Cursul 2

Sisteme de ecuaţii liniare. Reducerea unei matrici la forma scară pe linii

Metodele de analiză a compatibilităţii şi rezolvare a sistemelor algebrice liniare, compatibile, studiate la liceu, se pretează pentru calcul ”manual” doar în cazurile în care numărul de ecuaţii şi necunoscute este cel mult 4. În acest curs prezentăm o metodă adecvată de studiu a sistemelor algebrice liniare cu număr mare de ecuaţii şi necunoscute, care pe de o parte are avantajul că implică calcule simple, uşor implementabile, iar pe de altă parte, în ultima etapă a ei reflectă compatibilitatea/incompatibilitatea sistemului şi dă şi soluţia în caz de compatibilitate. Metoda pe care o prezentăm se numeşte **metoda eliminării a lui Gauss** şi a fost inspirată de faptul că cel mai simplu se rezolvă un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute, compatibil determinat, de formă triunghiulară, adică de forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Matricea unui astfel de sistem este o *matrice superior triunghiulară* (are toate elementele de sub diagonala principală, egale cu 0):

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

şi determinantul ei este $\Delta = \det(U) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Ipoteza ca sistemul este compatibil determinat este echivalentă cu $\Delta \neq 0$, adică toate elementele de pe diagonala principală sunt nenule: $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Acest tip de sistem se rezolvă prin *metoda substituţiei inverse*, adică se rezolvă succesiv ecuaţiile $n, n-1, \dots, 2, 1$. Din ultima ecuaţie se calculează $x_n = b_n/a_{nn}$, care se introduce în ecuaţia $n-1$, ce se rezolvă apoi în raport cu x_{n-1}, şi aşa mai departe, până ajungem la rezolvarea ecuaţiei 1. Avem deci următorul:

Algoritm de rezolvare a unui sistem în forma triunghiulară

• calculează $x_n = b_n/a_{nn}$;
• pentru i descrescând de la $n-1$ la 1, calculează:

$$x_i = (b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - a_{in}x_n)/a_{ii}$$

În cele ce urmează vom arăta că orice sistem de m ecuaţii cu n necunoscute, se poate reduce printr-un şir de transformări succesive, numite *transformări elementare pe linie*, la o formă cvasitriunghiulară numită **forma scară pe linii** (*row echelon form* în l. engleză).

Definiţia 2.0.1 *O matrice $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ are forma scară pe linii dacă verifică următoarele două proprietăţi:*

1. *Dacă o linie $S_{i,:}$ are toate elementele 0 atunci toate liniile de sub aceasta au elementele zero: adica $S[k,:] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $k = i+1, i+2, \dots m$;*
2. *Dacă primul element nenul dintr-o linie $S[i,:]$ este s_{ij}, atunci în coloanele $1, 2, \dots, j$, toate elementele din liniile $i+1, i+2, \dots, m$ (deci de sub linia i) sunt nule.*

Matricea următoare ilustrează particularităţile din definiţie. Elementele notate prin $\bigstar$ simbolizează elemente nenule. Elementele $*$ pot fi nule sau nenule.

$$S = \begin{bmatrix} \bigstar & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigstar & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow S[i,:] \\ \\ \\ \end{array} \tag{2.3}$$

Un caz particular de matrice în forma scară pe linie este matricea superior triunghiulară:

$$U = \begin{bmatrix} \bigstar & * & \dots & * & * \\ 0 & \bigstar & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bigstar & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bigstar \end{bmatrix}$$

Următoarele matrici au forma scară pe linie:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Definiţia 2.0.2 *Primul element nenul de pe o linie a unei matrici în forma scară pe linie se numeşte* **pivot**.

În matricea simbolică din (2.3) pivotul este notat ★.

2.1 Reducerea unei matrici la forma scară pe linii

În acest continuare prezentăm o modalitate de a transforma un sistem de m ecuaţii liniare, cu n necunoscute, de forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

într-un sistem mai simplu, care are aceeaşi mulţime a soluţiilor ca sistemul iniţial, dar datorită simplităţii putem să decidem mai rapid dacă este compatibil sau nu şi dacă da să determinăm mulţimea soluţiilor.

Pentru a defini transformările pe care le aplicăm unui sistem, reamintim câteva particularităţi ale sistemelor.

Definiţia 2.1.1 *Două sisteme de m ecuaţii liniare cu n necunoscute se numesc echivalente dacă mulţimea soluţiilor este aceeaşi pentru ambele sisteme.*

Să evidenţiem în continuare ce transformări pot fi aplicate ecuaţiilor sistemului (2.4), care să conducă la un sistem ce are matricea în forma scară şi în plus este echivalent cu sistemul iniţial. Pentru aceasta notăm cu Ec_i ecuaţia a i-a din sistem, i.e.:

$$\mathrm{Ec}_i: \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Suma a două ecuaţii distincte Ec_i, Ec_j revine la a aduna membru cu membru (i.e. membrul stâng al uneia la membrul stâng al celei de-a doua şi la fel pentru membrii drepţi). Produsul cu un număr real nenul al ecuaţiei Ec_i, $\alpha\mathrm{Ec}_i$, revine la a înmulţi fiecare membru al ecuaţiei cu $\alpha \neq 0$.

Următoarele trei transformări aplicate asupra unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute simbolizat prin ecuaţiile sale:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathrm{Ec}_1 \\ \mathrm{Ec}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Ec}_m \end{cases}$$

conduc la un sistem $\mathcal{S}'$ echivalent cu acesta:

1. Schimbarea ecuaţiilor i şi j între ele, $Ec_i \leftrightarrow E_j$.

2. Produsul unei ecuaţii cu un număr nenul, $\alpha \neq 0$, $\alpha Ec_i \to Ec_i$:

3. Adunarea la ecuaţia j a ecuaţiei i înmulţită cu un număr nenul: $\alpha Ec_i + Ec_j \to Ec_j$ $(i \neq j)$:

Cele trei transformări elementare aplicate ecuaţiilor arbitrare din sistem:

$$Ec_i : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$Ec_j : \quad a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$$

practic acţionează identic asupra liniilor i şi j din matricea prelungită a sistemului, $\overline{A} = [A|b]$. Notăm cu L_i o linie a acestei matrici, $i = \overline{1, m}$. Astfel avem următoarele transformări elementare pe linie asupra matricii prelungite $\overline{A}$ şi implicit asupra matricii A, care nu afectează mulţimea soluţiilor sistemului căruia i s-au asociat aceste matrici:

1: Schimbarea a două linii între ele $L_i \leftrightarrow L_j$;

2. Înmulţirea unie linii L_i cu un număr real nenul, α ;

3. Adunarea unei linii înmulţită cu un număr nenul la altă linie: $\alpha L_i + L_j \to L_j$.

Aceste trei tipuri de transformări ale liniilor unei matrici se numesc **transformări elementare pe linii**. Aplicând succesiv astfel de transformări, un sistem de m ecuaţii liniare, cu n necunoscute, poate fi adus la forma scară, adică matricea sistemului şi matricea prelungită este transformată într-o matrice scară.

Ţinând seama de definiţia matricei scară, alegem succesiunea de transformări elementare pe linii încât progresiv să construim forma scară a matricii prelungite. Ilustăm metoda prin exemplul următor:

Exemplul 1. Fie sistemul de 4 ecuaţii cu 5 necunoscute, dat în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Matricea sa prelungită este:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 9\\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 & 9\end{array}\right]$$

Elementul $\overline{A}_{11}=1\neq 0$, deci îl alegem ca pivot pentru linia 1 şi apoi prin transformări elementare pe linie formăm zerouri sub pivot. Aplicând succesiv transformările $-2L_1+L_2\to L_2$, $-L_1+L_3\to L_3$ şi $-2L_1+L_4\to L_4$ obţinem:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1\end{array}\right]$$

Să alegem pivotul pentru linia 2 (primul element nenul de pe linia 2 din viitoarea formă scară). Observăm că în poziţia $(2,2)$ avem 0. Nici liniile i de sub linia 2 nu au în poziţia $(i,2)$ element nenul, ca să efectuăm o schimbare de linii $L_2\leftrightarrow L_i$. Prin urmare alegem pivotul ca fiind din poziţia $(2,3)$. Efectuăm apoi transformările elementare $L_2+L_3\to L_3$, $-1L_2+L4\to L_4$ pentru a anula toţi coeficienţii de sub elementul din poziţia $(2,3)$, adică coeficienţii din poziţiile $(i,3)$, $i>2$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right]$$

Deoarece linia 3 conţine doar elemente nule, schimbând linia 3 cu linia 4 obţinem o matrice care este deja în forma scară:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Observaţia 2.1.1 *Observăm că în urma şirului de transformări am obţinut simultan forma scară a matricii A a sistemului şi a matricii prelungite.*

Şirul de transformări elementare pe linii a transformat sistemul iniţial $Ax=b$ intr-unul echivalent $S_Ax=u$ (termenii liberi sunt elementele de pe ultima coloană a matricii $S_{\overline{A}}$, $u_1=5, u_2=-2, u_3=1$). Mai precis sistemul $S_Ax=u$ are scrierea matricială:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\\ -4\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$

sau efectuând înmulţirile avem sistemul:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = & 5 \\ -x_3 - x_4 - x_5 & = & -2 \\ x_5 & = & 1 \end{array}$$

În loc să analizăm compatibilitatea sistemului "complicat" $Ax = b$, analizăm acum compatibilitatea sistemului echivalent $S_A x = u$, unde

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pentru a folosi forma scară a matricii prelungite la analiza compatibilităţii/incompatibilităţii sistemului iniţial, reamintim că:

Rangul se obţine "teoretic" (aşa aţi învăţat la liceu) calculând determinaţi de ordin maxim posibil $p = \min(m, n)$. Dacă cel puţin unul este diferit de zero, rangul este p. Dacă toţi sunt zero, trecem la determinanţi de ordin p-1 etc şi rangul este cel mai mare ordin de determinant nenul. Să argumentăm că prin transformari elementare pe linie, rangul matricilor intermediare, nu se schimbă.

Dacă liniilor unui determinant li se aplică o transformare de tip $\mathbf{1}$, adică dacă într-un determinant D se interschimbă două linii între ele $L_i \leftrightarrow L_j$, atunci se obţine $-D$ (determinantul schimbă semnul);

• dacă se aplică o transformare de tip $\mathbf{2}$, adică $\alpha L_i \to L_i$, $\alpha \neq 0$, atunci determinantul D se înmulţeste cu α, deci în loc de D obţinem αD.

• dacă se aplică o transformare de tip $\mathbf{3}$, adică dacă linia i a determinantului D se înmulţeşte cu $\alpha \neq 0$ şi se adună la linia L_j, $\alpha L_i + L_j \to L_j$, atunci valoarea determinantului nu se schimbă.

Astfel rezultă că cele trei tipuri de transformări elementare pe linie, $(\mathbf{1}-\mathbf{3})$, aplicate unui determinant transformă determinanţi nenuli în determinanţi nenuli şi determinant 0 în determinant zero. Drept urmare avem următoarea:

Proprietate. *Cele trei tipuri de transformări elementare pe linie* $(\mathbf{1}-\mathbf{3})$ *aplicate unei matrici* A *nu modifică rangul matricii şi astfel rangul matricii* S_A *coincide cu rangul matricii* A.

Astfel în loc să aplicăm teorema Kronecker Capelli sistemului $Ax = b$, o aplicăm sistemului $S_A x = u$, adică comparăm rangul matricii S_A cu rangul matricii $S_{\overline{A}}$, a formei scară a matricii prelungite. Să arătăm acum că:

Propoziţia 2.1.1 *Rangul unei matrici în forma scară pe linii este egal cu numărul de pivoţi.*

Demonstraţie: Într-adevăr, dacă forma scară, S_A, are r pivoţi atunci aceştia sunt plasaţi în liniile $1, 2, \dots, r$ şi coloanele $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. Rezultă astfel că determinantul unei matrici de ordin r, obţinută din elementele de intersecţie a liniilor $1, 2, \ldots, r$ cu coloanele $j_1, j_2, \ldots, j_r$, din matricea S_A este diferit de zero:

$$\begin{vmatrix} s_{1j_1} & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} \\ 0 & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{rj_r} \end{vmatrix} = s_{1j_1} s_{2j_2} \cdots s_{rj_r} \neq 0$$

deoarece pivoţii $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots s_{rj_r}$ sunt nenuli. Cum orice determinant de ordin mai mare decât r constituit din linii şi coloane ale matricii S_A este zero, pentru că din definiţia formei scară ştim că linia r este ultima linie ce nu are toate elementele zero, restul liniilor $r+1, r+2, \ldots, m$ fiind toate zero, rezultă că rangul matricii S_A este egal cu r, adică cu numărul de pivoţi. □

În cazul concret al formei scară a matricii A din exemplul precedent:

$$S_A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivoţii sunt plasaţi în liniile $1, 2, 3$ şi respectiv coloanele $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5$. Astfel minorul constituit din elementele de intersecţie a liniilor $1, 2, 3$ cu coloanele $1, 3, 5$ are determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6 \neq 0$$

Deci rangul matricii S_A este 3 şi la fel şi rangul matricii iniţiale, A. Analog rangul matricii $S_{\overline{A}}$ este 3, deci şi al matricii $\overline{A}$.

Conform teoremei lui Kronecker Capelli, sistemul $S_A x = u$ este compatibil şi pentru că este echivalent cu sistemul $Ax = b$ şi rangul nu s-a schimbat prin transformări elementare pe linii, rezultă că şi sistemul iniţial $Ax = b$ este compatibil. Dar în loc să rezolvăm sistemul $Ax = b$, rezolvăm sistemul ”mai simplu” $S_A x = u$.

Matricea sistemului (1) are trei pivoţi, deci rangul este 3. Un determinant principal (determinant de ordinul rangului) al sistemului (1) este determinantul matricii de intersecţie a liniilor $1, 2, 3$ cu coloanele $1, 3, 5$ în care se găsesc pivoţii

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \tag{2.5}$$

Cu această alegere a determinantului principal, x_1, x_3, x_5 sunt necunoscute principale, iar $\alpha := x_2, \beta = x_4$ sunt necunoscute secundare.

Rezolvând sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\alpha + x_3 + 3\beta + 3x_5 &= 5 \\ -x_3 - \beta - x_5 &= -2 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

în raport cu necunoscutele principale avem: $x_5 = 1$, $x_3 = 2 - \beta - 1 = 1 - \beta$, $x_1 = 5 - 2\alpha - (1 - \beta) - 3\beta - 3 = 1 - 2\alpha - 2\beta$. Deci mulţimea soluţiilor este:

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - 2\alpha - 2\beta, \alpha, 1 - \beta, \beta, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

În conluzie, pentru a decide natura soluţiilor unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute, care în formă matricială este de forma $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sau detaliat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

se parcurg următoarele etape:

• i se asociază sistemului matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2.7}$$

• prin transformări elementare pe linie se aduce matricea $\overline{A}$, deci şi A, la forma scară:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{c|c} & u_1 \\ S_A & u_2 \\ & \vdots \\ & u_m \end{array}\right] \tag{2.8}$$

Astfel sistemul iniţial $Ax = b$ este echivalent cu sistemul $S_A x = u$, unde u notează ultima coloană din matricea $S_{\overline{A}}$.

Concluzii:

• cele două sisteme au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

Deoarece sistemul $S_A x = u$ are o matrice mai simplă, analizăm acest sistem dacă este compatibil sau nu.

• Deoarece transformările elementare pe linii nu modifică rangul matricii iniţiale, rezultă că:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(S_A), \quad \text{şi} \quad \text{rang}(\overline{A}) = \text{rang}(S_{\overline{A}})$$

• rangul matricii în forma scară (A, respectiv $\overline{A}$) este egal însă cu numărul de pivoţi din S_A, respectiv $S_{\overline{A}}$.

• Deci dacă numărul de pivoţi din S_A este egal cu numărul de pivoţi din $S_{\overline{A}}$, atunci cele două matrici au acelaşi rang şi la fel rang$(A) =$ rang$(\overline{A})$. Conform Teoremei lui Kronecker–Capelli ambele sisteme

$Ax = b$, $S_A x = u$ sunt compatible, dar pentru a afla soluţia rezolvăm sistemul mai simplu $S_A x = u$.

• Dacă numărul de pivoţi în S_A este diferit de numărul de pivoţi în $S_{\overline{A}}$, atunci sistemul $S_A x = u$ este incompatibil şi în concluzie şi sistemul iniţial $Ax = b$ este incompatibil.

Exemplul 2. Să se studieze compatibilitatea/incompatibilitatea sistemului $Ax = b$ ce are matricea prelungită $\overline{A} = [A|b]$:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

Deci termenii liberi ai sistemului sunt $b_1 = -11, b_2 = 3, b_3 = -5$.

Pentru a efectua calcule mai simple efectuăm transformarea $L_1 \leftrightarrow L_2$ şi obţinem matricea echivalentă (adică de acelasi rang ca şi $\overline{A}$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

Efectuând apoi transformările: $2L_1 + L_2 \to L_2$, $-4L_1 + L_3 \to L_3$ ajungem la:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -17 \end{array}\right]$$

În sfârşit, efectuând asupra acestei matrici transformarea $-3L_2 + L_3 \to L_3$ obţinem forma scară a matricii prelungite şi evident şi a matricii A:

$$A_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Astfel sistemul iniţial este echivalent cu sistemul $S_A x = u$, unde:

$$S_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matricea S_A are 2 pivoţi $s_{11} = 1, s_{23} = 2$, în timp ce matricea $S_{\overline{A}}$ are 3 pivoţi: $s_{11} = 1, s_{23} = 2, s_{35} = -2$. Astfel S_A şi $S_{\overline{A}}$ au ranguri diferite, deci sistemul $S_A x = u$ este incompatibil şi la fel sistemul iniţial $Ax = b$.

Procedura de reducere la forma scară pe linie

`Etapa 1:` Se determină prima coloană nenulă, de la stânga spre dreapta. Fie aceasta coloana j. Pe această coloană se selectează un element nenul. Dacă $a_{1j} \neq 0$, atunci acesta este pivotul liniei 1. În caz contrar (adică $a_{1j} = 0$) se efectuează o schimbare de linii pentru a aduce un element nenul în prima poziţie a coloanei j. O dată fixat pivotul, se aplică transformări elementare pe linie pentru a anula toate elementele din coloana j, de sub pivot.

$\vdots$

`Etapa k:` Presupunem că M este matricea sistemului după etapa $k-1$ a eliminării Gauss, adică sub pivotul ales pe linia $k-1$ s-au format zerouri. Există trei posibilităţi:

$1.$ Pe linia k există elemente nenule. Atunci alegem ca pivot primul element nenul (de la stânga spre dreapta). Fie acesta elementul din poziţia (k, j). Se formează zerouri sub el, pe coloana j, şi astfel se încheie etapa k a procedurii;

$2.$ toate elementele pe linia k sunt 0, dar există cel puţin o linie sub linia k ce conţine elemente nenule; se schimba linia k cu o linie dedesubtul ei ce are elemente nenule, se alege pivotul şi se formează zerouri sub el, terminând etapa k a procedurii;

$3.$ pe linia k şi sub ea nu mai există elemente nenule; Procesul de eliminare este complet;

Precizăm că dacă a_{ij} este pivot, atunci se anulează elementul din poziţia kj, cu $k > i$, prin transformarea $-a_{kj}/a_{ij}L_i + L_j \to L_j$.

Pentru a înţelege `Etapa 1`, luăm următorul exemplu:

Exemplul 3. Să se reducă la forma scară pe linii matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima vedere acest exemplu pare nejustificat dacă am considera această matrice ca matricea (prelungită) a unui sistem de ecuaţii liniare, deoarece având coloana 1 formată din zerouri rezultă că sistemul practic nu depinde de necunoscuta x_1 si deci este inutil să folosim coloana 1. Reducerea unei matrici la forma scară pe linii însă se folseşte în algebra liniară şi în alte scopuri, nu numai în rezolvarea sistemelor liniare şi existentă unei coloane nule este posibilă în unele probleme.

Cum coloana 1 este zero, a_{11} nu poate fi pivot pentru linia 1 şi nici un alt elemnt a_{i1}, $i > 1$, prin schimbarea liniei 1 cu linia i. Prima coloană nenulă este $k = 2$. Pentru calcule mai simple, schimbăm linia 1 cu linia 4 şi obţinem matricea:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Alegem pivotul pe linia 1 ca fiind 1 şi aplicăm transformările: $-5L_1 + L_2 \to L_2$, $-2L_1 + L_4 \to L_4$. Obţinem:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Apoi în A_2 interschimbăm $L_2 \leftrightarrow L_4$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

-1 este pivotul liniei 2. Efectuăm transformările $7L_2 + L_3 \to L_3$ şi $9L_2 + L_4 \to L_4$;

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivotul liniei 3 este 6. Transformarea $(-7/6)L_3 + L_4 \to L_4$ conduce la forma scară pe linie:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observaţia 2.1.2 *Datorită flexibilităţii în alegerea transformărilor elementare pe linie ce se efectuează pentru reducerea unei matrici A la forma scară, S, elementele matricii S nu sunt unic determinate de A. Adică două persoane care lucrează independent pot obţine matrici scară diferite. Se poate demonstra însă că numărul şi poziţia pivoţilor în S sunt unic determinate de elementele matricii A. Cu alte cuvinte,* **două forme scară distincte, ale aceleaşi matrici, au acelaşi număr de pivoţi şi aceştia sunt situaţi în aceeaşi poziţie**.

2.2 Metoda Gauss–Jordan

Metoda transformărilor elementare pe linie, numită şi metoda eliminării a lui Gauss, poate fi rafinată, prin *metoda Gauss-Jordan*. Şi anume, metoda Gauss-Jordan are în plus două caracteristici:

1. În fiecare etapă, elementul pivot este forţat să devină 1. Mai precis dacă s-a fixat pivotul pe linia i ca fiind $a_{ij} \neq 0$, atunci transformarea $L_i/a_{ij} \to L_i$ conduce la pivot 1.

2. Pe lângă zerouri sub pivot, se creează, prin transformări elementare pe linie, zerouri şi deasupra pivotului.

O matrice scară obţinută prin metoda Gauss-Jordan din matricea A se numeşte *matrice în forma scară redusă* (*reduced row echelon form*, prescurtat **rref**) şi se notează S_A^0.

Exemplul 4. Matrici scară în forma redusă:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Observaţia 2.2.1 *Se poate demonstra că forma scară redusă a unei matrici este unică, adică indiferent de transformările elementare pe linie aplicate obţinem aceeaşi matrice redusă.*

Forma scară redusă este fundamentală în algebra liniară, deoarece, aşa cum vom arăta în cursurile următoare, ea codifică proprietăţi importante ale matricii iniţiale, foarte utile în rezolvarea a numeroase probleme.

Să ilustrăm câteva avantaje ale reducerii matricii unui sistem de ecuaţii liniare la forma scară redusă. Aplicand metoda Gauss–Jordan de reducere a unui sistem liniar şi neomogen de n ecuaţii cu n necunoscute, compatibil determinat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow Ax = b,$$

obţinem la sfârşitul procedurii, aplicată matricii prelungite a sistemului:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right],$$

matricea echivalentă cu ea:

$$S^0_{\overline{A}} = [\underbrace{S^0_A}_{I_n} | \mathbf{u}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_n \end{array} \right] = [I_n|\mathbf{u}] \tag{2.9}$$

Motivul pentru care forma scară redusă a matricii prelungite arată astfel este că rangul matricii A este n (sistemul fiind compatibil determinat) şi deci forma scară redusă are n pivoţi, adică n de 1 pe diagonala principală şi 0 deasupra şi dedesubtul pivoţilor.

Sistemul iniţial, $Ax = b$, este echivalent cu sistemul $S^0_A x = u$ (au aceleaşi soluţii). Şi anume, sistemul echivalent este sistemul de matrice I_n şi coloana termenilor liberi de elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$:

$$I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Deci soluţia acestui sistem (precum şi a celui iniţial) este:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= u_2 \\ &\vdots \\ x_n &= u_n, \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cu alte cuvinte soluţia sistemului este înregistrată în ultima coloană a matricii scară redusă, $S^0_{\overline{A}}$.

Observăm că în deducerea soluţiei din forma scară redusă am pornit de la ipoteza că sistemul este compatibil determinat. În realitate însă nu ştim la începutul procedurii de reducere la forma scară redusă dacă un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute (cu n foarte mare) este sau nu compatibil determinat. Reducând însă matricea prelungită la forma scară redusă, după ultima etapă deducem din analiza matricii reduse dacă sistemul este compatibil sau nu şi dacă da citim soluţia ca mai sus. Şi anume:

• Dacă în forma scară redusă $S^0_{\overline{A}} = [S^0_A|\mathbf{u}]$, matricea S^0_A este matricea unitate, I_n, adică numărul pivoţilor din S^0_A este egal cu n, atunci rezultă că rangul matricii A este n, şi deci sistemul $Ax = b$ este compatibil determinat şi soluţia sistemului se poate citi pe ultima coloană a formei scară redusă $S^0_{\overline{A}}$.;

• Dacă numărul pivoţilor din S^0_A (submatricea formată din primele n coloane ale matricii reduse asociate lui $\overline{A}$) este mai mic decât n, adică $S^0_A \neq I_n$, sistemul poate fi incompatibil sau compatibil nedeterminat, în funcţie de numărul de pivoţi din S^0_A şi $S^0_{\overline{A}}$.

Exemplul 5. Considerăm sistemul neomogen de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute, având matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Forma sa scară redusă calculată cu un program în `C/C++` (pe care vi-l postez odata cu tema) este:

$$\left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2332 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.3578 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.8287 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.3233 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4301 \end{array}\right]$$

Având 5 pivoţi plasaţi în submatricea formată din primele 5 coloane, rezultă că matricea sistemului are are rangul 5, deci determinantul matricii sistemului este nenul şi sistemul este compatibil determinat, iar soluţia lui este dată de ultima coloană:

$$(x_1 = -0.2332, x_2 = 1.3578, x_3 = -0.8287, x_4 = -0.3233, x_5 = 0.4301)$$

Exemplul 6. Sistemul neomogen de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute având matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 8 & 19 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 20 & -5 & 3 & -7 \\ -3 & 3 & -15 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 6 & -3 \end{array}\right]$$

are forma scară redusă:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1.6667 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Observăm că numărul de pivoţi în submatricea formată din primele 5 coloane este 4, deci rangul matricii sistemului este 4 iar rangul matricii prelungite este egal cu numărul de pivoti din forma scară redusă a cesteia, adică 5. Deci sistemul este incompatibil.

Un sistem de 5 ecuatii cu 5 necunoscute a cărui matrice prelungită are forma scară redusă:

$$S^0\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

este compatibil nederminat deoarece rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii prelungite, dar acest rang nu este maxim, adică 5.

Pentru a obţine mulţimea soluţiilor sistemului $S^0_A x = u$, remarcăm că pivoţii matricii A sunt plasaţi în coloanele $1, 2, 3, 5$. Astfel alegem pe x_1, x_2, x_3, x_5 drept necunoscute principale, iar $x_4 = \alpha$ ca necunoscută secundară şi rezolvăm primele 4 ecuaţii în raport cu necunoscutele principale şi în funcţie de necunoscuta secundară α:

$$\begin{array}{lcr} x_1 + 2\alpha & = & 1 \\ x_2 + 11\alpha & = & -5 \\ x_3 - 3\alpha & = & 3 \\ x_5 & = & -4 \end{array}$$

şi obţinem mulţimea soluţiilor: $(x_1 = -2\alpha, x_2 = -5 - 11\alpha, x_3 = 3 + 3\alpha, x_5 = -4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calculul inversei unei matrici pătratice nesingulare, folosind forma scară redusă a unei matrici asociate

Conform definiţiei, inversa unei matrici pătratice nesingulare, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, este o matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cu proprietatea că

$$AX = I_n,$$

adică

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Produsul din membrul stâng, respectiv membrul drept se se mai poate exprima ca rezultat al concatenării coloanelor, astfel:

$$[\,AX[:,1]\,|\,AX[:,2]\,|\,\dots\,|AX[:,n]\,] = [\,e_1\,|\,e_2\,|\,\dots\,|e_n\,]$$

Determinarea coloanelor inversei X, este echivalentă cu rezolvarea a n sisteme de ecuaţii liniare:

$$AX[:,1] = e_1, \quad AX[:,2] = e_2, \quad \dots, \qquad AX[:,n] = e_n$$

Un astfel de sistem se scrie detaliat ca:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{X[:,j]}{\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{1nj} \end{bmatrix}} = \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \tag{2.12}$$

Folosind metoda Gauss-Jordan de rezolvare a sistemului compatibil determinat, (2.12), vom obţine că forma scară redusă a matricii prelungite $[A|\mathbf{e}_j]$ este $[I_n|A^{-1}[:,j]$ unde prin $A^{-1}[:,j]$ am notat coloana j din matricea inversă, adică soluţia $X[:,j]$.

Pentru reducerea matricii A la forma scară redusă, I_n, deci şi a matricii prelungite $[A|\mathbf{e}_j]$ se aplică o succesiune de transformări elementare. Dar în loc să rezolvăm n ecuaţii $AX[:,j] = \mathbf{e}_j$, $j = \overline{1,n}$, ce au aceeaşi matrice A, adică să repetăm de n ori aplicarea transformărilor elementare ce reduc pe A la I_n şi pe $[A|\mathbf{e}_j]$ la $[I_n|A^{-1}[:,j]]$, putem aplica aceleaşi transformări elementare pe linie (Gauss-Jordan) matricii:

$$[A|\underbrace{\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_n}_{I_n}]$$

şi vom obţine în final forma scară redusă:

$$[I_n|A^{-1}[:,1]|A^{-1}[:,2]|\cdots|A^{-1}[:,n]] = [I_n|A^{-1}]$$

În concluzie, dacă ştim că o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă, atunci pentru a afla inversa sa, constituim **matricea extinsă**: $A_e = [A|I_n]$, pe care o transformăm în forma scară redusă $[I_n|M]$ şi matricea M va fi inversa, A^{-1}.

În realitate însă nu ştim în prealabil dacă o matrice pătratică (de dimensiuni mari) este sau nu singulară. Exploatând modul de mai sus de calcul al inversei, se procedează astfel:

• se bordează matricea pătratică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cu matricea unitate I_n şi obţinem matricea extinsă $A_e = [A|I_n]$;

• se reduce matricea extinsă la forma scară redusă (Gauss-Jordan) $[A|I_n] \leftrightarrow [A'|M]$;

⋆ Dacă prima jumătate a formei scară redusă, A' (adică submatricea constituită din liniile $\overline{1,n}$ şi coloanele $\overline{1,n}$) este matricea unitate adica forma scară redusă este de forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right]$$

atunci matricea A este inversabilă şi inversa ei este:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

■ Dacă numărul pivoţilor din prima jumătate a formei scară reduse este mai mic decât n (adică rangul matricii A este mai mic decât n) atunci matricea este singulară şi nu admite inversă.

De exemplu pentru matricea extinsă asociată unei matrici $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$A_e = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & -3 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

forma scară redusă calculată numeric (folosind un program ce implementează algoritmul de calcul al formei scară) este:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0.3333 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0.8333 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.1667 & 1.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4.6667 & -4.3333 \end{array}\right]$$

Submatricea formată din cele patru linii şi primele patru coloane are doi pivoţi, deci rangul matricii A este 2, adică este o matrice singulară şi submatricea formată din ultimele 4 coloane **nu** este inversa ei!

Să parcurgem algoritmul de calcul al rangului matricii şi ilustrare a inversei în caz de matrice nesingulară prin calcul direct:

Exemplul 7. Considerăm matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matricea extinsă asociată este:

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|rcc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|rrc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Deoarece forma scară redusă a matricii A este matricea unitate, ea are rangul 3, deci este inversabilă şi inversa ei este:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Daţi search pe `http://google.com`: **reduced row echelon form** şi gasiţi mii de exemple!