Algebră liniară, Tema 3

Aceasta tema conţine probleme de reducere la forma scară sau forma scară redusă, care se efectuează prin calcul manual sau acolo unde este precizat rulând programul `C` inclus, `redscara.c`

`redscara.c` calculează şi afişează forma scară şi forma scară redusă a unei matrici, citită dintr-un fişier, `matrice.txt`, care are pe prima linie numărul, m, de linii si numărul n de coloane iar pe liniile următoare liniile matricii.

Exemplu:

```
4 5
2  -1    3    4   0
3 1.5   -5   -1   7
6 0    -2.3  1.8 10.4
2 1      3   -2   9
```

Pentru a analiza un sistem de ecuaţii introduceţi în fişier matricea prelungită.

1. Să se reducă la forma scară matricea prelungită, $\overline{A}$, a sistemului următor, scris în formă matricială, $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Evidenţiaţi pivoţii din forma scară S_A şi respectiv $S_{\overline{A}}$. Este sistemul compatibil? Dacă da, scrieţi determinantul principal asociat sistemului $S_A x = u$, unde u este ultima coloană din $S_{\overline{A}}$ şi găsiţi mulţimea soluţiilor sistemului.

2. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} 2x - 3y \quad &= 3 \\ 4x - 5y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

Să se reducă matricea prelungită la forma scară, să se deducă apoi dacă sistemul este compatibil determinat sau nu şi dacă da, să se determine soluţia unică folosind metoda substituţiei inverse.

3. Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

folosind reducerea la forma scară.

4. Forma scară a matricii prelungite a sistemului $Ax = b$ are ultima linie nenulă de forma $[0\ 0\ \dots\ 0|c]$, cu $c \neq 0$. Cum este sistemul $Ax = b$, compatibil sau incompatibil?

5. Matricea prelungită a unui sistem liniar de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute are forma scară redusă:

$$a)\ S_A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad b)\ S_A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$c)\ S_A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Să se precizeze care sistem este compatibil determinat, compatibil nedeterminat şi respectiv incompatibil, argumentând fiecare caz în parte.

6. Folosind `redscara.c` calculaţi forma scară (redusă) a matricii prelungite a sistemului de mai jos, o copiaţi apoi pe caiet şi deduceţi dacă sistemul este compatibil sau nu. În caz de compatibilitate rezolvaţi sistemul.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

7. Folosind `redscara.c` introduceţi matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

şi anume introduceţi initial $2/3 \approx 0.66$ apoi adăugaţi progresiv câte o zecimală în plus. De la a câta zecimală rangul dedus din forma scară este cel corect, dedus prin calcul manual?

8. Folosind transformări elementare pe linie să se arate că matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

este inversabilă şi să i se determine inversa.

9. Determinaţi mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

reducând matricea sistemului la forma scară, S_A, şi rezolvând sistemul echivalent $S_A x = 0$.

Verificaţi-vă cunoştinţele!!!

Precizaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

10. Două sisteme de ecuaţii liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sunt echivalente dacă au aceleaşi necunoscute.

11. Două sisteme de ecuaţii liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sunt echivalente dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

12. Forma scară S_A a unei matrici A este unică, adică oricare două persoane care calculează forma scară şi nu greşesc la calcule obţin aceeaşi matrice S_A.

13. Un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute, $Ax = 0$, având matricea A inversabilă, admite o unică soluţie.

14. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă atunci şi forma scară, S_A, este inversabilă.

15. Dacă a_{ij} este pivot în forma scară, S_A, a matricii $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ atunci elementele a_{kj}, $k \neq i$, sunt toate nenule.