

Probleme de antrenament pentru lucrarea de control nr 1.

În săptămâna a 6-a se dă lucrare de control din problematica cursurilor 1-4, Pentru a avea succes la lucrare, învățați cursurile, rezolvați efectiv (nu doar citind) problemele din curs și seminar și apoi răspundeți întrebărilor din acest chestionar și rezolvați problemele propuse.

1. Fie $\pi = (5, 1, 4, 3, 2)$ o permutare a lui $(1, 2, 3, 4, 5)$. Scrieți elementele liniei 3 din matricea permutare P_π .

2. Fie A o matrice pătratică din $\mathbb{R}^{4 \times 4}$. Dorim să permutăm coloanele lui A astfel încât fiecare coloană trece în următoarea, iar coloana 4 în coloana 1. Cum ați efectua matricial această modificare?

3. Se dă matricea permutare:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Să se determine permutarea ce definește matricea P .

b) Determinați fără calcule inversa P^{-1} , aplicând doar o proprietate a matricilor permutare.

4. Se dau matricile permutare:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculați produsul $Q = P_\pi P_\sigma$ este și Q matrice permutare? Dacă da precizați permutarea corespunzătoare.

5. Dacă P_π este o matrice permutare ce efect are asupra matricii A , produsul $P_\pi A P_\pi^T$. Știind că A este:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

iar $\pi = (2, 4, 1, 3)$, precizați fără a efectua calculele, care este elementul c_{41} al matricii $C = P_\pi A P_\pi^T$.

Proprietăți ale determinanților și matricilor

6. Fie A, B matrici pătratice din $\mathbb{R}^{n \times n}$. Care din relațiile următoare este adevărată și care falsă:

$$a) \det(A + B) = \det(A) + \det(B), \quad b) \det(AB) = \det(A)\det(B), \quad c) \det(A^T) = \det(A)$$

7. Știind că determinantul matricii pătratice A este $\det(A) = 2$, să se calculeze (precizeze) $\det(-5A)$.

8. Dacă $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și $\det(A) = 0$, iar $\det(B) = 3$ este matricea $C = A \cdot B$ inversabilă? Dar A^T ? Argumentați răspunsul.

9. Dacă determinatul unei matrici $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ este $\det(A) = 7$, ce valoare are determinatul matricii A' obținută din A prin inversarea liniei 3 cu 5? Dar determinantul matricii A'' obținută din A prin înmulțirea liniei 4 cu -3 ?

10. Folosind definiția rangului dată la liceu, să se calculeze (deducă) rangul fiecăreia dintre matricile următoare:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [3 \quad -2 \quad 4]^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Rangul unei matrici $A \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ poate fi maximum ... (cât?)

12. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se exprime produsul:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ca o combinație liniară a coloanelor lui A .

13. Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Fără a calcula produsul matricilor, deduceți dacă matricea A este nesingulară (adică $\det(A) \neq 0$) sau nu.

Precizați dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

14. Două sisteme de ecuații liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sunt echivalente dacă au aceleași necunoscute.
15. Două sisteme de ecuații liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sunt echivalente dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.
16. Forma scară S_A a unei matrici A este unică, adică oricare două persoane care calculează forma scară și nu greșesc la calcule obțin aceeași matrice S_A .
17. Un sistem liniar și omogen de n ecuații cu n necunoscute, $Ax = 0$, având matricea A inversabilă, admite o unică soluție.
18. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este inversabilă atunci și forma scară, S_A , este inversabilă.
19. Orice sistem liniar și omogen, $Ax = 0$, cu mai multe necunoscute decât ecuații admite o infinitate de soluții. Dacă da, de ce, dacă nu, de ce? (am discutat această problemă când am dedus criteriul practic de stabilire a dependenței/independenței unui sistem de vectori).

Forma scară/scară redusă a unei matrici, sisteme de ecuații liniare

20. Dacă forma scară a unei matrici $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ are ultimele două linii de elemente nule, ce rang are matricea A ? Explicați!
21. Două matrici $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ au rangul 2. Este adevărat sau nu că formele lor scară redusă, coincid, adică $S_A^0 = S_B^0$. Argumentați răspunsul dând eventual exemple concrete de formă scară redusă corespunzătoare.
22. Matricea $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ are câte un pivot pe fiecare coloană. a) Cât este rangul lui A ? b) Dacă v_1, v_2, v_3, v_4 sunt coloanele lui A , cum sunt acești 4 vectori, liniar dependenți sau independenți? Explicați!
23. Să se transforme matricea prelungită a sistemului $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

în forma scară, să se precizeze rangul matricii A și al matricii prelungite \bar{A} . Indicați pivoții din S_A și $S_{\bar{A}}$ și pozițiile acestora (adică indicați linia și coloana fiecărui pivot).

Precizați dacă sistemul inițial este compatibil sau nu și dacă da determinați mulțimea soluțiilor sale.

24. Determinați mulțimea soluțiilor sistemului liniar și omogen:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

reducând matricea sistemului la forma scară, S_A , și rezolvând sistemul echivalent $S_A x = 0$.

25. Un sistem liniar și neomogen $Ax = b$ are următoarea forma scară redusă a matricii prelungite, \overline{A} :

$$a) S_A^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad b) : S_A^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad c) S_A^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

În fiecare caz în parte să se verifice dacă sistemul este compatibil sau incompatibil și dacă este compatibil să se determine mulțimea soluțiilor.

26. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Calculați forma scară redusă a matricii extinse $A_e = [A|I_3]$ și deduceți dacă A este sau nu inversabilă. Dacă este precizați inversa ei și verificați ca este corect găsită, calculând AA^{-1} .

27. Se dă matricea:

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Asociați matricea extinsă A_e , calculați forma scară redusă a extinsei și deduceți dacă matricea A este inversabilă sau nu și dacă da precizați cine este inversa ei, A^{-1} . Verificați dacă $AA^{-1} = I_3$.

28. Exprimați combinația liniară de vectori:

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ca un produs de două matrici (vezi Cursul 1.)

29. O matrice $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ are determinantul $\det(A) = 5$. Câți pivoți are S_A ?

30. Un sistem liniar și omogen $Ax = \theta$ este echivalent cu sistemul omogen de matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se determine o bază în în subspațiul soluțiilor sistemului $Ax = \theta$.

31. Fie $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Știind că pivoții formeii scară redusă, S_A^0 , sunt plasați în coloanele 1 și 2 și că:

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

să se determine forma scară redusă.

Indicație: deduceți rangul din datele problemei și folosiți faptul că mulțimea soluțiilor sistemului $Ax = \theta$ coincide cu mulțimea soluțiilor sistemului $S_A^0 x = \theta$.

32. Deduceți prin calcul sau dând doar argumente potrivite, dacă următoarele sisteme de vectori din spațiul \mathbb{R}^n (cu n precizat de voi în fiecare caz în parte) sunt sisteme de vectori liniar independenți sau dependenți:

$$a) \quad \mathcal{S}_1 : v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \mathcal{S}_2 : w_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

33. Folosind criteriul practic să se verifice dacă vectorii $v_1 = (4, 1, -1)^T$, $v_2 = (2, -3, -1)^T$, $v_3 = (-1, 1, 2)^T$ sunt liniar dependenți sau independenți. La fel verificați (sau doar argumentați) pentru vectorii $v_1, v_2, 3v_1 - v_2$.

34. În \mathbb{R}^4 se dau vectorii:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

a) Să se exprime matricial combinația liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 cu scalarii $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$.

b) Folosind criteriul practic să se deducă dacă sistemul de vectori din \mathbb{R}^4 este liniar dependent sau independent.

35. Fie vectorii:

$$v_1 = (-1, 2, 3, 0)^T, v_2 = (1, -3, -14, 1)^T, v_3 = (0, -1, -11, 1)^T, v_4 = (2, 3, -5, 1)^T \in \mathbb{R}^4$$

Matricea $A = [v_1 | v_2 | v_3 | v_4]$ are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinați un subsistem maximal de vectori liniar independenți al sistemului celor 4 vectori.

36. Știind că vectorii $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți să se studieze folosind definiția (nu criteriul practic) dacă și vectorii:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_1 + v_2 \\ u_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned}$$

sunt liniar independenți.

37. Vectorii $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ sunt liniar independenți. Cum sunt atunci vectorii u_1, u_2 , liniar dependenți sau independenți?

Indicație: Folosiți combinația liniară ce dă vectorul nul: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + 0u_3 = \theta$, pentru a răspunde la întrebare.

38. Să se arate că $\mathcal{B}' = (u_1 = (1, 2)^T, u_2 = (1, 1)^T)$ formează o bază în \mathbb{R}^2 . Să se determine coordonatele vectorului $w = (-2, 5)^T$ în această bază folosind matricea de trecere adecvată.

39. Vectorul v are următoarea exprimare în funcție de vectorii bazei $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 3)^T, u_2 = (0, 3, -2)^T, u_3 = (5, 1, -1)^T)$:

$$v = 2u_1 - 3u_2 + 7u_3$$

- Să se determine coordonatele lui v în baza canonică.
- Să se determine coordonatele vectorului $w = (1, 0, 4)^T$ în baza \mathcal{B}' .

40. În spațiul vectorial \mathbb{R}^3 se consideră baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ și bazele

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, -3)^T, u_2 = (2, -3, 1)^T, u_3 = (4, -2, 1)^T)$$

$$\mathcal{B}'' = (f_1 = (0, 1, 1)^T, f_2 = (1, 0, 1)^T, f_3 = (1, 1, 0)^T)$$

Știind că vectorul w are exprimarea $w = -2f_1 + 3f_2 + f_3$ în baza \mathcal{B}'' , să se determine coordonatele lui w în baza \mathcal{B}' .

41. Un exemplu de spațiu vectorial folosit pentru generarea curbelor în computer graphics este spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n :

$$V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Operațiile relativ la care această mulțime are structură de spațiu vectorial real, sunt adunarea uzuală a polinoamelor și respectiv înmulțirea unui polinom cu un număr real.

a) Precizați care este vectorul nul al spațiului.

b) Să se arate că sistemul de polinoame $\mathcal{B} = \{1, t, \dots, t^n\}$ constituie o bază în spațiul vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (indicație: pentru a verifica liniar independența presupuneți că o combinație liniară a acestor polinoame dă polinomul nul, $O(t) = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^n$.)

\mathcal{B} se numește baza canonică din spațiul de funcții polinomiale de grad cel mult n . Ce dimensiune are acest spațiu?

c) În cazul particular al funcțiilor polinomiale de grad cel mult 3 să se precizeze coordonatele polinomului $p(t) = -3 + 2t + 7t^2 - 5t^3$, respectiv $q(t) = 3 - 11t - 5t^2$, în baza canonică corespunzătoare.

d) Să se arate că sistemul \mathcal{S} , de funcții polinomiale definite pe intervalul $[0, 1]$:

$$\mathcal{S} = \{B_k^3(t) = C_3^k t^k (1-t)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3\} = \\ \{B_0^3(t) = C_3^0 t^0 (1-t)^3, B_1^3(t) = C_3^1 t^1 (1-t)^2, B_2^3(t) = C_3^2 t^2 (1-t)^1, B_3^3(t) = C_3^3 t^3 (1-t)^0\},$$

numite polinoame Bernstein de gradul 3, este un sistem liniar independent în spațiul vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (polinoamele Bernstein au fost folosite de Bézier, un inginer la Renault, pentru a genera curbe ce descriu alura capotelor de mașini; în ultimii ani curbele Bézier se folosesc în grafică și modelarea geometrică).

Indicație : d) Luați o combinație liniară a polinoamelor Bernstein și presupuneți că este egală cu polinomul nul:

$$\alpha_0 B_0^3(t) + \alpha_1 B_1^3(t) + \alpha_2 B_2^3(t) + \alpha_3 B_3^3(t) = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

În membrul stâng calculați combinațiile C_3^k din expresia fiecărui polinom Bernstein și exprimați totul ca un polinom în funcție de $1, t, t^2, t^3$ și apoi deduceți că în mod necesar toți scalarii din combinația liniară trebuie să fie 0.

42. În spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale de grad cel mult 2, se consideră baza canonică $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ și baza Bernstein:

$$\mathcal{B}' = (B_0^2(t) = C_2^0 t^0 (1-t)^2, B_1^2(t) = C_2^1 t(1-t), B_2^2(t) = C_2^2 t^2 (1-t)^0)$$

a) Să se determine matricea de trecere de la baza \mathcal{B} la baza \mathcal{B}' .

b) Să se exprime funcția polinomială $p(t) = -5 + 2t - 3t^2, t \in [0, 1]$, ca o combinație liniară a polinoamelor din baza Bernstein.

Indicație: Pentru a face legătura cu teoria, notați $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$ și respectiv $u_1 = B_0^2(t), u_2 = B_1^2(t), u_3 = B_2^2(t)$.

Deduceți apoi matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ la baza Bernstein \mathcal{B}' . Calculați inversa ei $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Expriimarea lui $p(t)$ în baza \mathcal{B}' va fi:

$$p(t) = c_0 B_0^2(t) + c_1 B_1^2(t) + c_2 B_2^2(t),$$

unde:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$