Cursul 10

Matricea unei aplicaţii liniare relativ la o pereche de baze. Transformări liniare în grafica 2D şi 3D

10.1 Matricea unei aplicaţii liniare relativ la două baze

Fie V_n, W_m două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$, primul de dimensiune n, iar al doilea de dimensiune m, iar $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază în V_n, şi $\overline{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \ldots u_m)$ o bază în W_m. O aplicaţie liniară $L : V_n \to W_m$ asociază oricărui vector v din V_n un vector $w = L(v)$ din W_m. În particular L aplicat vectorilor bazei $\mathcal{B}$, $L(e_i)$, conduce la vectori dinW_m care se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor $u_1, u_2, \ldots, u_m$, ai bazei $\overline{\mathcal{B}}$:

$$\begin{array}{rcl} L(e_1) & = & a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots a_{1m}u_m \\ L(e_2) & = & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots a_{2m}u_m \\ \vdots & & \\ L(e_n) & = & a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots a_{nm}u_m \end{array} \tag{10.1}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Observăm că coordonatele vectorilor $L(e_i)$ sunt indexate matricial.

Prin definiţie, numim **matricea aplicaţiei liniare** $L : V_n \to V_m$ relativ la perechea de baze $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}})$, matricea de m linii şi n coloane, ce are pe coloana arbitrară, i, coordonatele vectorului $L(e_i)$ în baza $\overline{\mathcal{B}}$, $i = \overline{1, n}$, adică $A = [(L(e_1))_{\overline{\mathcal{B}}} | (L(e_2))_{\overline{\mathcal{B}}} | \cdots | (L(e_n))_{\overline{\mathcal{B}}}]$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} L(e_1) & L(e_2) & & L(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ A_{\overline{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \tag{10.2}$$

Deci ATENŢIE, numărul de linii ale matricii A este egal cu dimensiunea codomeniului, iar numărul de coloane cu dimensiunea domeniului de definiţie al aplicaţiei liniare $L : V_n \to W_m$.

Exemplul 1. Fie aplicaţia liniară $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ce are expresia analitică $L(x_1, x_2, x_3)^T = (-2x_1 + x_2 - 5x_3, 3x_1 + 7x_2 - x_3)^T$. Să se determine matricea lui L relativ la baza canonică $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T$ din $\mathbb{R}^3$ şi baza canonică
$\overline{\mathcal{B}} = (u_1 = (1,0)^T, u_2 = (0,1)^T)$ din $\mathbb{R}^2$.

Pentru a afla matricea aplicaţiei L calculăm efectul lui L asupra vectorilor bazei canonice din $\mathbb{R}^3$, Ţinând seama de expresia analitică a alui L avem:

$$\begin{aligned}
L(e_1) &= L(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{0}_{x_3})^T = (-2 \cdot 1 + 0 - 5 \cdot 0, , 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 0)^T = (-2, 3)^T = 2u_1 + 3u_2 \\
L(e_2) &= L(0,1,0)^T = (1,7)^T = 1u_1 + 7u_2 \\
L(e_3) &= L(0,0,1)^T = (-5,-1)^T = -5u_1 - u_2
\end{aligned}$$

Deci matricea aplicaţiei L relativ la bazele canonice din cele două spaţii este:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

În continuare arătăm că este suficient să cunoaştem efectul unei aplicaţii liniare $L : V_n \to W_m$ pe vectorii unei baze din V_n, cu alte cuvinte coloanele matricii aplicaţiei L, pentru a putea calcula apoi efectul lui L asupra oricărui alt vector din spaţiu. Şi anume:

Propoziţia 10.1.1 **Fie $\mathbf{L} : \mathbf{V_n} \to \mathbf{W_m}$ o aplicaţie liniară ce are relativ la bazele $\mathcal{B} \subset \mathbf{V_n}$, $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathbf{W_m}$ matricea A şi v un vector arbitrar din $\mathbf{V_n}$ care are descompunerea $\mathbf{v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n}$ în baza $\mathcal{B}$. Atunci vectorul imagine $\mathbf{w = L(v)}$ are exprimarea $\mathbf{w = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_mu_m}$ în baza $\overline{\mathcal{B}}$ şi coordonatele sale $\mathbf{y_1, y_2, \ldots y_m}$ se exprimă în funcţie de coordonatele $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ ale lui v astfel, $\mathbf{w_{\overline{\mathcal{B}}} = A v_{\mathcal{B}}}$, adică:**

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{\overline{\mathcal{B}}} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{10.3}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{L} \quad (\mathbf{v})$$

Demonstraţie:

Deoarece $L(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}u_j$, obţinem aplicând proprietatea de liniaritate a lui L:

$$w = L(v) = L(\sum_{i=1}^n x_ie_i) = \sum_{i=1}^n x_iL(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ij}u_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\right) u_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i\right) u_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_{i2}x_i\right) u_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{im}x_i\right) u_m = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_mu_m$$

Deci coeficientul lui u_j din exprimarea lui $w = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_mu_m$ este astfel:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{nj}x_n = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Prin urmare:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

□

Relaţia demonstrată evidenţiază că o aplicaţie liniară este reprezentată de matricea sa relativ la o bază fixată în domeniul de definiţie şi una în domeniul valorilor. Astfel relaţia $\mathbf{w} = \mathbf{L}(\mathbf{v})$ este echivalentă cu relaţia matricială (10.4) scrisă concentrat:

$$\mathbf{w}_{\overline{\mathcal{B}}} = \mathbf{A}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \tag{10.5}$$

O altă proprietate importantă ce rezultă din această relaţie este următoarea:

> O aplicaţie liniară este perfect determinată de efectul ei asupra vectorilor unei baze din domeniul de definiţie. Şi anume cunoscând vectorii $L(e_1), L(e_2), \ldots, L(e_n)$ putem constitui matricea aplicaţiei liniare şi apoi oricare ar fi un alt vector, putem calcula $L(v) = Av$.

Exemplul 2. Fie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ o aplicaţie liniară pentru care se cunoaşte efectul asupra vectorilor bazei canonice $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ din $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} L(e_1) &= (-1, 3, 2, 5)^T \\ L(e_2) &= (0, -4, 1, 3)^T \\ L(e_3) &= (1, 1, 7, -11)^T \end{aligned}$$

a) Să se determine expresia analitică a aplicaţiei L relativ la bazele canonice din cele două spaţii vectoriale.
b) Să se determine vectorul imagine $L(-6, 0, 1)^T$.

a) Expresia analitică este regula după care L asociază unui triplet $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ un quadruplet $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ din $\mathbb{R}^4$. Conform celor arătate mai sus, pentru a determina expresia analitică avem nevoie de matricea A a aplicaţiei liniare L relativ la bazele canonice din cele două spaţii.

Matricea A are pe coloana 1,2, 3 coordonatele lui $L(e_1), L(e_2)$, respectiv $L(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

Deci

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 \end{bmatrix},$$

adică

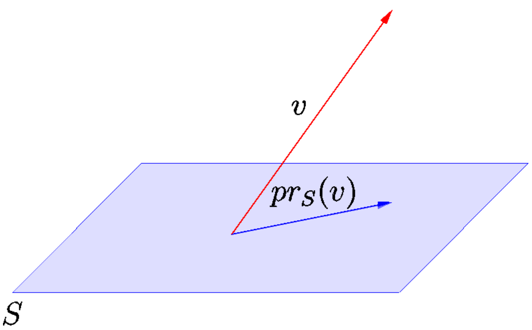
$$L(x_1, x_2, x_3)^T = (\underbrace{-x_1 + x_3}_{y_1}, \underbrace{3x_1 - 4x_2 + x_3}_{y_2}, \underbrace{2x_1 + x_2 + 7x_3}_{y_3}, \underbrace{5x_1 + 3x_2 - 11x_3}_{y_4})^T$$

b) Cunoscând expresia analitică obţinem:

$$L(-6, 0, 1)^T = (7, -17, -5, -41)^T$$

10.2 Matricea proiecţiei ortogonale pe un subspaţiu

Fie S un subspaţiu de dimensiune m, a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, $m < n$ şi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$, iar $\overline{B} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ o bază ortonormată în subspaţiul S. Notăm cu $pr_S : \mathbb{R}^n \to S$, aplicaţia care asociază oricărui vector $v \in \mathbb{R}^n$ proiecţia sa ortogonală pe subspaţiul S.



Se ştie că (vezi Cursul 6-7?) că proiecţia ortogonală a vectorului v pe subspaţiul S este suma proiecţiilor ortogonale ale vectorului v pe vectorii bazei ortonormate, $\overline{\mathcal{B}}$, din S:

$$pr_S(v) = pr_{u_1}(v) + pr_{u_2}(v) + \cdots + pr_{u_m}(v) = < v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 + \cdots + < v, u_m > u_m$$

Din această expresie a aplicaţiei proiecţie, rezultă că pr_S este aplicaţie liniară. Într-adevăr:

$$1. \quad \begin{aligned} pr_S(v_1 + v_2) &= \textstyle\sum_{k=1}^m < (v_1 + v_2), u_k > u_k = \sum_{k=1}^m [< v_1, u_k > u_k + < v_2, u_k > u_k] = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^m < v_1, u_k > u_k + \sum_{k=1}^m < v_2, u_k > u_k = pr_S(v_1) + pr_S(v_2) \end{aligned}$$

2. $pr_S(\alpha v) = \sum_{k=1}^{m} < \alpha v, u_k > u_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha < v, u_k > u_k = \alpha \sum_{k=1}^{m} < v, u_k > u_k = \alpha pr_S(v)$

Ştiind acum că pr_S este aplicaţie liniară, să aflăm matricea ei relativ la baza canonică, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, din $\mathbb{R}^n$ şi respectiv baza ortonormată $\overline{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ din subspaţiul S:

$$A = [pr_S(e_1)|pr_S(e_2)|\dots|pr_S(e_n)]$$

Dar $pr_S(e_i) =< e_i, u_1 > u_1+ < e_i, u_2 > u_2 + \dots + < e_i, u_m > u_m$. Prin urmare matricea A este:

$$A = \begin{bmatrix} < e_1, u_1 > & < e_2, u_1 > & \dots & < e_n, u_1 > \\ < e_1, u_2 > & < e_2, u_2 > & \dots & < e_n, u_2 > \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ < e_1, u_m > & < e_2, u_m > & \dots & < e_n, u_m > \end{bmatrix}$$

Să analizăm elementele de pe linia 1 a matricii A: datorită simetriei produsului scalar, linia 1 este:

$$\begin{bmatrix} < u_1, e_1 > & < u_1, e_2 > & \dots & < u_1, e_n > \end{bmatrix}$$

Deoarece descompunerea vectorului $u_1 \in S \subset \mathbb{R}^n$ după vectorii bazei ortonormate $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ este

$$u_1 =< u_1, e_1 > e_1+ < u_1, e_2 > e_2 + \dots + < u_1, e_n > e_n$$

rezultă că pe linia 1 avem coordonatele vectorului u_1 în baza canonică şi analog pe linia 2, coordonatele lui u_2, iar pe linia m, coordonatele lui u_m. Astfel putem scrie că matricea aplicaţiei pr_S relativ la bazele $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ este:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & \rightarrow \\ u_2 & \rightarrow \\ \vdots & \\ u_m & \rightarrow \end{bmatrix} = [u_1|u_2|\cdots|u_m]^T$$

iar proiecţia unui vector $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$ va fi vectorul $s = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_mu_m \in S$, unde:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]^T}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Această relaţie matricială se foloseşte pentru a implementa proiecţia ortogonală pe un subspaţiu, în care baza ortonormată este $(u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Exemplul 3. Presupunem că în subspaţiul S de dimeniune 2, al lui $\mathbb{R}^3$, avem baza ortonormată

$$\overline{\mathcal{B}} = (u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T.)$$

Atunci proiecţia ortogonală $pr_S : \mathbb{R}^3 \to S$, pe subspaţiul S are matricea:

$$A = [u_1|u_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Dacă $v = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, atunci vectorul $s = pr_S(v)$ este $s = y_1u_1 + y_2u_2$, unde:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Definiţia 10.2.1 *O aplicaţie liniară $L : V \to V$ de la un spaţiu vectorial la el însuşi se numeşte* **operator liniar**. *Numele vine de la faptul că L operează, acţionează, asupra vectorilor din spaţiul V, transformându-i în vectori din acelaşi spaţiu. Un operator liniar bijectiv se numeşte* **transformare liniară** *a spaţiului V.*

Exemplul 4. Cel mai simplu exemplu de operator liniar pe un spaţiu V este **operatorul identic** sau identitate, $I : V \to V$, $I(v) = v, \forall\ v \in V$. De exemplu operatorul identic pe spaţiul $\mathbb{R}^2$ are expresia analitică $I(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Observaţie. (**IMPORTANT!**) În cazul unui operator liniar, $L : V_n \to V_n$, se defineşte matricea A relativ la aceeaşi bază $\mathcal{B}$ şi in domeniu şi în codomeniu şi se notează $A_{\mathcal{B}}$. Matricea unui operator liniar este o matrice pătratică.

Dacă s-a fixat baza $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ şi în domeniul de definiţie şi în domeniul valorilor, atunci vectorii $L(e_i)$ se exprimă în baza $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{rcl} L(e_1) & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ L(e_2) & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ L(e_n) & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array} \tag{10.6}$$

şi matricea operatorului L relativ această bază este:

$$A_{\mathcal{B}} = [L(e_1)|L(e_2)|\cdots|L(e_n)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definiţia 10.2.2 *Un operator liniar $L : V_n \to V_n$ bijectiv se numeşte transformare liniară.*

În continuare deducem expresia analitică a câtorva transformări liniare folosite în grafica 2D, 3D, în gaming şi controlul mişcării roboţilor.

10.3 Rotaţia de unghi θ în spaţiul $\mathbb{R}^2$

În continuare dăm un exemplu de transformare liniară a lui $\mathbb{R}^2$ al cărei efect asupra vectorilor are şi o interpretare geometrică.

În Cursul 7 am demonstrat că o bază ortonormată la fel orientată ca baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ din $\mathbb{R}^2$ este de forma

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T, u_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)^T,$$

adică măs$(\widehat{e_1, u_1})$ = măs$(\widehat{e_2, u_2}) = \theta$ (Fig.10.1).

Notăm cu $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, aplicaţia liniară care aplică (transformă) vectorul e_1 în u_1 şi e_2 în u_2. Matricea aplicaţiei liniare R_θ relativ la baza canonică şi în domeniu şi în codomeniu este atunci:

$$A = [R_\theta(e_1)|R_\theta(e_2)] = [u_1|u_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Să caracterizăm efectul aplicaţiei liniare R_θ asupra unui vector arbitrar v. Notăm cu α măsura unghiului dintre v şi e_1. Astfel versorul lui v este $v^0 = v/\|v\| = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ şi deci $v = \|v\|v^0$. Datorită liniarităţii este suficient să calculăm vectorul $w = R_\theta(v^0)$, deoarece $R_\theta(v) = R_\theta(\|v\|v^0) = \|v\|\, R_\theta(v^0)$. Dacă vectorul $w = R_\theta(v^0)$ are în baza canonică coordonatele y_1, y_2, atunci din reprezentarea matricială a operatorului R_θ avem:

$$\begin{aligned} w &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10.7}$$

Prin urmare versorul v^0 ce formează unghiul α cu e_1 este transformat în versorul ce formează unghiul $\alpha + \theta$ cu e_1, adică R_θ roteşte vectorul v^0 cu unghiul θ şi evident acelaşi efect va avea şi asupra vectorului v (Fig.10.1).

Definiţia 10.3.1 *Aplicaţia liniară $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de matrice:*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

se numeşte rotaţie de unghi θ. Pentru $\theta = 0$ obţinem operatorul identitate, pentru $\theta \in (0, \pi]$ rotaţia se efectuează în sens trigonometric, iar pentru $\theta \in (-\pi, 0)$, în sensul acelor ceasornicului.

Deoarece orice vector $v = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ se identifică cu punctul $M(x, y)$, adică $\overrightarrow{OM} = v$, în grafică se aplică rotatţia plană punctelor din plan, şi anume $R_\theta(M)$ este punctul ce se obţine

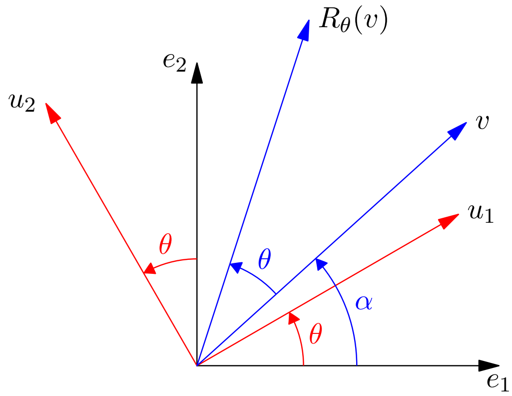
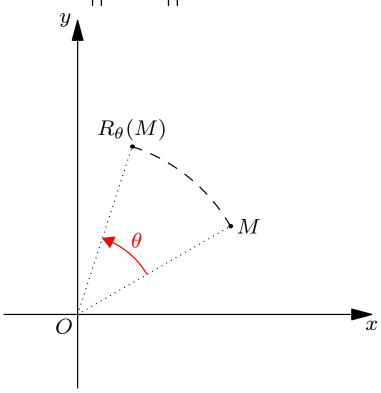


Fig.10.1: Ilustrarea rotaţiei de unghi θ în $\mathbb{R}^2$.

rotind punctul M în jurul originii, cu unghiul θ, adică "în cursul" rotirii punctul descrie un arc de cerc cu originea în O şi de rază $r = ||\overrightarrow{OM}||$.



10.4 Transformări de înclinare în $\mathbb{R}^2$

Înclinarea pe direcţia lui e_1 este transformarea liniară ce are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

Deoarece prima coloană a matricii conţine coordonatele vectorului Ae_1, iar a doua ale lui Ae_2 remarcăm că o înclinare pe direcţia lui e_1 lasă vectorul e_1 "pe loc", iar ceilalţi vectori v sunt "înclinaţi" pe direcţia lui e_1.

Deci efectul înclinării asupra unui vector, $v = (x, y)^T$, este:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y \end{bmatrix}$$

Prin urmare înclinând vectorul v pe direcţia e_1, obţinem un vector w ce are aceeaşi ordonată, y. În (Fig. 10.2), este ilustrat efectul unei astfel de transformări asupra unui vector cu coordonata

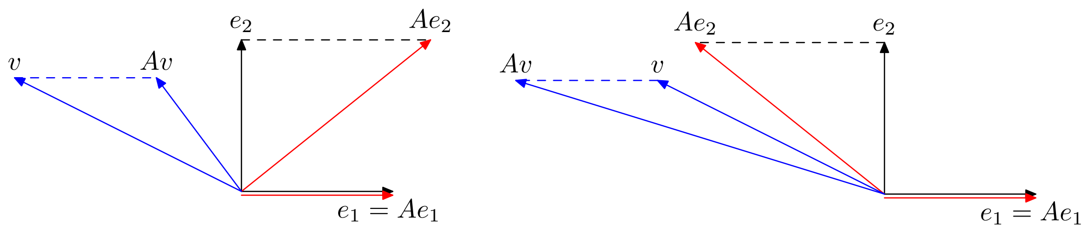


Fig.10.2: Efectul transformării înclinare pe direcţia lui e_1. În stânga înclinarea se realizează în sensul lui e_1, iar în dreapta în sens contrar.

a doua pozitivă. Parametrul a este pozitiv pentru transformarea Fig.10.2 stânga şi respectiv negativ în Fig. 10.2, dreapta.

În mod analog se defineşte transformarea de înclinare pe direcţia lui e_2, şi anume matricea transformării este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

iar efectul ei asupra unui vector $v = (x, y)^T$ este:

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ax + y \end{bmatrix}$$

Desenaţi efectul acestei înclinări asupra vectorului e_2 şi respectiv orice alt vector $v \neq e_2$, în cazul $a > 0$ şi respectiv negativ.

Pentru a ilustra mai bine efectul transformării afine de tip înclinare pe direcţia lui Ox considerăm 12 puncte raportate la sistemul de axe ortogonale Oxy având respectiv coordonatele:

$$\begin{array}{l} A_1 = O = (0,0), A_2 = (1,0), A_3 = (1,6), A_4 = (4,0), A_5 = (7,6), A_6 = (7,0) \\ A_7 = (8,0), A_8 = (8,8), A_9 = (7,8), A_{10} = 4,2), A_{11} = (1,8), A_{12} = (0,8) \end{array}$$

Aceste puncte sunt ”vârfurile” literei majuscule M din Fig.10.3, stânga. Aplicând vectorilor de poziţie $\overrightarrow{OA_i}$, $i = \overline{1,12}$ transformarea înclinare de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obţin vectorii w_i, $i = \overline{1,12}$ şi punctele $A'_i = O + w_i$, $i = \overline{1,12}$, sunt varfurile literei M înclinate (Fig.10.3, dreapta).

În fişierul inclus, TransformariLiniareR2.pdf, dăm o listă de transformări liniare folosite în grafica 2D şi ilustrăm efectul acestora asupra unei imagini. Pentru fiecare transformare liniară, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dăm matricea ei, A relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^2$. Astfel efectul transformării asupra unui vector $v = (x, y)^T$ este $T(v) = Av$. $A = [T(e_1)|T(e_2)]$.

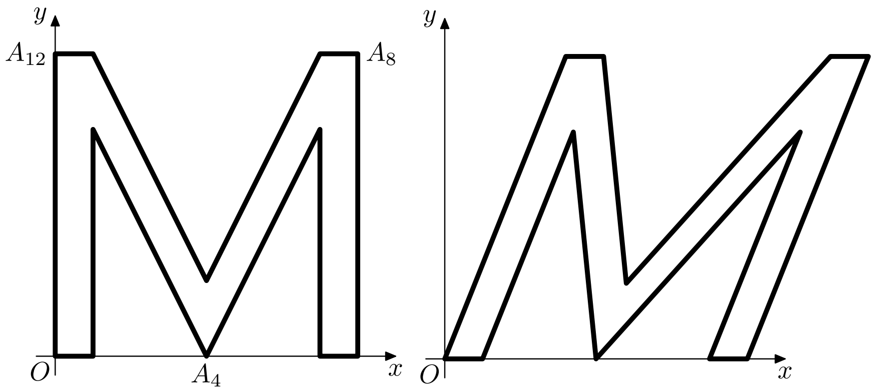


Fig.10.3: Efectul transformării înclinare de parametru $a = 0.4$, pe direcţia lui Ox_1, asupra vârfurilor literei M.

Pentru a întelege mai bine aceste transformări, desenaţi sistemul de axe xOy, vectorii $\overrightarrow{OM} = e_1 = (1, 0)$, $\overrightarrow{ON} = e_2 = (0, 1)$ şi pătratul cu vârfurile diagonal opuse O, $P(1, 1)$. Calculaţi şi desenaţi pentru fiecare transformare, vectorii $T(e_1), T(e_2)$ şi $T(1, 1)^T$.

10.4.1 Rotaţia de unghi θ în jurul unei axe din $\mathbb{R}^3$

Considerăm un reper ortonormat drept, de axe Ox, Oy, Oz, având respectiv direcţiile şi sensul bazei ortonormate $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Definim pe rând rotaţia unui vector $v = \overrightarrow{OM}$ cu unghiul θ, în jurul lui Oz, Ox, respectiv Oy.

Transformarea liniară $R^z_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ce are ca efect rotaţia cectorului $v = \overrightarrow{OM}$ sau a punctului $M(x, y, z)$ în jurul axei Oz, cu unghiul θ este perfect definită dacă indicăm efectul transformării asupra vectorilor bazei, adică indicăm vectorii $R^z_\theta(e_1)$, $R^z_\theta(e_2)$, $R^z_\theta(e_3)$. Rotaţia în jurul lui Oz lasă vectorul director al acestei axe fix, adică $R^z_\theta(e_3) = e_3$. Vectorul e_1 este rotit în subspaţiul 2D, generat de e_1, şi e_2, $S = \text{span}(e_1, e_2)$, conform rotaţiei 2D discutate mai sus.

Subspaţiul $S = \text{span}(e_1, e_2)$ este de fapt complementul ortogonal al vectorului e_3, adica $S = e_3^T$ şi deci are ecuaţia $z = 0$ Rezultă astfel că orice vector $v = (x, y, z)^T$ din S are a treia coordonată egală cu 0, adică $z = 0$.

Deoarece vectorul e_1 este rotit într-un vector din S şi e_2 la fel, rezultăcă:

$$R^z_\theta(e_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^z_\theta(e_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deci matricea rotaţiei în jurul lui Oz este:

$$A^z_\theta = [R^z_\theta(e_1)|R^z_\theta(e_2)|R^z_\theta(e_3)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

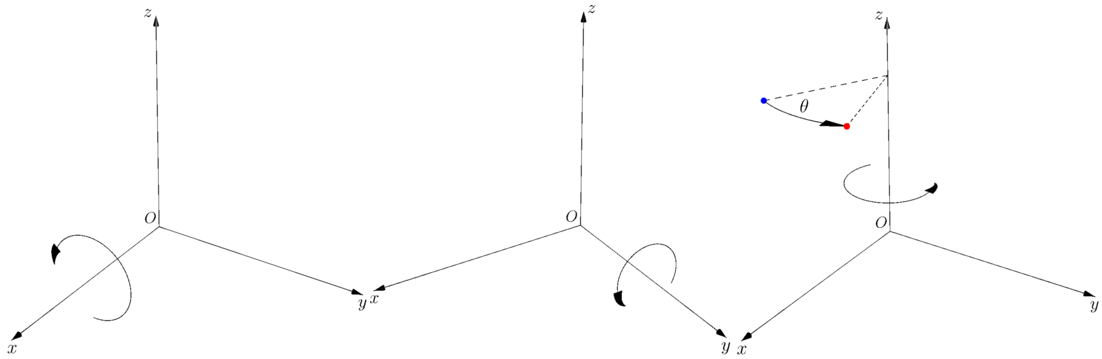


Fig.10.4: Sensul pozitiv de rotaţie în jurul lui Ox, Oy, respectiv Oz.

iar expresia analitică a rotaţiei în jurul lui Oz este: $R_\theta^z(x,y,z) = (X,Y,Z)$ unde:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

adică dacă $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, atunci vectorul rezultat după rotaţie, $\overrightarrow{OM'} = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$ şi coordonatele X, Y, Z se găsesc conform relaţiei matriciale precedente. Dacă $\theta \in (0, \pi]$ se spune că avem rotaţie în sens pozitiv, iar dacă $\theta \in (-\pi, 0)$ rotaţie este in sens negativ. Vizual distingem cele două rotaţii astfel: rotaţia în sens pozitiv este rotaţia care face ca burghiul să înainteze pe direcţia şi sensul lui Oz (Fig.10.4). Rotind de la Ox spre Oy burghiul înaintează pe sensul lui Oz.

În mod analog, rotaţia în jurul axei Ox, în sens pozitiv, are expresia analitică $R_\theta^x(x,y,z) = (X,Y,Z)$:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \theta \in (0, \pi)$$

iar rotaţia în jurul lui Oy în sens pozitiv este $R_\theta^y(x,y,z) = (X,Y,Z)$:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \theta \in (0, \pi)$$

A se observa că sensul pozitiv de rotatie în jurul lui Oy este sensul în care rotesc burghiul **dinspre Oz spre Ox** încât el să înainteze pe direcţia lui Oy.

Transformările liniare prezentate mai sus sunt descrise într-o bază. Deseori însă ne interesează expresia analitică a unui operator liniar în altă bază.

Propoziţia 10.4.1 *Dacă $A_{\mathcal{B}}$ este matricea operatorului liniar $L : V_n \to V_n$ relativ la baza $\mathcal{B}$, iar $A_{\mathcal{B}'}$ matricea aceluiaşi operator , relativ la baza $\mathcal{B}'$, atunci cele două matrici sunt legate prin relaţia:*

$$A_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'},$$

unde $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

Demonstraţie: Presupunem că efectul operatorului liniar L asupra bazei $\mathcal{B} = (e_i)$, respectiv a bazei $\mathcal{B}' = (u_i)$, $i = \overline{1, n}$ este:

$$\begin{array}{rcl} L(e_i) & = & a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n, i = \overline{1, n} \\ L(u_i) & = & a'_{i1}u_1 + a'_{i2}u_2 + \cdots + a'_{in}u_n, i = \overline{1, n} \end{array}$$

Astfel matricile relativ la baza $\mathcal{B}$, respectiv $\mathcal{B}'$ sunt:

$$A_{\mathcal{B}} = [L(e_1)|L(e_2)|\cdots|L(e_n)] = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}'} = [L(u_1)|L(u_2)|\cdots|L(u_n)] = \begin{bmatrix} a'_{10} & a'_{21} & \dots & a'_{n1} \\ a'_{12} & a'_{22} & \dots & a'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Dacă $w = L(v)$ atunci reprezentarea în baza $\mathcal{B}$, a acestei relaţii este:

$$w_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} \tag{10.8}$$

iar în baza $\mathcal{B}'$ este:

$$w_{\mathcal{B}'} = A_{\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} \tag{10.9}$$

Ţinând seama de relaţia dintre coordonatele unui vector exprimat în două baze, avem:

$$w_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}}, \quad v_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}$$

Înlocuind pe $w_{\mathcal{B}'}$ şi $v_{\mathcal{B}'}$ astfel exprimate în (10.9), obţinem:

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} \mid \cdot T^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \tag{10.10}$$

adică:

$$w_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}} \tag{10.11}$$

Din (10.8) şi (10.11) rezultă:

$$A_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \Leftrightarrow \quad A_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} T^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

$\square$

Ca o aplicaţie a a cestei relaţii deducem:

10.5 Expresia analiticăa a rotaţiei în jurul unei axe de direcţie arbitrară

În grafica 3D pentru a vizualiza un obiect acesta se roteşte în jurul a diverse axe, nu neapărat axe de coordonate.

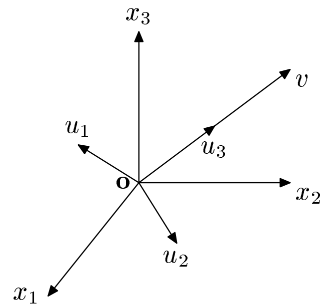


Fig.10.5: Construcţia reperului intermediar pentru generarea rotaţiei arbitrare.

Fie $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2, e_3)$ reperul ortonormat de axe ortogonale Ox_1, x_2, x_3.

Pentru a deduce matricea relativ la baza canonică a rotaţiei de unghi θ în jurul axei de direcţie $v \neq \theta$ se construieşte o bază ortonormată auxiliară, (u_1, u_2, u_3) la fel orientată ca baza canonică, (e_1, e_2, e_3), astfel încât u_3 să fie versorul direcţiei axei de rotaţie, v, adică $u_3 = v^0$. Reperului ortonormat $\mathcal{R}' = (O, (u_1, u_2, u_3))$ i se asociază axele ortogonale $Ox_1'x_2'x_3'$. Astfel rotaţia de axă de direcţie v este rotaţia care în reperul $\mathcal{R}'$ se efectuează în jurul axei a treia, Ox_3' (Oz).

Baza ortonormată $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ se construieşte astfel:

a) Se calculează $u_3 = v/\|v\|$;

b) Se determină complementul ortogonal al vectorului v,

$$v^{\perp} = \{w(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid < v, w >= 0 \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

c) Se alege un vector arbitrar $v_1 \in v^{\perp}$, adică un vector $v_1 \perp v$, şi se notează cu $u_1 = v_1^0$, versorul său.

d) Pentru ca baza ce o construim să fie la fel orientată ca baza canonică, definim $u_2 = u_3 \times u_1$.

Algoritmic, construcţia acestei baze auxiliare se realizează astfel:

- se testează dacă vectorul v este nenul. Dacă $v = \theta_3$ rotaţia nu se poate defini (de fapt se testează dacă $\|v\|$ este mai mică decât un ϵ prescris, şi nu dacă fiecare coordonată a lui v este 0); În caz contrar:

  - Dacă $a_1 \neq 0$ sau $a_2 \neq 0$ se alege $v_1(-a_2, a_1, 0)^T$ ca direcţie pentru Ox_1' (evident $v_1 \perp v$). $u_1 = v_1/\|v_1\|$; Se trece la calculul lui u_2.

  - Dacă $a_1 = a_2 = 0$, dar $a_3 \neq 0$ se ia $u_1(1, 0, 0)^T$ şi se trece la calc ulul lui u_2.

- `calculul lui` u_2: Pentru ca baza ortonormată (u_1, u_2, u_3) să fie dreaptă se ia $u_2 = u_3 \times u_1$. Presupunem că $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})^T$, $i = 0, 1, 2, 3$.

- se constituie matricea de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de la baza baza canonică $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

- relativ la baza $\mathcal{B}'$ (reperul $\mathcal{R}'$), rotaţia fiind o rotaţie în jurul axei Ox_3 are matricea:

$$A_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cum baza $\mathcal{B}'$ (reperul $\mathcal{R}'$) este auxiliară, se determină matricea rotaţiei, relativ la baza iniţială $\mathcal{B}$ astfel:

$$A_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^T$$

- Astfel expresia analitică a rotaţiei unui vector $w = \overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ (sau a punctului $M(x_1, x_2, x_3)$) în jurul axei de direcţie v este: $R_\theta^v(w) = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$, unde:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dacă însă corpul se roteşte în jurul unei axe ce nu trece prin origine, ci printr-un punct arbitrar C al corpului, atunci se efectuează mai întâi o translaţie a sistemului de axe, cu originea în C şi apoi se determină coordonatele corpului relativ la reperul $\mathcal{R}_C = (C; e_1, e_2, e_3)$ şi se construieşte rotaţia de centru C şi axă v, ca mai sus.