教材习题解答

第一章 数列

§1 数列

1.1 数列的概念

教材课后习题解答

【练习】（教材第6页）

1. (1)1,3,5,7,9;(2)2,2,$\frac{2}{3}$,1,$\frac{2}{5}$。

2. C(提示:因为$2n$是偶数,所以$25-2n$应为奇数,故选C)。

3. B(提示:用$n=1,2,3,4$代入四个选项中去检验)。

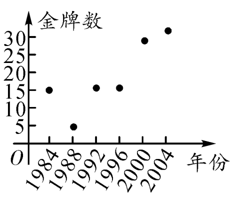
4. (1)$a_n=2n(n\in N^*)$;(2)$a_n=10n(n\in N^*)$。

1.2 数列的函数特性

教材课后习题解答

【练习】（教材第8页）

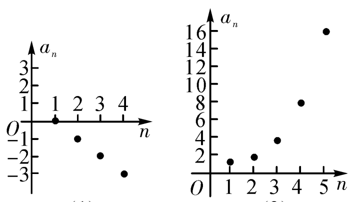
1. 如答图1。



答图1

2. (1)数列$\{a_n\}$为递减数列。如答图2(1)。

(2)数列$\{a_n\}$为递增数列。如答图2(2)。



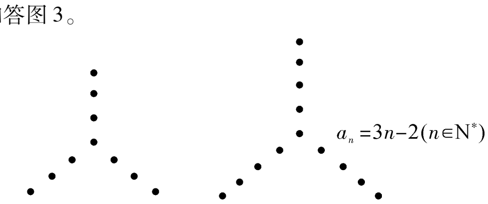
(1) (2)

答图2

【习题1-1】（教材第8页）

A组

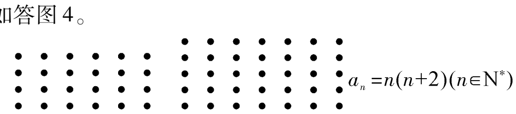
1. (1)如答图3。



(10) (13)

答图3

(2)如答图4。



(24) (35)

答图4

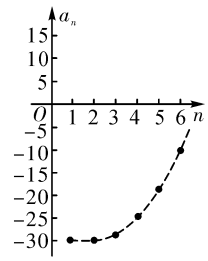
2.

n	1	2	…	10	…	20	…	n
a_n	2	6	…	110	…	420	…	$n(n+1)$

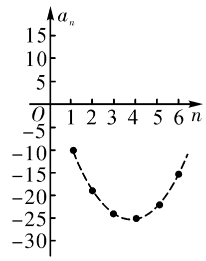
3. 因为最顶层放1个,第二层放4个,第三层放9个,故第n层放n^2个,因此,第六层放36个。

4. (1)$a_n=5n-2(n\in N^*)$;(2)$a_n=5\times10^{n-1}(n\in N^*)$。

5. $a_n=n^2-3n-28=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{121}{4}$。图像如答图5。由图像知从第2项起,数列是递增的。



答图5



答图6

6. $a_n=2n^2-15n+3=2\left(n-\frac{15}{4}\right)^2-\frac{201}{8}$。图像如答图6。由图像知$n=4$时,$a_4$最小,$a_4=-25$。

【习题1-1】（教材第9页）

B组

1. (1)$a_n=(-1)^n n(n\in N^*)$;(2)$a_n=\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^2+1}(n\in N^*)$。

2. B[提示:由题图可知,n条直线相交,交点的个数最多为$\frac{n(n-1)}{2}$]。

§2 等差数列

2.1 等差数列

教材课后习题解答

【练习1】（教材第13页）

1. 23$\frac{1}{2}$ cm,24 cm,24$\frac{1}{2}$ cm,25 cm,25$\frac{1}{2}$ cm,26 cm,26$\frac{1}{2}$ cm,27 cm,27$\frac{1}{2}$ cm,28 cm,28$\frac{1}{2}$ cm,29 cm,29$\frac{1}{2}$ cm,30 cm。

2. (1)$a_n=3n-1(n\in N^*)$;(2)$a_n=-4n+17(n\in N^*)$;

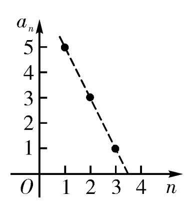
(3)$a_n=-\frac{2}{3}n+\frac{5}{3}(n\in N^*)$。

3. 76个;18块;$(4n+2)$块。

【练习2】（教材第14页）

1. (1)140;(2)2。

2. (1)$a_1=5$;$d=-2$(提示:$a_n=-2n+7=5+(n-1)\times(-2)$);(2)如答图7;(3)递减。



答图7

3. 60°(提示:设中间项为x,则另两项分别为$x-d$,$x+d$)。

4. $a_2=2$ ℃,$a_4=-11$ ℃,$a_8=-37$ ℃[提示:设下降一固定数值为d,$a_1=8.5$ ℃,$a_5=-17.5$ ℃,$n=5$,则根据$a_n=a_1+(n-1)d$可求得$d=-6.5$ ℃]。

2.2 等差数列的前n项和

教材课后习题解答

【练习1】（教材第17页）

1. 由题意知,剧场的座位构成以$a_1=38$为首项,以$d=2$为公差的等差数列。故剧场共有座位$S_{20}=20\times38+\frac{20\times19}{2}\times2=1\ 140$(个)。

2. 前n个正偶数构成以$a_1=2$为首项,以$d=2$为公差的等差数列,

故前n个正偶数的和 $S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+n$。

3. (1)由题意$\begin{cases}8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=48,\\12a_1+\frac{12\times 11}{2}d=168,\end{cases}$

即$\begin{cases}2a_1+7d=12,\\2a_1+11d=28,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-8,\\d=4。\end{cases}$

(2)由题意得$\begin{cases}a_1+5d=10,\\5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-5,\\d=3。\end{cases}$

$\therefore a_8=a_1+7d=-5+7\times 3=16, S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=-5\times 8+28\times 3=44$。

(3)由等差数列性质可知 $a_1+a_{17}=a_3+a_{15}=40$,

$\therefore S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=\frac{17\times 40}{2}=340$。

【练习 2】 (教材第 18 页)

1. B(提示:由题意 $a_n=2n-11$,故 $a_1=2\times 1-11=-9$,$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-10n=(n-5)^2-25$,当 $n=5$ 时 S_n 取最小值)。

2. 8(提示:$n=9$ 时,最大角 $a_9=100°+8\times 10°=180°$,不合题意)。

3. 由题意每月生产零件的个数构成等差数列,且$a_1=105$,设每月比前一个月多生产 d 个零件,则 $12\times 105+\frac{12\times 11}{2}d=2\ 250$,解得 $d=15$,所以 $a_{12}=105+11\times 15=270$。故平均每月比前一个月多生产 15 个零件,12 月份生产 270 个零件。

【习题 1-2】 (教材第 19 页)

A 组

1. 填表如下:

题次	a_1	d	n	a_n
(1)	8	-3	20	-49
(2)	2	2	9	18
(3)	-6	$\frac{3}{4}$	30	$15\frac{3}{4}$
(4)	3	2	10	21

结论:等差数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中,共有四个量,知道其中的三个量,可求第四个量。

2. C(提示:等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=-1$,公差 $d=2$)。

3. B(提示:根号内的数成等差数列)。

4. B(提示:依题意设前三项分别为 $a-d,a,a+d$)。

5. C(提示:$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,它们相应项的和仍是等差数列,且其首项为 $a_1+b_1=100$,公差$d=(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=0$。故 $a_n+b_n=100$,为常数列,因此第 37 项也是 100)。

6. C(提示:从山顶到山脚每降低 100 m,其温度可依次构成以 0.7 为公差的等差数列)。

7. (1)$a_1=8,d=-3$,由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入数据得 $a_{20}=8-3\times 19=-49$;

(2)由题意 $a_1=-5,d=-4$,$\therefore a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-5+(n-1)\times(-4)=-4n-1$。

由 $-401=-4n-1$ 得 $n=100$,$\therefore -401$是数列的第 100 项。

8. 噪声平均值是一个递减的等差数列,公差为 -0.6,令 2002 年噪声平均值为 a_1,设经过 n 年噪声会小于 42 dB,即 $a_n=56+(-0.6)\cdot(n-1)<42, n>24\frac{1}{3}$,所以要经过 25 年,即 2027 年噪声平均值会小于 42 dB。

9. 设公差为 d,$a_1=120$ mm,$a_5=216$ mm。$a_5=a_1+4d$,代入数据得 $d=24$ mm,由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得 $a_2=144$ mm,$a_3=168$ mm,$a_4=192$ mm。

10. (1)22,584.8;(2)22,99;(3)34,$-10\frac{1}{6}$;(4)4,1 430;(5)0.1,51;(6)-38,-360;(7)-45,45;(8)4.5,10。

11. $S_{52}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=2\ 860$,$\therefore$ 插入数的和为 $2\ 860-10-100=2\ 750$。

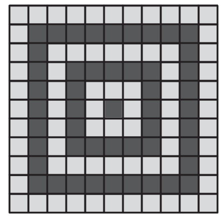
12. 由 $a_1=1,d=1,n=120,S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,代入数据可得 $S_{120}=7\ 260$ 支。

13. (1)物体每秒降落的高度构成以 4.90 m 为首项,9.80 m 为公差的等差数列,故山的高度 $S_5=5\times 4.90+\frac{5\times 4}{2}\times 9.80=122.50(\text{m})$。

(2)令 $n\times 4.90+\frac{n(n-1)}{2}\times 9.80=1\ 960$,得 $n=20$。故物体从 1 960 m 的高空落到地面,要经过 20 s。

14. 设 n min 相遇,每分甲所走路程依次成公差为 1 的等差数列,共 n 项。$a_1=2$,$d=1$,所以 $70=5n+na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,代入数据解得$n=7$。

15. 如答图 8。



答图 8

【习题 1-2】 (教材第 20 页)

B 组

1. 前 16 排离教室地面高度成等差数列,$a_1=17$ cm,公差 $d=8$ cm,$n=16$,由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得$a_{16}=137$ cm;后 10 排(包括第 16 排)离教室地面高度也成等差数列,$b_1=a_{16}=137$ cm,$d'=10$ cm,得$b_{10}=137+9\times 10=227(\text{cm})$。

所以最后一排座位离教室地面高度为 227 cm。

2. 由 $a_n=a_1+(n-1)d$,代入 $a_1=3,a_n=33\ 333,d=5$ 可得 $n=6\ 667$,每页所抄字数为 $21\times 13=273$,$\frac{6\ 667}{273}=24\frac{115}{273}$,$\frac{115}{13}=8\frac{11}{13}$,所以在第 25 页,第9 行。

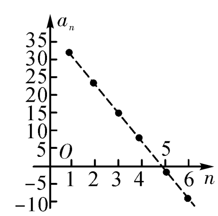
3. (1)由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,$n=9,a_1=11,S_n=351$ 可得 $d=7$,故多放 7 粒米。

(2)由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,$a_3=a_1+2d=23,n=9,S_n=351$ 可得 $d=8$,故多放 8 粒米。

4. (1)$a_n=-8n+39$,图像如答图 9。

(2)由答图 9 可知$\{a_n\}$为递减数列,从第 5 项开始小于 0。

(3)由 $a_n=a_1+(n-1)d\geqslant 0$,代入数据可得 $n=4$ 时和最大,再由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$可得 $S_4=76$。



答图 9

5. (1)2,3,5,7,9。

(2)$\because a_3-a_2\neq a_2-a_1$,$\therefore\{a_n\}$不是等差数列。

(3)由(1)知,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+1)-[(n-1)^2+1]=2n-1$。故 $a_n=\begin{cases}2(n=1),\\2n-1(n=2,3,4,\cdots)。\end{cases}$

§3 等比数列

3.1 等比数列

教材课上问题答案

【思考交流】 (教材第 23 页)

a_1	$a_1>0$	$a_1<0$

续表

q 的范围	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\{a_n\}$ 的单调性	递减	常数列	递增	递增	常数列	递减

教材课后习题解答

【练习 1】（教材第 23 页）

(1)48;(2)$\frac{1}{2}$;(3)$\frac{1}{2}$;(4)2 或 -2;(5)4。

【练习 2】（教材第 25 页）

1. D(提示:$a,a(1-a),a(1-a)^2,\cdots$是等比数列,a 需满足 $a\neq 0$,$a(1-a)\neq 0$,$a(1-a)^2\neq 0$,$\therefore a\neq 0$ 且 $a\neq 1$)。

2. B(提示:$\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=q\cdot q=q^2(n\geqslant 3)$,$\therefore$ 此数列为公比是 q^2 的等比数列)。

3. (1)$\because G^2=-45\times(-80)=3\ 600$,$\therefore G=\pm 60$。

(2)$\because G^2=(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})=49-45=4$,

$\therefore G=\pm 2$。

(3)$\because G^2=(a+b)^2\cdot(a-b)^2=[(a+b)(a-b)]^2=(a^2-b^2)^2$。

$\therefore G=\pm|a^2-b^2|$。

3.2 等比数列的前 n 项和

教材课上问题答案

【问题与思考】（教材第 27 页）

等比数列前 n 项和公式中共涉及五个量:S_n,a_1,a_n,n,q。S_n 表示前 n 项和,a_1 表示首项,a_n 表示末项,n 表示项数,q 表示公比。在这五个基本量中知道其中三个可以求出另外两个量,俗称“知三求二”。

教材课后习题解答

【练习 1】（教材第 28 页）

1. (1)$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1(1-3^{10})}{1-3}=\frac{1}{2}(3^{10}-1)$;

(2)$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{3^6}\right)=\frac{91}{243}$;

(3)$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6\ 561}\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=$ $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6\ 561}\right)=\frac{3\ 280}{6\ 561}$;

(4)$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{6-192\times 2}{1-2}=378$。

2. D(提示:$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{(1+10\%)a[1-(1+10\%)^{10}]}{1-(1+10\%)}=$ $11\times(1.1^{10}-1)a$,故选 D)。

【练习 2】（教材第 29 页）

1. 由题意可设此等比数列为$\{a_n\}$,前 n 项和为 S_n,则 $a_1=1,q=2$,$S=S_{10}-S_4=\frac{1-2^{10}}{1-2}-\frac{1-2^4}{1-2}=2^{10}-2^4=1\ 008$。

2. 设第 n 次着地时,共经过的路程为 S_n m,则 $S_5=a+\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a\right)+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2a+\left(\frac{2}{3}\right)^2a\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3a+\left(\frac{2}{3}\right)^3a\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4a+\left(\frac{2}{3}\right)^4a\right]=\frac{341}{81}a$。$\therefore$ 共经过了$\frac{341}{81}a$ 米。

【习题 1-3】（教材第 30 页）

A 组

1. A(提示:$\because x,2x+2,3x+3$ 成等比数列,$\therefore x(3x+3)=(2x+2)^2$,$\therefore x=-1$ 或 -4。当 $x=-1$ 时,$2x+2=0$ 不合题意,故$x=-4$。$\therefore$ 数列前三项分别为 $-4,-6,-9$,公比 $q=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$,第四项为 $-9\times\frac{3}{2}=-\frac{27}{2}$)。

2. C(提示:3 年后的价格可降为 $8\ 100\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=2\ 400$(元))。

3. C(提示:$a_n=a_{n+1}+a_{n+2}=a_nq+a_nq^2\Rightarrow q^2+q-1=0$)。

4. C.

5. 每次摆动的弧长为 $a_n=36\times 0.9^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,第六次摆动的弧长为 $a_6=36\times 0.9^{6-1}\approx 21$(cm)。

6. $20^5=3\ 200\ 000$(粒)。

7. 每年的产值是个等比数列,$a_1=200,q=1+20\%=1.2$,则$a_n=200\times 1.2^{n-1}>1\ 200$,$n>1+\log_{1.2}6\approx 1+9.83=10.83$,$n\geqslant 11$。即从 2007 年开始年产值可超过 1 200 万元。

8.

题次	a_1	q	n	a_n	S_n
(1)	3	2	6	96	189
(2)	8	$\frac{1}{2}$	7	$\frac{1}{8}$	$\frac{127}{8}$
(3)	5	2	3	20	35
(4)	2	3	4	54	80
(5)	1	2	3	4	7
(6)	2	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{8}$	$\frac{31}{8}$
(7)	27	$\frac{2}{3}$	4	8	65
(8)	3	2	6	96	189

9. C(提示:设第 n 个小时知道喜讯的总人数为 S_n,$S_n=1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1=2\ 047$,解得n$=10$。故选 C)。

10. 由题意知每年的产量构成以 5 为首项,1.1 为公比的等比数列,设 n 年内可使总产量达到 30 万 t,则 $S_n=\frac{5[1-(1+10\%)^n]}{1-(1+10\%)}=50(1.1^n-1)\geqslant 30$,$1.1^n\geqslant 1.6$,$n\geqslant 5$,故约 5 年内可以使总产量达到 30 万 t。

【习题 1-3】（教材第 31 页）

B 组

1. 报纸每次对折后的厚度依次成等比数列,设为$\{a_n\}$,$q=2$,$a_1=1\times\frac{1}{100}\times 10^{-2}\times 2=2\times 10^{-4}$,$a_n=2\times 10^{-4}\times 2^{n-1}=10^{-4}\times 2^n$,对折 30 次后,$a_{30}=10^{-4}\times 2^{30}=10^{-4}\times(1\ 024)^3\approx 107\ 374.182\ 4>8\ 844$。所以这张报纸并非吹牛,对折 30 次后其厚度会远远大于珠穆朗玛峰的高度。

2. 由表可知,碘—131 每天的剩余量是以$\frac{18.34}{20}=0.917\ 0$为公比的等比数列。所以 7 天后还有$20.00\times 0.917\ 0^7\approx 10.904\ 8>10$,所以 7 天后还有 10 g 可用于治疗。

3. D(提示:由题意可知$(S_{2n}-S_n)^2=S_n(S_{3n}-S_{2n})\Rightarrow S_{3n}=63$,故选 D)。

4. C(提示:由于 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{30}=a_1^{30}q^{(1+2+\cdots+29)}=(a_1^{10}q^{145})^3$,$a_3\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{30}=a_3^{10}q^{(3+6+\cdots+27)}=a_1^{10}q^{155}$,$a_3\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{30}=(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_3)^{\frac{1}{3}}q^{10}$,$q=2$,$a_3\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{30}=2^{20}$。故选 C)。

§4 数列在日常经济生活中的应用

教材课上问题答案

【思考交流】（教材第 34 页）

问题 1 直接存入 5 年定期,到期后的本利和为 $10(1+5\times 4.41\%)=12.205$(万元)。先存 2 年定期,到期后的本利和为$10(1+2\times 3.33\%)=10.666$(万元)。将 2 年定期结束时的本利和再存 3 年定

期，到期后的本利和为 $10.666(1+3\times3.96\%)\approx11.933$(万元)$<12.205$ 万元。∴ 第一种存款方式比较好。

问题 2 略。

【思考交流】（教材第 35 页）

设所购买商品的价格为 a 元，填写下表。

方案类别	分几次付清	付款方法	每期所付款额
1	3 次	购买后 4 个月第 1 次付款，再过 4 个月第 2 次付款，再过 4 个月第 3 次付款	$\frac{a(1+0.8\%)^{12}[1-(1+0.8\%)^4]}{1-(1+0.8\%)^{12}}\approx 0.3552a$(元)
2	6 次	购买后 2 个月第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款……购买后 12 个月第 6 次付款	$\frac{a(1+0.8\%)^{12}[1-(1+0.8\%)^2]}{1-(1+0.8\%)^{12}}\approx 0.1762a$(元)
3	12 次	购买后 1 个月第 1 次付款，过 1 个月第 2 次付款……购买后 12 个月第 12 次付款	$\frac{a(1+0.8\%)^{12}[1-(1+0.8\%)]}{1-(1+0.8\%)^{12}}\approx 0.0877a$(元)

分 3 次付款时，全部付清后实际支付 $0.3552a\times3=1.0656a$(元)；

分 6 次付款时，全部付清后实际支付 $0.1762a\times6=1.0572a$(元)；

分 12 次付款时，全部付清后实际支付 $0.0877a\times12=1.0524a$(元)。

所以比较喜欢的付款方式是分 12 次付款即第 3 方案。

教材课后习题解答

【练习 1】（教材第 34 页）

1. C(提示：设本金为 x 元，由题意得 $0.0198x\times0.2=138.64$，解得 $x\approx35010.10$)。
2. 2001 年本利和为 $1\times(1+0.0198)$ 万元，2002 年本利和为 $1\times(1+0.0198)^2$ 万元，……2008 年本利和为 $1\times(1+0.0198)^8\approx1.1698$(万元)。所以到 2008 年得到的本利和约为 1.169 8 万元。

【练习 2】（教材第 35 页）

设小杨每年年底还银行贷款 x 万元，第 k 年年底还款后欠款为 A_k 万元。则 $A_1=20(1+0.0711)-x$；$A_2=[20(1+0.0711)-x]\cdot(1+0.0711)-x=20(1+0.0711)^2-x(1+0.0711)-x$；…；$A_{10}=20(1+0.0711)^{10}-x(1+0.0711)^9-\cdots-x(1+0.0711)-x=20(1+0.0711)^{10}-x\frac{1-(1+0.0711)^{10}}{1-(1+0.0711)}$。由题意知 10 年后年底还清，可知 $A_{10}=0$，可得 $20(1+0.0711)^{10}=x\frac{(1+0.0711)^{10}-1}{0.0711}$，得 $x\approx2.8620$。所以每年还款约为 2.862 0 万元，10 年后可还清。

【习题 1－4】（教材第 36 页）

1. 方案 1：设每次付款 x 元，则第一次付款后还剩 $[10000(1+0.8\%)^2-x]$ 元，第二次付款后还剩 $[10000(1+0.8\%)^2-x]\cdot(1+0.8\%)^2-x=[10000(1+0.8\%)^{2\times2}-x(1+0.8\%)^2-x]$ 元，……

   第六次付款后还剩 $10000(1+0.8\%)^{2\times6}-x(1+0.8\%)^{2\times5}-x(1+0.8\%)^{2\times4}-\cdots-x(1+0.8\%)^2-x=0$(元)，即 $x\frac{[1-(1-1.008^2)^6]}{1-1.008^2}=10000(1+0.8\%)^{2\times6}$，$x\approx1761.618$，

   即方案 1 每次还款约 1 761.618 元。

   方案 2：设每次付款 x 元，类似方案 1 可得 $x+x(1+0.8\%)+x(1+0.8\%)^2+\cdots+x(1+0.8\%)^{11}=10000\cdot(1+0.8\%)^{12}$，即 $\frac{x(1-1.008^{12})}{1-1.008}=10000(1+0.8\%)^{12}$，$x\approx877.300$，即方案 2 每次还款约 877.300 元。

   方案 3：设每次付款 x 元，同理：$x+x(1+0.8\%)^4+x(1+0.8\%)^8=10000(1+0.8\%)^{4\times3}$，即 $\frac{x[1-(1.008^4)^3]}{1-1.008^4}=10000(1+0.8\%)^{12}$，$x\approx3551.534$，即方案 3 每次还款约为 3 551.534 元。
2. 设小王每年付款 x 万元，则类似第 1 题可得 $x+x(1+7.1\%)+x(1+7.1\%)^2+\cdots+x(1+7.1\%)^{19}=10(1+7.1\%)^{20}$，即 $\frac{x(1-1.071^{20})}{1-1.071}=10(1+7.1\%)^{20}$，$x\approx0.9513$。

   故小王每年付款约为 9 513 元，购买此房共需付款约为 $80000+9513\times20=270260$(元)。

复习题一

A 组

（教材第 38 页）

1. $a_1=1,a_2=-\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{5},a_4=-\frac{1}{8},a_5=\frac{1}{9}$。
2. B(提示：$\{a_n\}$ 为等差数列，$a_{10}=a_1+9d=1+9\times2=19$)。
3. C(提示：由 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$ 得 $d=\frac{2}{3}$，再由 $a_1+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=33$ 得 $n=50$)。
4. C(提示：奇数项也成等差数列，利用 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=\frac{50(a_1+a_{99})}{2}=60$，$S_{100}=\frac{100(a_1+a_{100})}{2}$，$a_{100}=a_{99}+d$)。
5. B(提示：设插入的 n 个数为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，公差为 d，则 $b=a+(n+1)d$，∴ $d=\frac{b-a}{n+1}$，故选 B)。
6. (1)是，公差分别为 $2d_1,d_1+2d_2$；(2)∵ $a_m+a_n=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=2a_1+(m+n-2)d$，$a_p+a_q=a_1+(p-1)d+a_1+(q-1)d=2a_1+(p+q-2)d$。∵ $m+n=p+q$，∴ $a_m+a_n=a_p+a_q$。
7. 由数阵可以发现第 20 行最右边的数是 $a_n=20^2=400$，第 20 行的数成等差数列，$d=1$，$n=20\times2-1=39$。有 $400=a_1+(39-1)\times1$，解得 $a_1=362$；$S_{39}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=14859$。
8. 由题意可知每次投放石子及所走路程都成等差数列，分别设为 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$a_1=1,a_n=35,d_1=2,b_1=1,d_2=3$，所以由 $a_n=a_1+(n-1)d_1$ 可得 $n=18$，$S'_{18}=nb_1+\frac{n(n-1)d_2}{2}=477$(m)。
9. D(提示：由 $a_n=2\cdot3^{n-1}$ 得偶数项的前 n 项和，$S_n=2(3^1+3^3+3^5+\cdots+3^{2n-1})=\frac{3}{4}(9^n-1)$)。
10. C. 11. C. 12. B.
13. 观察近四年的利税值可知各年的利税值构成以 1 000 为首项，以 1.1 为公比的等比数列，记为 $\{a_n\}$，则第 5 年的利税值应为 $a_5=a_4\times1.1=1331\times1.1=1464.1$(万元)。
14. (1)数列的前 n 项和 $S_n=1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+\cdots+n\frac{1}{2^n}=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$。

    (2)∵ $a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$，∴ $S_n=\frac{5}{9}(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-\frac{5}{9}n=\frac{5}{9}\times\frac{10(1-10^n)}{1-10}-\frac{5}{9}n=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5}{9}n$。
15. 由题意可知：该城市的绿化覆盖率成等差数列。

    $a_1=17.0\%$，$d=0.8\%$，$a_n=a_1+(n-1)d>23.4\%$，$n>9$。

    故从 2008 年开始绿化覆盖率将超过 23.4%。
16. (1)是。证明如下：设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 q,p，从 $\{a_{2n}\}$ 中任取一项 a_{2n}，其前一项为 $a_{2(n-1)}$，$\frac{a_{2n}}{a_{2(n-1)}}=\frac{a_1q^{2n-1}}{a_1q^{2(n-1)-1}}=q^2$，为一常数，故 $\{a_{2n}\}$ 是等比数列。从 $\{a_n\cdot b_n\}$ 中任取一项 $a_n\cdot b_n$，其

前一项为$a_{n-1}\cdot b_{n-1}$，$\frac{a_n\cdot b_n}{a_{n-1}\cdot b_{n-1}}=\frac{a_1q^{n-1}\cdot b_1p^{n-1}}{a_1q^{n-2}\cdot b_1p^{n-2}}=pq$，为一常数，故$\{a_n\cdot b_n\}$是等比数列。

(2)$\because a_m\cdot a_n=a_1q_0^{m-1}\cdot a_1q_0^{n-1}=a_1^2q_0^{(m+n)-2}$，$a_p\cdot a_q=a_1q_0^{p-1}\cdot a_1q_0^{q-1}=a_1^2q_0^{(p+q)-2}$，$m+n=p+q$，$\therefore a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$。

(教材第 39 页)

B 组

1. B.　2. B.　3. C.　4. B.

5. 2×7^{12}只(提示：每一对雌雄老鼠生子一次就变成 7 对，故 1 月份老鼠的总数为2×7，2 月份老鼠的总数为2×7^2，3 月份老鼠的总数为2×7^3，……即各月老鼠的总数构成以 7 为公比的等比数列，所以 12 月份总共有老鼠2×7^{12}只)。

6. (1)设该过程第 n 个正方形的边长为 a，面积 $a_n=a^2$，则第$(n+1)$个正方形的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，面积$a_{n+1}=\frac{1}{2}a^2$，而$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，故此数列是首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列。

(2)当 $n=1$ 时，$a_1=1$，故 $S_{10}=\frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^9}$。

(3)$S_n=\frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$，当 n 趋近于无穷大时，S_n 趋近于 2，故全部正方形的面积和"最终"会达到 2。

7. 每圈胶片长构成等差数列$\{a_n\}$，$a_1=80.2\pi$ mm，$d=0.2\pi$ mm，由 $160=80.2+(n-1)\times0.2$ 可得 $n=400$，所以由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$可得 $S_{400}=48\ 040\pi$ mm。

C 组

(教材第 40 页)

1. (1)由题意得：甲公司各年的月工资成以 1 500 为首项，以 230 为公差的等差数列，$a_n=a_1+(n-1)d=1\ 500+230\cdot(n-1)=230n+1\ 270$。乙公司各年的月工资成以 2 000 为首项，以 1.05 为公比的等比数列，$b_n=b_1q^{n-1}=2\ 000\times1.05^{n-1}$。

(2)甲公司 10 年的总工资为 $12a_1+12a_2+\cdots+12a_{10}=12S_{10}$，

$S_{10}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=1\ 500\times10+45\times230=25\ 350$。$12S_{10}=304\ 200$。

乙公司 10 年的总工资为 $12S'_{10}$，

$12S'_{10}=12\times\frac{2\ 000(1-1.05^{10})}{1-1.05}\approx301\ 869.420\ 9<12\ S_{10}$。

所以从甲公司获得的报酬比较多。

2. (1)设中低价房的面积构成数列$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$是等差数列，其中 $a_1=250$，$d=50$，则 $S_n=250n+\frac{n(n-1)}{2}\times50=25n^2+225n$。

令 $25n^2+225n\geqslant4\ 750$，即 $n^2+9n-190\geqslant0$，而由题意知 n 是正整数，故 $n\geqslant10$。

到 2013 年底，该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于 4 750 万 m^2。

(2)由(1)中知中低价房面积构成等差数列$\{a_n\}$，$a_n=250+(n-1)\times50$。设新建住房面积形成数列$\{b_n\}$，由题意知$\{b_n\}$是等比数列，其中 $b_1=400$，$q=1.08$，则 $b_n=400\times1.08^{n-1}$。到 2009 年底，当年建造的中低价房的面积 $a_6=250+5\times50=500$(万 m^2)，当年新建住房面积 $b_6=400\times1.08^5\approx587.73$(万 m^2)，$\frac{a_6}{b_6}=\frac{500}{587.73}\approx0.85$，故到 2009 年底，当年建造的中低价房的面积约占该年新建住房面积的 85%。

【课题学习】(教材第 41 页)

1. 以教育储蓄的月利率为 0.157 5% 计算，第 1 个月的存款计 36 个月的利息，本利和为 $50(1+0.157\ 5\%)^{36}$；第 2 个月的存款计 35 个月的利息，本利和为 $50(1+0.157\ 5\%)^{35}$；

……

第 36 个月的存款计 1 个月的利息，本利和为$50(1+0.157\ 5\%)$。

合计：3 年之后一次可支取本利

$50(1+0.157\ 5\%)^{36}+50(1+0.157\ 5\%)^{35}+\cdots+50(1+0.157\ 5\%)=\frac{50\times1.001\ 575\times(1-1.001\ 575^{36})}{1-1.001\ 575}\approx1\ 853.42$(元)。

2. 类似上题可得每月存 a 元，6 年之后可以支取的本利和为 $a(1+0.157\ 5\%)^{72}+a(1+0.157\ 5\%)^{71}+\cdots+a(1+0.157\ 5\%)=\frac{a\times1.001\ 575\times(1-1.001\ 575^{72})}{1-1.001\ 575}\approx76.30a$。

3. 由 1 题得实际所得利息约为 $1\ 853.42-50\times36=53.42$(元)，而我国规定利息税为 5%，所以教育储蓄比零存整取多收益 $53.42\times5\%=2.671$(元)。

4. 设每个月存 x 元，则依题意可得：

$x(1+0.157\ 5\%)^{36}+x(1+0.157\ 5\%)^{35}+\cdots+x(1+0.157\ 5\%)=\frac{1.001\ 575x(1-1.001\ 575^{36})}{1-1.001\ 575}\approx37.068x=10\ 000$，$x\approx269.77$。

5. 设每月应存入 x 元，由上题可得 $37.068x=a$，$x\approx0.026\ 977a$。

6. 由教育储蓄的规定未到期的教育储蓄为零存整取，其本利合计为：

$100(1+0.157\ 5\%)^{48}+100(1+0.157\ 5\%)^{47}+\cdots+100(1+0.157\ 5\%)=\frac{100\times1.001\ 575(1-1.001\ 575^{48})}{1-1.001\ 575}\approx4\ 989.87$(元)，利息为 $4\ 989.87-100\times48=189.87$(元)，利息税为 $189.87\times5\%\approx9.49$(元)，实际可以支取本利和为 $4\ 800+189.87\times95\%\approx4\ 980.38$(元)。

7. 由题 2 得实际可以支取本利和约为 $76.30\times150=11\ 455$(元)。

*8. 略。　*9. 略。　*10. 略。

第二章 解三角形

§1 正弦定理与余弦定理

1.1 正弦定理

教材课上问题答案

【问题与思考】(教材第 47 页)

还可以有以下解法：

以 B 为原点，以有向直线 AB 为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $B(0,0)$，$A(-300,0)$，经过 t 小时后，台风中心到达 $C(-40t\cdot\cos45°,40t\cdot\sin45°)$，则

$(-300+40t\cdot\cos45°)^2+(0-40t\cdot\sin45°)^2=250^2$。

整理得：$16t^2-120\sqrt{2}t+275=0$，

解得：$t_1=\frac{5}{4}(3\sqrt{2}-\sqrt{7})\approx2.0$(h)。

$t_2=\frac{5}{4}(3\sqrt{2}+\sqrt{7})\approx8.6$(h)。

$t_2-t_1=8.6-2.0=6.6$(h)。

$\therefore$ 约 2 h 后将要遭受台风影响，持续约 6.6 h。

教材课后习题解答

【练习 1】(教材第 47 页)

1. $\because A+B+C=180°$，$\therefore A=180°-B-C=180°-103.4°-75.85°=0.75°$。由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{0.15\times\sin103.4°}{\sin0.75°}\approx11.15$。

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【练习 2】（教材第 49 页）

1. $\dfrac{\pi}{6}$　2. D.

3. 在$\triangle OBC$中，$\angle OBC=\angle OCB=30°$，$\angle BOC=120°$。由正弦定理可得$\dfrac{BC}{\sin\angle BOC}=\dfrac{OC}{\sin\angle OBC}$，即$\dfrac{BC}{\sin 120°}=\dfrac{R}{\sin 30°}$。

$\therefore BC=\dfrac{R\sin 120°}{\sin 30°}=\sqrt{3}R$。

设$\triangle OBC$外接圆半径为r，由正弦定理可知

$2r=\dfrac{BC}{\sin\angle BOC}=\dfrac{\sqrt{3}R}{\sin 120°}=2R$，即$r=R$。

$\therefore \triangle ABC$的边长为$\sqrt{3}R$，$\triangle OBC$的外接圆半径为R。

4. $\because \overrightarrow{AB}=(8,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(5,2)$，$\therefore \cos A=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{40-6}{\sqrt{73}\times\sqrt{29}}=\dfrac{34}{\sqrt{73\times 29}}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{31}{\sqrt{73\times 29}}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{73}\times\sqrt{29}\times\dfrac{31}{\sqrt{73\times 29}}=\dfrac{31}{2}$。

1.2　余弦定理

教材课上问题答案

【问题与思考】（教材第 49 页）

余弦定理的每一个等式都包含四个不同的量，它们分别是三角形的三边和一个角，知道其中的三个量，便可求得第四个量，因此，余弦定理能解决上面提出的第二个问题。

【思考交流】（教材第 51 页）

1. 由条件知$\triangle ABC$和$\triangle BCD$都是等腰三角形，则$\angle CAB=\angle ACB=45°$，$\angle BCD=135°$，$\angle CDB=\angle DBC=22.5°$。

由三角形的面积相等得$\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\dfrac{1}{2}CD\cdot BD\cdot\sin\angle BDC$，即$\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 135°=\dfrac{1}{2}\times 1\times BD\sin 22.5°$，

所以$BD=\dfrac{\sin 135°}{\sin 22.5°}=2\cos 22.5°=2\sqrt{\dfrac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$。所以$BD\approx 1.8$。

在等腰直角$\triangle ABC$中，$\angle CAB=45°$，

在 Rt$\triangle ACD$中，$\sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle CAD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\cos\angle BAD=\cos(\angle CAD+\angle CAB)=\cos(\angle CAD+45°)=\cos\angle CAD\cos 45°-\sin\angle CAD\sin 45°=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\approx 0.1691$。所以$\angle DAB\approx 80°$。

2. 用余弦定理解答如下：

设经过 t h，台风中心到达点C，在$\triangle ABC$中，$AB=300$ km，$BC=40t$ km，$B=45°$，由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，即$AC^2=300^2+(40t)^2-2\times 300\times 40t\cos 45°$. 依题意有$AC\leqslant 250$ km，所以$300^2+1\,600t^2-12\,000\sqrt{2}t\leqslant 250^2$，即$16t^2-120\sqrt{2}t+275\leqslant 0$，

解得$\dfrac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}$，$t$的最小值约为 2 h。

所以$t_2-t_1=\dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}-\dfrac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\approx 6.6$(h)。

由例 2 的解法可以看出，用正弦定理能解决的问题一般也可用余弦定理解决。

教材课后习题解答

【练习】（教材第 51 页）

1. $\sqrt{3}$

2. 设$a=3k$，$b=5k$，$c=7k(k>0)$，则c所对的角C为最大角，由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，所以$C=120°$。

3. 由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 58°30'\approx 13.6584$，$a\approx 3.696$，由正弦定理得$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}\approx 0.6298$，$B\approx 39°2'$，$C=180°-(A+B)=82°28'$。

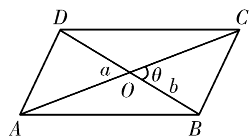
【习题 2－1】（教材第 52 页）

A 组

1. B.　2. C.

3. $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 15°$，$AC\approx 475$ m。

4. 如答图 10，设平行四边形$ABCD$的面积为S，则$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin(\pi-\theta)+\dfrac{1}{2}OB\cdot OC\sin\theta+\dfrac{1}{2}OC\cdot OD\sin(\pi-\theta)+\dfrac{1}{2}OD\cdot OA\sin\theta$



答图 10

$=\dfrac{1}{2}OB(OA+OC)\sin\theta+\dfrac{1}{2}OD(OC+OA)\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}OB\cdot AC\sin\theta+\dfrac{1}{2}OD\cdot AC\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$。

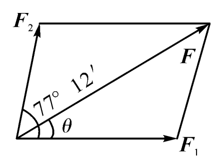
5. (1)当$b^2+c^2>a^2$且a为最大边时，$\triangle ABC$为锐角三角形且A为最大锐角；当$a^2+c^2>b^2$且b为最大边时，$\triangle ABC$为锐角三角形且B为最大锐角；当$a^2+b^2>c^2$且c为最大边时，$\triangle ABC$为锐角三角形且C为最大锐角。当$a^2+b^2<c^2$时，$\triangle ABC$是钝角三角形且C是钝角；当$b^2+c^2<a^2$时，$\triangle ABC$是钝角三角形且A是钝角；当$c^2+a^2<b^2$时，$\triangle ABC$是钝角三角形且B是钝角。

(2)当a为最大边时，三角形为锐角三角形有$1+4>a^2$，所以$a<\sqrt{5}$。当a非最大边时，有$a^2+1>4$，所以$a>\sqrt{3}$，所以$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$。

6. 如答图 11，由余弦定理可得：

$|\boldsymbol{F}|^2=|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2-2|\boldsymbol{F}_1|\cdot|\boldsymbol{F}_2|\cdot\cos(180°-77°12')=86^2+83^2+2\times 86\times 83\times\cos 77°12'\approx 17\,447.83$，

$\therefore |\boldsymbol{F}|\approx 132$(N)。



答图 11

$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}|^2-|\boldsymbol{F}_2|^2}{2|\boldsymbol{F}_1|\cdot|\boldsymbol{F}|}=\dfrac{86^2+132^2-83^2}{2\times 86\times 132}\approx 0.7898$。

$\therefore \theta\approx 38°$。

$\therefore$合力$\boldsymbol{F}$的大小约为 132 N，合力与较大力所成的角θ约为 38°。

7. 由题意得$A=130°$，$B=30°$，$C=180°-A-B=20°$。由正弦定理可得：$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，$\therefore AC=\dfrac{AB\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\sin 30°}{\sin 20°}\approx 14.6$(km)。

同理：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，$\therefore BC=\dfrac{AB\sin A}{\sin C}=\dfrac{10\sin 130°}{\sin 20°}\approx 22.4$(km)。

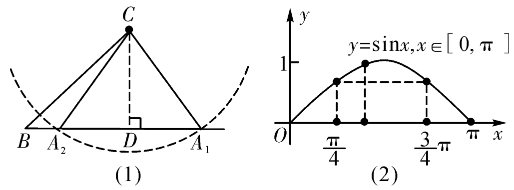
$\therefore$火场C与两观测点A，B的距离分别约是 14.6 km 和 22.4 km。

【习题 2－1】（教材第 52 页）

B 组

1. 解法 1 是正确的，根据几何作图可知(如答图 12(1))，$\triangle ABC$有两解的充要条件是以C为圆心，$CD=x\sin 45°$为半径的圆与去掉顶点B的射线BD有两个交点，即$a\sin B<b<a$。解法 2 是错误的，因为A是不定的，无法进行几何作图。事实上，根据函数$y=$

$\sin x, x\in[0,\pi]$的图像(如答图12(2))关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称的性质,$\triangle ABC$有两解的充要条件是$\frac{\pi}{4}<A<\frac{3}{4}\pi$,且$A\neq\frac{\pi}{2}$,也即$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin A<1$,从而$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}x}{4}<1$。



答图12

2. 如题图,设此时太阳、地球、金星的位置分别在点 O,A,B 处,则 $OA=1.49\times10^8$ km,$OB=1.07\times10^8$ km,$A=18°$。在$\triangle OAB$中,由正弦定理知 $\sin\angle ABO=\frac{OA\sin 18°}{OB}\approx0.4303$,得$\angle AB_1O\approx25.49°$,$\angle AB_2O\approx154.51°$。当$\angle AB_1O=25.49°$时,$\angle AOB_1=136.51°$,$AB_1=\frac{OB_1\sin\angle AOB_1}{\sin 18°}\approx2.38\times10^8$(km);当$\angle AB_2O=154.51°$时,$\angle AOB_2=7.49°$,$AB_2=\frac{OB_2\sin\angle AOB_2}{\sin 18°}\approx4.51\times10^7$(km)。此时地球与金星之间的距离约为 2.38×10^8 km 或 4.51×10^7 km。

3. 在$\triangle ABC$中,若$a>b$,则由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$知$\sin A>\sin B$,根据函数$y=\sin x, x\in[0,\pi]$的图像(如答图12(2))关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称的性质,有$B<A<\pi-B$或$\pi-B<A<B$(舍去),从而$A>B$。

§2 三角形中的几何计算

教材课上问题答案

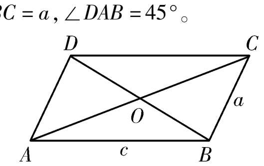
【思考】(教材第55页)

原因:$AC=-\frac{23}{3}$ dm可理解成点C在线段DA的延长线上,且$|AC|=\frac{23}{3}$ dm。此时,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=45°$,$BC=x$,$AC=2x-17$,$AB=4\sqrt{2}$ dm,可求出$AC=\frac{23}{3}$ dm。

教材课后习题解答

【练习】(教材第55页)

如答图13,记$AB=c$,$BC=a$,在▱$ABCD$中,$AB=CD=c$,$AD=BC=a$,$\angle DAB=45°$。



答图13

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos(180°-45°)=c^2+a^2+2ac\cos 45°$,

在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos 45°=c^2+a^2-2ac\cos 45°$。

所以$AC^2\cdot BD^2=(a^2+c^2+2ac\cos 45°)(a^2+c^2-2ac\cos 45°)=(a^2+c^2)^2-4a^2c^2\cos^2 45°=a^4+c^4+2a^2c^2-4a^2c^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^4+c^4$。

即$AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$。

【习题2-2】(教材第56页)

A组

1. C. 2. C.

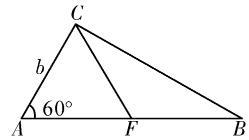
3. 在$\triangle ACD$中,由余弦定理得$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\frac{1}{2}$,所以$\angle ADC=120°$。

则$\angle ADB=180°-\angle ADC=60°$。

在$\triangle ABD$中,由正弦定理得

$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin B}=\frac{5\sin 60°}{\sin 45°}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$。

4. 如答图14,设$AC=b$,在$\triangle ACF$中,由余弦定理得$CF^2=b^2+1-b$;在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$BC^2=b^2+4-2b$。



答图14

因为$CF^2=AC\cdot BC$,

所以$(b^2-b+1)^2=b^2(b^2-2b+4)$,

解得$b=\sqrt{2}-1$,所以$AC=\sqrt{2}-1$。

5. 因为D是线段BC的垂直平分线与AC的交点,所以$DC=DB$。

因为$DA-DB=1$,所以$DA-DC=1$。

由$\begin{cases}DA+DC=4,\\DA-DC=1\end{cases}$得$\begin{cases}DA=\frac{5}{2},\\DC=\frac{3}{2}。\end{cases}$

在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{4}{5}$。

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=\frac{36}{5}$,

所以$BC=\frac{6\sqrt{5}}{5}$。过D作$DE\perp BC$于点E,则$\cos\angle ACB=\frac{CE}{DC}=\frac{\frac{1}{2}BC}{DC}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$。

6. 在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{9+4-9}{12}=\frac{1}{3}$,

所以$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

因为$AB=AC$,所以$\angle ABC=\angle C$,

所以$\sin\angle ABC=\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

因为$AD/\!/BC$,所以$\angle BAD=180°-\angle ABC$,

所以$\sin\angle BAD=\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

因为BD为$\angle ABC$的平分线,所以$\angle ABD=\angle ADB$。

所以$AD=AB=3$,所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$。

【习题2-2】(教材第57页)

B组

1. 因为$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}$,所以$\frac{1}{2}PA\cdot PB\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}PB\cdot PC\sin\beta$,即$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$。

2. 连接AC。$\cos B=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\frac{40-AC^2}{24}$,$\cos D=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{32-AC^2}{32}$,由$\cos B+\cos D=0$得$\frac{32-AC^2}{32}+\frac{40-AC^2}{24}=0$,解得$AC^2=\frac{256}{7}$,$\therefore\cos B=\frac{1}{7}$,$\sin B=\frac{4}{7}\sqrt{3}$,$\sin D=\frac{4}{7}\sqrt{3}$。$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}(BA\cdot BC+DA\cdot DC)\cdot\sin B=8\sqrt{3}$。

3. 设$\triangle ABC$的三边分别为$a=n+1$,$b=n$,$c=n-1$,则$A=2C$,

$\sin A=\sin 2C=2\sin C\cos C$，$\cos C=\dfrac{\sin A}{2\sin C}=\dfrac{a}{2c}=\dfrac{n+1}{2(n-1)}$。

因为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{n+4}{2(n+1)}$，

所以$\dfrac{n+4}{2(n+1)}=\dfrac{n+1}{2(n-1)}$，得 $n=5$。

所以$\triangle ABC$ 的三边长分别为 4，5，6。

§3 解三角形的实际应用举例

教材课上问题答案

【问题与思考】（教材第 60 页）

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，

$\therefore \sin\angle BAC=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ACB}{AB}=\dfrac{r\sin\theta}{l}$。

$\because \angle BAC$ 必为锐角，

$\therefore \cos\angle BAC=\sqrt{1-\sin^2\angle BAC}=\sqrt{1-\dfrac{r^2\sin^2\theta}{l^2}}=\dfrac{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}{l}$。

$\because \angle ABC=180°-\angle BAC-\angle ACB$，

$\therefore \sin\angle ABC=\sin(\angle BAC+\angle ACB)=\sin(\angle BAC+\theta)=$

$\sin\angle BAC\cdot\cos\theta+\cos\angle BAC\cdot\sin\theta=\dfrac{r\sin\theta\cos\theta}{l}+\dfrac{\sin\theta\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}{l}$。

由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，

$\therefore AC=\dfrac{AB\cdot\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}$

$=\dfrac{l}{\sin\theta}\left(\dfrac{r\sin\theta\cdot\cos\theta}{l}+\dfrac{\sin\theta\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}{l}\right)$

$=(r\cos\theta+\sqrt{l^2-r^2\sin\theta})$（mm）。

$\therefore AA_0=A_0C-AC=AB+BC-AC=(l+r-r\cos\theta-\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta})$（mm）。

代入数据得 $A_0A\approx 81$ mm。

通过以上求法可以看出，此题利用余弦定理或正弦定理均可求出。利用正弦定理必须先求 AC 边所对角的正弦值，需要用到角的交换公式；利用余弦定理可以先设未知数，运用方程思想解决。

教材课后习题解答

【练习 1】（教材第 59 页）

1. 设山顶为 P，则 P 在底面的射影 O 为$\triangle ABC$ 的外接圆圆心。$PO=h$，外接圆半径为 R，$R=h\tan 75°$，

由正弦定理得 $BC=2R\sin\angle BAC$，即 $200=2h\tan 75°\cdot\sin 30°$，

$h=\dfrac{200}{\tan 75°}$。

$\tan 75°=\tan(45°+30°)=\dfrac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$，

所以 $h=\dfrac{200(3-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}\approx 53.6$（m）。

2. 59. 82

【练习 2】（教材第 61 页）

1. 在$\triangle AOP$ 中，由正弦定理可得$\dfrac{OA}{\sin\angle APO}=\dfrac{AP}{\sin\alpha}$，

$\therefore \sin\angle APO=\dfrac{OA\cdot\sin\alpha}{AP}=\dfrac{\sin\alpha}{5}$。

$\because \angle APO$ 必为锐角，

$\therefore \cos\angle APO=\sqrt{1-\sin^2\angle APO}=\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{25}}=\dfrac{\sqrt{25-\sin^2\alpha}}{5}$。

$\because \angle PAO=180°-\angle APO-\alpha$，

$\therefore \sin\angle PAO=\sin(\angle APO+\alpha)=\sin\angle APO\cdot\cos\alpha+\cos\angle APO\cdot$

$\sin\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{5}+\dfrac{\sin\alpha\sqrt{25-\sin^2\alpha}}{5}$。

由正弦定理可得$\dfrac{OP}{\sin\angle PAO}=\dfrac{AP}{\sin\alpha}$，

$\therefore OP=\dfrac{AP\cdot\sin\angle PAO}{\sin\alpha}=\dfrac{125}{\sin\alpha}\left(\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{5}+\dfrac{\sin\alpha\sqrt{25-\sin^2\alpha}}{5}\right)$

$=25\cos\alpha+25\sqrt{25-\sin^2\alpha}$，

$\therefore P$ 和 Q 之间的距离 $x=OQ-OP=AP+OA-OP=150-25\cos\alpha-25\sqrt{25-\sin^2\alpha}$。

（1）当 $\alpha=50°$时，代入上式可得 $x\approx 10.4$ cm；

（2）当 $\alpha=90°$时，代入上式可得 $x\approx 27.5$ cm；

（3）当 $\alpha=135°$时，代入上式可得 $x\approx 43.9$ cm；

（4）当 $OA\perp AP$ 时，$OP^2=OA^2+AP^2$，$OP=\sqrt{AP^2+OA^2}$，

$\therefore x=150-\sqrt{125^2+25^2}\approx 22.5$（cm）。

2. 由题意可得$\angle BAD=60°$，设$\angle ABD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，则在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\beta=-\dfrac{1}{7}$，

$\therefore \sin\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，而 $\sin\alpha=\sin(\beta-60°)=\sin\beta\cdot\cos 60°-\cos\beta\sin 60°=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$。

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理得$\dfrac{21}{\sin 60°}=\dfrac{AD}{\sin\alpha}$，

$\therefore AD=\dfrac{21\sin\alpha}{\sin 60°}=15$（km）。

$\therefore$ 这个人还要走 15 km 才能到达 A 城。

【习题 2－3】（教材第 62 页）

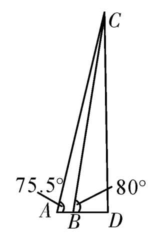
A 组

1. B.　2. D.　3. 23. 5°　67. 9°

4. 如答图 15，由于$\angle CAD=75.5°$，$\angle CBD=80.0°$，

$\therefore \angle ACB=4.5°$。在$\triangle ABC$ 中，由于$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin A}$，$\therefore BC=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ACB}=\dfrac{38.5\times\sin 75.5°}{\sin 4.5°}$，

$\therefore CD=BC\cdot\sin 80.0°=\dfrac{38.5\times\sin 75.5°}{\sin 4.5°}\times\sin 80.0°\approx 468$（m）。



答图 15

【习题 2－3】（教材第 62 页）

B 组

1. 由题意可知 $PQ=24\times 3=72$（km），

$\angle PQR=40°$，$\angle QPR=125°-40°=85°$，

$\angle PRQ=180°-85°-40°=55°$。

在$\triangle PQR$ 中，由正弦定理可得

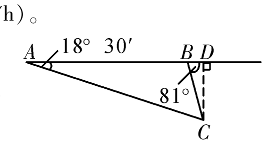
$\dfrac{PR}{\sin\angle PQR}=\dfrac{PQ}{\sin\angle PRQ}$，

$\therefore PR=\dfrac{PQ\cdot\sin\angle PQR}{\sin\angle PRQ}=\dfrac{72\times\sin 40°}{\sin 55°}\approx 56$（km）。

$\therefore$ 乙船的航行速度为 $56\div 2=28$（km/h）。

2. 如答图 16，过点 C 作$CD\perp AB$ 的延长线，垂足为点 D。由题意知飞机经过 960 s 飞行的距离为

$AB=\dfrac{189\times 1\,000}{3\,600}\times 960=50\,400$（m）。



答图 16

由正弦定理得$\dfrac{BC}{\sin 18°30'}=\dfrac{AB}{\sin 62°30'}$，$\therefore BC=\dfrac{AB\sin 18°30'}{\sin 62°30'}$，

$CD=BC\sin 81°=\dfrac{50\,400\sin 18°30'\sin 81°}{\sin 62°30'}\approx 17\,807$（m）。$20\,250-17\,807=2\,443$（m）。

$\therefore$ 山顶的海拔高度约为 2 443 m。

复习题二

(教材第64页)

A组

1. (1)由正弦定理得 $x=\dfrac{10\sin 35^\circ}{\sin 103^\circ}\approx 5.9$。

(2)由正弦定理得 $\sin x=\dfrac{5\sin 120^\circ}{12}=\dfrac{5\sqrt{3}}{24}$,$x\approx 21^\circ$。

(3)由正弦定理得 $\sin x=\dfrac{8\sin 30^\circ}{6}=\dfrac{2}{3}$,解得 $x\approx 138^\circ$ 或 42°。

由原题图知 x 为钝角,故 x 约为 138°。

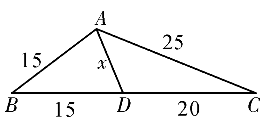
(4) $x=\sqrt{10^2+14^2-2\times 10\times 14\cos 145^\circ}\approx 22.9$。

(5) $\cos x=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\times 3\times 2}=-\dfrac{1}{4}$,$x\approx 104^\circ$。

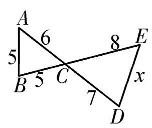
2. (1)如答图17,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{25^2+35^2-15^2}{2\times 25\times 35}\approx 0.929$。

$\therefore x^2\approx 25^2+20^2-2\times 25\times 20\times 0.929=96.0$,

$\therefore x\approx 9.8$。



答图17



答图18

(2)如答图18,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle ACB=\dfrac{5^2+6^2-5^2}{2\times 5\times 6}=0.6$,$\therefore \cos\angle DCE=\cos\angle ACB=0.6$。

在 $\triangle DCE$ 中,由余弦定理得

$x^2=7^2+8^2-2\times 7\times 8\times 0.6=45.8$,$\therefore x\approx 6.8$。

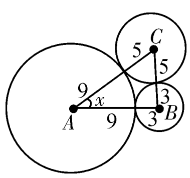
(3)如答图19,在 $\triangle ABC$ 中,

$AB=9+3=12$,$BC=3+5=8$,$AC=9+5=14$,

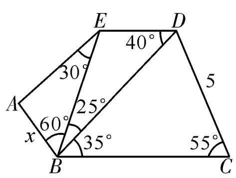
由余弦定理得

$\cos x=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{12^2+14^2-8^2}{2\times 12\times 14}\approx 0.821$,

$\therefore x\approx 35^\circ$。



答图19



答图20

(4)如答图20,在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得

$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$,

$\therefore BD=\dfrac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{5\sin 55^\circ}{\sin 35^\circ}\approx 7.14$。

在 $\triangle BDE$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{BE}{\sin\angle BDE}=\dfrac{BD}{\sin\angle BED}$,

$\therefore BE=\dfrac{BD\sin\angle BDE}{\sin\angle BED}=\dfrac{7.14\sin 40^\circ}{\sin 115^\circ}\approx 5.06$。

$\therefore x=AB=BE\sin 30^\circ\approx 2.5$。

3. (1)由余弦定理得

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos 60^\circ=3^2+1^2-2\times 3\times 1\times\dfrac{1}{2}=7$,

$\therefore AB=\sqrt{7}$(km)。$\therefore$ 起初两人的距离是 $\sqrt{7}$ km。

(2)设经过 t h后,甲、乙分别到达 P,Q 两点,则 $AP=4t$,$BQ=4t$,$t=\dfrac{3}{4}$ 时,P 与 O 重合,故当 $t\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$ 时,

$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos 60^\circ$。

当 $t>\dfrac{3}{4}$ 时,$PQ^2=(4t-3)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cdot\cos 120^\circ$。

它们其实是一样的,即 $PQ^2=48t^2-24t+7$。

$\therefore PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}(km)(t\geqslant 0)$。

$\therefore t$ h后两人的距离为 $\sqrt{48t^2-24t+7}$ km$(t\geqslant 0)$。

(3)由 $PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}=\sqrt{48\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+4}\ (t\geqslant 0)$,

故当 $t=\dfrac{1}{4}$,即在第15分钟时,$PQ=2$ 最小,两人的距离最短。

4. 由题意知 $AB=16.1$,$\angle ASB=45^\circ$,由正弦定理得

$\dfrac{AB}{\sin\angle ASB}=\dfrac{BS}{\sin\angle BAS}$,

$\therefore BS=\dfrac{AB\cdot\sin\angle BAS}{\sin\angle ASB}=\dfrac{16.1\times\sin 20^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 7.8$(n mile)。

$\therefore$ 灯塔 S 和 B 处的距离约为7.8 n mile。

5. 设 $AB=x$,$CD=y$,$\cos\angle ABC=\dfrac{x^2+4^2-4^2}{2\times x\times 4}=\dfrac{x}{8}$,$\cos\angle BCD=\dfrac{4^2+y^2-3^2}{2\times 4\times y}=\dfrac{y^2+7}{8y}$,$\cos\angle ADC=\dfrac{1^2+y^2-4^2}{2\times 1\times y}=\dfrac{y^2-15}{2y}$,

$\cos\angle BAD=\dfrac{x^2+1^2-3^2}{2x}=\dfrac{x^2-8}{2x}$,$\cos\angle BAD+\cos\angle ABC=0$,

$\cos\angle BCD+\cos\angle ADC=0$,

$\therefore\begin{cases}\dfrac{x}{8}+\dfrac{x^2-8}{2x}=0,\\ \dfrac{y^2+7}{8y}+\dfrac{y^2-15}{2y}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\sqrt{10},\\ y=\dfrac{\sqrt{265}}{5},\end{cases}$

即 $\begin{cases}AB=\dfrac{4}{5}\sqrt{10}\text{(cm)},\\ CD=\dfrac{\sqrt{265}}{5}\text{(cm)}。\end{cases}$

$\therefore\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{90}}{10}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$。

设梯形的高为 h,$h=AB\sin\angle ABC=\dfrac{4}{5}\sqrt{10}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{12}{5}$(cm)。

$\therefore S=\dfrac{1}{2}(AD+BC)h=\dfrac{1}{2}(1+4)\times\dfrac{12}{5}=6$(cm^2)。

6. 在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$|\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=3.2^2+4.8^2-2\times 3.2\times 4.8\times\cos 50^\circ\approx 13.534$,

$\therefore|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|\approx 3.7$。

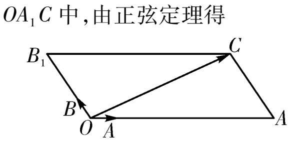
由正弦定理得 $\dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{\sin\angle BAC}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{\sin\angle ABC}$,

$\therefore\sin\angle ABC=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC}{|\overrightarrow{CB}|}\approx 0.9938$,

$\therefore\angle ABC=83^\circ 37'$。

即 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角约为 $83^\circ 37'$。

7. 如答图21,在 $\triangle OA_1C$ 中,由正弦定理得



答图21

$\dfrac{OC}{\sin\angle OA_1C}=\dfrac{OA_1}{\sin\angle OCA_1}=\dfrac{A_1C}{\sin\angle A_1OC}$,

$\therefore OA_1=\dfrac{CO\cdot\sin\angle OCA_1}{\sin\angle OA_1C}=\dfrac{5\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ}\approx 6.011$,

$A_1C=\dfrac{OC\cdot\sin\angle A_1OC}{\sin\angle OA_1C}=\dfrac{5\sin 25^\circ}{\sin 55^\circ}\approx 2.580$,

$\therefore OB_1=A_1C\approx 2.580$,

$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}\approx 6.011\overrightarrow{OA}+2.580\overrightarrow{OB}$。

(教材第 65 页)

B 组

1. 由题意知 O 是△ABC 外接圆的圆心,设半径为r km。

因为 $\cos B=\dfrac{4.3^2+3.7^2-4.7^2}{2\times 4.3\times 3.7}\approx 0.317>0$,

所以△ABC 为锐角三角形,且 $\sin B\approx 0.948\ 4$,$r=\dfrac{AC}{2\sin B}\approx 2.5$,

$\cos\angle OBC=\dfrac{r^2+BC^2-r^2}{2r\cdot BC}=\dfrac{BC}{2r}=0.74$,$\angle OBC\approx 42°$。故医院应建在△$ABC$ 内的 O 点处,使 $OB\approx 2.5$ km,且$\angle OBC\approx 42°$。

2. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a,在△OBC 中,$\angle OBC=\angle OCB=15°$,

$\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-(15°+15°)=150°$。

由正弦定理得$\dfrac{OB}{\sin\angle OCB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BOC}$,$\therefore OB=\dfrac{BC\sin\angle OCB}{\sin\angle BOC}$,

$\therefore OB=2a\sin 15°$。

在△OAB 中,$\angle ABO=90°-\angle OBC=90°-15°=75°$,

由余弦定理得 $OA^2=AB^2+OB^2-2AB\cdot OB\cos\angle ABO=a^2+(2a\sin 15°)^2-2a(2a\sin 15°)\times\cos 75°=a^2$,即 $OA=a$。

同理可证 $OD=a$。

所以$AD=OA=OD$,所以△OAD 是等边三角形。

3. 由题意可设 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=t$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2t$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=3t$,$t\neq 0$。

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=AB\cdot CA\cos(\pi-A)=-AB\cdot CA\cos A$。

又 $\cos A=\dfrac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA}$,$\therefore BC^2-CA^2-AB^2=2t$。

同理 $AB^2-BC^2-CA^2=4t$,$CA^2-AB^2-BC^2=6t$。

从而 $BC^2=-5t$,$AB^2=-4t$,$CA^2=-3t$。

$\cos A=\dfrac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA}=\dfrac{-2t}{-2t\times 2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,$A\approx 73°$。

同理$B\approx 48°$,$C\approx 59°$。

(教材第 66 页)

C 组

1. 设此人沿与岸边成 θ 角的方向航行,经过 t h 后到达点 D,则 $AD=10t$ km,DC 为水流行程,$DC=4t$ km,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=1$(km)。

在 Rt△ABC 中,$\sin\angle BAC=0.6$,$\angle BAC\approx 36.87°$,$\sin\angle ACB=0.8$。

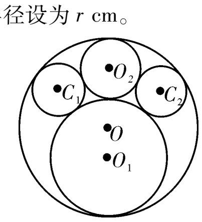
在△ACD 中,$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$,

即$\dfrac{10t}{\sin\angle ACB}=\dfrac{4t}{\sin(90°-\theta-36.87°)}$,

$\sin(53.13°-\theta)=\dfrac{4}{10}\times 0.8=0.32$,$\theta\approx 34°$。

$AD=\dfrac{AB}{\sin\theta}\approx 1.43$(km),$t=\dfrac{AD}{10}\approx 0.143(h)\approx 9$(min)。

2. 如答图 22,假设⊙O,⊙O_1,⊙O_2 分别是题中直径为 30 cm,20 cm,10 cm 的圆,在剩余的铁板中截出的最大圆形铁板为⊙C_1,⊙C_2,它们的半径设为 r cm。



答图 22

由题意,⊙O_1,⊙O_2 内切于⊙O,⊙O_1 与⊙O_2 相外切,⊙C_1,⊙C_2 与⊙O_1,⊙O_2 相外切,且内切于⊙O。O_1,O,O_2 三点共线。

$O_1O=15-10=5$,$O_2O=15-5=10$,$O_1C_2=10+r$,$OC_2=15-r$,$O_2C_2=5+r$。

在 △O_1OC_2 中,$\cos\angle O_1OC_2=\dfrac{O_1O^2+OC_2^2-O_1C_2^2}{2O_1O\cdot OC_2}=\dfrac{5^2+(15-r)^2-(10+r)^2}{2\times 5\times(15-r)}=\dfrac{15-5r}{15-r}$,

在△O_2OC_2 中,同理可得 $\cos\angle O_2OC_2=\dfrac{15-2r}{15-r}$。

由于$\angle O_1OC_2+\angle O_2OC_2=\pi$,

故 $\cos\angle O_1OC_2+\cos\angle O_2OC_2=0$。

即$\dfrac{15-5r}{15-r}+\dfrac{15-2r}{15-r}=0$,解得 $r=\dfrac{30}{7}$。

因此在所剩余的铁板中截出的最大圆形铁板⊙C_1,⊙C_2 的半径是$\dfrac{30}{7}$ cm。

第三章 不等式

§1 不等关系

1.1 不等关系

教材课后习题解答

【练习】 (教材第 71 页)

1. 略。

2. 由题图可以看出,题图(1)是两个等腰直角三角形面积之和,应大于题图(2)矩形面积,用不等式表示:

$\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2>ab$。

1.2 不等关系与不等式

教材课上问题答案

【思考交流】 (教材第 72 页)

1. >　>　>　>

2. 不一定,反例:$a=3$,$b=2$,$c=-1$,$d=-10$,此时 $ab=6$,$cd=10$,$ab>cd$ 不成立。

【思考交流】 (教材第 73 页)

1. 从表中悟出的道理是:若 $0<x<y$,$m>0$,则$\dfrac{x}{y}<\dfrac{x+m}{y+m}$。

在日常生活中,往具有一定浓度的溶液中加一定量的溶质,溶液浓度变大了,就是一个满足不等式$\dfrac{x}{y}<\dfrac{x+m}{y+m}$($0<x<y$,$m>0$)的实例。

2. (1)不妨设 A 地到 B 地的路程为 1,则

$t_1=\dfrac{2}{m+n}$,$t_2=\dfrac{\frac{1}{2}}{m}+\dfrac{\frac{1}{2}}{n}=\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2n}$。

(2)$\because t_1-t_2=\dfrac{2}{m+n}-\left(\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2n}\right)$

$=\dfrac{4mn-n(m+n)-m(m+n)}{2mn(m+n)}$

$=\dfrac{2mn-m^2-n^2}{2mn(m+n)}=\dfrac{-(m-n)^2}{2mn(m+n)}$,

且 $m\neq n$,$m>0$,$n>0$,

$\therefore t_1-t_2<0$,即 $t_1<t_2$。

故甲先到达 B 地。

教材课后习题解答

【练习】 (教材第 74 页)

1. A.

2. 乙的购粮方式更合算。

设前后两次粮食的价格分别是 p 元/kg,q 元/kg,则可得甲、乙两位采购员购粮的平均价格为:

$x_{甲}=\frac{1\,000p+1\,000q}{2\,000}=\frac{p+q}{2}$，$x_{乙}=\frac{2\,000}{\frac{1\,000}{p}+\frac{1\,000}{q}}=\frac{2pq}{p+q}$. 又$\frac{p+q}{2}-\frac{2pq}{p+q}=\frac{1}{2(p+q)}(p-q)^2>0$，

所以$x_{甲}>x_{乙}$。即乙采购员购粮的平均价格低。

【习题3-1】（教材第74页）

A组

1. A.　2. B.　3. D.

4. 由题图可知以a_1+a_2为边长的正方形的面积大于四个阴影部分的面积，用不等式表示为$(a_1+a_2)^2>4a_1a_2$。

5. 不合理。依题意知平均价格为$\frac{a+b}{2}$元/kg，以此价收购应付$\frac{(m+n)(a+b)}{2}$元，按原定价应付$(am+bn)$元。

$am+bn-\frac{(m+n)(a+b)}{2}=\frac{(a-b)(m-n)}{2}$。

①若$m>n$，则收购站受益；

②若$m=n$，则两种收购方式一样；

③若$m<n$，则收购站吃亏。

【习题3-1】（教材第74页）

B组

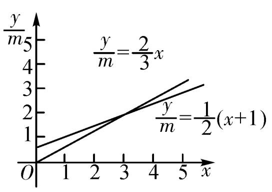
1. 设家庭人数为x人，总费用为y元，每一张全票为m元。

则甲旅行社的收费表达式为$y_1=m+\frac{1}{2}(x-1)m=\frac{1}{2}(x+1)m$；

乙旅行社的收费表达式为$y_2=\frac{2}{3}xm$。

$\because y_1-y_2=\frac{1}{2}(x+1)m-\frac{2}{3}xm=\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)m=\left(-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)m=-\frac{1}{6}(x-3)m$，

$\therefore$ 当$0<x<3$时，$y_1>y_2$；当$x=3$时，$y_1=y_2$；当$x>3$时，$y_1<y_2$。故当家庭人数少于3人时，乙旅行社更优惠；当家庭人数为3人时，甲、乙旅行社一样；当家庭人数大于3人时，甲旅行社更优惠。函数示意图如答图23。



答图23

2. $\because (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)-(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2-[(x^2+1)^2-x^2]=-x^2\leqslant 0$，

$\therefore (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\leqslant(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)$。

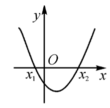
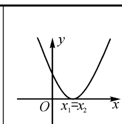
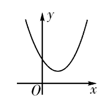
§2　一元二次不等式

2.1　一元二次不等式的解法

教材课上问题答案

【思考交流】（教材第77页）

1. 填表如下：

设$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，判别式$\Delta=b^2-4ac$				
判别式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程$f(x)=0$的解		有两个不相等的实根x_1,x_2且$x_1<x_2$	有两个相等的实根x_1,x_2，且$x_1=x_2$	没有实根
函数$y=f(x)$的示意图				
不等式的解集	$f(x)>0$	$\{x\mid x<x_1$，或$x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
	$f(x)<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2. (1) $0.01x^2+0.1x-12\leqslant 0$，

$\because$ 方程$0.01x^2+0.1x-12=0$的两根为$x_1=30$，$x_2=-40$。

$\therefore$ 不等式的解集为$\{x\mid -40\leqslant x\leqslant 30\}$。

(2) $0.005x^2+0.05x-10>0$，化为$x^2+10x-2\,000>0$，

$\because$ 方程$x^2+10x-2\,000=0$的两根分别为$x_1=40$，$x_2=-50$，

$\therefore$ 不等式的解集为$\{x\mid x>40$，或$x<-50\}$。

由此可见乙车违章。

教材课后习题解答

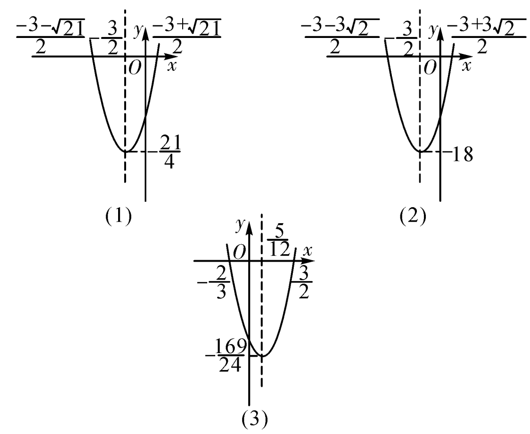
【练习1】（教材第78页）

1. **R**；$\{x\mid -3<x<0\}$；$\{x\mid x\leqslant -1$，或$x\geqslant 4\}$。

2. (1) 如答图24(1)知，当$x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$或$x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$时，$y>0$。

(2) 由答图24(2)知，当$x<\frac{-3-3\sqrt{2}}{2}$或$x>\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$时，$y>0$。

(3) 由答图24(3)知，当$x<-\frac{2}{3}$或$x>\frac{3}{2}$时，$y>0$。



答图24

3. (1) $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup(4,+\infty)$；(2) ϕ；(3) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$。

【练习2】（教材第80页）

1. D.　2. C.

3. (1) $x<4-\sqrt{14}$，或$x>4+\sqrt{14}$；(2) $x\in$ **R** 且$x\neq\frac{3}{2}$；

(3) $-1\leqslant x\leqslant 2$；(4) $-5<x<3$。

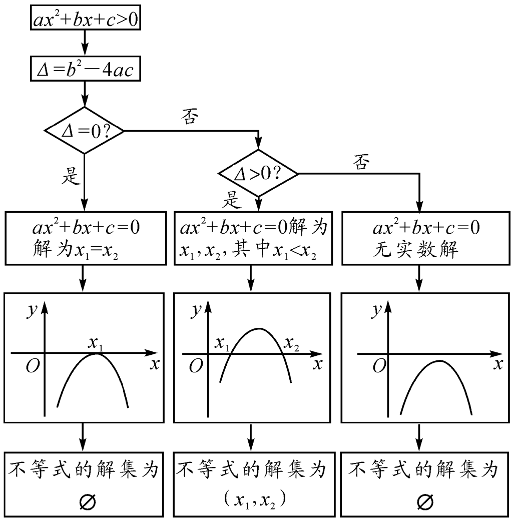
【练习3】（教材第81页）

1. C.

2. $\because M=\{x\mid -5<x<3\}$，$N=\{x\mid x<-2$，或$x>7\}$，

$\therefore M\cup N=\{x\mid x<3$，或$x>7\}$，$M\cap N=\{x\mid -5<x<-2\}$。

3. $ax^2+bx+c>0(a<0)$的求解框图（答图25）。



答图 25

4. 方程 $x^2-(m+m^2)x+m^3=0$ 的两根分别为 $x_1=m,x_2=m^2$。

①令 $x_1=x_2$,即 $m=m^2$,解得 $m=0$ 或 $m=1$,

当 $m=0$ 时,原不等式可化为 $x^2<0$,所以解集为$\varnothing$;

当 $m=1$ 时,原不等式可化为 $x^2-2x+1<0$,所以解集为$\varnothing$;

②令 $x_1>x_2$,即 $m>m^2$,解得 $0<m<1$,此时原不等式的解集为 $\{x\mid m^2<x<m\}$;

③令 $x_1<x_2$,即 $m<m^2$,解得 $m>1$ 或 $m<0$,此时原不等式的解集为$\{x\mid m<x<m^2\}$。

综上所述,当 $m=0$ 或 $m=1$ 时,原不等式的解集为$\varnothing$;

当 $0<m<1$ 时,原不等式的解集为$\{x\mid m^2<x<m\}$;

当 $m>1$ 或 $m<0$ 时,原不等式的解集为$\{x\mid m<x<m^2\}$。

2.2 一元二次不等式的应用

教材课后习题解答

【练习 1】(教材第 83 页)

1. $-\frac{1}{4}<m<0$ 或 $m>0$(提示:由$\begin{cases}m\neq0,\\[-(2m+1)]^2-4m^2>0,\end{cases}$求出 m 的取值范围)。

2. $a>2$(提示:由 $a-2=0,y>0$ 或由 $a-2>0,\Delta<0$,求出 a 的取值范围)。

3. (1)$\frac{x+2}{3x+4}<0\Leftrightarrow(x+2)(3x+4)<0\Leftrightarrow-2<x<-\frac{4}{3}$,

所以原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-2<x<-\frac{4}{3}\right\}$。

(2) $\frac{2x+3}{x-1}\geqslant1\Leftrightarrow\frac{x+4}{x-1}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+4)\geqslant0,\\x\neq1\end{cases}\Rightarrow x>1$ 或 $x\leqslant-4$,

所以原不等式的解集为$\{x\mid x\leqslant-4$,或 $x>1\}$。

4. (1) $-1\leqslant x\leqslant3$ 或 $x\geqslant5$;(2)$x<-3$ 或 $-1<x<\frac{1}{3}$;(3)$x<-\frac{5}{3}$ 或 $1<x<2$(提示:用穿针引线法)。

【练习 2】(教材第 86 页)

设汽车本身质量为 M kg,速度为 v km/h,滑行距离为 s m,依题意,

设 $s=k\cdot M\cdot v^2$,将 $v=59,s=20$ 代入得 $kM=\frac{20}{59^2}$。

卡车司机从发现障碍物到踩刹车经过 1 s,

行驶路程为 $v\cdot\frac{1\ 000}{3\ 600}=\frac{5v}{18}$(m)。

由 $20-\frac{5v}{18}-k\cdot2M\cdot v^2\geqslant5$ 得$\frac{8}{59^2}v^2+\frac{v}{18}-3\leqslant0$,

解得 $-50.18\leqslant v\leqslant26.01$。

所以最大限制时速应约为 26 km/h。

【习题 3-2】(教材第 86 页)

A 组

1. C. 2. C.

3. 相交(提示:$\because d^2-6d+5<0,\therefore1<d<5,\therefore$ 两圆相交)。

4. $\{-1,3\}$ 5. $(-2,1)$

6. (1)当 $x<-\frac{1}{2}$或 $x>1$ 时,$2x^2-x+5>6$;

当 $x=-\frac{1}{2}$或 $x=1$ 时,$2x^2-x+5=6$;

当 $-\frac{1}{2}<x<1$ 时,$2x^2-x+5<6$。

(2)$x\in\mathbf{R}$ 时,$x^2+3>3x$ 恒成立。

(3)当 $x<-\sqrt{2}$或 $x>\sqrt{2}$时,$x^2-1>\frac{1}{2}x^2$;

当 $x=\pm\sqrt{2}$时,$x^2-1=\frac{1}{2}x^2$;

当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时,$x^2-1<\frac{1}{2}x^2$。

7. (1)$x<-\frac{1}{2}$或 $x>1$;(2)$\frac{-1-\sqrt{73}}{6}\leqslant x\leqslant\frac{-1+\sqrt{73}}{6}$;(3)$x\in\mathbf{R}$;

(4)$\frac{3-\sqrt{65}}{4}<x<\frac{3+\sqrt{65}}{4}$;(5)$x\in\mathbf{R}$;(6)$x\in\mathbf{R}$。

8. (1)原不等式可化为$\frac{x}{2(x-2)}>0$,即 $2x(x-2)>0$,

$\therefore x<0$ 或 $x>2$。

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x\mid x<0$,或 $x>2\}$。

(2)由穿针引线法可知原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant3,\text{或}x\geqslant4\right\}$。

【习题 3-2】(B 组)(教材第 87 页)

1. (1)原不等式可化为 $x^2+(a-1)x-a\geqslant0$,

$\because$ 方程 $x^2+(a-1)x-a=0$ 有两根 $x_1=1,x_2=-a$,

$\therefore$ 当 $a>-1$ 时,原不等式的解集为$\{x\mid x\leqslant-a$,或 $x\geqslant1\}$;

当 $a=-1$ 时,原不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

当 $a<-1$ 时,原不等式的解集为$\{x\mid x\leqslant1$,或 $x\geqslant-a\}$。

(2)$\because$ 方程 $x^2-ax-2a^2=0$ 有两根 $x_1=-a,x_2=2a$,

又$\because a>0,\therefore2a>-a$,

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x\mid x<-a$,或 $x>2a\}$。

(3)原不等式可化为$(a-b)^2(x-x^2)\geqslant0$,

$\because a\neq b,\therefore x-x^2\geqslant0$,即 $x^2-x\leqslant0$,

$\therefore0\leqslant x\leqslant1$。$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x\mid0\leqslant x\leqslant1\}$。

2. (1)当 $m^2+4m-5=0$ 时,$m=-5$ 或 $m=1$。

若 $m=-5$,则函数 $y=(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3$ 变为 $y=24x+3$,对任意实数 x 不可能恒大于 0;

若 $m=1$,则 $y=3>0$ 恒成立。

(2)当 $m^2+4m-5\neq0$ 时,由题意应有

$\begin{cases}m^2+4m-5>0,\\16(1-m)^2-12(m^2+4m-5)<0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m<-5\text{ 或 }m>1,\\1<m<19,\end{cases}\therefore1<m<19$。

综上,实数 m 的取值范围为$[1,19)$。

3. 会。设这 10 天中第 n 天会发生危险,则

$5\ 000\sqrt{n(n+24)}-4\ 000n>128\ 000-80\ 000$,

即 $5\sqrt{n(n+24)}>4n+48$。

两边平方并化简,得 $n^2+24n-256>0$,

解得 $n<-32$ 或 $n>8$。

由于 $n\in\mathbf{N}$,所以取 $n>8$。

即第 9 天时,蓄水总量就超过水库的最大容量,也即该水库堤坝在第 9 天会发生危险。

4. 设下调后的电价为 x 元/(kW·h),依题意可知用电量增至 $\left(\frac{0.2a}{x-0.4}+a\right)$时,电力部门的收益为 $y=\left(\frac{0.2a}{x-0.4}+a\right)(x-0.3)$ $(0.55\leqslant x\leqslant 0.75)$,

由不等式组 $\begin{cases}\left(\frac{0.2a}{x-0.4}+a\right)(x-0.3)\geqslant a(0.8-0.3)(1+20\%),\\ 0.55\leqslant x\leqslant 0.75,\end{cases}$

得 $\begin{cases}10x^2-11x+3\geqslant 0,\\ 0.55\leqslant x\leqslant 0.75,\end{cases}$ 解得 $0.6\leqslant x\leqslant 0.75$。

所以,当电价在 0.6~0.75 元/(kW·h)之间时,可保证电力部门的收益增长率不低于 20%。

§3 基本不等式

3.1 基本不等式

教材课上问题答案

【思考交流】(教材第 89 页)

$FO=\frac{a+b}{2}$, $FC^2=OF^2+OC^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab}{4}=\frac{2(a^2+b^2)}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$。

$\because FC^2\geqslant FO^2$, $\therefore a^2+b^2\geqslant 2ab$。

这个不等式可称为重要不等式,它成立的条件是 $a,b\in\mathbf{R}$。

教材课后习题解答

【练习】(教材第 90 页)

$\because OA\leqslant OB+BA$,

又$\because OA=\sqrt{2}(a+b)$, $OB=BA=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\therefore 2\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b)$,

即$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$。

3.2 基本不等式与最大(小)值

教材课后习题解答

【练习 1】(教材第 92 页)

1. D(提示:$3^x+3^y\geqslant 2\sqrt{3^x\cdot 3^y}=2\sqrt{3^{x+y}}=2\sqrt{3^5}=18\sqrt{3}$)。

2. B

3. $\because 0<x<\frac{3}{2}$, $\therefore 2x>0, 3-2x>0$,

$\therefore y=2x(3-2x)\leqslant\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,

当且仅当 $2x=3-2x$,即 $x=\frac{3}{4}$时,等号成立。

$\therefore$ 函数 $y=2x(3-2x)$的最大值为$\frac{9}{4}$。

$\because y=x(3-2x)=\frac{1}{2}\times 2x(3-2x)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$,当且仅当 $2x=3-3x$,即 $x=\frac{3}{4}$时,等号成立。

$\therefore$ 函数 $y=x(3-2x)$的最大值为$\frac{9}{8}$。

【练习 2】(教材第 94 页)

1. C(提示:设直角三角形两直角边分别为 a,b,则$S=\frac{1}{2}ab=1$,所以 $ab=2$。三角形周长 $l=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=2\sqrt{2}+2$。当且仅当$a=b$时等号成立,与 $2\sqrt{2}+2$ 最接近的且大于 $2\sqrt{2}+2$ 的是 5,故选 C)。

2. 设鱼池的长为 x m,则宽为$\frac{432}{x}$ m,总占地面积为y m^2,依题意得:

$y=(x+4\times 2)\left(\frac{432}{x}+3\times 2\right)=(x+8)\left(\frac{432}{x}+6\right)=6x+\frac{3\,456}{x}+480\geqslant 2\sqrt{6x\cdot\frac{3\,456}{x}}+480=768(\mathrm{m}^2)$。

当且仅当 $6x=\frac{3\,456}{x}$,即 $x=24$ 时,y 最小,此时$\frac{432}{x}=18$。

即鱼池长应为 24 m,宽为 18 m 时,占地总面积最小。

3. 设芯片外接圆的半径为 R,则有:

$R^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$, $y^2-4\left(\frac{y-x}{2}\right)^2=4\sqrt{5}$,

由上得 $R^2=\frac{5x^2}{16}+\frac{5}{x^2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\geqslant\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$。

当$\frac{5x^2}{16}=\frac{5}{x^2}$,即 $x=2$ 时,R^2 取得最小值,周长最小,此时 $y=\sqrt{5}+1$。

【习题 3-3】(教材第 94 页)

A 组

1. B. 2. C. 3. B.

4. 设圆内接矩形的长为 x,面积为 S,则宽为 $\sqrt{d^2-x^2}$,并且 $S=x\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{x^2(d^2-x^2)}\leqslant\frac{x^2+d^2-x^2}{2}=\frac{d^2}{2}$。当且仅当 $x^2=d^2-x^2$,即 $x=\sqrt{d^2-x^2}$时,等号成立。此时矩形为正方形,长、宽之比为 1∶1,面积最大值为$\frac{d^2}{2}$。

【习题 3-3】(教材第 95 页)

B 组

1. $\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$。

2. 设画面高为 x cm,则宽为 λx cm,画面面积为$\lambda x^2=4\,840$。纸张面积 $S=(x+16)(\lambda x+10)=5\,000+44\sqrt{10}\cdot\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)\geqslant 5\,000+44\sqrt{10}\times 2\sqrt{40}=6\,760$,当且仅当$8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$,$\lambda=\frac{5}{8}$时,即高为 88 cm,宽为 55 cm 时,能使纸张面积最小。

§4 简单线性规划

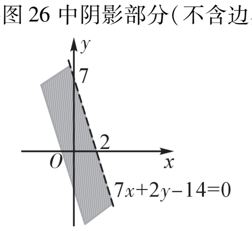
4.1 二元一次不等式(组)与平面区域

教材课后习题解答

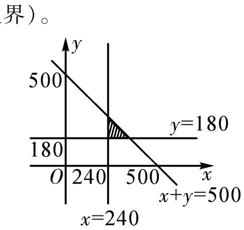
【练习 1】(教材第 98 页)

1. B.

2. 如答图 26 中阴影部分(不含边界)。



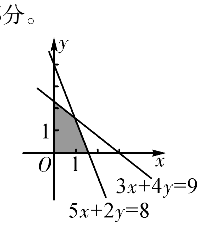
答图 26



答图 27

3. 如答图 27 中阴影部分。

4. 如答图 28 中阴影部分。

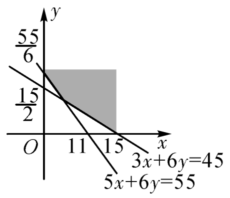


答图 28

【练习 2】(教材第 100 页)

1. 设需要甲、乙两种薄钢板各 x 张,y 张,则由题意可知

$\begin{cases}3x+6y\geqslant 45,\\5x+6y\geqslant 55,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\\x,y\in\mathbf{N}。\end{cases}$ 甲、乙两种薄钢板张数的取值范围是这个不等式组表示的平面区域(如答图 29 阴影部分)中的整数点的集合。

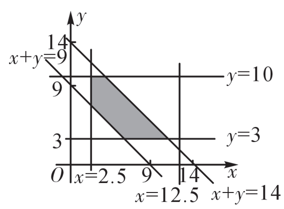


答图 29

2. 设摩托艇、汽车行驶的时间分别为 x h 和 y h,由题意得 $v=\frac{50}{x}$,$w=\frac{300}{y}$。$\because 4\leqslant v\leqslant 20,30\leqslant w\leqslant 100,\therefore \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{25}{2},3\leqslant y\leqslant 10$,即

$\begin{cases}9\leqslant x+y\leqslant 14,\\\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{25}{2},\\3\leqslant y\leqslant 10。\end{cases}$

汽车、摩托艇行驶的时间的取值范围是这个不等式组表示的平面区域,即如答图 30 所示的阴影部分(含边界)。



答图 30

4.2 简单线性规划

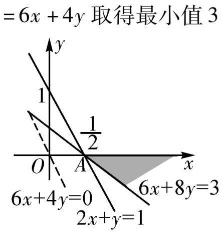
教材课后习题解答

【练习 1】(教材第 103 页)

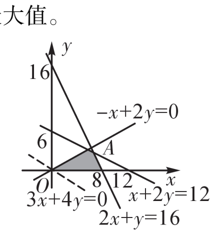
1. 约束条件 目标函数

2. -15

3. 作出可行域如答图 31,当直线 $l_0:6x+4y=0$ 平移至点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ 时,$z=6x+4y$ 取得最小值 3,z 无最大值。



答图 31



答图 32

4. 作出可行域如答图 32,当直线 $l_0:3x+4y=0$ 平移至点 O 时,目标函数 $z=3x+4y$ 取得最小值为 0,当直线 l_0 平移至点 A 时,目标函数取得最大值。解方程组 $\begin{cases}x+2y=12,\\2x+y=16,\end{cases}$ 得到点 A 的坐标 $\left(\frac{20}{3},\frac{8}{3}\right)$,代入目标函数 $z=3x+4y$,得 $z_{\max}=3\times\frac{20}{3}+4\times\frac{8}{3}=\frac{92}{3}$。

【练习 2】(教材第 105 页)

1. B. 2. 1

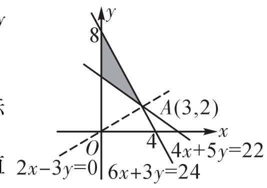
3. 设玫瑰花每枝 x 元,茶花每枝 y 元,则 $\begin{cases}4x+5y\geqslant 22,\\6x+3y\leqslant 24,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0。\end{cases}$

设 $z=2x-3y$,作出可行域如答图 33。

当直线 l_0 平移至点 A 时,$z=2x-3y$ 取得最大值。

解方程组 $\begin{cases}4x+5y=22,\\6x+3y=24,\end{cases}$ 得 A 点坐标 $(3,2)$,代入目标函数,即可得最大值 $z_{\max}=2\times 3-3\times 2=0$。

故 2 枝玫瑰花和 3 枝茶花的价格之差的最大值是 0。



答图 33

4.3 简单线性规划的应用

教材课后习题解答

【练习】(教材第 107 页)

设从 A 地运往 D,E 两地的产品为 x 万 t,y 万 t,则从 A 地运往 F 地的产品为 $(1.2-x-y)$ 万 t,从 B 地运往 D,E,F 三地的产品分别为 $(0.8-x)$ 万 t,$(0.6-y)$ 万 t,$0.8-(0.8-x)-(0.6-y)=(x+y-0.6)$ 万 t,总运费为 z 万元。依题意有:

$z=40x+50y+60(1.2-x-y)+50(0.8-x)+20(0.6-y)+40(x+y-0.6)=-30x+10y+100$,其中 x,y 满足 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 0.8,\\0\leqslant y\leqslant 0.6,\\0.6\leqslant x+y\leqslant 1.2。\end{cases}$

画出可行域,可得 $x=0.8,y=0$ 时,总运费 z 最少,为 76 万元。

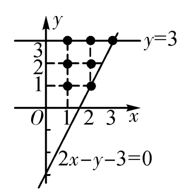
【习题 3-4】(教材第 108 页)

A 组

1. B(提示:不等式组表示的平面区域应为直线 $x-3y+6=0$ 下方与直线 $x-y+2=0$ 上方所表示区域的公共部分包括边界,故选 B)。

2. A(提示:阴影部分区域为直线 $x+y=5$ 下方区域与直线 $2x+y=4$ 上方区域的公共部分包括边界,故选 A)。

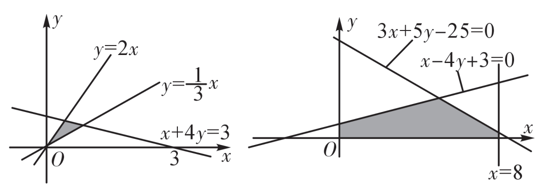
3. 如答图 34 中各格点即所求的点。



答图 34

4. (1)如答图 35(1)。

(2)如答图 35(2)。



(1) (2)

答图 35

5. $\begin{cases}x-y+5>0,\\x+y>0,\\x-3<0。\end{cases}$

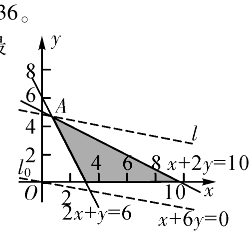
6. 作出不等式组表示的平面区域如答图 36。

当直线 l_0 平移至过点 A 时,z 取得最大值。

解方程组 $\begin{cases}x+2y=10,\\2x+y=6,\end{cases}$

得 A 点坐标 $\left(\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right)$,

所以 $z_{\max}=\frac{2}{3}+6\times\frac{14}{3}+7=\frac{107}{3}$。



答图 36

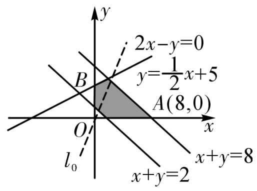
【习题3－4】（教材第109页）

B组

1. 作出可行域如答图37。

当直线 l_0 平移至过点 $A(8,0)$ 时，$z=2x-y$ 取得最大值 $z_{max}=16$；

当直线 l_0 平移至过点 $B(0,5)$ 时，$z=2x-y$ 取得最小值 $z_{min}=-5$。

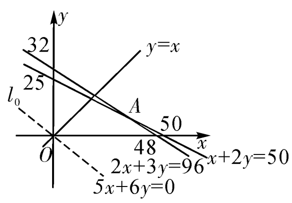


答图37

2. 设建单人间 x 间，双人间 y 间，每月总的收益为 z，

则由题意得 $\begin{cases}x+2y\geqslant50,\\10x+15y\leqslant480,\\y\leqslant x,\\x\geqslant0,y\geqslant0,\\x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$ $z=250x+300y$。

作出可行域如答图38。



答图38

当直线 l_0：$5x+6y=0$ 平移至过点 A 时，z 取得最大值，解方程组 $\begin{cases}x+2y=50,\\2x+3y=96,\end{cases}$ 得 A 点坐标 $(42,4)$，代入目标函数，可得最大值 $z_{max}=250\times42+300\times4=11\ 700$（元）。

故建42间单人房，4间双人房时，能使每月的总获益最大。

复习题三

（教材第113页）

A组

1. C.

2. A（提示：$\because a>b>0$，$\therefore a-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}>0$，$\therefore a>\dfrac{a+b}{2}$。又 $\because \dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，$\therefore\sqrt{ab}>b>0$。$\therefore a>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$。选A）。

3. D.

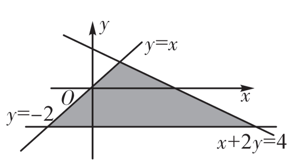
4. (1) $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{3}{2}<x<5\right\}$；(2) $\{x\mid x\leqslant1$，或 $x\geqslant3\}$；

(3) $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant1\right\}$；(4) $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{5}{2}，或\ x>2\right\}$。

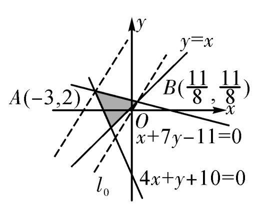
5. $\because$ 方程 $-x^2+(2m+6)x-m-3=0$ 的判别式 $\Delta=(2m+6)^2-4(m+3)=4m^2+20m+24$，$\therefore$ 当 $\Delta<0$，即 $4m^2+20m+24<0$，即 $-3<m<-2$ 时，y 值恒为负。$\because$ 函数 $y=-x^2+(2m+6)x-m-3$ 的图像开口向下，$\therefore$ 无论 m 为何值，y 值不可能恒为正。

6. $x+2y-1>0$。

7. 如答图39。



答图39



答图40

8. 作出可行域如答图40。

当直线 l_0：$4x-3y=0$ 平移至点 A 时，$z=4x-3y$ 取得最小值。

当直线 l_0：$4x-3y=0$ 平移至点 B 时，$z=4x-3y$ 取得最大值。

解方程组 $\begin{cases}x+7y-11=0,\\y=x,\end{cases}$ 得 B 点坐标 $\left(\dfrac{11}{8},\dfrac{11}{8}\right)$。

解方程组 $\begin{cases}x+7y-11=0,\\4x+y+10=0,\end{cases}$ 得 A 点坐标 $(-3,2)$。

$z_{min}=4\times(-3)-3\times2=-18$。

$z_{max}=4\times\dfrac{11}{8}-3\times\dfrac{11}{8}=\dfrac{11}{8}$。

9. $\because$ 点 $P(a,3)$ 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离等于4，

$\therefore\dfrac{|4a-9+1|}{\sqrt{16+9}}=4$，$\therefore a=7$ 或 $a=-3$。

又 $\because$ 点 P 在 $2x+y-3<0$ 表示的平面区域内，

$\therefore 2a+3-3<0$，$\therefore a<0$，$\therefore a=-3$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-3,3)$。

（教材第113页）

B组

1. $\{x\mid x>17\}$。

2. 当 $a<-1$ 时，解集为 $\{x\mid x<a$，或 $-1<x<2\}$；

当 $a=-1$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1$，或 $-1<x<2\}$；

当 $-1<a<2$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1$，或 $a<x<2\}$；

当 $a=2$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1\}$；

当 $a>2$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1$，或 $2<x<a\}$。

3. $\begin{cases}x+3y+3\geqslant0,\\5x-4y+15\geqslant0,\\7x+2y-17\leqslant0.\end{cases}$

4. 设需配制甲种饮料 x 杯，乙种饮料 y 杯，

根据题意得

$\begin{cases}9x+4y\leqslant3\ 600,\\4x+5y\leqslant2\ 000,\\3x+10y\leqslant3\ 000,\\x\geqslant0,y\geqslant0,\\x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$ 利润函数 $z=0.7x+1.2y$。

根据线性约束条件作出可行域，利用线性规划知识，求最优解，易得配制甲种饮料200杯，乙种饮料240杯时利润最大。

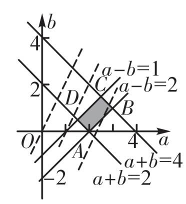
（教材第114页）

C组

1. 由 $\begin{cases}1\leqslant f(-1)\leqslant2,\\2\leqslant f(1)\leqslant4,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant2,\\2\leqslant a+b\leqslant4.\end{cases}$ ①

$f(-2)=4a-2b$。②



答图41

作出约束条件①所对应的可行域（如答图41），

易得到 $A(2,0)$，$B(3,1)$，$C\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$D\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

由②知，$b=2a-\dfrac{f(-2)}{2}$ 是一簇斜率为2的平行线，当直线经过点 B 和 D 时，$f(-2)$ 分别取得最大值和最小值。易知 $5\leqslant f(-2)\leqslant10$。

2. 设长、宽分别为 a m，b m，总造价为 y 元，则 $ab=200$，$0<a\leqslant16$，$0<b\leqslant16$，要使总造价最低，则

$y=400(2a+2b)+248\times2b+80\times200=800a+1\ 296b+16\ 000=800a+1\ 296\cdot\dfrac{200}{a}+16\ 000\ (0<a\leqslant16)$，易知函数 y 是减函数，

所以当 $a=16$，$b=\dfrac{200}{16}=12.5$ 时，总造价最低。