Probleme de antrenament pentru lucrarea II

Pentru lucrare folosiţi problemele de probabilităţi postate pentru parţial şi aceste probleme relativ la distribuţii continue.

1. Un server WEB este supraîncărcat dacă primeşte mai mult de 25 cereri de pagini într-o secundă. Dacă traficul are media de 1000 cereri pe minut, care este probabilitatea unei supraîncărcări?

2. Numărul mediu al căderii conexiunii internet la Căminul 7 este de 5 ori pe săptămână. Care este probabilitatea ca numărul căderilor de săptămâna viitoare să fie de cel mult 2?

Indicaţie: Poisson.

3. Fie X o v.a. ce are funcţia de repartiţie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x-3) & \text{dacă } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 4 \end{cases} \quad (1)$$

Să se calculeze probabilităţile $P(X \leq 13/4)$, $P(X > 11/3)$, $P(7/2 < X < 5)$.

4. O variabilă aleatoare are funcţia de repartiţie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Să se determine numărul real x cu proprietatea că $P(X \leq x) = 0.25$.

5. Distribuţia de probabilitate a notelor la o disciplină depinde de un parametru $\theta > 0$. Această distribuţie este:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

(parametrul $\theta > 0$ diferă de la o disciplină la alta). Variabila aleatoare care ia ca valori notele studenţilor la o disciplină este $Y = 10X$, unde X are densitatea f_θ.
a) Să se verifice că f este într-adevăr o densitate de probabilitate;

b) Să se calculeze probabilitatea ca $(Y > 5)$ şi să se deducă când rezultatele la o disciplină sunt mai bune: pentru $\theta < 1$ sau pentru parametrul $\theta > 1$.

6. Timpul de aşteptare, T, măsurat în minute, pentru a primi acces la un server internet are distribuţia de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1} & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

unde θ este un parametru, caracteristic fiecărui server.

Să se determine parametrii θ pentru care f este densitate de probabilitate. Pentru un astfel de parametru particular, calculaţi funcţia de repartiţie a lui T şi cu ajutorul ei deduceţi care este probabilitatea ca timpul de aşteptare T să fie de cel mult 45 secunde.

7. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

a) Să se verifice că f este o densitate de probabilitate;
b) Să se determine funcţia de repartiţie asociată;
c) Să se calculeze probabilitatea $P(-0.5 \leq X < 3)$, unde X este o v.a. f–distribuită.

8. Fie $g(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, 1]$. Să se determine constanta c astfel încât funcţia,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -1 \\ g(x) & \text{dacă } x \in (-1, 1] \\ 0 & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \tag{4}$$

să fie o densitate de probabilitate. Dacă X este o v.a. f–distribuită, să se calculeze $P_B(A)$, unde $A = (X < 0.75)$, iar $B = (X \geq 0.3)$.

9. Să se verifice dacă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{3x} & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

este sau nu densitate de probabilitate. În caz afirmativ să se calculeze $P(0 \leq X \leq 1.5)$, unde X este o v.a. f–distribuită.

10. Evaluarea candidaţilor pentru un post de programator la o companie software se face folosind un punctaj pe o scara de la 0 la $\theta > 0$. Densitatea de probabilitate a puctajului este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \theta/2}{\theta^2} & \text{dacă } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Care este probabilitatea ca punctajul realizat de un candidat selectat la întâmplare să fie mai mare de $2\theta/3$?

11. Fie X o variabilă aleatoare continuă şi funcţia f definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} c\, e^{3-x} & \text{dacă } 3 \leq 3x \leq 6 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a variabilei X.
b) $P(4 \leq X \leq 5.5$, c) $P(4 < X \leq 7$, d) $P(X > 4.5)$. e) $P(X < 5|X > 2)$.

12. Tramvaiul 1 trece prin staţia S din 15 în 15 minute. Un călător soseşte la întâmplare în staţie. Timpul lui de aşteptare este măsurat de variabila aleatoare X, care este uniform distribuită în intervalul $(0, 15)$. Să se calculeze probabilitatea ca timpul de aşteptare să fie cuprins între 5 şi 10 minute (inclusiv).

13. Dacă generaţi un număr aleator u uniform distribuit pe $[0, 1)$ care este probabilitatea ca $|u - 1/2| < 1/4$?

14. Unghiul de ascensiune a unei rachete, cu mişcare aleatoare, este o v.a. X ce are funcţia de repartiţie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x & \text{dacă } x \in [0, \pi/2] \\ 1 & \text{dacă } x > \pi/2 \end{cases}$$

a) Să se determine densitatea de probabilitate a lui X.
b) Pentru ce valoare x avem că $P(X > x) = 0.5$?

15. O v.a. X ce are funcţia de repartiţie

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

se zice că are distribuţia de probabilitate logistică.

Să se arate că dacă U este o v.a. uniform distribuită pe $[0, 1)$, atunci $X = \ln \dfrac{U}{1 - U}$ are distribuţia de probabilitate logistică.

Cum simulaţi o v.a. ce este logistic distribuită? Se poate aplica metoda inversării?

16. Un bancomat este alimentat de banca proprietară în fiecare zi la aceeaşi oră. În decursul timpului s-a observat că suma retrasă prin bancomat în milioane RON (exprimată ca $10^6 \times x$, $0 < x \leq 1$) în cele două 24 de ore dintre două realimentări este o variabilă aleatoare X ce are densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Ce sumă trebuie să depună banca zilnic în depozitul bancomatului pentru ca, cu o probabilitate de 0.99, să asigure suma solicitată în intervalul de 24 de ore dintre două alimentări.

b) Cum simulaţi un şir de 30 de numere ce reprezintă sumele zilnice retrase de la bancomat în luna aprilie?

c) Ştiind că suma retrasă zilnic este mai mare decât $10^6 \times 0.3$ RON să se determine funcţia de repartiţie a v.a. aleatoare X condiţionată de evenimentul $(X \geq 0.3)$: $(X|X \geq 0.3)$.

17. O v.a. X are densitatea de probabilitate:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{dacă } x \in [-2, 2] \\ \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Fie $Y = 1/X$. Să se calculeze $P(Y \leq 1/2)$

Indicaţie: Se determină funcţia de repartiţie a lui X şi apoi se exprimă adecvat şi cu mare atenţie $P(Y \leq 1/2) = P(1/X \leq 1/2)$ cu ajutorul repartiei lui X.

18. Dacă generaţi un şir de numere aleatoare din legea de probabilitate $\text{Exp}(\theta = 30)$ şi asociaţi histograma subşirului de valori mai mari decât 15 ce densitate de probabilitate credeţi că va aproxima histograma? Pentru a da răspunsul corect şi a justifica rezultatul acestei simulări, calculaţi funcţia de repartiţie a v. a. $Y = (X|X > 15)$, unde $X \sim Exp(\theta = 30)$ şi apoi densitatea de probabilitate f_Y.

În rezolvarea problemei aveţi nevoie de repartiţia lui X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta} & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

19. Fie X o variabilă aleatoare ce are densitatea de probabilitate f_X. Ce probabilităţi reprezintă integralele $\int_a^\infty f_X(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f_X(x)\,dx$?

Dacă simulatorul varibilei aleatoare X generează 35 de valori din 350 în intervalul $[a, a + 0.25)$, cum se estimeaza din această "informaţie" probabilitatea
$P(a \leq X < a + 0.25)$? Ce înalţime are bara histogramei, desenată deasupra intervalului $[a, a + 0.25)$?

Indic: Vezi definiţia histogramei şi interpretarea ariei unei bare din histogramă.

20. Simulatorul unei variabilei aleatoare X generează 34 de valori, din 170, în intervalul $[1, 1.3)$. Estimaţi probabilitatea $P(1 \leq X < 1.3)$? Ce înălţime are bara histogramei desenată deasupra intervalului $[1, 1.3)$?

21. Joburile ce sosesc la un server necesită o durata de procesare modelată de distribuţia exponenţială de parametru $\theta = 125ms$. Disciplina de servire a procesorului este de tip Round Robin, adică un job neexecutat complet în 100ms este rutat din nou la coada de aşteptare. Să se determine probabilitatea ca un job ce soseşte să fie forţat să aştepte o a doua rundă de procesare. Din 600 de joburi ce sosesc într-o zi de lucru, ce procent se aşteaptă să fie executate într-o singură rundă?

22. Pentru a estima parametrii unui sistem se simulează o variabilă aleatoare X ce are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se calculeze funcţia de repartiţie F a variabilei aleatoare X şi să se calculeze $P(-0.35 \leq X < 0.25)$. Să se arate că variabila X se poate simula prin metoda inversării. Daţi pseudocodul algoritmului de simulare.

23. Lungimea intervalului de timp, X, între traficul pe net a două pachete de informaţie este aleatoare şi are densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq 2 \text{ secunde} \\ 0, & x < 2\,\text{secunde} \end{cases}$$

Să se determine funcţia de repartiţie F_X şi se arate că X se poate simula prin metoda inversării. Daţi pseudocodul pentru simulare. Pentru $\alpha = 4$ să se calculeze $P(X \geq 7\text{sec})$.

24. O variabilă aleatoare, X, ce dă numărul de secunde necesare procesorului pentru execuţia unui job, are distribuţia Pareto

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{-1-\alpha} & x \geq 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \qquad \alpha = 1.5$$

Să se calculeze $P(X > b | X > a)$ (probabilitatea ca numărul de secunde să fie mai mare decât b ştiind că deja a fost mai mare decât a), unde $1 \leq a < b$.