

$\because f(8)=\frac{100}{8}=12.5$,$f(10)=\frac{100}{10}=10$,

$\therefore f(10)-f(8)=10-12.5=-2.5(\text{cm})$;

$\because \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{-50}{1}=-50$,

$\frac{f(10)-f(8)}{10-8}=\frac{-2.5}{2}=-1.25$。

$|-50|>|-1.25|$,

$\therefore$ 活塞的位置 x 从1 cm变为2 cm,水面高度改变了 -50 cm;活塞的位置 x 从8 cm变为10 cm,水面高度改变了 -2.5 cm;活塞的位置 x 从1 cm变为2 cm,水面高度的变化较快。

(3)$\because \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(10+\Delta x)-f(10)}{\Delta x}$

$=\frac{\frac{100}{10+\Delta x}-\frac{100}{10}}{\Delta x}=-\frac{10}{10+\Delta x}$,

当 Δx 趋于0时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于 -1。

$\therefore$ 当 $x=10$ cm时,水面高度 y 关于活塞的位置 x 的瞬时变化率为 -1。

2. 解:$\because S=\pi r^2$,

$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2}{\Delta r}=\frac{2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2}{\Delta r}=2\pi r+\pi\Delta r$,

当 Δr 趋于0时,$\frac{\Delta S}{\Delta r}$趋于 $2\pi r$。

$\therefore$ 半径 r 增大得越快,圆的面积 S 增大得越快。

§2 导数的概念及其几何意义

2.1 导数的概念

2.2 导数的几何意义

教材课后习题答案

【练习】(教材第33页)

1. 解:当 x 从4变到 $4+\Delta x$ 时,函数值从 3×4 变到 $3(4+\Delta x)$,

$\therefore$ 函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\frac{3(4+\Delta x)-3\times4}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3(\text{m}^3/\text{s})$。

当 $x=4$,Δx 趋于0时,平均变化率趋于3,

$\therefore f'(4)=3\ \text{m}^3/\text{s}$。

导数 $f'(4)$ 表示当 $x=4$ s时水量的瞬时变化率,即水流的瞬时速度。也就是如果水管中的水以 $x=4$ s时的瞬时速度流动的话,每经过1 s,水管中流过的水量为3 m^3。

2. 略

【练习】(教材第37页)

1. 解:设切线的斜率为 k,$f(x)=x^2$ 在区间$[2,2+\Delta x]$上的平均变化率为

$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$。

$\therefore$ 斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to0}(4+\Delta x)=4$。当 $x=2$ 时,$f(2)=2^2=4$,$\therefore$ 切点的坐标为$(2,4)$。因此切线方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $4x-y-4=0$。

2. 解:设切线的斜率为 k。

$\because x=2$,$\therefore f(2)=\frac{1}{2}$。

又$\because \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\frac{-1}{4+2\Delta x}$,

$\therefore$ 斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{-1}{4+2\Delta x}=-\frac{1}{4}$。

即该切线经过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,斜率为 $-\frac{1}{4}$。

因此切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$,即 $x+4y-4=0$。

【习题2-2 A组】(教材第37页)

1. 解:(1)当 t 从1变到 $1+\Delta t$ 时,

函数值 s 关于 t 的平均变化率为

$\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}=\frac{2(1+\Delta t)+1-2\times1-1}{\Delta t}=\frac{2\Delta t}{\Delta t}=2(\text{m/s})$。

$\therefore s'(1)=\lim\limits_{\Delta t\to0}2=2(\text{m/s})$。

$s'(1)$ 表示当 $t=1$ s时路程的瞬时变化率,即瞬时速度。也就是如果以 $t=1$ s时的瞬时速度运动时,每经过1 s,物体经过的路程为2 m。

(2)同(1)可得 $s'(2)=2$ m/s。

$s'(2)$ 表示如果以 $t=2$ s时的瞬时速度运动时,每经过1 s,物体经过的路程为2 m。

(3)同(1)可得 $s'(5)=2$ m/s。

$s'(5)$ 表示如果以 $t=5$ s时的瞬时速度运动时,每经过1 s,物体经过的路程为2 m。

2. 解:$\frac{S(5+\Delta r)-S(5)}{\Delta r}=\frac{\pi(5+\Delta r)^2-\pi\times5^2}{\Delta r}=10\pi+\pi\Delta r$。

$\therefore S'(5)=\lim\limits_{\Delta r\to0}(10\pi+\pi\Delta r)=10\pi$。

$S'(5)=10\pi$ 表示圆的半径是5时,圆的面积扩大的速度是 10π,也就是说,如果保持这一速度,圆的半径增加1时,圆的面积将增加 10π。

3. 解:(1)$\because \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\frac{-2(-1+\Delta x)^2+2\times(-1)^2}{\Delta x}$

$=\frac{4\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4-2\Delta x$,

$\therefore f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}(4-2\Delta x)=4$。

$f'(-1)=4$ 的几何意义是曲线 $f(x)=-2x^2$ 在点$(-1,-2)$处的切线的斜率为4。

(2)$\because \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\frac{-2(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=-2\Delta x$,

$\therefore f'(0)=0$。

$f'(0)=0$ 的几何意义是曲线 $f(x)=-2x^2$ 在点 $(0,0)$ 处的切线的斜率为 0。

(3) $\because \dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\dfrac{-2(2+\Delta x)^2+2\times 2^2}{\Delta x}=-8-2\Delta x$,

$\therefore f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-8-2\Delta x)=-8$。

$f'(2)=-8$ 的几何意义是曲线 $f(x)=-2x^2$ 在点 $(2,-8)$ 处的切线的斜率为 -8。

4. 解:(1) $\because \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{5}{-1+\Delta x}-\dfrac{5}{-1}}{\Delta x}=\dfrac{5}{-1+\Delta x}$,

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导数

$f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{5}{-1+\Delta x}=-5$。

(2) $\because \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{5}{1+\Delta x}-\dfrac{5}{1}}{\Delta x}=-\dfrac{5}{1+\Delta x}$,

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导数

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{5}{1+\Delta x}\right)=-5$。

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{5}{5+\Delta x}-\dfrac{5}{5}}{\Delta x}=-\dfrac{1}{5+\Delta x}$,

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导数

$f'(5)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{5+\Delta x}\right)=-\dfrac{1}{5}$。

5. 解:$\because x=1$,$\therefore f(1)=3$。

$\because \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{1+\Delta x}+2(1+\Delta x)-\dfrac{1}{1}-2\times 1}{\Delta x}$

$=2-\dfrac{1}{1+\Delta x}$,

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2-\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=1$。

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{1}{x}+2x$ 在点 $(1,3)$ 处的切线斜率为 1,

即该切线经过点 $(1,3)$,斜率为 1。

因此切线方程为 $y-3=x-1$,即 $x-y+2=0$。

【习题 2−2 B 组】(教材第 37 页)

1. 解:函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 表示以 $O(0,0)$ 为圆心,以 2 为半径的上半圆,切点为 $(1,\sqrt{3})$。

根据导数的几何意义,函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $x=1$ 处的导数即为过点 $(1,\sqrt{3})$ 且与圆相切的切线的斜率。

$\because$ 切点为 $A(1,\sqrt{3})$,且 $k_{OA}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$。

$\therefore$ 切线的斜率 $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore f'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

2. 解:$\because \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2-(-1+\Delta x)}-\dfrac{1}{2-(-1)}}{\Delta x}=\dfrac{1}{9-3\Delta x}$,

$\therefore f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{(9-3\Delta x)}=\dfrac{1}{9}$。

$\because x=-1$,$\therefore f(-1)=\dfrac{1}{3}$。

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{1}{2-x}$ 在点 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{9}$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}(x+1)$。即 $x-9y+4=0$。

§3 计算导数

教材课后习题答案

【练习】(教材第 40 页)

1. 解:$\because g=10\ \mathrm{m/s^2}$,$\therefore s=f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2=5t^2$。

首先对 $t=2$ 给出自变量 t 的改变量 Δt,则得到相应的函数值的改变量

$\Delta s=f(2+\Delta t)-f(2)=5(2+\Delta t)^2-5\times 2^2=5[4\Delta t+(\Delta t)^2]$。

再计算相应的平均变化率

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{5[4\Delta t+(\Delta t)^2]}{\Delta t}=5(4+\Delta t)$。

当 Δt 趋于 0 时,可以得到导数

$f'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}5(4+\Delta t)=20(\mathrm{m/s})$。

导数 $f'(2)$ 表示的是物体在第 2 s 时的瞬时速度,也就是如果以 $t=2$ s 的瞬时速度运动时,每经过 1 s,物体下降距离为 20 m。

2. 解:首先给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{100}{x+\Delta x}-\dfrac{100}{x}=\dfrac{-100\Delta x}{x(x+\Delta x)}$。

再计算相应的平均变化率

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-100\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\dfrac{-100}{x(x+\Delta x)}$。

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-100}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{100}{x^2}$。

分别将 $x=1$,$x=2$,$x=3$ 代入 $f'(x)$,可得

$f'(1)=-\dfrac{100}{1^2}=-100$;$f'(2)=-\dfrac{100}{2^2}=-25$;

$f'(3)=-\dfrac{100}{3^2}=-\dfrac{100}{9}$

【习题 2−3 A 组】(教材第 41 页)

1. 解:首先给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=3(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-3x^2-x=6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+\Delta x$。

再计算相应的平均变化率

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=6x+3\Delta x+1$。

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x+1)=6x+1$。

分别将 $x=2$,$x=-2$,$x=3$ 代入 $f'(x)$,可得

$f'(2)=6\times 2+1=13$;

$f'(-2)=6\times(-2)+1=-11$;

$f'(3)=6\times 3+1=19$。

2. 解:首先给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-3-\left(\dfrac{1}{x}-3\right)=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$。

再计算相应的平均变化率

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\dfrac{-1}{x(x+\Delta x)}$。

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2}$。

分别将 $x=1$,$x=-1$,$x=5$ 代入 $f'(x)$,可得

$f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1;f'(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}=-1;f'(5)=-\frac{1}{5^2}=-\frac{1}{25}$。

3. 解:首先给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)-3-(2x-3)=2\Delta x$。

再计算相应的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$。

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2=2$。

分别将 $x=0,x=-1,x=3$ 代入 $f'(x)$,可得

$f'(0)=2;f'(-1)=2;f'(3)=2$。

4. 解:$\because f'(x)=(x^2)'=2x$,设切点坐标为 (x_0,y_0)。

$\because$ 所求切线与直线 $y=2x+1$ 平行,

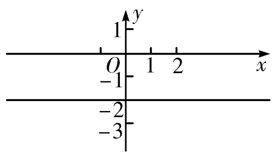
$\therefore$ 所求切线的斜率为 2,$\therefore 2x_0=2$,$\therefore x_0=1$,$\therefore y_0=x_0^2=1$,$\therefore$ 切点为 $(1,1)$,

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-1=2(x-1)$。即 $2x-y-1=0$。

5. 解:$f'(x)=-2$,

$g'(x)=-2$。

它们的导函数的图像都是过点 $(0,-2)$ 与 x 轴平行的直线,其图像如图所示。



第 5 题图

【习题 2-3 B 组】(教材第 41 页)

解:解法一:首先,给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$=(x+\Delta x)^3-x^3$

$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$。

再计算相应的平均变化率

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$。

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$。

解法二:利用导数公式可得:$y'=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$。

§4 导数的四则运算法则

4.1 导数的加法与减法法则

4.2 导数的乘法与除法法则

教材课后习题答案

【练习】(教材第 44 页)

1. 解:(1) $y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

(2) $y'=(3^x)'=3^x\ln 3$。

(3) $y'=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$。

2. 解:(1) $y'=2x+2$。(2) $y'=3^x\ln 3-3x^2$。(3) $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x}$。

(4) $y'=\mathrm{e}^x+x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$。

【练习 1】(教材第 46 页)

解:(1) $y'=3x^2\sin x+x^3\cos x$。(2) $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x+x^{-\frac{1}{2}}$。

(3) $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$。(4) $y'=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$。

【练习 2】(教材第 47 页)

1. 解:(1) $y'=(1-\ln x)\cos x-\left(x+\frac{1}{x}\right)\sin x$。

(2) $y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}+\frac{\cos x+x}{\ln x}\right)'$

$=\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)'+\left(\frac{\cos x+x}{\ln x}\right)'$

$=\frac{(\sqrt{x})'(x^2+1)-\sqrt{x}\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}+\frac{(\cos x+x)'\ln x-(\cos x+x)\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)-2x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}+\frac{(-\sin x+1)\ln x-(\cos x+x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}}{(x^2+1)^2}+\frac{x(1-\sin x)\ln x-\cos x-x}{x\ln^2 x}$

$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}}{2(x^2+1)^2}+\frac{x(1-\sin x)\ln x-\cos x-x}{x\ln^2 x}$。

2. 解:$y'=\left(\frac{2\ln x+1}{x^2}\right)'=\frac{(2\ln x+1)'x^2-(2\ln x+1)\cdot(x^2)'}{x^4}$

$=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^2-(2\ln x+1)\cdot 2x}{x^4}$

$=\frac{2x-4x\ln x-2x}{x^4}=-\frac{4\ln x}{x^3}$。

$\therefore$ 所求切线的斜率为 $-\frac{4\ln 1}{1^3}=0$,

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y=1$。

【习题 2-4 A 组】(教材第 48 页)

1. 解:(1) $f'(1)+g'(1)=2+1=3$。 (2) $f'(1)-g'(1)=2-1=1$。

(3) $-2f'(1)=-2\times 2=-4$。 (4) $3g'(1)=3\times 1=3$。

(5) $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2\times(-2)+1\times 1=-3$。

(6) $\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{[g(1)]^2}=\frac{2\times(-2)-1\times 1}{(-2)^2}=-\frac{5}{4}$。

2. 解:(1) $y'=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)'=(x^2)'+(x^{-2})'=2x-2x^{-3}$。

(2) $y'=(\tan x+\ln x)'=(\tan x)'+(\ln x)'=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}$。

(3) $y'=\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)'=(x^{-1})'-(x^{\frac{1}{2}})'=-x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$。

(4) $y'=(2^x-\cos x+4)'=(2^x)'-(\cos x)'+4'=2^x\ln 2+\sin x$。

3. 解:$y'=\left(x-\frac{1}{x}\right)'=x'-(x^{-1})'=1+x^{-2}=1+\frac{1}{x^2}$。

$\therefore$ 曲线在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率 $k=1+\frac{1}{1^2}=2$。

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-0=2(x-1)$,即 $2x-y-2=0$。

4. 解:(1) $y'=3x^2\cos x-x^3\sin x$。(2) $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$。

(3) $y'=\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{2}{x}$。

(4) $\because y=x^3-6x^2+11x-6$。$\therefore y'=(x^3-6x^2+11x-6)'=3x^2-12x+11$。

(5) $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

(6) $y'=\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$。

(7) $y'=\frac{(\sin x+x\cos x)\ln x-\sin x}{\ln^2 x}$

(8) $y'=\frac{(x\cos x-x\sin x-\cos x)\mathrm{e}^x}{x^2}$

5. 解:(1) $y'=\cos 2x$。

$\therefore y'|_{x=0}=\cos(2\times 0)=1;y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=0$。

(2) $f'(x)=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)'=\left(\frac{2}{1-\sqrt{x}}-1\right)'=\left(\frac{2}{1-\sqrt{x}}\right)'$

$=\frac{-2(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{2\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$。

$\because$ 当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 无意义。

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数值不存在；

当 $x=4$ 时，$f'(4)=\frac{1}{\sqrt{4}(1-\sqrt{4})^2}=\frac{1}{2}$。

(3) $f'(x)=(x\ln x+3x^2-1)'=(x\ln x)'+(3x^2)'-1'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+6x=\ln x+1+6x$。

$\therefore f'(1)=\ln 1+1+6\times1=7$。

$f'(2)=\ln 2+1+6\times2=\ln 2+13$。

【习题 2－4 B 组】(教材第 48 页)

1. 解：(1) $v=s'=(10t-5t^2)'=10-10t(\text{m/s})$。

$\therefore$ 物体被抛出 t s 后的速度为 $(10-10t)$ m/s。

(2) $v(2)=10-10\times2=-10(\text{m/s})$。

$\therefore$ 物体在 $t=2$ s 时的速度为 -10 m/s。

2. 解：$y'=(x^3+x-2)'=(x^3)'+x'-2'=3x^2+1$。

$\because$ 所求切线与直线 $y=4x-1$ 平行，

$\therefore$ 所求切线的斜率为 4。

设切点为 $(x_0,x_0^3+x_0-2)$，则 $3x_0^2+1=4$。

$\therefore 3x_0^2=3$，$\therefore x_0=\pm1$。

当 $x_0=1$ 时，$x_0^3+x_0-2=1^3+1-2=0$。

$\therefore$ 切点为 $(1,0)$。

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-0=4(x-1)$，即 $4x-y-4=0$。

当 $x_0=-1$ 时，$x_0^3+x_0-2=(-1)^3-1-2=-4$。

$\therefore$ 切点为 $(-1,-4)$。

$\therefore$ 所求切线方程为 $y+4=4(x+1)$，即 $4x-y=0$。

$\therefore$ 所求切线方程为 $4x-y-4=0$ 或 $4x-y=0$。

§5 简单复合函数的求导法则

教材课后习题答案

【练习】(教材第 51 页)

解：(1) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=2x-1$，则函数 $y=\frac{1}{(2x-1)^2}$ 是由函数 $f(u)=u^{-2}$ 与 $u=\varphi(x)=2x-1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=-2u^{-3}$，$\varphi'(x)=2$。

根据复合函数求导法则，可得

$\left[\frac{1}{(2x-1)^2}\right]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=-2u^{-3}\cdot2=-4(2x-1)^{-3}=-\frac{4}{(2x-1)^3}$。

(2) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=-x+1$，则函数 $y=\sin(-x+1)$ 是由函数 $f(u)=\sin u$ 与 $u=\varphi(x)=-x+1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=\cos u$，$\varphi'(x)=-1$。

根据复合函数求导法则，可得

$[\sin(-x+1)]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=\cos u\times(-1)=-\cos(-x+1)$。

(3) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=-2x+1$，则函数 $y=e^{-2x+1}$ 是由函数 $f(u)=e^u$ 与 $u=\varphi(x)=-2x+1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=e^u$，$\varphi'(x)=-2$。

根据复合函数求导法则，可得

$(e^{-2x+1})'=f'(u)\varphi'(x)=e^u\times(-2)=-2e^{-2x+1}$。

(4) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=x+3$，则函数 $y=\cos(x+3)$ 是由函数 $f(u)=\cos u$ 与 $u=\varphi(x)=x+3$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=-\sin u$，$\varphi'(x)=1$。

根据复合函数求导法则，可得

$[\cos(x+3)]'=f'(u)\varphi'(x)=-\sin u\times1=-\sin(x+3)$。

【习题 2－5】(教材第 51 页)

1. 解：(1) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=x+1$，则函数 $y=(x+1)^{10}$ 是由函数 $f(u)=u^{10}$ 和 $u=\varphi(x)=x+1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=10u^9$，$\varphi'(x)=1$。

根据复合函数求导法则，可得

$[(x+1)^{10}]'=f'(u)\varphi'(x)=10u^9\cdot1=10(x+1)^9$。

(2) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=2x+1$，则函数 $y=e^{2x+1}$ 是由函数 $f(u)=e^u$ 和 $u=\varphi(x)=2x+1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=e^u$，$\varphi'(x)=2$。

根据复合函数求导法则，可得

$(e^{2x+1})'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=e^u\cdot2=2e^{2x+1}$。

(3) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=-2x+5$，则函数 $y=\sin(-2x+5)$ 是由函数 $f(u)=\sin u$ 和 $u=\varphi(x)=-2x+5$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=\cos u$，$\varphi'(x)=-2$。

根据复合函数求导法则，可得

$[\sin(-2x+5)]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=\cos u\times(-2)=-2\cos(-2x+5)$。

(4) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=3x-1$，则函数 $y=\ln(3x-1)$ 是由函数 $f(u)=\ln u$ 和 $u=\varphi(x)=3x-1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=\frac{1}{u}$，$\varphi'(x)=3$。

根据复合函数求导法则，可得

$[\ln(3x-1)]'=f'(u)\varphi'(x)=\frac{1}{u}\times3=\frac{3}{3x-1}$。

(5) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=2x-1$，则函数 $y=\sqrt[3]{2x-1}$ 是由函数 $f(u)=u^{\frac{1}{3}}$ 和 $u=\varphi(x)=2x-1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$，$\varphi'(x)=2$。

根据复合函数的求导法则，可得

$(\sqrt[3]{2x-1})'=f'(u)\varphi'(x)=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot2=\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$。

(6) 设 $y=f(x)$，引入中间变量 $u=\varphi(x)=-x+1$，则函数 $y=\tan(-x+1)$ 是由函数 $f(u)=\tan u$ 和 $u=\varphi(x)=-x+1$ 复合而成的。

由导数公式表，可得 $f'(u)=\frac{1}{\cos^2 u}$，$\varphi'(x)=-1$。

根据复合函数求导法则，可得

$[\tan(-x+1)]'=f'(u)\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2 u}\times(-1)=-\frac{1}{\cos^2(-x+1)}$。

2. 解：(1)
$$\begin{aligned}y'&=[e^{-x+2}(2x+1)^5]'\\&=(e^{-x+2})'(2x+1)^5+e^{-x+2}\cdot[(2x+1)^5]'\\&=e^{-x+2}\cdot(-x+2)'(2x+1)^5+e^{-x+2}\cdot5(2x+1)^4\cdot(2x+1)'\\&=-e^{-x+2}(2x+1)^5+10e^{-x+2}(2x+1)^4\\&=e^{-x+2}(2x+1)^4(-2x+9).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}y'&=[\cos(3x-1)-\ln(-2x-1)]'\\&=[\cos(3x-1)]'-[\ln(-2x-1)]'\\&=-\sin(3x-1)\cdot(3x-1)'+\frac{1}{2x+1}\cdot(-2x-1)'\\&=-3\sin(3x-1)-\frac{2}{2x+1}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}y'&=\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}\right)'=\frac{(\sqrt{2x-1})'\cdot x\cdot2-\sqrt{2x-1}\cdot x'}{x^2}=\\&\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot x-\sqrt{2x-1}}{x^2}\\&=\frac{x-(2x-1)}{x^2\sqrt{2x-1}}=\frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}.\end{aligned}$$

3. 解：$y'=[\ln(3x-2)]'=\frac{1}{3x-2}\cdot(3x-2)'=\frac{3}{3x-2}$。$\therefore$ 所求切线斜率为 $\frac{3}{3\times1-2}=3$。

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$。

4. 解：$x'=\left[20\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\right]'=20\left[\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\right]'=20\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)'=20\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\times 3=60\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)=60\sin 3t$。

$\therefore$ 小球在 $t=0$ s，$t=\frac{\pi}{6}$ s，$t=\frac{\pi}{12}$ s 时刻的速度分别为 $v(0)=60\sin 0=0$(cm/s)；

$v\left(\frac{\pi}{6}\right)=60\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)=60$(cm/s)；

$v\left(\frac{\pi}{12}\right)=60\sin\left(3\times\frac{\pi}{12}\right)=60\sin\frac{\pi}{4}=60\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$(cm/s)。

5. 解：(1) $x'=(4+16e^{-2t})'=16(e^{-2t})'=16e^{-2t}\cdot(-2t)'=-32e^{-2t}$。

$\therefore$ 汽水温度 x 在 $t=1$ 处的导数为 $-32e^{-2\times1}=-32e^{-2}$。

(2) $\because x=\frac{5}{9}y-32$，$x=4+16e^{-2t}$，

$\therefore \frac{5}{9}y-32=4+16e^{-2t}$。$\therefore y=\frac{324}{5}+\frac{144}{5}e^{-2t}$。

$\therefore y'=\left(\frac{324}{5}+\frac{144}{5}e^{-2t}\right)'=\frac{144}{5}(e^{-2t})'=\frac{144}{5}\cdot e^{-2t}\cdot(-2t)'=\frac{144}{5}\cdot e^{-2t}\cdot(-2)=-\frac{288}{5}e^{-2t}$。

【复习题二 A组】(教材第53页)

1. 解：(1) $\because \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{40-20}{10-5}=4$(万 m^3/m)，

$\therefore$ 当 x 从5变到10时，存水量 y 关于 x 的平均变化率为4万 m^3/m。实际意义：在水深5~10 m之间，水深每增加1 m，存水量增加4万 m^3。

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{437.5-275}{30-25}=32.5$(万 m^3/m)。$\therefore$ 当 x 从25变到30时，存水量 y 关于 x 的平均变化率为32.5万 m^3/m。实际意义：在水深25~30 m之间，水深每增加1 m，存水量增加32.5万 m^3。

(3) 由(1)(2)的数值可知，随着水库水深的增加，水库的存水量增大的速度逐渐加快。

2. 解：(1) $S=-x^2+5x(0<x<5)$。

(2) $\because \Delta S=-(1+\Delta x)^2+5(1+\Delta x)-(-1+5)=3\Delta x-(\Delta x)^2$，

$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta x}=3-\Delta x$。

当 x 从1增加到 $1+\Delta x$ 时，面积 S 改变了 $3\Delta x-(\Delta x)^2$。S 关于 x 的平均变化率为 $3-\Delta x$；实际意义：长度改变1个单位长度，面积增加3个单位面积。

(3) $\because \Delta S=-(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-(-x^2+5x)=-2x\Delta x+5\Delta x-(\Delta x)^2$，

$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta x}=-2x+5-\Delta x$。

$\therefore$ 当长从 x 增加到 $x+\Delta x$ 时，面积 S 改变了 $-2x\Delta x+5\Delta x-(\Delta x)^2$；$S$ 关于 x 的平均变化率为 $-2x+5-\Delta x$；实际意义：长度改变1个单位长度，面积增加 $(-2x+5)$ 个单位面积。

(4) 由(2)可知，当 Δx 趋于0时，$\frac{\Delta S}{\Delta x}=3$，即瞬时变化率为3，实际意义是在 $x=1$ 处，面积的增加速度为3；

(5) 由(3)可知，当 Δx 趋于0时，$\frac{\Delta S}{\Delta x}=-2x+5$，即瞬时变化率为 $-2x+5$，实际意义是在 x 处，面积的增加速度为 $-2x+5$。

3. (1) $y'=1$。(2) $y'=2$。(3) $y'=2x$。(4) $y'=2x-3$。(5) $y'=2x-1$。(6) $y'=2x+2$。(7) $y'=4x$。(8) $y'=-\frac{2}{x^2}$。

以上各小题的解答过程略。

4. 解：(1) $y'=2x-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{2x}$。

(2) $y'=\sin x+x\cos x-\frac{\sqrt{x}\ln x}{2x}-\frac{\sqrt{x}}{x}$。

(3) $y'=\frac{x\cos x\ln x+\sin x-\sin x\ln x}{x^2}$。

(4) $\because y=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$，

$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$。

(5) $y'=e^x\tan x+\frac{e^x}{\cos^2 x}$。

(6) $y'=\frac{x^3-x^2+x+1+2x^2\ln x}{x(x+\ln x)^2}$。

(7) $y'=\sin x+x\cos x+e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$。

(8) $y'=\frac{x(1-4x\sqrt{x})\ln x-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x^2)(\ln x+1)}{2\sqrt{x}(x\ln x)^2}$

$=\frac{-(\sqrt{x}+2x^2)\ln x-2(\sqrt{x}-x^2)}{2(x\ln x)^2}$。

(9) $y'=9(3x+2)^2$。(10) $y'=2\cos 2x$。

(11) $y'=\frac{2}{\sqrt{4x-6}}$。(12) $y'=\frac{12}{4x+5}$。

5. 解：(1) 斜率为2。(2) 斜率为 $\frac{3}{2}$。(3) 斜率为1。(4) 斜率为1。

【复习题二 B组】(教材第54页)

1. 解：(1) $s(t)=10t-5t^2$。

(2) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{5-0}{1-0}=5$，当 t 从0变到1时，s 关于 t 的平均变化率为5 m/s。实际意义即 s 关于 t 的平均速度为5 m/s。

(3) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{3.75-5}{1.5-1}=-2.5$，当 t 从1变到1.5时，s 关于 t 的平均变化率为 -2.5 m/s。实际意义即 s 关于 t 的平均速度为 -2.5 m/s。

(4) $s'(t)=10-10t$，$s'(1.5)=-5$，$s'(1.5)$ 的实际意义是小球在 $t=1.5$ s 时刻的瞬时速度为 -5 m/s。

2. 解：$\because y'=2+\frac{1}{x^2}$，$\therefore$ 切线斜率为 $2+\frac{1}{1^2}=3$。

又 $\because$ 当 $x=1$ 时，$y=2$，$\therefore$ 曲线过点(1,2)。

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-2=3(x-1)$，即 $3x-y-1=0$。

第三章 导数应用

§1 函数的单调性与极值

1.1 导数与函数的单调性

1.2 函数的极值

教材课后习题答案

【练习】(教材第59页)

1. 解：(1) 由导数公式表和求导法则可得 $y'=4x-5$。

当 $x\in\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$ 时，$y'>0$；当 $x\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$ 时，$y'<0$。

$\therefore$ 函数 $y=2x^2-5x+4$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$。

(2) 由导数公式表和求导法则可得 $y'=3-3x^2=-3(x+1)(x-1)$。

当 $x\in(-1,1)$ 时，$y'>0$；

当 $x\in(-\infty,-1)$，或 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y'<0$。

$\therefore$ 函数 $y=3x-x^3$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$，单调递减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$。

2. 解：由导数公式表和求导法则可得

$y'=(2x-\sin x)'=2-\cos x$。

$\because$ 在 $(0,2\pi)$ 上，$|\cos x|\leqslant 1$。$\therefore y'=2-\cos x>0$ 恒成立。

$\therefore$ 函数 $y=2x-\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 上为增函数。

【练习】(教材第 62 页)

解:(1) $y' = 3 - 3x^2$。

令 $y' = 0$,得 $x_1 = -1, x_2 = 1$。

根据 x_1, x_2 列出表格,分析 y' 的符号、y 的单调性和极值点。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	极小值	↗	极大值	↘

从上表可知,$x_1 = -1$ 为函数 $y = 3x - x^3$ 的极小值点,函数在该点的极小值为 $y_{极小值} = -3 + 1 = -2$;

$x_2 = 1$ 为函数 $y = 3x - x^3$ 的极大值点,函数在该点的极大值为 $y_{极大值} = 3 - 1 = 2$。

$\therefore$ 函数 $y = 3x - x^3$ 的极大值为 2,极小值为 -2。

(2) $y' = (x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 1)' = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x-3)^2$。

令 $y' = 0$,得 $x_1 = 0, x_2 = 3$。

当 x 变化时,y' 与 y 随 x 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	极小值	↗	无极值	↗

从上表可以看出,当 $x = 0$ 时,y 有极小值,并且极小值为 -1;y 没有极大值。

$\therefore$ 函数 $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 1$ 的极小值为 -1,没有极大值。

【习题 3-1 A 组】(教材第 62 页)

1. 解:(1) $y' = -3x^2 - 4x - 4 = -3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right] < 0$ 在定义域内恒成立。

$\therefore$ 函数 y 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore$ 函数 $y = -x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ 的单调递减区间为 $(-\infty, +\infty)$。

(2) $\because y = (x+1)(x^2-1) = x^3 + x^2 - x - 1$,

$\therefore y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$。

当 $x \in (-\infty, -1)$,或 $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 时,$y' > 0$;

当 $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 时,$y' < 0$。

$\therefore$ 函数 $y = (x+1)(x^2-1)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$,单调递减区间为 $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$。

(3) $y' = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2} = \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{x^2}$。

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时,$y' > 0$;

当 $x \in (-\infty, 0)$,或 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时,$y' < 0$。

$\therefore$ 函数 $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$。

(4) $y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$。

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时,$y' > 0$;

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时,$y' < 0$。

$\therefore$ 函数 $y = x\ln x$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$,单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$。

2. 解:$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$。

当 $x \in (-\infty, -1)$,或 $x \in (1, +\infty)$ 时,$f'(x) > 0$;

当 $x \in (-1, 0)$,或 $x \in (0, 1)$ 时,$f'(x) < 0$。

$\therefore$ 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$,单调递减区间为 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$。

3. 解:(1) $y' = 12x - 1$。

当 $x \in \left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$ 时,$y' > 0$;当 $x \in \left(-\infty, \frac{1}{12}\right)$ 时,$y' < 0$。$\therefore$ 函数 $y = 6x^2 - x - 2$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{12}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$ 上单调递增。

$\therefore x = \frac{1}{12}$ 为函数 $y = 6x^2 - x - 2$ 的极小值点,且极小值为 $-\frac{49}{24}$,函数不存在极大值。

(2) $y' = -1 - 2x$。

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时,$y' > 0$;当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时,$y' < 0$。

$\therefore$ 函数 $y = 2 - x - x^2$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减。

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ 为函数 $y = 2 - x - x^2$ 的极大值点,且极大值为 $\frac{9}{4}$,函数不存在极小值。

(3) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$,令 $y' = 0$,得 $x_1 = 0, x_2 = 2$。

当 x 变化时,y',y 随 x 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大值	↘	极小值	↗

从上表可以看出,函数 $y = x^3 - 3x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 单调递增,在区间 $(0, 2)$ 上单调递减。

$x_1 = 0$ 是函数 $y = x^3 - 3x^2$ 的极大值点,函数在该点的极大值为 0;

$x_2 = 2$ 为函数 $y = x^3 - 3x^2$ 的极小值点,函数在该点的极小值为 -4。

(4) $y' = 6x^2 + 12 > 0$ 在定义域内恒成立。

$\therefore$ 函数 $y = 2x^3 + 12x - 5$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,该函数既不存在极大值,也不存在极小值。

4. 解:(1) $s'(t) = 6t^2 - 10t = 2t(3t-5)$,

令 $s'(t) > 0$,则 $t < 0$ 或 $t > \frac{5}{3}$;

令 $s'(t) < 0$,则 $0 < t < \frac{5}{3}$。

$\therefore$ 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时,$s(t)$ 随 t 的增大而增大;

当 $t \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$ 时,$s(t)$ 随 t 的增大而减少;

当 $t \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ 时,$s(t)$ 随 t 的增大而增大。

(2) 函数 $y = x + \sqrt{2+x}$ 的定义域为 $[-2, +\infty)$。

$\because y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 内恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上为增函数。

$\therefore$ 函数 $y = x + \sqrt{2+x}$ 的函数值随着自变量的增大而增大。

【习题 3-1 B 组】(教材第 62 页)

解:由题意,可得

$f(x) = 4x^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$。

$\therefore f'(x) = 8x - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$。

令 $f'(x) = 0$,得 $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$,

当 $x \in \left(-\infty, \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)$ 时,$f'(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, +\infty\right)$ 时,$f'(x) > 0$,

函数在$\left(-\infty,\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)$上单调递减，

在$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},+\infty\right)$上单调递增。

故当$x=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$时，函数$f(x)$的值最小。

§2 导数在实际问题中的应用

2.1 实际问题中导数的意义

2.2 最大值、最小值问题

教材课后习题答案

【练习】（教材第 65 页）

解：(1)当t从 0 s 变到 1 s 时，速度v从 0 m/s 变到 9 m/s，

此时，速度v关于时间t的平均变化率为

$\dfrac{9-0}{1-0}=9(\text{m/s}^2)$。

它表示从 0 s 到 1 s 这段时间内，每增加 1 s 的时间，速度平均增加 9 m/s。

当t从 3 s 变到 5 s 时，速度v从 21 m/s 变到 25 m/s，

此时，速度v关于时间t的平均变化率为

$\dfrac{25-21}{5-3}=2(\text{m/s}^2)$。

它表示从 3 s 到 5 s 这段时间内，每增加 1 s 的时间，速度平均增加 2 m/s。

(2)首先求$f'(t)$，根据导数公式表可得

$f'(t)=-2t+10$。

于是$f'(1)=-2\times1+10=8(\text{m/s}^2)$。

$f'(1)$表示当时间为 1 s 时，时间每增加 1 s，速度就增加 8 m/s。

【练习 1】（教材第 67 页）

解：首先求导函数，根据导数公式表和求导法则可得$y'=3x^2-24x+45$。

令$y'=0$，得$x_1=3$，$x_2=5$。

当x变化时，y'，y的变化如下表：

x	0	(0,3)	3	(3,5)	5	(5,10)	10
y'		+	0	−	0	+	
y	−10	↗	极大值	↘	极小值	↗	240

根据上表可得，$x_1=3$是函数的极大值点，$x_2=5$是函数的极小值点。

$y_{极大值}=44$；$y_{极小值}=40$。

与端点处比较知$y_{max}=240$，$y_{min}=-10$。

【练习 2】（教材第 68 页）

解：设圆柱形易拉罐的底面半径为r cm，高为h cm，表面积为S cm²，

则$\pi r^2h=500$，

$\therefore h=\dfrac{500}{\pi r^2}$。$\therefore S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\dfrac{500}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{1\,000}{r}$，

$\therefore S'=4\pi r-\dfrac{1\,000}{r^2}$。

令$S'=0$，得$r=\dfrac{5}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}$，此时$h=\dfrac{10}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}$。

当$r\in\left(0,\dfrac{5}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}\right)$时，$S'<0$；

当$r\in\left(\dfrac{5}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2},+\infty\right)$时，$S'>0$；

$\therefore$ 当$r=\dfrac{5}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}$时，函数取得极小值，且为最小值。

$\therefore$ 当圆柱形易拉罐的底面半径为$\dfrac{5}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}$ cm，高为$\dfrac{10}{\pi}\sqrt[3]{2\pi^2}$ cm时，才能使得总成本最低。

【习题 3−2 A 组】（教材第 69 页）

1. 解：(1)当t从 10 变到 20 时，函数值Q关于t的平均变化率为

$\dfrac{Q(20)-Q(10)}{20-10}=0.449\,81(\text{J/℃})$。

它表示从$t=10$℃到$t=20$℃这段温度内，温度平均每升高 1℃需热量 0.449 81 J。

(2)$Q'(t)=0.000\,594t+0.440\,9$。

$Q'(10)=0.446\,84(\text{J/℃})$，$Q'(100)=0.500\,3(\text{J/℃})$。

$Q'(10)$和$Q'(100)$分别表示$t=10$ ℃和$t=100$ ℃时，温度每升高 1 ℃所需热量为 0.446 84 J 和 0.500 3 J。

2. 解：(1)$\because f(x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$，

$\therefore f'(x)=4x-2$。

令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{2}$。

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$；当$x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$时，$f'(x)>0$。

$\therefore$ 当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$f(x)$为减函数，

当$x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$时，$f(x)$为增函数。

$\because f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=5$，且$\dfrac{1}{2}<1<5$，

$\therefore f(x)_{max}=f(2)=5$，$f(x)_{min}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$。

(2)$f'(x)=3x^2-18x-48$。

令$f'(x)=0$，得$x_1=-2$，$x_2=8$。

当$-2\leqslant x\leqslant2$时，$f'(x)\leqslant0$，

$\therefore f(x)$在$[-2,2]$上为减函数。

$\therefore f(x)_{max}=f(-2)=104$，$f(x)_{min}=f(2)=-72$。

3. 解：(1)设底面半径为r cm，则$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$。

$\therefore V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2\cdot h=\dfrac{1}{9}\pi h^3$。

即$V=f(h)=\dfrac{1}{9}\pi h^3(h>0)$。

(2)课本中右图所示图像不能反映这一函数关系。

理由：$V'=\dfrac{1}{3}\pi h^2>0$对$h>0$恒成立，

$\therefore f(h)$为增函数，另外，开始注水时体积随着高度的增长增加的慢，后来越来越快，

$\therefore$ 图像不能够反映函数关系式$V=f(h)$。

4. 解：(1)由题意，得$\dfrac{y-x}{2}\cdot x=512$，

$\therefore y=x+\dfrac{1\,024}{x}$，$x\in(0,+\infty)$。

(2)$y'=1-\dfrac{1\,024}{x^2}$，

令$y'=0$，得$x=32$($x=-32$舍去)。

当$x\in(0,32)$时，$y'<0$；当$x\in(32,+\infty)$时，$y'>0$。

$\therefore$ 函数y在$(0,32)$上是减函数，在$(32,+\infty)$上是增函数。

$\therefore$ 当$x\in(0,32)$时，y随x的增大而减少；

当$x\in(32,+\infty)$时，y随x的增大而增大。

(3)由(2)知，当$x=32$时，函数y取得极小值，也即最小值，此时$y=64$，

$\therefore$ 宽为$\dfrac{y-x}{2}=16$，即堆料场的长与宽的比为 2∶1 时，需要砌起的新墙用的材料最省。

【习题 3−2 B 组】（教材第 69 页）

解：(1)当t从 2 h 变到 4 h 时，该工人生产的产品量Q关于时间t的平均变化率为$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{-4^3+15\times4^2+12\times4+2^3-15\times2^2-12\times2}{2}=74(\text{t/h})$。

它表示从 $t=2$ h 到 $t=4$ h 这段时间内,该工人平均每小时生产 74 t 该产品。

(2)$f'(t)=-3t^2+30t+12$。

$f'(2)=-3\times2^2+30\times2+12=60(\text{t/h})$,

$f'(4)=-3\times4^2+30\times4+12=84(\text{t/h})$。

$f'(2)$ 和 $f'(4)$ 分别表示 $t=2$ h 和 $t=4$ h 时,这个工人每小时生产 60 t 和 84 t 该产品。

【复习题三 A 组】(教材第 71 页)

1. 解:(1)函数的单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(0,1)$;$x=0$ 为函数的极大值点,$x=1$ 为函数的极小值点。

(2)函数的定义域为$[0,+\infty)$,函数的单调递增区间为$(0,+\infty)$;函数无极值点。

(3)函数的定义域是$(0,+\infty)$,函数的单调递减区间为$(0,1)$,单调递增区间为$(1,+\infty)$;$x=1$ 为函数的极小值点,没有极大值点。

(4)函数的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,函数的单调递减区间为$(-\infty,0)$和$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;$x=\frac{1}{2}$为函数的极小值点,没有极大值点。

(5)函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,函数在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$ 上是单调递增的,函数无极值点。

(6)函数的定义域为 $\mathbf{R}$,函数在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增的,函数无极值点。

(7)函数的单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$为函数的极大值点,$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$为函数的极小值点。

(8)函数的单调递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$;$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$ 为函数的极大值点,$x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$ 为函数的极小值点。

2. 解:(1)$x=1$ 为函数的最小值点,最小值为 -2;$x=10$为函数的最大值点,最大值为 970。

(2)$x=1$ 为函数的最小值点,最小值为2;$x=0$ 和 $x=2$ 为函数最大值点,最大值为 4。

3. 解:设水池底长 x m,则它的宽为$\frac{1\ 600}{x}$ m,水池总造价为 y。不妨设池壁单价为 1,则池底单价为 1.5。则

$y=1\ 600\times1.5+6x+6\times\frac{1\ 600}{x}=2\ 400+6x+\frac{9\ 600}{x}(x>0)$。

令 $y'=6-\frac{9\ 600}{x^2}=0$,则 $x=40$。

可求得当 $x=40$ 时,函数取得最小值,最小值为 2 880。

即当水池长、宽均为 40 m 时,总造价最低,最低为 2 880。

4. 解:(1)$y=\frac{12+x+0.1x^2+0.1x-(10-0.8x)}{x}=0.1x+1.9+\frac{2}{x}$ $(x>0)$。

(2)当 $0<x<2\sqrt{5}$时,y 随着 x 的增加而减少,当 $x>2\sqrt{5}$时,y 随着 x 的增加而增加。

5. 解:(1)电力部门的收益 =(实际电价 - 成本价)× 用电量。

又∵ 下调后新增用电量与实际电价和原电价之差的平方成正比,

∴ 电价下调到 x 后新增用电量为 $50(x-0.8)^2$,

根据题意可知,$0.5<x<0.8$,

∴ 收益 y(亿元)与实际电价 x(元/(kW·h))的函数关系式为

$y=[1+50(x-0.8)^2](x-0.5)$,$0.5<x<0.8$。

(2)∵ $y'=150x^2-210x+73$。

令 $y'=0$,则 $x=\frac{21+\sqrt{3}}{30}$或 $x=\frac{21-\sqrt{3}}{30}$。

由实际意义可得 $x_1=0.64$,$x_2=0.76$。

当 $0.5<x<0.64$ 时,$y'>0$,函数单调递增;当$0.64<x<0.76$ 时,$y'<0$,函数单调递减;当$0.76<x<0.8$时,$y'>0$,函数单调递增。

(3)由(2)知,$x_1=0.64$,$x_2=0.76$ 为函数的极值点,此极值点即为最值点。

当 $x_1=0.64$ 时,

$y_1=[1+50\times(0.64-0.8)^2]\times(0.64-0.5)=0.319\ 2$;

当 $x_2=0.76$ 时,

$y_2=[1+50\times(0.76-0.8)^2]\times(0.76-0.5)=0.280\ 8$。

故电力部门把电价定为 0.64 元/(kW·h)时,可以获得最大收益,最大收益为 0.319 2 亿元。

6. 解:(1)当 t 从 1 变到 2 时,质量 m 关于 t 的平均变化率为 $e^{-4}-e^{-2}$,它表示在 $t=1$ min 到 $t=2$ min 这段时间内,该物质剩余质量变化的速度是$(e^{-4}-e^{-2})$kg/min,也就是平均每分钟减少$(e^{-2}-e^{-4})$kg。

(2)$m'(2)=-2e^{-4}$,它的实际意义是,在 $t=2$ min 这一时刻,该物质剩余质量变化的速度为 $-2e^{-4}$kg/min,也就是每过 1 min,该物质减少 $2e^{-4}$kg。

【复习题三 B 组】(教材第 71 页)

1. 解:(1)当 t 从 1 变到 2 时,电路中流过的电荷量 Q 关于 t 的平均变化率为 $9-\ln 2$,它表示在 $t=1$ s 到 $t=2$ s 这段时间内,平均每秒经过该电路的电荷量为$(9-\ln 2)$C,也就是这段时间内电路的平均电流为$(9-\ln 2)$A。

(2)$Q'(2)=11.5$,它的实际意义是,在 $t=2$ s 这一时刻,每秒经过该电路的电荷量为 11.5 C,也就是这段时间内电路的电流为 11.5 A。

$Q'(3)=\frac{53}{3}$,它的实际意义是,在 $t=3$ s 这一时刻,每秒经过该电路的电荷量为$\frac{53}{3}$C,也就是这段时间内电路的电流为$\frac{53}{3}$A。

(3)∵ $Q'(t)=6t-\frac{1}{t}$,又∵ $\left(6t-\frac{1}{t}\right)'=6+\frac{1}{t^2}>0$。

∴ $Q'(t)$随着 t 的增加而增加。

(4)由(3)可知,$Q'(t)$没有最大值,也没有最小值。

2. (1)当汽车的车速为 x km/h 时,在安全许可的范围内,1 min内某段公路内的汽车可以通过该路口,则这段公路内的车流量为

$$\frac{\frac{1\ 000}{60}x}{kx^2+5}=\frac{50x}{3kx^2+15},$$

由 $40=60^2k$,得 $k=\frac{1}{90}$,

∴ 车流量 y 关于车速 x 的函数为 $y=\frac{50x}{\frac{1}{30}x^2+15}=\frac{1\ 500x}{x^2+450}$。

(2)当 $x=\sqrt{450}\approx21$(km/h)时,y 取得最大值,也就是如果只考虑车流量,规定车速约为 21 km/h 时高速公路上的车流量最大,

显然这种规定不可行,这个速度对于汽车来说显然太慢了,也失去了高速公路的意义。

第四章 定积分

§1 定积分的概念

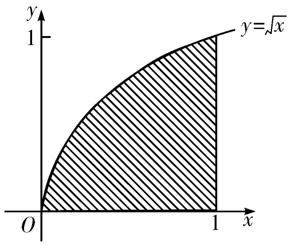
1.1 定积分的背景——面积和路程问题

1.2 定积分

教材课后习题答案

【练习 1】(教材第 76 页)

解:(1)如图所示。



练习 1 图

(2)将区间[0,1]等分成 5 个小区间,所求曲边梯形面积的过剩估计值为 $s_1=(\sqrt{0.2}+\sqrt{0.4}+\sqrt{0.6}+\sqrt{0.8}+\sqrt{1})\times 0.2\approx 0.7497$。

不足估计值为

$s_1'=(0+\sqrt{0.2}+\sqrt{0.4}+\sqrt{0.6}+\sqrt{0.8})\times 0.2\approx 0.5497$。

过剩估计值与不足估计值之差为

$s_1-s_1'=0.7497-0.5497=0.2$。

无论用 s_1 还是用 s_1' 来表示曲边梯形的面积 s,误差都不会超过 0.2。

【练习 2】(教材第 78 页)

解:将区间[0,5]等分成 5 个小区间。

汽车在 $0\leqslant t\leqslant 5$ 内走过的距离的过剩估计值为

$s_1=[v(1)+v(2)+v(3)+v(4)+v(5)]\times 1=300$。

汽车在 $0\leqslant t\leqslant 5$ 内走过的距离的不足估计值为

$s_1'=[v(0)+v(1)+v(2)+v(3)+v(4)]\times 1=200$。

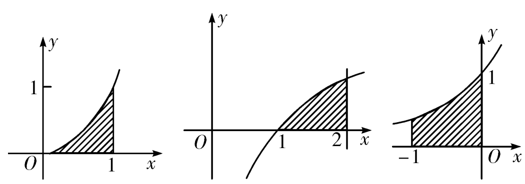
过剩估计值与不足估计值之差为

$s_1-s_1'=300-200=100$。

无论用 s_1 还是用 s_1' 来表示 $0\leqslant t\leqslant 5$ 内汽车走过的距离 s,误差都不超过 100。

【练习】(教材第 80 页)

解:用图形表示的定积分分别如图(1)(2)(3)所示。



练习图

【习题 4－1 A 组】(教材第 80 页)

1. 略

2. 解:(1)小明所跑路程的过剩估计值为$(19+17)\times\frac{1}{4}=9$(km)。

小明所跑路程的不足估计值为$(17+16)\times\frac{1}{4}=8.25$(km)。

过剩估计值与不足估计值之差为 $9-8.25=0.75$(km)。

(2)小明全程所跑路程的过剩估计值为 $s_1=(19+17+16+16+13+10)\times\frac{1}{4}=22.75$(km)。

小明全程所跑路程的不足估计值为 $s_1'=(17+16+16+13+10+0)\times\frac{1}{4}=18$(km)。

过剩估计值与不足估计值之差为 $s_1-s_1'=22.75-18=4.75$(km)。

3. 解:将区间[0,10]平均分成 10 份。

力 F 在 0 ~ 10 m 这段路程内所做功的过剩估计值为

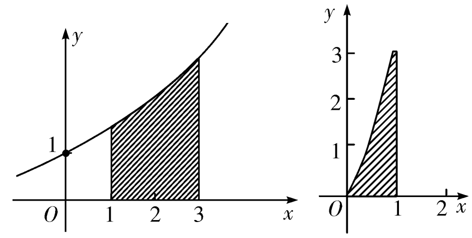
$W_1=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)\times 1\approx 2.929$(N·m)。

力 F 在 0 ~ 10 m 这段路程内所做功的不足估计值为

$W_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)\times 1\approx 2.020$(N·m)。

过剩估计值与不足估计值之差为 $W_1-W_2=0.909$(N·m)。

4. 解:用图像表示的定积分分别如图(1)(2)所示。



第 4 题图

5. 解:(1)$\int_1^2 2x\mathrm{d}x$ 表示由直线 $y=2x,x=1,x=2,y=0$所围成的梯形的面积,

$\therefore\int_1^2 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2+4)\times 1=3$。

(2)$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 表示半径为 2 的圆的面积的$\frac{1}{4}$,

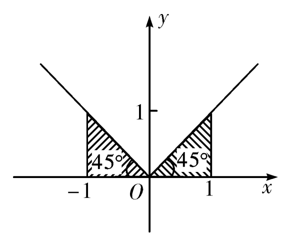
$\therefore\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi$。

6. 解:(1)$\int_0^1(\mathrm{e}^x+x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\frac{1}{3}=\mathrm{e}-\frac{2}{3}$。

(2)$\int_0^1(2\mathrm{e}^x-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=2\mathrm{e}-2-\frac{1}{3}=2\mathrm{e}-\frac{7}{3}$。

【习题 4－1 B 组】(教材第 81 页)

1. 解:$\int_{-1}^1|x|\mathrm{d}x$ 表示的是如图所示的阴影部分的两个等腰直角三角形的面积,



第 1 题图

$\therefore\int_{-1}^1|x|\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=1$。

2. 解:S_1 与定积分$\int_{-1}^1(x^2-1)\mathrm{d}x$ 互为相反数;

S_2 与定积分$\int_{-1}^1(x^2-1)\mathrm{d}x$ 相等。

§2 微积分基本定理

教材课后习题答案

【练习】(教材第 85 页)

1. 解:(1)$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-1$。

(2)$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}=0-1=-1$。

(3)$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$。

2. 解:(1)$\because(x^2)'=2x$,

$\therefore\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1-0=1$。

(2)$\because(x^2+5)'=2x$,

$\therefore\int_0^1 2x\mathrm{d}x=(x^2+5)\Big|_0^1=(1+5)-(0+5)=1$。

(3)$\because(x^2-\pi)'=2x$,$\therefore\int_0^1 2x\mathrm{d}x=(x^2-\pi)\Big|_0^1=(1-\pi)-(0-\pi)=1$。

(4) $\because (x^2-a)'=2x$，

$\therefore \int_0^1 2x\mathrm{d}x=(x^2-a)\Big|_0^1=(1-a)-(0-a)=1$。

3. 解：(1) $\int_0^1 (x^3-1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4-x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-1-0=-\frac{3}{4}$。

(2) $\int_2^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0=1-0=1$。

【习题 4-2　A 组】(教材第 85 页)

1. 解：$\because (2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})'=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$，

$\therefore \int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x=(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\Big|_0^1=2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2=2\sqrt{\mathrm{e}}-2$。

2. 解：$\because \left(\frac{1}{x+1}\right)'=f(x)$，

$\therefore \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$。

3. 解：$\because (\sin x\cos x)'=f(x)$，

$\therefore \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=(\sin x\cos x)\Big|_0^{\pi}$

$=\sin\pi\cos\pi-\sin 0\cos 0=0-0=0$。

4. 解：(1) $(\sin x)'=\cos x$；

$(\sin x+2)'=\cos x$；

$(\sin x+c)'=\cos x$。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$。

5. 解：(1) $\because (x+x^2)'=1+2x$，

$\therefore 1+2x$ 的一个原函数为 $x+x^2$。

$\therefore \int_0^1 (1+2x)\mathrm{d}x=(x+x^2)\Big|_0^1=1+1-0-0=2$。

(2) $\because (-3\cos x+\sin x)'=3\sin x+\cos x$，

$\therefore 3\sin x+\cos x$ 的一个原函数为 $-3\cos x+\sin x$。

$\therefore \int_0^1 (3\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=(-3\cos x+\sin x)\Big|_0^1$

$=(-3\cos 1+\sin 1)-(-3\cos 0+\sin 0)$

$=-3\cos 1+\sin 1+3$。

6. 解：(1) $\int_0^1 (2x-7)\mathrm{d}x=(x^2-7x)\Big|_0^1=1-7=-6$。

(2) $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{3}{x}+2\ln x\right)\Bigg|_1^2=\left(-\frac{3}{2}+2\ln 2\right)-(-3+0)=\frac{3}{2}+2\ln 2$。

(3) $\int_1^3 3^x\mathrm{d}x=\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{3^3}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 3}=\frac{24}{\ln 3}$。

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\cos\pi-[-\cos(-\pi)]=-\cos\pi+\cos\pi=0$。

(5) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e})-(\ln 1-1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=1$。

(6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})$。

(7) $\int_0^1 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-1+3=\frac{7}{3}$。

(8) $\int_1^3 (x-1)^2\mathrm{d}x=\int_1^3 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{3}\times 3^3-3^2+3-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{8}{3}$。

(9) $\int_{-1}^1 (2^x+x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 2^x\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$

$=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_{-1}^1+\frac{1}{3}x^3\Bigg|_{-1}^1$

$=\frac{2}{\ln 2}-\frac{2^{-1}}{\ln 2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2\ln 2}+\frac{2}{3}$。

(10) $\int_1^2 \left(\frac{1}{2x}+x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x+\int_1^2 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln x\Bigg|_1^2+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1+\frac{2}{5}\times 2^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}\times 1=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{2}{5}$。

7. 解：设汽车在 5～10 s 这段时间走过的路程为 s，则

$s=\int_5^{10} (2\sqrt{t}+t+2)\mathrm{d}t=\left(\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2+2t\right)\Bigg|_5^{10}=\frac{4}{3}\times 10^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\times 10^2+2\times 10-\left(\frac{4}{3}\times 5^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\times 5^2+2\times 5\right)=\frac{40}{3}\sqrt{10}-\frac{20}{3}\sqrt{5}+\frac{95}{2}$。

即汽车在 5～10 s 这段时间内走过的路程为 $\left(\frac{40}{3}\sqrt{10}-\frac{20}{3}\sqrt{5}+\frac{95}{2}\right)$ m。

8. 解：在弹性限度内，拉伸(或压缩)弹簧所需的力 $F(x)$ 与弹簧拉伸(或压缩)的长度 x 成正比，

即 $F(x)=kx$，而 $k=0.5$ N/m，

$\therefore F(x)=\frac{1}{2}x$，由变力做功公式得到

$W=\int_{0.8}^{0.6} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2\Bigg|_{0.8}^{0.6}=-0.07(\mathrm{J})$。

即这一过程中弹簧弹力所做的功为 -0.07 J。

【习题 4-2　B 组】(教材第 86 页)

1. 解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0$

$=-\frac{1}{8}\pi^2-1$。

2. 解：(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$。

(2) $\int_1^2 (x-1)^2\mathrm{d}x=\int_1^2 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x$

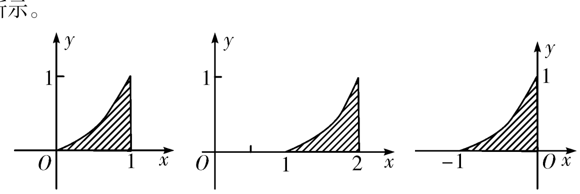
$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Bigg|_1^2$

$=\frac{1}{3}\times 2^3-2^2+2-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{3}$。

(3) $\int_{-1}^0 (x+1)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 (x^2+2x+1)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^0=0-\left[\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right]=\frac{1}{3}$。

三道小题的答案相同，用图形表示的定积分分别如图(1)(2)(3)所示。



(1)　　(2)　　(3)

第 2 题图

函数 $f(x)=(x-1)^2$ 可看做是由曲线 $f(x)=x^2$ 向右平移 1 个单位得到的；而函数 $f(x)=(x+1)^2$ 可看成是由曲线 $f(x)=x^2$ 向左平移 1 个单位长度得到的。

$\therefore$ 三个定积分表示同一个图形的面积，故应相等。

§3 定积分的简单应用

3.1 平面图形的面积

3.2 简单几何体的体积

教材课后习题答案

【练习】(教材第 88 页)

1. 解:所求面积为 $S=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$。

2. 解:所求面积为 $S=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-e^0=e-1$。

【练习】(教材第 90 页)

1. 解:所求圆台的体积为

$$V=\int_1^2 \pi\cdot x^2 dx=\frac{1}{3}\pi x^3\Big|_1^2=\frac{1}{3}\pi\times 2^3-\frac{1}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi。$$

2. 解:所求旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 \pi(x+1)dx=\pi\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\pi。$$

【习题 4-3】(教材第 90 页)

1. 解:由题意,得 $\begin{cases}y=x^2,\\ y=x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=4。\end{cases}$

∴ 所求平面图形的面积为

$$S=\int_{-1}^2[(x+2)-x^2]dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 2^2+2\times 2-\frac{1}{3}\times 2^3\right)-\left(\frac{1}{2}\times 1-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}。$$

2. 解:所求面积为

$$S=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sin\frac{\pi}{2}-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2+2=4。$$

3. 解:所求面积为 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$。

4. 解:所求面积为

$S=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\times 2^2+\ln 2-\left(\frac{1}{2}\times 1^2+\ln 1\right)=2+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\ln 2$。

5. 解:所求旋转体的体积为 $V=\int_1^2\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=(-\pi x^{-1})\Big|_1^2=-\frac{\pi}{2}-(-\pi)=\frac{\pi}{2}$。

6. 解:所求旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(\sqrt{x})^2dx=\frac{1}{2}\pi x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi。$$

7. 解:由题意,得 $\begin{cases}y=x^2,\\ y=\sqrt{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1。\end{cases}$

∴ 所求面积为 $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$。

所求旋转体的体积为

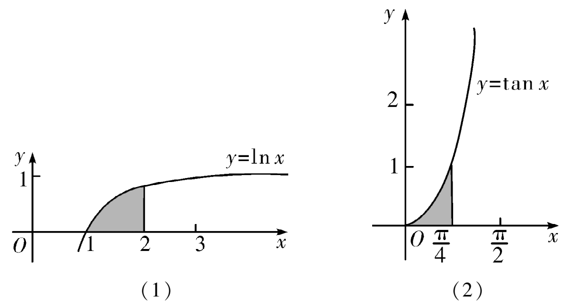
$$V=\int_0^1\pi[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2]dx=\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi。$$

【复习题四 A 组】(教材第 95 页)

1. 解:(1)用图形表示定积分如图所示。

(2)用图形表示定积分如图所示。



第 1 题图

2. 解:(1)前 10 min 内水管中流过的水量为 $\int_0^{10}f(t)dt$。

(2)不足估计值为

$$s=\left[\left(0+\frac{0}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{4}{2}\right)+\cdots+\left(9+\frac{81}{2}\right)\right]\times 1$$

$=187.5(m^3)$;

过剩估计值为

$$S=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{4}{2}\right)+\cdots+\left(10+\frac{100}{2}\right)\right]\times 1=247.5(m^3)。$$

∵ $247.5-187.5=60(m^3)$,

∴ 其误差均不超过 60 m^3。

3. 略 4. 略

5. 解:$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx=\sqrt{2}$。

6. 解:$V=2\int_0^3 4\pi\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=16\pi$。

7. 解:易得曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=x+1$ 的交点为 $(-1,0)$ 和 $(2,3)$。

∴ $S=\int_{-1}^2[x+1-(x^2-1)]dx=\frac{9}{2}$。

8. 解:$S=\int_0^1[e^x-(-x+1)]dx=e-\frac{3}{2}$。

9. 解:物体在 $t=0$ s 到 $t=3$ s 内所走的路程

$$s=\int_0^3(3t^2+2t)dt=36(m)。$$

10. 解:易得两条曲线 $y=x$ 和 $y=x^2$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$。

∴ $V=\int_0^1\pi(x^2-x^4)dx=\frac{2}{15}\pi$。

11. 解:前 10 s 水管中流过的水量

$$V=\int_0^{10}(2t+\sin t)dt=(101-\cos 10)(m^3)。$$

【复习题四 B 组】(教材第 96 页)

1. 解:经过 20 min,水的温度改变量为 $F=\int_0^{20}r(t)dt=$

$$\int_0^{20}-7e^{-0.1t}dt=-7\int_0^{20}e^{-0.1t}dt=70e^{-0.1t}\Big|_0^{20}\approx -60.53(℃)。$$

∴ 20 min 后,水的温度变为 $90-60.53=29.47$(℃)。

即 20 min 后,水的温度可以降到 30℃。

2. 解:∵ 这条铁链长 10 m,质量为 20 kg,并且是均匀的,

∴ 这条铁链总重 $20\times 9.8=196$(N),每米重 $196\div 10=19.6$(N)。

拉上距顶部 x m 处长为 Δx m 的那一小段链条所做的功就是克服这一小段链条自身的重力向上拉 x m 所做的功,近似值为 $19.6\Delta x\cdot x$,即 $19.6x\Delta x$。作用在整个链条上做的功的近似值就是作用在每一小段上做的功的和。

当分割的小段越来越细时,这个近似值就越来越接近于所要求的功。显然,这个“无限分割、求和”的过程,可以用定积分来解决,

$W=\int_0^{10}19.6x\mathrm{d}x=\frac{19.6}{2}x^2\Big|_0^{10}=980(\mathrm{J})$。

3. 解：曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $x=a,x=a+1,y=0$ 所围成的平面图形的面积

$S=\int_a^{a+1}(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_a^{a+1}+x\Big|_a^{a+1}=a^2+a+\frac{4}{3}$，∵ $S'=2a+1$。

令 $S'=0$，得 $a=-\frac{1}{2}$。

∴ 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，S 取得最小值，此时所围成的平面图形面积 $S=\frac{13}{12}$。

4. 解：当鱼塘中有 x kg 鱼时，每千克的捕捞成本是 $\frac{200}{x}$ 元，当池塘中的鱼量从 x_i kg 减少到 x_{i+1} kg 时，捕鱼的成本增加值近似为 $\frac{200}{x_i}\cdot(-\Delta x_i)$ 元，其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$。

∴ 捕捞的 6 000 kg 鱼的总成本是池塘中的鱼量从 10 000 kg 减少到 4 000 kg 的过程中捕捞成本增加的和。

∴ 捕捞 6 000 kg 鱼的成本为

$-\int_{10\,000}^{4\,000}\frac{200}{x}\mathrm{d}x=-200\ln x\Big|_{10\,000}^{4\,000}=-200\ln\frac{2}{5}\approx183$(元)。

第五章 数系的扩充与复数的引入

§1 数系的扩充与复数的引入

1.1 数的概念的扩展

1.2 复数的有关概念

教材课后习题答案

【练习】(教材第 101 页)

1. 解：(1) $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 的实部是 1，虚部是 $\sqrt{2}$；它是虚数，但不是纯虚数。

(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的实部是 $-\frac{1}{2}$，虚部是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；它是虚数，但不是纯虚数。

(3) $(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$ 的实部是 0，虚部是 $\sqrt{3}-1$；它是虚数，也是纯虚数。

(4) 0 的实部是 0，虚部是 0，它是实数。

2. 解：(1) 由复数相等的意义，得 $\begin{cases}-2x+3=0,\\ y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=4。\end{cases}$

(2) 由复数相等的意义，得 $\begin{cases}3x-2y=3,\\ x+2y=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{9}{4},\\ y=\frac{15}{8}。\end{cases}$

3. 解：复平面内点 A,B,C,D,E 所表示的复数分别为：$4+3\mathrm{i}$，$-3+2\mathrm{i}$，$-4-3\mathrm{i}$，$-3\mathrm{i}$，$3-2\mathrm{i}$。

4. 解：(1) $b=0,a\in\mathbf{R}$。(2) $a=0,b\neq0$。(3) $b>0,a\in\mathbf{R}$。(4) $a<0,b\in\mathbf{R}$。

5. 解：(1) $=|z_1|=|-5+12\mathrm{i}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$。

(2) $|z_2|=|4\mathrm{i}-5|=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41}$。

(3) $|z_3|=|\sqrt{3}-\mathrm{i}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$。

【习题 5－1 A 组】(教材第 102 页)

1. 解：(1) 若复数 $(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)\mathrm{i}$ 为实数，则 $m^2-3m-4=0$，∴ $m=-1$ 或 $m=4$。

(2) 若复数 $(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则 $\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\ m^2-3m-4\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=3$。

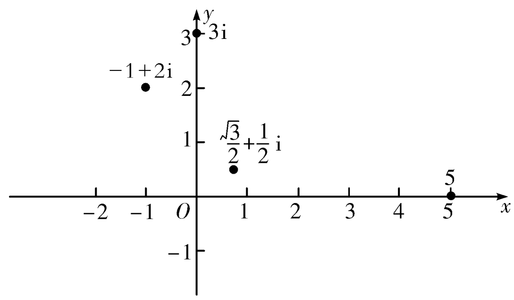
(3) 若复数 $(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)\mathrm{i}$ 是零，则 $\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\ m^2-3m-4=0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$。

2. 解：(1) 由复数相等的意义，得 $\begin{cases}x+y=6,\\ -xy=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\ y=-1。\end{cases}$

(2) 由复数相等的意义，得 $\begin{cases}x^2-4x-5=0,\\ y^2+3y-4=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=-4。\end{cases}$

3. 解：在复平面内的表示如图所示。



第 3 题图

4. 解：(1) $|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$。

(2) $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$。

(3) $|-6|=\sqrt{(-6)^2}=6$。

(4) $|-5\mathrm{i}|=\sqrt{(-5)^2}=5$。

【习题 5－1 B 组】(教材第 102 页)

解：(1) 点 Z 不在实轴上，则 $m^2-4m-5\neq0$，

∴ $m\neq-1$ 且 $m\neq5$。

(2) 点 Z 在虚轴上，则 $\begin{cases}m-1=0,\\ m^2-4m-5\neq0。\end{cases}$

∴ $m=1$。

(3) 点 Z 在实轴下方(不包括实轴)，则 $m^2-4m-5<0$，

∴ $-1<m<5$。

(4) 点 Z 在虚轴右侧(不包括虚轴)，则 $m-1>0$，∴ $m>1$。

§2 复数的四则运算

2.1 复数的加法与减法

2.2 复数的乘法与除法

教材课后习题答案

【练习】(教材第 104 页)

解：(1) $-7+(-3-\mathrm{i})=(-7-3)-\mathrm{i}=-10-\mathrm{i}$。

(2) $(3-2\mathrm{i})+(-1+2\mathrm{i})=(3-1)+(-2+2)\mathrm{i}=2$。

(3) $(-\sqrt{6}-2\mathrm{i})+(\sqrt{6}+2\mathrm{i})=(-\sqrt{6}+\sqrt{6})+(-2+2)\mathrm{i}=0$。

(4) $(3\sqrt{2}-2\mathrm{i})-(-\sqrt{2}+3\mathrm{i})+(4\sqrt{2}+3\mathrm{i})=(4\sqrt{2}-5\mathrm{i})+(4\sqrt{2}+3\mathrm{i})=8\sqrt{2}-2\mathrm{i}$。

(5) $(3\sqrt{5}-4\mathrm{i})-(-\sqrt{5}+2\mathrm{i})=(3\sqrt{5}+\sqrt{5})+(-4-2)\mathrm{i}=4\sqrt{5}-6\mathrm{i}$。

(6) $(8-2\mathrm{i})-(-7+5\mathrm{i})+(3\sqrt{3}+7\mathrm{i})=(15-7\mathrm{i})+(3\sqrt{3}+7\mathrm{i})=(15+3\sqrt{3})+(-7+7)\mathrm{i}=15+3\sqrt{3}$。

【练习】(教材第 107 页)

1. 解：(1) $(1+3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})=3+2\mathrm{i}+9\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2=3+2\mathrm{i}+9\mathrm{i}-6=-3+11\mathrm{i}$。

(2) $(-1-2\mathrm{i})(2\mathrm{i}+4)=-2\mathrm{i}-4-4\mathrm{i}^2-8\mathrm{i}=-2\mathrm{i}-4+4-8\mathrm{i}=-10\mathrm{i}$。

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。

(4) $(3+2i)(-3+2i)=(2i)^2-3^2=-4-9=-13$。

2. 解：(1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4=i\times(-1)\times(-i)\times 1=i^2=-1$。

(2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8=\frac{i(1-i^8)}{(1-i)}=0$。

3. 解：(1) $(-2+3i)^3=(-2+3i)^2(-2+3i)=(4-12i-9)(-2+3i)=(-5-12i)(-2+3i)=10-15i+24i-36i^2=10+9i+36=46+9i$。

(2) $(1+2i)^4=[(1+2i)^2]^2=(1+4i-4)^2=(-3+4i)^2=9-24i-16=-7-24i$。

4. 解：(1) $\frac{i}{2-3i}=\frac{i(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{-3+2i}{4+9}=-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$。

(2) $\frac{2+i}{1-i}+\frac{1+i}{3-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\frac{2+2i+i+i^2}{1+1}+\frac{3+i+3i+i^2}{9+1}$

$=\frac{1+3i}{2}+\frac{2+4i}{10}=\frac{1+3i}{2}+\frac{1+2i}{5}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}\right)i=\frac{7}{10}+\frac{19}{10}i$。

【习题 5－2 A 组】(教材第 107 页)

1. 解：(1) $i+(3+4i)=3+(1+4)i=3+5i$。

(2) $(1-i)-(1+i)=(1-1)+(-1-1)i=-2i$。

(3) $(2-i)-(3+i)=(2-3)+(-1-1)i=-1-2i$。

(4) $(1-4i)+(2-i)=(1+2)+(-4-1)i=3-5i$。

2. 解：(1) $(1+i)(3+4i)=3+4i+3i+4i^2=3+4i+3i-4=-1+7i$。

(2) $(1-2i)(1+2i)=1-(2i)^2=1+4=5$。

(3) $(3+i)(3-2i)(1-i)=(9-6i+3i+2)(1-i)=(11-3i)(1-i)=11-11i-3i+3i^2=8-14i$。

(4) $[(5-4i)+(1+3i)](5+2i)=(6-i)(5+2i)=30+12i-5i-2i^2=32+7i$。

3. 解：(1) $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=(i^4)^n+(i^4)^n\cdot i+(i^4)^n\cdot i^2+(i^4)^n\cdot i^3=1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$。

(2) $i^{4n}\cdot i^{4n+1}\cdot i^{4n+2}\cdot i^{4n+3}=i\cdot i^2\cdot i^3=i^6=(i^2)^3=-1$。

4. 解：(1) $\frac{2-3i}{i}=-3+\frac{2}{i}=-3-2i$。

(2) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{2}=i$。

(3) $\frac{i-2}{2+i}=\frac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-4+2i+2i-i^2}{4+1}=\frac{-3+4i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$。

(4) $\frac{3-5i}{1-2i}=\frac{(3-5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3+6i-5i-10i^2}{1+4}=\frac{13+i}{5}=\frac{13}{5}+\frac{1}{5}i$。

5. 解：(1) $(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i$。

(2) $(3-4i)^2=9-24i+16i^2=-7-24i$。

6. 解：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}=\frac{2i}{-2i}=-1$。

7. 解：$\because \frac{1+mi}{2-i}+\frac{1}{2}=\frac{(1+mi)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{1}{2}=\frac{2+i+2mi+mi^2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{(2-m)+(2m+1)i}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9-2m}{10}+\frac{2m+1}{5}i$，

又$\because \frac{1+mi}{2-i}+\frac{1}{2}$的实部与虚部相等，

$\therefore \frac{9-2m}{10}=\frac{2m+1}{5}$，$\therefore m=\frac{7}{6}$。

【习题 5－2 B 组】(教材第 108 页)

1. A

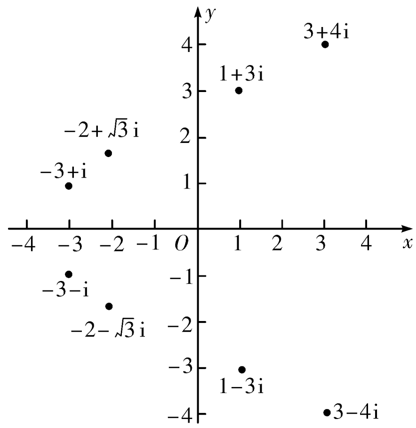
2. 解：(1) $-3+i$ 的共轭复数为 $-3-i$。

(2) $\sqrt{3}i-2$ 的共轭复数为 $-2-\sqrt{3}i$。

(3) $1-3i$ 的共轭复数为 $1+3i$。

(4) $3-4i$ 的共轭复数为 $3+4i$。

在复平面内表示各对复数的点，如图所示。



第 2 题图

3. 解：$\because z_1=1-3i$，

$\therefore \frac{1}{z_1}=\frac{1}{1-3i}=\frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+3i}{10}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$。

又$\because z_2=2a+4i$，设 $a=m+ni$，$\therefore z_2=2m+(2n+4)i$，

$\because z_2=\frac{1}{z_1}$，$\therefore 2m+(2n+4)i=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$，

$\therefore \begin{cases}2m=\frac{1}{10},\\ 2n+4=\frac{3}{10},\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}m=\frac{1}{20},\\ n=-\frac{37}{20}.\end{cases}$ $\therefore a=\frac{1}{20}-\frac{37}{20}i$。

4. 解：$\because \frac{2+i}{3-ai}+\frac{1}{4}=\frac{(2+i)(3+ai)}{(3-ai)(3+ai)}+\frac{1}{4}=\frac{6+2ai+3i+ai^2}{9+a^2}+\frac{1}{4}=\frac{6-a}{9+a^2}+\frac{2a+3}{9+a^2}i+\frac{1}{4}=\frac{6-a}{9+a^2}+\frac{1}{4}+\frac{2a+3}{9+a^2}i$。

$\because \frac{2+i}{3-ai}+\frac{1}{4}$的实部与虚部相等，

$\therefore \frac{6-a}{9+a^2}+\frac{1}{4}=\frac{2a+3}{9+a^2}$，即 $a^2-12a+21=0$，

解得 $a=6\pm\sqrt{15}$。

【复习题五 A 组】(教材第 112 页)

1. 解：(1) $x=\frac{1}{4}$，$y=-2$。(2) $x=\frac{15}{7}$，$y=-\frac{3}{7}$。

2. 解：$i^{11}=-i$，$i^{25}=i$，$i^{26}=-1$，$i^{36}=1$，$i^{70}=-1$，$i^{101}=i$，$i^{355}=-i$，$i^{400}=1$。

3. 解：(1) 原式 $=-2+i$。(2) 原式 $=3-2i$。(3) 原式 $=4-2i$。

(4) 原式 $=10-3i$。

4. 解：(1) 原式 $=-21+24i$。(2) 原式 $=-32-i$。

(3) 原式 $=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$。(4) 原式 $=-25i$。

5. 解：(1) 原式 $=-3+4i$。(2) 原式 $=-46-9i$。

(3) 原式 $=1$。(4) 原式 $=-i$。

(5) 原式 $=-1+i$。(6) 原式 $=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$。

6. 解：$\because \omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，

$\therefore \omega^2-\omega+1=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$

$=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$

$=\frac{1+2\sqrt{3}i-3-2-2\sqrt{3}i+4}{4}=0$。

【复习题五 B 组】(教材第 112 页)

1. 解：(1) 原式 $=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$。(2) 原式 $=\frac{12}{5}+\frac{1}{5}i$。

(3) 原式 $=-\frac{1}{2}-3i$。(4) 原式 $=\frac{1}{2}$。

2. 解：$\because z=2+i$，

$\therefore \frac{z^2-4z+8}{z-1}=\frac{(2+i)^2-4(2+i)+8}{2+i-1}=\frac{4+4i+i^2-8-4i+8}{1+i}=\frac{3}{1+i}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$。