圆锥曲线中非对称问题的新思考

张 东 姚登美

(贵州省六盘水市第二中学,553401) (贵州省普定县第一中学,562100)

圆锥曲线中的非对称问题是高考中的一个高频考点. 常见的处理方法有配凑法化非对称为对称式、引用圆锥曲线方程代入法化为对称式、利用韦达定理的两根和与积局部代换与整体约分等. 在此基础上,我们也可赋值相等来解决圆锥曲线中的非对称问题.

一、问题的提出

在一次习题课上,笔者让学生练习如下考题,课堂效果不尽人意,课后很多学生反馈处理非对称问题技巧性大,部分演算过程突兀,犹如雾里看花,面对类似题目还是不知所措.

引例[1][2](2020 年全国高考题) 已知 A,B 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点,G 为 E 的上顶点,$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$,$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点,PA 与 E 的另一交点为 C,PB 与 E 的另一交点 D.

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明:直线 CD 过定点.

新思考 本题是圆锥曲线中的非对称问题,文[1][2] 给出了一些常见的处理方法,限于篇幅,不再赘述. 数学家帕普斯曾说:“让我们从要求的东西开始,并且假设要寻找的已经找到了,…”. 按照这样的思路,我们能否把非对称式中两根前的系数赋值使其相等,将非对称式顺理成章化为对称式,再引入韦达定理验证结果,使问题迎刃而解?由此,给出如下新的解法.

解 (1) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.(过程略)

(2) 设直线 CD 的方程为 $x=my+n$,点 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$. 联立 $\begin{cases}x^2+9y^2=9,\\x=my+n,\end{cases}$ 可得 $(m^2+9)y^2+2mny+n^2-9=0$,则 $y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{n^2-9}{m^2+9}$.

联立直线 AC 与 BD 的方程 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$ 与 $y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,并将点 $P(6,t)$ 的坐标代入,得 $\frac{3y_1}{x_1+3}=\frac{y_2}{x_2-3}$,即 $\frac{3y_1}{my_1+n+3}=\frac{y_2}{my_2+n-3}$,整理得 $(n+3)y_2+(9-3n)y_1-2my_1y_2=0$.

令 y_1,y_2 前的系数相等,即 $n+3=9-3n$,解得 $n=\frac{3}{2}$. 为保证结论的充要性,验证 $n=\frac{3}{2}$ 时,$(n+3)y_2+(9-3n)y_1-2my_1y_2=\frac{9}{2}(y_1+y_2)-2my_1y_2=-\frac{9}{2}\cdot\frac{3m}{m^2+9}+2m\cdot\frac{27}{4(m^2+9)}=0$.

所以直线 CD 方程为 $x=my+\frac{3}{2}$,过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注 对圆锥曲线中的非对称问题,利用两根前系数相等赋值,可高效、简洁地解决问题. 具体的解题步骤如下:

(1) 利用题设条件得非对称式;

(2) 令非对称式中两根 $x_1,x_2(y_1,y_2)$ 前的系数相等(赋值),寻找到参数之间的关系;

（3）引入韦达定理验证结果，求得问题答案.

二、应用举例

例 1 已知椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的左、右端点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设直线 $x=my+1$ 交椭圆于点 P,Q，直线 AP 与 BQ 交于点 T，证明：当 m 变化时，点 T 在一条定直线上.

解 （1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（过程略）

（2）设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$T(x,y)$. 联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $(4+m^2)y^2+2my-3=0$，故 $y_1+y_2=\frac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-3}{4+m^2}$.

联立直线 AP 与 BQ 的方程 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ 与 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，可得 $\frac{y_1(x+2)}{x_1+2}=\frac{y_2(x-2)}{x_2-2}$，将 $x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+1$ 代入，整理得 $(x+2)y_1+(3x-6)y_2-4my_1y_2=0$. 令 y_1,y_2 前的系数相等，即 $x+2=3x-6$，解得 $x=4$.

当 $x=4$ 时，$(x+2)y_1+(3x-6)y_2-4my_1y_2=6(y_1+y_1)-4my_1y_2=\frac{-12m+12m}{4+m^2}=0$. 故点 T 在直线 $x=4$ 上.

例 2 如图1，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左、右顶点为 A,B，左、右焦点为 F_1,F_2，$|AB|=4$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$. 直线 $y=kx+m\ (k>0)$ 交椭圆 E 于 C,D 两点，与线段 F_1F_2、椭圆的短轴分别交于 M,N 两点（M,N 不重合），且 $|CM|=|DN|$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设直线 AD,BC 的斜率分别为 k_1,k_2，求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的取值范围.

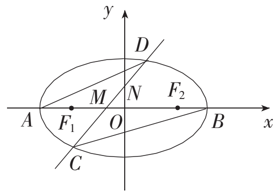

图 1

解 （1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（过程略）

（2）设点 $D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\y=kx+m,\end{cases}$ 可得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，故 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

由 $|CM|=|DN|$，可知 $x_1+x_2=x_M+x_N$. 又 $M\left(-\frac{m}{k},0\right)$，$N(0,m)$，故 $-\frac{8km}{4k^2+1}=-\frac{m}{k}$，解得 $k=\frac{1}{2}$. 所以 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-2$.

由题意，有 $-\sqrt{3}\leqslant-2m\leqslant\sqrt{3}$，$-1\leqslant m\leqslant1$，且 $m\neq0$，解得 $m\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

设比值 $\frac{k_1}{k_2}=t$，则有 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{\left(\frac{1}{2}x_1+m\right)(x_2-2)}{\left(\frac{1}{2}x_2+m\right)(x_1+2)}=t$，化简得 $(tm+1)x_1+(t-m)x_2+\frac{1}{2}(t-1)x_1x_2+2(t+1)m=0$. 令 x_1,x_2 的系数相等，即 $tm+1=t-m$，可解得 $t=\frac{1+m}{1-m}=-1-\frac{2}{m-1}\in[(7-4\sqrt{3},1)\cup(1,7+4\sqrt{3})]$.（验证略）

例 3 （2011 年四川高考题）如图2，椭圆有两顶点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C,D 两点，并与 x 轴交于点 P，直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

（1）当 $|CD|=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时，求直线 l 的方程；

（2）当点 P 异于 A,B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot$

$\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

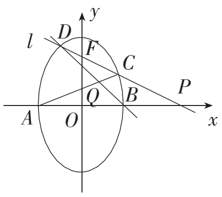

图 2

解　(1) 略.

(2) 依题意,可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$ $(k\neq 0$ 且 $k\neq\pm 1)$,点 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则点 $P\left(-\dfrac{1}{k},0\right)$,直线 AC 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$,直线 BD 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$.

联立上述两直线方程,并把 $y_1=kx_1+1$,$y_2=kx_2+1$ 代入,可得 $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}=\dfrac{(kx_2+1)(x_1+1)}{(kx_1+1)(x_2-1)}$. 设 $\dfrac{(kx_2+1)(x_1+1)}{(kx_1+1)(x_2-1)}=t$,则化简整理可得 $(1+kt)x_1+(k-t)x_2+k(1-t)x_1x_2+t+1=0$. 令 x_1,x_2 前的系数相等,即 $1+kt=k-t$,解得 $t=\dfrac{k-1}{k+1}$. 所以 $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{k-1}{k+1}$,解得 $x=-k$.(验证略)

故可设点 Q 的坐标为 $(-k,y_Q)$,则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\dfrac{1}{k},0\right)\cdot(-k,y_Q)=1$(定值).

数学教育家波利亚曾说:“没有任何一个题目是彻底完成了的,总还会有些事情可以做;在经过充分的研究和洞察以后,我们可以将任何解题方法加以改进;而且无论如何,我们总可以深化我们对答案的理解”[3]. 在解决非对称问题时,习惯性地“由因导果”,正向思维去构造对称式,引入韦达定理化简消参,往往是代数式繁琐复杂、运算困难重重;倘若逆向思维尝试“执果索因”,大胆假设,小心求证,有时能在山重水复疑无路中寻找到柳暗花明又一村. 优化解法,可以加深我们对非对称问题的整体把握.

参考文献

[1]涂序星. 非对称结构圆锥曲线问题的求解策略[J]. 高中数学教与学,2020(9):11-13.

[2]高用. 例谈圆锥曲线中的非对称问题[J]. 中学数学研究,2021(1):24-26.

[3]波利亚著,涂泓,冯承天译. 怎样解题[M]. 上海:上海科技教育出版社,2011.

(上接第 24 页)

$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数),则下列不等式中正确的是(　　)

(A) $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)>-\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

(B) $\sqrt{2}f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)<f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

(D) $\sqrt{2}f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

解　由 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$ 在 $(0,\pi)$ 恒成立,联想商的求导法则及 $(\sin x)'=\cos x$,设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$,其中 $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$,则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$,$g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 单调增. 又 $f(x)$ 为奇函数,故 $g(x)$ 为偶函数,从而 $g(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 单调减. 所以 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{2}}$,即 $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. 故选 C.

综上所述,对于导函数与原函数同时出现的抽象函数不等式问题,联想求导法则构造新函数,往往能使问题得到巧妙的解决. 其基本策略是:“-”构“除”,“+”构“乘”;有“x”用“x”,无“x”用“e^x”;系数变指数.