Algebră liniară, Aplicaţii liniare

1. Fie $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară ce are relativ la bazele canonice din cele două spaţii matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Să se determine expresia analitică a aplicaţiei liniare L, adică "regula" după care asociază la orice vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ un unic vector $w = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Să se afle $L(v)$, dacă $v = (-1, 1, 0, 3)^T \in \mathbb{R}^4$.

2. Fie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^3$, relativ la care un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tinand seama de definiţia matricii aplicatiei liniare să se deducă fără a efectua nici un calcul, care este exprimarea vectorului $L(v_2)$ în baza $\mathcal{B}$.

3. Fie $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ baza canonică în $\mathbb{R}^2$ şi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operator liniar. Ştiind că $T(e_1) = (-1, 6)^T$, $T(e_2) = (2, 5)^T$, să se determine expresia analitică a lui T şi să se calculeze apoi $w = T(v)$, unde $v = (2, -3)^T$.

4. Aplicatia liniară $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ are realtiv la bazele canonice din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$ expresia analitică următoare:

$$L(x_1, x_2) = (-2x_1 + 3x_2, 7x_1 - 4x_2, x_1 + 2x_2)$$

Să se determine matricea aplicaţiei liniare relativ la bazele canonice.

5. Să se determine matricea relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ a proiecţiei ortogonale, $P : \mathbb{R}^3 \to S$, pe subspaţiul S de ecuaţie $-2x + y + z = 0$.

Indicatie: Găsiţi mai întâi o bază oarecare în S, apoi o bază ortonormată, $\overline{\mathcal{B}} = (u_1, u_2)$ şi în final matricea proiecţiei ortogonale.

6. Deduceţi expresia analitică a proiecţiei ortogonale a lui $\mathbb{R}^2$ pe un subspaţiu S de dimensiune unu, în care o bază oarecare este $\overline{\mathcal{B}} = (w = (a, b)^T)$. Apoi expresia analitică a proiecţiei ortogonale a lui $\mathbb{R}^3$ pe un subspaţiu de dimensiune 1, generat de vectorul $t = (a, b, c)^T$.

Indicaţie. Construiti ”o bază ortonormată” în subspaţiul de dimensiune 1 şi aplicaţi apoi modalitatea de determinare a matricii proiecţiei ortogonale pe un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^2$, respectiv, $\mathbb{R}^3$.

7. Spaţiul $\mathbb{R}^3$ este raportat la reperul ortonormat drept $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2, e_3)$ de axe ortogonale . Să se se scrie matricea rotaţiei $R^y_{\pi/3}$ în jurul lui Oy şi apoi să se determine care sunt coordonatele punctului M' ştiind că vectorul său de poziţie este $\overrightarrow{OM'} = R^y_{\pi/3}(\overrightarrow{OM})$ şi $M(-1, 2, 3)$.

8. Matricea rotaţiei plane de unghi θ în baza canonică este

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Fie $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ o altă bază ortonormată din $\mathbb{R}^2$, astfel încât măsura $\widehat{(e_1, u_1)} = \alpha$. Să se determine matricea rotaţiei în această bază când:

a) Baza $\mathcal{B}'$ este o bază dreaptă (vezi cursul 6 pentru matricea de trecere de la baza canonică la $\mathcal{B}'$).

b) Baza $\mathcal{B}'$ este o bază strâmbă (vezi tot cursul 6).

Vă surprinde rezultatul?

După ce aţi rezolvat această problemă concluzionaţi care ar fi matricea rotaţiei plane de unghi θ pe care ar trebui s-o aplicaţi unei imagini din canvas-ul html5 sau a unei imagini digitale raportate la un sistem stâng, pentru a o roti cu unghiul θ.

Cine doreşte un bonus îmi transmite o imagine a rezolvării sau dacă ştiţi şi voi LaTeX, atunci editaţi în LaTeX.

9. a) Urmărind contrucţia teoretică din curs să se construiască expresia analitică în baza canonică a rotaţiei în spaţiul $\mathbb{R}^3$ în jurul axei de direcţie $v = (1, 1, 2)^T$, cu unghiul $\theta = \pi/6$.

Opţional: b) Să se scrie codul `C/C++` al funcţiei care calculează matricea relativ la baza canonică a unei rotaţii de unghi θ în jurul axei de direcţie $v \neq \theta$.

Prototipul funcţiei în `C` ar putea fi (dar NU e obligatoriu să folosiţi pointeri dacă nu ştiţi sa-i manipulaţi):

double **rotatie_arbitrara(double theta, double *v);