Probleme şi întrebări de antrenament pentru examenul de Algebră–Geometrie, sesiunea de iarnă 2016

Pentru examen trebuie să ştiţi teoria (să o întelegeţi, nu să o tociţi!). Problemele vor fi de tipul celor din seminar, teme, probleme de antrenament pentru lucrările de control, parţial şi acestea care urmează.

Cei care nu au luat parţialul şi cred că nu pot învăţa tot pentru prezentarea I, pot da doar prima parte acum şi partea a II-a la prezentarea a II-a.Cei care au luat parţialul şi vor să-şi mărească nota, o pot face în prezentarea a III-a!!!!

1. Cum verifici că o bază ortonormată, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$, din $\mathbb{R}^3$ este pozitiv orientată?

2. Să se arate că dacă v, w sunt doi vectori liniar independenţi din $\mathbb{R}^3$, atunci sistemul de vectori $\mathcal{B}' = (v, w, v \times w)$ constituie o bază pozitiv orientată.

3. Dacă încă n-ati rezolvat problema din temă care cerea să deduceţi matricea unei rotaţii 2D într-o bază ortonormată negativ orientată, atunci încercaţi să o deduceţi acum!!!

Indicaţie: Dacă A este matricea rotatiei de unghi θ (scrieti-o!!!), relativ la baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, şi $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ este o bază ortonormată negativ orientată, atunci matricea rotaţiei relativ la $\mathcal{B}'$ este $A_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. În Cursul 7 este dedusă expresia matricii $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

După ce aţi rezolvat problema veţi şti cum rotiţi o imagine din canvas-ul html5!!!!

4. Să se arate ca vectorul $v = (0.6, 0.4)^T$ este vector propriu al matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Precizaţi valoarea proprie căreia corespunde v.

Obs.: Tocilarii aplică algoritmul de aflare a valorilor şi vectorilor proprii. Cei care şi gandesc ce fac, aplică doar definiţia vectorului propriu (vezi cursul).

5. Presupunem că vectorul v este un vector propriu al matricii $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, corespunzător valorii proprii λ. Este v vector propriu şi pentru matricea $A + cI_n$ (c este un număr real dat)? Dacă da deduceţi valoarea proprie corespunzătoare. Dacă nu treci la problema următoare.

6. Să se arate că orice matrice de forma $M = Q\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)Q^T$ (unde Q este matrice ortogonală) este o matrice simetrică. (Se aplică definiţia matricii simetrice şi se exploatează faptul că Q este ortogonală; VEZI DEFINITIA MATRICII ORTOGONALE DIN CURS SI NU MAI INVENTA ALTA CA LA PARTIAL!!!!!!)

7. Matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

admite valoarea proprie 1. a) Mai admite A şi alte valori proprii? Argumentaţi. Să se factorizeze matricea $A = QDQ^T$, unde Q este matrice ortogonală şi D matrice diagonală.

Indicaţie: a) uită-te cu atenţie să vezi ce particularitate are matricea A şi apoi caută in curs ce proprietăţi au rădăcinile polinomului său carcateristic!!!

8. Să se arate că dacă v este un vector propriu al matricii A, corespunzător valorii proprii λ, atunci v este vector propriu şi pentru orice putere A^m, $m \geq 1$, a matricii A. Care este valoarea proprie corespunzătoare în acest caz?

9. Să se arate că dacă $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice inversabilă ce are vectorul propriu v, corespunzător valorii λ, atunci şi $A^{-1}v = \mu v$, adică v e vector propriu şi pentru A^{-1}. Determinaţi relatia dintre μ şi λ.

10. Fie A şi A' două matrici pătratice similare. Să se arate că ele au acelaşi polinom caracteristic (vezi demonstraţia din curs).

11. Să se determine polinomul caracteristic al matricii A ştiind că ea este similară cu matricea

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

12. Să se factorizeze matricea simetrică

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

în $A = QDQ^T$, unde Q este o matrice ortogonală, iar D o matrice diagonală.

13. Fie A o matrice simetrică. În ce relaţie sunt valorile proprii ale lui $A^T A$ cu valorile proprii ale lui A?

14. Determinaţi descompunerile singulare ale matricilor:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şi exprimarea fiecărei matrici din enunţ ca o combinaţie liniară de matrici de rang 1.

15. * Ştiind că matricea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are descompunerea singulară $A = U\Sigma V^T$ să se calculeze matricea AA^T. Citiţi din exprimarea matricii AA^T care sunt vectorii ei proprii (fără nici un calcul!!!).

Indicaţie: Uită-te în cursul 12 şi vezi ce particularitate are matricea AA^T (inclusiv demonstraţia acestei particularităţi). Fiind o matrice $\ldots$, AA^T este similară cu....Avem nevoie în semestrul II de această proprietate pe care trebuie să o descoperiţi voi!!!

16. Să se determine factorizarea SVD a matricii

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

17. O matrice inversabilă poate fi similară cu o matrice singulară?

Ind: Vezi relaţia dintre determinanţii a două matrici similare!!!!

18. Să se calculeze A^{2016}, unde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ştiind ca această matrice are pe -1 şi 1 ca valori proprii.

19. Transformarea liniară $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are relativ la baza canonică matricea:

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că matricea A este o matrice ortogonală.

b) Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

c) Este matricea A similară cu o matrice diagonală? Dacă da, care este expresia analitică a transformării L relativ la baza $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ formată din vectori proprii şi ce efect "geometric" are L asupra unui vector $v = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$ exprimat în baza $\mathcal{B}'$?

20. Să se factorizeze matricea simetrică

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

în $A = QDQ^T$, unde Q este o matrice ortogonală, iar D o matrice diagonală.

21. Să se determine matricea formei pătratice $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$. Calculaţi valorile proprii ale lui A şi deduceţi tipul formei pătratice (pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită). Deduceţi baza ortonormată în care forma pătratică are forma canonică $q(X_1, X_2) = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2$. Ce reprezintă ecuaţia $q(X_1, X_2) = 1$ o elipsă sau o hiperbolă (vezi geometria de clasa XI)

22. Fie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^3$, relativ la care un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Fără a efectua nici un calcul, ci doar dând explicaţii teoretice, să se exprime vectorul $L(v_3)$ în b aza $\mathcal{B}$.

b) Să se afle matricea lui L relativ la baza $\mathcal{B}' = (u_1 = v_1 + v_3, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_2)$.

Indicaţie: Vezi relaţia $A_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

23. Se dă forma pătratică $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin;

$$q(x, y, z) = 4x^2 + 14y^2 + 5z^2 + 16xy - 8xz - 20yz$$

Să se determine matricea simetrică asociată, A. Ştiind că A are valorile proprii: $-1.8798, 0.5242, 24.3555$, precizaţi dacă forma pătratică este pozitiv, negativ definită sau nedefinită.

24. Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Este matricea $B = A + A^T$ simetrică? Este B similară cu o matrice diagonală? Argumentaţi!

25. a) Să se arate că dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are valoarea proprie $\lambda = 0$, atunci subspaţiul propriu corespunzător $S_{\lambda=0}$ coincide cu $Null(A)$ (indicaţie: scrieţi definiţiile mulţimilor $S_{\lambda=0}$ şi $Null(A)$) şi apoi arătaţi că sunt egale!!!!)

b) Să se determine valorile proprii ale matricii

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

şi apoi fără nici un calcul să se precizeze dimensiunea subspaţiului $Null(A)$. Argumentaţi răspunsul!

26. Arătaţi că dacă $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice ortogonală atunci şi liniile matricii, $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, constituie o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$. (indicaţie $A^T = [\ell_1 | \ell_2 | \dots | \ell_n]$).

27. Pornind de la vectorii $v = (-1, 2, 1)$, $w = (1, 0, 3)$ şi calculând produse vectoriale succesive, să se construiască în $\mathbb{R}^3$ o bază ortonormată pozitiv orientată.

28. Operatorul liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Să se determine valorile proprii, subspaţiile proprii corespunzătoare şi câte o bază în fiecare subspaţiu propiu.

b) Există în $\mathbb{R}^3$ o bază formată din vectori proprii ai lui L? Dacă da, să se determine expresia analitică[1] a lui L relativ la baza canonică şi relativ la baza formată din vectori proprii. Care este mai simplă?

29. Să se arate că în $\mathbb{R}^3$ nu există o bază formată din vectori proprii ai matricii

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Indicaţie: Se arată că fie polinomul caracteristic nu are toate rădăcinile reale, fie le are, dar dimensiunea subspaţiilor proprii nu coincide cu ordinul de multiplicitate al valorilor proprii corespunzătoare.

30. Să se studieze dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este sau nu similară cu o matrice diagonală.

31. Să se arate că matricea

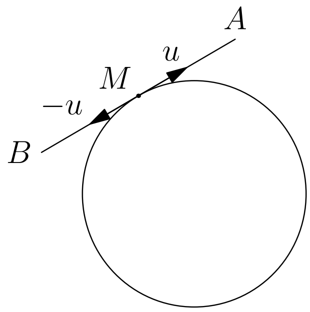
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

este similară cu o matrice diagonală D. Să se determine factorizarea lui $A = TDT^{-1}$ şi să se calculeze A^{100}.

32. Deduceţi punctele A, B necesare pentru a trasa tangenta în punctul $M(-1, \sqrt{3})$ la cercul $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ştiind că A şi B sunt poziţionate pe tangentă de o parte şi de alta a lui M , la aceeaşi distanţa de 2 unităţi.

Rezolvare:

[1] Expresia anlitică a unui operator liniar, relativ la o bază este regula (legea de corespondenţă) care asociază unui vector exprimat în acea bază, vectorul $L(v)$ exprimat în aceeaşi bază.



Cercul se parametrizează astfel:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos t \\ y(t) & = & 2\sin t \end{array} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Punctul M corespunde lui $t = 2\pi/3$. Direcţia tangentei în M este dată de vectorul $\dot{r}(2\pi/3) = x'(2\pi/3)\mathbf{i} + y'(2\pi/3)\mathbf{j} = -\sqrt{3}\mathbf{i} - 1\mathbf{j}$. Notăm cu u versorul lui $\dot{r}(2\pi/3)$. Punctul $A = M + 2u$, $B = M - 2u$.

Cum găsiţi coordonatele punctelor în care este plasat "vârful săgeţii" lui u şi $-u$?

33. În $(\mathbb{R}^3, .)$ se dă baza ortonormată

$$\mathcal{B}' = (f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T)$$

Să se arate că baza este negativ orientată. Construiţi din $\mathcal{B}'$ o bază pozitiv orientată. Să se calculeze masura unghiului dintre $v_1 = -2f_1 + f_2 - 5f_3$ şi $v_2 = f_1 + 2f_2 - f_3$ şi proiecţia ortogonală a lui v_1 pe v_2.

34. Fie A o matrice pătratică cu elemente reale. Ce informaţie extrageţi din proprietatea că $\det(A + 5I_n)$=0?

35. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observaţi particularităţile matricii A şi apoi determinaţii-i valorile proprii fără a deduce polinomul caracteristic, ci doar folosind urma matricii şi rangul lui $A - I_5$.

36. Un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are relativ la baza canonică matricea:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Să se determine valorile proprii şi să se explice dacă A este similară sau nu cu o matrice diagonală.

Să se determine $L(e_2)$ şi $L(e_3)$, fără nici un calcul (e_2, e_3 sunt vectori din baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$).

37. Dacă o matrice pătratică are determinatul 0, ce valoare proprie admite sigur?

38. Matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

admite perechile de valori şi vectori proprii: $(\lambda_1 = 4, \quad v_1 = (1,0,0)^T)$, $(\lambda_2 = 2, \quad v_2 = (2,-1,1)^T)$ Să se determine încă o pereche proprie (λ_3, v_3). Este matricea A similară cu o matrice diagonală? Explicaţi. Dacă da scrieţi relaţia de similaritate. Folosind această relaţie calculati A^{30} ca un produs de trei matrici, făra a efectua înmulţirea matricilor.

39. Să se scrie ecuaţia planului π ce conţine punctul $M(1,2,-3)$ şi este perpendicular pe dreapta d dată parametric prin $x(t) = 2t-3, y(t) = -t+5, z(t) = 0t-1$.

40. a) Este adevărat sau fals că două matrici similare au acelaşi polinom caracteristic?

b) Să se arate că o matrice permutare este o matrice ortogonală (vezi în cursul 1 cine este inversa unei matrici permutare şi apoi aplici relaţia $PP^{-1} = I_n$).

c) Matricea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ este în relaţia $A = PBP^T$, cu matricea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

unde P este o matrice permutare. Determinaţi valorile proprii ale lui A.

41. Dacă

$$AT = T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/6 \end{bmatrix}$$

şi T este matrice inversabilă, care sunt valorile proprii ale lui A?

42. Care sunt valorile proprii ale matricii R şi respectiv LRL^{-1}, unde:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

43. O reţea orientată formată din 4 noduri are matricea de conectivitate dată de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic al matricii A are rădăcinile:

$$1.9498, \quad -0.7454 + 0.7495i, \quad -0.7454 - 0.7495i, \quad -0.4590$$

Vectorii proprii ai celor două rădăcini reale sunt respectiv:

$$v_1 = (0.4357, 0.6591, 0.3380, 0.5114)^T, \quad v_4 = (0.2347, -0.2767, 0.6028, -0.7106)^T$$

a) Desenaţi graful asociat matricii de conectivitate.
b) Ce rădăcini are polinomul caracteristic al matricii A^T?
c) Vectorii proprii corespunzători rădăcinilor reale ale polinomului caracteristic al matricii A^T sunt respectiv:

$$w = (0.2848, 0.5553, 0.6518, 0.4309)^T, \quad u = (0.4698, -0.2156, 0.6528, -0.5538)^T$$

Din datele furnizate să se deducă indicele de popularitate al fiecărui nod din reţea.

44. Să se determine descompunerea SVD a matricilor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

45. Dacă A este o matrice pătratică nesingulară ce are descompunerea $A = QR$, unde Q este o matrice ortogonală, iar R este o matrice superior triunghiulară cu elementele de pe diagonala principală nenule, să se deducă relaţia dintre valorile singulare ale matricii A şi R.

46. Fără a efectua înmulţirile matricilor din factorizarea matricii A, unde

$$A = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & \sin\pi/3 \\ -\sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix}$$

să se determine/calculeze:

a) $\det(A)$;

b) valorile proprii ale lui A;

c) câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii.

c) relaţia dintre A şi A^T. Este A semipozitiv definită?

Indicaţie: Observăm că matricea A are 3 factori dintre care primul este o matrice de rotaţie, deci o matrice, cum? Arătaţi că A este simetrică şi atunci exploataţi descompunerea unei matrici simetrice.

47. Dacă se cunoaşte descompunerea SVD a unei matrici, A, să se precizeze factorii din descompunerea SVD a matricii A^T. Dacă A este pătratică şi inversabilă care este descompunerea SVD a matricii A^{-1}?

48. Descompunerea SVD a matricii A conţine matricile:

$$U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Care sunt valorile proprii ale matricii A^TA?

b) Notând $V = [v_1|v_2|v_3|v_4]$, cât este Av_2?

c) Să se calculeze aproximaţia A_1 a matricii A şi să se estimeze eroarea aproximării $\|A - A_1\|_F$ conform Teoremei Eckart (Cursul 12).

49. Fie $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Ştiind că A^TA are valorile proprii $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$ şi $v_1 = (1,1)^T \in S_{\lambda=9}$, $v_2 = (1,-1)^T \in S_{\lambda=4}$, să se determine matricile Σ şi V din descompunerea SVD a matricii A.

Indicaţie: Pentru a putea rezolva ultimele 2 probleme de mai sustrebuie să ştiţi cum se definesc matricile U, V şi Σ din descompunerea SVD a lui A. (vezi Cursul 12).

50. Fie matricea

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & ? & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & ? & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & ? & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Să se arate că $v_1 \perp v_3$ şi să se determine coordonatele vectorului v_2 astfel încât $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ să fie o bază ortonormată negativ orientată în $\mathbb{R}^3$ şi apoi să se calculeze A^{-1} cât mai simplu.

51. Se dă curba Γ parametrizată de:

$$r(t) = (3\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

Să se determine vectorul director al tangentei în punctul $A(-3/2, \sqrt{3})$. Parametrizarea r defineşte sensul de parcurs pe curbă de la punctul $A(3,0)$ spre punctul $B(-3,0)$. Definiţi o parametrizare a aceleaşi curbe ce defineşte o mişcare de la B spre A (vezi Cursul 13!!!)

52. Fie **a** un vector nenul şi fixat în $\mathbb{R}^3$. Să se arate că următoarele aplicaţii sunt liniare şi să se explice efectul lor din punct de vedere geometric:

$$L(v) =< v, a > \frac{a}{\|a\|^2}, \quad L(v) = v- < v, a > \frac{a}{\|a\|^2}$$

53. Se dă dreapta d, parametric, prin:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2t + 1 \\ y(t) &= t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) &= 3t + 5 \end{aligned}$$

Să se determine ecuaţiile planului ce trece prin punctul $M(t = -1)$ al dreptei şi este perpendicular pe dreaptă.

54. Să se determine proiecţia ortogonală a dreptei

$$d : \frac{x+1}{-2} = \frac{x-3}{1} = \frac{z}{-1}$$

pe planul xoz.

55. Să se determine ecuaţia planului π ce trece prin $A(2, 1-1)$ şi este perpendicular pe planele

$$\pi_1 : x - y + 5z + 1 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0$$

Indicaţie: Două plane perpendiculare au normalele perpendiculare!

56. Să se determine coordonatele punctului A ce aparţine dreptei

$$d : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

şi este egal depărtat de punctele $B(3, 0, -2)$, $C(-1, 1, 5)$.

Indicaţie: Folosiţi ecuatiile parametrice ale dreptei $(x = x(t), y = y(t), z = z(t))$ şi apoi determinaţi parametrul corespunzător punctului A.

Transformări în grafica 2D şi 3D

Transformările folosite în grafica 2d sunt scalarea, translaţia, rotaţia, transformările de înclinare, simetriile (vezi suplimentul în care este ilustrat efectul acestor transformari asupra emoticoanelor).

În grafica 3D transformările de bază sunt translaţia, rotaţia în jurul axelor de coordonate, rotaţia în jurul unei axe arbitrare, simetriile faţa de axe sau plane de coordonate.

În grafica 2D spaţiul punctual $\mathbb{R}^2$ este raportat la reperul ortonormat drept $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$ de axe Ox, Oy. Coordonatele unui punct $M(x, y)$ sunt coordonatele vectorului său de poziţie în baza (e_1, e_2): $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$.

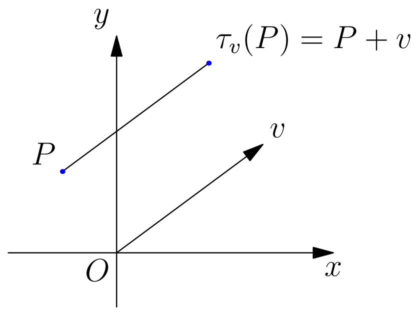


Fig. 1: Efectul translaţiei în $\mathbb{R}^2$.

Analog în grafica 3D, $\mathbb{R}^3$ este raportat la sistemul ortogonal drept de axe Ox, Oy, Oz.

Un obiect ”computaţional” este vizualizat aplicând diverse transformari. O astfel de transformare este translaţia $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (n=2 sau n=3), ce acţionează asupra punctelor obiectului discretizat (computaţional) în felul următor.

Translaţia 2D Translaţia pe direcţia şi sensul unui vector $v = (a, b)^T$ este aplicaţia: $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\tau(P) = P + v$ (punct plus vector=punct). Deci dacă punctul P are coordonatele $P(x, y)$, atunci expresia analitică a translaţiei este: $\tau_v(P) = \tau_v(x, y) = (x + a, y + b)$.

$$\tau(x, y) = (x + a, y + b)$$

Observăm că $\tau_v(O) = \tau_v(0, 0) = (a, b)$. Prin urmare translaţia pe direcţia vectorului $v = (a, b)^T$ aplică originea O în punctul O' de coordonate (a, b). În Fig.**??** este ilustrat efectul translaţiei în $\mathbb{R}^2$.

Analog translaţia în $\mathbb{R}^3$ pe direcţia şi sensul unui vector $v = (a, b, c)^T$ este definită prin $\tau_v(P) = P + v$ şi dacă $P(x, y, z)$ atunci:

$$\tau_v(x, y, z) = (x + a, y + b, c + d)$$

ATENŢIE! A nu se confunda schimbarea de reper prin translaţie, cu aplicaţia translaţie.

Aplicaţia translaţie este o aplicaţie de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $\mathbb{R}^n$ este raportat la un sistem ortogonal de axe şi atât punctul P cât şi imaginea lui $\tau_v(P)$ se raportează la acelaşi sistem de axe.

57. Să se determine translaţia $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ce aplică originea în punctul $O'(-1, 2, 5)$ şi să se precizeze direcţia $v = (a, b, c)^T$ pe care se face translaţia.

Indicaţie: $\tau_v(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c)$ şi deci $\tau_v(0, 0, 0) = (-1, 2, 5)$.

58. Să se determine imaginea paralelogramului de vârfuri

$A(1, 3), B(6, 3), C(0, -1), D(5, -1)$ prin tranlaţia $\tau(x, y) = (x + 1, y - 2)$ (desenaţi în sistemul xOy atât punctele A,B, C,D cât şi imaginile lor prin translaţie.

Simetriile faţă de axele de coordonatedin $\mathbb{R}^2$:

a) Simetria fată de Ox este $S_1(x, y) = (x, -y)$;
b) Simetria faţa de Oy este $S_2(x, y) = (-x, y)$;
c) Simetria faţa de origine $S_O(x, y) = (-x, -y)$.

Transformare lui $\mathbb{R}^2$, $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = (X, Y)$, definită prin:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

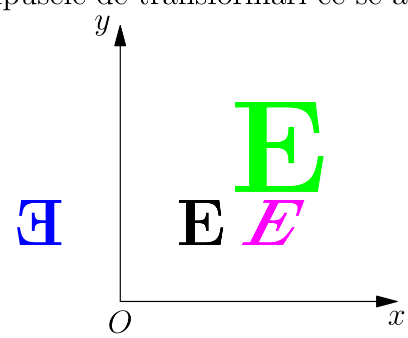
se numeşte **roto-translaţie**. Ea poate fi interpretată ca fiind compusa rotatiei R_θ cu translaţia τ_v, unde $v = (b_1, b_2)^T$, adică $t = \tau_v \circ R_\theta$.

59. Să se caracterizeze transformările $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite de aplicaţile liniare ce au respectiv matricile:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ c)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ d)\ A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

60. Fie $S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformarea înclinare pe direcţia lui Ox, de factor 2, $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, translaţia definită prin $\tau(x, y) = (x - 1, y + 3)$ şi R_θ rotaţia de unghi $\theta = \pi/6$. Să se determine expresia analitică a transformărilor compuse $\tau \circ S_2$, $S_2 \circ \tau$, $\tau \circ R_\theta$, $R_\theta \circ \tau$. Ce concluzie trageţi este compunerea acestora o operaţie comutativă?

61. Să se precizeze transformările sau compusele de transformări ce se aplică literei **E**



pentru a obţine literele colorate din figura:

62. Să se determine expresia analitică a transformării liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ştiind că este compusa unei rotaţii de unghi θ în sens pozitiv, urmată de o scalare de factor 2.

63. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicaţia liniară ce este compusa unei rotaţii în jurul axei Oz, în sens pozitiv, cu unghiul $\pi/4$, cu simetria faţa de planul xOy. Să se determine matricea A, a transformării T relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Este A ortogonală? Dacă da, de ce, dacă nu, de ce?

64. Să se determine expresia analitică a transformării $t : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ce are ca efect asupra unui punct $P(x, y, z)$ rotaţia acestuia în jurul axei Oy, în sens pozitiv cu unghiul $\theta = \pi/4$, urmată de o translaţie $\tau : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, ce aplică originea în punctul $O'(1, 3, -2)$.

65. Să se determine expresia analitică relativ la sistemul drept de axe ortogonale $xOyz$, a rotaţiei R de centru O în jurul axei de direcţie şi sens $v = (-1, 2, 1)$. Să se determine coordonatele punctului $R(M)$, ştiind că $M(-2, 3, -5)$.

66. Să se scrie ecuaţiile planului π ce conţine dreptele concurente $d : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{4}$, $d' : x(t) = -1 + 3t, y(t) = 2 - 4t, z(t) = 1 + t$.

Se dă curba plană γ parametrizată de $r : [-1, 3] \to \mathbb{R}^2$ $r(t) = (2t^2 + t + 5, t^2 + 3t - 1)$. Să se calculeze măura unghiului dintre viteză şi acceleraţie la momentul $t = 1$.

67. Să se determine expresia analitică relativ la reperul canonic de axe $xOyz$, a rotaţiei, de centru O şi de unghi $\theta = \pi/4$, în jurul axei de direcţie $v = (-1, 0, 2)^T$.

68. În cursul în care am discutat popularitatea nodurilor unei reţele am evidenţiat că dacă A este matricea de adiacenţă a reţelei $G = (V, E)$, de noduri $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ şi r este vectorul normalizat al indicilor de popularitate, $Ar = \lambda_d r$, atunci re-etichetând nodurile ca fiind $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ (π fiind o permurare a nodurilor), matricea de adiacenţă a noului graf devine $A' = P_\pi A P_\pi^T$. care este relaţia dintre valoarea proprie dominantă a lui A şi A'? Determinaţi relaţia dintre vectorul r şi vectorul normalizat r' al indicilor de popularitate a reţelei de matrice A'. Se schimbă popularitatea nodurilor dacă le reetichetăm?