Aplicaţii ale produsului scalar şi vectorial în geometria analitică în spaţiu

Supliment la cursul 9

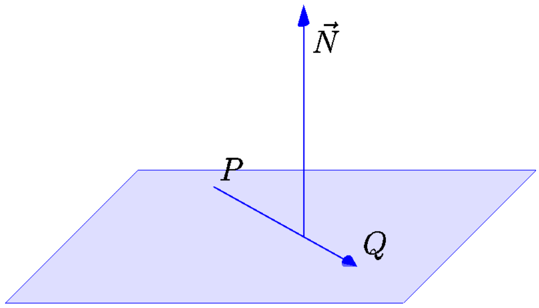
0.1 Planul în spaţiul 3D

În acest supliment prezentăm elementele de bază ale geometriei analitice în spaţiul $3D$, notat $\mathbb{E}^3$ (spaţiul punctual euclidian; punctual pentru că elementele de bază sunt puncte şi euclidian pentru că pe spaţiul vectorilor determinaţi de două puncte se defineşte produsul scalar standard din $\mathbb{R}^3$).

Presupunem cunoscute toate axiomele relativ la dreaptă şi plan în spaţiu, precum şi proprietăţile acestora, studiate în clasa a VIII.

Spaţiul $\mathbb{E}^3$ se consideră raportat la reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ de axe ortogonale, Ox, Oy, Oz. Baza $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ce defineşte reperul este baza canonică, care se notează în acest fel în geometrie, fizică şi mecanică. Un punct arbitrar din spaţiu, raportat la acest sistem de axe, are coordonatele (x, y, z).

Dacă π este un plan, numim **normala la plan** un vector $\overrightarrow{N} \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea că oricare ar fi două puncte $P, Q \in \pi$ în plan, vectorul $\overrightarrow{N}$ este ortogonal pe $\overrightarrow{PQ}$.



0.1.1 Planul determinat de un punct şi normala la plan

Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi $\overrightarrow{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ un vector fixat. Planul ce conţine punctul M_0 şi are normala $\overrightarrow{N}$ este format din mulţimea punctelor M din spaţiu cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{N}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{M_0M}$, adică produsul scalar $< \overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M} >= 0$:

$$\pi = \{M(x, y, z) \mid < \overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M} >= 0\} \tag{1}$$

Dar vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are coordonatele: $\overrightarrow{M_0M} = M - M_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Astfel produsul scalar $< \overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M} >= 0$ este echivalent cu $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ecuaţia:

$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \tag{2}$$

este ecuaţia planului ce conţine punctul $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ şi are normala $\overrightarrow{N} = \mathbf{Ai + Bj + Ck}$.

Exemplul 1. Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin $M_0(-1, 4, 2)$ şi are normala $\overrightarrow{N} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Ecuaţia cerută este:

$$3(x + 1) - 7(y - 4) + 2(z - 2) = 0$$

Ecuaţia (2) este echivalentă cu:

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

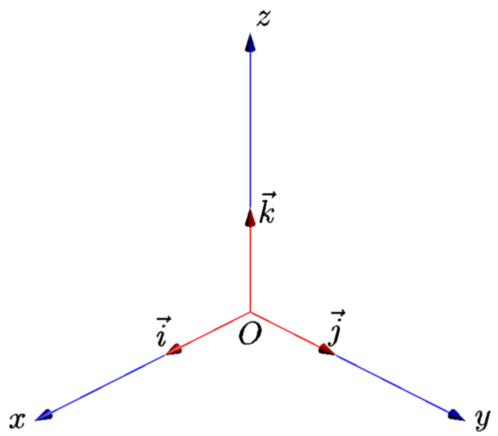
Ecuaţia $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$ se numeşte ecuaţia generală a planului .

Observăm că **coeficienţii lui x, y, z, din ecuaţia generală a planului reprezintă coordonatele normalei la plan**. De exemplu, normala planului de ecuaţie $-2x + 5y - 3z + 11 = 0$ este $\overrightarrow{N} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Plane de coordonate în spaţiu

Sistemului de axe ortogonale $xOyz$, ce au direcţiile $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, i se asociază trei plane:

• planul ce trece prin O şi are normala $\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ are ecuaţia $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, adică $z = 0$.



În acest plan toate punctele au coordonata a treia, z, egală cu 0. Numim acest plan, planul xOy.

În mod analog obţine ecuaţia:

• planului yOz: $x = 0$;

• planului xOz: $y = 0$.

Planele xOy, xOz, yOz se numesc plane de coordonate, deoarece în primul coordonata z este 0, în al doilea coordonata y, iar în al treielea coordonata x.

0.1.2 Plane paralele în spaţiu

Două plane

$$\begin{aligned} \pi_1 \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2 \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

sunt paralele dacă şi numai dacă normalele lor $\overrightarrow{N}_{\pi_1} = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$, $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ sunt coliniare $\overrightarrow{N}_{\pi_1}||\overrightarrow{N}_{\pi_2}$, adică există $\lambda \neq 0$ astfel încât $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = \lambda\overrightarrow{N}_{\pi_1}$. Relaţia de coliniaritate scrisă pe coordonate revine la:

$$\begin{aligned} A_2 &= \lambda A_1 \\ B_2 &= \lambda B_1 \\ C_2 &= \lambda C_1 \end{aligned}$$

sau echivalent:

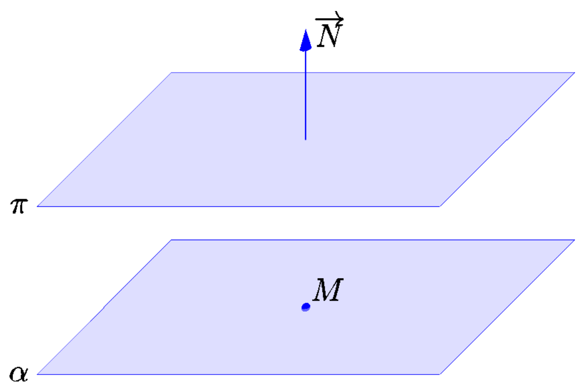
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

Exemplul 2. Planele

$$\begin{aligned} \pi_1 : -2x + y + 5z - 7 &= 0 \\ \pi_2 : -2x + y + 5z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

sunt paralele.

Exemplul 3. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(0, 2, -7)$ şi este paralel cu planul $\pi : 4x - 3z + 2 = 0$.



Practic trebuie să scriem ecuaţia planului α ce conţine punctul M şi are aceeaşi normală ca şi planul π, adică $\overrightarrow{N}_\alpha = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Deci ecuaţia planului va fi:

$$\alpha : \quad 4(x - 0) + 0(y - 2) - 3(z + 7) = 0, \quad \text{adică} \quad 4x - 3z - 21 = 0$$

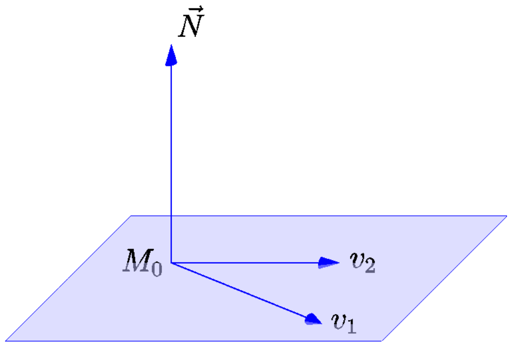
Plane paralele cu planele de coordonate.

Două plane ale căror ecuaţii generale diferă doar prin termenul liber, D, sunt plane paralele, deoarece au aceeaşi normală. Astfel putem afirma că orice plan paralel cu:

• planul xOy are ecuaţia $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (planul xOy are ecuatia $z = 0$, deci ecuaţia unui plan paralel cu el diferă doar prin termenul liber şi va fi $z = \lambda$) ;
• planul yOz are ecuaţia $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
• planul xOz are ecuaţia $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

0.1.3 Planul determinat de un punct şi două direcţii date

Fie M_0 un punct fixat şi $v_1 = l_1\mathbf{i}+m_1\mathbf{j}+n_1\mathbf{k}$, $v_2 = l_2\mathbf{i}+m_2\mathbf{j}+n_2\mathbf{k}$ doi vectori nenuli şi necoliniari. Pentru a determina ecuaţia planului ce conţine punctul M_0 şi direcţiile celor doi vectori, notat $\pi(M_0; v_1, v_2)$, ţinem seama că normala la plan este perpendiculară pe orice vector din plan, deci şi pe v_1, v_2.



Dar un vector simultan perpendicular pe doi vectori daţi este produsul vectorial al celor doi vectori. Deci normala la planul căutat este:

$$\overrightarrow{N} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{A} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{B} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}}_{C} \mathbf{k}$$

Prin urmare planul ce conţine punctul M_0 şi direcţiile v_1, v_2 are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0,$$

adică

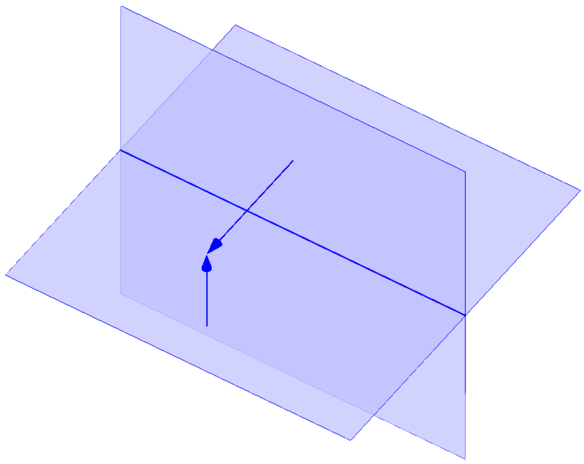
$$\pi(M_0; v_1, v_2) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

0.1.4 Plane perpendiculare

Două plane

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

sunt perpendiculare dacă şi numai dacă normalele lor sunt perpendiculare.



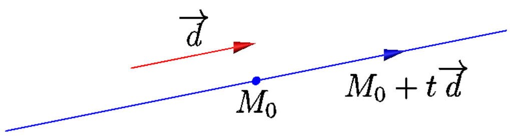
Exemplul 4. Să se arate că planele $\pi_1: \ -x+2y+3z+1=0$, $\pi_2: 5x+7y-3z-6=0$ sunt perpendiculare.

Normalele celor două plane sunt respectiv: $\overrightarrow{N}_{\pi_1} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = 5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Produsul lor scalar este: $<\overrightarrow{N}_{\pi_1}, \overrightarrow{N}_{\pi_2}> = -5+14-9=0$. Deci $\overrightarrow{N}_{\pi_1} \perp \overrightarrow{N}_{\pi_2}$.

0.2 Dreapta ce conţine un punct şi are direcţia dată

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\overrightarrow{d} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ un vector nenul. Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\overrightarrow{d}$ este mulţimea punctelor M cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{d}$:

$$d = \{M(x,y,z) \,|\, \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad M = M_0 + t\,\overrightarrow{d}\}^1$$



Să exprimăm analitic relaţia de coliniaritate. $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$. Condiţia de coliniaritate $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}$ scrisă pe coordonate conduce la:

$$\begin{aligned} x-x_0 &= t\,l \\ y-y_0 &= t\,m \\ z-z_0 &= t\,n \end{aligned} \tag{5}$$

cea ce este echivalent cu:

$$d: \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{6}$$

[1]notăm prin d dreapta şi prin $\overrightarrow{d}$ direcţia sa

Ecuaţiile (6) reprezintă **ecuaţiile canonice ale dreptei** ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia $\overrightarrow{d} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$.

Având date ecuaţiile canonice ale unei drepte, cum găsim coordonatele unui punct ce aparţine dreptei?

Exemplul 5. Să se determine două puncte distincte ale dreptei:

$$d: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{5}$$

Pentru a determina două puncte ce aparţin dreptei, deducem ecuaţiile parametrice ale acesteia, egalând şirul de rapoarte egale cu t. Astfel obţinem:

$$\begin{array}{rcr} x & = & 2+t \\ y & = & -3-4t \\ z & = & 1+5t \end{array}$$

Dând lui t două valori distincte obţinem coordonatele a două puncte:

$$\begin{array}{l} \text{pt } t=0, \text{ avem } P(2,-3,1) \\ \text{pt } t=1, \text{ avem } Q(3,-7,6) \end{array}$$

Remarcăm că punctul cel mai evident, ce aparţine unei drepte dată prin ecuaţiile canonice:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

este punctul corespunzâtor lui $t = 0$, adică punctul $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ecuaţiile (5) se mai pot scrie:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + t\,l \\ y & = & y_0 + t\,m \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & z_0 + t\,n \end{array} \tag{7}$$

În această formă ele se numesc ecuaţiile parametrice ale dreptei. Dacă t parcurge pe $\mathbb{R}$, punctul de coordonate $(x(t) = x_0 + t\,l, y(t) = y_0 + t\,m, z(t) = z_0 + t\,n)$ parcurge dreapta. Interpretând t ca timp, $(x(t), y(t), z(t))$ reprezintă coordonatele la momentul t ale unui punct care se mişcă pe dreapta d.

Exemplul 6. Se dă dreapta de ecuaţii:

$$d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{1}$$

Ce particularitate are această dreaptă?

La prima vedere suntem tentaţi să spunem că ecuaţiile dreptei sunt incorecte, deoarece conţin o fracţie cu numitorul zero. Şirul de rapoarte egale exprimă însă coliniaritatea vectorilor $(x-2)\mathbf{i}+(y+1)\mathbf{j}+(z-5)\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+1\mathbf{k}$, adică pentru fiecare punct de pe dreaptă $M(x,y,z)$ există un $t\in\mathbb{R}$ astfel încât:

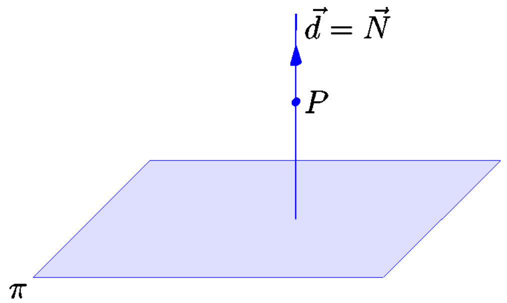
$$\begin{array}{rcl} x-2 & = & -3t \\ y+1 & = & 0t=0 \\ z-5 & = & 1t \end{array}$$

Din $y+1=0$, rezultă că în punctele dreptei avem $y=-1$, adică dreapta este inclusă într-un plan paralel cu planul xOz (ce are ecuaţia $y=0$).

Dreapta d are direcţia $\overrightarrow{d}=-3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt coliniari.

Exemplul 7. Să se scrie ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $P(3,4,-2)$ şi este perpendiculară pe planul $\pi:\ x-2y+5z-8=0$



Dreapta d fiind perpendiculară pe plan are direcţia normalei la plan: $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{N}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$. Deci ecuaţiile ei vor fi:

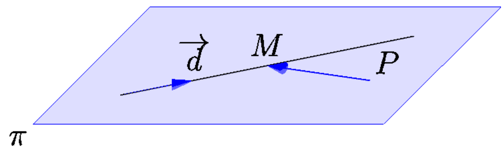
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+2}{5}$$

Accentuăm că **în rezolvarea problemelor de dreaptă şi plan trebuie să ţinem seama că un plan este caracterizat de vectorul normal, iar o dreaptă de vectorul director.**

Pentru a determina ecuaţia unui plan din condiţii geometrice date, trebuie să:
- **să determinăm un punct conţinut în plan şi direcţia normalei** sau
- **să determinăm un punct şi două direcţii conţinute în plan**.

Exemplul 8. Să se determine ecuaţia planului ce conţine punctul $P(5,-7,1)$ şi dreapta

$$d:\quad \frac{x+4}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{7} \tag{8}$$



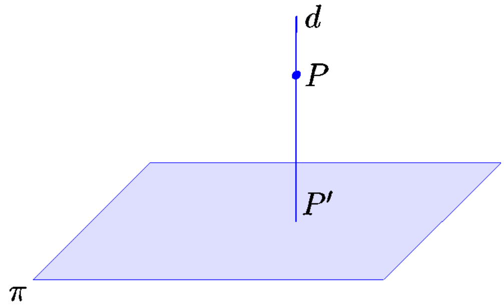
Din enunţ avem un punct conţinut în plan. Dreapta d fiind inclusă în plan, rezultă că planul conţine direcţia lui d, adică $\overrightarrow{d} = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. Din aceste informaţii încercăm să mai deducem o direcţie $v \neq \overrightarrow{d}$ conţinută în plan:

Pentru aceasta alegem un punct de pe dreapta d. Cel mai evident punct ce aparţine dreptei este $M(-4, 1, -3)$ (îl deducem din numărătorii fracţiilor ce definesc ecuaţia (8) comparând cu ecuaţia generală a unei drepte (6). Astfel o altă direcţie conţinută în plan va fi $v = \overrightarrow{PM} = M - P = (-4-5)\mathbf{i} + (1+7)\mathbf{j} + (-3-1)\mathbf{k} = -9\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Planul cerut este planul π determinat de punctul P, şi direcţiile $\overrightarrow{d}, v$:

$$\pi(P; \overrightarrow{d}, \overrightarrow{PM}) : \quad \begin{vmatrix} x-5 & y+7 & z-1 \\ -2 & 0 & 7 \\ -9 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

0.2.1 Proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan

Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ un plan. Presupunem că $P \notin \pi$. Proiecţia ortogonală a lui P pe plan este punctul de intersecţie P' al planului cu dreapta ce trece prin P şi este perpendiculară pe π.



Exemplul 9. Să se determine proiecţia ortogonală a punctului $P(9, -4, 2)$ pe planul $\pi: \ -4x + y + 2z - 6 = 0$.

Scriem ecuaţiile dreptei ce trece prin P şi este perpendiculară pe plan, adică are direcţia normalei la plan: $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$:

$$\frac{x-9}{-4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{2}$$

Punctul de intersecţie al dreptei cu planul s-ar putea obţine rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x-9}{-4} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-2}{2} \\ -4x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

O a doua modalitate pe care o şi aplicăm în continuare este să recurgem la ecuaţiile parametrice ale dreptei. Adică notând cu $t \in \mathbb{R}$ valoarea comună a şirului de rapoarte egale avem:

$$\frac{x-9}{-4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{2} = t,$$

adică

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -4t+9 \\ y(t) & = & t-4 \\ z(t) & = & 2t+2 \end{array}$$

$(x(t), y(t), z(t))$ reprezintă poziţia la momentul t al unui punct ce se mişcă pe dreapta d. Vom determina momentul t în care punctul mobil ajunge în plan, adică $(x(t), y(t), z(t))$ verifică ecuaţia planului:

$$-4x(t)+y(t)+2z(t)-6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(-4t+9)+t-4+2(2t+2)-6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 21t-42 = 0$$

Prin urmare "punctul mobil ajunge în plan" la momentul $t = 2$, adică punctul de intersecţie al dreptei cu planul este punctul

$$P'(x(2) = 1, y(2) = -2, z(2) = 6)$$

.

0.3 Dreapta de intersecţie a două plane

Din geometria sintetică se ştie că poziţia relativă a două plane poate fi una din următoarele:
- planele sunt paralele sau coincid (sunt confundate);
- planele se intersectează şi mulţimea de intersecţie este o dreaptă.

Fiind date două plane prin ecuaţiile lor:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0 \\ \pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0 \end{array}$$

să caracterizăm algebric poziţia lor relativă. Mulţimea punctelor din spaţiu de coordonate (x, y, z) ce satisfac ambele ecuaţii este mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Notăm cu M matricea sistemului,

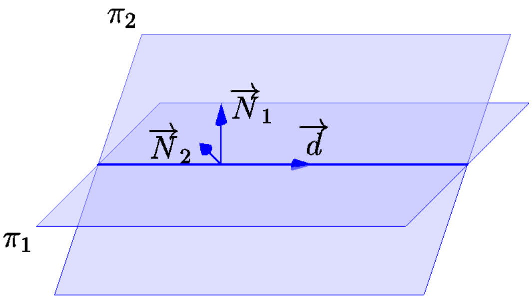
$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & 2_1 \end{bmatrix}$$

Rangul maxim poate fi 2.

• dacă rangul este 2, atunci şi rangul matricii prelungite este 2, deci sistemul are o infinitate de soluţii (x, y, z) şi aceste soluţii reprezintă coordonatele punctelor de pe dreapta de intersecţie a celor două plane, π_1, π_2.

• dacă rangul este egal cu 1, atunci înseamnă că liniile matricii sunt proporţionale, adică normalele planelor sunt coliniare şi deci planele sunt fie paralele, fie coincid.

Vectorul director al dreptei de intersecţie a două plane este produsul vectorial al normalelor la cele două plane.



Într-adevăr dacă cele două plane neparalele sunt

$$\begin{aligned} \pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

atunci dreapta $d = \pi_1 \cap \pi_2$ de intersecţie este inclusă şi în π_1 şi în π_2.

Din $d \subset \pi_1$, rezultă că normala $\overrightarrow{N}_1 \perp \overrightarrow{d}$, iar din $d \subset \pi_2$ rezultă $\overrightarrow{N}_2 \perp \overrightarrow{d}$. Vectorul director al dreptei d fiind simultan perpendicular şi pe $\overrightarrow{N}_1$ şi pe $\overrightarrow{N}_2$, este produsul vectorial al normalelor:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N}_{\pi_1} \times \overrightarrow{N}_{\pi_2}$$

Având o dreaptă dată ca intersecţie a două plane, ne interesează să determinăm atât vectorul director al dreptei, cât şi un punct pe dreaptă pentru a putea scrie ecuaţiile dreptei sub forma canonică (adică ca un şir de 3 rapoarte egale).

Exemplul 10. Să se scrie ecuaţiile dreptei d ce trece prin punctul $P(0, -1, 2)$ şi este paralelă cu dreapta d', de intersecţie a planelor:

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad 2x + 4y - 3z + 7 &= 0 \\ \pi_2: \quad x - 5y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Pentru a putea scrie ecuaţiile dreptei d trebuie să-i determinăm vectorul director. Cum d este paralelă cu dreapta $d' = \pi_1 \cap \pi_2$, rezultă că are aceeşi direcţie ca d'. Vectorul director al lui d' este:

$$\overrightarrow{d}' = \overrightarrow{N}_{\pi_1} \times \overrightarrow{N}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 14\mathbf{k} \mid\mid \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Deci dreapta este determinată de punctul $P(0,-1,2)$ şi vectorul director $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d}' = \mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Ecuaţiile ei sunt:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

În exemplul următor ilustrăm practic cum deducem ecuaţiile parametrice ale dreptei, şi apoi extragem din acestea coordonatele unui punct particular de pe dreaptă şi vectorul director al dreptei, dată ca intersecţie a două plane.

Exemplul 11. Se dă dreapta d, ca intersecţie a planelor:

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1: & -2x+3y-z+1 & = & 0 \\ \pi_2: & -y-4z+5 & = & 0 \end{array}$$

Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei şi să se evidenţieze un punct particular pe dreaptă şi vectorul director al dreptei.

Rezolvare: Rezolvăm sistemul format din ecuaţiile celor două plane. Matricea sistemului:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

are rangul 2, la fel ca matricea prelungită. Luăm determinantul principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Astfel x, y sunt necunoscute principale, iar $z = t$ ecunoscută secundară. Rezolvând sistemul:

$$\begin{array}{rcl} -2x+3y & = & t-1 \\ -y & = & 4t-5 \end{array}$$

obţinem soluţia:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -(13/2)t+8 \\ y(t) & = & -4t+5 \\ z(t) & = & t \end{array}$$

ce reprezintă ecuaţiile parametrice ale dreptei având vectorul director $\overrightarrow{d} = -(13/2)\mathbf{i} - 4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ şi care trece prin $P(8,5,0)$.

0.3.1 Ecuaţiile axelor sistemului ortogonal xOyz

Fie $xOyz$ un sistem ortogonal de axe în spaţiu. Axa Ox este intersecţia planelor xOz şi xOy, deci are ecuaţiile:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}$$

Analog axa Oy are ecuaţiile:

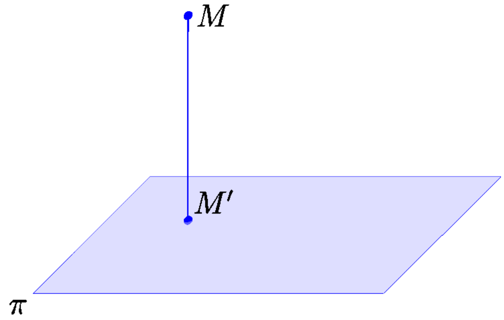
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

iar Oz:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

0.3.2 Distanţa de la un punct la un plan

Distanţa de la un punct M la un plan π este egală cu distanţa de la M la M', proiecţia sa ortogonală pe plan.



Dacă planul π are ecuaţia $Ax+By+Cz+D=0$ şi $M(x_0, y_0, z_0)$ atunci sepoate deduce că distanţa de la M la π este:

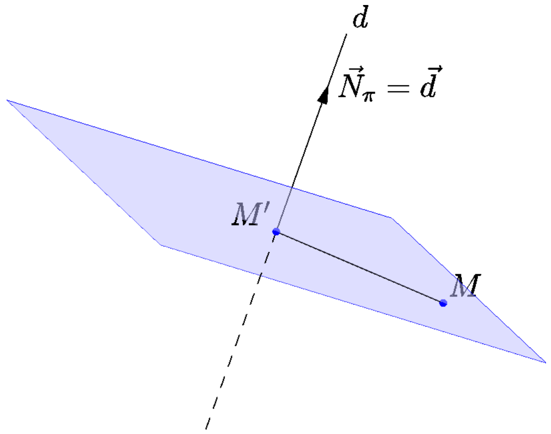
$$\text{dist}(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{9}$$

0.3.3 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Distanţa de la un punct M la o dreaptă d este distanţa de la M la proiecţia sa ortogonală pe d.

Exemplul 12. Să se calculeze distanţa de la punctul $M(3, -1, 6)$ la dreapta

$$d: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{3}$$



Pentru a calcula proiecţia punctului M pe dreapta d scriem ecuaţia planului π ce trece prin M şi este perpendicular pe d. Normala planului are direcţia dreptei d, adică $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{d} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Astfel ecuaţia planului , $\pi = (M; \overrightarrow{N} = \overrightarrow{d})$ este:

$$2(x-3) - (y+1) + 3(z-6) = 0$$

Notăm cu M' intersecţia dreptei d cu planul π. Cum dreapta d este perpendiculară pe orice direcţie din plan, va fi în particular perpendiculară şi pe $\overrightarrow{MM'}$, ceea ce ilustrează că M' este proiecţia ortogonală a punctului M pe dreaptă.

Să determinăm coordonatele punctului $M'(x, y, z)$. Deoarece M' aparţine şi dreptei şi planului, coordonatele sale verifică ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-2}{3} \\ 2(x-3) - (y+1) + 3(z-6) = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem coordonatele lui $M' : x = 3, y = -4, z = 5$.

Astfel distanţa de la punctul M la dreapta d este distanţa

$$d(M, M') = \sqrt{(3-3)^2 + (-1+4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$