Cursul 11

Valori şi vectori proprii ai unui operator liniar (matrice pătratică)

11.1 Valori şi vectori proprii ai unui operator liniar (matrice pătratică)

Noţiunea de vector şi valoare proprie pentru o matrice pătratică/operator liniar este una dintre cele mai importante din algebra liniară, constituind baza pentru numeroşi algoritmi de calcul numeric şi cu aplicaţii deosebite în *machine learning* (recunoaşterea feţelor umane, designul sistemelor de recomandare produse şi servicii online, etc), *data science*, problemele de analiză a reţelelor de calculatoare, a reţelelor sociale (Facebook, LinkedIn), respectiv în ierarhizarea paginilor WEB în funcţie de autoritatea sau popularitatea acestora, etc. Pragul de infectare globală a unei reţele de calculatoare, de către un virus, este dat de o valoare proprie particulară a matricii de adiacenţă (conectivitate) a reţelei.

Considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ peste corpul $\mathbb{R}$ O aplicaţie liniară
$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se numeşte operator liniar. L "operează" asupra vectorilor din $\mathbb{R}^n$ şi îi transformă în vectori din acelaşi spaţiu.

Definiţia 11.1.1 *Fie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator liniar. Un* **vector propriu** *al lui L este un vector* **nenul**, *$v \in \mathbb{R}^n$, pentru care există un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât:*

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \tag{11.1}$$

Scalarul λ se numeşte **valoare proprie** *a operatorului liniar, corespunzătoare vectorului propriu v.*

Fixăm o bază $\mathcal{B}$ în $\mathbb{R}^n$ şi notăm cu A matricea operatorului liniar L relativ la această bază. Condiţia pe care trebuie să o satisfacă un vector propriu şi valoarea proprie corespunzătoare se exprimă matricial astfel:

$$Av_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}, \tag{11.2}$$

unde $v_{\mathcal{B}}$ este matricea coloană a coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$, adică:

$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Deoarece matricea unitate I_n, are efect ”neutru” într-o înmulţire, $I_n v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}}$, relaţia (11.2) este echivalentă cu:

$$Av_{\mathcal{B}} = \lambda I_n v_{\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)[v] = 0, \tag{11.4}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} a_{10} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

Datorită şirului de echivalenţe, rezultă că operatorul liniar L admite vectori proprii de coordonate $x_1, x_2, \dots, x_n$, dacă sistemul liniar şi omogen (11.5) admite soluţii nebanale (pentru că un vector propriu este un vector nenul!). Dar un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute admite şi soluţii nebanale, dacă determinantul matricii sistemului este 0, adică

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Acest determinant depinde de necunoscuta $\lambda \in \mathbb{R}$. Dezvoltând:

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{10} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \tag{11.6}$$

obţinem un polinom de grad n în λ, cu coeficienţi în corpul $\mathbb{R}$. Notăm acest polinom cu $P_n(\lambda)$ şi îl numim **polinomul caracteristic** al operatorului liniar L.

Un polinom cu coeficienţi reali poate avea rădăcini reale simple sau multiple sau radăcini complex conjugate simple sau multiple. Rădăcinile polinomului caracteristic formează spectrul operatorului L.

În continuare vom numi valori proprii ale operatorului L, doar rădăcinile reale.

Dacă λ_0 este o rădăcină reală polinomului caracteristic, atunci ea anulează determinatul $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$ şi deci sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{10} - \lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

admite şi soluţii nebanale. O soluţie nebanală este constituită din coordonatele unui vector propriu $v \in \mathbb{R}^n$, corespunzător valorii proprii λ_0: $L(v) = \lambda_0 v$.

Avem astfel următorul **algoritm de calcul (manual) a valorilor şi vectorilor proprii**:

- Se determină matricea A a operatorului relativ la o bază fixată în $\mathbb{R}^n$;
- Se calculează polinomul caracteristic $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
- Se rezolvă ecuaţia $P_n(\lambda) = 0$. Rădăcinile reale sunt valori proprii ai operatorului L.

• Pentru fiecare valoare proprie λ_0 se determină vectorii proprii corespunzători. Şi anume, coordonatele acestor vectori sunt soluţiile nebanale ale sistemului liniar şi omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{10}-\lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

Observaţia 11.1.1 ***Deoarece un operator liniar este reprezentat de o matrice pătratică, iar vectorii proprii de coordonatele lor se obişnuieşte să se formuleze aceeaşi problemă în limbaj de matrici, şi anume*** $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq \theta \in \mathbb{R}^n$ ***este vector propriu al matricii*** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***dacă există un scalar*** $\lambda \in \mathbb{R}$ ***astfel încât*** $Av = \lambda v$***.***

În aplicaţiile pe care le prezentăm folosim limbajul matricial.

Exemplul 1. Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Să determinăm valorile şi vectorii proprii corespunzători.

• Polinomul caracteristic,

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$$

.

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Deci $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$;

• Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \in \mathbb{R}$. Deci matricea A are două valori proprii.

• Să determinăm vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 2$, adică vectorii v cu proprietatea că $Av = 2v$. Coordonatele x_1, x_2 ale lui v sunt soluţii ale sistemului liniar şi omogen:

$$(A - 2I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii acestui sistem este 1. Alegem drept determinant principal pe $\Delta_p = |5|$. x_1 este necunoscută principală şi $x_2 = \alpha$ necunoscută secundară. Rezolvăm ecuaţia $5x_1 = 4\alpha$ şi obţinem familia de soluţii $v = (4\alpha/5, \alpha)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$;

• Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_2)v = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 5 & -5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvând acest sistem obţinem vectorii proprii de forma $v = \beta(1,1)^T$, $\beta \neq 0$.

Exemplul 2. Să se arate că operatorul liniar $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x-y, 2x-y)$ nu admite vectori proprii.

• Determinăm matricea operatorului relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T)$:

$$\begin{array}{rcccl} L(e_1) & = & L(1,0) & = & (1,2) \\ L(e_2) & = & L(0,1) & = & (-1,-1) \end{array}$$

Astfel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

• Polinomul caracteristic este $P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

• Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i \in \mathbb{C}$. Deoarece polinomul caracteristic nu admite rădăcini în corpul $\mathbb{R}$, operatorul liniar nu are valori proprii, deci nici vectori proprii.

Din primul exemplu, observăm că pentru o valoare proprie avem o infinitate de vectori proprii corespunzători şi această particularitate se datorează faptului că mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la care adăugăm vectorul nul este subspaţiul Null al matricii $A - \lambda_0 I_n$. Notăm acest subspaţiu cu $S_{\lambda_0} = Null(A - \lambda_0 I_n)$ şi îl numim **subspaţiul propriu, corespunzător valorii proprii λ_0.**

O problemă importantă în studiul valorilor şi vectorilor proprii ai unui operator liniar $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (de matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) este să deducem dacă în $\mathbb{R}^n$ există sau nu o bază formată din vectori proprii.

Dacă există o bază $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, astfel încât v_i este vector propriu corespunzător valorii λ_i, $i = \overline{1,n}$, atunci din:

$$\begin{array}{rcl} L(v_1) & = & \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ L(v_2) & = & \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0v_n \\ \vdots & & \\ L(v_n & = & \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

rezultă că matricea operatorului L in această bază este $A_{\mathcal{B}'} = [L(v_1)|L(v_2)|\dots|L(v_n)]$, adică:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

o matrice diagonală, cea mai simpla matrice, dupa matricea nulă.

Lucrând cu operatorul exprimat in această bază de vectori proprii, toate calculele sunt mai simple.

În cursul precedent am arătat că matricile $A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{B}'}$, ale unui operator liniar $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ relativ la două baze distincte, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, sunt legate prin relaţia:

$$A_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Relatia dintre cele două matrici $A\mathcal{B}, A_{\mathcal{B}'}$ se numeşte relaţie de similaritate (asemănare).

Definiţia 11.1.2 *Două matrici pătratice cu elemente reale, $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cu proprietatea că există o matrice inversabilă $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel încât $A = TA'T^{-1}$ se numesc matrici similare.*

In cazul în care există o bază formată din vectori proprii ai matricii A, rezultă de mai sus că matricea A este similară cu matricea diagonală, ce are pe diagonala principală valorile proprii:

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

adică

$$A = \underbrace{[v_1|v_2|\dots|v_n]}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}\ diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\ [v_1|v_2|\dots|v_n]^{-1}$$

11.2 Motivaţia studiului existenţei un baze formate din vectori proprii

În numeroşi algoritmi ce implică matrici pătratice intervine adesea calculul puterii, A^m, a unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Atunci când atât dimensiunea n a matricii, cât şi puterea m sunt foarte mari, trebuie găsită o modalitate simplă de calcul a puterii care să evite cumularea erorilor. Una din aceste modalităţi este factorizarea matricii A, adică exprimarea ei, dacă este posibil, ca un produs de matrici ce include şi o matrice diagonală.

Un prim avantaj al similarităţii unei matrici A, cu o matrice diagonală D, constă în modalitatea simplă de calcul a unei puteri A^m a matricii A.

Propoziţia 11.2.1 *Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este similară cu o matrice diagonală $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, adică $A = TDT^{-1}$, atunci $A^m = TD^mT^{-1}$.*

Demonstraţie:

$$A^2 = AA = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) = TD^2T^{-1}$$

Prin inducţie rezultă

$$A^m = TD^mT^{-1}$$

□

Dacă însă D este o matrice diagonală:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{atunci } D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

şi deci:

$$A^m = T \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix} T^{-1}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

În continuare dăm condiţiile care asigură similaritatea unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cu o matrice diagonală. Cum în aceste condiţii intră şi dimensiunea subspaţiilor proprii $S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = \lambda v\} = Null(A - \lambda I_n)$, să precizăm ce se ştie despre această dimensiune.

O valoare proprie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ a matricii A, poate fi rădăcină reală simplă sau multiplă a polinomului caracteristic, adică polinomul caracteristic admite factorizarea:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q_{n-k}(\lambda)$$

unde Q este un polinom nedivizibil cu $(\lambda - \lambda_0)$. Dacă $k = 1$, atunci λ_0 este rădăcină simplă, altfel, este rădăcină multiplă de ordin k.

De exemplu polinomul $P_4(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2$ are rădăcinile simple $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$ şi rădăcina dublă (multiplă de ordin 2), $\lambda_{3,4} = 1$. Relaţia dintre ordinul de multiplicitate al unei valori proprii λ_0 şi dimensiunea subspaţiului său propriu, S_{λ_0}, este următoarea:

Propoziţia 11.2.2 *Dacă λ_0 este o rădăcină reală de ordin k a polinomului caracteristic, atunci dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător, S_{λ_0}, este mai mică cel mult egală cu k:*

$$\mathit{dim}(S_{\lambda_0}) \leq k$$

Demonstraţie: Fără demonstraţie!!! □

Discuţie:

• Dacă valoarea proprie λ_0 este rădăcină simplă a polinomului caracteristic, atunci conform propoziţiei precedente $\dim(S_{\lambda_0}) \leq 1$. Dar dimensiunea mai mică decât 1 este 0, care prin convenţie este dimensiunea subspaţiului vectorial format doar din vectorul nul $\{\theta_n\}$. Cum vectorul nul nu este vector propriu, rezultă că **dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător unei valori proprii simple nu poate fi decât 1**.

• Dacă λ_0 este rădăcină multiplă de ordin k atunci dimensiunea efectivă a subspaţiului propriu corespunzător, S_{λ_0}, se deduce determinând o bază în acest subspaţiu. adică rezolvăm sistemul liniar şi omogen:

$$(A - \lambda_0 I_n)v = 0,$$

ce defineşte ecuaţiile subspaţiului propriu S_{λ_0}, determinăm o bază şi apoi aflăm dimensiunea lui S_{λ_0}.

Exemplul 3. Să se deterrmine valorile proprii, subspaţiile proprii corespunzătoare şi dimensiunea acestora pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valorile sale proprii sunt (verificaţi!) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Fără să determinăm subspaţiul propriu $S_{\lambda=3}$, corespunzător valorii proprii 3, putem afirma că dimensiunea sa este 1, deoarece $\lambda = 3$ este rădăcină simplă a polinomului caracteristic. Rădăcina $\lambda = -1$ fiind rădăcină dublă, dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător este ≤ 2. Pentru a stabili dacă dimensiunea exactă este 1 sau 2, determinăm o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda=-1}$.

Determinăm mai întâi subspaţiul

$$S_{\lambda=-1} = \{v(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -1v\}$$

Coordonatele vectorilor $v \in S_{\lambda=-1}$ sunt soluţii nebanale ale sistemului liniar şi omogen $(A - (-1)I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii sistemului este 1. Alegem determinantul principal $\Delta = |1|$, unde 1 este elementul din poziţia $(1, 1)$. Deci x_1 este necunoscută principală, iar $\alpha := x_2, \beta := x_3$ necunoscute secundare. Rezolvând ecuaţia:

$$x_1 + \alpha + \beta = 0$$

obţinem soluţia:

$$x_1 = -\alpha - \beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$ este:

$$S_{\lambda=-1} = \{v = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)^T = \alpha(-1, 1, 0)^T + \beta(-1, 0, 1)^T, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Acest subspaţiu este generat de vectorii $(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$. Vectorii fiind liniari independenţi, ei formează o bază în acest subspaţiu şi deci subspaţiul are dimensiunea 2.

Exemplul 4. Să se determine subspaţiile proprii şi dimensiunea acestora pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este $P_2(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, deci valorile proprii sunt: $\lambda_{1,2} = 1$. Subspaţiul propriu corespunzător poate avea dimensiunea 1 sau 2. Să determinăm o bază în acest subspaţiu,

$S_{\lambda=1}$ =Null$(A - I_2)$:

$$(A - I_2)v = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_2 este necunoscută principală, iar x_1, notat α, necunoscută secundară. Astfel avem "de rezolvat" ecuaţia: $0\alpha + x_2 = 0$. Rezultă $x_2 = 0$ şi deci:

$$S_{\lambda=1} = \{v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha e_1\}$$

Prin urmare dim$(S_{\lambda=1}) = 1 <$ordinul de multiplicitate al valorii proprii.

Suntem acum în măsură să arătăm că există un context mai general în care se poate construi în $\mathbb{R}^n$ o bază formată din vectori proprii ai unei matrici sau operator liniar.

Propoziţia 11.2.3 *Fie A o matrice pătratică din $\mathbb{R}^{n\times n}$. În $\mathbb{R}^n$ există o bază formată din vectori proprii ai matricei A dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt îndeplinite:*

$1)$ *Polinomul caracteristic $P_n(\lambda)$ are toate cele n rădăcini, reale;*

$2)$ *Dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu, S_λ, coincide cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare λ.*

Demonstraţie: Presupunem că cele două condiţii 1-2 sunt satisfăcute. Deoarece polinomul caracteristic are toate rădăcinile reale rezultă că el se descompune astfel:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},\ \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,s}, \text{şi } k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$$

O rădăcină arbitrară λ_i având ordinul de multiplicitate k_i, $i = \overline{1,s}$, rezultă conform ipotezei 2) că dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător este k_i, adică putem constitui o bază $\mathcal{B}_i = (v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{k_i}^i)$ în S_{λ_i}, $i = \overline{1,s}$. Sistemul de vectori $\mathcal{B}'$ obţinut din reuniunea bazelor $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots \mathcal{B}_s$ din subspaţiile proprii $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, \ldots, S_{\lambda_s}$ conţine $n = k_1 + k_2 + \cdots k_n$ vectori liniar independenţi, deci constituie o bază formată din vectori proprii ai lui A. Sistemul de vectori $\mathcal{B}'$ este liniar independent deoarece vectorii din fiecare bază, $\mathcal{B}_i$, sunt liniar independenţi, si la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenţi, deci reuniunea în ansamblu formează sistem liniar independent.

Reciproca propoziţiei este evidentă, adică dacă există o bază formată din vectori proprii atunci cele două condiţii din enunt sunt satisfacute. □

Exemplul 5. Reluăm cazul matricii A din Exemplul 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valorile sale proprii sunt $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Rezultă că toate trei rădăcinile polinomului caracteristic $P_3(\lambda)$ aparţin lui $\mathbb{R}$. Să determinăm o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda=3}$, rezolvând sistemul $(A - 3I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notând x_3 cu α, rezolvăm sistemul:

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + x_2 & = & -\alpha \\ x_1 - 3x_2 & = & -\alpha \end{array}$$

şi obţinem:

$$S_{\lambda=3} = \{v = \begin{bmatrix} \alpha/2 \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$$

Deci o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda=3}$ este

$$\mathcal{B}_1 = (v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}),$$

adică dimensiunea subspaţiului propriu coincide cu ordinul de multiplicitate al valorii $\lambda = 3$ (ceea ce se ştia apriori, deoarece $\lambda = 3$ este rădăcină simplă).

În 3 am dedus că şi subspaţiul propriu $S_{\lambda=-1}$ are dimensiunea egală cu 2, ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = -1$, şi o bază în $S_{\lambda=-1}$ este:

$$\mathcal{B}_2 = (v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3(-1, 0, 1)^T$$

Reuniunea celor două baze este

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (v_1 = (1, 1, 2)^T, v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3(-1, 0, 1)^T)$$

Astfel matricea A este similară cu matricea diagonală:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

adică

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} D T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

unde

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.3 Proprietăţi ale matricilor similare

Unei matrici pătratice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i se asociază un număr real numit urma matricei şi notat $tr(A)$ (tr vine de la trace=urmă în limba engleză). Urma matricei A este egală cu suma elementelor de pe diagonala principală.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Numele de matrici similare sugerează că au ceva în comun.

Propoziţia 11.3.1 *Două matrici similare au:*
- *acelaşi rang;*
- *acelaşi determinant;*
- *aceeaşi urmă;*
- *acelaşi polinom caracteristic;*
- *aceleaşi valori proprii (dar NU şi vectori proprii).*

Demonstraţie: (**opţional**)

Fie A, A' două matrici similare, adică $A = TA'T^{-1} \Leftrightarrow AT = TA'$. Pentru a arăta că A şi A' au acelaşi rang se arată că $Null(A) = Null(A')$, prin dublă incluziune. Astfel avem $dim(Null(A)) = dim(Null(A')$, adica $n - rang(A) = n - rang(A')$ şi deci $rang(A) = rang(A')$.

$det(A) = det(T)det(A')det(T^{-1}) = det(T)det(A')(1/det(T)) = det(A')$.

Egalitatea $tr(A) = tr(A')$ se verifică calculând conform formulei produsului $TA'T^{-1}$ şi apoi suma elementelor de pe diagonala principală a produsului.

Să demonstrăm că două matrici similare au acelaşi polinom caracteristic.(**obligatoriu**)

Notăm cu $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, respectiv $Q_n(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n)$, polinoamele caracteristice asociate celor două matrici similare, A şi A', unde $A = TA'T^{-1}$. Ţinând seama că $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ şi că $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$, rezultă că:

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(T\,A'T^{-1} - \lambda T\,T^{-1}) = \det(T_(A' - \lambda I_n)T^{-1}) = \\ &\det(T\det(A' - \lambda I_n)\det(T^{-1}) = \det(A' - \lambda I_n) = Q_n(\lambda). \end{aligned}$$

□

Consecinţă,
- în forma utilizată în Computer Science: valorile proprii a două matrici similare coincid.
- în matematică: valorile proprii ale unui operator liniar nu depind de baza fixată în spaţiul pe care acţionează operatorul.

Din proprietăţile matricilor similare extragem următoarele informaţii pentru matricile similare cu o matrice diagonală:

Dacă:

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{D} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

atunci din tr$(A) =$ tr(D) rezultă că:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(D)$$

apoi

$$\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

.

11.4 Aplicaţii ale vectorilor proprii. Calculul coeficientului de popularitate/importanţă a nodurilor unei reţele

Ştiinta reţelelor (*network science*) este un domeniu activ în CS, ce dezvoltă tehnici de modelare, comparare şi sumarizare a volumului imens de date, ce descriu interacţiunile complexe dintre entitaţi conectate fizic sau virtual.

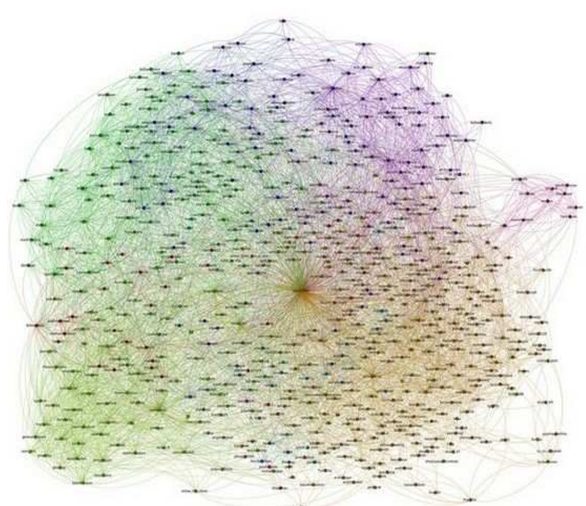


Fig.11.1: Reţea (statică) generată de Gephi `http://gephi.org`

Aici este o reţeaua interactivă a bolilor umane. Nodurile sunt bolile. Exista link între două noduri (boli) dacă existe procese intra-celulare ce favorizează ambele boli:
`https://plot.ly/~empet/12908/diseasome-network/`

In analiza reţelelor sociale (Facebook, Google +, Twitter) sau de business, a reţelei internet, a reţelelor colaborative profesionale (Linkedin), în ierarhizarea paginilor WEB, etc sunt implicate valorile proprii şi vectorii proprii ale/ai matricii de adiacenţă grafului ce defineşte reţeaua sau a unei matrici dedusă din aceasta.

O problemă ce se abordează în studiul şi analiza reţelelor este aceea a stabilirii nivelului de importanţă/popularitate/autoritate a nodurilor sale. Una din metodele care a dat deja rezultate deosebite în stabilirea importanţei/popularităţii nodurilor şi ranking-ul lor în funcţie de indicele/coeficientul de importanţă, se bazează pe analiza structurii linkurilor.

Scopul unei astfel de analize este de a identifica în cazul reţelei WWW care sunt paginile care au cel mai ridicat indice de importantă (popularitate, autoritate), iar în cazul reţelelor sociale, profesionale, pentru a determina membrii sau ”actorii” importanţi ai unei comunităţi.

Modelul matematic al unei reţele este un graf.

Un graf, G, este definit de o pereche $G = (V, L)$, unde $V = \{1, 2, \dots, m\}$ este mulţimea nodurilor, iar L mulţimea arcelor (linkurilor, conexiunilor dintre noduri).

Un graf poate fi orientat sau nu, adică se indică direcţia de conexiune sau nu. Reţeaua Facebook, de exemplu, este un graf neorientat, in timp ce reţeaua WEB este reprezentată de un graf orientat–nodurile sunt paginile WEB şi conexiunile sunt link-urile dintr-o pagină i spre o pagină j.

Matricea de adiacenţă/conectivitate a grafului G este matricea $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, m}$, unde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă nodurile i şi j sunt conectate printr-un arc direct} \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Matricea de adiacenţă a unui graf neorientat este simetrică, adică $a_{ij} = a_{ji}$, oricare ar fi $i, j = \overline{1, m}$, în timp ce matricea de adiacenţă a unui graf orientat nu este simetrică, pentru poate exista link de la i spre j dar nu şi de la j spre i.

Pentru a capta şi interacţiuni indirecte între noduri se defineste noţiunea de drum intre doua noduri i, j: un drum este o succesiune de linkuri(arce) (i_1, i_2), (i_2, i_3), $\dots$ (i_{k-1}, i_k) (orientate sau nu dupa cum graful model este orientat sau nu), astfel incat $i_1 = i$ şi $i_k = j$. Un ciclu este un drum pentru care nodul iniţial şi final coincid.

Un graf neorientat/orientat este *conex*, dacă oricare ar fi i şi j, două noduri distincte, există un drum de arce între i si j.

Nivelul de importanţă al unui i nod într-o reţea modelată de un graf conex şi neorientat este un numar pozitiv, $x_i > 0$, definit ca media ponderată a coeficienţilor de importanţă a nodurilor $j_1, j_2, \dots, j_k$, cu care nodul i este conectat prin arc direct (drum de lungime 1):

$$x_i = \frac{1}{\lambda}(x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_k}), \quad \lambda > 0 \tag{11.9}$$

Intuitiv această relaţie ilustrează zicala românească, ”spune-mi ce prieteni ai ca sa-ti spun cine eşti”.

Parametrul λ determină cât de multă popularitate partajează nodurile între ele, prin conexiuni. Dacă λ este mic, atunci nodurile cu care i este conectat transmit un coeficient mai mare de influenţă/popularitate nodului i, iar dacă λ creşte, atunci influenţa moştenită de nodul i de la nodurile cu care este conectat direct scade.

Remarcăm că relaţia (11.9) se poate rescrie astfel:

$$x_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \tag{11.10}$$

deoarece elementele matricii de adiacenţă, a_{ij}, din linia i, sunt nenule doar pentru $j = j_1, j_2, \dots, j_k$ (doar $a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots a_{ij_k}$ sunt egale cu 1, restul a_{ij} sunt zero), adică doar pentru nodurile j cu care i este conectat direct.

Ne întrebăm dacă cunoscând doar matricea de adiacenţă(conectivitate) a unei reţele putem deduce indicatorii de importanţă/popularitate a nodurilor sale. Răspunsul este afirmativ, deoarece relaţia (11.10) se mai poate scrie:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \lambda x_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{11.11}$$

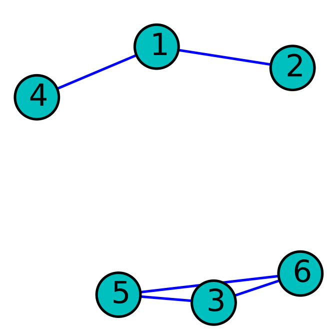
şi notând cu x vectorul din $\mathbb{R}^m$ ce are drept coordonate, indicatorii de importanţă a nodurilor $1, 2, \dots, m$, adică $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, atunci relaţia (11.11) este echivalentă cu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, adică λ este valoare proprie a matricii de adiacenţă, corespunzătoare vectorului propriu al indicatorilor de importanţă.

Problema care se ridică imediat, ştiind că o matrice poate să nu aibă nici o rădăcină reală a polinomului caracteristic sau poate să aibă mai multe rădăcini reale (deci valori proprii), este, care valoare proprie şi vector propriu corespunzător o folosim în definiţia indicatorului de importanţă a nodurilor.

Faptul că matricea de adiacenţă a unui graf este o matrice nenegativă, adică are elementele $a_{ij} \geq 0$, oricare ar fi i şi j, ajută foarte mult în a găsi un răspuns la această întrebare şi deci pentru a putea determina coeficienţii de importanţă a nodurilor.

Dacă o matrice A este nenegativă, atunci indicăm (notăm) această proprietate prin $A \geq 0$.

Pentru a deduce modalitatea de calcul a coeficienţilor de popularite a nodurilor, caracterizăm mai întâi matricea de adiacenţa a unui graf conex. Pentru aceasta observăm că dacă avem graful neconex din figura:



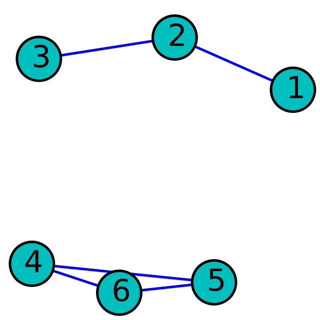
Matricea lui de adiacenţă este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reetichetând nodurile, adică aplicând permutarea:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

etichetelor nodurilor $1, 2, 3, 4, 5, 6$, avem o reţea cu aceeaşi structură a linkurilor:



dar cu matricea de adiacenţă:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

În această matrice este imediat evident, din faptul că elementele de intersecţie a liniilor $4, 5, 6$ cu coloanele $1, 2, 3$ sunt toate zero, ca graful este neconex, pentru că grupul de noduri $4, 5, 6$ nu comunică cu grupul $1, 2, 3$.

Relaţia dintre cele două matrici de adiacenţă este:

$$A' = P_\pi A P_\pi^T,$$

unde $P_\pi = (p_{ij})$ este matricea permutare definită de π, $p_{ij} = \delta_{\pi_i j}$.

În general produsul la stânga cu o matrice permutare, P_π, permută corespunzător liniile matricii A, iar produsul la dreapta cu P_π^T, permuta la fel şi coloanele. Astfel $A' = P_\pi A P_\pi^T$ este matricea de adiacentă a grafului care are nodurile reetichetate. Adica in loc de etichetele $(1, 2, \ldots, m)$ se folosesc etichetele $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ şi există arc între nodul π_i şi π_j, dacă şi numai dacă există arc între i şi j în graful iniţial. Deoarece $P_\pi^T = P_\pi^{-1}$ (vezi cursul 1), rezultă că relaţia:

$$A' = P_\pi A P_\pi^T$$

indică că cele două matrici de adiacenţa sunt similare (deci au aceleaşi valori proprii, dar nu şi vectori proprii; deduceţi cum dintr-un vector propriu v a lui A obţin un vector propriu al lui A').

După aceste precizări putem caracteriza matricile de adiacenţă a grafurilor conexe:

Definiţia 11.4.1 *Matricea de adiacenţă a unui graf se numeşte matrice ireductibilă dacă nu există nici o permutare π a lui $(1, 2, \ldots, m)$ astfel încât:*

$$P_\pi A P_\pi^T = \begin{pmatrix} X & Z \\ O & Y \end{pmatrix},$$

unde $P_\pi = (p_{ij})$ este matricea permutare definită de π, iar X, Y sunt matrici pătratice.

Cu alte cuvinte o matrice de adiacenţa este ireductibilă dacă nu este similară cu o matrice de forma:

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ O & Y \end{bmatrix},$$

adică printr-o reindexare(reetichetare) a nodurilor nu există o submulţime de noduri care să nu comunice cu restul printr-un drum de noduri.

Matricea de adiacenţă a unui graf conex este evident ireductibilă, pentru că un astfel de graf nu conţine niciun grupu de noduri izolate (neconectate cu nodurile din complementul grupului).par

În continuare evidentiem implicaţiile proprietăţii de nenegativitate şi ireductibilitate a unei matrici A asupra valorilor şi vectorilor proprii.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ toate rădăcinile (reale şi complex conjugate) polinomului caracteristic, $P_m(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$.

Dacă $\lambda, \overline{\lambda}$ sunt două rădăcini complex conjugate, $a \pm ib$, atunci lor li se asociază două puncte in plan, de coordonate $P(a, b)$ şi $P'(a, -b)$, ce sunt evident simetrice faţa de Ox. Ar trebui să ştiţi de la liceu că modulul unui număr complex $\lambda = a + ib$ este $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi că acest modul reprezintă distanţa de la punctul $P(a, b)$ la origine.

Rădăcinile reale ale polinomului caracteristic sunt de forma $a + i0$, deci ele sunt reprezentate prin puncte de pe axa Ox, de coordonate $(a, 0)$.

Dacă λ_0 este rădăcina polinomului caracteristic a matricii nenegative A, ce are cea mai mare valoare absolută, atunci restul rădăcinilor au valoarea absolută $|\lambda| \leq |\lambda_0$, adică punctele din plan, asociate, sunt incluse într-un disc cu centrul în origine şi de rază $R = |\lambda_0|$.

Mai subliniem că:

Orice matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ are acelaşi polinom caracteristic, deci aceleaşi valori proprii ca şi matricea A^T.

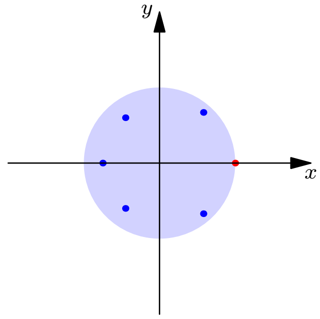


Fig.11.2: Poziţia rădăcinilor polinomului caracteristic de grad 6, în planul complex, pentru o matrice nenegativă $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$.

Într-adevăr, notând cu Q polinomul caracteristic al matricii A^T şi cu P polinomul matricii A, avem:

$$Q_n(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(A - \lambda I_n)^T = \det(A - \lambda I_n) = P_n(\lambda)$$

Ultima egalitate are loc deoarece în general avem $\det(M^T) = \det(M)$

Un rezultat remarcabil relativ la matricile nenegative ireductibile este **Teorema lui Perron–Frobenius**:

Teorema 11.4.1 *1) Dacă matricea A este o matrice nenegativă şi ireductibilă, atunci printre rădăcinile polinomului său caracteristic există una reală, strict pozitivă şi dominantă. Aceasta este deci o valoare proprie, λ_1, a matricii A şi este dominantă, în sensul că orice altă rădăcină, λ, a polinomului său caracteristic are modulul mai mic sau egal cu λ_1, $|\lambda| \leq \lambda_1$.*

2) Valoarea proprie dominantă este simplă şi deci subspaţiul propriu corespunzător are dimensiunea 1. Acest subspaţiu este generat de un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ având toate coordonatele strict pozitive, $x_i > 0$, $i = \overline{1, m}$. Cu excepţia vectorilor coliniari şi de acelaşi sens cu x, αx, $\alpha > 0$, nici un alt vector propriu al matricii A nu mai are toate coordonatele strict pozitive.

3) Matricea transpusă, A^T, având acelaşi polinom caracteristic are aceeaşi valoare proprie, pozitivă şi dominantă, simplă şi subspaţiul propriu corespunzător este la fel generat de un vector de coordonate strict pozitive.

În figura 11.2 ilustrăm poziţia rădăcinilor unui polinom caracteristic asociat unei matrici nenegative şi ireductibile A. Punctul roşu corespunde valorii proprii dominante a matricii A:

Exemplul 6. Fie matricea nenegativă (evident A este arbitrară nu este matrice de adiacenţa):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 21 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ 35 & 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Rădăcinile polinomului său caracteristic sunt:

$$-9.44, \quad 10.34 + 0.57i, \quad 10.34 - 0.57i, \quad 27.76$$

27.76 este valoarea proprie dominantă, deoarece $|-9.44| < 27.76$ şi $|10.34 \pm 0.57i| = 10.35$.

Matricea de adiacenţă, A, a unui graf conex fiind nenegativă şi ireductibilă i se poate aplica Teorema lui Perron–Frobenius: ea are o valoare proprie dominantă, strict pozitivă şi un vector propriu de coordonate strict pozitive. Astfel pentru a defini coeficientul de popularitate al nodurilor se ia drept valoare proprie din relaţia (11.11) valoarea λ_1, adică valoarea proprie dominantă, iar ca vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, un vector propriu corespunzător lui λ_1, ce are toate coordonatele strict pozitive.

Pentru a avea coeficientul de popularitate al fiecărui nod din acelaşi interval normalizăm vectorul x adică îl împărţim la suma coordonatelor si obţinem vectorul $r = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, numit vectorul rating, sau vectorul Perron, care este de asemenea un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 (pentru că dacă $Ax = \lambda_1 x$, atunci şi $A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$. La noi $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m x_i}$.

Astfel coeficientul de importanţă a nodului i sau ratingul nodului i este $r_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$ şi suma tutor ratingurilor este 1, deci indicatorul de importanţă se poate raporta şi procentual. Adică dacă $r_i = 0.87$, atunci printre toate nodurile reţelei, nodul i are o popularitate de 87%.

Exemplul 7. Considerăm o reţea socială formată din 6 persoane, codificate $0, 1, 2, 3, 4, 5$, şi ilustrată în graful neorientat din Fig.11.3: Matricea de conectivitate/adiacenţă a reţelei este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii ale matricii A, calculate numeric sunt:

$$2.796, 0.8531, -1.195, -2.454, 0, 0$$

Deci valoarea proprie dominantă este 2.796, iar un vector propriu corespunzător, de coordonate strict pozitive este:

$$x = (0.35349809, 0.33313061, 0.52899452, 0.45954077, 0.40258437, 0.33313061)$$

Suma coordonatelor lui x este 2.410, iar vectorul rating este:

$$r = x/2.41 = (0.14662623, 0.13817807, 0.21941978, 0.1906113, 0.16698655, 0.13817807)$$

Reordonând descrescător ratingurile nodurilor avem următorul ranking al acestora:

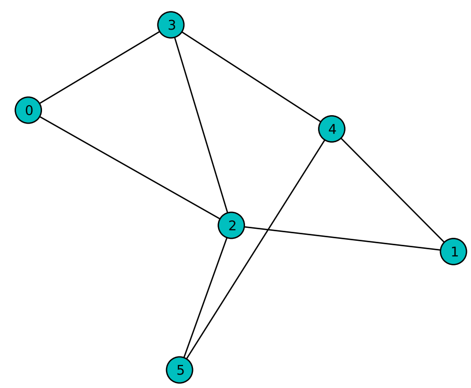


Fig.11.3: Graf neorientat.

Rating	0.21941978	0.1906113	0.16698655	0.14662623	0.13817807	0.13817807
Nod	2	3	4	0	5	1

Observăm că cea mai mare popularitate o are nodul 2 şi anume, indicele său de importanţă este 0.21941978. Se vede şi din graf că nodul 2 are cele mai multe conexiuni de un pas(arc).

Să considerăm acum o reţea conexă în care conexiunile dintre noduri sunt orientate. O astfel de reţea este reţeaua WWW. Nodurile sunt paginile WEB, iar arcele orientate dintre acestea sunt hyperlinkurile. În figura 11.4 avem o reţea formată din 6 noduri şi linkuri între ele (sensul linkului nu este ilustrat printr-o săgeată, ci printr-un segment pe arc, in format bold, modalitate specifică de vizualizarea grafurilor orientate în `networkx` (`http://networkx.lanl.gov`), un pachet în `Python`).

Matricea de adiacenţă a grafului, numită matricea hyperlink este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rădăcinile polinomului său caracteristic ordonate, în ordinea descrescătoare a valorii absolute (modulului) sunt:

$$2.481, 0.688, 0, -1, -1, -1.170$$

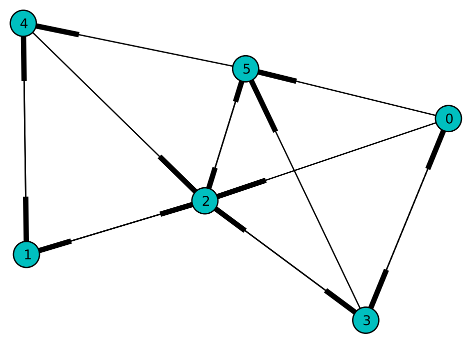


Fig.11.4: Graf orientat ce ilustrează linkurile dintre pagini într-o reţea WEB.

Valoarea proprie dominantă este $\lambda_1 = 2.481$, vectorul propriu corespunzător:

$$x = (0.50958306, 0.30420493, 0.45058661, 0.50958306, 0.30420493, 0.30420493)^T$$

iar vectorul rating al nodurilor:

$$r = x/2.382367 = (0.21389776, 0.12769018, 0.18913396, 0.21389776, 0.12769018, 0.12769018)^T$$

Deci cel mai mare rating are nodul 0 şi 3 (la egalitate).

Popularitatea paginii 0, de exemplu, a fost calculată conform relaţiei (11.9) adică ţinând seama de numărul outlink-urilor ce pornesc din ea (adică în funcţie de câte conexiuni, prieteni, ”declară” pagina 0 că are).

Larry Page şi Serghei Brin, fondatorii Google, au realizat că indicatorul de popularitate calculat în acest fel poate fi influenţat de proprietarii paginilor WEB prin adăugarea a cât mai multe outlinkuri. De aceea au modificat regula de calcul a popularităţii, considerând că ratingul (popularitatea) paginii j, x_j, trebuie să fie dat de media ponderată a popularităţii paginilor ce au linkuri spre pagina j (dacă o persoana importantă te indică, spune că îi eşti prieten, înseamnă că eşti tu important!!!):

$$x_j = \frac{1}{\lambda}(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_\ell}), \tag{11.12}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ sunt paginile ce au linkuri către pagina j, adică $a_{ij} = 1$, pentru $i = i_1, i_2, \ldots, i_\ell$.

Astfel relaţia (11.12) se scrie cu ajutorul matricii de adiacenţă astfel:

$$x_j = \frac{1}{\lambda}(a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{nj}x_m) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}x_k, \quad j = \overline{1,m} \tag{11.13}$$

Relaţiile (11.13) sunt echivalente cu $A^T x = \lambda x$.

În acest caz vectorul indicatorilor de popularitate, nenormalizat, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, este un vector propriu al matricii hyperlink transpusă, A^T.

Dar matricea A^T este de asemenea o matrice nenegativă şi ireductibilă şi are acelaşi polinom caracteristic, $Q_m(\lambda)$, ca şi matricea A: Vectorii proprii însă diferă.

Prin urmare pentru aflarea indicatorilor de popularitate pe baza inlink-urilor, nu a outlink-urilor, se alege λ în (11.13) ca fiind valoarea proprie dominantă a polinomului caracteristic al matricii A^T. Se alege un vector propriu pozitiv, x, corespunzător acestei valori şi atunci vectorul rating este vectorul Perron, $r = x/\sum_{i=1}^m x_i$.

În cazul reţelei din figură, matricea hyperlink transpusă are valoarea proprie dominantă $\lambda_1 = 2.4811943$, Un vector propriu pozitiv, corespunzător este

$$x = (0.12600672, 0.39771818, 0.64973161, 0.31264715, 0.33708446, 0.4386538)^T$$

Suma coordonatelor lui x este $s = 2.26184$, iar vectorul rating al nodurilor este:

$$r = x/s = (0.05570978, 0.17583818, 0.28725774, 0.13822679, 0.14903095, 0.19393657)^T$$

În acest fel pagina cu cea mai mare popularitate este pagina pagina 2, de indice de populariate $r_2 = 0.28725774$, către ea existând 5 linkuri, din paginile $0, 1, 3, 4, 5$.

În cazul real al reţelei WEB, graful asociat nu este conex. În semestrul 2 vom prezenta transformările la care este supusă matricea hyperlink pentru a obţine o matrice ireductibilă şi în plus să nu conţină cicluri, adică un surfer WEB să nu fie obligat să parcurgă din link în link un circuit inchis (un ciclu infinit).

În concluzie pentru a determina indicele de popularitate al fiecărui nod dintr-o reţea de m noduri, se procedează astfel:

1. Dacă reţeaua este neorientată, se asociază matricea de adiacenţa, A;

2. se calculează rădăcinile polinomului său caracteristic şi se identifică rădăcina reală pozitivă, dominantă.

3. se calculează un vector propriu corespunzător $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ (acesta are fie toate coordonatele strict pozitive fie toate strict negative (dacă sunt toate strict negative, se ia -x şi atunci sunt toate strict pozitive).

4 .se calculează suma s a coordonatelor vectorului x şi apoi vectorul rating $r = x/s$, ale cărui coordonate r_i, reprezintă indicele de popularitate al nodului i, $i = \overline{1,m}$.

5. Se ordonează descrescător $r_1, r_2, \dots, r_m$ şi astfel avem ierarhizarea nodurilor în funcţie de popularitatea lor.

• Dacă reţeaua are linkuri orientate, se asociază matricea de conectivitate A, se calculează A^T şi apoi pentru această matrice se parcurg etapele **2-5** de mai sus.

Metode de generare a grafului asociat unei reţele şi calculul valorii dominante şi al vectorului rating sunt prezentate în `Jupyter Notebook`-ul inclus