教材习题解答

第一章 集合

§1 集合的含义与表示

教材课后习题解答

【练习】(第5页)

1. $\in,\notin,\notin,\in,\in,\in,\in,\notin,\notin,\notin,\in,\notin,\notin,\notin,\in$。

2. (1)$\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;(2)$\{-2,2\}$;(3)$\{x\in\mathbf{R}\mid 3<x<9\}$;(4)$\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$。

3. B

4. 略。

【习题1-1】(第6页)

A组

1. (1)$\{(x,y)\mid y=x\}$,无限集;(2){春季,夏季,秋季,冬季},有限集;(3)$\varnothing$,空集;(4)$\{2,3,5,7\}$,有限集。

2. (1)$\{-1,1\}$;(2)$\{0,3,4,5\}$;
   (3)$\{x\mid(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=0\}$或{大于1小于9的偶数}等;
   (4)$\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{n},n\leqslant 4,\text{且}\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$。

3. (1)$\{2,5,6\}$;(2)$\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$。

4. (1)$\{(x,y)\mid x>0,\text{且}\ y<0\}$;(2)$\{(x,y)\mid y=x^2-2x+2\}$。

B组

1. 当$a=1$时,$A=\{-1\}$。

2. 当$a\neq 0$时,$A=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$,$A$为有限集;
   当$a=0,b=0$时,$A=\mathbf{R}$,A为无限集;
   当$a=0,b\neq 0$时,$A=\varnothing$。

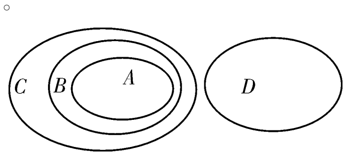
§2 集合的基本关系

教材课后习题解答

【练习】(第9页)

1. 前者包含两种情况:$A\subsetneqq B$或$A=B$,而后者只含有一种情况就是$A\subsetneqq B$。

2. C 【解析】用Venn图表示A,B,C,D四个集合的关系,如图所示,易得到答案为C。



第2题图

3. $A\subseteq C$ 【解析】设任意的$x\in A$,因为$A\subseteq B$,所以$x\in B$。又$B\subseteq C$,所以$x\in C$,所以$A\subseteq C$。

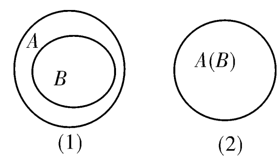
4. (1){等边三角形}$\subsetneqq${等腰三角形};
   (2)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;
   (3)$\{x\mid x^2-3\sqrt{2}x+4=0\}=\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$;
   (4){被6整除的数}$\subsetneqq${被3整除的数}。

5. (1)$\varnothing$只有一个子集,为$\varnothing$。
   (2)$\{0\}$有两个子集。$\{0\}$的子集为:$\varnothing,\{0\}$。
   (3)集合中含有3个元素,故共有8个子集:$\varnothing,\{-1\},\{2\},\{3\},\{-1,2\},\{-1,3\},\{2,3\},\{-1,2,3\}$。

【习题1-2】(第9页)

A组

1. 如图(1)所示,若$A=\{2,3,4\},B=\{2,3\}$,则$A\supsetneqq B$。如图(2)所示,若$A=\{2,3,4\},B=\{2,3,4\}$,则$A=B$。



第1题图

2. (1)C 【解析】因为$x,y\in\mathbf{N}$,又$y=-x^2+6$,故集合中的元素有3个,所以真子集有7个。
   (2)B 【解析】①$\{0\}$中有一个元素0,而$\varnothing$中不含任何元素,故①错误。③集合与集合之间的关系用包含或真包含表示。故答案为B。

3. (1)$=$;(2)$\supseteq$。

4. A为小说;B为文学作品;C为叙事散文;D为散文。

5. (1)错误。因为元素$\sqrt{3}$与集合$\{x\mid x\leqslant 2\}$的关系只能用$\in$或者$\notin$表示。
   (2)正确。$\sqrt{3}<2$。
   (3)正确。
   (4)错误。$\varnothing$与另一个集合之间的关系用包含或真包含表示。
   (5)正确。空集是任何集合的子集,也是任何非空集合的真子集。
   (6)正确。
   (7)错误。元素$a,c\notin\{e,f,b,d,g\}$。
   (8)错误。元素$e,f,g\notin\{a,b,c,d\}$。

B组

因为$A\subseteq B,A\subseteq C$,且$B=\{0,1,2,3,4\},C=\{0,2,4,8\}$,所以集合$A$中的元素既是集合$B$的元素又是集合$C$的元素。又集合$B$与集合$C$的公共元素构成的集合为$\{0,2,4\}$,所以$A\subseteq\{0,2,4\}$,所以集合$A$中最多含有3个元素。

§3 集合的基本运算

教材课上问题答案

【思考交流】(第12页)

设$A=\{1,2,3,4\},B=\{2,3,5,6\},C=\{3,4,6,7\}$,

$\because A\cap B=\{2,3\}$,

$\therefore (A\cap B)\cap C=\{2,3\}\cap\{3,4,6,7\}=\{3\}$,

又$B\cap C=\{3,6\}$,

$\therefore A\cap(B\cap C)=\{1,2,3,4\}\cap\{3,6\}=\{3\}$。

$\therefore (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

同样地,$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

$B\cup C=\{2,3,4,5,6,7\}$,

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

$\therefore (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

结论:$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$与$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$称为交集、并集满足结合律。

教材课后习题解答

【练习】(第 12 页)

1. $A=\{-4,4\}$, $B=\{-4\}$,

$\therefore A\cap B=\{-4\}$, $A\cup B=\{-4,4\}$。

2. (1)$A\cup B=\{1,3,6,7,8,9\}$, $A\cap C=\{6,8,9\}$, $B\cap C=\{8,9\}$, $A\cap B\cap C=\{8,9\}$, $A\cup B\cup C=\{1,2,3,6,7,8,9\}$。

(2)$A\cap(B\cup C)=\{6,8,9\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{6,8,9\}$。图略。

3. $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$, $A\cup B=\{x|-1\leqslant x<3\}$。图略。

4. $B\cap C$, $A\cup C$。

【练习】(第 14 页)

1. 略。 2. $5\in U$, $5\notin A$。 3. $\{1,3,4,6\}$。

4. $\{1,2,3,4\}$ 5. $\complement_{\mathbf{R}}A\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}B$。

【习题 1-3】(第 14 页)

A 组

1. D **【解析】**直角三角形与等腰三角形的交集是等腰直角三角形,故 A 正确。$A\cap D=D$, $B\cap C=C$ 也正确。D 项$A\cup B$ 表达的含义应当是等腰三角形或直角三角形,故错误。

2. (1)$\subseteq,\subseteq,\supseteq,\supseteq,\subseteq$;(2)$\varnothing$;(3)$A$;

(4)$\{(1,1)\}$, $\{(1,1)\}$, $\varnothing$;

(5)$\{x|-5<x<5\}$;

(6)$\{(x,y)|y=0\}$, $\{(x,y)|xy\leqslant 0\}$。

3. (1)$A\cap B=\{2\}$, $A\cup B=\{x|x>1$,或$x=-2\}$。

(2)$A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}<x\leqslant 3\right\}$, $A\cup B=\mathbf{R}$。

4. (1)$\{a,b\}$;(2)$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;

(3)$\{a,b,g,h\}$;(4)$\{a,b,c,d,g\}$;

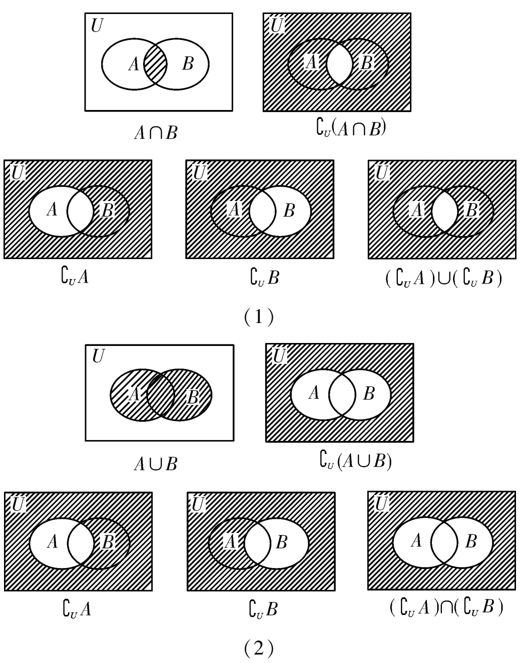
(5)$\{b,g\}$;(6)$\{a,b\}$。

5. $\complement_U A=\{x|x$ 是钝角三角形或直角三角形$\}$, $\complement_U B=\{x|x$是任意两边都不相等的三角形$\}$。

6. $\complement_U(A\cap B)=\{x|x\leqslant 1$,或$x\geqslant 3\}$, $\complement_U(A\cup B)=\{x|-4\leqslant x\leqslant -2\}$。

7. 有普遍意义。

用 Venn 图证明。如图(1),图(2),由图可得等式成立。



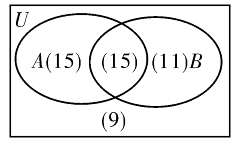
第 7 题图

B 组

1. 由题设 $M\cap\{2,6\}=\{2\}$,则有 $2\in M$;$M\cap\{8,4\}=\{4\}$,则有 $4\in M$,同理可得 $10\in M$。因为 $M\subseteq\{2,4,6,8,10,12\}$,所以集合 M 中至少含有元素 2,4,10。

又若 $6\in M$,则与已知 $M\cap\{2,6\}=\{2\}$ 矛盾,同理可以说明 $8,12\notin M$,所以 $M=\{2,4,10\}$。

2. 记高一(1)班同学组成全集 U,参加数学、物理两个学科活动的同学分别组成集合 A 和 B,用 Venn 图表示它们之间的关系,如图所示,可得数学、物理两个学科的活动都没有参加的同学有9人。



第 2 题图

【复习题一】(第 19 页)

A 组

1. (1)D

(2)D **【解析】**因为$\complement_A A=\varnothing$,而不是$\complement_A A=\{0\}$。故答案为 D。

(3)C

(4)D **【解析】**因为$\{x\in\mathbf{N}|-4<x-1<4$,且$x\neq 1\}=\{0,2,3,4\}$,其真子集个数为 $2^4-1=15$。故答案为 D。

(5)D **【解析】**因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M=\{3,4,5\}$, $P=\{1,3,6\}$, $\complement_U M=\{1,2,6,7,8\}$, $\complement_U P=\{2,4,5,7,8\}$,所以$(\complement_U M)\cap(\complement_U P)=\{2,7,8\}$。故答案为 D。

2. (1)$\{x|x=9k+2,k\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$\{x|x<1$,或 $x\geqslant 3\}$;

(3)$\mathbf{R}$;(4)4;(5)$\complement_{\mathbf{R}}A\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}B$。

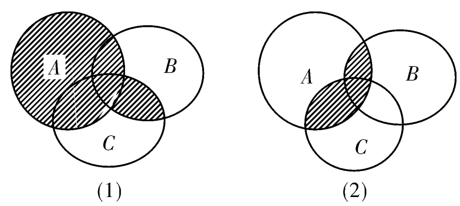
3. $A=\{x|x\neq 0\}$, $B=\{x|x\geqslant 3\}$,所以 $A\cap B=\{x|x\neq 0\}\cap\{x|x\geqslant 3\}=\{x|x\geqslant 3\}$, $A\cup B=\{x|x\neq 0\}$。

4. $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。因为 $A\cap(\complement_U B)=\{2,8\}$,所以 A 中必含有 2,8。又$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,所以 $A\cap B=\varnothing$,所以 $A=\{2,8\}$。

5. 点$(\sqrt{2},\sqrt{2})$属于图中阴影部分的点组成的集合,点$(\sqrt{3},\sqrt{3})$不属于图中阴影部分的点组成的集合。

6. $A\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup[\complement_U(A\cup B)]$。

7. 如图所示。



第 7 题图

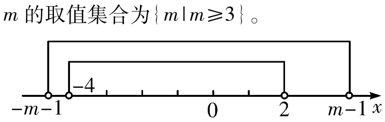
B 组

1. 因为 $A\subseteq\{1,2,3,4\}$,且 A 中至多有一个奇数,所以 A 可为$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,4\}$,共12 个。

2. 假设存在实数 a,使得 $B\subseteq A$。由 $B=\{1,a+2\}\neq\varnothing$, $B\subseteq A$ 得$a+2=3$,或 $a+2=-a^2$。当 $a+2=3$ 时,$a=1$,此时 $A=\{1,3,-1\}$, $B=\{1,3\}$成立;当 $a+2=-a^2$ 时,$a^2+a+2=0$ 显然无解。故存在$a=1$ 使 $B\subseteq A$。

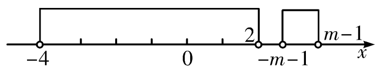
3. 显然 $B\neq\varnothing$。

(1)如图①所示,要使 $A\subseteq B$,必须满足$\begin{cases}-m-1\leqslant -4,\\ m-1\geqslant 2,\end{cases}$即 $m\geqslant 3$,满足 $m>0$。所以 m 的取值集合为$\{m|m\geqslant 3\}$。



①

(2)考虑 $A\cap B\neq\varnothing$ 的反面,即 $A\cap B=\varnothing$。因为 $m>0$,所以 $m-1>-1$。如图②所示,要使 $A\cap B=\varnothing$,必须满足 $-m-1\geqslant 2$,得 $m\leqslant -3$。又 $m>0$,所以 m 不存在。故使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 的 m 的取值集合为 $\{m\mid m>0\}$。



②

第 3 题图

4. $A=\{-2,1,3\}$,$B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$,$C=\{x\mid x\geqslant 1\}$,则 $A\cup B=\{x\mid x=-2$,或 $-1<x\leqslant 1$,或 $x=3\}$,所以 $(A\cup B)\cap C=\{1,3\}$。

5. Ⅰ为 $A\cap B\cap C$;Ⅱ为 $A\cap B\cap(\complement_U C)$;Ⅲ为 $A\cap C\cap(\complement_U B)$;Ⅳ为 $B\cap C\cap(\complement_U A)$;Ⅴ为 $A\cap[\complement_U(B\cup C)]$;Ⅵ为 $C\cap[\complement_U(A\cup B)]$;Ⅶ为 $B\cap[\complement_U(A\cup C)]$;Ⅷ为 $\complement_U(A\cup B\cup C)$。

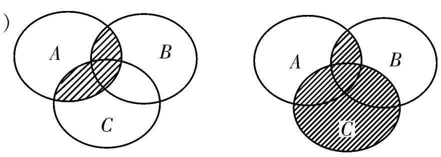
6. 设听了数学讲座、历史讲座、音乐讲座的同学构成的集合分别为 A,B,C,则 A 中元素个数为 75,表示听了数学讲座的人数为 75。同理 B 中元素个数为 68,C 中元素个数为 61,$A\cap B$ 中元素个数为 17,$A\cap C$ 中元素个数为 12,$B\cap C$ 中元素个数为 9,$A\cap B\cap C$ 中元素个数为 6,则听讲座的人数,即 $A\cup B\cup C$ 中元素个数为 $75+68+61-17-12-9+6=172$。即听讲座的人数为 172。

C 组

1. (1)D (2)B

2. 分别如图①、图②、图③所示。

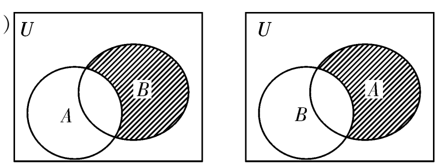
(1)



$A\cap(B\cup C)$ $A\cap B\cup C$

①

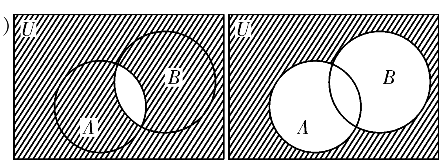
(2)



$B\cap(\complement_U A)$ $A\cap(\complement_U B)$

②

(3)



$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

③

第 2 题图

第二章 函数

§1 生活中的变量关系

教材课上问题答案

【思考交流】(第 24 页)

1. (1)储油罐的容积是常量,油面四边形周长,面积都是变量。

(2)储油量与油面高度 h,储油量与油面宽度都是依赖关系。

(3)储油量与油面高度是函数关系,与油面宽度不是。

2. 汽车行驶的距离与速度是函数关系(时间一定)。

3. 略。

教材课后习题解答

【练习】(第 25 页)

1. 如果不计税收等消耗,设售出的台数为 x 台,收入为 y 元,则 $y=(2\,100-2\,000)x=100x$。显然,收入 y 和售出台数 x 之间存在函数关系。

2. 坐电梯时,电梯距地面的高度与时间之间存在函数关系。因为对于任意给定的时间,电梯都有唯一的高度和它对应。

3. 在一定量的水中加入蔗糖,在未达到饱和之前糖水的质量浓度与所加蔗糖的质量之间存在函数关系。其中,可以将蔗糖的质量看作自变量,糖水的质量浓度看作因变量;也可以将糖水的质量浓度看作自变量,蔗糖的质量看作因变量。

【习题 2-1】(第 25 页)

A 组

1. (1)地球绕太阳公转,二者的距离与时间之间存在函数关系。其中,时间是自变量,距离是因变量。

(2)在空中作斜抛运动的铅球,铅球距地面的高度与时间之间存在函数关系。其中,时间是自变量,高度是因变量。

(3)某水文观测点记录的水位与时间之间存在函数关系。其中,时间是自变量,水位是因变量。

(4)通过汽车的数量与时间之间存在函数关系。其中,时间是自变量,通过汽车的数量是因变量。

2. 比如:①匀加速运动中,速度是时间的函数,其中时间是自变量,速度是因变量;②位移可以表示为时间的函数,也可以表示为速度的函数。

B 组

1. 比如:①从家到学校的时间是同学们行走速度的函数,其中家到学校的距离是常数;②工人每月的收入是每天工资的函数;③同学们家中每月的电费是用电量的函数;④同学们家中每月的水费是用水量的函数;⑤同学们家中每月的煤气费是用煤气量的函数;⑥紧急刹车的滑行距离与刹车前的速度之间也存在函数关系,等等。

2. 略。

§2 对函数的进一步认识

教材课上问题答案

【思考交流】(第 27 页)

例子 1:圆的面积 S 是半径 r 的函数,r 是自变量,定义域为 $r>0$,面积 S 是函数,值域 $S>0$,给 r 一个确定的值,S 有唯一值与之对应。

例子 2:某人行走的速度一定,那么它在这段时间内所行走的路程 S 是时间 t 的函数,给一个确定的时间 t,就有唯一的路程 S 与之对应,定义域 $t>0$,值域 $S>0$。

【思考交流】(第 30 页)

1. 是函数关系,因为给一个确定的题号,就有唯一的答案与之对应。

2. 是图像法,它表明某一试题得不同分数的人数,如得 11 分,200 人,从 0~12 这 13 个数中,任取一个数,就有唯一的人数与之对应。

【思考交流】(第 33 页)

1. 函数一定是映射,它是两个非空数集之间的一个映射,映射不一定是函数。

2. 如:一次测验中,每一个同学对应着一个考试分数。又如,高一的新生,每一个同学对应着一个学号。

教材课后习题解答

【练习】(第 28 页)

1. (1) $f(4)=17$。

(2) $g(2)=29$。

(3) $F(3)+M(2)=26$。

2. (1) $A=(2+h)h$。

(2)定义域是$[0,1.8]$,值域是$[0,6.84]$。

(3)图像略。

【练习】(第 31 页)

1. (1)定义域为 $\mathbf{R}$,值域也为 $\mathbf{R}$。

(2)定义域为$[a_1,a_2]\cup[a_3,a_4]$,值域为$[b_4,b_3]$。

(3)定义域为$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,值域为$\{1,8,27,64,125,216,343,512\}$。

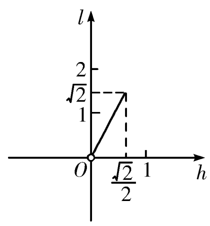
2. 第一个图形不是函数图像;

第二个图形是函数图像;

第三个图形不是函数图像。

3. 略。

4. 因为,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,$AB=AC=1$,$EF/\!/BC$,$EF=l$,设 A 到 EF 的距离为 h,则 $l=2h,0<h\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$。其图像如图。



第 4 题图

【练习】(第 33 页)

1. (1) f 是从 A 到 B 的映射。因为,对于 A 中的每一个元素,B 中都有唯一元素与它对应;

(2) f 是从 A 到 B 的映射。因为,对于 A 中的每一个元素,B 中都有唯一元素与它对应;

(3) f 是从 A 到 B 的映射。因为,对于 A 中的每一个元素,B 中都有唯一元素与它对应;

(4) f 不是从 A 到 B 的映射。因为,对于 A 中的元素 0,B 中就没有相应的元素与它对应,即并非对于 A 中的每一个元素,B 中都有唯一元素与它对应。

2. (1) $f:A\to B$。它并非一一映射,也不是函数;

(2) $f:M\to N$。是一一映射,也是函数;

(3) $f:X\to Y$。并非一一映射,但是函数。

【习题 2-2】(第 34 页)

A 组

1. (1) $x\neq3$ 的一切实数或$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$或$\{x|x\neq3\}$;

(2) $x\geqslant2$ 的一切实数或$[2,+\infty)$;

(3) $x\geqslant2$,且 $x\neq3$ 的一切实数或$[2,3)\cup(3,+\infty)$或$\{x|x\geqslant2$,且 $x\neq3\}$。

2. (1)定义域为$\left[0,\frac{25}{4}\right]$,值域为$[0,7]$;

(2)定义域为$\{7,8,9\}$,值域为$\{4,25,35\}$。

3. (1)我国内地长途电话的区号可以建立集合 A 到集合 B 的映射 $f:A\to B$。只需每一个长途电话自动网的城市对应一个固定的区号即可。

(2)不能建立由三角形周长组成集合 A 到由所有三角形组成集合 B 的映射。

B 组

1. 因为 $f(x)=\sqrt[3]{3x-2}$,$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$,

所以 $f(x)\cdot g(x)=\sqrt[3]{3x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$。

它的定义域为$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$。

2. (1)设车费为 y 元,里程为 x km,

则 $y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant4,\\ 1.2\times(x-4)+10, & 4<x\leqslant18,\\ 1.8\times(x-18)+1.2\times14+10, & x>18,\end{cases}$

则 $y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant4,\\ 1.2x+5.2, & 4<x\leqslant18,\\ 1.8x-5.6, & x>18。\end{cases}$

(2)某人乘车行驶 20 km,则 $y=1.8\times20-5.6=30.4$。

所以此人要付 30.4 元的车费。

§3 函数的单调性

教材课上问题答案

【思考交流】(第 36 页)

答:在有些区间上函数值 y 随 x 增大而增大,在有些区间上函数值 y 随自变量 x 值增大而减小。

如:在$[-2,1]$上 y 随 x 增大而增大,在此区间上为增函数,在$[1,3]$上 y 随 x 增大而减小,在此区间上为减函数。

教材课后习题解答

【练习】(第 39 页)

1. 略。

2. (1) $y=-5x$ 在$[2,7]$上是递减的;

(2) $f(x)$在$(3,4)$上是递增的;

(3) T 在$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$上是递减的。

3. (1)最大值 5,最小值 -7。

(2)最大值 3,最小值$\frac{3}{4}$。

【习题 2-3】(第 39 页)

A 组

1. 略。

2. (1) y 在$\{0,1,2,3,4\}$上是递增的;

(2) $y=\frac{2}{x}$在 $\mathbf{N}_+$ 上是递减的;

(3) $y=2x-3$ 在$(-\infty,0]$上是递增的;

(4) $y=-4x^2+2x-5=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{19}{4}$的开口向下,对称轴为$x=\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 在$\left[0,\frac{1}{4}\right]$上是递增的,在$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$上是递减的。

3. 如果在给定的集合或区间上的函数是减少的,那么,

(1) $y=kx,x\in\mathbf{R}$ 中的 $k<0$;

(2) $y=\frac{k}{x},x\in(-\infty,0)$中的 $k>0$;

(3) $y=-kx+2,x\in\mathbf{R}$ 中的 $k>0$;

(4) $y=kx^2-\frac{2}{3}x+1,x\in[0,+\infty)$中的 $k\leqslant0$。

4. 函数 $f(x)=-3x+4$ 的图像如图。

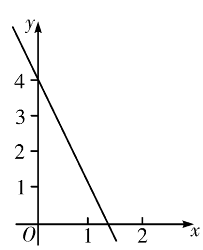
证明:任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且$x_1<x_2$,

则 $x_1-x_2<0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=(-3x_1+4)-(-3x_2+4)=-3(x_1-x_2)>0$。

即 $f(x_1)>f(x_2)$。

由函数单调性的定义可知,函数$f(x)=-3x+4$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数。



第 4 题图

5. 任取 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$且 $x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=2x_1^4-2x_2^4=$

$2(x_1^4-x_2^4)=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)$。

$\because 0\leqslant x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$x_1+x_2>0$，$x_1^2+x_2^2>0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$。

由函数单调性定义可知，函数 $f(x)=2x^4$ 在 $[0,+\infty)$ 上是递增的。

B 组

1. 当以相同的速度向四个容器注水时，可以大致刻画容器中水的高度与时间的关系：对于题图 1 是第 3 个图，对于题图 2 是第 1 个图，对于题图 3 是第 3 个图，对于题图 4 是第 3 个图。

2. $a\geqslant -16$ 【解析】函数 $y=8x^2+ax+5$ 的开口向上，对称轴为 $x=-\frac{a}{16}$，要使函数在 $[1,+\infty)$ 上递增，那么，必须有 $-\frac{a}{16}\leqslant 1$，于是，a 的范围是 $a\geqslant -16$。

§4 二次函数性质的再研究

教材课上问题答案

【思考交流】（第 43 页）

1. h 是决定函数图像的对称轴和顶点横坐标，k 是决定顶点纵坐标。

2. 确定开口大小及方向的参数是 $|a|$ 的大小与 a 的符号。确定函数图像位置的参数是 a,b,c。

3. $y=-(x+3)^2+1$，图略。

教材课后习题解答

【练习】（第 45 页）

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ 和 $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在同一直角坐标系中的图像，前者开口大。

2. 在同一直角坐标系中，函数 $f(x)=(x+8)^2$ 和 $g(x)=x^2$ 的图像相比，前者比后者左移了 8 个单位长度。

3. (1) $f(x)=-5x^2$ 和 $g(x)=2x^2$ 的顶点都是 $(0,0)$，定义域都是 $\mathbf{R}$，都关于 y 轴对称；不同在于：前者图像开口向下，在 $(-\infty,0]$ 上函数单调递增，在 $[0,+\infty)$ 上函数单调递减，$x=0$ 时 y 值最大，后者图像开口向上，在 $(-\infty,0]$ 上函数单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上函数单调递增，$x=0$ 时 y 值最小，前者值域是 $(-\infty,0]$，后者值域是 $[0,+\infty)$。

(2) $f(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ 和 $g(x)=3x^2$ 的顶点分别是 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 和 $(0,0)$。相同点是，定义域都是 $\mathbf{R}$，开口都向上；不同点是：前者关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，后者关于 $x=0$ 对称，前者在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上函数单调递减，在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上函数单调递增，后者在 $(-\infty,0]$ 上函数单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上函数单调递增，前者值域是 $[1,+\infty)$，后者值域是 $[0,+\infty)$，前者 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 最小，后者 $x=0$ 时，y 最小。

【练习】（第 47 页）

1. (1) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$。

(2) $f(x)=3x^2+6x-1=3(x^2+2x+1)-3-1=3(x+1)^2-4$。

(3) $f(x)=-2x^2+3x-2=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)+\frac{9}{8}-2=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{7}{8}$。

2. $\because$ 从 1990 年到 1997 年每年该地吃掉的蔬菜总量为 $v(t)=7.02t^2+1\ 098.6t+40\ 920$，1995 年是 $t=6$ 的情况，$\therefore$ 1995 年该地消耗的蔬菜总量是 $v(6)=7.02\times 36+1\ 098.6\times 6+40\ 920=252.72+6\ 591.6+40\ 920=47\ 764.32$。

则 1995 年该地消耗的蔬菜总量是 47 764.32 kg。

3. (1) $y=2x^2+1$ 图像的开口向上，顶点坐标为 $(0,1)$，对称轴 $x=0$，在 $(-\infty,0]$ 上函数单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上函数单调递增。

(2) $y=2(x+1)^2$ 图像的开口向上，顶点坐标为 $(-1,0)$，对称轴为 $x=-1$，在 $(-\infty,-1]$ 上函数单调递减，在 $[-1,+\infty)$ 上函数单调递增。

(3) $y=6x^2-5x-2$ 图像的开口向上，顶点坐标为 $\left(\frac{5}{12},-\frac{73}{24}\right)$，对称轴为 $x=\frac{5}{12}$，当 $x\geqslant\frac{5}{12}$ 时函数递增，当 $x\leqslant\frac{5}{12}$ 时函数递减。

(4) $y=-(x+1)(x-2)$ 的图像开口向下，顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$，对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时函数递增，当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时函数递减。

4. 因为 $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$，所以 $f(50)=-0.01\times 50^2+1.2\times 50-5.8=29.2$。

其意义是汽车的行驶速度为 50 km/h 时，使用单位容积燃料可以行驶 29.2 km。

在 $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$ 中，当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1.2}{2\times(-0.01)}=60$，即速度为 60 km/h 时，汽车最省油。

【习题 2-4】（第 47 页）

A 组

1. (1) $f(x)=3+5x-2x^2$

$$=-2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+\frac{25}{8}+3$$

$$=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{8};$$

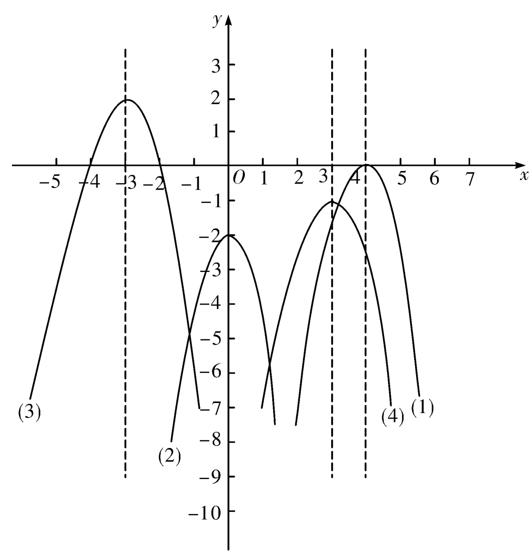
(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)-\frac{4}{3}$

$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}。$$

2. (1) 把函数 $y=3x^2$ 的图像左移 5 个单位长度，再下移 2 个单位长度可以得到函数 $f(x)=3(x+5)^2-2$ 的图像；

(2) 因为 $f(x)=-3x^2+2x-1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$，所以将函数 $y=3x^2$ 的图像关于 x 轴对称向下翻转，再右移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度，下移 $\frac{2}{3}$ 个单位长度，可以得到函数 $f(x)=-3x^2+2x-1$ 的图像。

3. (1) 将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像平移，顶点移到 $(4,0)$ 时对应的解析式是 $y=-2(x-4)^2$，其图像如图中 (1)；



第 3 题图

(2) 将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像平移，顶点移到 $(0,-2)$ 时对应的解

析式是 $y=-2x^2-2$，其图像如图中(2)；

(3)将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像平移，顶点移到$(-3,2)$时对应的解析式是 $y=-2(x+3)^2+2$，其图像如图中(3)。

(4)将二次函数图像 $y=-2x^2$ 的图像平移，顶点移到$(3,-1)$时对应的解析式是 $y=-2(x-3)^2-1$。其图像如图中(4)。

4. (1)$\because y=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，$\therefore$ 函数$y=x^2-3x$ 的图像的开口向上，对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，顶点为$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$，在$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$上函数单调递减，在$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$上函数单调递增。

(2)$\because y=-2x^2+x+3=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$，$\therefore$ 函数$y=-2x^2+x+3$ 的图像的开口向下，对称轴为 $x=\frac{1}{4}$，顶点为$\left(\frac{1}{4},\frac{25}{8}\right)$，在$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$上函数单调递增，在$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$上函数单调递减。

在同一直角坐标系中，函数 $y=-2x^2+x+3$ 的图像开口较小。

5. (1)函数 $y=(x-1)^2$ 在$(-1,5)$上，当 $x=1$ 时，最小值为 0，但是没有最大值。

(2)$\because y=-2x^2-x+1=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，$\therefore$ 函数$y=-2x^2-x+1$ 在$[-3,1]$上，当 $x=-3$ 时，最小值为 -14，当 $x=-\frac{1}{4}$时，最大值为 $\frac{9}{8}$。

6. (1)二次函数 $y=-2x^2+6x$ 在$\{x\in\mathbf{Z}|0\leqslant x\leqslant 3\}$上的值域是$\{0,4\}$。

(2)二次函数 $y=-2x^2+6x$ 在$[-2,1]$上的值域是$[-20,4]$。

7. 将 40 cm 的铁丝截成两段，每段折成一个小正方形。设两个小正方形的边长分别为 x,y，要使两个小正方形的面积和最小，即求 $x+y=10$ 时，x^2+y^2 的最小值。$\because x+y=10$，$\therefore x=10-y$。于是$x^2+y^2=(10-y)^2+y^2=2y^2-20y+100=2(y-5)^2+50$。则当两个小正方形的边长均为 5 cm 时，它们的面积和最小。

8. 设“日”字形窗户的长为 x m 时，宽则为$\frac{4-2x}{3}$m。其面积为 $x\cdot\frac{4-2x}{3}=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}(0<x<2)$。则当窗户的长为1 m，宽为$\frac{2}{3}$ m 时，窗户的面积最大为$\frac{2}{3}$ m^2，即透过的光线最多。

9. (1)$\because$ 二次函数图像的顶点为$(2,-1)$，可以设其解析式为 $y=a(x-2)^2-1$。又图像过点$(3,1)$，$\therefore 1=a(3-2)^2-1$，解得 $a=2$。$\therefore$ 所求二次函数的解析式为$y=2(x-2)^2-1$，即 $y=2x^2-8x+7$。

(2)解法一：$\because$ 二次函数图像过$(0,1)$，$(1,1)$，$(4,-9)$，$\therefore$ 可以设其解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$。代入三点坐标，解方程组得 $\begin{cases}c=1,\\ b=\frac{5}{6},\\ a=-\frac{5}{6}。\end{cases}$ $\therefore$ 所求二次函数的解析式为 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}x+1$。

解法二：由于图像过点$(0,1)$和$(1,1)$，可以知道对称轴为 $x=\frac{1}{2}$。设二次函数的解析式为 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k$，又$\because$ 过点$(0,1)$和$(4,-9)$，则$a\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+k=1$，$a\left(4-\frac{1}{2}\right)^2+k=-9$。解得$a=-\frac{5}{6}$，$k=\frac{29}{24}$。于是 $y=-\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{24}$，即 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}x+1$。

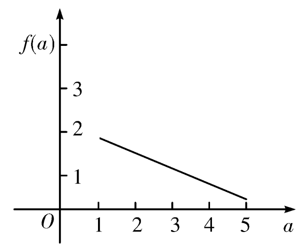
B 组

1. 因为抛物线开口向下，所以 $a<0$；因为对称轴在 y 轴的右侧，所以 $-\frac{b}{2a}>0$，可得 $b>0$；因为当 $x=0$ 时，$y=c$，而图中抛物线与 y 轴交于原点的上方，所以 $c>0$；因为$x_1<0,x_2>0$，所以 $x_1x_2<0$；由于对称轴在 y 轴的右侧，所以$|x_1|<|x_2|$，于是有 $x_1+x_2>0$。

2. 设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$。因为二次函数的图像与 x 轴只有一个交点，对称轴为$x=3$，与 y 轴交于点$(0,3)$，所以 $\begin{cases}b^2-4ac=0,\\ -\frac{b}{2a}=3,\\ c=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=-2,\\ c=3。\end{cases}$

即其解析式为 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+3$。

3. 因为二次函数$y=ax^2+ax+2(a>0)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为$\frac{8-a}{4}$，所以 $f(a)=\frac{8-a}{4}$，又 $a>0$，所以$f(a)$在$[1,5]$上是递减的。其图像如图。



第 3 题图

4. 设经过 t h$(t>0)$，A,B 间的距离为 x km，那么 $x^2=(145-40t)^2+(16t)^2=1\ 856t^2-11\ 600t+21\ 025$。所以经过 $t=\frac{11\ 600}{2\times 1\ 856}=\frac{25}{8}\approx 3.1$(h)，$A,B$ 间的距离最短为$1\ 856\times\left(\frac{25}{8}\right)^2-11\ 600\times\frac{25}{8}+21\ 025=2\ 900$ 的算术平方根，即 $\sqrt{2\ 900}\approx 53.9$(km)。

5. 当 $a>0,b^2-4ac<0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的函数值恒大于零。

当 $a<0,b^2-4ac<0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的函数值恒小于零。

*6. 初速度为 20 m/s 和水平线 x 轴成45°角，则水平和竖直方向上的分速度都为 $10\sqrt{2}$m/s。

(1)设飞行时间为 t s，则水平方向的运动方程为 $x=10\sqrt{2}t$，竖直方向的运动方程为 $y=10\sqrt{2}t-5t^2$。

由 $x=10\sqrt{2}t$ 得 $t=\frac{\sqrt{2}x}{20}$。消去 t，则得 $y=x-\frac{1}{40}x^2$，

$\therefore$ 其轨道的形状为抛物线。

(2)由于 $y=x-\frac{1}{40}x^2=-\frac{1}{40}(x-20)^2+10$，

$\therefore$ 最大高度为 10 m。

(3)设抛物线与 x 轴交于原点和 x_0，令 $y=0$，解得$x_0=40$，即飞行距离为 40 m。

§5 简单的幂函数

教材课上问题答案

【**动手实践**】(第 50 页)

提示：$y=x^{-1}$和 $y=-x^3$ 都是奇函数，而奇函数的图像关于原点对称，因此可对称画出另一半，而$y=x^2+1$ 与$y=-x^4$ 都是偶函数，偶函数的图像关于 y 轴对称，同样可画出另一半。

教材课后习题解答

【练习】(第 50 页)

(1)奇函数。

(2)非奇非偶函数。

(3)偶函数。

(4)非奇非偶函数。图像略。

【习题 2－5】(第 51 页)

A 组

1. (1)$f(x)=2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数。

证明:任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(2x_1+1)-(2x_2+1)=2(x_1-x_2)<0$。即$f(x_1)<f(x_2)$。

$\therefore f(x)=2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数。图像如图(1)。

(2)$f(x)=-\dfrac{2}{x}$在$(-\infty,0)$上是增函数。

证明:任取 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(-\dfrac{2}{x_1}\right)-\left(-\dfrac{2}{x_2}\right)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$。

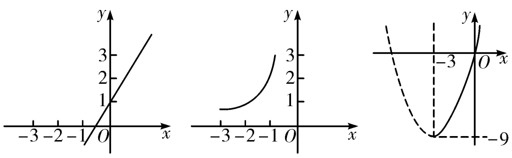
所以 $f(x)=-\dfrac{2}{x}$在$(-\infty,0)$上是增函数。其图像如图(2)。

(3)$f(x)=6x+x^2$ 在$[-3,+\infty)$上是增函数。

证明:任取 $x_1,x_2\in[-3,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则$3+x_1+3+x_2>0$。

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(6x_1+x_1^2)-(6x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)(6+x_1+x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$。

所以 $f(x)=6x+x^2$ 在$[-3,+\infty)$上是增函数。其图像如图(3)。



(1) (2) (3)

第 1 题图

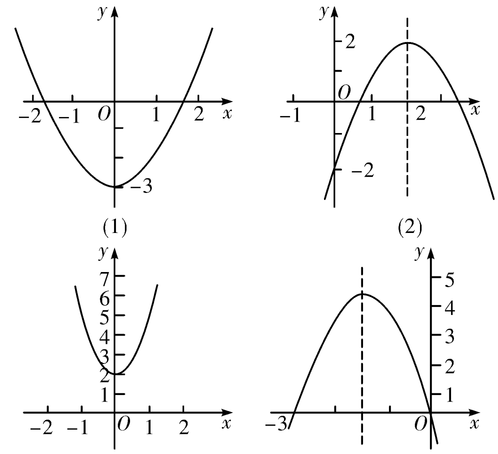
2. 对于函数 $f(x)=x^2+1$,其定义域为 $\mathbf{R}$。因为$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$,所以$f(-x)=f(x)$。因此函数$f(x)=x^2+1$ 是偶函数。任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$。所以$f(x)=x^2+1$ 在$[0,+\infty)$上是增加的。

3. (1)函数 $y=x^2-3$ 的图像开口向上,对称轴为 $x=0$,顶点为$(0,-3)$,最小值为-3,是偶函数,当 $x\leqslant0$ 时函数是减函数,当 $x\geqslant0$ 时函数是增函数。图像如图(1)所示。

(2)函数 $y=-x^2+4x-2$,即 $y=-(x-2)^2+2$ 的图像开口向下,对称轴为 $x=2$,顶点为$(2,2)$,最大值为 2,既不是奇函数又不是偶函数,当 $x\leqslant2$ 时函数是增函数,当$x\geqslant2$ 时函数是减函数。图像如图(2)所示。

(3)函数 $y=5x^2+2$ 的图像开口向上,对称轴为 $x=0$,顶点为$(0,2)$,最小值为 2,是偶函数,当 $x\leqslant0$ 时函数是减函数,当 $x\geqslant0$ 时函数是增函数。图像如图(3)所示。

(4)函数 $y=-2x^2-6x$,即 $y=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$的图像开口向下,对称轴为 $x=-\dfrac{3}{2}$,顶点为$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right)$,最大值为$\dfrac{9}{2}$,既不是奇函数又不是偶函数,当 $x\leqslant-\dfrac{3}{2}$时函数是增函数,当 $x\geqslant-\dfrac{3}{2}$时函数是减函数。图像如图(4)所示:

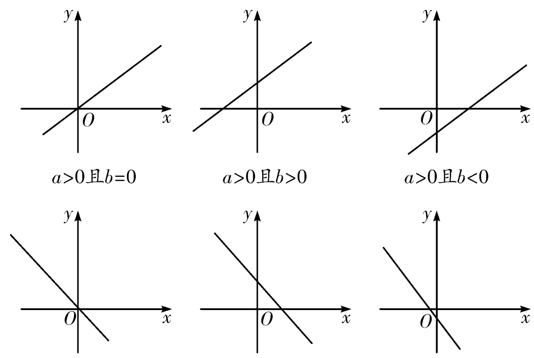


(1) (2) (3) (4)

第 3 题图

4. 当 $a>0$ 时,一次函数 $y=ax+b$ 是增函数;当 $a<0$ 时,一次函数$y=ax+b$ 是减函数;当 $b=0$ 时,一次函数 $y=ax+b$ 是奇函数;当 $b\neq0$ 时,一次函数 $y=ax+b$ 既不是奇函数又不是偶函数。

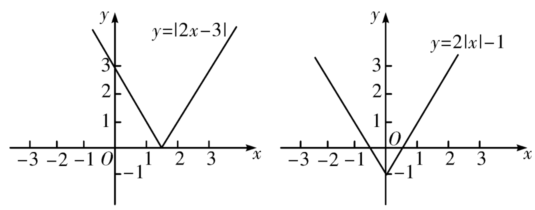
其图像如图所示:



第 4 题图

B 组

1. (1)图像如图(1)所示。函数 $y=|2x-3|$在$x\leqslant\dfrac{3}{2}$时递减,在 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$时递增。因为函数 $y=|2x-3|=2\left|x-\dfrac{3}{2}\right|$,所以函数 $y=|2x-3|$的图像可以由函数$y=|x|$的图像右移$\dfrac{3}{2}$个单位长度,再把每个点的纵坐标扩大为原来的 2 倍得到。



(1) (2)

第 1 题图

(2)图像如图(2)所示。函数 $y=2|x|-1$ 在$x\leqslant0$时递减,在 $x\geqslant0$ 时递增。函数 $y=2|x|-1$ 的图像可以由函数 $y=|x|$的图像的每个点的纵坐标扩大到原来的 2 倍,再下移 1 个单位长度得到。

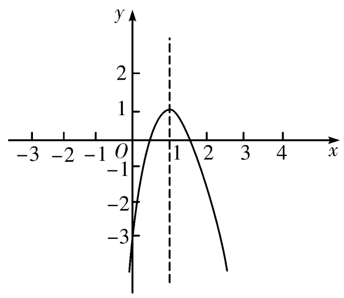
2. 若 $a>0$,当 $x\leqslant-\dfrac{b}{2a}$时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是递减的,当$x\geqslant-\dfrac{b}{2a}$时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是递增的;若 $a<0$,当 $x\leqslant-\dfrac{b}{2a}$时,二次函数$y=ax^2+bx+c$ 是递增的,当 $x\geqslant-\dfrac{b}{2a}$时,二次函数$y=ax^2+bx+c$ 是递减的。

当 $b=0$ 时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是偶函数;当 $b\neq 0$ 时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 既不是奇函数又不是偶函数。

【复习题二】(第 56 页)

A 组

1. (1)是映射,也是函数;
(2)不是映射,也不是函数;
(3)是映射,也是函数;
(4)是映射,也是函数。以上理由略。
2. 略。
3. (1)定义域是 $\mathbf{R}$;
(2)定义域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$;
(3)定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq -1,且\ x\neq -3\}$。
4. 设运输里程数为 x km,则运费为
$$F(x)=\begin{cases}0.5x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 0.4\times(x-100)+0.5\times 100, & x>100。\end{cases}$$
5. (1)二次函数 $y=-4x^2+8x-3$ 可以化为 $y=-4(x-1)^2+1$,其图像的开口向下,对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为 $(1,1)$;
(2)其图像如图,因为 $y=-4(x-1)^2+1$,所以其图像由 $y=-4x^2$ 的图像向右平移 1 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度得到;
(3)当 $x=1$ 时,二次函数 $y=-4x^2+8x-3$ 的最大值为 1,无最小值;
(4)当 $x\leqslant 1$ 时,函数是增函数,当 $x\geqslant 1$ 时,函数是减函数。



第 5 题图

6. 略。
7. 设学校购买电脑 x 台,则买甲公司的需费用为 $f(x)=\begin{cases}6\,000x, & x\leqslant 10,且\ x\in\mathbf{N}_+,\\ 6\,000\times 10+6\,000(x-10)\times 70\%, & 10<x\leqslant 40,且\ x\in\mathbf{N}_+。\end{cases}$
买乙公司的需费用为 $F(x)=6\,000x\cdot 85\%$,$0\leqslant x\leqslant 40$,且 $x\in\mathbf{N}_+$。
购买 40 台电脑,在甲公司需 186 000 元,而在乙公司需 204 000 元,所以选择甲公司合算。图略。
8. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调增加,在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少。
9. (1)图像略。
(2)单调区间:在 $[-3,-2)$ 上单调递减,在 $[-2,0)$ 上单调递增,在 $[0,1)$ 上单调递减,在 $[1,3]$ 上单调递增,在 $(3,6]$ 上单调递减;
(3)最大值为 4,最小值为 -5。
10. (1)函数 $y=\frac{1}{x^3}$ 是奇函数。
(2)函数 $f(x)=2x^2-5$ 是偶函数。证明略。
11. (1)$\because$ 每月以相等的数额存入,$\therefore$ 函数是一次函数。由于原有 60 元,两个月后有 90 元,$\therefore$ 函数图像过点 $(0,60)$,$(2,90)$。设一次函数的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,于是,有 $\begin{cases}60=k\times 0+b,\\ 90=k\times 2+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=15,\\ b=60。\end{cases}$
$\therefore$ 所求盒内的钱数(元)与存钱月份的函数解析式为 $y=15x+60(x\in\mathbf{N}_+)$。其图像略。
(2)解 $200=15x+60$ 得 $x\approx 9.3$。$\therefore$ 10 个月后,这位同学可以第一次汇款。
12. 从中可以看出随着水深的增加,存水量在增加。其图像略。

B 组

1. (1)$y=2x$
(2)$y=x^2+2x-1$
2. B 【解析】$\because$ 函数 $y=x^2-2x$ 的图像的对称轴为 $x=1$,又 $m<-2$,$\therefore m-1,m,m+1$ 都小于 -1,即各点都在对称轴的左侧。又函数 $y=x^2-2x$ 的二次项系数为 1,大于零,$\therefore$ 其图像对称轴左侧单调递减。于是有 $y_1>y_2>y_3$。
3. D
4. 设 $x_1,x_2\in[2,5]$,且 $x_1<x_2$,$\because$ 二次函数 $y=-2x^2+3x-1$ 的开口向下,对称轴为 $x=\frac{3}{4}$,$[2,5]$ 在对称轴的右侧,$\therefore \frac{3}{4}<x_1<x_2$,$\frac{3}{2}<x_1+x_2$,$3<2(x_1+x_2)$。于是,有 $f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1^2+3x_1-1)-(-2x_2^2+3x_2-1)=(x_1-x_2)[3-2(x_1+x_2)]>0$。即 $f(x_1)>f(x_2)$。$\therefore$ 二次函数 $f(x)=-2x^2+3x-1$ 在 $[2,5]$ 上单调减少。
5. (1)$f(-x)=\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{f(x)}(x\neq\pm 1)$。
(2)$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}=-\frac{1-x}{1+x}=-f(x)(x\neq -1,x\neq 0)$。
6. (1)设每月使用的煤气量为 x m^3,煤气费为 y 元,那么 $y=\begin{cases}3+c, 0\leqslant x\leqslant a,\\ 3+c+b(x-a), x>a。\end{cases}$
(2)由表格可以知道 $\begin{cases}4=3+c,\\ 14=3+c+b(25-a),\\ 19=3+c+b(35-a)。\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=5,\\ b=\frac{1}{2},\\ c=1。\end{cases}$ 图像略。

C 组

1. 由于二次函数 $y=kx^2-4x-8$ 在 $[5,20]$ 上单调减少,其对称轴为 $x=\frac{2}{k}$。若 $k<0$,图像开口向下,成立。若 $k>0$,图像开口向上,于是,$\frac{2}{k}\geqslant 20$,即 $k\leqslant\frac{1}{10}$,故 $k<0$ 或 $0<k\leqslant\frac{1}{10}$。
2. 二次函数 $f(x)=x^2-2(2a-1)x+5a^2-4a+2=[x-(2a-1)]^2+a^2+1$。开口向上,对称轴为 $x=2a-1$。设其在 $[0,1]$ 上的最小值为 $g(a)$,则若 $2a-1<0$,即 $a<\frac{1}{2}$ 时,则二次函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $g(a)=f(0)=5a^2-4a+2$;若 $0\leqslant 2a-1\leqslant 1$,即 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ 时,则二次函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $g(a)=f(2a-1)=a^2+1$;若 $2a-1>1$,即 $a>1$,则二次函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $g(a)=f(1)=5a^2-8a+5$;
综上所述,二次函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $g(a)=\begin{cases}5a^2-4a+2, & a<\frac{1}{2},\\ a^2+1, & \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1,\\ 5a^2-8a+5, & a>1,\end{cases}$ 图像略。

3. (1)从图像可以看出两根为1,3,∴ 可以设二次函数的解析式为 $y=a(x-1)(x-3)$。函数图像又过点(0,3),∴ $3=a(0-1)(0-3)$。解得 $a=1$,二次函数的解析式为 $y=(x-1)(x-3)$,即 $y=x^2-4x+3$。其顶点为(2,-1)。

(2)设 N 点的横坐标为 x,那么 $S=f(x)=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABN}=2\times\frac{3}{2}-2\times\frac{x^2-4x+3}{2}=-x^2+4x$,定义域为(1,3)。

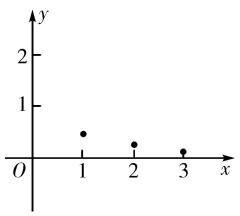
第三章 指数函数和对数函数

§1 正整数指数函数

教材课后习题解答

【练习】(第 63 页)

1. 可以取 $x=1,2,3$ 计算对应的 y 值,描出对应的点。由图可以看出,此图像是由一系列孤立的点构成的。由图像可知在定义域 $\mathbf{N}_+$ 上函数是单调递减的。



第 1 题图

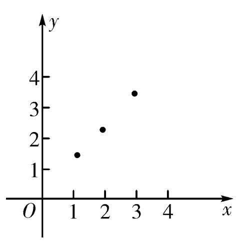
2. 设经过年数为 x,年产量为 y,则 $y=10\ 000(1+p\%)^x\ (x\in\mathbf{N}_+)$。

【习题 3-1】(第 63 页)

1. 设经过年数为 x,成本为 y,则 $y=a(1-p\%)^x(x\in\mathbf{N}_+)$。
2. $y=2^{3x}(x\in\mathbf{N}_+)$,当 $x=3$ 时,$y=2^9=512$,

∴ 经过 3 h 后,这个细菌繁殖成的个数为 512。

3. 可取 $x=1,2,3$ 计算相应的 y 值,描出对应点。由图可知函数是单调递增的。



第 3 题图

4. 略。

§2 指数扩充及其运算性质

教材课后习题解答

【练习】(第 66 页)

1. (1)8;(2)1;(3)11;(4)$\frac{1}{1\ 000}$;(5)32;(6)$\frac{7}{8}$;(7)10;(8)0.5。
2. (1)$b=32^{-\frac{1}{5}}$;(2)$b=3^{-\frac{5}{4}}$;(3)$b=\pi^{-\frac{3m}{2n}}(m,n\in\mathbf{N}_+)$。
3. (1)$\frac{1}{2}$;(2)$\frac{1}{9}$。

【练习】(第 68 页)

1. (1)$12^{\sqrt{2}}$;(2)$-6y^{\sqrt{3}}$。
2. (1)$\frac{2}{3}=10^{\alpha-\beta}$;(2)$8=10^{3\alpha}$;(3)$24=10^{3\alpha+\beta}$; (4)$\frac{\sqrt{3}}{2}=10^{\frac{\beta}{2}-\alpha}$。
3. 略。

【习题 3-2】(第 68 页)

A 组

1. (1)$a^{-\frac{5}{3}}$;(2)$\frac{x}{y^{-\frac{1}{4}}}$;(3)$-12y^2$;(4)$\frac{125t^9r^6}{64s^3}$。
2. (1)1.710;(2)46.88;(3)0.113 2;(4)28.21;(5)0.490 0。
3. (1)x^2;(2)$-\frac{1}{3a}$;(3)$-\frac{3a}{5c^2}$;(4)24;(5)$\frac{25t^2r^6}{4s^4}$;(6)$6x-\frac{1}{x}$;(7)$a+\frac{1}{a}+2$;(8)$9x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{y}$。
4. (1)$\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=(25+4+7)^{\frac{1}{2}}=6$;

(2)$\left[\frac{1}{4}(0.027^{\frac{2}{3}}+50\times0.001\ 6^{\frac{3}{4}})\right]^{-\frac{1}{2}}$

$=\left[\frac{1}{4}(0.09+50\times0.008)\right]^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{49}{400}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{20}{7}$。

5. (1)$\frac{9}{4}=10^{2\beta-2\alpha}$;(2)$12=10^{2\alpha+\beta}$;(3)$72=10^{3\alpha+2\beta}$;(4)$\frac{\sqrt{6}}{2}=10^{\frac{\beta-\alpha}{2}}$。
6. (1)229.1;(2)29.19;(3)9.861;(4)0.778 8。
7. $\frac{\sqrt{3}}{9}$;$\frac{1}{27}$。
8. $f(n)=120^n(n\in\mathbf{N}_+)$;$120^5$ 粒。

B 组

1. (1)$a^3b^{\frac{5}{2}}$;(2)$m^{\frac{2}{3}}$;(3)$(m-n)^{\frac{3}{2}}$;(4)$a^{\frac{5}{6}}$;(5)$a^{\frac{7}{8}}$。
2. (1)$\frac{a+1-4a^{\frac{1}{2}}}{a-1}$;

(2)原式$=\frac{(b-b^{-1})^2}{b^2-b^{-2}}=\frac{b-b^{-1}}{b+b^{-1}}=\frac{b^2-1}{b^2+1}$。

3. 略。
4. (1)$\because (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=5$,$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$。

(2)$\because (x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}-2=1$,$\therefore x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\pm1$;

(3)$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}-1)=2\sqrt{5}$;

(4)$x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}+1)=\pm4$。

5. 66.5 亿。

§3 指数函数

教材课上问题答案

【实践二】(第 74 页)

略。

【思考交流】(第 76 页)

对于幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$,它的定义域为$[0,+\infty)$,值域也是$[0,+\infty)$,且图像过点(0,0)和(1,1)。它是增函数,但有些幂函数则不一样,如 $y=x^{-1}$,所以幂函数的性质比指数函数的性质要复杂一些。

教材课后习题解答

【练习】(第 71 页)

1. 0.1;0.3;0.7;1.0;1.2;2.8;8.0。
2. $x\approx2.3$。

【练习 1】(第 73 页)

1. (1)$2.4^{0.6}>2.4^{0.2}$;(2)$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$;(3)$0.9^5<0.9^4$;

(4)$4^{0.5}<4^{0.8}$。

2. 略。

【练习 2】(第 76 页)

1. (1)$5^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{3}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$;(2)$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

2. (1)当 $x<0$ 时,$y=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ 增长得快;当 $x>0$ 时,$y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ 增长得快;

(2)当 $x>0$ 时,$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ 减少得快;当 $x<0$ 时,$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 减少得快。

【习题 3-3】(第 76 页)

A 组

1. $y=a(1+r)^{x}(x\in\mathbf{N}_{+})$,5 期后的本利和是 $1\ 000(1+2.25\%)^{5}\approx 1\ 117.68$(元)。

2.

函数	$y=2^{3-x}$	$y=5^{6x+1}$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$
定义域	**R**	**R**	**R**
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$

函数	$y=0.7^{\frac{1}{x}}$	$y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$	$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4x}}$
定义域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(0,1)\cup(1,+\infty)$	$(0,1)\cup(1,+\infty)$	$(0,1)\cup(1,+\infty)$

3. (1)$b>c>1>a>0$;(2)指数函数的底数越大,它的图像与 $x=1$ 的交点越靠上。

4. (1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}$;(2)$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

(3)$5^{3.1}>3^{3.1}$;(4)$0.3^{-\frac{1}{3}}>0.3^{-\frac{1}{5}}$。

5. (1)$m<n$;(2)$m<n$;(3)$m>n$;(4)$m<n$。

6. (1)$0<a<1$;(2)$a>1$;(3)$0<a<1$。

7. 略。

B 组

1. (1)正确;(2)错误;(3)错误;(4)错误。

2. $y^{x}>x^{x}>x^{y}$。

3. (1)要使 $y_1=y_2$,只需 $3x+1=-2x$,得 $x=-\frac{1}{5}$;

(2)要使 $y_1>y_2$,当 $a>1$ 时,只需 $3x+1>-2x$,得 $x>-\frac{1}{5}$;当 $1>a>0$ 时,只需 $3x+1<-2x$,得 $x<-\frac{1}{5}$。

4. (1)$f(x)f(y)=3^{x}\cdot 3^{y}=3^{x+y}=f(x+y)$;

(2)$f(x)\div f(y)=\frac{3^{x}}{3^{y}}=3^{x-y}=f(x-y)$。

5. 画图略。

(1)$y=3^{x}$的图像向左平移 3 个单位长度得$y=3^{x+3}$的图像;向右平移 1 个单位长度得 $y=3^{x-1}$的图像;

(2)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图像向右平移 1 个单位长度得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的图像;向下平移 1 个单位长度得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$ 的图像。

6. (1)$x\in[0,+\infty)$;(2)$x\in(-\infty,0]$;(3)$x\in[2,+\infty)$;(4)$x\in[0,+\infty)$。

§4 对数

教材课上问题答案

【思考交流】(第 79 页)

1. $a^{b}=N$ 与 $\log_{a}N=b(a>0$ 且 $a\neq 1,N>0)$这两个式子是等价的,前一个是求 N,后一个是求指数 b。

如:$3^{2}=9\Rightarrow\log_{3}9=2$,类似 $3\times 2=6,3=\frac{6}{2}$。

2. $\log_{a}1=0,\log_{a}a=1$。

3. 设 $a^{b}=N$,则 $b=\log_{a}N$,代入 $a^{\log_{a}N}=N$。

4. 零和负数没有对数。

【思考交流】(第 82 页)

1. (1)不成立,如:$\lg(10\times 10^{2})\neq\lg 10\cdot\lg 10^{2}$。

(2)不成立,如:$\lg\frac{10}{2}\neq\frac{\lg 10}{\lg 2}$。

(3)不成立,如:$\lg(10+10)\neq\lg 10\cdot\lg 10$。

(4)不成立,如:$\lg 100-\lg 10\neq\frac{\lg 100}{\lg 10}$。

2. 对数的运算为降级运算,乘除降为加减,乘方变乘法。

【问题与思考】(第 86 页)

1. 由 $a^{b}=N\Rightarrow b=\log_{a}N$。

另一方面 $a^{b}=N\Rightarrow\log_{c}a^{b}=\log_{c}N\Rightarrow b\log_{c}a=\log_{c}N$。

$\therefore b=\frac{\log_{c}N}{\log_{c}a}=\log_{a}N$。

2. 用它们的常用对数来比较。

令 $x=2^{100},y=3^{65}$。

$\lg x=100\lg 2\approx 100\times 0.301\ 0=30.10$,

$\lg y=65\lg 3\approx 65\times 0.477\ 1\approx 31.01>\lg x$,$\therefore y>x$,即$3^{65}>2^{100}$。

教材课后习题解答

【练习 1】(第 80 页)

1. (1)$\log_{3}729=6$;(2)$\log_{2}1\ 024=10$;(3)$\log_{\frac{27}{8}}\frac{9}{4}=\frac{2}{3}$;(4)$\log_{64}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$。

2. (1)$2^{9}=512$;(2)$25^{\frac{3}{2}}=125$;(3)$10^{-4}=0.000\ 1$;(4)$\left(\frac{1}{3}\right)^{m}=4.2$。

3. (1)3;(2)-2;(3)5;(4)0;(5)2;(6)3;(7)-2;(8)1。

【练习 2】(第 83 页)

1. (1)9;(2)-3;(3)3。

2. (1)-2;(2)$\frac{3}{2}$;(3)2;(4)0;(5)2;(6)2。

3. (1)$2\lg x+\lg y+3\lg z$;(2)$\lg x-\frac{1}{3}\lg y+\frac{3}{2}\lg z$;

(3)$2\lg x-3\lg y-\frac{1}{2}\lg z$。

【练习】(第 86 页)

1. (1)3.321 9;(2)6.643 9;(3)5.643 9;(4)2.726 8;(5)6.287 7;

(6)$-6.244\ 6\times 10^{-3}$。

2. (1)$\log_{9}8\cdot\log_{32}27=\frac{3\lg 2}{2\lg 3}\cdot\frac{3\lg 3}{5\lg 2}=\frac{9}{10}$;

(2)$\log_{2}\frac{1}{125}\cdot\log_{3}\frac{1}{32}\cdot\log_{5}\frac{1}{3}=-3\log_{2}5\cdot\frac{-5}{\log_{2}3}\cdot\frac{-\log_{2}3}{\log_{2}5}=-15$。

3. (1)$\log_{a^{m}}b=\frac{\log_{b}b}{\log_{b}a^{m}}=\frac{1}{m\log_{b}a}$;

(2)$\log_{a^{m}}b^{m}=\frac{\log_{a}b^{m}}{\log_{a}a^{m}}=\frac{m\cdot\log_{a}b}{m\cdot\log_{a}a}=\log_{a}b$。

4. $A=\frac{\lg N}{\ln N}=\frac{\frac{\ln N}{\ln 10}}{\ln N}=\frac{1}{\ln 10}\approx 0.4343$;

$B=\frac{\ln N}{\lg N}=\frac{\ln N}{\frac{\ln N}{\ln 10}}=\ln 10\approx 2.3026$。

【习题3-4】(第87页)

A组

1. (1)$3^3=27$;(2)$25^{\frac{1}{2}}=5$;(3)$10^{-2}=0.01$;(4)$25^2=625$。

2. (1)$\log_2 8=3$;(2)$\log_2\frac{1}{4}=-2$;(3)$\log_9\frac{1}{81}=-2$;(4)$\lg 100=2$。

3. (1)2;(2)-4;(3)$-\frac{1}{4}$;(4)7;(5)$\frac{2}{3}$;(6)9;(7)-1;(8)3;(9)4。

4. (1)1;(2)16;(3)5;(4)-1。

5. (1)$\lg(xyz)=\lg x+\lg y+\lg z$。

(2)$\lg(xy^{-2}z^{-1})=\lg x-2\lg y-\lg z$。

(3)$\lg(x^2y^2z^{-3})=2\lg x+2\lg y-3\lg z$。

(4)$\lg\frac{\sqrt{x}}{y^3z}=\frac{1}{2}\lg x-3\lg y-\lg z$。

(5)$\lg\frac{xy}{x^2-y^2}=\lg x+\lg y-\lg(x-y)-\lg(x+y)$。

(6)$\lg\left(\frac{x+y}{x-y}\cdot y\right)=\lg(x+y)-\lg(x-y)+\lg y$。

(7)$\lg\left[\frac{y}{x(x-y)}\right]^3=3\lg y-3\lg x-3\lg(x-y)$。

6. (1)$\ln e-\ln e^2=1-2=-1$。

(2)$\lg 0.001+3\lg 10=-3+3=0$。

(3)$\log_3 9+\log_3\frac{1}{9}=2-2=0$。

(4)$\lg 8+\lg 125=\lg 1000=3$。

(5)$2\log_5 25+3\log_2 64=4+18=22$。

(6)$2\log_3 6-\log_3 4=\log_3\frac{36}{4}=2$。

(7)$\log_2(\log_2 16)=\log_2 4=2$。

(8)$\frac{\log_8 27}{\log_4 9}=\frac{\log_{2^3}3^3}{\log_{2^2}3^2}=\frac{\log_2 3}{\log_2 3}=1$。

7. (1)$\lg 12=\lg 3+2\lg 2=1.0791$。

(2)$\lg 32=5\lg 2=1.5050$。

(3)$\lg\frac{3}{2}=\lg 3-\lg 2=0.1761$。

(4)$\lg\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\lg 3-\lg 2=-0.06245$。

8. (1)$\because \lg x=\lg a+\lg b=\lg ab$,$\therefore x=ab$。

(2)$\because \lg x=\lg m-\lg n=\lg\frac{m}{n}$,$\therefore x=\frac{m}{n}$。

(3)$\because \lg x=2\lg a-3\lg b=\lg\frac{a^2}{b^3}$,$\therefore x=\frac{a^2}{b^3}$。

(4)$\because \log_a x=\frac{1}{2}\log_a m+2\log_a n=\log_a(\sqrt{m}\cdot n^2)$,$\therefore x=n^2\sqrt{m}$。

(5)$\because \log_a x=\frac{2}{3}\log_a m-2\log_a n=\log_a\frac{\sqrt[3]{m^2}}{n^2}$,$\therefore x=\frac{\sqrt[3]{m^2}}{n^2}$。

B组

1. (1)$\log_a(n^2+n+1)+\log_a(n-1)$

$=\log_a[(n-1)(n^2+n+1)]$

$=\log_a(n^3-1)=$右边,

$\therefore$ 原式得证。

(2)$\log_a(b^x+b^{-x}+2)+\log_a(b^x+b^{-x}-2)$

$=\log_a[(b^x+b^{-x}+2)(b^x+b^{-x}-2)]$

$=\log_a[(b^x+b^{-x})^2-4]$

$=\log_a(b^x-b^{-x})^2=2\log_a(b^x-b^{-x})=$右边,

$\therefore$ 原式得证。

2. (1)$\because \lg(10x)+1=\lg(100x)$,而$3\lg x=\lg x^3$,

$\therefore 100x=x^3$,$\therefore x=10$ 或 $x=-10$(舍去)或 $x=0$(舍去)。

(2)$\because 3\ln x-3=\ln\frac{x^3}{e^3}$,$\therefore \frac{x^3}{e^3}=2x$,$\therefore x=\sqrt{2e^3}$。

(3)$\because \lg\frac{x}{10}=\lg x-1$,即 $\lg x-1=-2-2\lg x$,

$\therefore \lg x=-\frac{1}{3}$,$\therefore x=10^{-\frac{1}{3}}$。

(4)$\because \log_{\sqrt{x}}(2x)=2\log_x(2x)=2\log_x 2+2=\frac{1}{2}$,

$\therefore \log_x 2=-\frac{3}{4}$,$\therefore x^{-\frac{3}{4}}=2$,$\therefore x=2^{-\frac{4}{3}}$。

3. (1)$2^{3+\log_2 5}=2^3\cdot 2^{\log_2 5}=8\times 5=40$。

(2)$\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2=\lg\frac{10}{2}\cdot\lg(2\times 10)+(\lg 2)^2=(1-\lg 2)(1+\lg 2)+(\lg 2)^2=1$。

4. (1)$\log_2 25\cdot\log_3 4\cdot\log_5 9=\frac{\lg 25}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 5}$

$=\frac{2\lg 5}{\lg 2}\cdot\frac{2\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{2\lg 3}{\lg 5}=8$。

(2)原式$=\left(\frac{\lg 3}{\lg 4}+\frac{\lg 3}{\lg 8}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{\lg 9}\right)$

$=\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{2\lg 3}\right)$

$=\frac{5\lg 3}{6\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{2\lg 3}=\frac{5}{4}$。

(3)证明:左边$=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg a}{\lg c}=1=$右边,$\therefore$ 等式成立。

§5 对数函数

教材课上问题答案

【思考交流】(第94页)

1. 略。

2. 当对数函数 $y=\log_a x(a>1)$的 a 越小,图像上升越快,a 越大,图像越靠近 x 轴。

3. 对数函数 $y=\log_a x$,当 $0<a<1$ 时,a 越小,图像下降越快,a 越大越靠近 x 轴,可以联系 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 的两图像关于 x 轴对称。

教材课后习题解答

【练习】(第91页)

1. (1)2;1;0;-1;-2;-3。

(2)-1;-4;0;2。

2. 互为反函数,定义域和值域互换,对应法则互逆。

3. (1)$y=2.5^x$;(2)$y=\pi^x$;(3)$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$。

4. (1)$y=\log_4 x$;(2)$y=\log_{1.4}x$;(3)$y=\log_{\frac{\pi}{2}}x$。

【练习】(第93页)

1. 略。

2. -2;-1;0;0.6;1;2;2.3;2.6;2.8;3。

3. 5.7。

4. 略。

【练习】(第96页)

1. 略。

2. (1)$(-\infty,1)$;(2)$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;(3)$(0,1]$。

3. (1) $\lg 6<\lg 8$；(2) $\log_{0.3}5>\log_{0.3}7$；(3) 当 $a>1$ 时，$\log_a 2.5<\log_a 3.8$；当 $1>a>0$ 时，$\log_a 2.5>\log_a 3.8$。

【习题 3－5】(第 97 页)

A 组

1. (1) $y=3^x$；(2) $y=0.7^x$；(3) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$。

2. (1) 0；1；2。(2) －2；－3；3。

3. (1) $(-\infty,3)$；(2) $\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$。

4. (1) $\ln 6<\ln 8$；(2) $\log_{0.3}1.6<\log_{0.3}1.5$；(3) $\log_{1.2}6<\log_{1.2}8$；(4) 当 $a>1$ 时，$\log_a m>\log_a n$；当 $1>a>0$ 时，$\log_a m<\log_a n$。

5. (1) $m<n$；(2) $m<n$；(3) 当 $a>1$ 时，$m>n$；当 $1>a>0$ 时，$m<n$。

6. $b>a>1>c>0$。

B 组

1. (1) 不一定成立，$\because \log_a x^2=2\log_a|x|$；

(2) $\log_a x^2=2\log_a|x|$ 一定成立；

(3) 不一定成立，$\log_a|x\cdot y|=\log_a|x|+\log_a|y|$；

(4) 只有 $a>1$ 且 $x>1$ 或 $0<a<1$ 且 $0<x<1$ 时，才成立。

2. 经过 50 年后的镭剩留量：97.86%；经过 500 年后的镭剩留量：80.52%；经过 10 000 年后的镭剩留量：1.31%。

3. 证明：
$$f(a)+f(b)=\lg\frac{1-a}{1+a}+\lg\frac{1-b}{1+b}$$
$$=\lg\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\cdot\left(\frac{1-b}{1+b}\right)\right]$$
$$=\lg\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b},$$
又
$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}=\lg\frac{(1-a)+b(a-1)}{(1+a)+b(1+a)}$$
$$=\lg\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}=\lg\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b},$$
$$\therefore f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)。$$

*4. 证明：$\because \log_{a^n}b^m=\frac{\log_a b^m}{\log_a a^n}=\frac{m\log_a b}{n}=\frac{m}{n}\log_a b$，

$\therefore$ 等式得证。

§6 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

教材课上问题答案

【思考交流】(第 100 页)

在计算函数 $y=2^x$ 的值时，当 x 很大，常常利用科学记数法来表示，如 $2^{100}=1.267\ 7\times10^{30}\Rightarrow 2^{200}=1.267\ 7^2\times10^{60}$……也可用对数来求近似值。令 $2^x=u$，$\lg u=x\lg 2$，再用反对数表求 u。

教材课后习题解答

【练习】(第 103 页)

1. 略。 2. 略。

【习题 3－6】(第 103 页)

1. 1 000 粒米约为 40 g，

$\therefore$ 1 粒米约为 0.000 04 kg，

$\therefore$ 2^{64} 粒米约为 7.379×10^{14} kg。

$\because$ 7.379×10^{14} kg $<5.976\times10^{24}$ kg，

$\therefore$ 2^{64} 粒米的质量比地球的质量要小。

2. 三个函数中，$y=\lg x$ 增长的速度比 $y=x^{200}$ 和 $y=e^x$ 增长的速度要慢得多，且 $y=\lg x$ 增长得越来越慢，图像几乎渐渐与 x 轴平行，而 $y=x^{200}$ 和 $y=e^x$，当 x 比较小时，$y=x^{200}$ 要比 $y=e^x$ 增长得快，但当 x 逐渐增大，增大到一定程度后，$y=e^x$ 要比 $y=x^{200}$ 增长得更快。

【复习题三】(第 108 页)

A 组

1. (1) $\log_a 1=0$；(2) $\log_a a=1$；(3) $\log_a N=2$；(4) $\log_a m=\frac{1}{3}$。

2. (1) $a^0=1$；(2) $a^1=a$；(3) $a^N=2$；(4) $a^n=m^{\frac{1}{3}}$。

3. (1) 原式 $=\frac{3}{2}-1-\frac{4}{9}+100=100\frac{1}{18}$；

(2) 原式 $=\dfrac{\log_m\frac{2a}{2b}}{\log_m\frac{a}{b}}=\dfrac{\log_m\frac{a}{b}}{\log_m\frac{a}{b}}=1$；

(3) 原式 $=(3+2)(3-2)=5$；

(4) $\dfrac{\log_{27}16}{\log_3 8}=\dfrac{\frac{4\log_3 2}{3\log_3 3}}{3\log_3 2}=\frac{4}{9}$。

4. (1) 不是恒等；

(2) 不是恒等；

(3) 不是恒等；

(4) 恒等。

5. (1) D (2) B (3) A (4) C

6. 原式 $=(2^{-\frac{1}{2}})^2\div((2^5)^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}=2^{-1-\frac{5}{4}}=2^{-\frac{9}{4}}$。

7. (1) $m<n$；(2) $m<n$；(3) 当 $a>1$ 时，$m<n$；当 $0<a<1$ 时，$m>n$。

8. (1) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$；

(2) $[0,+\infty)$；

(3) 当 $a>1$ 时，定义域是 $(\log_a 2,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，定义域是 $(-\infty,\log_a 2)$；

(4) $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$；

(5) $[2^{\frac{5}{2}},+\infty)$；

(6) $(-\infty,0)$。

9. (1) $\log_6 0.8<\log_6 9.1$；

(2) $\log_{0.1}7>\log_{0.1}9$；

(3) $\log_{0.1}5<\log_{2.3}5$；

(4) 当 $a>1$ 时，$\log_a 4<\log_a 6$；当 $0<a<1$ 时，$\log_a 4>\log_a 6$。

10. (1) $x=mn^3$；(2) $x=\frac{b^2}{c^3}$。

11. (1) A (2) A

12. (1) $\dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1+3^x}=3$，

$\therefore \dfrac{3^x+1}{3^x(1+3^x)}=3$，

$\therefore \dfrac{1}{3^x}=3$，$\therefore x=-1$。

(2) $\begin{cases}3x-1>0,\\ x-1>0,\\ 3+x>0。\end{cases}$ $\therefore x>1$。

又 $3x-1=(x-1)(x+3)$，

$\therefore x=2$ 或 $x=-1$（舍去），$\therefore x=2$。

13. 令 $2\ 000\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)=12$，

$\therefore 1+\frac{M}{m}=e^{\frac{3}{500}}$，$\therefore \frac{M}{m}=e^{\frac{3}{500}}-1\approx0.006$。

$\therefore$ 当燃料质量是火箭质量的 0.006 倍时，火箭的最大速度可达

12 km/s。

14. 根据题意，令 $T_0=15, T_1=95, T=80, t=2$，

$\therefore 80=15+(95-15)\cdot e^{-2k}$，$\therefore e^{-2k}=\frac{13}{16}$，

$\therefore -2k=\ln\frac{13}{16}$，$\therefore k\approx 0.1$，

$\therefore$ 函数关系式为 $T=15+80\cdot e^{-0.1t}$，

$\therefore$ 当 $T=65$ 时，$65=15+80\cdot e^{-0.1t}$，$\therefore t\approx 5$ 分钟；

当 $T=40$ 时，$40=15+80\cdot e^{-0.1t}$，$\therefore t\approx 12$ 分钟；

当 $T=32$ 时，$32=15+80\cdot e^{-0.1t}$，$\therefore t\approx 15$ 分钟；

当 $T=12$ 时，$12=15+80\cdot e^{-0.1t}$，$e^{-0.1t}<0$ 不可能。

$\therefore k\approx 0.1$，分别经过约 5 分钟，12 分钟，15 分钟，茶水温度是 65 ℃，40 ℃，32 ℃，茶水不会冷却到 12 ℃。

B 组

1. (1) A 【解析】$S=(0,+\infty)$，$T=[-1,+\infty)$，则 $S\cap T=(0,+\infty)$。故选 A。

(2) A 【解析】$A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$B=(1,+\infty)$，则 $A\cap B=(1,+\infty)$。故选 A。

(3) D 【解析】$y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=2^{1.5}$，$\because y=2^x$ 是增函数，$\therefore y_1>y_3>y_2$。故选 D。

(4) D 【解析】$\because 0<x<y<a<1$，$\therefore 0<xy<a^2<1$，则有 $\log_a(xy)>\log_a a^2=2$。故选 D。

(5) B 【解析】若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则 $0<b<a<1$。故选 B。

2. (1) 要使 $y_1=y_2$，即 $a^{2x-3}=a^{1-3x}$，

只需 $2x-3=1-3x$，$\therefore x=\frac{4}{5}$。

(2) 当 $a>1$ 时，要使 $y_1>y_2$，即 $a^{2x-3}>a^{1-3x}$，

只需 $2x-3>1-3x$，$\therefore x>\frac{4}{5}$；

当 $0<a<1$ 时，要使 $y_1>y_2$，即 $a^{2x-3}>a^{1-3x}$，

只需 $2x-3<1-3x$，$\therefore x<\frac{4}{5}$。

3. (1) $\because -1<x<0$，$\therefore 0<x+1<1$，

而 $f(x)=\log_{2a}(x+1)>0$，$\therefore 0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$。

(2) 方程可化为 $3^{2x+1}=1-2\cdot 3^x$，

即 $3\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x-1=0$，

从而 $3^x=\frac{1}{3}$ 或 $3^x=-1$（舍去），解得 $x=-1$。

(3) $2^{-x}=\frac{1}{4}$，即 $x=2>1$，应舍去。

令 $\log_{81}x=\frac{1}{4}$，$\therefore x=81^{\frac{1}{4}}=3>1$，$\therefore x=3$。

4. 设 $x_1<x_2$，且 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}$

$=\frac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)-(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$

$=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}-2^{x_2}+2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$。

$\because x_1<x_2$，$\therefore 2^{x_1}<2^{x_2}$，$\therefore 2^{x_1}-2^{x_2}<0$，

而 $2^{x_2}+1>2^{x_1}+1>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数。

5. 因为 ^{14}C 的半衰期是 5 730 年，所以建立方程 $\frac{1}{2}=e^{-5\,730k}$。解得 $k\approx 0.000\,121$，由此可知 ^{14}C 的衰减规律服从指数型函数 $a_1=a\cdot e^{-0.000\,121t}$。由于测得出土的古莲子中 ^{14}C 的剩留量占原始量的 87.9%，所以 $e^{-0.000\,121t}=0.879$。两边取自然对数，得 $-0.000\,121t=\ln 0.879$，得 $t\approx 1\,066$ 年。$2\,011-1\,066=945$，即古莲子的生活年代大约在公元945 年。

C 组

1. (1) $f(x)$ 的定义域满足 $a^x>1$，当 $a>1$ 时，$x>0$；当 $0<a<1$ 时，$x<0$；

(2) 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 是单调增函数；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 仍是单调增函数。

2. 接受 1 000 英镑后，按每年 5% 的利率生息，设 x 年后的本息和为 y，则 $y=1\,000(1+5\%)^x$，当 $x=100$ 时，$y\approx 131\,501$ 英镑，所以他说 100 年后增加到 131 000 英镑是合情合理的。若去掉100 000，剩下的 31 000 继续生息 100 年，则 100 年后本息和为 $y=31\,000(1+5\%)^{100}$，此时 $y\approx 4\,076\,539$。所以他说增加到4 061 000也是可以做到的。所以，我们认为富兰克林的设想有道理。

第四章 函数应用

§1 函数与方程

教材课后习题解答

【练习】（第 116 页）

1. 观察 $f_i(x)$ 的图像，在 $(-\infty,0)$ 内，$f_1(x)$，$f_2(x)$ 都与 x 轴有交点，所以 $f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 内有解，而在 $(-\infty,0)$ 内，$f_3(x)$，$f_4(x)$ 都与 x 轴没有交点，所以 $f_3(x)=0$，$f_4(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 内无解。

2. 存在。令 $f(x)=4x^3+x-15$，

则 $f(1)=-10$，$f(2)=19$，$\therefore f(1)\cdot f(2)<0$。

$\because f(x)$ 的图像是连续的，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 内有零点，即 $4x^3+x-15=0$ 在 $[1,2]$ 内存在实数解。

3. (1) 可以是 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，令 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，

则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}$，

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，

$\therefore$ 方程 $x-\frac{1}{x}=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 内存在实数解。

(2) 可以是 $\left[\frac{1}{3},1\right]$，令 $f(x)=\lg x+x$，

则 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\lg 3$，$f(1)=1$，

$\because f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f(1)=\frac{1}{3}-\lg 3<0$，

$\therefore$ 方程 $\lg x+x=0$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 内存在实数解。

【练习】（第 119 页）

由于 $y_1=0.9^x$ 是减函数，$y_2=\frac{2}{21}x$ 是增函数，它们的图像最多有一个交点，$\therefore$ 方程 $0.9^x-\frac{2}{21}x=0$ 只有一个实数解。对于函数 $f(x)=0.9^x-\frac{2}{21}x$，它的图像是连续曲线，又 $f(5)=0.9^5-\frac{2}{21}\times 5\approx 0.590\,5-0.476\,2>0$，$f(6)=0.9^6-\frac{2}{21}\times 6\approx 0.531\,4-0.571\,4<0$，$\therefore$ 在区间 $(5,6)$ 内有一个实数解。

由二分法得到方程 $0.9^x-\frac{2}{21}x=0$ 实数解所在区间表如下：

	左端点	右端点
第 1 次	5	6
第 2 次	5.5	6
第 3 次	5.5	5.75
第 4 次	5.625	5.75
第 5 次	5.687 5	5.75

至此，可以看出区间[5.687 5,5.75]的端点不是方程的解，而内部的所有值，若精确到 0.1，都是 5.7，∴ 5.7 是方程 $0.9^x-\frac{2}{21}x=0$ 精确到 0.1 的实数解。

【习题 4－1】(第 119 页)

A 组

1. (1)在$(-\infty,0)$内，函数 $f(x)=x^3+x<0$，∴ 方程 $x^3+x=0$ 在$(-\infty,0)$内没有实数解。

   (2)在$[-1,1]$内，函数 $f(x)=|x|-2<0$，∴ 方程 $|x|-2=0$ 在$[-1,1]$内没有实数解。

2. (1)$f(x)=x^2+x-1$ 是一元二次函数，最多有两个零点，而$f(0)=-1<0$，又$f(-2)=1>0$，$f(1)=1>0$，且$f(x)=x^2+x-1$ 的图像是连续曲线，∴ 方程 $x^2+x-1=0$ 在区间$[-2,0]$内和$[0,1]$内各有一个实数解。

   (2)函数 $\lg x$ 是定义在$(0,+\infty)$内的增函数，$\lg 1=0$，∴ $f(x)=|\lg x|-\sqrt{2}$在$(0,1)$内是单调递减的，在$(1,+\infty)$内是单调递增的。而$f(1)=-\sqrt{2}<0$，又$f(0.01)=2-\sqrt{2}>0$，$f(100)=2-\sqrt{2}>0$，∴ 方程$|\lg x|-\sqrt{2}=0$ 在区间$[0.01,1]$和$[1,100]$内各有一个实数解。

3. 实数解精度为 0.1，由二分法得到方程$x^5+x-3=0$ 的实数解所在区间表如下。

	左端点	右端点
第 1 次	1	2
第 2 次	1	1.5
第 3 次	1	1.25
第 4 次	1.125	1.25
第 5 次	1.125	1.187 5
第 6 次	1.125	1.156 25
第 7 次	1.125	1.140 625
第 8 次	1.132 812 5	1.140 625
第 9 次	1.132 812 5	1.136 718 75
第 10 次	1.132 812 5	1.134 765 625

   至此，可以看出区间[1.132 812 5,1.134 765 625]内的所有值，若精确到 0.1 都是 1.1，所以 1.1 是方程 $x^5+x-3=0$ 精确到0.1的实数解。

4. 函数$f(x)=\frac{1}{x}+1$ 是定义在非零实数集上的函数，且在$(-\infty,0)$内是单调减少的，在$(0,+\infty)$内也是单调减少的，而$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1<0$，所以方程$\frac{1}{x}+1=0$ 在区间$\left[-\frac{1}{2},0\right)$内没有实数解；又$f\left(\frac{1}{2}\right)=3>0$，所以方程$\frac{1}{x}+1=0$ 在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right]$内也没有实数解。所以方程$\frac{1}{x}+1=0$ 在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$内不存在实数解。

B 组

1. (1)在$(0,10)$内，函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln x$ 的图像是连续曲线，而$f(0.5)\approx-0.443<0$，且$f(1)=\frac{1}{2}>0$，∴ 方程$\frac{1}{2}x+\ln x=0$ 在区间$(0,10)$内存在实数解。

   (2)通过函数图像可知，对于任意的 $x\in(0,10)$，都有$x^2>\lg x$，即函数$f(x)=x^2-\lg x>0$，∴ 方程 $x^2-\lg x=0$ 在区间$(0,10)$内没有实数解。

2. 指数函数 $y=2^x$ 和幂函数 $y=x^3$ 的图像是连续曲线，当$x=1$ 时，$2^1>1^3$，当 $x=2$ 时，$2^2<2^3$，∴ 在区间$(1,2)$内方程 $2^x=x^3$ 有实数解；由于当 x 充分大以后，指数函数比幂函数的增长速度快很多，所以对于很大的 x，总是 $2^x>x^3$，于是在区间$(2,+\infty)$内方程 $2^x=x^3$ 有实数解。

   由二分法得到方程 $2^x-x^3=0$ 的实数解所在区间表如下：

	左端点	右端点
第 1 次	1	2
第 2 次	1	1.5
第 3 次	1.25	1.5
第 4 次	1.25	1.375
第 5 次	1.312 5	1.375
第 6 次	1.343 75	1.375
第 7 次	1.359 375	1.375
第 8 次	1.367 187 5	1.375
第 9 次	1.371 093 75	1.375

   至此，可以看出区间[1.371 093 75,1.375]的端点不是方程的解，而内部的所有值，若精确到 0.01，都是 1.37，∴ 1.37 是方程 $2^x-x^3=0$ 精确到 0.01 的一个实数解。

§2 实际问题的函数建模

教材课上问题答案

【信息技术应用】(第 129 页)

从图 4－17 和图 4－19 来看二次函数与指数函数的拟合程度来看，函数 $y=ax^b$ 更符合实际，对数函数 $y=\log_a x(0<a<1)$也可作为模型。

教材课后习题解答

【练习】(第 122 页)

1. 设利润为 y，促销商品销售量为 a，礼品价值为 n 元时的销售量为 $a(1+10\%)^n$，于是 $y=(100-80-n)\cdot a\cdot(1+10\%)^n=a(20-n)\cdot1.1^n$，$0\leqslant n\leqslant20$。

2. 设 a 与各数据的差的平方和为 y，则 $y=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2=na^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot a+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，这是关于 a 的二次函数。于是当$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$时，$y$ 取得最小值。即最佳近似值$a=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。

【练习】(第 125 页)

设售价为 x，每天的利润为 y，于是利润函数为$y=(x-60)(30+90-x)=-x^2+180x-7\,200$，当每件售价 90 元时，每天的利润最大。

【练习】(第 130 页)

(1)烧水用时关于旋钮位置的函数是减函数，于是最省时的旋钮位置是 90°。

(2)不可能做到最省时又最省气。

【习题 4－2】(第 130 页)

A 组

1. 设每台售价为 x，周收益为 y，由图可知，周销售量 $=-2x+40$，于是

收益函数为 $y=x(-2x+40)=-2(x-10)^2+200$，当每台售价为 10 元时，每周的收益最大。并不是商品的价格越高收益越大。

2. 设 x 为提高的档次，y 为每天的利润，则 $y=(60-3x)\cdot(8+2x)=-6(x-8)^2+864$，提高 8 个档次，即生产第 9 个档次的产品获利最大。

B 组

1. 以 AB 所在直线为 x 轴，AB 中垂线为 y 轴作平面直角坐标系，则隧道顶部截面曲线为 $y=-\frac{1}{4}x^2+6, x\in[-4,4]$，考虑点 $B(3,0)$ 到顶部的高度 $y=-\frac{1}{4}\times3^2+6=3.75$，$\therefore$ 限高为 $3.75-0.5\approx3.2(\mathrm{m})$。

2. 设加工 P 型零件的一组人数为 x，在单位时间里一个工人加工 P 型零件数为 $5k$，则另一组人数为 $214-x$，在单位时间里一个工人加工 Q 型零件数为 $3k$。那么加工 P、Q 两种型号零件所需时间分别为$\frac{6\ 000}{5kx}$和$\frac{2\ 000}{3k(214-x)}$，完成整个任务的时间则是它们中的较大者。考虑$\frac{6\ 000}{5kx}$和$\frac{2\ 000}{3k(214-x)}$的非公因式部分$\frac{3}{5x}$和$\frac{1}{3(214-x)}$，令$t_P(x)=\frac{3}{5x}$，$t_Q(x)=\frac{1}{3(214-x)}$。注意到 $t_P(x)$ 是减函数，$t_Q(x)$ 是增函数，记 $t(x)=\max(t_P,t_Q)$，$\max(t_P,t_Q)$ 表示 t_P 和 t_Q 中的较大值。我们要求的是 $t(x)$ 的最小值点。显然它满足$\frac{3}{5x}=\frac{1}{3(214-x)}$，得$x=137\frac{4}{7}$；因为$137\frac{4}{7}$不是整数，而函数$t(x)$在区间$\left[1,137\frac{4}{7}\right]$上递减，在区间$\left[137\frac{4}{7},213\right]$上递增，于是比较两个邻近整数点$x_1=137$ 和 $x_2=138$ 上的$t(x)$值，经计算得 $t(137)<t(138)$，因此加工 P 型零件组的工人数是 137。

【复习题四】（第 134 页）

A 组

1. 取 $x=\frac{1}{243}$，则 $\log_3\frac{1}{243}=-5$，$\frac{1}{243}-5>-5$，即这时$\log_3x<x-5$；取 $x=1$，则 $\log_31=0$，$1-5<0$，即这时$\log_3x>x-5$，所以在$\left(\frac{1}{243},1\right)$内，方程 $\log_3x=x-5$ 有实数解。又$x-5$ 的增长速度是不变的，而 $\log_3x$ 的增长速度在区间$(1,+\infty)$内由快转慢，x 充分大时，比 $x-5$ 要慢得多，所以在区间$(1,+\infty)$内有实数解。综上，$\log_3x=x-5$ 存在两个实数解。

2. 有实数解。由二分法得到方程 $x^3-x-1=0$ 实数解所在区间表如下：

	左端点	右端点
第 1 次	1	1.5
第 2 次	1.25	1.5
第 3 次	1.25	1.375
第 4 次	1.312 5	1.375
第 5 次	1.312 5	1.343 75

至此，可以看出区间[1.312 5，1.343 75]内的所有值，若精确到 0.1，都是 1.3，$\therefore$ 1.3 是方程$x^3-x-1=0$ 精确到 0.1 的实数解。

B 组

1. 对于 $f(x)=x^4-4x-2$，其图像是连续曲线，$\because f(-1)=3>0$，$f(2)=6>0$，所以还要看$(-1,2)$内的函数值，$\because f(0)=-2<0$，$\therefore$ 在$(-1,0)$和$(0,2)$内都有实数解，即方程 $x^4-4x-2=0$ 在区间$[-1,2]$内至少有两个实数解。

2. 略。

C 组

1. (1) $y=kx\left(1-\frac{x}{m}\right)$，定义域为$\{x|0<x<m\}$；

(2) 当 $x=\frac{m}{2}$时得 $y_{\max}=\frac{km}{4}$；

(3) $0<x+y<m$，即 $0<\frac{m}{2}+\frac{km}{4}<m$，

$\therefore 0<k<2$。

2. 设按原条件生产，不改造设备的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$个月累计收入为$x(n)$，改造设备后生产 n 个月累计收入为$y(n)$，则 $x(n)=70n$，

$y(n)=\begin{cases}n^2+100n(n\leqslant5),\\ y(5)+(n-5)[y(5)-y(4)](n>5)。\end{cases}$

即$y(n)=\begin{cases}n^2+100n & (n\leqslant5),\\ 109n-20 & (n>5)。\end{cases}$考虑纯收入，$n=5$ 时，不改造设备生产的纯收入 $=x(5)-(3+5+7+9+11)=315$，改造设备后生产的纯收入 $=y(5)-500+100=125$，$\therefore$ 5 个月内投资不见成效。令 $y(n)-500+100>x(n)-3n-2[1+2+\cdots+(n-1)]$得$n\geqslant9$。即经 9 个月投资才可见效。