

Cursul 13

Geometria diferențială a curbelor

Geometria diferențială studiază curbe și suprafețe ale căror ecuații sunt definite de funcții diferențiabile.

13.1 Modalități de reprezentare a curbelor plane

În prima parte a cursului definim curbe plane diferențiabile. O curbă plană diferențiabilă poate fi dată prin mai multe modalități.

1. Curbe grafic. Cele mai simple curbe diferențiabile sunt graficele funcțiilor $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile pe un interval I din \mathbb{R} .

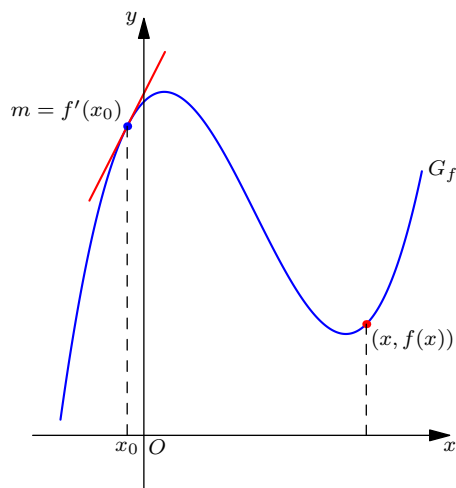


Fig.13.1: Curbă plană ce este graficul unei funcții reale.

Graficul unei astfel de funcții este mulțimea punctelor de coordonate (x, y) :

$$G_f = \{M(x, y) \mid y = f(x)\}$$

cu proprietatea că y este valoarea funcției în x (Fig.13.1).

Indicăm o astfel de curbă prin:

$$\Gamma : y = f(x), x \in I \tag{13.1}$$

și spunem că Γ este dată prin **ecuația explicită**.

Panta tangentei la grafic în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ este $m = f'(x_0)$.

2. Curbe plane date prin ecuația implicită

Nu orice curbă plană este grafic de funcție. De exemplu, cercul cu centrul în origine și de rază r nu este grafic de funcție.

Definiția 13.1.1 O curbă plană diferențiabilă, Γ , dată implicit sau prin ecuația implicită este mulțimea punctelor din plan de coordonate (x, y) care anulează o funcție $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ce este de clasă C^r , $r \geq 1$, pe domeniul Δ :

$$\Gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \quad (13.2)$$

Ca și în cazul curbelor date explicit ne interesează ecuația tangentei într-un punct al curbei.

Pentru a determina panta tangentei într-un punct $M(x_0, y_0)$ al curbei de ecuație $F(x, y) = 0$, aplicăm **teorema funcțiilor implicite** ecuației $F(x, y) = 0$, teoremă care afirmă că:

Dacă $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe Δ și în plus:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$;

atunci există o vecinătate V_{x_0} a lui x_0 , o vecinătate V_{y_0} a lui y_0 și o funcție $y : V_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$, astfel încât:

a) $y(x_0) = y_0$;

b) $F(x, y(x)) = 0, \forall x \in V_{x_0}$;

c) *funcția y este derivabilă și derivata ei în x_0 este:*

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \quad (13.3)$$

Pentru a înțelege interpretarea geometrică a acestei teoreme luăm ca exemplu funcția $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, ce definește ecuația cercului cu centrul în origine și de rază r : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Derivatele parțiale ale lui F sunt $\partial F / \partial x = 2x$, $\partial F / \partial y = 2y$. Derivata $\partial F / \partial y$ se anulează în $(r, 0)$ și $(-r, 0)$. Astfel teorema funcțiilor implicite afirmă, în acest caz, că pentru orice punct $M(x_0, y_0)$ al cercului (condiția 1, $F(x_0, y_0) = 0$, ne asigură că punctul este pe curbă), cu excepția celor două puncte de intersecție cu axa Ox, în care $\partial F / \partial y$ se anulează, există o vecinătate a lui x_0 (intervalul roșu de pe axa Ox) o vecinătate a lui y_0 (intervalul roșu de pe Oy) și o funcție y între cele două intervale astfel încât:

• $F(x, y(x)) = 0, \forall x \in V_{x_0}$, adică graficul funcției y este un subarc al cercului (arcul roșu de pe cerc), ce conține punctul M. Graficul constă din punctele $(x, y(x))$, $x \in V_{x_0}$, iar faptul că $F(x, y(x)) = 0$, ilustrează că punctele $(x, y(x))$ aparțin cercului.

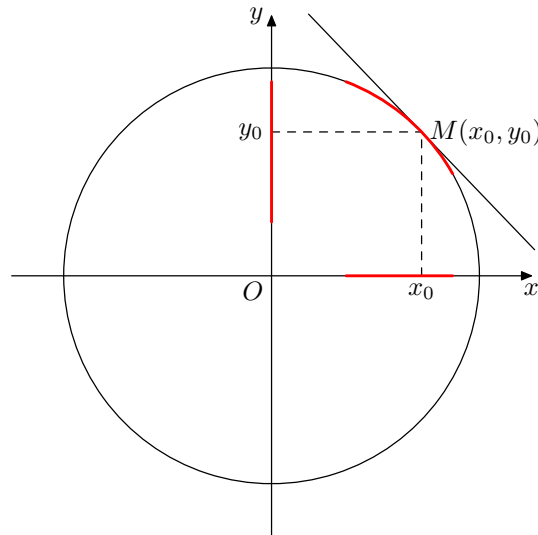


Fig.13.2: Interpretarea geometrică a teoremei funcțiilor implicite

• tangenta la graficul funcției y (deci automat și tangenta la curba de ecuație $F(x, y) = 0$), în punctul $M(x_0, y_0)$ are panta:

$$m = y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Cu alte cuvinte, ecuația $F(x, y) = 0$ definește într-o vecinătate a lui M , pe y ca funcție de x , care s-ar obține rezolvând ecuația în raport cu y . Astfel panta tangentei la curba definită implicit coincide cu panta tangentei la graficul lui y .

În concluzie: **Panta tangentei la o curbă Γ de ecuație $F(x, y) = 0$ într-un punct $M(x_0, y_0)$ în care derivata parțială a funcției F în raport cu y , $\partial F / \partial y$, este nenulă este:**

$$m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

iar ecuația tangentei în punctul M este:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0}$$

(13.4)

Normala la o curbă definită implicit.

Perpendiculara pe tangenta la o curbă plană în punctul de tangență se numește normala curbei în acel punct.

Deoarece două drepte din plan, ce au pantele m, m' , sunt perpendiculare dacă $mm' = -1$ (clasa a XI), rezultă că dacă în punctul $M(x_0, y_0)$ al curbei $\Gamma : F(x, y) = 0$, derivatele parțiale ale funcției F sunt nenule, atunci panta normalei în punctul M la curbă este:

$$m' = -\frac{1}{\text{panta tangentei}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

și astfel ecuația normalei în M este:

$$y - y_0 = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

Ținând seama că dacă panta unei drepte este m atunci vectorul ei director este $\vec{d} = (1, m)^T$, rezultă că vectorul director al normalei într-un punct $M(x_0, y_0)$ al curbei de ecuație $F(x, y) = 0$, este:

$$\vec{N} = (1, \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)})^T \parallel (\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))^T$$

Deci vectorul normal curbei în punctul M este:

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^T = \text{grad}(F)(x_0, y_0),$$

adică gradientul funcției F în punctul M .

Exemplul 1. Să se determine ecuația tangentei în punctul de intersecție al curbei de ecuație $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ cu prima bisectoare și vectorul normal curbei într-un punct arbitrar.

Rezolvare: Prima bisectoare are ecuația $y = x$ deci punctul ei de intersecție cu curba are abscisa soluție a ecuației $F(x, x) = 0$, adică, $2x^3 - 3x^2 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_{1,2} = 0$ și $x_3 = 3/2$. Prin urmare curba intersectează prima bisectoare în origine $O(0, 0)$ și în punctul $M(3/2, 3/2)$.

Pentru a determina panta tangentei în aceste puncte calculăm derivatele parțiale ale funcției $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$:

$$\partial F / \partial x = 3x^2 - 3y, \quad \partial F / \partial y = 3y^2 - 3x$$

Deoarece $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ panta tangentei în origine este nedeterminată deoarece avem $0/0$.

Un punct al curbei de ecuație $F(x, y) = 0$, în care ambele derivate parțiale se anulează se numește punct singular. Deci originea este punct singular pentru curba dată.

Panta tangentei în punctul $M(3/2, 3/2)$ este -1 deci ecuația tangentei în M este:

$$y - \frac{3}{2} = -(x - \frac{3}{2})$$

Vectorul normal curbei într-un punct arbitrar este vectorul:

$$\vec{N} = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)^T$$






Observăm totuși că în origine \vec{N} este vectorul nul, adică normala nu are o direcție, tocmai pentru că tangenta este nedefinită în acest punct.

2. Curbe plane și în spațiu date parametric

În computer graphics se lucrează preponderent cu curbe date parametric.

Definiția 13.1.2 O curbă Γ din plan sau spațiu ce este imaginea unui interval I , printr-o aplicație $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$), de clasă C^k pe I , $k \geq 1$, $r(t) = (x(t), y(t), |z(t))$, se numește curbă diferențiabilă dată parametric. Notăm $\Gamma = im(r)$ pentru a indica, că Γ este o curbă parametrizată de r .

O curbă data parametric este interpretată ca și traiectoria unui punct mobil $(x(t), y(t), |z(t))$ a cărui mișcare are loc în intervalul de timp I .

Fig.13.3: Interpretarea fizică a unei curbei date parametric: curba este traiectoria punctului mobil (roșu) în intervalul de timp $[a, b]$. Dând un singur click cu mouse-ul pe butonul  din widget-ul asociat figurii, este animată mișcarea continuă în sens direct, de la A spre B , iar pe , mișcarea în sens opus, de la B spre A . Clickând succesiv pe , respectiv , este simulată mișcarea discretă (pas cu pas) în sens direct, respectiv opus. Oprirea animației se realizează dând click pe .

Orice curbă dată ca grafic de funcție, adică de ecuație $y = f(x), x \in I$, se parametrizează prin $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2, r(t) = (x(t), y(t))$ unde :

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= f(t) \end{aligned}$$

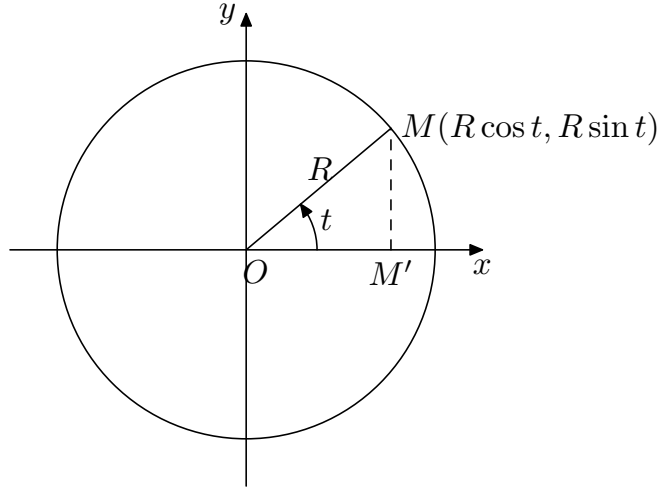


Fig.13.4: Cerc cu centrul în origine și de rază R

Exemplul 2. Curba $y = 2 \sin x - \cos x, x \in (0, 2\pi)$ se redefineste ca o curbă dată parametric prin:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= 2 \sin t - \cos t, \quad t \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Exemplul 3. Parametrizarea cecului. Cercul cu centrul în origine și de rază R are ecuația implicită $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar pe cerc, A punctul de intersecție al axei Ox cu cercul și M' proiecția ortogonală a lui M pe Ox (Fig. 13.4). Notăm cu t măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$. Din triunghiul dreptunghic $\triangle OM'M$ rezultă că:

$$\begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \end{aligned}$$

Deci o parametrizare a cercului complet este $r : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, r(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Punctul A corespunde parametrului $t = 0$.

Parametrizarea semicercului $x^2 + y^2 - R^2 = 0, y \leq 0$ este $r : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, r(t) = (R \cos t, R \sin t)$. În concluzie cercul complet și un subarc al său au parametrizări cu aceeași expresie analitică, doar parametrul t parcurge intervale diferite.

Problemă. Deduceți parametrizarea cercului cu centrul într-un punct $C(a, b)$ și de rază R . (sugestie: efectuați o translație a sistemului de axe cu originea în centrul cercului, aflați parametrizarea în noul sistem de axe și apoi o exprimați relativ la sistemul inițial).

Exemplul 4. Parametrizarea elipsei de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (13.5)$$

Presupunem că $a > b$ și asociem elipsei date cercul cu centrul în origine și de rază a (Fig.13.5).

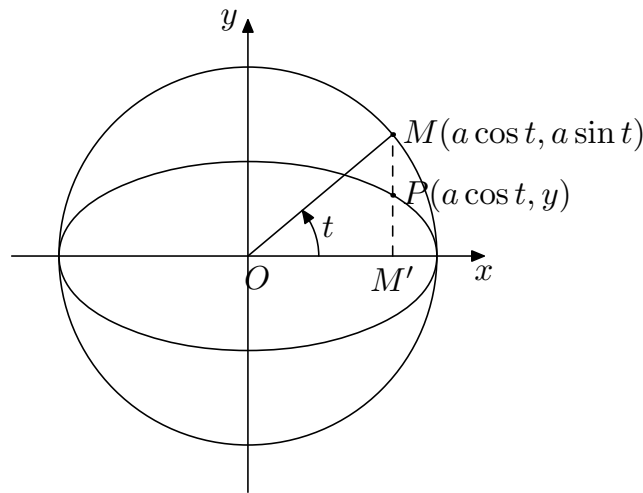


Fig.13.5: Elipsa și cerc de rază egală cu semiaxa mare a elipsei.

Stabilim o corespondență bijectivă între mulțimea punctelor de pe cerc și mulțimea punctelor de pe elipsă. și anume unui punct $M(a \cos t, a \sin t)$ de pe cerc îi asociem punctul P de pe elipsă, care este intersecția perpendicularei din M pe axa Ox , cu elipsa. Evident punctul P are aceeași abscisă ca și M , iar ordonata este deocamdată necunoscută: $P(a \cos t, y)$. Impunem condiția ca coordonatele punctului P să verifice ecuația (13.5):

$$\frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de unde rezultă $y = b \sin t$. Prin urmare parametrizarea elipsei complete este:

$$r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

Exemplul 5. Spirala cilindrică (Fig.13.6) este o curbă în spațiu ce este descrisă de un punct ce are mișcare circulară în x și y și o mișcare liniară cu viteză constantă în direcția lui Oz . Parametrizarea spiralei este:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi n] \\ z(t) &= bt, \end{aligned}$$

unde a, b sunt constante pozitive (a descrie raza mișcării circulare, iar b pasul de înălțare pe direcția lui Oz , când în mișcarea circulară parcurge un radian), iar n este un număr natural ce indică numărul de spire.

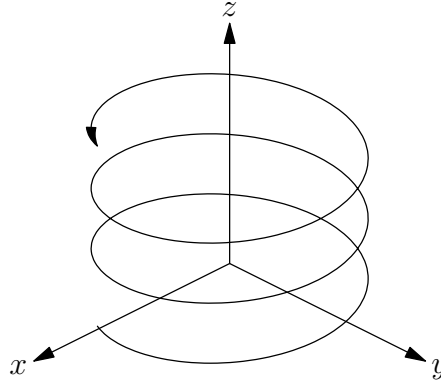


Fig.13.6: Spirala cu trei spire.

13.2 Tangenta la o curbă diferențiabilă dată parametric. Triedrul lui Frenet

Considerăm o curbă Γ din plan sau spațiu, parametrizată de aplicația de clasă C^1 , $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Pentru simplitate determinăm direcția tangentei într-un punct al curbei, în cazul $n = 2$, aplicarea aceluiași metode pentru $n = 3$ fiind evidentă.

Fixăm deci un punct $M_0(x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma$ și un punct $M(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) \in \Gamma$ apropiat de M_0 , $h \neq 0$. Direcția dreptei (M_0M) este:

$$\vec{d}(h) = \overrightarrow{M_0M} = (x(t_0+h)-x(t_0), y(t_0+h)-y(t_0))^T \parallel \left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \right)$$

Trecând la limită când $h \rightarrow 0$ obținem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{d}(h) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

Fig.13.7: Animarea convergenței secantelor prin M_0 , la tangenta în M_0 .

Când h tinde la 0, $t_0 + h$ tinde la t_0 și deci punctul M tinde pe curbă la punctul M_0 , iar secanta (M_0M) tinde la tangenta în M_0 la curbă (vezi animația din Fig.13.7).

În concluzie, **Vectorul tangent în punctul $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ la curba $\Gamma = \text{im}(r)$ este vectorul notat $\vec{r}'(t_0)$ unde**

$$\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^T$$

Vectorul $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^T$ asociat curbei în punctul $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ reprezintă din punct de vedere fizic, **vectorul viteză** la momentul t_0 a punctului mobil ce se mișcă pe curba Γ .

Dacă în plus funcția parametrizare $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) este de clasă C^2 pe I , atunci fiecărui punct $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ i se asociază **vectorul accelerație** la momentul $t = t_0$, notat și definit astfel:

$$\vec{r}''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))^T$$

Observăm că o parametrizare a unei curbe Γ reprezintă o lege de mișcare pe curbă (mișcare cu o anumită viteză). Evident că aceeași curbă (trajectorie) poate fi parcursă cu diferite legi de mișcare (viteze diferite) și prin urmare există o infinitate de parametrizări ale unei curbe.

Fiind dată curba $\Gamma = \text{im}(r)$, cu r de clasă C^k pe $[a, b]$, și $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un difeomorfism de clasă C^k , adică o funcție de clasă C^k , inversabilă și cu inversa de aceeași clasă, aplicația $R : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin $R(\tau) = r(\varphi(\tau))$, $\forall \tau \in [c, d]$, are aceeași clasă de diferențiabilitate și aceeași imagine, deci definește aceeași curbă (vezi Fig. 13.8). Funcția g se numește *schimbare de parametru*.

În noua parametrizare, vectorul viteză este:

$$\vec{R}(\tau) = \vec{r}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) \quad (13.6)$$

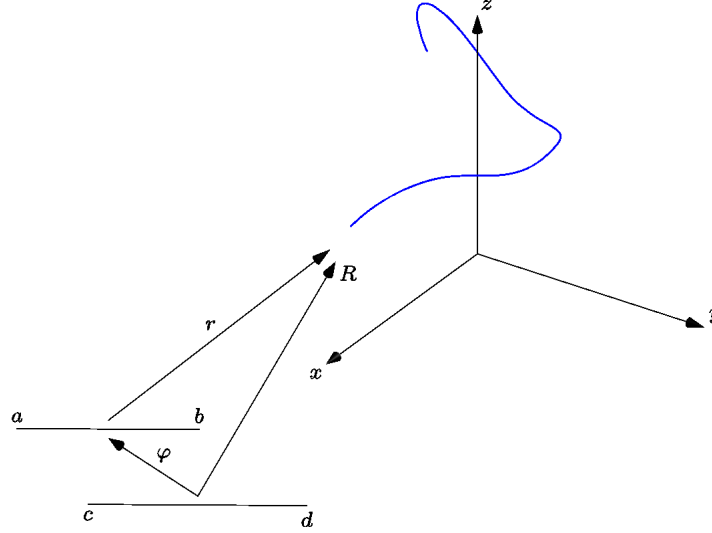


Fig.13.8: Curbă 3D, parametrizată de $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ și reparametrizată de $R : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Funcția $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, numită schimbare de parametru, fiind funcție bijectivă între două intervale, este strict monotonă (fie strict crescătoare, fie strict descrescătoare). Dacă φ este, de exemplu, strict crescătoare, atunci la fel este și φ^{-1} .

Două parametrizări r, R ale unei curbe Γ , astfel încât $R = r \circ \varphi$ ($\Leftrightarrow r = R \circ \varphi^{-1}$), cu φ strict crescătoare definesc același sens de parcurs pe curba Γ (în interpretarea cinematică a curbei ca traiectoria unui punct mobil). Dacă schimbarea de parametru este strict descrescătoare, atunci cele două parametrizări definesc sensuri opuse de parcurs (fapt ilustrat și de relația (13.6) dintre vectorii viteză: φ fiind strict descrescătoare are derivata $\varphi'(\tau) < 0, \forall \tau \in [c, d]$).

Exemplul 6. Fie γ cercul parametrizat de $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$. Vectorul viteză într-un punct arbitrar este $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$ și norma acestuia este $\|\vec{r}'(t)\| = a$, adică cercul este parcurs cu viteză constantă. Luând schimbarea de parametru $\varphi : [0, \sqrt{2\pi}] \rightarrow [0, 2\pi]$, definită prin $\varphi(\tau) = \tau^2$, obținem o nouă parametrizare a cercului $R(\tau) = r(\tau^2) = (a \cos \tau^2, a \sin \tau^2)$. Conform acestei legi de mișcare pe cerc, vectorul viteză este $\vec{R}'(\tau) = (-2a\tau \sin \tau^2, 2a\tau \cos \tau^2)$, iar norma sa $\|\vec{R}'(\tau)\| = 2a\tau$. Prin urmare conform celei de-a doua legi, viteza de parcurgere a cercului nu mai este constantă.

Observația 13.2.1 O parametrizare $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, definește un sens de parcurs pe curba $\Gamma = \text{im}(r)$, și anume de la punctul $A = r(a)$ spre $B = r(b)$. Parametrizarea cea mai simplă care definește sensul opus de parcurs pe aceeași curbă este:

$$R : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad R(\tau) = r(-\tau)$$

De exemplu, parametrizarea cercului $x^2 + y^2 = a^2$, parcurs în sens trigonometric, este $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$. O parametrizare, care conduce la o mișcare pe cerc în sensul acelor ceasornicului este: $R : [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$R(\tau) = r(-\tau) = (a \cos(-\tau), a \sin(-\tau)) = (a \cos(\tau), -a \sin(\tau))$$

13.3 Tangenta și normala la o curbă plană dată parametric

Având dedusă direcția tangentei la o curbă plană dată parametric, ecuația tangentei în punctul $M_0(x(t_0), y(t_0))$ este:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

sau scrisă în forma echivalentă:

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$$

obținem că panta tangentei în punctul M_0 în care $x'(t_0) \neq 0$ este:

$$m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

iar dacă $y'(t_0) \neq 0$, panta normalei, respectiv vectorul director al normalei sunt:

$$m'(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}, \quad \vec{N}(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))^T$$

Subliniem că pentru vectorul normal $\vec{N}(t_0)$ am ales sensul care asigură că baza ortogonală $(\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))^T, \vec{N}(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))^T)$ este pozitiv orientată. Într-adevăr,

$$\det([\vec{r}'(t_0), \vec{N}(t_0)]) = \begin{vmatrix} x'(t_0) & -y'(t_0) \\ y'(t_0) & x'(t_0) \end{vmatrix} = x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$$

Perechea formată din punctul M_0 și baza ortonormată

$$\mathcal{B}' = \left(\vec{\tau}(t_0) = \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|}, \vec{n}(t_0) = \frac{\vec{N}(t_0)}{\|\vec{N}(t_0)\|} \right)$$

se numește reperul lui Frenet. Când punctul M_0 se mișcă pe curbă direcțiile vectorilor reperului se schimbă și în mecanică (studiul mișcării roboților) reperul $(M(t); (\tau(t), \vec{n}(t)))$ se numește reperul mobil al lui Frenet.

Fig.13.9: Reperul mobil al lui Frenet asociat unei curbe plane.

13.4 Tangenta la o curbă în spațiu. Planul normal și reperul mobil al lui Frenet

Fie Γ o curbă în spațiu parametrizată de $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $r \in C^2(I)$.

Definiția 13.4.1 *Curba Γ se numește curbă regulată de ordin 2 dacă în fiecare punct al curbei vectorii asociați $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$ sunt liniar independenți (adică sunt nenuli și necoliniari).*

În această secțiune considerăm doar curbe regulate de ordin 2.

Fie M un punct al curbei corespunzător parametrului $t = t_0$, adică punctul de coordonate $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Ecuațiile tangentei în punctul M , la curbă, sunt:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

În cazul curbelor plane am numit normală, dreapta perpendiculară pe tangentă în punctul de tangență. Această dreaptă este unică pentru că complementul ortogonal al vectorului tangent, ca vector din \mathbb{R}^2 , are dimensiunea 1, deci există o unică direcție perpendiculară pe tangentă. În spațiu însă, complementul ortogonal al vectorului tangent este de dimensiune doi și deci există o infinitate de vectori perpendiculari pe vectorul tangent (vectori normali) în punctul de tangență. Din această infinitate în mecanică se aleg două direcții particulare, numite direcția binormalei și direcția normalei principale. Mai precis, se asociază unui punct $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un reper ortonormat pozitiv orientat, numit reperul lui Frenet. Pentru a defini baza reperului lui Frenet construim mai întâi o bază ortogonală (w_1, w_2, w_3) pe care apoi o normăm.

Se ia drept vector w_1 , **vectorul tangent** în M :

$$w_1 = \vec{r}'(t_0)$$

Fig.13.10: Animarea reperului mobil al lui Frenet. Cei trei vectori din baza reperului sunt colorați în roșu (tangenta), verde (normala principală), albastru (binormala).

Vectorul

$$w_3 = \vec{r}(t_0) \times \vec{r}'(t_0)$$

se numește **vectorul binormal** în M , pentru că este simultan perpendicular și pe vectorul viteză $\vec{r}'(t_0)$ și pe vectorul accelerație $\vec{r}''(t_0)$.

Pentru ca baza să fie pozitiv orientată se definește

$$w_2 = w_3 \times w_1 = (\vec{r}(t_0) \times \vec{r}'(t_0)) \times \vec{r}'(t_0)$$

w_2 definește **normala principală** în punctul M (este evident vector normal pentru că este perpendicular pe vectorul tangent $\vec{r}'(t_0)$).

Baza ortonormată se notează $\mathcal{B}' = (\vec{t}(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{b}(t_0)) = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$. Reperul $\mathcal{R}_F = (M; (\vec{t}(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{b}(t_0)))$ este reperul lui Frenet asociat curbei în punctul M . Exact ca și în cazul curbelor plane reperul este mobil (Fig.13.10).

Exemplul 7. Să se determine reperul lui Frenet asociat punctului $M(2, 0, 1)$ de pe curba $\Gamma = \text{im}(r)$, $r : [-0.5, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(t) = (2t, \ln t, t^2)$.

Deoarece direcțiile reperului lui Frenet într-un punct se determină pornind de la vectorii viteză, $\vec{r}'(t)$, și accelerație, $\vec{r}''(t)$, în acel punct și acești vectori nu depind de coordonatele carteziane ale punctului, ci de parametrul t corespunzător punctului respectiv, determinăm în prealabil parametrul t astfel încât $r(t) = (2, 0, 1)$ sau echivalent acel t care

satisfacă simultan condițiile:

$$\begin{aligned} 2t &= 2 \\ \ln t &= 0 \\ t^2 &= 1 \end{aligned}$$

Evident $t = 1$ și deci baza reperului lui Frenet în punctul M se calculează pornind de la vectorii $\vec{r}'(1)$, $\vec{r}''(1)$.

13.5 Curbe Bézier

Această secțiune este doar pentru cei interesați.

Curbele și suprafețele Bézier sunt "obiectele geometrice" de bază în modelarea geometrică. Modelarea geometrică este procesul de construire a unei descrieri matematice (simbolice) a unui obiect fizic sau virtual.

Curbele Bézier s-au născut în laboratoarele de la Renault și Citroën. Ideea care a sugerat introducerea acestor curbe este următoarea: Dacă se dă o succesiune de puncte și câte două consecutive se unesc printr-un segment, cum se poate genera o curbă a cărei formă să mimeze forma poligonului rezultat din segmentele construite (Fig.13.11)?



Fig.13.11: Un poligon asociat unui șir de puncte ce sugerează profilul unei capote.

Scopul era de a găsi o modalitate rapidă de a genera forme de capote prin design liber, ce implică îmbinarea creativității și talentului artistic cu metode riguroase furnizate de matematică.

Curbele ce au parametrizare polinomială:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \\ y(t) &= c_0 + c_1t + \cdots + c_nt^n \end{aligned} \tag{13.7}$$

sunt cele mai potrivite pentru a fi generate printr-un program, pentru că evaluarea funcțiilor polinomiale implică calculele cele mai simple și deci se reduce cumulara erorilor.

Curbele parametrizate polinomial se numesc curbe polinomiale.

Exemplul 8. Curba parametrizată prin:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + t + 7t^2 - 5t^3 \\ y(t) &= 3 - 4t + 7t^2 + t^3 \end{aligned}$$

este exemplu de curbă plană parametrizată polinomial.

Prima încercare de a rezolva problema formulată mai sus a fost următoarea: să se asocieze parametrizării polinomiale (13.7) punctele A_i de coordonate (a_i, c_i) , $i = \overline{0, n}$. Astfel parametrizarea polinomială s-ar scrie formal astfel:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n, \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

Cum interpretăm această relație? Pentru fiecare t , poziția unui punct pe curbă se obține înmulțind coordonatele punctelor A_k cu scalarul t^k și apoi se "adună" punctele rezultate.

Încercând să caracterizeze geometria curbei parametrizată polinomial cu ajutorul punctelor asociate, A_i , $i = \overline{0, n}$ nu s-a obținut nici o informație relevantă. Adică dacă se mută poziția unui punct nu se poate prevedea modul de schimbare a formei curbei.

Pe de altă parte în geometrie nu are nici un sens geometric "o combinație liniară de puncte", adică "operația" $2A_0 - 3A_1 + 11A_3$. Ori în scrierea parametrizării polinomiale a curbei, $A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n$, avem exact o astfel de operație nepermisă.

Pentru a remedia acest inconvenient, Bézier a exploatat apoi faptul că o combinație convexă de puncte din \mathbb{E}^n ($n=2,3$) are sens și anume, reprezintă un punct. Mai precis, o combinație convexă¹ a punctelor A_0, A_1, \dots, A_n este de forma:

$$\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n, \quad \text{unde } \alpha_i \in [0, 1], \text{ și } \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \quad (13.8)$$

Să arătăm că o combinație convexă reprezintă un punct. Într-adevăr, din relația $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ exprimăm pe $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$, îl înlocuim în (13.8) și obținem:

$$A_0 + \alpha_1(A_1 - A_0) + \alpha_2(A_2 - A_0) + \cdots + \alpha_n(A_n - A_0) = \underbrace{A_0}_{\text{punct}} + \underbrace{\alpha_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_0 A_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{A_0 A_n}}_{\text{vector}} := P$$

De aceea Bézier a avut ideea de a folosi pentru parametrizarea polinomială a curbei, nu baza canonică $(1, t, \dots, t^n)$ din spațiul funcțiilor polinomiale de grad cel mult n , ci baza Bernstein, $B_k^n(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$. Pentru $t \in [0, 1]$, fiecare polinom Bernstein ia valori în intervalul $[0, 1]$, și suma celor $n + 1$ polinoame este 1, deoarece:

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^n B_k^n(t)$$

Prin urmare spre deosebire de polinoamele $1, t, \dots, t^n$, polinoamele Bernstein pot fi folosite ca coeficienți într-o combinație convexă de puncte.

Astfel Bézier a definit parametrizarea curbelor ce-i poartă numele, în felul următor:

¹Noțiunea de combinație convexă de puncte este o noțiune de bază în *Computational geometry*, http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_geometry

Definiția 13.5.1 Fie $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ o mulțime ordonată de puncte din \mathbb{E}^n , $n = 2, 3$, numite puncte de control. O curbă Bézier de puncte de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ este o curbă parametrizată de aplicația:

$$b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, n = 2, 3, \quad b(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t)$$

adică

$$b(t) = \begin{cases} x(t) &= x(\mathbf{b}_0)B_0^n(t) + x(\mathbf{b}_1)B_1^n(t) + \dots + x(\mathbf{b}_n)B_n^n(t) \\ y(t) &= y(\mathbf{b}_0)B_0^n(t) + y(\mathbf{b}_1)B_1^n(t) + \dots + y(\mathbf{b}_n)B_n^n(t) \\ z(t) &= z(\mathbf{b}_0)B_0^n(t) + z(\mathbf{b}_1)B_1^n(t) + \dots + z(\mathbf{b}_n)B_n^n(t), \end{cases}$$

unde $x(\mathbf{b}_k)$ reprezintă abscisa punctului \mathbf{b}_k , etc

Prin urmare o curbă Bézier este o curbă dată printr-o parametrizare polinomială, dar funcțiile polinomiale ce definesc parametrizarea nu sunt exprimate clasic, ci în baza Bernstein.

Deoarece polinoamele Bernstein iau valori mai mari sau egale cu zero și suma tuturor polinoamelor Bernstein de același grad este 1, $\forall t \in [0, 1]$, rezultă că un punct, $b(t)$, al curbei Bézier este o combinație convexă a punctelor de control.

Exemplul 9. Să determinăm parametrizarea curbei Bézier de puncte de control: $\mathbf{b}_0 = (2, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (4, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (7, 6)$, $\mathbf{b}_3 = (9, 1)$

Curba Bézier are parametrizarea:

$$b(t) = (2, -1)B_0^3(t) + (4, 5)B_1^3(t) + (7, 6)B_2^3(t) + (9, 1)B_3^3(t)$$

adică fiecare punct de pe curbă (corespunzător fiecărui parametru $t \in [0, 1]$) este o combinație convexă a punctelor de control, cu coeficienții $\alpha_0 = B_0^3(t)$, $\alpha_1 = B_1^3(t)$, $\alpha_2 = B_2^3(t)$, $\alpha_3 = B_3^3(t)$.

Mai precis:

$$b(t) = \begin{cases} x(t) &= 2B_0^3(t) + 4B_1^3(t) + 7B_2^3(t) + 9B_3^3(t) \\ y(t) &= -B_0^3(t) + 5B_1^3(t) + 6B_2^3(t) + B_3^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Proprietăți ale curbelor Bézier

1. Gradul unei curbe Bézier este mai mic cu o unitate decât numărul punctelor sale de control. Astfel o curbă Bézier de grad 1 este generată de două puncte de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$, $b(t) = \mathbf{b}_0 B_0^1(t) + \mathbf{b}_1 B_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + t\overrightarrow{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$, și este segmentul determinat de cele două puncte.

2. O curbă Bézier interpolează extremitățile poligonului său de control (adică trece sigur prin \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_n , dar nu și prin punctele intermediare), deoarece $b(0) = \mathbf{b}_0$ și $b(1) = \mathbf{b}_n$.

3.

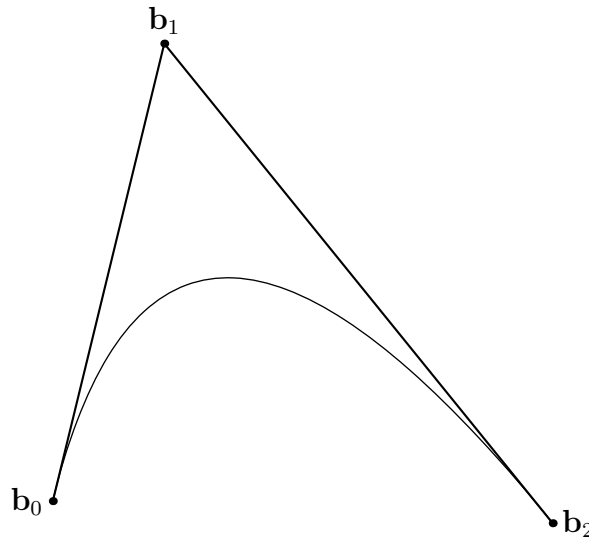


Fig.13.12: Arc de parabolă definit ca o curbă Bézier de grad 2.

O curbă Bézier ale cărei puncte de control sunt coplanare (aparțin aceluiași plan) este o curbă plană, în sensul că toate punctele curbei aparțin aceluiași plan. În particular curba generată de trei puncte de control este un arc de parabolă. (Fig.13.12).

4. O curbă Bézier imită forma poligonului de control (Fig.13.13).

5. Tangenetele în extremitățile arcului de curbă Bézier au direcțiile $\overrightarrow{b_0b_1}$, respectiv $\overrightarrow{b_{n-1}b_n}$:

$$\vec{b}'(0) = n\overrightarrow{b_0b_1}, \quad \vec{b}'(1) = n\overrightarrow{b_{n-1}b_n}$$

La ora actuală curbele Bézier nu se folosesc doar în industria producătoare de automobile, ci s-a extins în foarte multe domenii. Fonturile sunt create din arce de curbe Bézier. Designul logo-urilor se bazează pe curbe Bézier. În *Adobe Illustrator* curbele Bézier sunt folosite de *Path tool*. În *Adobe Shockwave* se folosesc ca un instrument de a controla animația. Curbele Bézier stau la baza graficii vectoriale.

13.6 Reprezentarea procedurală a curbelor Bézier. Algoritmul de Casteljau

Spre deosebire de Bézier care a definit curbele ce-i poartă numele printr-o parametrizare, de Casteljau a dat o definiție procedurală acestor curbe. Mai precis în cazul parametrizării $b(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t)$, pentru a calcula un punct pe curbă corespunzător parametrului t , trebuie evaluată aplicația parametrizare în t . Definiția procedurală presupune calculul unui punct corespunzător unui parametru $t \in [0, 1]$, pe curba de puncte de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, pe baza unui algoritm ce constă într-o formulă recursivă.

Pentru a descrie algoritmul de Casteljau, numit și schema de Casteljau, fixăm câteva noțiuni elementare de geometrie analitică pe care se bazează definiția procedurală.

Dacă A, B sunt două puncte în plan sau spațiu, o combinație convexă a lor este un punct $M = \alpha_1 A + \alpha_2 B$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Notând $\alpha_2 = t$, rezultă că $\alpha_1 = 1 - t$ și deci punctul M se exprimă

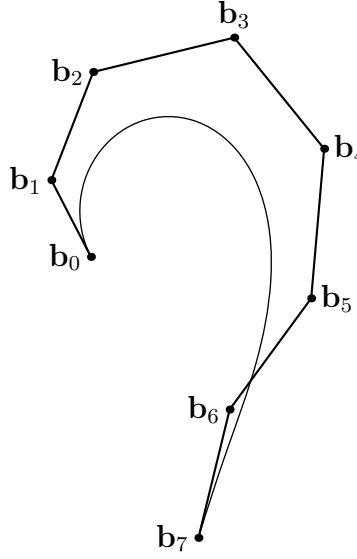


Fig.13.13: Curbă Bézier definită de 8 puncte de control.

ca o combinație convexă a lui A și B astfel:

$$M = (1 - t)A + tB, \quad t \in [0, 1]$$

Propoziția 13.6.1 Dacă M este o combinație convexă a punctelor A, B , atunci M aparține segmentului $[A, B] = \{P \mid P = A + s\overrightarrow{AB}, s \in [0, 1]\}$ și reciproc, dacă un punct M aparține segmentului $[A, B]$ atunci există $t \in [0, 1]$, astfel încât $M = (1 - t)A + tB$.

Demonstrație: Demonstrăm afirmația directă și reciprocă simultan, printr-un șir de echivalențe:

$$M = (1 - t)A + tB \Leftrightarrow M = A + t(B - A) \Leftrightarrow M = A + t\overrightarrow{AB}$$

□

Definiția 13.6.1 Un punct al segmentului $[A, B]$, $M \neq B$, împarte segmentul $[A, B]$ în raportul r dacă $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{MB}$.

Propoziția 13.6.2 Un punct $M \neq B$ al segmentului $[A, B]$, $M = (1 - t)A + tB$, împarte segmentul în raportul $\frac{t}{1 - t}$ și reciproc, dacă M împarte segmentul $[A, B]$ în raportul $\frac{t}{1 - t}$, $t \neq 1$, atunci $M = (1 - t)A + tB$.

Demonstrație: Demonstrăm ambele părți printr-un șir de echivalențe:

$$\begin{aligned} M = (1 - t)A + tB &\Leftrightarrow M = A + t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - t)\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{t}{1 - t}\overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

□

Pornind de la această proprietate explicăm mai întâi schema lui de Casteljau pentru cazul curbei definite de 3 puncte de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Acestea fiind punctele date se renotează $\mathbf{b}_0^0, \mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0$, indicele 0 din poziția de sus indicând etapa 0 a procedurii.

Fixând un parametru $t \in [0, 1)$, acesta împarte segmentul $[0, 1)$ în raportul $\frac{t}{1-t}$ (Fig.13.14).

• În etapa 1 se determină pe fiecare segment determinat de două puncte de control consecutive, punctul ce împarte segmentul respectiv în același raport $\frac{t}{1-t}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1 &= (1-t)\mathbf{b}_0^0 + t\mathbf{b}_1^0 \\ \mathbf{b}_1^1 &= (1-t)\mathbf{b}_1^0 + t\mathbf{b}_2^0 \end{aligned} \quad (13.9)$$

• pe segmentul determinat de cele două puncte calculate în etapa precedentă se determină punctul \mathbf{b}_0^2 ce împarte segmentul $[\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1^1]$ în raportul $\frac{t}{1-t}$:

$$\mathbf{b}_0^2 = (1-t)\mathbf{b}_0^1 + t\mathbf{b}_1^1 \quad (13.10)$$

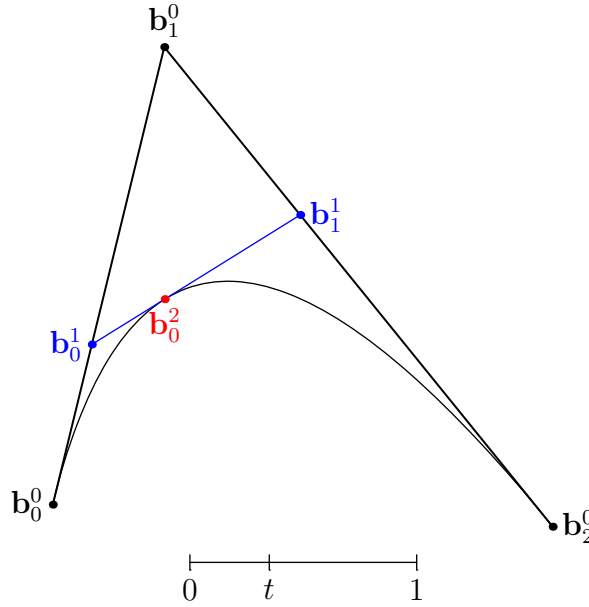


Fig.13.14: Ilustrarea schemei de Casteljau pentru calculul unui punct pe curba Bézier definită de trei puncte de control și parametrul $t = 0.35$.

Înlocuind punctele din (13.9) în (13.10) obținem:

$$\mathbf{b}_0^2 = (1-t)[(1-t)\mathbf{b}_0^0 + t\mathbf{b}_1^0] + t[(1-t)\mathbf{b}_1^0 + t\mathbf{b}_2^0] = \underbrace{(1-t)^2 \mathbf{b}_0^0}_{B_0^2(t)} + \underbrace{2t(1-t) \mathbf{b}_1^0}_{B_1^2(t)} + \underbrace{t^2 \mathbf{b}_2^0}_{B_2^2(t)} = b(t), \quad (13.11)$$

parametrizarea curbei dată de Bézier în baza Bernstein.

Remarcăm că în fiecare etapă a schemei de Casteljau, numărul punctelor calculate se reduce cu o unitate față de etapa precedentă și în ultima etapă rezultă punctul de pe curba Bézier corespunzător parametrului t . Generalizând la cazul unei curbe definite de un număr arbitrar de puncte de control

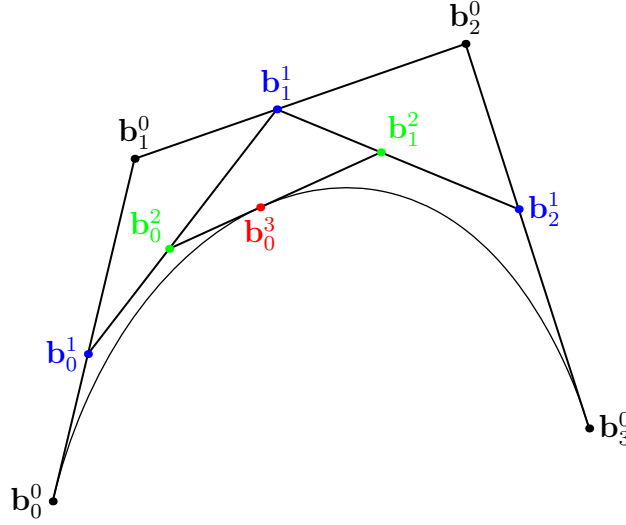


Fig.13.15: Ilustrarea punctelor calculate de algoritmul de Casteljau pe baza a patru puncte de control și a parametrului $t \in [0, 1]$, fixat.

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, după n etape a schemei de Casteljau aplicată după același principiu, folosind un parametru $t \in [0, 1]$, se obține un punct pe curba Bézier corespunzător acestui parametru.

Punctele de control calculate în etapele intermediare se pot afișa într-o matrice triunghiulară de puncte. Și anume punctele de control sunt puncte date, deci corespund etapei 0 a procedurii recursive și le adăugăm indicele 0 în poziția de sus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_0^0 & \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_2^0 & \dots & \mathbf{b}_{n-1}^0 & \mathbf{b}_n^0 \\
 \mathbf{b}_0^1 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_2^1 & \dots & \mathbf{b}_{n-1}^1 & & \\
 \mathbf{b}_0^2 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_2^2 & \dots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \mathbf{b}_{n-2}^0 & \mathbf{b}_{n-2}^1 & \mathbf{b}_{n-2}^2 & & & & \\
 \mathbf{b}_{n-1}^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & & & & & \\
 \mathbf{b}_n^0 & & & & & &
 \end{array} \quad (13.12)$$

Punctele din coloana r corespund etapei r a schemei recursive, $r = \overline{1, n}$. Succint, schema de Casteljau se exprimă prin:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), r = \overline{1, n}, i = \overline{0, n-r}, \quad (13.13)$$

adică punctul i din etapa r este o combinație convexă a punctelor i și $i+1$ din etapa $r-1$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_i^{r-1} & \xrightarrow{1-t} & \mathbf{b}_i^r \\
 \mathbf{b}_{i+1}^{r-1} & \nearrow t &
 \end{array}$$

Deși la prima vedere s-ar părea că pentru implementarea schemei de Casteljau avem nevoie de o matrice triunghiulară de puncte, în realitate este suficient un șir auxiliar de puncte $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, în care la fiecare apel al schemei de Casteljau se copiază punctele de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i, i = 0, 1, \dots, n)$. În etapa 1, de exemplu, calculăm $(1-t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_1$ și pentru că punctul \mathbf{a}_0 nu va mai fi folosit în această etapă, atribuim $(1-t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_0$, etc. În fiecare etapă r a schemei de Casteljau primele punctele

$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-r}$ își modifică ”conținutul”:

Etapa 0	Etapa 1	Etapa 2	\dots	Etapa $n-1$	Etapa n
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\dots	\downarrow	\downarrow
\mathbf{a}_0	\mathbf{a}_0	\mathbf{a}_0	\dots	\mathbf{a}_0	\mathbf{a}_0
\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_1	\dots	\mathbf{a}_1	
\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_2	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots			
\mathbf{a}_{n-2}	\mathbf{a}_{n-2}	\mathbf{a}_{n-2}			
\mathbf{a}_{n-1}	\mathbf{a}_{n-1}				
\mathbf{a}_n					

(13.14)

În etapa n punctul \mathbf{a}_0 conține punctul curbei Bézier corespunzător parametrului t .

Pseudocodul pentru schema de Casteljau:

```

1: function deCasteljau( $n, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, t$ )
2:   for  $i = 0 : n$ 
3:      $\mathbf{a}_i \leftarrow \mathbf{b}_i$ ; ▷ se atribuie coordonatele punctelor
4:   end for
5:   for  $r = 1 : n$ 
6:     for  $i = 0 : n - r$ 
7:        $\mathbf{a}_i \leftarrow (1 - t) * \mathbf{a}_i + t * \mathbf{a}_{i+1}$ ; ▷ calculele se fac pe coordonate
8:     end for
9:   end for
10:  return  $\mathbf{a}_0$ ;
11: end function

```

În procesul iterativ al schemei de Casteljau, de evaluare a unui punct $b(t)$, de pe curba Bézier definită de punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, se determină practic și direcția tangentei la curbă în acel punct. Și anume se poate demonstra că **vectorul tangent la curba Bézier în punctul corespunzător parametrului $t \in [0, 1]$** este:

$$\overrightarrow{b}(t) = n(\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)) = n\overrightarrow{\mathbf{b}_0^{n-1}(t)\mathbf{b}_1^{n-1}(t)}, \quad (13.15)$$

unde $\mathbf{b}_1^{n-1}(t)$, $\mathbf{b}_0^{n-1}(t)$ sunt punctele calculate în penultima etapă (etapa $n-1$) a schemei de Casteljau. Pseudocodul pentru calculul direcției vectorului tangent în $b(t)$:

În Fig.13.16 este animată procedura de generare a unui punct pe o curbă Bézier definită de 4 puncte de control, iar în Fig.13.17 procedura de generare a 21 de puncte pe aceeași curbă.

Pentru a discretiza o curbă Bézier se divizează intervalul $[0, 1]$ prin puncte echidistante. Fixând numărul N de subintervale egale ale intervalului $[0, 1]$, pasul de divizare este $h = 1.0/N$, iar punctele de diviziune sunt $t_j = j * h$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$.

Pentru fiecare parametru t_j , $j = 0, 1, \dots, N$, se apelează schema (funcția) de Casteljau, obținând astfel punctele \mathbf{p}_j , de pe curbă.

```
1: function TangentaBezier( $n, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, t$ )
2:   for  $i = 0 : n$ 
3:      $\mathbf{a}_i \leftarrow \mathbf{b}_i$ ;
4:   end for
5:   for  $r = 1 : n - 1$ 
6:     for  $i = 0 : n - r$ 
7:        $\mathbf{a}_i \leftarrow (1 - t) * \mathbf{a}_i + t * \mathbf{a}_{i+1}$ ;
8:     end for
9:   end for
10:   $v \leftarrow \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$ ;
11:  return  $v$ ;
12: end function
```



Fig.13.16: Ilustrarea animată a etapelor de calcul a punctelor din figura (Fig.13.15)precedentă. Dați 4 click-uri succesive pe butonul  din widget.

Fig.13.17: Ilustrarea animată a punctelor și poligoanelor de control intermediare, calculate de schema de Casteljau pentru a determina 21 de puncte pe curba Bézier din figura precedentă. Dați click pe butonul  al widget-ului.