Cursul 3

Spaţii vectoriale

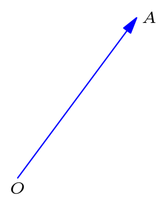
3.1 Motivaţia introducerii spaţiului vectorial

Array-urile (tablourile) constituie structura de date de bază în *Computer Science*. Din punct de vedere matematic un tablou este o matrice de diverse dimensiuni. Tablourile cu o singură linie se mai numesc tablouri 1D sau vectori. Un vector $v = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix}$, este deci un set ordonat de n numere numere de acelaşi tip (întreg, real).

În `C/C++` un vector, respectiv o matrice se declară astfel:

```
double  v[100];
double  A[20][35];
```

Această definiţie a vectorului pare să nu aibă legătură cu vectorii din fizică definiţi ”ca o mărime caracterizată prin direcţie, sens şi modul” şi vizualizată printr-un segment orientat (adică segment ce uneşte două puncte O, A, şi o săgeată ce indică orientarea). Un astfel de vector este notat $\overrightarrow{OA}$.



În cele ce urmează vom evidenţia în ce fel operaţiile şi proprietăţile vectorilor folosiţi în fizică pentru a reprezenta forţa, viteza, acceleraţia, au influenţat definirea vectorilor abstracţi, definiţi ca seturi de n numere reale.

Vectorii priviţi ca tablori 1D au numeroase aplicaţii în *Computer Graphics*, *Gaming*, Robotică. Ei se folosesc pentru modelarea obiectelor 2D şi 3D, vizualizarea şi manipularea acestora, în generarea mişcarii roboţilor, a creaturilor din jocuri. Imaginile digitale, care fizic sunt matrici de pixeli, se stochează şi se transmit pe canale de comunicaţie ca vectori (seturi de numere reale ce codifică culoarea pixelilor). Matricile interpretate ca vectori intervin în compresia datelor, a imaginilor, a informaţiei audio şi video.

Volumul imens de date ce se generează pe WEB sau în diverse domenii de cercetare (fizica particulelor, fuziune nucleară, meteorologie), în domeniul financiar (bănci), în biologie/medicină, se înregistrează ca seturi de numere reale. Vectorii generaţi în acest fel sunt apoi analizaţi prin

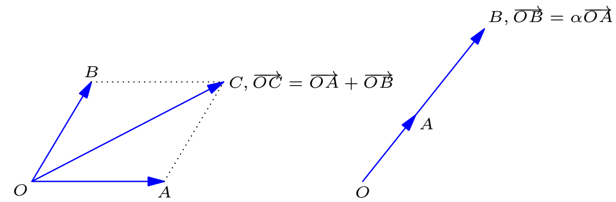


Fig.3.1: Regula paralelogramului de adunare a vectorilor cu acelaşi punct de aplicaţie (stânga) şi produsul unui vector cu un scalar (dreapta)

diverse proceduri, tehnici şi algoritmi din inteligenţa artificială, care extrag informaţie din datele pe care aceştia le conţin.

Operaţiile elementare ce se definesc între aceşti vectori abstracţi sunt definite în aşa fel încât să aibă aceleaşi proprietăţi ca şi vectorii din fizică ce au acelaşi punct de aplicaţie.

Reamintim că pe mulţimea vectorilor cu acelaşi punct de aplicaţie, O, se defineşte operaţia de adunare a doi vectori, prin regula paralelogramului şi respectiv produsul cu un scalar (adică număr real) al unui astfel de vector (Fig.3.1). Exploatând proprietăţile celor două operaţii cu vectori având acelaşi punct de aplicaţie, s-a introdus noţiunea de spaţiu vectorial peste un corp, care va permite ulterior ca vectorii reprezentaţi prin segmente orientate, să poată fi reprezentaţi şi ei prin coloane numerice, respectiv printr-o pereche de numere, dacă sunt vectori într-un plan şi respectiv de un triplet de numere, dacă sunt vectori în spaţiul fizic tri–dimensional.

3.2 Definiţia spaţiului vectorial. Exemple

Considerăm un corp comutativ $\mathbb{K}$ în care notăm cu $+$ operaţia de adunare, cu $\cdot$ operaţia multiplicativă şi cu 0, respectiv 1, elementrul neutru al grupului $(\mathbb{K}, +)$, respectiv elementul unitate al grupului $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$. Preponderent corpul $\mathbb{K}$ va fi corpul numerelor reale, $\mathbb{R}$, corpul $\mathbb{Z}_2$ al claselor de resturi modulo 2 şi eventual, corpul numerelor complexe, $\mathbb{C}$.

Precizăm că adunarea modulo 2 din $\mathbb{Z}_2$ se numeşte în computer science `exclusive or` şi se notează `XOR` (derivat din `eXclusive OR`). În `C` şi `C++` operaţia pe biţi `XOR` se notează `^`, iar în criptografie $\oplus$.

Definiţia 3.2.1 *Fie V o mulţime nevidă pe care definim o operaţie de adunare, care asociază fiecărei perechi $(v, w) \in V \times V$ un element din V, notat $v + w$:*

$$(v, w) \mapsto v + w$$

şi o operaţie de înmulţire cu elemente din corpul $\mathbb{K}$, care asociază unui număr $\alpha \in \mathbb{K}$ şi unui element $v \in V$ elementul notat $\alpha v \in V$:

$$(\alpha, v) \mapsto \alpha v.$$

V are structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ dacă cele două operaţii verifică condiţiile următoare:

SV1. $(v + w) + u = v + (w + u), \forall\ v, w, u \in V$ *(asociativitatea adunării);*

SV2. *există un element în* V*, notat* θ*, cu proprietatea că* $v + \theta = \theta + v = v, \forall\ v \in V$*;*
SV3. *pentru orice* $v \in V$ *există un element* $v' \in V$ *astfel încât* $v + v' = v' + v = \theta$*;*
SV4. $v + w = w + v, \forall\ v, w \in V$*;*
SV5. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w, \forall \alpha \in \mathbb{K}$*, şi* $\forall\ v, w \in V$*;*
SV6. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\ v \in V$*;*
SV7. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\ v \in V$*;*
SV8. $1v = v, \forall\ v \in V$.

Observaţii.

- 1. Dacă V are structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, atunci elementele lui V se numesc *vectori*, iar cele din corpul $\mathbb{K}$, *scalari*;

- 2. Operaţia de adunare a vectorilor este o operaţie internă, deoarece asociază la orice doi vectori, tot un vector;

- 3. Operaţia a doua, αv, se numeşte operaţie de înmulţire a vectorilor cu scalari. Ea este o operaţie externă, în sensul că unui scalar α (deci un element din ”exteriorul” mulţimii de vectori) şi unui vector v i se asociază vectorul αv;

- 4. Condiţiile **SV1–SV4** asigură că mulţimea V are o structură de grup faţa de adunare. Elementul neutru, θ, faţa de adunarea vectorilor se numeşte *vectorul nul* al spaţiului;

- 5. Simetricul v' al vectorului v, faţa de adunare, se va nota $-v$ şi îl numim *opusul vectorului v*;

- 6. Condiţiile **SV5–SV8** din definiţia spaţiului vectorial stabilesc legături dintre operaţiile pe corpul $\mathbb{K}$ şi cele din spaţiul V.

În continuare vom nota (indica) prin $V/\mathbb{K}$, spaţiul vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. Dacă $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, atunci $V/\mathbb{R}$ se numeşte *spaţiu vectorial real*, iar dacă $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, atunci $V/\mathbb{C}$ se numeşte *spaţiu vectorial complex*. Cu unele excepţii, noi vom studia spaţii vectoriale reale. Spaţiul vectorial real, fundamental în algebra liniară este spaţiul $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Exemplul 1. Spaţiul vectorial pe care îl studiem cel mai mult în acest curs este spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ este definit ca mulţimea n–uplurilor de numere reale (adică a seturilor de n numere reale).

$$\mathbb{R}^n = \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T |\ x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$$

Simbolul de transpunere din notaţia $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ilustrează că cele n elemente se înregistrează într-o matrice linie transpusă, adică într-o matrice coloană:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

În limbajele de programare `C/C++, Java, Python`, un vector v din $\mathbb{R}^n$ sau tablou uni–dimensional de n elemente reale, are elementele indexate astfel $v[0], v[1], \dots v[n-1]$ şi memoria alocată vectorului este adresată pe linie. Interpretarea vectorilor ca matrici coloană, în algebra liniară se datorează însă simplităţii operaţiilor şi a demonstraţiei diverselor relaţii în care intervin, în descrierea unor algoritmi.

Dacă $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ este mulţimea cuplurilor (perechilor), $(x_1, x_2)^T$, de numere reale, iar pentru $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ este mulţimea tripletelor de numere reale, $(x_1, x_2, x_3)^T$. Deci pentru n arbitrar, folosim termenul de n–uplu.

Operaţiile ce înzestrează pe $\mathbb{R}^n$ cu o structură de spaţiu vectorial real sunt definite astfel:

• adunarea: pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

• înmulţirea cu scalari: pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Vectorul nul al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ este $\theta_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n})^T$. În particular vectorul nul din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ este $\theta_2 = (0, 0)^T$, iar din $\mathbb{R}^3$, $\theta_3 = (0, 0, 0)^T$.

Exemplul 2. Spaţiul vectorial $\mathbb{C}^n$ peste corpul numerelor complexe se defineşte analog cu spaţiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$. Şi anume, $\mathbb{C}^n$ este mulţimea n–uplurilor de numere complexe, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, $z_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$. De exemplu, cvadruplul z=$(-1 + 2i, 3, -5i, 1/2 + i\sqrt{3}/2)^T$ este un vector din $\mathbb{C}^4$. Deşi pare mai abstract la prima vedere, spaţiul vectorial $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}$ are aplicaţii în domenii practice ca de exemplu, studiul semnalelor şi imaginilor analogice şi digitale.

Exemplul 3. Spaţiul vectorial $\mathbb{Z}_2^n$ peste corpul $\mathbb{Z}_2$. $\mathbb{Z}_2^n$ este mulţimea n-uplurilor de elemente din $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, numite adesea stringuri de n biţi sau vectori binari:

$$\mathbb{Z}_2^n = \{b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \mid b_i \in \mathbb{Z}_2, i = \overline{0, n}\}$$

De exemplu $b = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)^T$ este un string de biţi din $\mathbb{Z}_2^7$.

Precizăm că spre deosebire de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, care conţin o infinitate de vectori, $\mathbb{Z}_2^n$ conţine doar 2^n vectori, deci este un spaţiu vectorial cu un număr finit de vectori.

Suma a două stringuri de biti, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ este stringul

$$d = b + c = (b_1 \oplus c_1, b_2 \oplus c_2, \dots, b_n \oplus c_n)^T$$

unde $\oplus$ este adunarea modulo 2.

Produsul dintre un ”scalar” $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ şi un string de biţi $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ este definit astfel:

$$\alpha b = (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \dots, \alpha \cdot b_n)^T$$

unde înmuţirea $\alpha \cdot b_i$ este înmulţirea modulo 2 dată în tabelul:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Exemplul 4. Mulţimea matricilor de tip $m \times n$ cu elemente din corpul $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$,

$$\mathbb{K}^{m\times n} = \{A = (a_{ij}) | a_{ij} \in \mathbb{K}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$$

are structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, relativ la operaţia uzuală de adunare a matricilor, respectiv înmulţirea cu un scalar (atenţie la matricile binare, cu elemente din $\mathbb{Z}_2$, unde adunarea şi înmultirea este modulo 2!). Vectorul nul într-un spaţiu vectorial de matrici este matricea nulă, având toate elementele egale cu 0.

Există limbaje de programare numite *array programming languages*, care implementează direct operaţiile cu vectori şi matrici.

Limbajul `C/C++` este un limbaj de programare scalar pentru că adunarea, de exemplu, a doi vectori din $\mathbb{R}^n$ se efectuează adunând iterativ elementele din aceeaşi poziţie a vectorilor.

`Python` este limbaj vectorizat, adică operaţiile cu *array*-uri nu se efectuează element cu element, ci global. Mai precis dacă `v` şi `w` au fost declaraţi ca array-uri si initializaţi, atunci pentru a efectua suma lor, `u`, se scrie simplu:

```
u=v+w
```

În ultimii ani au crescut în popularitate şi arhitecturile vectoriale pt hardware. Chiar şi laptop-urile conţin unităţi vectoriale (reduse), destinate aplicaţiilor multimedia.

În calculul paralel (`http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_computing`) se realizează de asemenea vectorizarea, adică se converşte implementarea scalară în una vectorială.

Exemplul 5. Spaţiul vectorial real al funcţiilor definite pe o mulţime D, cu valori reale. În acest caz V este definit astfel:

$$V = \mathcal{F}(D) = \{f : D \to \mathbb{R}\}$$

• suma a două funcţii din $\mathcal{F}(D)$ se defineşte punctual, şi anume dacă $f, g \in \mathcal{F}(D)$, atunci $f + g$ este funcţia definită pe D prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in D$;

• produsul unei funcţii $f \in \mathcal{F}(D)$ cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}$, este funcţia definită pe D prin $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall\, x \in D$.

În Fig. 3.2 ilustrăm aceaste operaţii în cazul în care D este un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Vectorul nul în spaţiul funcţiilor $\mathcal{F}(D)$ este funcţia $\theta : D \to \mathbb{R}$, constantă şi egală cu zero: $\theta(x) = 0, \forall\, x \in D$.

Exemplul 6. In electronică se lucrează preponderent cu spaţiile vectoriale

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$$

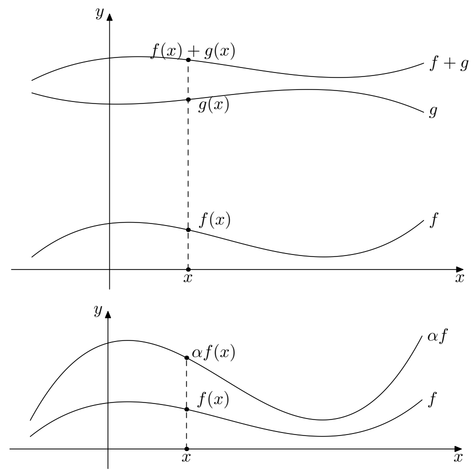


Fig.3.2: Ilustrarea grafică a sumei a două funcţii, respectiv a produsului unei funcţii cu un scalar.

Primul este spaţiul vectorial real al semnalelor in timp continuu, cu valori reale, iar al doilea este spaţiul vectorial complex al semnalelor in timp continuu, cu valori complexe.

Exemplul 7. Mulţimea vectorilor cu acelaşi punct de aplicaţie O din spaţiul fizic S:

$$V = \{\overrightarrow{OA}, A \in S\}$$

este spaţiu vectorial real, relativ la operaţiile definite la începutul cursului.

Operaţii particulare într-un spaţiu vectorial. Într-un spaţiu vectorial $V/\mathbb{K}$ în care vectorul nul este θ, iar 0 este scalarul zero şi 1 unitatea din corpul $\mathbb{K}$, avem următoarele proprietăţi:

• $0v = \theta$, $\forall\ v \in V$ şi $\alpha\theta = \theta$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$;
• $(-1)v = -v$, $\forall\ v \in V$ (produsul scalarului -1 cu vectorul v este opusul lui v);
• dacă $\alpha v = \theta$, atunci $\alpha = 0$ sau $v = \theta$.

Aceste proprietăţi rezultă combinând convenabil condiţii din definiţia spaţiului vectorial.

3.3 Dependenţă şi independenţă liniară

Fie $V/\mathbb{K}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ un număr finit de vectori din V şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, m scalari din $\mathbb{K}$. Cum produsul unui scalar cu un vector este vector şi suma unor vectori este vector, rezultă că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ este un vector u. Spunem că vectorul

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m, \tag{3.1}$$

este **o combinaţie liniară** a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Cu alte cuvinte, vectorul u depinde liniar de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Având o familie finită de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ne întrebăm în ce condiţii un vector v_i din familie depinde liniar de ceilalţi, adică se poate exprima ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori, şi în ce condiţii v_i este independent de ceilalţi vectori.

Definiţia 3.3.1 *Vectorii $v_1, v_2, \dots v_m$ din spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$ sunt vectori liniar dependenţi dacă există n scalari nu toţi nuli, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, astfel încât:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_m v_m = \theta \tag{3.2}$$

Această definiţie pare a nu avea legătură cu dependenţa ilustrată mai sus. Analizând însă condiţiile din Definiţia 3.3.1, rezultă că dacă scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ nu sunt toţi nuli, atunci cel puţin unul din ei este nenul. Dacă, de exemplu, α_1 este nenul, atunci există $\alpha_1^{-1} := 1/\alpha_1$. Înmulţind relaţia (3.2) cu $1/\alpha_1$ obţinem:

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 - \cdots \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m, \tag{3.3}$$

adică v_1 se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor $v_2, v_3, \dots, v_m$.

Remarcăm că oricare ar fi vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$, combinaţia lor liniară cu coeficientii 0 este vectorul nul:

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m = \theta$$

Atunci când se studiază dependenţa unui sistem de vectori $v_1, v_2, \dots, v_m$, practic se determină dacă o combinaţie liniară a lor dă vectorul nul doar pentru toţi scalarii zero sau şi pentru scalari nu toţi nuli.

Definiţia 3.3.2 *Vectorii $v_1, v_2, \dots v_m$ din spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$ sunt vectori liniar independenţi dacă o combinaţie liniară a lor poate fi egală cu vectorul nul:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_m v_m = \theta, \tag{3.4}$$

doar dacă toţi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sunt zero.

Exemplul 8. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se dau vectorii $v_1 = (-1, 2, 3)^T$, $v_2 = (-9, 16, 7)^T$, $v_3 = (3, -5, 1)^T$. Să se verifice dacă aceşti vectori sunt liniar dependenţi sau independenţi şi în caz de dependenţa să se determine relaţia dintre ei.
Rezolvare: Presupunem că există trei scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \theta_3 \tag{3.5}$$

Evident că relaţia (3.5) are loc dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Pentru a stabili dacă vectorii daţi sunt liniar independenţi sau dependenţi trebuie să investigăm dacă relaţia (3.5) poate avea loc doar pentru cei trei scalari, simultan zero sau şi pentru un set de scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nu toţi nuli.

În acest scop înlocuim în (3.5) fiecare vector prin tripletul reprezentativ şi efectuăm operaţiile corespunzătoare din $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -9 & 3 \\ 2 & 16 & -5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Observăm că problema independenţei sau dependenţei vectorilor v_1, v_2, v_3 s-a transformat în problema care cere să stabilim dacă sistemul liniar şi omogen (3.7) admite numai soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ sau şi soluţii nebanale. Dacă sistemul admite doar soluţia banală, atunci vectorii sunt liniar independenţi, iar dacă admite şi soluţii nebanale, atunci vectorii sunt liniar dependenţi.

Pentru a decide natura soluţiilor calculăm rangul matricii sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 3 \\ 2 & 16 & -5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Cum determinantul matricii A este $\det(A) = 0$, rezultă că sistemul admite şi soluţii nebanale, cu alte cuvinte există trei scalari nu toţi nuli, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, soluţie a sistemului omogen, astfel încât pe baza şirului de echivalenţe (3.6) avem relaţia (3.5), adică vectorii sunt liniar dependenţi. Pentru a determina relaţia dintre ei, rezolvăm efectiv sistemul omogen pentru a găsi o soluţie nebanală. Rangul matricii sistemului este 2 şi un determinant principal este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} \neq 0,$$

constituit din coeficienţii necunoscutelor α_1, α_2. Prin urmare rezolvăm doar sistemul format din primele două ecuaţii în raport cu necunoscutele principale α_1, α_2. Necunoscuta secundară α_3 o notăm cu β:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - 9\alpha_2 &= -3\beta \\ 2\alpha_1 + 16\alpha_2 &= 5\beta \end{aligned}$$

Rezolvând obţinem $\alpha_1 = -3\beta/2$, $\alpha_2 = \beta/2$, $\alpha_3 = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Deci familia soluţiilor este $(-3/\beta/2, \beta/2, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$. O soluţie nebanală obţinem pentru $\beta \neq 0$, fixat. Luând $\beta = 2$ avem $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$ şi deci relaţia de dependenţa a celor trei vectori devine:

$$-3v_1 + v_2 + 2v_3 = \theta_3 \Leftrightarrow v_2 = 3v_1 - 2v_3 \Leftrightarrow v_1 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3$$

Observaţia 3.3.1 *Orice sistem (mulţime) de vectori ce conţine vectorul nul este sistem de vectori liniar dependenţi.*

Într-adevăr, fie $v_1, v_2, \ldots, v_m$ un sistem de vectori din spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$. Presupunem că vectorul v_i este vectorul nul θ. Evident că sistemul de n scalari $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{i-1} = 0, \alpha_i, \alpha_{i+1} = 0, , \ldots \alpha_m = 0$ cu $\alpha_i \neq 0$, conduce la:

$$0v_1 + \cdots 0v_{i-1} + \alpha_i\theta + 0v_{i+1} + \cdots 0v_m = \theta,$$

adică vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \theta, v_{i+1}, \ldots, v_m$ sunt liniar dependenţi.

Criteriul practic de determinare a independenţei sau dependenţei liniare a unui sistem de vectori din $\mathbb{K}^n/\mathbb{K}$.

Exemplele precedente au ilustrat că problema independenţei sau dependenţei liniare a unui sistem de vectori din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ (n=3,4) se reduce la a deduce dacă un sistem de ecuaţii liniare şi omogene cu coeficienţi din $\mathbb{R}$ admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale. În continuare vom arăta că natura soluţiilor unui astfel de sistem de ecuaţii cu coeficienţi în corpul $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2)$ asociat unei mulţimi finite de vectori rezultă din relaţia dintre rangul matricii sistemului şi numărul de vectori.

Fie sistemul de k vectori din $\mathbb{K}^n/\mathbb{K}$:

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})^T, v_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})^T, \ldots, v_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})^T$$

Să deducem condiţiile în care aceşti vectori sunt liniar independenţi, respectiv liniar dependenţi.

Presupunem că:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_k v_k = \theta_n$$

Detaliat această egalitate se scrie astfel:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} + \alpha_k \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Membrul stâng al relaţiei însă reprezintă produsul dintre matricea $A = [v_1|v_2|\ldots|v_k]$ şi matricea coloană de elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (vezi Cursul 1.). Astfel combinaţia liniară a vectorilor, egală cu vectorul nul, este echivalentă cu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

adică cu un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu k necunoscute.

Dacă acest sistem admite doar soluţia banală atunci vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sunt liniar independenţi, iar dacă admite şi soluţii nebanale, atunci vectorii sunt liniar dependenţi. Tipul soluţiei sistemului liniar şi omogen depinde de rangul matricii A a sistemului care are drept coloane n–uplurile ce definesc cei k vectori, $A = [v_1|v_2|\dots|v_k]$

Având sistemul liniar şi omogen $A\alpha = 0$, unde $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, matricea prelungită este:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

Prin transformări elementare pe linie, coloana ultimă de zerouri rămâne tot coloană de zerouri astfel că forma scară a matricii prelungite este:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ S_A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

Prin urmare sistemul liniar şi omogen, $A\alpha = 0$, asociat setului de vectori $v_1, v_2, \dots, v_k$ din $\mathbb{R}^n$ este echivalent cu sistemul liniar şi omogen $S_A\alpha = 0$ sau $S_A^0\alpha = 0$.

Astfel deducem dacă vectorii sunt liniar independenţi sau dependenţi analizând natura solutiilor sistemului $S_A\alpha = 0$, adică dacă sistemul admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale.

Pentru aceasta reamintim de la liceu că după ce se stabileşte rangul r al matricii unui sistem omogen $A\alpha = 0$, atunci se găseşte un determinant principal Δ, de ordinul rangului. Dacă în determinantul Δ intră elemente din coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$ ale matricii A, atunci necunoscutele $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ sunt necunoscute principale, iar restul până la k sunt necunoscute secundare.

În cazul sistemului echivalent $S_A\alpha = 0$, rangul este dat de numărul de pivoţi, iar determinantul principal, Δ, contine elementele de intersecţie ale primelor r linii, cu coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$, în care se găsesc pivoţii.

Considerăm două cazuri:

1. Dacă $k > n$, în matricea A numărul de coloane este mai mare decât numărul de linii. şi astfel A poate avea rangul cel mult n, adică $r \leq n < k$.

   În acest caz forma scară (redusă) a lui A conţine cel mult n coloane cu pivoţi ($r \leq n < k$). Deci în rezolvarea sistemului omogen $S_A\alpha = 0$, vom avea r necunoscute principale şi $k - r$ necunoscute secundare. Dar existenţa necunoscutelor secundare implică faptul că sistemul admite şi soluţii nebanale. Rezultă astfel că în acest caz, vectorii $v_1, v_2, \dots, v_k$ sunt liniar dependenţi.

   De exemplu, 5 vectori $v_1, v_2, \dots, v_5$ din $\mathbb{R}^3$ sunt sigur liniar dependenţi, deoarece $k = 5 > 3 = n$.

2. Dacă $k \leq n$ atunci rangul matricii $A = [v_1|v_2|\dots|v_k]$ poate fi cel mult k.

- când $\text{rang}(A) = k$ forma scară redusă S_A^0 conţine pivoţi pe toate cele k coloane şi deci

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

  În acest caz sistemul echivalent $S_A^0\alpha = 0$ admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ şi deci cei k vectori sunt liniar independenţi.

- Daca rangul matricii este mai mic decât k, atunci matricea sistemului $S_A^0\alpha = 0$ are $r < k$ pivoţi, deci pentru rezolvarea lui se aleg r necunoscute principale şi $k - r$ necunoscute secundare. Prin urmare sistemul are şi soluţii nebanale şi în concluzie vectorii sunt liniar dependenţi.

Sintetizând, rezultă că:

> Dacă rangul matricii sistemului omogen $A\alpha = 0$ este egal cu numărul de coloane ale matricii A, atunci sistemul admite doar soluţia banală, iar dacă rangul este strict mai mic decât numărul de coloane ale lui A, atunci sistemul admite şi soluţii nebanale.

Avem astfel următoarea regulă practică de determinare a dependenţei sau independenţei liniare a k vectori din $\mathbb{R}^n$, numită în continuare **Criteriul practic de determinare a dependenţei sau independenţei unui sistem de vectori**:

Vectorilor $v_1, v_2, \dots v_k \in \mathbb{K}^n$ li se asociază matricea $A = [v_1|v_2|\dots|v_k]$, ce are drept coloane, n–uplurile ce definesc vectorii:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & & v_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \end{array}$$

• *Dacă rangul matricii A este egal cu numărul de vectori (adică cu numărul de coloane din A), atunci vectorii sunt liniar independenţi.*

• *Dacă rangul matricii este diferit de numărul de vectori, atunci aceştia sunt liniar dependenţi.*

O problemă de bază în *machine learning* este aceea de a identifica dintr-o matrice de date, $A = [v_1|v_2| \dots v_k]$, care coloane conţin informaţia relevantă şi care conţin informaţie reduntantă (în plus).

O modalitate de a găsi răspunsul la această întrebare este să identificăm care subset din cele k coloane este format din coloane independente.

Pentru aceasta precizăm că se poate demonstra că:

> Prin transformări elementare pe linie aplicate unei matrici $A = [v_1|v_2| \dots |v_k]$, eventualele relaţii liniare între coloane matricii nu se schimbă. Adică dacă anumite coloane din A formează un sistem independent de vectori, exact aceleaşi coloane din forma scară redusă sunt independente şi reciproc. Dacă unele coloane din A se exprimă ca o combinaţie liniară a altor coloane, atunci exact aceeaşi particularitate o au şi coloanele corespunzătoare din S_A^0 şi reciproc.

Astfel în loc să analizăm rangul matricii iniţiale, A, asociate unui sistem de vectori $v_1, v_2 \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$, deducem rangul r din forma scară redusă S_A^0.

Coloanele ce conţin pivoţi din forma scară redusă sunt coloanele $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Vectorii din aceste coloane sunt:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots \; e_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{linia } r$$

Aceşti vectori sunt liniar independenţi pentru că matricea asociată, $M = [e_1|e_2| \dots |e_r]$ are rangul r egal cu numărul de vectori (vezi criteriul practic):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Restul coloanelor din forma scară redusă sunt combinaţii liniare ale acestor coloane. Să ilustrăm mai întâi printr-un exemplu şi apoi dăm cazul general. Fie $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^4$, cinci vectori din $\mathbb{R}^4$, a căror matrice asociată, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & -15 \\ -3 & -2 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 11 \\ 5 & 4 & -11 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Forma scară redusă a matricii A este:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea S_A^0 conţine 3 pivoţi. Deci rangul lui S_A^0 (deci şi al matricii A) este $r = 3$, mai mic decât numărul de vectori $k = 5$. Prin urmare vectorii $v_1, v_2, \dots, v_5$ sunt liniar dependenţi. Există oare un subsistem de vectori printre cei 5 care să fie liniar independenţi?

Răspuns: Coloane pivoţilor sunt coloanele $1, 2, 4$. Vectorii din aceste coloane sunt:

$$C_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = e_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deci coloanele C_1, C_2, C_4 din S_A^0 sunt coloane independente.

Observăm că orice coloană diferită de coloanele $1, 2, 4$, se poate exprima ca o combinaţie liniară a coloanelor $1, 2, 4$.

Coloana 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coloana 5:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adică vectorul din coloana 3 se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor din coloanele $1, 2, 4$ şi coeficienţii acestei combinaţii liniare sunt primele 3 elemente din coloana 3: $-1, -4, 0$. Analog coeficientii din exprimarea coloanei 5 în funcţie de coloanele 1,2,4 sunt primele 3 elemente din coloana 5: $-1 : 2, -3$.

Analizând acum coloanele $1, 2, 4$ din matricea iniţială, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, remarcăm că ele sunt liniar independente (deoarece rang($[v_1|v_2|v_4]$)=3) iar coloanele 3 şi 5 ale matricii iniţiale, adică vectorii v_3, v_5, se exprimă ca şi combinaţii liniare cu aceeaşi coeficienţi (ca şi în cazul matricii S_A^0) ale coloanelor $1, 2, 4$, adică ale vectorilor v_1, v_2, v_4:

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1v_1 - 4v_2$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} -15 \\ -4 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -1v_1 + 2v_2 - 3v_3$$

În concluzie, între coloanele matricii A există aceleaşi relaţii ca şi între coloanele matricii în forma scară redusă, S_A^0.

Dacă matricea A ar fi o matrice de date analizată în *machine learning*, atunci ar rezulta că informaţia relevantă este cea din coloanele 1,2,4. Restul coloanelor sunt doar combinatii liniare ale acestora.

În concluzie forma scară redusă a unei matrici înglobează o informaţie în plus faţa de ce am dedus în cursurile precedente.

1. Rangul r al matricii iniţiale A este egal cu numărul pivoţilor, adică numărul liniilor nenule din forma scară redusă.

2. Dacă pivoţii se găsesc în poziţiile $(1, j_1), (2, j_2), \dots (r, j_r)$, atunci coloanele $j_1, j_2, \dots j_r$ sunt liniar independente 9conţin informaţia de bază) şi orice coloană din matricea A diferită de coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$ se exprimă ca o combinaţie liniară a coloanelor $j_1, j_2, \dots, j_r$. Această combinaţie se citeşte din matricea scară redusă. De exemplu dacă în forma scară redusă o astfel de coloană este:
$$\begin{bmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{k,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, k \leq r$$
atunci ea se exprimă în funcţie de coloanele $j_1, j_2, \dots j_k$ astfel:
$$\begin{bmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{k,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = s_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + s_{2j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + s_{kj} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 9. Să se studieze dependenţa sau independenţa sistemului de vectori din $\mathbb{R}^5$:

$$v_1 = (1, 2, 4, -2, 5)^T, v_2 = (2, 3, 0, 1, -2)^T, v_3 = (4, 5, -8, 7, -16)^T$$

şi în caz de dependenţă sa se determine relaţia/relaţiile dintre vectori.

Matricea asociată $A = [v_1|v_2|v_3]$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -8 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & -16 \end{bmatrix}$$

Forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Din S_A^0 rezultă că rangul matricii A este 2 deci diferit de numărul de vectori. Prin urmare cei trei vectori sunt liniar dependenţi şi $v_3 = -2v_1 + 3v_3$, pentru că în S_A^0 avem:
coloana 3 = -2 $\times$ coloana 1+3 $\times$ coloana 2.

3.4 Baze într-un spaţiu vectorial

În cursul de algebră liniară studiem spaţii vectoriale care pot fi ”construite” pornind de la un număr finit de vectori, $e_1, e_2, \dots, e_n$, liniar independenţi. Cu alte cuvinte studiem ca model un spaţiul vectoria $V/\mathbb{K}$ ce constă din mulţimea vectorilor v ce se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Definiţia 3.4.1 *Un sistem ordonat de vectori, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, din spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$, formează o bază în V dacă:*

B1. *Vectorii sunt liniar independenţi.*

B2. *Orice alt vector v din spaţiul vectorial V se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, e_2, \dots, e_n$:*

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} \tag{3.8}$$

Cu alte cuvinte sistemul de vectori, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, este un sistem maximal de vectori liniar independenţi în V, adică orice sistem $(v, e_1, \dots, e_n)$, cu $v \neq e_i$, $i = \overline{1, n}$, este liniar dependent.

Propoziţia 3.4.1 *Având fixată o bază, $\mathcal{B}$, în spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$, orice vector $v \in V$ se exprimă ca o combinaţie liniară unică a vectorilor din bază.*

Demonstraţie: Presupunem că vectorul v admite două exprimări în baza $\mathcal{B}$:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \quad \text{şi } v = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$$

Deoarece $v - v = \theta$, rezultă scăzând cele două expresii ale vectorului v că:

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)v_2 + \cdots + (x_n - y_n)e_n = \theta$$

ceea ce înseamnă că o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dă vectorul nul. Dar cum vectorii bazei sunt liniar independenţi rezultă că:

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$$

adică $x_i = y_i$, $\forall\ i = \overline{1, n}$, şi deci exprimarea vectorului v în baza $\mathcal{B}$ este unică. □

Scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din exprimarea vectorlui v în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$, se numesc **coordonatele vectorului** v în baza $\mathcal{B}$.

Numele de bază este sugestiv, deoarece vectorii ei constituie fundamentul, "baza" pe care se construieşte întreg spaţiul. Cunoscând vectorii bazei, prin combinaţii liniare ale acestora, se "construieşte" orice alt vector din spaţiu.

Exemplul 10. Sistemul de vectori $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T)$ constituie o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

B1. Să arătăm că vectorii sunt liniar independenţi. Matricea asociată: $A = [e_1|e_2|e_3]$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deoarece $\det(A) = 1$, rangul matricii este 3, deci egal cu numărul de vectori. Prin urmare conform criteriului practic, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi.

B2. Să arătăm că orice alt vector $v = (x_1, x_2, x_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$ se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor e_1, e_2, e_3:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Rezultă că coordonatele unui vector $v = (x_1, x_2, x_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$, în baza $\mathcal{B}$, sunt chiar numerele reale ce definesc tripletul v. De exemplu coordonatele vectorului $v = (-5, 4, 1)^T$ în baza $\mathcal{B}$ sunt $-5, 4, 1$, adică $v = -5e_1 + 4e_2, +1e_3$. Această bază se numeşte *baza canonică* sau *baza standard* din $\mathbb{R}^3$.

În mod analog:

Exemplul 11. Se arată că în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, sistemul de vectori:

$$\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0,\ldots,0)^T, \ldots, e_i = (0,0,\ldots,\underbrace{1}_{i},\ldots,0)^T e_n = (0,0,0,\ldots,1)^T)$$

constiuie o bază. Această bază se numeşte *baza canonică* din $\mathbb{R}^n/R$.