前川定理(The Maekawa-Justin Theorem)

潘世维

Saturday, August 15, 2020

1 简介

MAEKAWA Jun (前川淳),日本的软件工程师,数学家,折纸艺术家。

2 平顶点折叠的例子

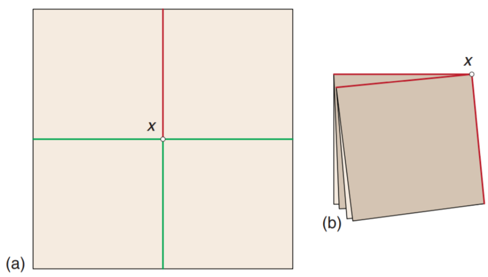


Figure 1

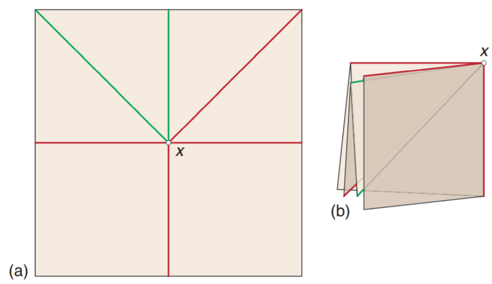


Figure 2

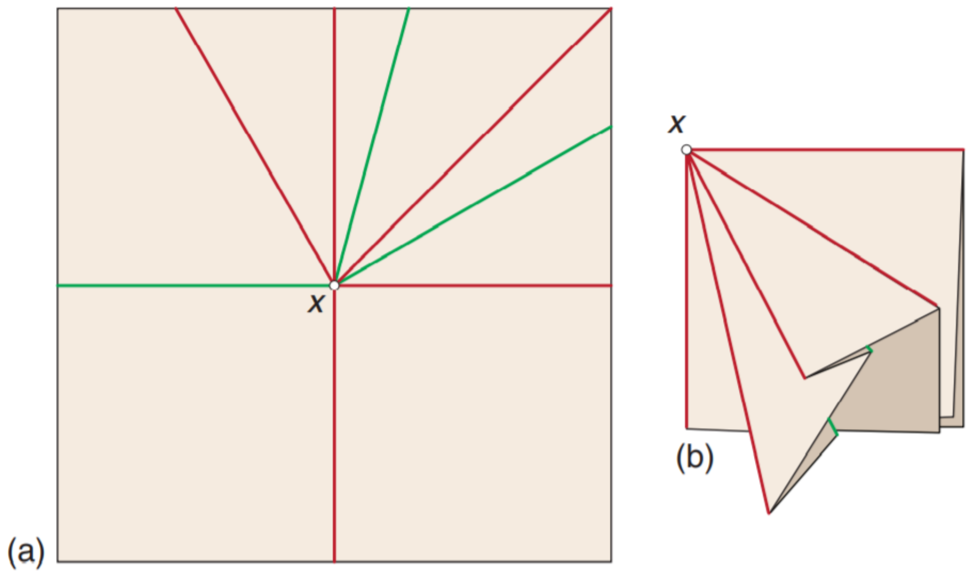


Figure 3

	M(Mountain)	V(valley)	$\|M-V\|$
Figure 1	1	3	2
Figure 2	4	2	2
Figure 3	5	3	2

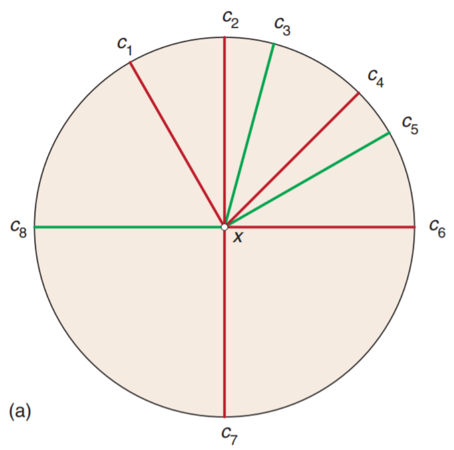
3 前川定理的证明[1]

让M(Mountain)和V(Valley)分别代表平顶点折叠中山折和谷折的数量，则前川定理可以表示为

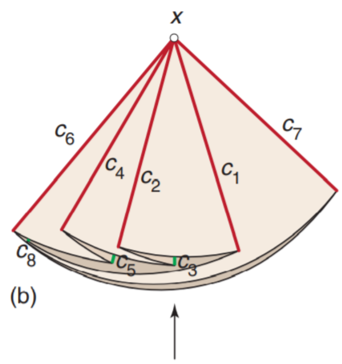
$$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2 \tag{1}$$

即$|M - V| = 2$

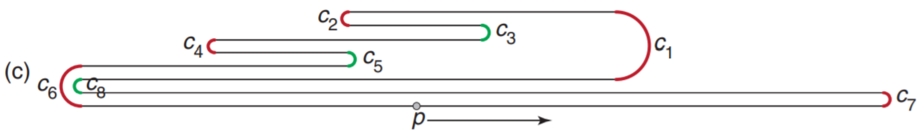
3.1 Proof 1 :



由于我们只关心顶点x和周围的折痕，所以可以以x为圆心做一个圆(a)，按折痕折叠后形成(b)



从下往上看向顶点x，可以发现圆环形成了一个闭合回路(c)



想象有一个蚂蚁从p点出发在这个闭合回路上爬行，遇到山折便逆时针旋转180°，遇到谷折便顺时针旋转180°，最后回到原点，方向和开始一样，由于沿着闭合回路走了一周，相当于旋转了360°度，即

$$M \times 180^\circ + V \times (-180^\circ) = 360^\circ \tag{2}$$

$M - V = 2$

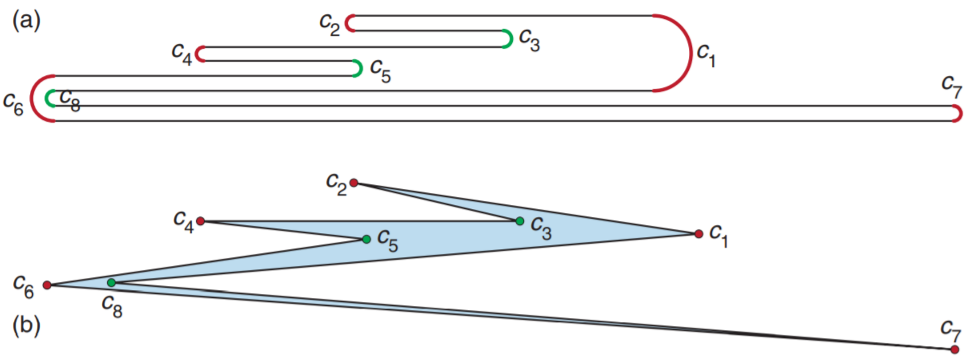
因为纸有两面，如果从另一面看，原来的山折变成了谷折，原来的谷折变成了山折，所以有

$V - M = 2$

这样便证明了前川定理

3.2 Proof 2 :

这个证明是由Jan Siwanowicz在他还是个高中生的时候提出的



将此前的闭合回路看作一个多边形，把山折看成内角等于0°，谷折看成内角等于360°

由多边形内角和定理

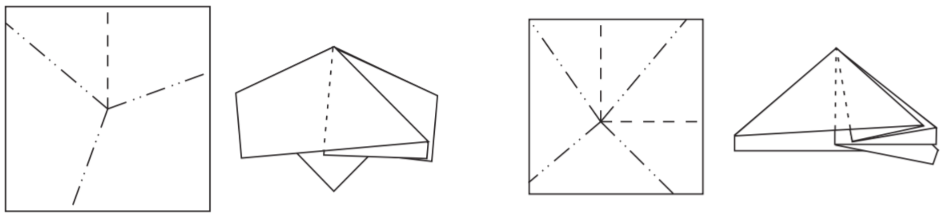
$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = (n-2) \times 180^\circ$

推得在这个多边形中，内角和为

$M \times 0° + V \times 360°$

所以$V \times 360° = (M + V - 2)180°$

$M = V + 2 \quad \text{or} \quad V = M + 2$



4 推广

$$M + V = 2(V + 1) \quad \text{or} \quad 2(V - 1) \tag{3}$$

得到偶数定理：单顶点折叠中折痕总数必为偶数，角的总数也必为偶数

powered by LaTeX

made by Erikpsw

参考文献

[1] Erik D Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*. Cambridge university press, 2007.