Algebră liniară, Tema 2

1. În matricea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ liniile şi coloanele sunt indexate începând cu 0:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se precizeze dimensiunea produselor: $A[2,:]A[:,1]$, $A[:,2]A[1,:]$ şi să se calculeze efectiv.

2. Scrieţi matricea permutare asociată permutării $\pi = (3, 2, 0, 1, 4)$. (ATENTIE, aici nu avem o permutare a elementelor mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ci a mulţimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Raţionaţi corespunzător referindu-va la liniile 0,1,2,3,4, ale matricii unitate.

3. O permutare $\pi : \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\} \to \{2, 3, 4, \dots n, 1\}$ se numeşte permutare ciclică.
Să se calculeze $P_\pi A P_\pi^T$, ştiind că π este permutarea ciclică a mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ şi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Exprimaţi în cuvinte ce efect observaţi ca a avut produsul la stânga cu P_π a matricii A şi la dreapta cu P_π^T.

4. Fără a calcula produsul şi determinaţii matricilor, precizaţi în ce relaţie este:

$$\det(P_\pi A) \quad \text{cu} \quad \det(A)$$

ştiind că:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi } A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

5. O permutare

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

care aplica toate elementele multimii identic, doar i este aplicat în j şi j în i, $i \neq j$, se numeşte transpoziţie. Matricea permutare corespunzătoare o notăm cu P_{ij}. Cât este valoarea determinantului lui P_{ij}? Ce efect are înmulţirea $P_{ij}A$, unde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$?

Exemplu de transpoziţie

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Înmulţiti $P_{24}A$, unde $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1,4}$.

6. a) Fie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matricea de adiacenţă a unui graf orientat. Desenaţi graful. Există drum de arce orientate între oricare două noduri? Dacă nu, daţi exemplu de două noduri ce nu pot fi conectate printr-o succesiune de arce.

b) Fie $\pi = (4, 1, 6, 2, 7, 3, 5)$ o permutare a nodurilor. Calculati $A' = P_\pi A P_\pi^T$ şi desenaţi graful ce are matricea de adiacenţa A'. Comparaţi cele două grafuri. Ce concluzie trageţi?

Mai precis, dacă în graful iniţial există conexiune între două noduri i, j, există conexiune şi între π_i şi π_j în graful de matrice de adiacentă A'?

Particularitatea pe care vrem să o ilustrăm în această problemă stă la baza analizei reţelelor sociale şi a grafului WEB.

7. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Deduceţi permutarea π care transformă matricea A într-una superior triunghiulară, adică $P_\pi A = U$.

8. Precizaţi care dintre matricile următoare are forma scară pe linie:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru matricile în forma scară pe linie, indicaţi care sunt pivoţii şi ce rang are matricea.

9. Forma scară a unei matrici $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$ are ultimele două linii cu toate elementele zero. Ce rang are matricea A? Explicaţi în cuvinte, nu scrieţi doar rangul este egal cu r!!!!

10. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă, ce puteţi spune despre forma scară, S_A, a lui A, este şi ea inversabilă? Argumentaţi răspunsul.