Algebră liniară, Probleme relativ la dreaptă şi plan

Pentru fiecare din problemele următoare desenaţi elementele geometrice implicate. Ajută la raţionament!

1. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(-1,1,5)$ şi este perpendicular pe dreapta

$$d:\ \frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{5}$$

2. Să se scrie ecuaţiile dreptei d ce conţine punctul $P(0,-2,3)$ şi este paralelă cu dreapta:

$$d':\ \begin{cases} 3x-y+2z+7 = 0\\ -x+2y-4z = 0\end{cases}$$

3. Să se determine planul π ce conţine punctele $A(2,1,4)$, $B(-1,0,3)$ şi direcţia vectorului $v=(3,4,-7)$.

4. Să se determine ecuaţiile dreptei ce trece prin punctele $M(0,1,-3)$, $M(2,5,-1)$.

5. Deduceţi ecuaţia planului ce conţine dreptele:

$$d:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2},\quad d':\ \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

şi apoi ecuaţia planului ce conţine dreptele[1]:

$$\ell_1:\ \frac{x+5}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\quad \ell_2:\frac{x+5}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-3}$$

6. Determinaţi ecuaţia planului π ce trece prin $M(1,-2,3)$ şi este paralel cu dreptele[2]:

$$d_1:\ \begin{cases} 5x+y-2z+12 = 0\\ x-3 = 0\end{cases}\qquad d_2:\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{2}$$

[1]Observaţi că primele două drepte sunt paralele, iar următoarele două sunt concurente.

[2]Planul fiind paralel cu dreptele, conţine direcţiile celor două drepte.

7. Să se determine proiecţia ortogonală a punctului $A(1,-2,5)$ pe planul $\pi:\ x+2y+2z+1=0$ şi apoi simetricul punctului A faţa de plan.

Indicaţie: Dacă A' este proiecţia ortogonală a lui A pe planul π şi A'' simetricul (necunoscut), atunci A' este mijlocul segmentului $[A,A'']$ deci $x_{A'}=\dfrac{x_A+x_{A''}}{2}$, iar $x_{A''}=2x_{A'}-x_A$, etc.

8. Să se calculeze măsura unghiului dintre dreapta $d:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ şi planul $\pi:\ 2x-y+2z+3=0$.

9. Să se calculeze unghiul dintre planele $\pi_1:\ 4x-y-2z-11=0$, $\pi_2;\ x-2y+3z-8=0$.

10. Dintre toate planele ce trec prin dreapta

$$D:\ \begin{cases} x-3y+z-1 &= 0\\ x+2y-2 &= 0\end{cases}$$

să se determine planul π, perpendicular pe planul $\alpha:\ 3x-y+5z+7=0$.

Indicaţie: Normala la planul π este ortogonală pe vectorul director al dreptei pe care o conţine şi pe normala planului α. Fiind perpendicular pe doi vectori, direcţia lui N_π este ...

11. Se dau trei puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Cum exprimaţi vectorial condiţia de coliniaritate/necoliniaritate a celor 3 puncte? În cazul în care punctele sunt necoliniare, să se determine ecuaţia planului ce le conţine.

12. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(2,0,0)$, $M_2(0,2,0)$, $M_3(0,0,2)$.

13. Să se determine distanţa de la punctul $P(3,1,-2)$ la dreapta

$$d:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

14. Se dă dreapta d având ecuaţiile parametrice:

$$\begin{aligned} x &= -2+3t\\ y &= 4\\ z &= 1-5t\end{aligned}$$

Să se arate că direcţia acestei drepte este ortogonală pe direcţia dreptei de ecuaţii $x=0, z=0$.

15. Să se scrie ecuaţiile canonice (adică sub formă de şir de rapoarte egale) ale dreptei

$$D:\ \begin{cases} x-3y+z-1 &= 0\\ x+2y-2 &= 0\end{cases}$$

16. Să se determine ecuaţia planului ce conţine axa Ox şi este paralel cu dreapta

$$d: \begin{array}{rcl} x & = & -1+3t \\ y & = & 7-t \\ z & = & -2+2t \end{array}$$

17. Să se aleagă două puncte distincte, P, Q, pe dreapta de ecuaţii:

$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-7}{-2}$$

şi apoi să se scrie ecuaţia planului ce trece prin mijlocul segmentului PQ şi este perpendicular pe dreapta d.

18. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei

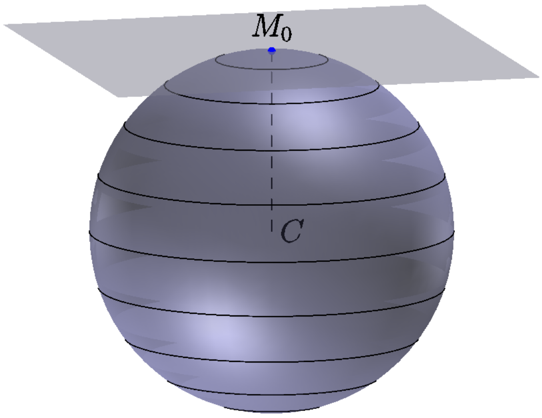
$$d: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2}$$

cu planul π de ecuaţie $2x+3y-z-10=0$, prin metoda cea mai simplă, ce constă din rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscuta!!!.

19. Fie $C(a,b,c)$ un punct fixat şi $R>0$ un număr pozitiv. Sfera cu centrul în C şi de rază R este mulţimea punctelor din spaţiu ce au distanţa la C egală cu R:

$$S = \{M(x,y,z) \,|\, \mathrm{dist}(M,C) = R \Leftrightarrow ||\overrightarrow{CM}|| = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\}$$

Dacă $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct aparţinând sferei, atunci planul ce conţine punctul M_0 şi are normala $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{CM_0}$ se numeşte planul tangent în M la sferă.

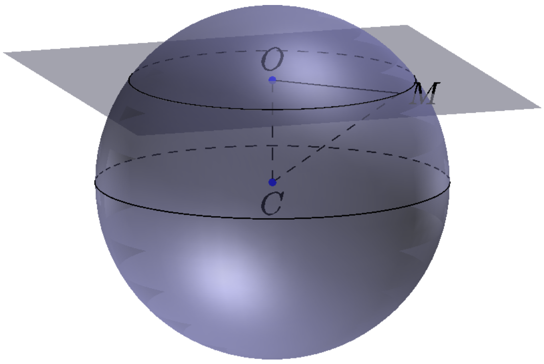


Să se determine ecuaţia sferei cu centrul $C(3,0,0)$ şi rază $R=2$ şi ecuaţia planului tangent în $M_0(4, 1.5, \sqrt{0.75})$

20. Intersecţia dintre o sferă de centru **C** şi rază R, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, şi un plan $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ a cărui distantă de centrul sferei este mai mică decât R este un cerc.

Ecuaţiile cercului sunt:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 &= R^2 \\ Ax+By+Cz+D &= 0 \end{cases}$$



Centrul O al cercului este proiecţia ortogonală a centrului sferei pe plan, iar raza cercului este cateta OM din triunghiul dreptunghic $\triangle\, COM$.

21. Să se determine centrul şi raza cercului de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19 &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

Indicaţie: Se formează pătrate perfecte în x, y şi z pentru a depista centrul şi raza sferei de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$. Şi anume

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19 = \underbrace{x^2-4x+4}_{=(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2-2y+1}_{=(y-1)^2}-1+\underbrace{z^2+2z+1}_{=(z+1)^2}-1-19=0,$$

de unde rezultă: ecuaţia sferei în forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$.