Cursul 5

Subspaţiul NULL şi subspaţiul coloanelor unei matrici. Spaţii vectoriale înzestrate cu un produs scalar

5.1 Subspaţii vectoriale (continuare)

În cursul precedent am dat ca o primă modalitate de a defini un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen, de matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Ax = \theta$.

Subspaţiul $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \theta$ se numeşte **subspaţiul null** al matricii A, notat Null(A).

O a doua modalitate de a defini un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^n$ (şi in orice alt spaţiu $V/\mathbb{K}$) este următoarea:

2. Subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, finit generat.

Considerăm un sistem finit de vectori din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare posibile ale vectorilor din acest sistem se notează span$(\mathcal{S})$,

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \text{ astfel încât } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k\} \tag{5.1}$$

Să arătăm că această mulţime este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

a) Dacă $s_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in \text{span}(\mathcal{S})$ şi $s_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k \in \text{span}(\mathcal{S})$, atunci $s_1 + s_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)v_k \in \text{span}(\mathcal{S})$.

b) $\lambda s_1 = \lambda\alpha_1 v_1 + \lambda\alpha_2 + \dots + \lambda\alpha_k v_k \in \text{span}(\mathcal{S})$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$. Deci span$(\mathcal{S})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, numit **subspaţiul generat de sistemul de vectori** $\mathcal{S}$.

Dacă spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ coincide cu span$(\mathcal{S})$, atunci $\mathcal{S}$ se numeşte **sistem de generatori** pentru $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 1. Să se determine ecuaţiile subspaţiului liniar al lui $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ generat de vectorii $v_1 = (-2, 1, 4)^T, v_2 = (3, 2, 0)^T$.

Notăm cu S subspaţiul generat de cei doi vectori.

$$S = \{v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a.î } v = \alpha v_1 + \beta v_2, \}$$

Înlocuind vectorii din relaţie cu coordonatele lor avem:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + 3\beta \\ \alpha + 2\beta \\ 4\alpha \end{bmatrix}$$

Mulţimea vectorilor din S coincide cu mulţimea vectorilor $(x, y, z)^T$ pentru care sistemul:

$$\begin{array}{rcl} -2\alpha + 3\beta & = & x \\ \alpha + 2\beta & = & y \\ 4\alpha & = & z \end{array}$$

este compatibil ($\Leftrightarrow$ există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $v = \alpha v_1 + \beta v_2$). Condiţia de compatibilitate se obţine impunând ca rangul matricii sistemului să coincidă cu rangul matricii prelungite. Rangul matricii A a sistemului este 2. Pentru ca şi rangul matricii

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & x \\ 1 & 2 & y \\ 4 & 0 & z \end{bmatrix}$$

să fie 2, impunem condiţia ca determinantul

$$\det(\overline{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & x \\ 1 & 2 & y \\ 4 & 0 & z \end{vmatrix} = 0,$$

şi astfel condiţia de compatibilitate devine: $-8x + 12y - 7z = 0$. Deci subspaţiul generat de cei doi vectori este mulţimea vectorilor $v = (x, y, z)^T$ din $\mathbb{R}^3$ ale căror coordonate verifică relaţia $-8x + 12y - 7z = 0$, adică mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen cu o singură ecuaţie.

Exemplul 2. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ se dă sistemul de vectori

$$\mathcal{S} = \{v_1 = (1, -2)^T, v_2 = (-2, 4)^T\}$$

Să se determine subspaţiul generat de $\mathcal{S}$.

Conform definiţiei subspaţiului generat, avem că:

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{w \in \mathbb{R}^2 | \ \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \text{ a.î } w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\}$$

Înlocuind vectorii v_1, v_2 cu cuplurile de numere reale ce îi reprezintă şi efectuând operaţiile avem:

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{w = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = (\alpha_1 - 2\alpha_2, -2\alpha_1 + 4\alpha_2)^T\}$$

Deci $\text{span}(\mathcal{S}) = \{w = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0\}$. Din punct de vedere geometric, subspaţiul generat de cei doi vectori coincide cu dreapta ce trece prin origine, de ecuaţie $y = -2x$.

Concluzie: Avem două modalităţi de a da un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$:

1. Printr-un sistem liniar şi omogen $Ax = \theta$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, adică indicând ecuaţiile subspaţiului;

2. Dând un sistem de generatori, $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, ai subspaţiului.

Exemplul 3. Să se determine dimensiunea subspaţiului vectorial al lui $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ generat de vectorii $v_1 = (1,2,1)^T, v_2 = (1,0,2)^T, v_3 = (5,6,7)^T$.

Pentru a determina dimensiunea subspaţiului $S = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$, căutăm o bază în acest subspaţiu printre vectorii v_1, v_2, v_3. Pentru aceaasta determinăm un subsistem maximal de vectori liniar independenţi ai sistemului de vectori v_1, v_2, v_3. Din cursurile precedente ştim că acest sistem maximal se determină din forma scară redusă, S_A^0, a matricii $A = [v_1|v_2|v_3]$.

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Prin transformări elementare pe linie obţinem forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă că matricea S_A^0, şi deci şi A au rangul 2, diferit de numărul de vectori (3). prin urmare vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi, dar analizând forma scară S_A^0 rezultă că vectorii v_1, v_2 sunt liniar independenţi (pentru că ei sunt vectorii corespunzători coloanelor ce conţin pivoţi). Prin urmare subsitemul maximal de vectori liniar independenţi este (v_1, v_2). v_3 se exprimă ca $v_3 = 3v_1 + 2v_2$. Această particularitate ilustrează că span

$$\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \text{span}(v_1, v_2)$$

Într–adevăr, prin definiţie S este generat de (v_1, v_2, v_3), deci:

$$\begin{aligned} S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3(3v_1 + 2v_2) \\ &= (\underbrace{\alpha_1 + 3\alpha_3}_{\beta_1})v_1 + (\underbrace{\alpha_2 + 2\alpha_3}_{\beta_2})v_2\} \end{aligned}$$

Prin urmare o bază în S este constituită din vectorii (v_1, v_2), şi astfel dimensiunea subspaţiului S este $\dim(S) = 2$.

5.2 Construcţia unei baze speciale în subspaţiul Null(A)

Din exemplele date rezultă că pentru a determina o bază într-un subspaţiu liniar de ecuaţii $Ax = \theta$ se procedează în mod uzual astfel:

• se stabileşte un determinant principal şi necunoscutele principale ale sistemului şi cele secundare.

• Rezolvând ecuaţiile ce au coeficienţii în determinantul principal găsim o bază.

Cum există mai multe posibilităti de a stabili determinantul principal, înseamnă că două persoane diferite pot obţine baze diferite (ceea ce nu e greşit).

De exemplu sistemul

$$\begin{aligned} 2x - y + z = &= 0 \\ -x + 3y - 5z &= 0 \\ 3x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

de determinat 0. Dacă alegem determinatul principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

şi rezolvăm ecuaţiile principale, obţinem o bază în spaţiul soluţiilor, iar dacă alegem alt determinant principal, obţinem altă bază (verificaţi!).

Pentru a avea o modalitate algoritmică (şi nu una subiectivă) de a determina o bază într-un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, de ecuaţii $Ax = \theta$, se exploatează faptul că oricare ar fi sistemul liniar şi omogen, $Ax = \theta$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, acesta este echivalent (are aceeaşi mulţime a soluţiilor) cu sistemul $S_A^0 x = 0$, unde S_A^0 este forma scară redusă a matricii A.

Arătăm mai întâi printr-un exemplu cum din rezolvarea sistemului echivalent $S_A^0 x = \theta$ putem deduce o bază specială în subspaţiul de ecuaţii $Ax = \theta$ şi apoi formulăm cazul general.

Exemplul 4. Să se determine o bază în subspaţiul liniar $S = \{x \in \mathbb{R}^5 | Ax = \theta\}$ adică o bază în subspaţiul liniar al lui $\mathbb{R}^5$ ce constă din soluţiile sistemului $Ax = \theta$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & -10 \\ 3 & -3 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & 7 & -9 & -22 \\ 7 & -7 & 2 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cum prin transformări elementare pe linie mulţimea soluţiilor nu se schimbă, subspaţiul soluţiilor, S, coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului ce are ca matrice forma scară redusă a lui A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinantul principal Δ_p se obţine din elementele de intersecţie ale liniilor şi coloanelor ce conţin pivoţii, adică a liniilor 1,2 cu coloanele 1, 3:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Deci, rangul matricii S_A^0 este $r = 2$. Prin urmare necunoscutele x_1 şi x_3 sunt necunoscute principale, iar $x_2 = \alpha_1, x_4 = \alpha_2, x_5 = \alpha_3$ sunt necunoscute secundare.

Rezolvând ecuaţiile principale 1 şi 2 (1 şi 2 sunt liniile ce conţin pivoţii):

$$\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

în raport cu x_1 şi x_3 în funcţie de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ obţinem:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ x_3 & = & \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{array} \tag{5.2}$$

Astfel o soluţie arbitrară $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ a sistemului este:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ x_2 & = & \alpha_1 \\ x_3 & = & \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ x_4 & = & \alpha_2 \\ x_5 & = & \alpha_3 \end{array} \tag{5.3}$$

O soluţie arbitrară a sistemului se poate exprima astfel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2} + \alpha_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Există o corespondenţa bijectivă între mulţimea soluţiilor sistemului şi mulţimea tripletelor de parametri, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Datorită acestei corespondenţe bijective între soluţii şi triplete de parametri, rezultă că vectorii u_1, u_2, u_3 sunt liniar independenţi, deoarece soluţia banală corespunde doar lui $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ şi astfel relaţia $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta$ are loc doar dacă toţi scalarii sunt zero.

Deoarece orice soluţie se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor liniar independenţi u_1, u_2, u_3, aceşti vectori constituie **baza specială** în subspaţiul Null(A) al spaţiului $\mathbb{R}^5$.

Bazat pe acest exemplu concret, putem sintetiza modalitatea de a determina baza specială într-un subspaţiu liniar de ecuaţii $Ax = \theta$:

a) Se determină forma scară redusă, S_A^0 a matricii sistemului $Ax = \theta$;

b) Dacă A are rangul r şi pivoţii din S_A^0 sunt plasaţi în poziţiile $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$, atunci determinantul principal al sistemului $S_A^0 x = \theta$ se alege ca fiind determinantul ce conţine elementele de intersecţie ale liniilor şi coloanelor pivoţilor, adică liniile $1, 2, \dots, r$ şi coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Astfel din cele n necunoscute, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ale sistemului $S_A^0 x = \theta$, $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$, sunt necunoscute principale, iar restul $n-r$ sunt necunoscute secundare. Să le notăm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$.

Rezolvând sistemul format din primele r ecuaţii în raport cu cele r necunoscute principale, în funcţie de cele secundare, obţinem că o soluţie arbitrară a sistemului $S_A^0 x = \theta$, deci şi a sistemului $Ax = \theta$, este:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-r} \tag{5.4}$$

Vectorii $u_i \in \mathbb{R}^n$ sunt liniar independenţi (deoarece o combinaţie liniară a lor dă vectorul nul dacă şi numai dacă toate necunoscutele secundare sunt zero) şi pentru că relaţia (5.4) ilustrează că ei generează subspaţiul soluţiilor, rezultă că formează o bază în acest subspaţiu. Numim această bază, baza specială în subspaţiul Null(A).

În concluzie: **Dimensiunea subspaţiului liniar al lui $\mathbb{R}^n$, de ecuaţii $\mathbf{Ax} = \theta$, unde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ sau echivalent, dimensiunea subspaţiului Null al matricii A, Null(A) este $\mathrm{n}-\mathrm{r}$, unde n este numărul coloanelor matricii A, iar r este rangul matricii A.**

Observaţie. Baza dedusă din rezolvarea sistemului $S_A^0 x = \theta$, cu alegerea determinatului principal, aşa cum am precizat mai sus, conduce doi rezolvitori la aceeaşi bază. În toate pachetele software de calcul numeric, baza în spaţiul soluţiilor unui sistem $Ax = \theta$ se deduce ca fiind baza ”unică” ce rezultă din rezolvarea sistemului $S_A^0 x = \theta$.

Tema propusă, având ca termen, miercuri seara, ora 22, este următoarea:

Să se deducă algoritmul de constituire a vectorilor bazei speciale a subspaţiului Null al unei matrici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (sau echivalent al unui subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, de ecuaţie $Ax = \theta$) în funcţie de coloanele din forma scară redusă, S_A^0. Pentru aceasta urmăriţi exemplul rezolvat în curs şi observaţi regula de calcul a cooordonatelor vectorilor din bază.

- **Date de intrare:** O matrice în forma scară redusă care fie că este setată în main, fie este citită dintr-un fişier în care se precizează dimensiunile m, n ale matricii şi elementele matricii S_A^0. Forma scara redusă o puteţi calcula în prealabil cu `redscara.c`, trimis anterior.
- Deduceţi pe o foaie de hârtie modalitatea de construire a bazei speciale şi apoi implementaţi algoritmul rezultat. Într-un fişier `txt` sau `doc`, descrieţi algoritmul dedus şi îl trimiteti într-o arhivă cu codul `C/C++`. Daţi arhivei numele `NumeStudent.zip`.
- Afişaţi baza pe ecran sau o scrieti într-un fişier.

5.3 Subspaţiul coloanelor unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$

Considerăm o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, interpretată ca fiind matricea asociată unui set de k vectori din $\mathbb{R}^n$, adică $A = [v_1|v_2 \ldots |v_k]$.

Subspaţiul lui $\mathbb{R}^n$ generat de coloanele matricii A, span$(v_1, v_2, \dots, v_k)$, se numeşte subspaţiul coloanelor lui A şi se notează col(A).

Pentru a determina dimensiunea acestui subspaţiu, trebuie găsit numărul maxim de vectori liniar independenţi din setul $v_1, v_2, \dots, v_k$. Reducând matricea A la forma scară redusă, S_A^0, deducem că coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$, în care sunt plasaţi pivoţii sunt coloane independente şi deci şi vectorii $v_{j_1}, v_{j_j}, \dots, v_{j_r}$ sunt liniar independenţi. Prin urmare dimensiunea subspaţiului coloanelor matricii A este eglă cu numărul de pivoţi, adică cu rangul matricii A.

Având dată o matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, avem următoarea relaţie între dimensiunile subspaţiilor vectoriale asociate acestei matrici:

$$\boxed{\text{dim}(\text{Null}(A)) + \text{dim}(\text{col}(A)) = n - r + r = n}$$

5.4 Produs scalar pe un spaţiu vectorial real

Noţiunile ce se definesc în acest curs se referă doar la **spaţii vectoriale, V, peste corpul** $\mathbb{R}$, nu şi peste corpul $\mathbb{C}$.

Din cele studiate pâna în prezent avem posibilitatea să adunăm vectori sau să-i înmulţim cu scalari. Într-un spaţiu vectorial real, V, putem preciza şi direcţia şi sensul unui vector. Şi anume:

Definiţia 5.4.1 *Doi vectori $v, w \in V$ au aceeaşi* **direcţie** *sau sunt coliniari, şi notăm $v||w$, dacă există un scalar nenul $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $w = \lambda v$.*

Dacă $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ şi $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, atunci $w = \lambda v$ este echivalent cu:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix},$$

adică, $y_i = \lambda x_i$, $i = \overline{1,n}$. În cazul în care nici o coordonată a lui v nu se anulează, putem scrie

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = \lambda$$

Cu alte cuvinte în acest caz doi vectori din $\mathbb{R}^n$ sunt coliniari dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale.

Exemplul 5. Să se testeze dacă vectorii $v = (-1, 2, 0, 3)^T$, $w = (2, -4, 0, -6)^T \in \mathbb{R}^4$ sunt sau nu coliniari.

Rapoartele coordonatelor din aceeaşi poziţie sunt:

$$\frac{2}{-1}, \frac{-4}{2}, \frac{0}{0}, \frac{-6}{3}$$

Observăm că rapoartele 1, 2 şi 4 sunt egale:

$$\lambda = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = -2$$

La prima vedere suntem tentaţi să afirmăm că raportul al treielea nu are sens, deoarece în analiza matematică $0/0$ este caz de nedeterminare. Dar scrierea rapoartelor este doar o operaţie ajutătoare, pentru că practic coliniaritatea revine la a verifica dacă $y_i = \lambda x_i$, ori în cazul nostru $0 = \lambda 0$, adică $0 = -2 \cdot 0$, şi deci cei doi vectori sunt coliniari. Scrierea rapoartelor este auxiliară şi reprezintă o modalitate rapidă de a testa coliniaritatea.

Dacă vectorii v şi w sunt coliniari, $v||w$, şi $w = \lambda v$, cu $\lambda > 0$, atunci spunem că v şi w au aceeaşi **direcţie şi acelaşi sens**. Dacă scalarul λ este negativ, atunci vectorii v şi w au aceeaşi direcţie şi sens opus.

Exemplul 6. Vectorii v, w din exemplul precedent au aceeaşi direcţie, dar sens opus. Vectorii $u_1 = (0, -6, 15)$, $u_2 = (0, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, pentru că $u_2 = 0.5u_1$.

Precizăm că direcţia şi sensul unui vector are relevanţă în special în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/R$.

În fizică vectorii din plan, respectiv din spaţiul tri-dimensional sunt caracterizaţi în plus şi de modulul sau mărimea vectorului. Pentru a asocia unui vector dintr-un spaţiu vectorial real, arbitrar, modulul său, vom defini noţiunea de produs scalar a doi vectori, care în plus ne va permite să caracterizăm şi poziţia relativă a doi vectori (unghiul a doi vectori).

Definiţia 5.4.2 *Fie V un spaţiu vectorial real. O aplicaţie notată $< >$ sau $\cdot$,*

$$<>: V \times V \to \mathbb{R} \tag{5.5}$$

care asociază la orice pereche de vectori $(v, w) \in V \times V$, un scalar notat $< v, w >$ sau $v{\cdot}w$ şi verifică condiţiile:

PS1. $< v, v > \geq 0$, $\forall\ v \in V$ *şi* $< v, v >= 0$ *dacă şi numai dacă* $v = \theta$*;*

PS2. $< v, w >=< w, v >, \forall\ v, w \in V$ *;*

PS3. $< \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w >= \alpha_1 < v_1, w > +\alpha_2 < v_2, w >$, $\forall\ v_1, v_2, w \in V$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*;*

se numeşte produs scalar pe V.

Discuţie:

• Numele produsului este sugestiv, deoarece asociază la doi vectori un scalar.

• Proprietatea PS1 afirmă că produsul unui vector cu el însuşi este un număr pozitiv, şi este egal cu zero doar dacă vectorul este vectorul nul al spaţiului. Datorită acestei proprietăţi se spune că **produsul scalar este pozitiv definit**.

• Proprietatea PS2 se numeşte **proprietatea de simetrie a produsului scalar**. (Atenţie, nu este comutativitate, pentru că produsul scalar nu este operaţie internă, adică nu asociază la doi vectori un vector!).

• În notaţia $v \cdot w$ pentru produsul scalar, proprietatea PS3 devine ”foarte naturală”:

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \cdot w = \alpha_1 (v_1 \cdot w) + \alpha_2 (v_2 \cdot w)$$

PS3 se numeşte **liniaritatea produsului scalar în primul argument** (factor).

- Datorită simetriei produsului scalar avem şi liniaritate în al doilea argument:

$$< v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w2 >= \beta_1 < v, w_1 > + \beta_2 < v, w_2 >, \ \forall\ v, w_1, w_2 \in V, \forall\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Proprietate: Într-un spaţiu vectorial $(V, <, >)$ produsul scalar dintre un vector v şi vectorul nul θ este 0:

$$< v, \theta >= 0, \quad \forall\ v \in V. \tag{5.6}$$

Într-adevăr, $\theta = v - v$. Deci $< v, \theta >=< v, v - v >=< v, v > - < v, v >= 0$.

Exemplul 7. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ se defineşte produsul scalar standard a doi vectori astfel:

$$< v, w >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad \forall\ v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \tag{5.7}$$

Notaţia produsului scalar standard în CS: În CS produsul scalar a doi vectori $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ se notează $v^T w$, adică produsul matricial dintre matricea linie v^T şi matricea coloană w, deoarece:

$$< v, w >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = v^T w$$

Un spaţiu vectorial real V, de dimensiune finită, n, pe care s-a definit un produs scalar se numeşte **spaţiu vectorial euclidian** şi se notează $(V_n, <>)$ sau $(V_n, \cdot)$.

5.4.1 Mărimi şi noţiuni definite cu ajutorul produsului scalar

1. Norma sau modulul unui vector

Definiţia 5.4.3 *O aplicaţie $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, care asociază unui vector $v \in \mathbb{R}$ un scalar, notat $\|v\|$, se numeşte normă pe spaţiul vectorial real V dacă verifică următoarele condiţii:*

N1. $\|v\| \geq 0$ *şi* $\|v\| = 0$, *dacă şi numai dacă* $v = \theta$;

N2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall\ v, w \in V$;

N3. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\forall\ v \in V$ *şi* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Un spaţiu vectorial pe care s-a definit o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat*.

Se poate arăta că într-un spaţiu vectorial euclidian, produsul scalar defineşte o normă astfel:

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >} \tag{5.8}$$

Proprietatea PS1 ne asigură că produsul scalar al unui vector cu el însuşi, $< v, v >$, este un număr poziţiv şi deci are sens radical din $< v, v >$. Norma unui vector dă mărimea sau modulul vectorului.

Exemplul 8. În spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^n, <,>)$, norma unui vector $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ este:

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{5.9}$$

Exemplul 9. În spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$ se dau vectorii $v = (-3, 1, 4)^T$, $w = (2, -5, 1)^T$. Să se calculeze produsul scalar $< v, w >$ şi să se compare normele celor doi vectori.

Produsul scalar $< v, w >= -3 \cdot 2 + 1(-5) + 4 \cdot 1 = -6 - 5 + 4 = -7$;
$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26} = 5.099$, $\|w| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1} = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30} = 5.477$. Deci $\|w\| > \|v\|$.

2. Versorul direcţiei şi sensului unui vector

Fiind dat un vector $v \neq \theta$ din spaţiul vectorial euclidian $(V, <,>)$, există o infinitate de vectori coliniari cu v (ce au aceeaşi direcţie ca v), şi anume toţi vectorii de forma αv, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Vectorii $w = \alpha v$, $\alpha > 0$ au acelaşi sens ca v, iar cei pentru care $\alpha < 0$ au sens opus. Vectorii αv, corespunzători la diferiţi scalari, α, au norme diferite. Dintre toţi vectorii ce au aceeaşi direcţie şi sens ca v alegem unul particular, şi anume, acela care are norma egală cu 1:

Definiţia 5.4.4 *Fie v un vector nenul din spaţiul vectorial euclidian $(V, <,>)$. Vectorul ce are aceeaşi direcţie şi sens ca v şi norma egală cu 1, se numeşte* **versorul lui v** *sau* **vector unitar asociat lui v** *şi se notează v^0.*

Conform acestei definiţii, versorul se exprimă astfel:

$$v^0 = \alpha v, \ \alpha > 0, \quad \text{şi} \ \|v^0\| = 1.$$

Să deducem o formulă de calcul a versorului lui $v \neq \theta$: Calculăm norma în ambii membri ai egalităţii $v^0 = \alpha v$: $\|v^0\| = \|\alpha v\| = |\alpha|\|v\| = \alpha\|v\|$. Cum norma lui v^0 este egală cu 1, rezultă că $\alpha\|v\| = 1$, adică $\alpha = \dfrac{1}{\|v\|}$ şi deci versorul lui v se exprimă în funcţie de v astfel:

$$v^0 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|} \tag{5.10}$$

Exemplul 10. Să se determine versorul vectorului $v = (5, -1, 4, 3)^T \in \mathbb{R}^4$.

Norma vectorului v, este $\|v\| = \sqrt{25 + 1 + 16 + 9} = \sqrt{51}$. Deci versorul vectorului v este:

$$v^0 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(5, -1, 4, 3)^T}{\sqrt{51}} = \left(\frac{5}{\sqrt{51}}, \frac{-1}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}}\right)^T$$

3. Cosinusul unghiului a doi vectori

Pentru a putea defini unghiul dintre doi vectori, stabilim în prealabil o relaţie între produsul scalar a doi vectori şi normele acestor vectori.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski–Schwartz Într-un spaţiu vectorial V pe care s-a definit un produs scalar are loc inegalitatea:

$$|<v,w>| \leq \|v\|\|w\|, \quad \forall\, v,w \in V. \tag{5.11}$$

Demonstraţie: Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalar arbitrar şi vectorul $u = \lambda v - w \in V$. Produsul scalar fiind pozitiv definit, avem că $<u,u> \geq 0$, adică $<\lambda v - w, \lambda v - w)> \geq 0$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Aplicând proprietăţile produsului scalar avem succesiv:

$$\begin{aligned}&<\lambda v - w, \lambda v - w> = \lambda^2 <v,v> - \lambda <v,w> - \lambda <w,v> + <w,w> \geq 0, \;\Leftrightarrow\\ &<\lambda v - w, \lambda v - w> = \lambda^2 <v,v> - 2\lambda <v,w> + <w,w> \geq 0\end{aligned}$$

Deoarece $\sqrt{<v,v>} = \|v\|$, rezultă că $<v,v> = \|v\|^2$, $<w,w> = \|w\|^2$ şi deci:

$$<\lambda v - w, \lambda v - w> = \lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda <v,w> + \|w\|^2 \geq 0$$

Se ştie că o funcţie polinomială de grad 2: $a\lambda^2 + b\lambda + c$, având coeficientul $a > 0$, este pozitivă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă determinantul său, $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$. În cazul nostru $\Delta = 4 <v,w>^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2$. Deci,

$$<\lambda v - w, \lambda v - w> \geq 0, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow <v,w>^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \leq 0 \;\Leftrightarrow <v,w>^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$$

Extrăgând radicalul din ultima inegalitate şi ţinând seama că $\sqrt{x^2} = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$, avem:

$$|<v,w>| \leq \|v\|\|w\|$$

$\square$

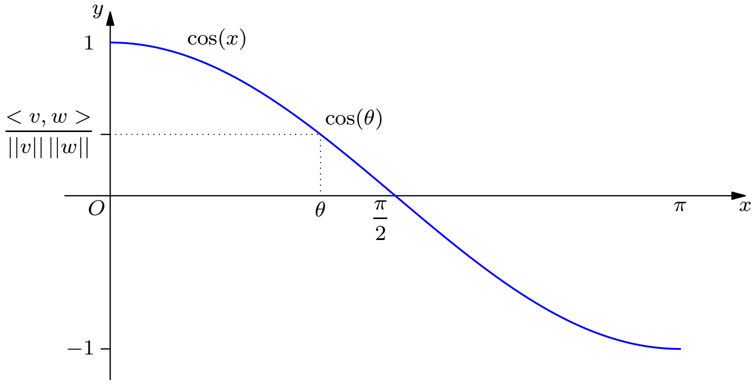
Pentru **doi vectori nenuli**, $v, w \in V$, inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz se exprimă în mod echivalent astfel:

$$\frac{|<v,w>|}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Se ştie că funcţia $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ este bijectivă (deci inversabilă) şi inversa sa este $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Deoarece numărul $\dfrac{<v,w>}{\|v\|\,\|w\|}$ asociat la doi vectori nenuli, v, w, aparţine intervalului $[-1,1]$, rezultă că există un unic $\theta \in [0,\pi]$ astfel încât

$$\cos\theta = \frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|}\right) \tag{5.12}$$



Unghiul de măsură θ îl numim **unghiul dintre vectorii v şi w**, şi notăm:

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|} \tag{5.13}$$

Observăm că cosinusul unghiului a doi vectori este egal cu produsul scalar al versorilor celor doi vectori:

$$\cos\theta = \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|} =< \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} >=< v^0, w^0 >$$

În *Machine learning* cosinusul este folosit ca o măsură de similaritate a datelor (detalii în cursul următor).

Observaţia 5.4.1 *La fizică produsul scalar a doi vectori din plan s-a definit ca fiind produsul modulelor celor doi vectori cu cosinusul unghiului dintre vectori. Din relaţia (5.13) rezultă că în orice spaţiu vectorial cu produs scalar, avem că:*

$$< v, w >= \|v\|\|w\| \cos(\widehat{v,w}). \tag{5.14}$$

În concluzie cosinusul unghiului a doi vectori dă informaţie despre poziţia relativă a doi vectori într-un spaţiu vectorial.

Ţinem minte că unghiul a doi vectori nenuli, v, w, este un unghi având în radiani o valoare θ între 0 şi π (sau în grade $180°$).

Notăm măs$(\widehat{v,w})$=$\theta \in [0, \pi]$

Observăm că dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este zero:
$< v, w >= 0$, atunci cosinusul unghiului dintre cei doi vectori este 0: $\cos(\widehat{v,w}) = 0$. Deci măsura unghiului $(\widehat{v,w})$ este $\pi/2$ (adică 90 de grade!).

• Semnul cosinusului unghiului a doi vectori nenuli este dat de produsul scalar $< v, w >$ (numitorul $||v||||w|| > 0$)

• dacă produsul scalar $< v, w >$ este pozitiv atunci $\cos(\widehat{v,w})$ este pozitiv şi deci unghiul celor doi vectori este cuprins între 0 şi $pi/2$, adică unghiul dintre vectori este ascuţit.

• dacă produsul scalar $< v, w >$ este mai mic decât zero, atunci $\cos(\widehat{v,w}) < 0$, adică unghiul este cuprins între $\pi/2$ şi π (este obtuz).

Definiţia 5.4.5 *Doi* **vectori nenuli** v, w, *din spaţiul vectorial cu produs scalar,* $(V, <, >$, *care au produsul scalar egal cu zero se numesc* **vectori ortogonali** *(perpendiculari) (cosinusul unghiului dintre ei este 0). Notăm* $v \perp w$ *şi citim* v *este ortogonal pe* w.

Observaţia 5.4.2 *Produsul scalar dintre un vector arbitrar,* v *şi vectorul nul,* θ, $< v, \theta >= 0$.

Într-adevăr, exprimând vectorul $\theta = v - v$ avem:

$$< v, \theta >=< v, v - v >=< v, v > - < v, v >= 0$$

În acest caz NU spunem că v este ortogonal pe θ. **Ortogonalitatea se defineşte doar pentru doi vectori nenuli.**

Exemplul 11. Se dau vectorii $v = (-7, 1, 3)^T, w = (0, 2, -1)^T \in \mathbb{R}^3$. Să se calculeze cosinusul unghiului dintre cei doi vectori şi să se precizeze dacă unghiul este ascuţit sau obtuz.

$$\cos(\angle v, w) = \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|} = \frac{-7 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{\sqrt{49 + 1 + 9}\sqrt{4 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{59}\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{295}}$$