Algebră liniară, Tema 4

1. O imagine `Img[m][n]` este stocată într-un vector $v \in \mathbb{R}^k$, unde k este numărul de pixeli (elemente) ai imaginii. Stocarea se face linie după linie. Ştiind că matricea `Img` are elementele indexate de i şi j, cu $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, iar elementele lui v sunt indexate de $k = 0, 1, 2, \ldots, m \cdot n - 1$, să se deducă relaţia care permite să calculăm locaţia ℓ a pixelului `Img[i][j]` în vectorul v. Presupunem că vectorul este transmis printr-o reţea (de calculatoare) la destinaţia d, unde la sosire este transformat din nou în matrice digitală. Deduceţi linia i şi coloana j în care se va "salva" pixelul $v[\ell]$ din vectorul receptat. Aplicaţi apoi formulele deduse unei imagini de rezoluţie 650×450 (adică matricea corespunzătoare are 650 de linii şi 450 de coloane) şi pozţiei $\ell = 1530$ din v.

2. Să se verifice, folosind definiţia, că vectorii:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \; v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sunt liniar dependenţi şi să se determine relaţia dintre ei.

3. Folosind criteriul practic să se verifice dacă vectorii $v_1 = (4, 1, -1)^T, v_2 = (2, -3, -1)^T, v_3 = (-1, 1, 2)^T$ sunt liniar dependenţi sau independenţi. La fel verificaţi pentru vectorii $v_1, v_2, 3v_1 - v_2$.

4. Un sistem de 101 vectori din $\mathbb{R}^{100}$ este liniar dependent sau independent? Argumentaţi răspunsul.

5. Să se precizeze în care din cazurile de mai jos, un sistem liniar şi omogen $Ax = \theta$, de m ecuaţii cu n necunoscute are doar soluţia banală:

a) $m = 5, n = 5, \mathrm{rang}(A) = 3$;
b) $m = 4, n = 3, \mathrm{rang}(A) = 3$;
c) $m = 6, n = 9, \mathrm{rang}(A) = 6$.
d) $m = 7, n = 7, \mathrm{rang}(A) = 7$.

6. Matricea $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$ are drept coloane următorii vectori din $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ -14 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 21 \\ -22 \\ 31 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Forma scară redusă a matricii A este:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deduceţi din aceasta un subsistem maximal de vectori liniar independenţi, al sistemului v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 şi exprimaţi ceilalţi vectori ca o combinaţie liniară a celor din susbsistemul liniar independent. Verificaţi că scrierea este adevărată, efectuând calculele din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$.

7. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^5$ se dau vectorii:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} -13 \\ 18 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}, \ v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 7 \\ -1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Calculaţi forma scară redusă a matricii asociate (folosind `redscara.c`) şi apoi pe baza criteriului practic să se studieze liniar dependenţa sau independenţa vectorilor şi în caz de dependenţa să scrie relaţiile dintre ei.

8. Considerăm matricea de date $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$ din $\mathbb{R}^{6\times 5}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 & 0 & -21 \\ -2 & 14 & -2 & 2 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -21 & -1 & 1 & -65 \\ 4 & -28 & 0 & 6 & -96 \\ 1 & -7 & 5 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

Transformaţi matricea A în forma scară redusă folosind `redscara.c` şi apoi deduceţi care coloane ale matricii A conţin informaţie relevantă despre entităţile ale căror valori sunt înregistrate în matrice. Exprimaţi apoi coloanele complementare în funcţie de cele relevante.

9. Să se verifice că sistemul de vectori

$$\mathcal{B}' = \{v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\}$$

formează o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorului $w = (-7, 1, 4)^T$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

10. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se dă baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi baza

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (4, 1, -1)^T, u_2 = (2, -3, -1)^T, u_3 = (-1, 1, 2)^T)$$

Să se determine matricea de trecere $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ şi coordonatele vectorului $v = (3, -11, 2)^T$ relativ la baza $\mathcal{B}'$. Deduceţi din matricea de trecere $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ care sunt coordonatele vectorului e_3 în baza $\mathcal{B}'$.