# Cursul 14

# Elemente de geometrie diferenţială a suprafeţelor

## 14.1 Reprezentarea analitică a suprafeţelor

### 14.1.1 Suprafeţe date explicit

O suprafaţă diferenţiabilă dată explicit este graficul unei funcţii diferenţiabile definită pe un domeniu compact $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f$ de clasă $C^1$ pe $D$ (Fig.14.1).

Graficul funcţiei $f$ este mulţimea punctelor din spaţiu de coordonate $(x, y, z)$, unde $z$ este valoarea funcţiei în $(x, y) \in D$:

$$G_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Ecuaţia:

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in D \tag{14.1}$$

se numeşte ecuaţie explicită.

**Exemplul 1**. Paraboloidul circular drept (Fig.14.2-recunoaşteţi antena parabolica) are ecuaţia $z = x^2 + y^2$, $z \in [0, h]$. Fără restricţia $z \in [0, h]$ paraboloidul este o suprafaţa nemărginită. Intersectând paraboloidul cu plane paralele cu $xOy$, de ecuaţie $z = c \in [0, h]$, obţinem cercuri de raze $\sqrt{c}$ situate în aceste plane:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ z = c \end{cases}$$

Cercul de rază $\sqrt{h}$ are raza maximă. Prin urmare paraboloidul este graficul funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde $D$ este discul cu centrul în origine şi de rază $\sqrt{h}$: $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{h}\}$.

Paraboloidul de ecuaţie $z = x^2 + y^2$ este un caz particular al paraboloidului $z = p(x^2 + y^2)$, $p \neq 0$. Paraboloizi corespunzători la diferite valori ale lui $p$ sunt ilustraţi în Fig.14.3: În Fig.14.1 avem graficul unui paraboloid translatat pe direcţia lui $Oz$, adică de ecuaţie $z = 2 + x^2 + y^2$.

### 14.1.2 Suprafeţe diferenţiabile date implicit

O suprafaţă diferenţiabilă dată implicit este definită de o funcţie $F : \Delta \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de clasă $C^1$ pe domeniul $\Delta$, şi anume, suprafaţa este locul geometric al punctelor ce anulează funcţia $F$:

$$S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

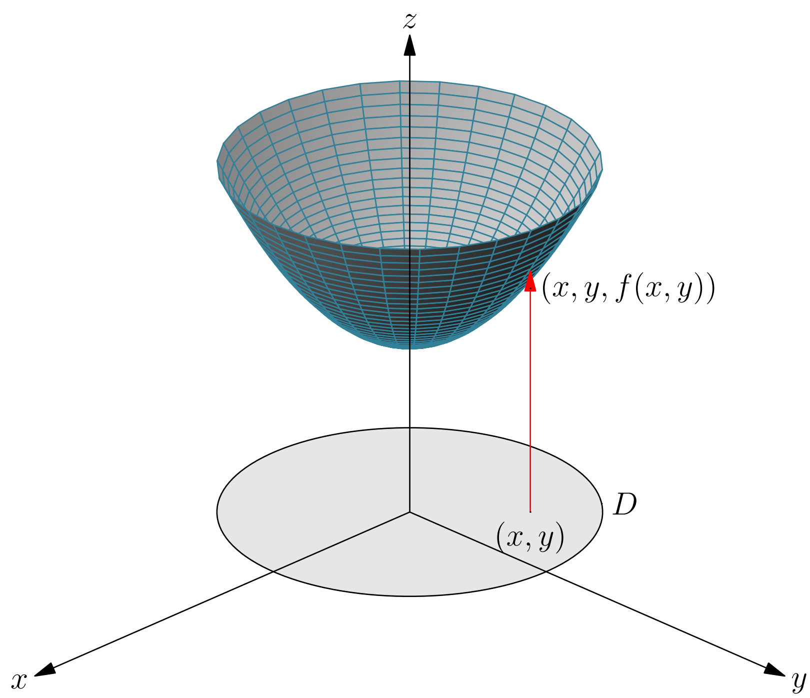



**Fig.14.1**: Suprafaţă grafic.

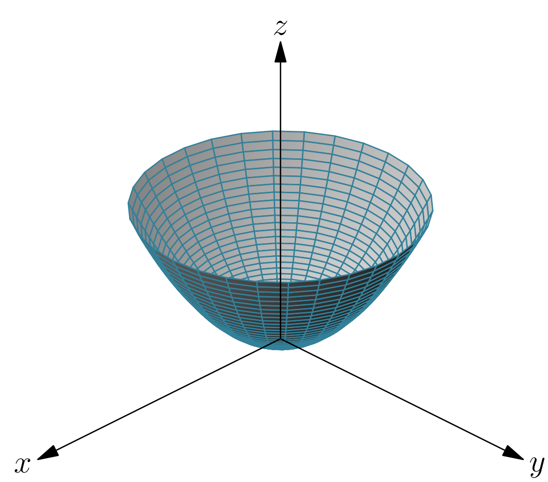



**Fig.14.2**: Paraboloidul circular drept de ecuaţie $z = x^2 + y^2$.

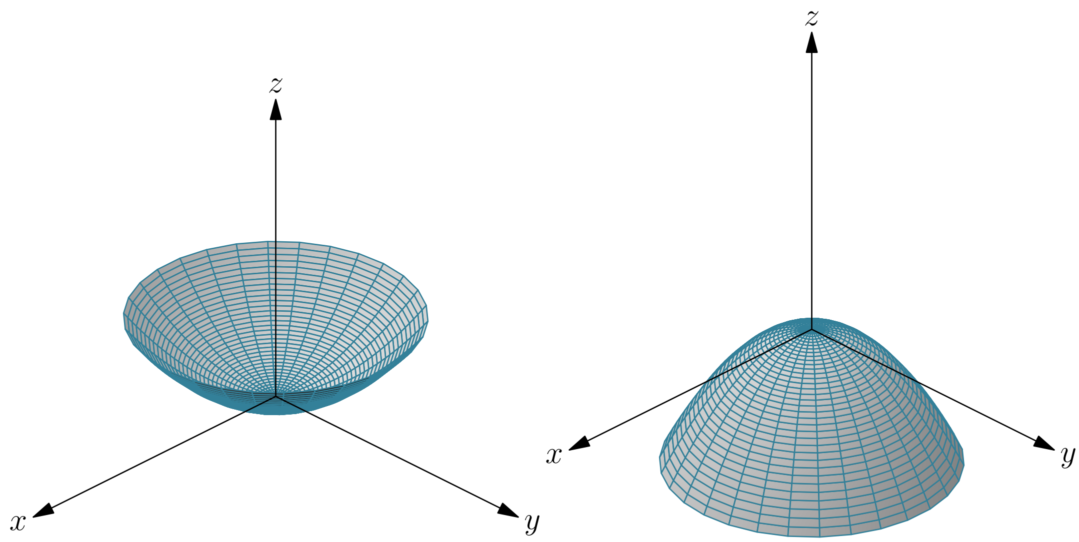



**Fig.14.3**: Paraboloizi de ecuaţii $z = 0.3(x^2 + y^2)$ (stânga), şi respectiv $z = -(x^2 + y^2)$ (dreapta).

**Exemplul 2**. Sfera cu centrul în origine şi de rază $R$ (Fig.14.4, stânga ) :

$$S: \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}_{F(x,y,z)} = 0$$

**Exemplul 3**. Elipsoidul:

$$S: \ F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

### 14.1.3 Suprafeţe diferenţiabile date parametric

**Definiţia 14.1.1** *O pânză de suprafaţă sau simplu o suprafaţă diferenţiabilă de clasă $C^k$, $k \geq 1$, dată parametric, este o submulţime $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{R}^3$, definită ca imaginea unuui domeniu $U \subset \mathbb{R}^2$ printr-o aplicaţie de clasă $C^k$, $r : U \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.*

Notăm o suprafaţă diferenţiabilă de clasă $C^k$ şi parametrizată de $r$, astfel:

$$\mathcal{S} = \mathrm{im}(r), \ r : U \to \mathbb{R}^3, \ r \in C^k(U) \tag{14.2}$$

Intuitiv, domeniul $U$ este o placă plană şi aplicaţia parametrizare transportă placa în spaţiu şi o deformează (o curbează) într-o pânză de suprafaţă.

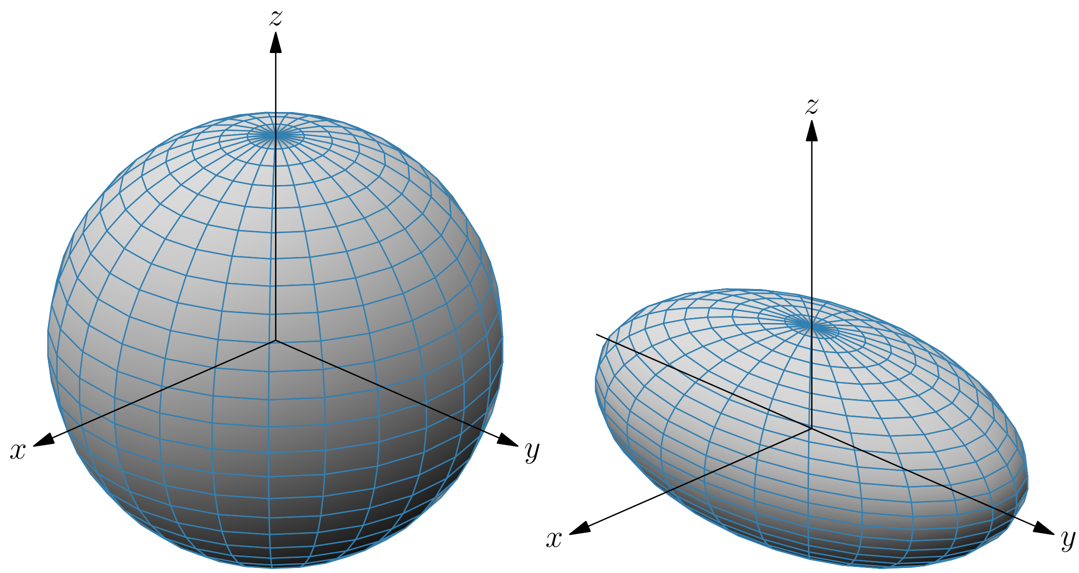



**Fig.14.4**: Sfera cu centrul în origine şi de rază $R$ (stânga), elipsoidul de ecuaţie $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{9}-1=0$ (dreapta).

Domeniul parametrilor $U$ este raportat la sistemul de axe $uO'v$, iar $\mathbb{R}^3$ la sistemul de axe $xOyz$. În computer graphics se lucrează preponderent cu domenii $U$ ale parametrilor, dreptunghiulare, $U=[a,b]\times[c,d]$ sau triunghiulare. Pânzele de suprafaţa corespunzătoare se numesc pânze dreptunghiulare, respectiv triunghiulare. În Fig.14.5 este ilustrat efectul aplicaţiei parametrizare asupra unui dreptunghi.

**Exemple de suprafeţe parametrizate**

**Exemplul 4**. Orice suprafaţa dată explicit prin ecuaţia: $\boxed{S:\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D}$ se parametrizează cel mai simplu notând $x$ cu $u$ şi $y$ cu $v$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(u,v) & = & u \\ y(u,v) & = & v \\ z(u,v) & = & f(u,v) \end{array}\right. \qquad (u,v)\in D$$

De exemplu, paraboloidul $z=x^2+y^2$, $z\in[0,h]$ se parametrizează prin:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(u,v) & = & u \\ y(u,v) & = & v \\ z(u,v) & = & u^2+v^2 \end{array}\right. \qquad (u,v)\in\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\leq\sqrt{h}\}$$

O altă parametrizare a paraboloidului este sugerată de faptul că ecuaţia lui, $z=x^2+y^2$, evidenţiază că acesta este practic constituit dintr-o suprapunere de cercuri de raze variabile, crescând de la zero la $\sqrt{h}$ (vezi Fig.14.2). Astfel o parametrizare a acestuia este sugerată de

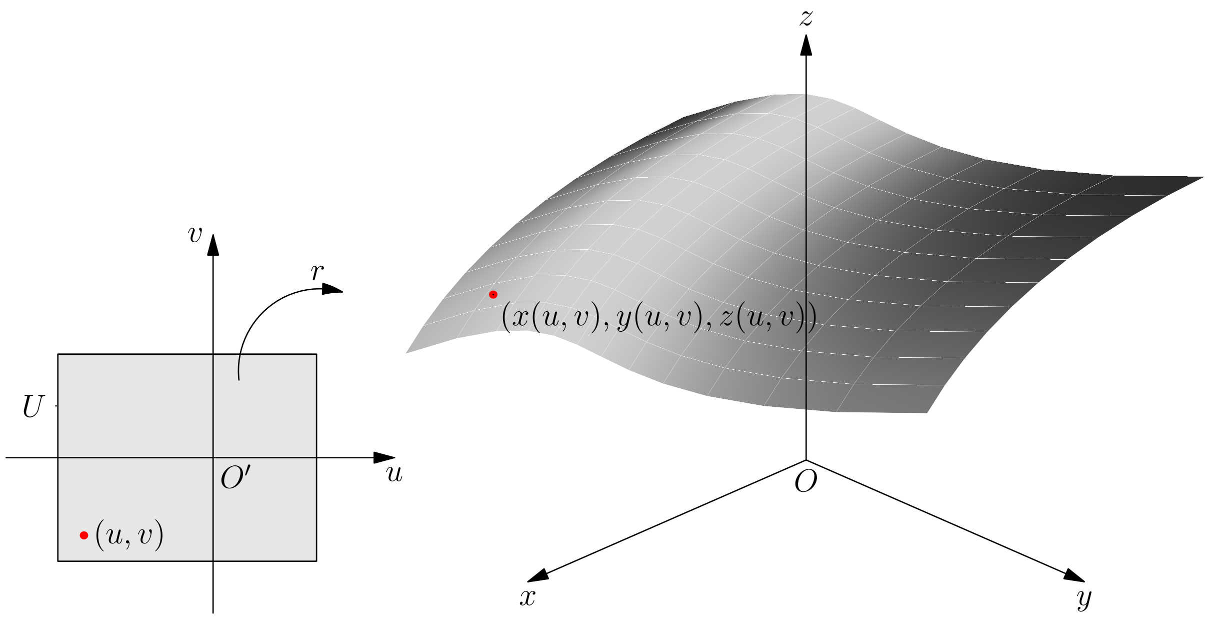



**Fig.14.5**: Suprafaţă parametrizată.

modul de parametrizare al cercului de rază $R$:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & R\cos t \\ y(t) & = & R\sin t \end{array}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

Şi anume:

$$S: \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u\cos v \\ y(u,v) & = & u\sin v \\ z(u,v) & = & x^2+y^2 = u^2 \end{array} \right. , \quad u \in [0, \sqrt{h}], v \in [0, 2\pi]$$

Observăm că $x$ şi $y$ reprezintă parametrizarea unui cerc de rază variabilă $u$, iar $z$ se obţine înlocuind pe $x$ şi $y$ parametrizaţi deja, în ecuaţia explicită a paraboloidului.

**Exemplul 5**. Parametrizarea conului circular drept. Conul cu vârful în origine şi axa de simetrie $Oz$ are ecuaţia implicită generală:

$$z^2 \text{tg}^2\alpha = x^2 + y^2$$

unde $\alpha$ este măsura în radiani a unghiului făcut de generatoarele conului cu axa $Oz$. Dacă de exemplu tg$\alpha = 1$, adică $\alpha = \pi/4$, avem conul de ecuaţie: $z^2 = x^2 + y^2$. Observăm însă că de fapt această ecuaţie implicită reprezintă două conuri (nemărginite) simetrice faţă de planul $xOy$, unul având ecuaţia explicită $z = \sqrt{x^2+y^2}$, iar celălalt, ecuaţia $z = -\sqrt{x^2+y^2}$. În Fig.14.6 sunt vizualizate două conuri de ecuaţie comună $z^2 = x^2 + y^2$, $|z| \leq h$.

Să parametrizăm de exemplu conul $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, h]$. Din nou observăm că această suprafaţă este constituită dintr-o suprapunere de cercuri de raze variabile, situate în plane paralele cu $xOy$, razele crescând de la $0$ la $h$; Deci o parametrizare a acestuia este:

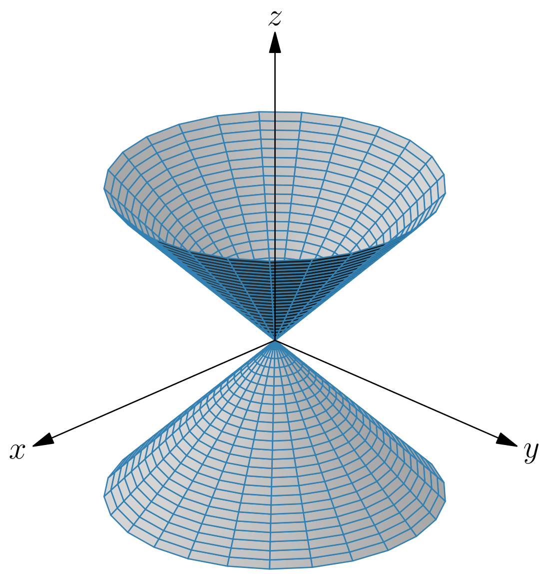



**Fig.14.6**: Două conuri simetrice faţă de $xOy$.

$$\begin{cases} x(u,v) &= u\cos v \\ y(u,v) &= u\sin v \qquad u\in[0,h], v\in[0,2\pi] \\ z(u,v) &= u \end{cases} \tag{14.3}$$

Remarcăm că pe lângă expresia analitică a funcţiilor $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, ce definesc parametrizarea, este foarte important să precizăm domeniul parametrilor. De exemplu trunchiul din conul $z^2 = x^2 + y^2$, corespunzător lui $z \in [h_1, h_2]$ este parametrizat de aceleaşi funcţii $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, ce definesc parametrizarea conului întreg (Ec.14.3), dar parametrii $(u,v) \in [h_1,h_2]\times[0,2\pi]$ (Fig.14.8 stânga). Pe de altă parte, parametrizarea unei jumătăţi din acest trunchi de con, corespunzătoare lui $x \leq 0$ (Fig.14.8 dreapta) esste:

$$\begin{cases} x(u,v) &= u\cos v \\ y(u,v) &= u\sin v \qquad u\in[h_1,h_2], v\in[\pi/2,3\pi/2], \\ z(u,v) &= u \end{cases} \tag{14.4}$$

deoarece pentru un cerc cu centrul în origine şi de rază $r$, jumătatea corespunzătoare lui $x \leq 0$ corespunde parametrului $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ din parametrizarea $x(t) = R\cos t, y(t) + R\sin t$ (Fig.14.7):

**Exemplul 6**. Parametrizarea sferei şi a unei sub-pânze de sferă. Pentru a parametriza sfera sau o porţiune de sferă folosim coordonatele sferice şi anume coordonatele $(\rho,\theta,\varphi)$ ale unui punct au următoarea semnificaţie geometrică:

- $\rho$ este distanţa de la punctul $M$ la originea sistemului de axe xOyz, $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$;
- $\varphi$ este măsura unghiului dintre $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OM'}$, unde $M'$ este proiecţia ortogonală a punctului $M$ pe planul $xOy$ (vezi Suplimentul la cursul 14 unde sunt definite coordonatele sferice şi este

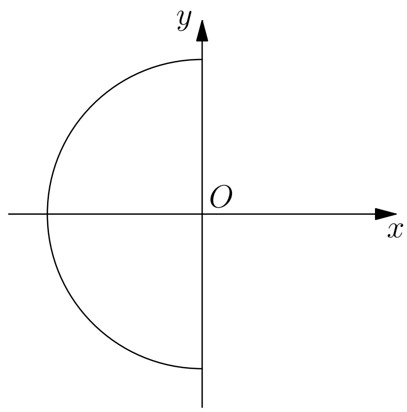



**Fig.14.7**: Jumătatea din cercul $x^2 + y^2 = R^2$, corespunzătoare lui $x \leq 0$, corespunde parametrului $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

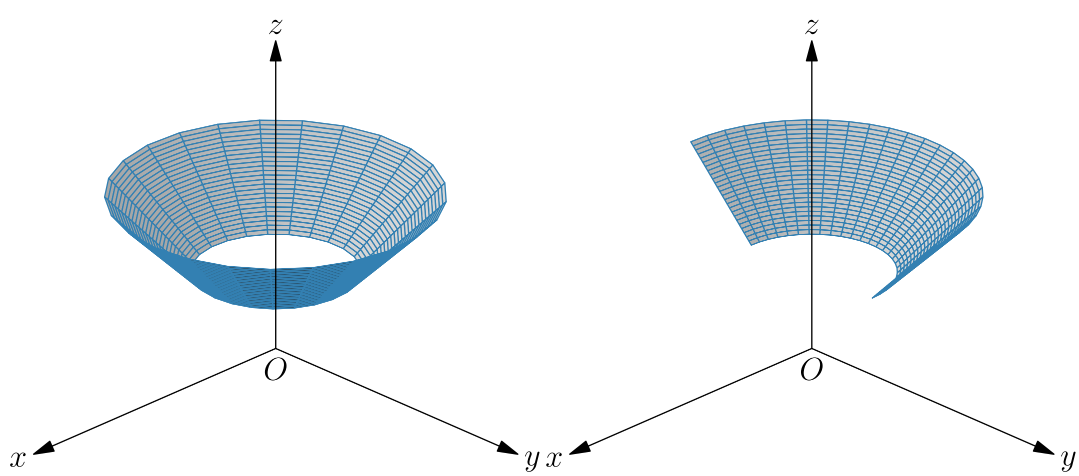
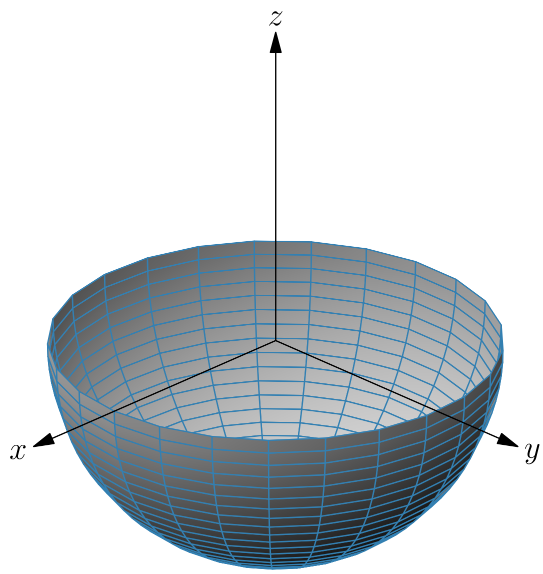



**Fig.14.8**: Trunchi de con (stânga), jumătate de trunchi de con (dreapta).



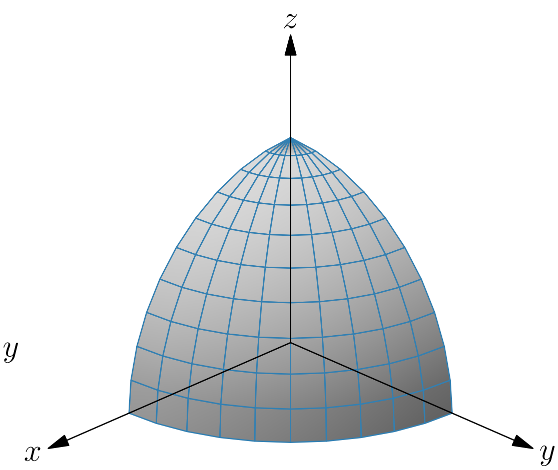




**Fig.14.9**: Semisfera sudică (stânga), octime de sferă (dreapta).

inclusă figura ce ilustrează semnificaţtia lor geometrică. Coordonatele sferice nu sunt tratate aici din cauza figurilor generate in alt format decât cele din acest curs).

Relaţia dintre coordonatele sferice şi cele carteziene sunt:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \tag{14.5}$$

Un punct din spatiu are coordonatele sferice $(\rho, \varphi, \theta)$ restricţionate respectiv la următoarele intervale: $\rho \in (0, \infty)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pe sfera cu centrul în origine şi de rază $R$: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ (Fig.14.4 stânga), toate punctele au aceeaşi coordonată $\rho = R$. Prin urmare considerând drept parametri $u = \theta, v = \varphi$ parametrizarea sferei devine:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= R\cos u\cos v \\ y(u, v) &= R\sin u\cos v \ \ , \ u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi] \\ z(u, v) &= R\sin v \end{aligned} \tag{14.6}$$

Polul nord are coordonata $\varphi = \pi/2$, iar polul sud coordonata $\varphi = -\pi/2$.

Schimbând domeniul parametrilor, obţinem porţiuni sau subpânze de sferă. De exemplu, pentru $u = \theta \in [0, 2\pi]$, $v = \varphi \in [-\pi/2, 0]$ obţinem semisfera sudică descrisă analitic prin $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, z \leq 0$ (Fig.14.9 stânga), iar pentru $u = \theta \in [0, \pi/2]$, $v = \varphi \in [0, \pi/2]$ obţinem octimea de sferă descrisă analitic prin $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (Fig.14.9 dreapta).

**Exemplul 7**. Parametrizarea cilindrului circular drept. Ecuaţia implicită a cilindrului având drept axă de simetrie, axa Oz, este

$$S: \ F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \ z \in [h_1, h_2]$$

Remarcăm că aceeaşi ecuaţie reprezintă cercul în plan. Cilindrul este constituit dintr-o suprapunere de cercuri de aceeaşi rază situate în plane $z = c$, $c \in [h_1, h_2]$ (Fig.**??**). O parametrizare a acestui cilindru este:

$$\begin{array}{rcl} x(u, v) & = & R \cos u \\ y(u, v) & = & R \sin u \quad u \in [0, 2\pi], v \in [h_1, h_2] \\ z(u, v) & = & v \end{array}$$

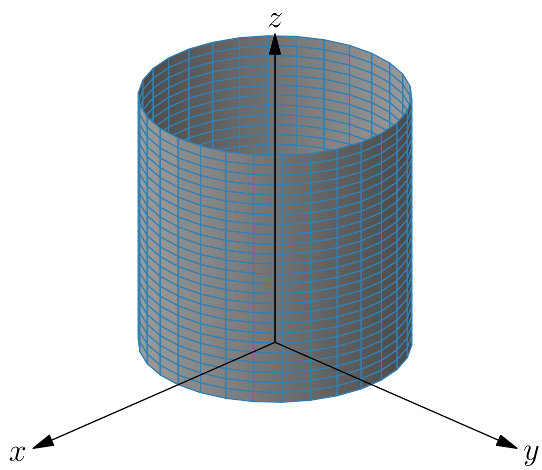



**Fig.14.10**: Cilindrul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 2]$.

## 14.2 Plan tangent şi normala într-un punct al unei suprafeţe

### 14.2.1 Cazul suprafeţelor date parametric

Fie suprafaţa $S$, de clasă $C^1$, reprezentată de parametrizarea $r : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Imaginea prin $r$ a unui segment vertical, $u = u_0, v \in [c, d]$, din dreptunghiul de definiţie al parametizării (Fig.14.11), este o curbă pe suprafaţa, $\Gamma_{u_0}$, parametrizată de:

$$C(v) = r(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \ v \in [c, d]$$

Vectorul tangent într-un punct arbitrar al acestei curbe este

$$\vec{C}'(v) = \vec{r}'_v(u_0, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v) \right) = (x'_v(u_0, v), y'_v(u_0, v), z'_v(u_0, v))$$

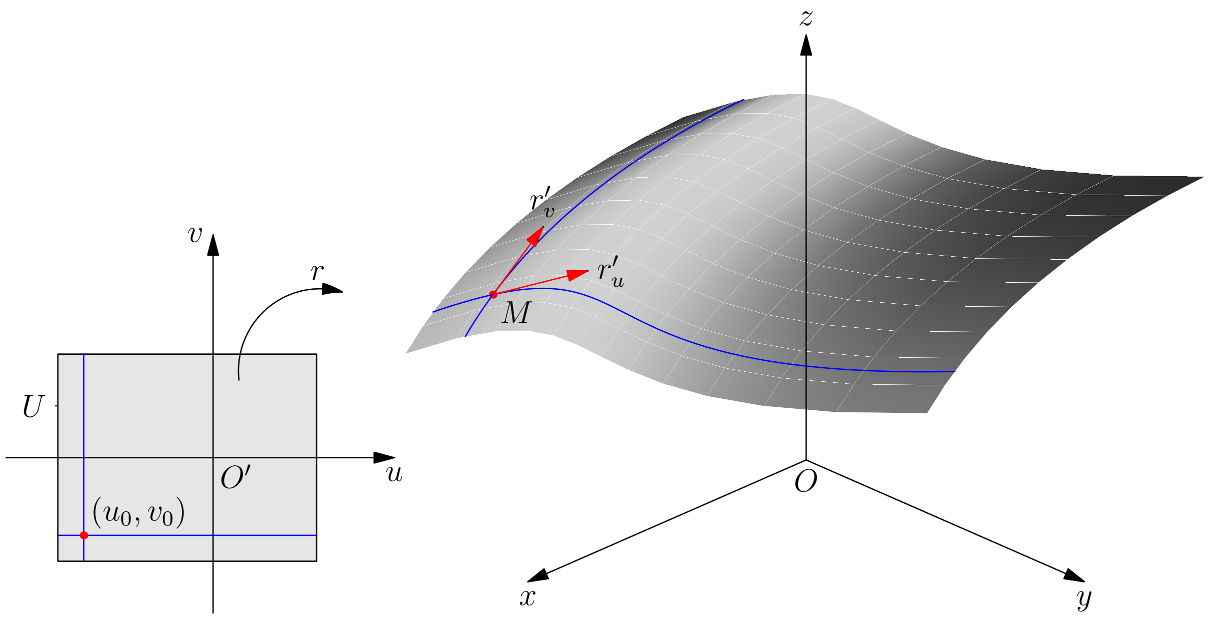



**Fig.14.11**: Curbe coordonate pe o suprafaţă parametrizată şi vectorii tangenţi în punctul lor de intersecţie.

Imaginea prin $r$ a unui segment orizontal, $v = v_0, u \in [a, b]$, este curba de pe suprafaţă, $\Gamma_{v_0}$, parametrizată prin:

$$D(u) = r(u, v_0) = (x(u, v_)), y(u, v_0), z(u, v_0)), \ u \in [a, b]$$

Vectorul tangent într-un punct al acestei curbe este:

$$\vec{\dot{D}}(u) = \overrightarrow{r'}_u(u, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v_0)\right) = (x'_u(u, v_0), y'_u(u, v_0), z'_u(u, v_0))$$

Printr-un punct arbitrar $(u_0, v_0)$ din domeniul parametrilor trec cele două segmente perpendiculare, $u = u_0$, respectiv $v = v_0$ (Fig.14.11). Imaginile lor prin aplicaţia parametrizare sunt două curbe pe suprafaţă, ce se intersectează în punctul $M(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ (Fig.14.11).

În geometria diferenţială curbele $\Gamma_{u_0}$, $\Gamma_{v_0}$, se numesc **curbe coordonate**.

Dacă vectorii tangenţi la curbele coordonate, $\Gamma_{u_0}, \Gamma_{v_0}$, în punctul $M$ sunt liniar independenţi (adică nenuli şi necoliniari), punctul $M$ se numeşte punct regulat.

**Definiţia 14.2.1** *Fie $M(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ un punct regulat al unei suprafeţe. Planul determinat de punctul $M$ şi de vectorii tangenţi $\overrightarrow{r'}_u(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{r'}_v(u_0, v_0)$ la curbele coordonate în $M$ se numeşte plan tangent la suprafaţa în punctul $M$.*

Ecuaţia planului tangent în $M$ este:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & x - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

**Definiţia 14.2.2** *Normala într-un punct $M$ al unei suprafeţe este direcţia perpendiculară pe planul tangent în acel punct.*

Deoarece planul tangent este generat de vectorii $\overrightarrow{r'}_u(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{r'}_v(u_0, v_0)$, direcţia vectorului normal în punctul $M$ la suprafaţă este:

$$\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = \overrightarrow{r'}_u(u_0, v_0) \times \overrightarrow{r'}_v(u_0, v_0)$$

Se ştie că norma produsului vectorial a doi vectori $\|v \times w$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori. De aceea în analiza matematică se defineşte **elementul de arie al unei supafeţe** regulate (suprafaţă ce are toate punctele regulate) prin:

$$d\sigma = \|\overrightarrow{r'}_u \times \overrightarrow{r'}_v\|\, du\, dv$$

$d\sigma$ intervine în definiţia integralei de suprafaţă. În ingineria electrică integralele de suprafaţă se folosesc pentru a calcula fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă.

Se demonstrează că aria $\|\overrightarrow{r'}_u \times \overrightarrow{r'}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, unde $E = \overrightarrow{r'}_u \cdot \overrightarrow{r'}_u$, $F = \overrightarrow{r'}_u \cdot \overrightarrow{r'}_v$, $G = \overrightarrow{r'}_v \cdot \overrightarrow{r'}_v$ (adică $E, F, G$ sunt produsele scalare a doi câte doi vectori din ”baza” $(\overrightarrow{r'}_u, \overrightarrow{r'}_v)$ din planul tangent într-un punct la suprafaţă).

### 14.2.2 Cazul suprafeţelor date explicit

Fie suprafaţa $S: \ z = f(x, y), f \in C^1(D \subset \mathbb{R}^2)$. Patametrizând-o, putem aplica rezultatele din cazul suprafeţelor date parametric. Şi anume paarametrizarea suprafeţei este $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$, iar vectorii tangenţi la curbele coordonate printr-un punct arbitrar sunt $\overrightarrow{r'}_u = (1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial u})^T$, $\overrightarrow{r'}_v = (0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial v})^T$. Astfel direcţia normalei la suprafaţă într-un punct arbitrar este:

$$\overrightarrow{N}(u, v) = \overrightarrow{r'}_u \times \overrightarrow{r'}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1) \ \| \ (\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, -1)^T$$

Deoarece în parametrizarea aleasă, $u = x$ şi $v = y$, putem concluziona că direcţia normalei într-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$, la o suprafaţă diferenţiabilă, dată prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$ este:

$$\overrightarrow{N}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)^T$$

### 14.2.3 Cazul suprafeţelor date implicit

Pentru a determina direcţia normalei într-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al suprafeţei diferenţiabile $S: \; F(x, y, z) = 0$, $F$ de clasă $C^1$ pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$, apelăm la teorema funcţiilor implicite relativ la ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ şi punctul $M$.

Teorema funcţiilor implicite, în acest context, afirmă că:

*Dacă $F$ este de clasă $C^1$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, şi $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $V$ a lui $(x_0, y_0)$, o vecinătate $U$ a lui $z_0$ şi o funcţie de clasă $C^1$, $z : V \to U$ având proprietăţile următoare:*

*a)* $z(x_0, y_0) = z_0$;

*b)* $F(x, y, z(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in V$;

*c)*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0) \tag{14.7}$$

Să interpretăm această teoremă din punct de vedere geometric, luând ca exemplu sfera de ecuaţie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

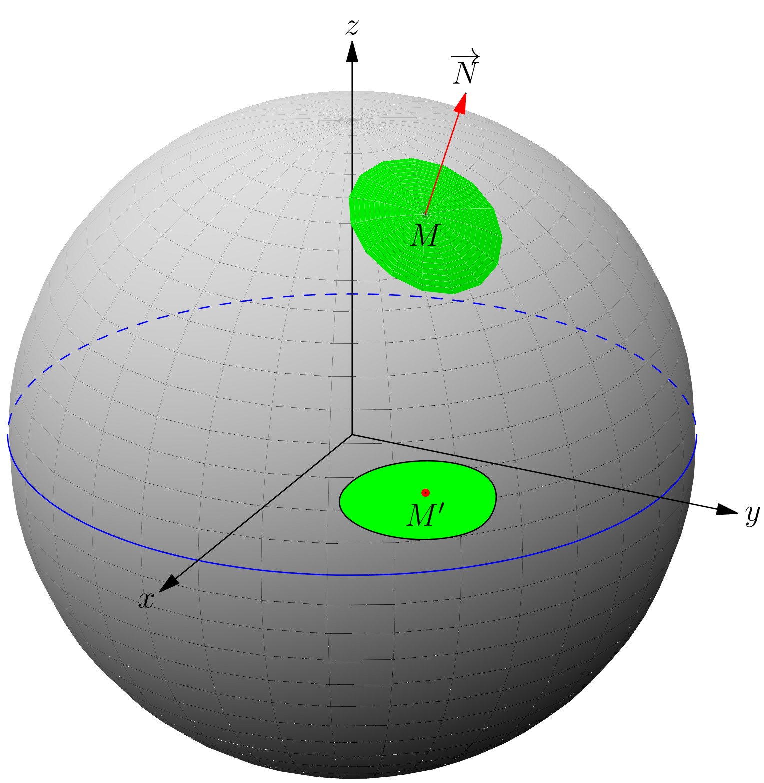



**Fig.14.12**: Ilustrarea domeniului de definiţie şi graficul unei funcţii definite implicit de ecuaţia unei suprafeţe, $F(x, y, z) = 0$ şi un punct $M$ al suprafeţei, precum şi normala în $M$ la suprafaţă.

Condiţia $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ne asigură că punctul $M$ aparţine suprafeţei. În cazul sferei, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$. Deci această derivată se anulează în punctele de pe sferă situate în planul $z = 0$ (planul xOy), adică în punctele ecuatorului. Conform teoremei funcţiilor implicite dacă $M(x_0, y_0, z_0)$ nu aparţine ecuatorului atunci o porţiune de suprafaţă din jurul acestui punct este graficul unei funcţii $z(x, y)$. Mai precis condiţiile b) şi a) ne asigură că punctele graficului funcţiei $z$ (vizualizat cu verde pe sfera din Fig.14.12), $(x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in V$, aparţin suprafeţei şi respectiv, punctul $M$ aparţine acestui grafic ($z(x_0, y_0) = z_0$). Domeniul de definiţie, $V$, al funcţiei $z$ este mulţimea colorată verde din planul xOy, Fig.14.12.

Conform secţiunii precedente putem afla direcţia normalei în M, la graficul funcţiei $z$, de clasă $C^1$, care de fapt este direcţia normalei în $M$ la suprafaţa iniţială, de ecuaţie $F(x, y, z) = 0$, astfel:

$$\overrightarrow{N}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)^T$$

Ţinând seama de relaţiile (14.7) direcţia normalei în $M$ devine:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}(x_0, y_0, z_0) &= \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0), -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0), -1\right)^T \parallel \\
&\parallel \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)^T = \\
&= \text{grad}(F)(x_0, y_0, z_0)
\end{aligned}$$

## 14.3 Detalii despre grafica cursului

Figurile din cursul de Algebra–Geometrie din acest semestru au fost generate folosind `asymptote` `http://asymptote.sourceforge.net/`, un limbaj de specificaţie grafică, care generează figuri in format `eps, pdf, png`.

Limbajul asymptote se aseamănă foarte mult cu `C++`. Conţine câteva biblioteci de clase si funcţii, ce se importă la nevoie.

De exemplu, un punct 2D sau un vector 2D este un obiect `pair`:

```
pair M=(-2.0, 1);
pair v=(3.2, -1.5);
draw(M--M+v, blue, Arrow); // traseaza  segmentul cu sageata,
                           // adica vector de la M, la M+v
```

Inclus aveţi codul pentru generarea animaţiei 3D din Cursul 13, ce ilustrează triedrul lui Frenet. Fişierul are in mod normal extensia `asy`, dar pentru a-l putea deschide i-am dat extensia `txt`.

Figurile din Cursul 14 şi Suplimentul la Cursul 14 au fost realizate cu versiuni mai vechi ale lui `asymptote` şi pentru că nu mai găsesc codul ca sa-l re-rulez, am inserat în figurile generate acum câţiva ani şi nu au o calitate deosebită, deşi în momentul generării erau OK. Cred că asta se datorează şi versiunilor mai noi ale Acrobat Reader-ului, care nu convertesc bine fişiere `eps` şi `pdf` mai vechi.