

前川定理(The Maekawa-Justin Theorem)

潘世维

github: <https://github.com/erikpsw>

website: <https://erikpsw.github.io/>

Saturday, August 15, 2020

目录

1	简介	2
2	平顶点折叠的例子	3
3	前川定理的证明	4
3.1	Proof 1 :	4
3.2	Proof 2 :	5
4	推广	6

1 简介



MAEKAWA Jun (前川淳), 日本的软件工程师, 数学家, 折纸艺术家。

前川定理(The Maekawa-Justin Theorem)是一个折纸几何学定理，以日本折纸学会评议员长前川淳之名命名。前川定理指出，平面折纸的每个顶点，峰线数和谷线数在任意方向上都差2。Jacques Justin 以及更早的S. Murata 也发现了同样的折纸公理。

2 平顶点折叠的例子

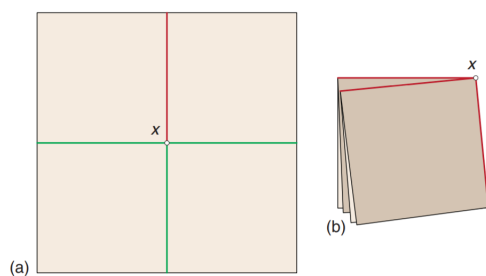


Figure 1

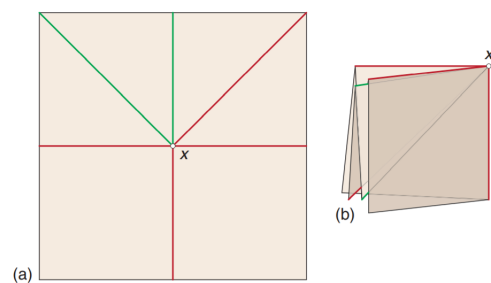


Figure 2

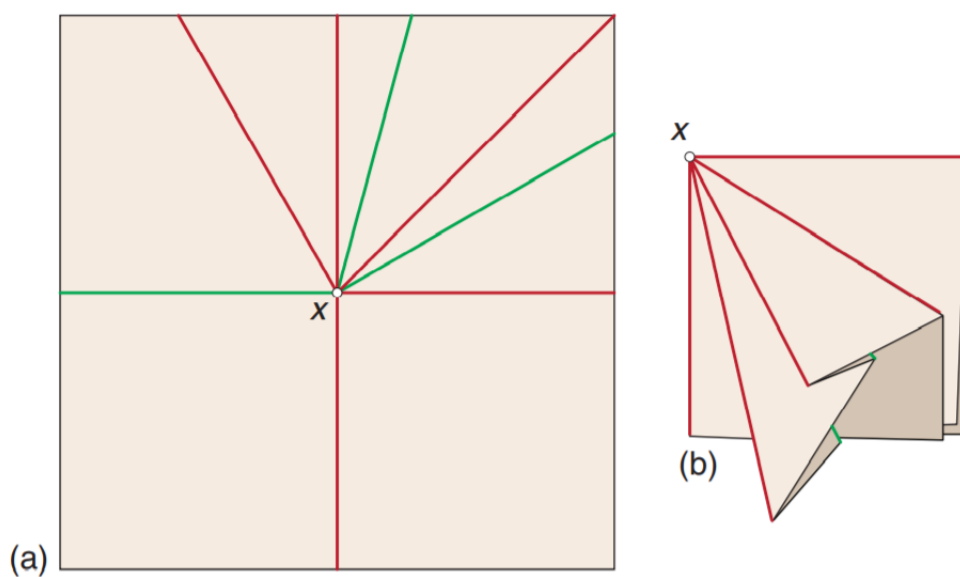


Figure 3

	M (Mountain)	V (Valley)	$ M - V $
Figure 1	1	3	2
Figure 2	4	2	2
Figure 3	5	3	2

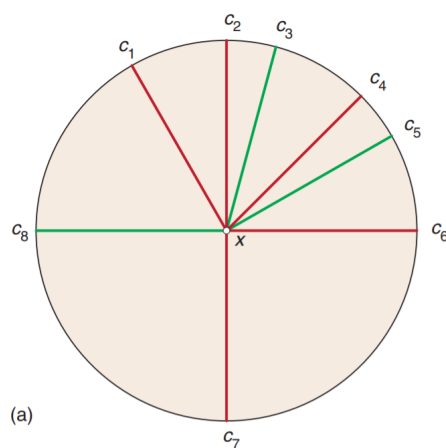
3 前川定理的证明

让 M (Mountain)和 V (Valley)分别代表平顶点折叠中山折和谷折的数量，则前川定理可以表示为

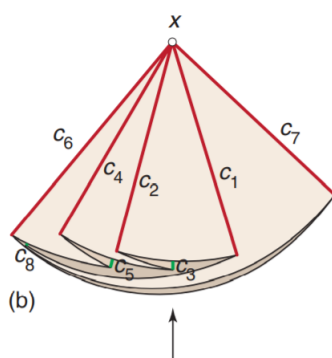
$$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2 \quad (1)$$

即 $|M - V| = 2$

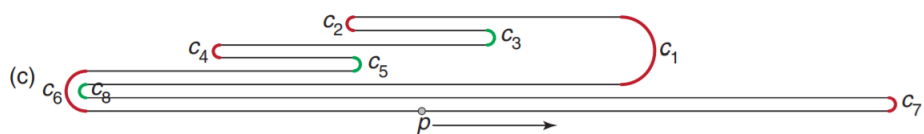
3.1 Proof 1 :



由于我们只关心顶点 x 和周围的折痕，所以可以以 x 为圆心做一个圆(a)，按折痕折叠后形成(b)



从下往上看向顶点 x ，可以发现圆环形成了一个闭合回路(c)



想象有一个蚂蚁从 p 点出发在这个闭合回路上爬行，遇到山折便逆时针旋转 180° ，遇到谷折便顺时针旋转 180° ，最后回到原点，方向和开始一样，由于沿着闭合回路走了一周，相当于旋转了 360° 度，即

$$M \times 180^\circ + V \times (-180^\circ) = 360^\circ \quad (2)$$

$$M - V = 2$$

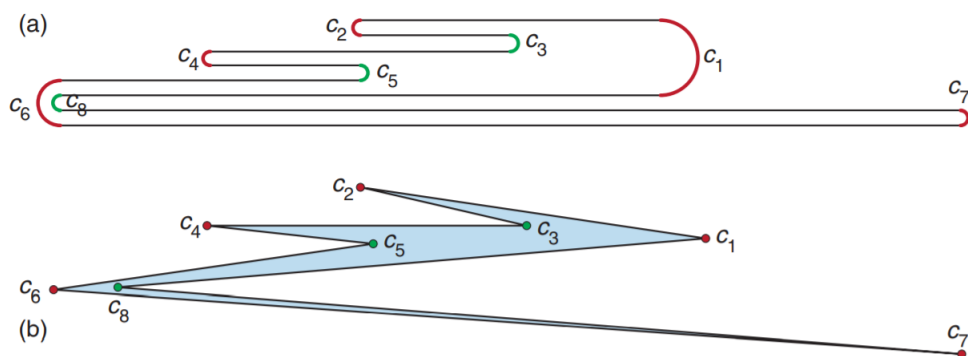
因为纸有两面，如果从另一面看，原来的山折变成了谷折，原来的谷折变成了山折，所以有

$$V - M = 2$$

这样便证明了前川定理[1]

3.2 Proof 2 :

这个证明是由Jan Siwanowicz在他还是个高中生的时候提出的



将此前的闭合回路看作一个多边形，把山折看成内角等于 0° ，谷折看成内角等于 360°

由多边形内角和定理

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = (n-2) \times 180^\circ \quad (3)$$

又在这个多边形中，内角和为

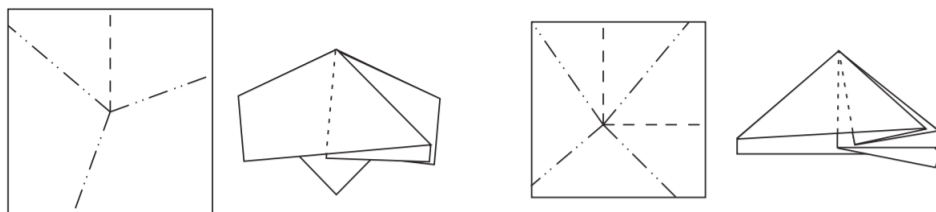
$$M \times 0^\circ + V \times 360^\circ \quad (4)$$

所以由(3)和(4),得出

$$V \times 360^\circ = (M + V - 2) \times 180^\circ \quad (5)$$

即

$$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2 \quad (6)$$



4 推广

$$M + V = 2(V + 1) \quad \text{or} \quad 2(V - 1) \quad (7)$$

得到偶数定理：单顶点折叠中折痕总数必为偶数，角的总数也必为偶数

powered by L^AT_EX

made by Erikpsw

zhihu link : <https://zhuanlan.zhihu.com/p/184886420>

参考文献

- [1] Erik D Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*. Cambridge university press, 2007.