Cursul 9

Maparea unei ferestre 2D dintr-un sistem drept de axe ortogonale pe un viewport dintr-un sistem stâng. Orientarea reperelor 3D

9.1 Formularea problemei de mapare

Problema pe care o abordăm şi rezolvăm este următoarea: un obiect 2D este discretizat şi reprezentat de o mulţime finită de puncte, raportate la un sistem drept, de axe ortogonale xOy, numit sistemul lumii reale (în l. engleza, *real world coordinate system*) sau sistemul obiectului de vizualizat.

Fie $[a, b] \times [c, d]$ o fereastră (un dreptunghi) care conţine toate punctele obiectului discretizat.

Dorim să vizualizăm obiectul 2D din dreptunghiul lumii reale, $[a, b] \times [c, d]$, pe un viewport (dreptunghi) raportat la un sistem stâng de axe ortogonale.

O astfel de problemă apare în grafica 2D, gaming, generarea şi procesarea imaginilor digitale sau în `html 5`.

Device-ului de ieşire pentru un sistem grafic, imaginile digitale sunt matrici de pixeli. În cazul imporimantelor device-ul de ieşire este o matrice de puncte. Pixel-ul (prescurtare de la *picture element*) este unitatea de adresare pe ecran sau imagine.

Dimensiunile, $m\times n$, ale matricii de pixeli definesc rezoluţia device-ului. Pentru imprimante rezoluţia este dată în *dots per inch* (1 inch=25.4 mm).

Indexarea elementelor din matrice se face începând cu 0. Deci pixelul din colţul stânga, sus este în linia 0, coloana 0.

Majoritatea device-urilor de ieşire grafică, imaginile şi imaginile sunt raportate la un sistem stâng de axe ortogonale, cu originea, D, plasată în colţul din stânga sus al matricii de pixeli. Cele două axe, notate x_p, y_p (adică x-pixel, y-pixel) sunt orientate orizontal, respectiv vertical, în jos, ca în Fig.9.1:

Deoarece axa Dx_p trebuie rotită cu $90°$ în sensul acelor ceasornicului, pentru a fi ”adusă peste” Dy_p, sistemul de coordonate Dx_py_p este un sistem stâng.

Un pixel plasat în matrice în poziţia (i, j) (linia i, coloana j) are coordonatele $(x_p = j, y_p = i)$, relativ la sistemul de axe Dx_py_p. Pixelul albastru din Fig.9.1 este în poziţia $(2, 5)$, deci coordonatele sale sunt $(x_p = 5, y_p = 2)$.

Observăm că y_p creşte de sus în jos, adică cu cât este plasat într-o linie de indice mai mare, cu atât y_p este mai mare (în sistemele drepte de coordonate, y-ul creşte din jos în sus).

Un astfel de sistem strâmb de coordonate are şi *canvas*-ul unui browser modern (Chrome,

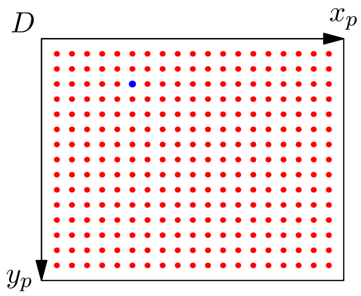


Fig.9.1: Sistemul de axe al device-lui de afişare grafică.

FireFox, Safari, IE), începând de la o anumită versiune a browser-ului Canvas-ul (numele vine de la pânza folosită pentru picturile în ulei) este o regiune dreptunghiulară definită în codul `HTML`

```
<canvas id="DesenCanvas" width="300" height="200">
.
.
.
</canvas>
```

şi care poate fi accesată de un script `JavaScript`, ce conţine funcţii de trasare, desenare, etc.

Cu aceste precizări, putem formula mai concret problematica mapării unei ferestre $[a, b] \times [c, d]$, din sistemul drept de axe ortogoanle, Oxy, al lumii reale, pe un viewport raportat la un sistem stâng de coordonate.

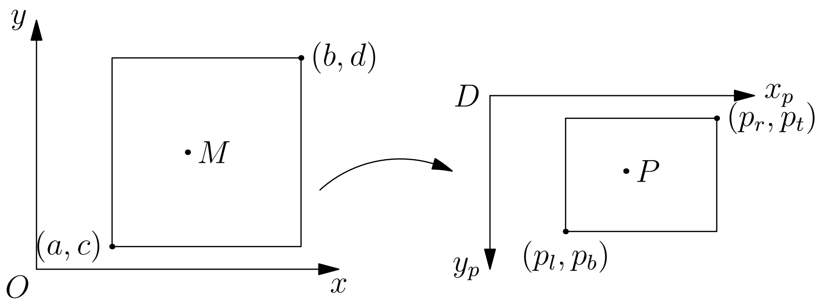


Fig.9.2: Ilustrarea problematicii mapării unui dreptunghi pe un viewport.

Viewportul este domeniul dreptunghiular ce are vârfurile diagonal opuse (p_ℓ, p_b), (p_r, p_t), unde p_ℓ este prescurtarea de la *pixel left*, p_r*-pixel right*, p_t*-pixel top* şi p_b*-pixel bottom*.

Vizualizarea se efectuează ”mapând”, adică aplicând fereastra lumii reale pe viewport, mai precis aplicând fiecare punct, $M(x, y)$, din figura inclusă în fereastra lumii reale într-un pixel, $P(x_p, y_p)$, din viewport (Fig.9.2).

Fereastra din sistemul xOy are lungimea $L = b - a$ şi înalţimea $h = d - c$. Viewportul are lungimea $Lp = p_r - p_\ell$ şi înălţimea $hp = p_b - p_t$ (atenţie!!!!, $p_b > p_t$). Dimensiunile viewportului sunt cel mai adesea diferite de dimensiunile ferestrei. De aceea una din etapele procedurii de mapare constă din redimensionarea ferestrei pentru a o aduce la aceleaşi dimensiuni ca cele ale viewportului.

Pentru a înţelege mai bine problema pe care o abordăm considerăm un exemplu simplu de grafică 2D.

Dorim să desenăm pe un viewport un emoticon ca cel din imaginea din stânga din Fig. 9.3. În acest scop (aceasta este procedura prin care eu am generat efectiv emoticonul şi apoi l-am colorat) dăm coordonatele unei mulţimi de N puncte $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$ ce discretizează frontiera (conturul) capului, ochilor, nasului şi gurii, adică coordonatele punctelor ilustrate în imaginea din dreapta din Fig. 9.3.

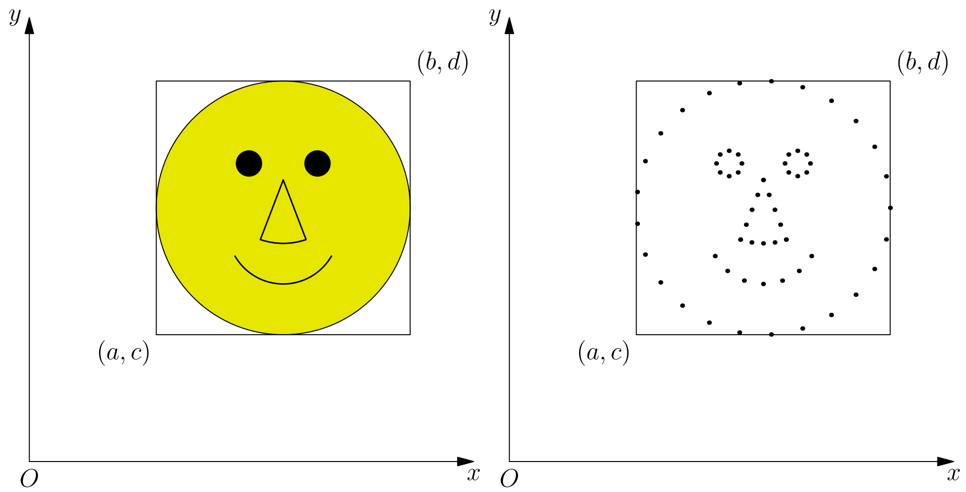


Fig.9.3: În stânga, imagine pe care dorim s-o mapăm pe un viewport (canvas). În dreapta imaginea discretizată.

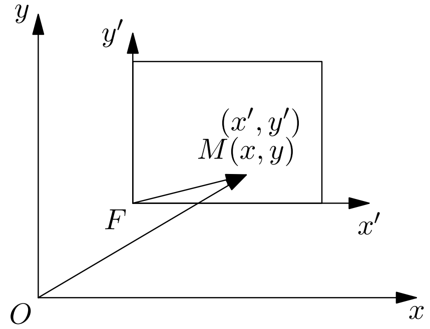
Evident că coordonatele (x_i, y_i) sunt coordonate relativ la sistemul de axe ortogonale xOy (al lumii reale). Fereastă minimă în care intră aceste puncte are parametrii $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 3$. Prin urmarea imaginea discretă intră în fereastra $[a, b] \times [c, d]$. Dorim să desenem imaginea reprezentată de aceste puncte pe un viewport (canvas) definit de $p_\ell = 100$, $p_r = 400$, $p_t = 50$, $p_b = 300$. Pentru a vizualiza emoticonul, mapăm punctele (x_i, y_i) pe ecran (canvas), adică pe pixelii de coordonate $((x_p)_i, (y_p)_i)$, $i = \overline{1, N}$ şi apoi interpolăm punctele de pe ecran (canvas) (printr-o procedură care se învaţa la grafică) încât din ele să generăm cercul ce delimitează faţa şi ochii, apoi conturul nasului şi curba ce imită gura.

9.2 Construcţia aplicaţiei mapare

Mulţimea de puncte $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$ ce reprezintă obiectul $2D$ discretizat este inclusă în dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$, raportat la sistemul drept de axe ortogonale xOy.

Pentru a găsi expresia aplicaţiei mapare, adică funcţia, $\mathcal{M}$, care asociază fiecărui punct $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ un punct $(x_p, y_p) \in [p_\ell, p_r] \times [p_b, p_t]$, se parcurg mai multe etape:

Etapa 1. Efectuăm o schimbare de repere drepte prin translaţie, cu originea în colţul stânga jos, $F(a, c)$, al ferestrei şi notăm cu $Fx'y'$ sistemul de axe asociat.



Un punct arbitrar $M(x, y)$ al obiectului de vizualizat are relativ la sistemul $Fx'y'$ coordonatele (x', y'), unde:

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - c \end{aligned} \tag{9.1}$$

Fereastra ce trebuie mapată pe viewportul stabilit este în noul sistem de coordonate $[0, b - a] \times [0, d - c]$.

Etapa 2. Transformăm fereastra $[0, b-a] \times [0, d-c]$ într-una având dimensiunile viewportului, adică lungimea $p_r - p_\ell$ şi înalţimea $p_b - p_t$.

Această transformare este definită de o aplicaţie, numită scalare de factori A, B, unde scalarea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ are expresia analitică:

$$S(x', y') = (Ax', By'), \quad A, B > 0$$

Observăm că $S(0, 0) = 0$. Dacă $A > 1, B > 1$, atunci S produce dilatare pe ambele direcţii, Fx', Fy', iar dacă $A < 1, B < 1$, atunci produce contracţie. Dacă $A > 1$ şi $B < 1$ atunci avem dilatare pe direcţia orizontală şi contracţie pe cea verticală, etc.

Cum alegem factorii de scalare astfel încât fereastra $[0, b - a] \times [0, d - c]$ să fie mapată pe fereastra $[0, p_r - p_\ell] \times [0, p_b - p_t]$ (raportate ambele la sistemul de coordonate $Fx'y'$)?

Deoarece originea $F(x' = 0, y' = 0)$ este mapată în ea însăşi de S, punem condiţia ca punctul diagonal opus al ferestrei, $(b - a, d - c)$ (Fig.9.4), să fie aplicat de scalarea S în punctul $(p_r - p_\ell, p_b - p_t)$ şi obţinem:

$$(b - a, d - c) = (p_r - p_\ell, p_b - p_t) \quad \Leftrightarrow (A(b - a), B(d - c)) = (p_r - p_\ell, p_b - p_t), \quad \Leftrightarrow$$

S

$$A = \frac{p_r - p_\ell}{b - a}, B = \frac{p_b - p_t}{d - c}$$

Prin urmare scalarea căutată este:

$$S(x', y') = (X', Y'), \text{ unde } \begin{cases} X' &= \dfrac{p_r - p_\ell}{b - a} x' \\ \\ Y' &= \dfrac{p_b - p_t}{d - c} y' \end{cases} \tag{9.2}$$

Practic se aplică transformarea S fiecărui punct $M_i(x'_i, y'_i)$, al obiectului discret şi se obţin punctele $P_i(X'_i, Y'_i)$ care aparţin acum domeniului dreptunghiular având dimensiunile viewportului. (Fig.9.4 dreptunghiul roşu). Precizăm că atât coordonatele (x', y'), cât şi (X', Y') sunt coordonate relativ la sistemul de axe $x'Fy'$.

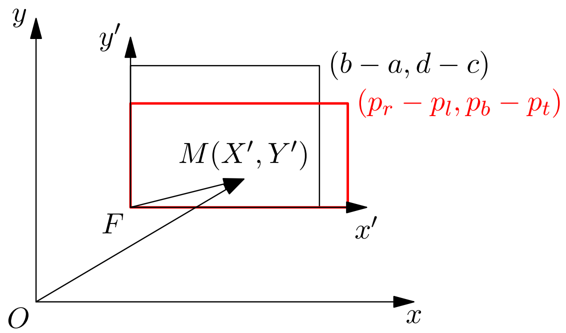


Fig.9.4: Efectul transformării S asupra domeniului dreptunghiular, $[0, b-a] \times [0, d-c]$, este domeniul dreptunghiular având dimensiunile viewportului de pe ecran (cel cu frontiera colorată cu roşu).

În cazul emoticonului $a = 1, b = 3$, $c = 1, d = 3$, $p_\ell = 100$, $p_r = 400$, $p_t = 50$, $p_b = 300$. Deci factorii de scară ar fi:

$$A = \frac{400 - 100}{3 - 1} = \frac{300}{2} = 150, \quad B = \frac{300 - 50}{3 - 1} = \frac{250}{2} = 125$$

Factorii de scară nefiind egali, figura va fi deformată, adică va fi mai dilatată pe direcţia orizontală pentru că $A > B$ (Fig.9.5).

Doar când factorii de scară sunt egali, $A = B$, atunci figura din sistemul lumii reale rămâne nedeformată în fereastra de dimensiunile viewportului. Dar $A = B$ dacă şi numai dacă:

$$\frac{p_r - p_l}{b - a} = \frac{p_b - p_t}{d - c} \quad \Leftrightarrow \frac{p_r - p_l}{p_b - p_t} = \frac{b - a}{d - c}$$

Prin urmare dacă dorim imagine nedeformată, se alege p_ℓ, p_r, p_b, p_t astfel încât să avem rapoartele de mai sus egale.

Etapa 3. Ipotetic, sistemul de axe $x'Fy'$ se "lipeşte" pe ecran/canvas astfel încât dreptunghiul $[0, p_r - p_l] \times [0, p_b - p_t]$ din acest sistem să se suprapună peste viewport. Astfel punctul F are coordonatele pixel (p_l, p_b) (Fig.9.6).

După ce am realizat această poziţionare, deducem pentru fiecare punct $M(X', Y')$, rezultat după scalare şi raportat la sistemul $x'Fy'$, ce coordonate are acesta relativ la sistemul strâmb

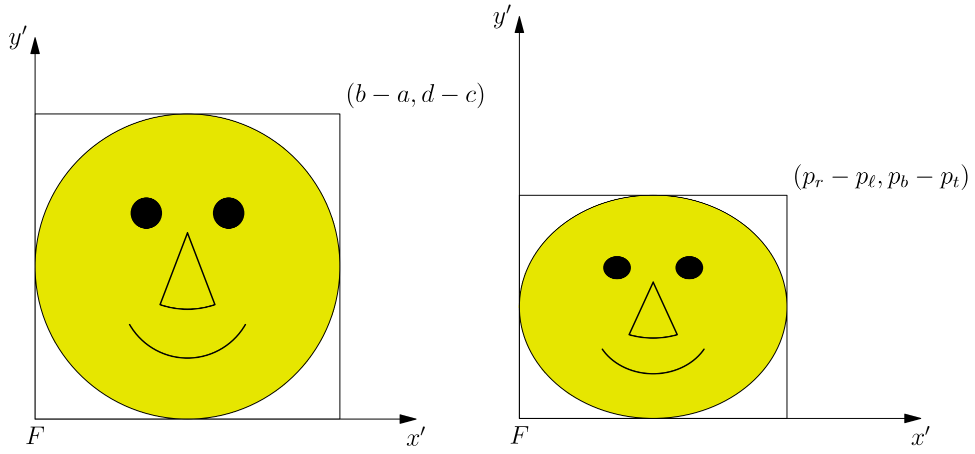


Fig.9.5: Stânga: imaginea raportată la sistemul x'Fy'. Dreapta: imaginea emoticonului după scalarea aplicată punctelor raportate la sistemul $x'Fy'$.

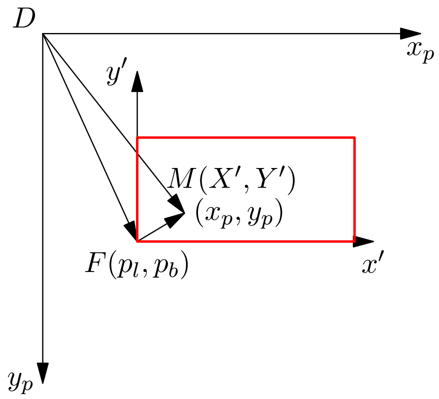


Fig.9.6: Poziţionarea sistemului de axe ortogonale $Fx'y'$ pe ecran.

x_pDy_p. Cunoscând coordonatele (x_p, y_p) ale punctului M, apelăm o funcţie grafică care îl vizualizează/colorează pe ecran, imagine sau canvas (aceste funcţii operează cu coordonate pixel!!!).

Pentru a afla legătura dintre coordonatele (X', Y') ale unui punct raportat la $x'Fy'$ şi coordonatele aceluiaşi punct raportat la sistemul strâmb x_pDy_p, precizăm că sistemul de axe $x'Fy'$ are direcţiile axelor date de baza canonică (e_1, e_2), iar sistemul de axe x_pDy_p are direcţiile axelor e_1 respectiv $-e_2$ (axele $Dx_p||Fx'$, au aceeaşi direcţie şi sens, e_1, iar Dy_p are aceeaşi direcţie ca Fy', dar sens opus, $-e_2$.)

Punctul F are coordonatele $(0, 0)$ relativ la sistemul drept (este originea sistemului) şi respectiv coordonatele (p_ℓ, p_b) relativ la cel strâmb. Mai ştim că un punct arbitrar M, din imaginea ce vrem să o generăm are coordonatele (X', Y') relativ la $x'Fy'$. Pentru a afla coordonatele sale relativ la sistemul x_pDy_p, scriem relaţiile lui Chasles (Fig.9.7):

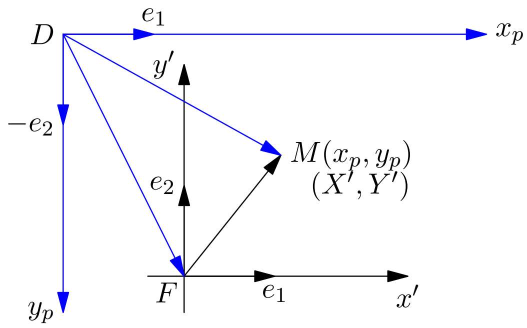


Fig.9.7: Vectorii de poziţie ai unui punct M raportat la sistemul drept $x'Fy'$, respectiv sistemul strâmb x_pDy_p.

$$\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM},$$

unde:

$$\overrightarrow{DF} = p_\ell e_1 + p_b(-e_2), \quad \overrightarrow{FM} = X'e_1 + Y'e_2, \quad \overrightarrow{DM} = x_pe_1 + y_p(-e_2)$$

şi înlocuind obţinem:

$$p_\ell e_1 + p_b(-e_2) + X'e_1 + Y'e_2 = x_pe_1 + y_p(-e_2$$

sau

$$(p_\ell + X')e_1 + (Y' - p_b)e_2 = x_pe_1 - y_pe_2$$

Aceşti doi vectori (din ultima relaţie) sunt egali dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt egale adică:

$$\begin{array}{rcl} x_p & = & p_\ell + X' \\ y_p & = & p_b - Y' \end{array} \tag{9.3}$$

Combinând acum relaţiile (9.3, 9.2, 9.1) aflăm coordonatele pixel (x_p, y_p) ale unui punct din imaginea ce vrem să o generăm pe viewport, cunoscând coordonatele (x, y) ale punctului corespunzător din imaginea raportată relativ la sistemul lumii reale, xOy (sistemul iniţial cu care am pornit în Etapa 1):

$$\begin{array}{rcl} x_p & = & p_\ell + \underbrace{\dfrac{p_r - p_\ell}{b-a}x'}_{X'} = p_\ell + \dfrac{p_r - p_\ell}{b-a}\underbrace{(x-a)}_{x'} \\ y_p & = & p_b - \underbrace{\dfrac{p_b - p_t}{d-c}y'}_{Y'} = p_b - \dfrac{p_b - p_t}{d-c}\underbrace{(y-c)}_{y'} \end{array} \tag{9.4}$$

Aceste relaţii definesc aplicaţia mapare fereastra–viewport, $\mathcal{M} : (x, y) \mapsto (x_p, y_p)$. Aşa cum am construit-o avem certitudinea că ea aplică orice punct din fereastra $[a, b] \times [c, d]$ într-un punct din viewportul $[p_\ell, p_r] \times [p_b, p_t]$.

9.3 Produs vectorial în $\mathbb{R}^3$. Orientarea bazelor şi reperelor ortonormate în spaţiul 3D

În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar standard $<,>$, definim produsul vectorial a doi vectori, ca un ingredient cheie în construcţia bazelor de o anumită orientare.

Reamintim că două baze (ortonormate sau nu) $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, din $\mathbb{R}^3$ au aceeaşi orientare dacă $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$. O bază din $\mathbb{R}^3$, la fel orientată ca şi baza canonică, se numeşte bază dreaptă.

Dacă $v_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$, $v_2 = (b_1, b_2, b_3)^T$ sunt doi vectori nenuli şi necoliniari din $\mathbb{R}^3$, cu alte cuvinte, doi vectori liniari independenţi, lor le asociem un vector din $\mathbb{R}^3$, notat $v_1 \times v_2$, care în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ are exprimarea:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$$

Vectorul astfel definit se numeşte produsul vectorial al lui v_1 cu v_2 şi se notează $v_1 \times v_2$.

Coordonatele produsului vectorial, $v_1 \times v_2$, în baza canonică, (e_1, e_2, e_3), din $\mathbb{R}^3$ a se obţin din dezvoltarea după prima linie a determinantului:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

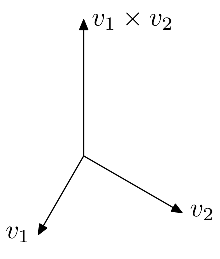
Proprietăţi.

• Vectorul produs vectorial $v_1 \times v_2$ este simultan ortogonal pe v_1 şi pe v_2, adică, $< v_1 \times v_2, v_1 >= 0$ şi $< v_1 \times v_2, v_2 >= 0$.

Demonstraţie:

$$< v_1 \times v_2, v_1 >= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

□



• Produsul vectorial este anticomutativ: $v \times w = -(w \times v)$ (verificaţi!)

• Produsul vectorial a doi vectori coliniari este vectorul nul.

Într-adevăr, dacă $v_1 \parallel v_2$, atunci $v_2 = \lambda v_1$, $\lambda \neq 0$:

$$v_1 \times v_2 = v_1 \times \lambda v_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \end{vmatrix} = \theta$$

Reciproc, dacă produsul vectorial a doi vectori este vectorul nul, atunci fie cel puţin un vector este vectorul nul, fie cei doi vectori sunt coliniari.

• Norma produsului vectorial este egal cu produsul normelor celor doi vectori şi şinusul unghiului dintre ei: $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w})$ (se verifică prin calcul direct).

• Produsul scalar dintre vectorul produs vectorial $v \times w$ şi un vector $u \in \mathbb{R}^3$ este egal cu determinantul matricii $A = [v|w|u]$, adică $< v \times w, u >= \det([v|w|u])$.

Demonstraţie: Fie $v = (x_1, x_2, x_3)^T$, $w = (y_1, y_2, y_3)^T$, $u = (z_1, z_2, z_3)^T$. Produsul scalar este egal cu:

$$\begin{aligned} < v \times w, u > &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det([v|w|u]) \end{aligned} \tag{9.5}$$

□

Produsul $< \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} >= \det([\mathbf{v}|\mathbf{w}|\mathbf{u}])$ se numeşte produsul mixt al vectorilor $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ şi se notează $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ sau $(v; w, u)$.

Manualul de fizică din liceu afirmă că produsul vectorial a doi vectori este un vector perpendicular pe planul determinat de vectorii respectivi, sensul dat de regula burghiului şi are modulul (norma) egală cu $\|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w})$. Prima şi ultima proprietate a fost deja ilustrată, rămâne să interpretăm în limbaj de baze ce înseamnă că are sensul dat de regula burghiului.

Propoziţia 9.3.1 *Dacă vectorii $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sunt liniar independenţi, atunci sistemul de vectori $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_1 \times v_2)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$, la fel orientată ca baza canonică, $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie: Să arătăm că matricea de trecere $T_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ are determinantul strict pozitiv. Matricea de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ are pe coloane coordonatele vectorilor bazei $\mathcal{B}'$:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [v_1|v_2|v_1 \times v_2], \text{iar } \det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) \stackrel{cf.(9.5)}{=} < v_1 \times v_2, v_1 \times v_2 >= \|v_1 \times v_2\|^2 > 0$$

□

Proprietăţile produsului vectorial ne permit să deducem când o baza ortonormată din $\mathbb{R}^3$ este o bază pozitiv orientată. Baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ din $\mathbb{R}^3$ (care este ortonormată) se comportă faţă de produsul vectorial astfel:

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Propoziţia 9.3.2 *Baza ortonormată $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ din $\mathbb{R}^3$ este o bază la fel orientată ca baza canonică, dacă şi numai dacă este verificată una din relaţiile:*

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 &= u_3 \\ u_2 \times u_3 &= u_1 \\ u_3 \times u_1 &= u_2. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Demonstraţie: Presupunem că baza $\mathcal{B}'$ este o bază la fel orientată ca baza canonică. $u_1 \times u_2$ este un vector perpendicular şi pe u_1 şi pe u_2, deci este coliniar cu u_3, adică $u_1 \times u_2 = \lambda u_3$, $\lambda \neq 0$. Conform ipotezei, $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = 1$ (bazele fiind ortonormate, matricea $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este o matrice ortogonală, deci determinatul ei este în general ± 1). Astfel avem:

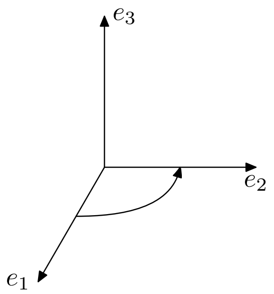
$$1 = \det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = det([u_1|u_2|u_3]) =< u_1 \times u_2, u_3 >=< \lambda u_3, u_3 >= \lambda < u_3, u_3 >= \lambda$$

λ fiind 1, rezultă că $u_1 \times u_2 = u_3$.

Reciproc, presupunem că $u_1 \times u_2 = u_3$. Atunci $det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) =< u_1 \times u_2, u_3 >=< u_3, u_3 >= \|u_3\|^2 = 1 > 0$, adică baza $\mathcal{B}'$ este pozitiv orientată.

Cu alte cuvinte **o bază ortonormată din $\mathbb{R}^3$ care se comportă faţă de produsele vectoriale a doi câte doi vectori, la fel ca baza canonică, este bază dreaptă**.

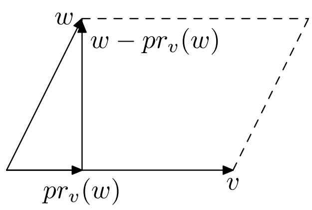
Deoarece $e_1 \times e_2 = e_3$, rezultă că rotind pe e_1 spre e_2 ”burghiul înaintează” în direcţia şi sensul lui e_3:



Conform propoziţiei de mai sus orice bază ortonormată pozitiv orientată se comportă faţa de regula burghiului, la fel ca baza canonică.

• Norma produsului vectorial a doi vectori este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.

Demonstraţie: Norma vectorului produs vectorial este: $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w})$. Aria paralelogramului construit pe cei doi vectori este baza, $\|v\|$, ori înalţimea, $h = \|w - pr_v(w)\|$.



Pe de altă parte $\sin(\widehat{v,w}) = h/\|w\|$ şi deci $h = \|w\| \sin(\widehat{v,w})$, iar aria este:

$$\mathcal{A} = \|v\| \, \|w\| \, \sin(\widehat{v,w}) = \|v \times w\|$$

□

Exemplul 1. În $\mathbb{E}^3$ raportat la un sistem de axe ortogonale $xOyz$ se dau punctele $A(-1, 2, 0)$, $B = (3, 4, 1)$, $C(-2, 1, 1)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Aria triunghiului ABC este jumătate din aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Prin urmare aria este:

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

Dar $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 1)^T$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -1, 1)^T$ şi

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3e_1 - 5e_2 - 2e_3 = (3, -5, -2)^T$$

Deci, $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \sqrt{9 + 25 + 4}/2 = \sqrt{38}/2$.

Repere drepte în $\mathbb{E}^3$

Un reper este drept dacă baza care îl defineşte este o bază dreaptă. □

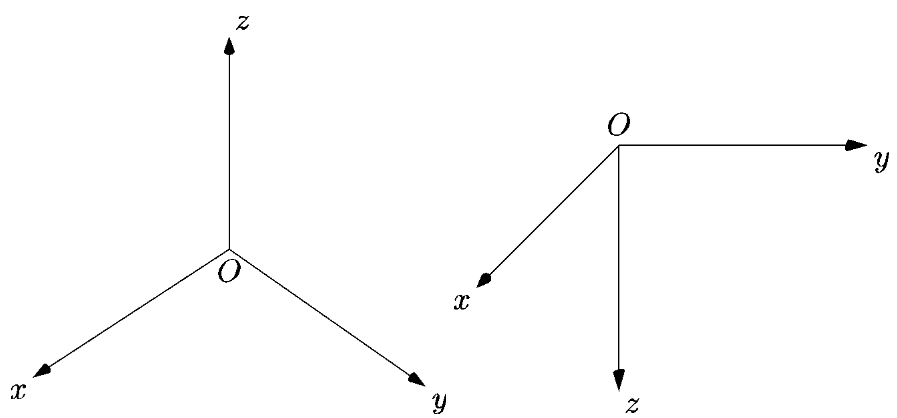


Fig.9.8: Sisteme de axe în $\mathbb{R}^3$ asociate unui reper drept, respectiv stâng.

Rezultă astfel că un sistem ortogonal de axe Ox, Oy, Oz este un sistem drept, sau pozitiv orientat, dacă:

rotind axa Ox spre Oy burghiul înaintează în sensul lui Oz;
sau
rotind axa Oy spre Oz burghiul înaintează în sensul lui Ox;
sau
rotind axa Oz spre Ox burghiul înaintează în sensul lui Oy;

9.4 Aplicaţii liniare. Definiţie şi proprietăţi

Considerăm două spaţii vectoriale V şi W peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. Vom studia aplicaţii $L : V \to W$ care acţionează în mod particular asupra sumei $v_1 + v_2$ a doi vectori din V, respectiv asupra produsului cu scalari αv, $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Şi anume:

Definiţia 9.4.1 *O aplicaţie $L : V \to W$ care verifică următoarele două condiţii:*
AL1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$, $\forall\ v_1, v_2 \in V$;
AL2. $L(\alpha v) = \alpha L(v)$, $\forall\ v \in V, \forall\ \alpha \in \mathbb{K}$
se numeşte aplicaţie liniară.

Cele două condiţii sunt echivalente cu condiţia:
AL. $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$
Din AL rezultă că:

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_k L(v_k),\ \forall\ v_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1,k}$$

Exemplul 2. Orice matrice, A, de tip $m \times n$, cu elemente reale defineşte o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$L(x) = Ax,\ \forall\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

De exemplu matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

defineşte aplicaţia liniară $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

Deci aplicaţia L are relativ la bazele canonice din cele două spaţii următoarea expresie analitică[1]:

$$L(x_1, x_2, x_3)^T = (-x_1 + 4x_2 + 3x_2, 2x_1 - x_2 + 5x_3)^T$$

Să verificăm că aplicaţia L definită prin $L(x) = Ax$ este într-adevăr o aplicaţie liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$:

AL1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Conform definiţiei aplicaţiei L, avem că $L(x + y) = A(x + y)$. Dar $A(x + y) = Ax + Ay$ şi deci $L(x + y) = Ax + Ay = L(x) + L(y)$.

AL2. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}^n$. $L(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha L(x)$.

[1]Reamintim că o aplicaţie (funcţie) este perfect (complet) definită când se precizează domeniul de definiţie D, mulţimea în care f ia valori E şi legea de corespondenţă, adică regula care asociază la orice argument x din D o singură valoare $y = f(x)$ din E. Această lege de corespondenţa este expresia analitică a lui f. De exemplu funcţia exponenţială este definită pe $\mathbb{R}$ cu valori în $(0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, iar expresia ei analitică este $f(x) = e^x$.

Definiţia 9.4.2 *O aplicaţie liniară bijectivă (= injectivă + surjectivă) se numeşte izomorfism liniar.*

Propoziţia 9.4.1 *Orice spaţiu vectorial real, V_n, de dimensiune n este izomorf cu spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie: Fixăm o bază, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, în spaţiul vectorial V_n, iar în $\mathbb{R}^n$ baza canonică. Aplicaţia $\phi_\mathcal{B} : V_n \to \mathbb{R}^n$, care asociază oricărui vector $v \in V_n$, exprimat în baza $\mathcal{B}$, $v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$, vectorul din $\mathbb{R}^n$ având aceleaşi coordonate în baza canonică din $\mathbb{R}^n$, adică

$$\phi_\mathcal{B}(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

este un izomorfism liniar (exerciţiu!).

□

Exemplul 3. Spaţiul vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al funcţiilor polinomiale de grad cel mult trei cu coeficienţi reali are dimensiunea 4 deoarece o bază în acest spaţiu este $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, adică orice funcţie polinomială, P, de grad cel mult 3 se exprimă ca o combinaţie liniară a celor 4 polinoame:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Deci, spaţiul vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ este izomorf cu spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ şi un izomorfism intre ele este:

$$\phi_\mathcal{B}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$$

Deoarece orice spaţiu vectorial real de dimensiune finită, n, este izomorf cu $\mathbb{R}^n$ întreaga problematică a algebrei liniare relativ la aplicaţii liniare o vom exemplifica prin aplicaţii $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, în loc de L definit între două spaţii vectoriale abstracte V_n şi W_m.

Proprietate: O aplicaţie liniară $L : V \to W$ aplică vectorul nul din V pe vectorul nul din W:

$$L(\theta_V) = \theta_W$$

Demonstraţie: Fie v un vector arbitrar din V. $v - v = \theta_V$. Deci

$$L(\theta_V) = L(v - v) \stackrel{AL1}{=} L(v) - L(v) = \theta_W$$