

## Cursul 8

### Spațiul punctual. Orientarea bazelor și a reperelor ortonormate.


### Schimbări de repere

În acest curs și în următorul prezentăm metode și tehnici de algebră–geometrie, cu aplicații în *computer graphics*, *gaming*, robotică, analiza și procesarea imaginii și în *WEB design*. În toate aceste domenii se operează preponderent cu puncte. Punctele sunt caracterizate numeric prin coordonatele lor relativ la un sistem ortogonal de axe drept (cel uzual) sau strâmb. Modalitatea în care două puncte definesc un vector este prezentată în secțiunea ce urmează:

#### 8.1 Spațiul punctual afin de dimensiune $n$

Pentru a defini contextul în care se definesc ”vectorii clasici”  $\overrightarrow{AB}$ , determinați de două puncte, considerăm o mulțime de puncte  $\mathcal{P}$ , notate  $A, B, C, \dots$  și spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

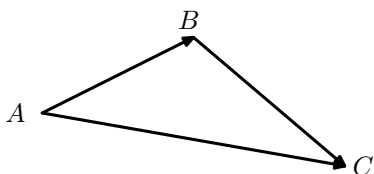
**Definiția 8.1.1** *Spațiul punctual afin de dimensiune  $n$ , este un triplet notat  $\mathcal{A}^n = (\mathcal{P}, \mathbb{R}^n, \varphi)$ , unde  $\varphi$  este o aplicație  $\varphi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , care asociază la orice pereche de puncte  $(A, B)$  un vector  $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$ :*

$$(A, B) \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{AB}$$


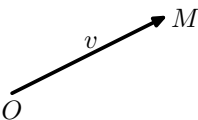
The diagram shows two points, A and B. A directed line segment (vector) connects point A to point B, with an arrow pointing from A to B.

și care în plus verifică următoarele condiții:

1.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$  (relația lui Chasles);



2. Pentru orice punct  $O \in \mathcal{P}$  fixat și vector  $v \in \mathbb{R}^n$  există un unic punct  $M \in \mathcal{P}$  astfel încât  $\overrightarrow{OM} = v$ , cu alte cuvinte aplicația  $\varphi_O$ ,  $\varphi_O : \{O\} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , care asociază la orice punct  $M \in \mathcal{P}$  vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , având punctul de aplicație  $O$ :



$$\varphi_O(M) = \overrightarrow{OM} \in \mathbb{R}^n \quad \text{este bijecție.}$$

Aplicând proprietatea 1. pentru punctele  $A, B, C$  identice, obținem  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ , adică  $\overrightarrow{AA} = \theta \in \mathbb{R}^n$ .

Relația lui Chasles aplicată punctelor  $A, B, A$  conduce la  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$ , adică  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

Relația Chasles se extinde la un număr finit de puncte:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{m-1} A_m} = \overrightarrow{A_1 A_m}$$

Deoarece conform proprietății 2 mulțimea punctelor  $\mathcal{P}$  este în corespondența bijectivă cu  $\mathbb{R}^n$ , luăm drept mulțime de puncte pe  $\mathbb{R}^n$ . Prin urmare "privim" mulțimea  $\mathbb{R}^n$  în două moduri: ca mulțime de puncte și ca spațiu vectorial. Un punct  $A$  din  $\mathbb{R}^n$  este reprezentat de un  $n$ -uplu de numere  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (scrise pe linie), iar un vector  $v$  tot de un  $n$ -uplu de numere reale, dar pentru a face distincție, aceste numere se scriu într-o matrice coloană:

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

La orice două puncte  $A(x_1, x_2, \dots, x_n), B(y_1, y_2, \dots, y_n)$  le asociem vectorul  $\overrightarrow{AB}$  ale cărui coordonate se obțin scăzând din coordonatele punctului  $B$  coordonatele punctului  $A$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$$

Formal aplicația ce definește structura afină pe spațiul de puncte  $\mathbb{R}^n$  este:

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB} := B - A$$

Să verificăm că într-adevăr  $\varphi$  astfel definit satisface condițiile 1. și 2. din definiția spațiului punctual afin:

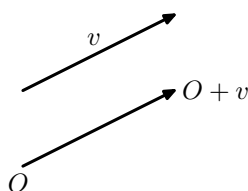
1. Fie  $A, B, C$  trei puncte arbitrare din  $\mathbb{R}^n$ . Atunci:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underbrace{B - A + C - B}_{\text{operații în } \mathbb{R}^n} = C - A = \overrightarrow{AC}$$

2. Pentru orice punct fixat  $O$  și un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , punctul  $M$  ce satisface condiția  $\overrightarrow{OM} = v$ , echivalentă cu operația din  $\mathbb{R}^n$ ,  $M - O = v$ , este unic, și este  $M = O + v$  (+ este adunarea din  $\mathbb{R}^n$ ).

Deci mulțimea  $\mathbb{R}^n$  are structură de spațiu punctual afin. În matematică acest spațiu se notează cu  $\mathbb{A}^n$ , dar în inginerie și computer science se păstrează notația  $\mathbb{R}^n$  și din context se deduce când ne referim la puncte din  $\mathbb{R}^n$  și când la vectori.

Remarcăm că are sens operația punct plus vector  $O + v$ , rezultatul fiind punctul  $M$  cu proprietatea că  $\overrightarrow{OM} = v$ .



**Exemplul 1.** În spațiul  $\mathbb{A}^3$  se dă punctul  $O = (-2, 3, 1)$  și vectorul  $v = (3, 0, 2)^T$ . Să se determine punctul  $M(x_1, x_2, x_3)$  astfel încât  $\overrightarrow{OM} = v$ .

$$M = O + v = (-2 + 3, 3 + 0, 1 + 2) = (1, 3, 3).$$

**Observația 8.1.1** Spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$  se identifică cu mulțimea vectorilor care au originea în punctul  $O = (0, 0, \dots, 0)$ . Într-adevăr, orice vector  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  din  $\mathbb{R}^n$  se identifică cu vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , deoarece  $\overrightarrow{OM} = M - O = (x_1 - 0, x_2 - 0, \dots, x_n - 0)^T = v$ .

Ilustrarea vectorilor din  $\mathbb{R}^n$  prin segmente orientate, din cursurile precedente, este astfel justificată de această observație.

Dacă în plus pe spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$  considerăm un produs scalar  $\langle, \rangle$ , atunci spațiul punctual corespunzător se notează cu  $\mathbb{E}^n$  și se numește **spațiul punctual euclidian**. Pe acest spațiu definim distanța dintre două puncte:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dacă  $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , atunci vectorul  $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^T$  și deci distanța dintre două puncte  $A, B$  este:

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

Două puncte  $A, B$  determină în  $\mathbb{E}^n$  un segment, notat  $[A, B]$  și definit ca fiind mulțimea punctelor ce se obțin adunând punctului  $A$  un vector  $t\overrightarrow{AB}$ ,  $t \in [0, 1]$ , colinar și de același sens cu vectorul  $\overrightarrow{AB}$ :

$$[A, B] = \{P \mid P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]\}$$

**Mijlocul segmentului**  $[A, B]$  este punctul  $M$  cu proprietatea că  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ .

Dacă  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , atunci din relația  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$  rezultă aceeași relație între coordonatele din poziția  $i$  a vectorilor implicați, adică:

$$x_i - a_i = b_i - x_i, \quad \Leftrightarrow \quad 2x_i = a_i + b_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Prin urmare *coordo-natele mijlocului unui segment sunt egale cu media aritmetică a coordo-natelor corespunzătoare ale extremităților segmentului.*

**Exemplul 2.** În  $\mathbb{E}^3$  se dau punctele  $A(-1, 2, 4)$ ,  $B(3, 0, -5)$ ,  $C(1, -7, 2)$ .

a) Să se calculeze distanța de la  $A$  la mijlocul segmentului  $[B, C]$ .

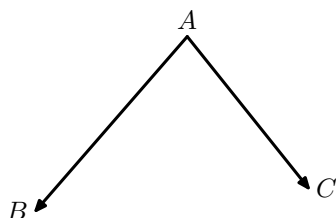
b) Să se calculeze cosinusul unghiului  $\widehat{BAC}$

a) Fie  $M(x, y, z)$  mijlocul segmentului  $[B, C]$ . Coordonatele sale sunt:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0-7}{2} = -3.5, \quad z = \frac{-5+2}{2} = -1.5$$

Distanța  $d(A, M) = \sqrt{((-1-2)^2 + (2+3.5)^2 + (4+1.5)^2)} = \sqrt{9 + 5.5^2 + 5.5^2} = \sqrt{9 + 60.5} = 8.34$ .

b) Unghiul  $\widehat{BAC}$  este unghiul dintre vectorii  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .



$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, -9)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2, -9, -2)$ . Astfel:

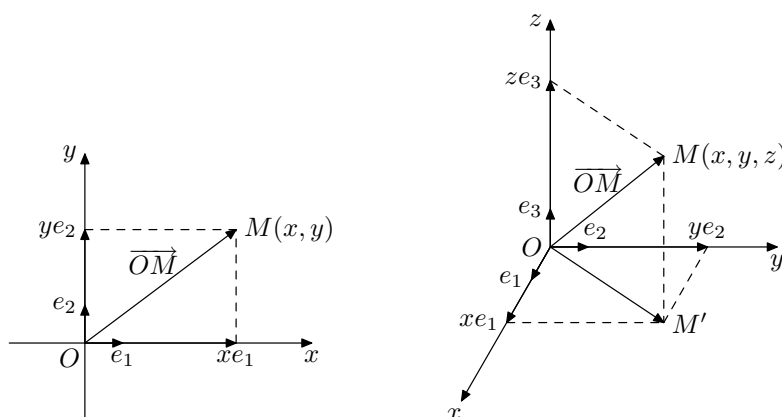
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8 + 18 + 18}{\sqrt{16 + 4 + 81} \sqrt{4 + 81 + 4}} = \frac{44}{\sqrt{101 + 89}} = \frac{44}{\sqrt{190}}$$

## 8.2 Reper ortonormat în spațiul afin euclidian $\mathbb{E}^n$

**Definiția 8.2.1** Un reper ortonormat în  $\mathbb{E}^n$  este o pereche

$$\mathcal{R} = (O; \mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n))$$

constituită dintr-un punct fixat  $O$ , numit originea reperului și o bază ortonormată  $\mathcal{B}$  din spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$ .



**Fig.8.1:** Semnificația coordonatelor unui punct  $M$  din plan raportat la un reper ortonormat (stânga), respectiv din spațiul 3D (dreapta).

Unui reper ortonormat  $\mathcal{R}$  i se asociază un sistem de axe ortogonale  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$ , unde axa  $Ox_i$  este mulțimea punctelor  $M$  cu proprietatea că vectorul  $\overrightarrow{OM}$  este coliniar și de același sens cu vectorul bazei,  $e_i, i = \overline{1, n}$ ,

$$Ox_i = \{M \mid \overrightarrow{OM} = te_i, t \geq 0\}, \quad i = \overline{1, n} \quad \quad O \xrightarrow{e_i} M \xrightarrow{x_i}$$

Versorul  $e_i$ , având norma unu, constituie ”unitatea de măsură” pe axa  $Ox_i$ .

Având fixat un reper ortonormat  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  în  $\mathbb{E}^n$ , **poziția unui punct** arbitrar,  $M$ , **față de acest reper** se determină astfel (vezi și Fig.8.1):

- se ”unește” punctul  $M$  cu originea  $O$  a reperului, obținând vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , numit **vectorul de poziție al punctului M**;
- se descompune vectorul  $\overrightarrow{OM}$  după vectorii bazei reperului:

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad x_i e_i = \langle \overrightarrow{OM}, e_i \rangle e_i = pr_{e_i}(\overrightarrow{OM}), \quad i = \overline{1, n}$$

Prin definiție, coordonatele vectorului de poziție  $\overrightarrow{OM}$  în baza  $\mathcal{B}$  se numesc **coordodatele punctului M relativ la reperul  $\mathcal{R}$**  sau relativ la sistemul de axe ortogonale, asociat.

**Coordonatele originii reperului**, sunt coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OO} = \theta$  în baza reperului, adică  $(0, 0, \dots, 0)$ .

În plan ( $\mathbb{E}^2$ ) axele asociate unui reper ortonormat se notează de obicei prin  $Ox, Oy$ , și coordonatele unui punct arbitrar prin  $(x, y)$ , iar în spațiul 3D,  $\mathbb{E}^3$ , prin  $Ox, Oy, Oz$ , iar coordonatele unui punct  $(x, y, z)$ . În Fig.8.1 sunt ilustrate două repere ortonormate și sistemele de axe ortogonale asociate, unul în plan (stânga) și cel de-al doilea în spațiul  $\mathbb{E}^3$  (dreapta).

### 8.3 Orientarea bazelor și a reperelor ortonormate

**Definiția 8.3.1** Două baze (ortonormate sau neortonormate),  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ , din  $\mathbb{R}^n$  au aceeași orientare dacă determinantul matricii de trecere este pozitiv,  $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$ , și respectiv orientare opusă, dacă determinantul matricii de trecere este negativ.

Dacă bazele  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  au aceeași orientare, notăm:

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$$

Deoarece  $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$  rezultă că dacă  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ , atunci și  $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$  deoarece  $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = 1/\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$ , și deci  $\det(T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}) > 0$ .

Apoi dacă avem 3 baze  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  și  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}', \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$  atunci  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$ .

În  $\mathbb{R}^n$  **orice bază la fel orientată ca baza canonică se numește bază dreaptă**, iar o bază opus orientată bazei canonice (adică cu determinantul matricii de trecere între cele două baze, negativ) se numește bază "strâmbă" sau stângă. Prin analogie, un reper ortonormat în  $\mathbb{R}^n$  se numește **reper drept** dacă baza reperului este dreaptă și **reper stâng**, dacă baza reperului este stângă.

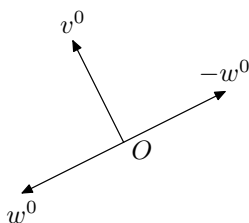
Pentru a identifica dacă un reper este stâng sau drept din analiza poziției relative a axelor de coordonate asociate, discutăm pe rând cazul reperelor din plan și respectiv din spațiul 3D.

#### Repere drepte în plan

Pentru a înțelege orientarea bazelor în spațiul  $\mathbb{R}^2$ , considerăm un vector nenul,  $v = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ . Complementul său ortogonal,  $v^\perp$ , este de ecuație  $ax + by = 0$ , adică mulțimea vectorilor din  $\mathbb{R}^2$  ale căror coordonate satisfac ecuația dreptei  $ax + by = 0$ . Cum  $v^\perp$  are dimensiunea  $2 - 1 = 1$  (vezi Cursul 6), și deci o bază în  $v^\perp$  conține un singur vector, rezultă că există o singură direcție perpendiculară pe  $v$  și anume direcția reprezentată de vectorul  $w = (-b, a)^T$  sau  $w' = (b, -a)^T = -w$ . Notând cu  $v^0, w^0, -w^0$  versorii celor trei direcții și sensuri precizate, putem constitui două baze ortonormate, ce au pe  $v^0$  ca prim vector în bază:

$$\mathcal{B}_1 = (v^0, w^0), \quad \mathcal{B}_2 = (v^0, -w^0)$$

În Figura următoare ilustrăm versorii asociați lui  $v = (-1, 2)^T, w = (-2, -1)^T, -w = (2, 1)^T$ :



În mod natural ne întrebăm prin ce se deosebesc cele două baze, respectiv repere ortonormate ce le-ar avea ca baze. Cum am numit bază dreaptă orice bază la fel orientată ca baza canonică, să caracterizăm bazele drepte și respectiv strâmbă.

Deoarece  $v^0 = v/\|v\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, b)^T$  și  $w^0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b, a)^T$ , matricea de trecere de la baza canonică  $\mathcal{B}$  din  $\mathbb{R}^2$ , la baza  $\mathcal{B}_1 = (v^0, w^0)$ , este:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = [v^0|w^0] = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

și  $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}) = 1 > 0$ . Deci  $\mathcal{B}_1$  este bază dreaptă. Calculând determinantul matricii de trecere de la  $\mathcal{B}$  la  $\mathcal{B}_2 = (v^0, -w^0)$  obținem  $-1 < 0$ , deci baza  $\mathcal{B}_2$  este o bază stângă.

În concluzie:

Dacă  $v = (a, b)^T$  este un vector nenul, atunci versorul său și versorul vectorului  $w = (-b, a)^T$  definesc o bază ortonormată dreaptă.

Pentru a vedea care este poziția vectorilor unei baze ortonormate drepte (strâmbe)  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$  față de baza canonică  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ , exprimăm vectorii  $u_i$  în funcție de vectorii bazei  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \langle u_1, e_1 \rangle e_1 + \langle u_1, e_2 \rangle e_2 \\ u_2 &= \langle u_2, e_1 \rangle e_1 + \langle u_2, e_2 \rangle e_2 \end{aligned}$$

Dar

$$\langle u_i, e_j \rangle = \frac{\langle u_i, e_j \rangle}{\underbrace{\|u_i\|}_{=1} \underbrace{\|e_j\|}_{=1}} = \cos(\widehat{u_i, e_j})$$

Deci:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(\widehat{u_1, e_1}) e_1 + \cos(\widehat{u_1, e_2}) e_2 \\ u_2 &= \cos(\widehat{u_2, e_1}) e_1 + \cos(\widehat{u_2, e_2}) e_2, \end{aligned}$$

Notând  $\theta = \text{măs}(\widehat{u_1, e_1})$  (vezi Fig.8.2 baza colorată în roșu), rezultă că  $u_1 = \cos \theta e_1 + \cos(\pi/2 - \theta) e_2 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ .  $u_2$  fiind ortogonal pe  $u_1$  poate avea coordonatele (vezi discuția de mai sus relativ la vectorii ortogonali  $v, w \in \mathbb{R}^2$ ):

$$1. \quad u_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2,$$

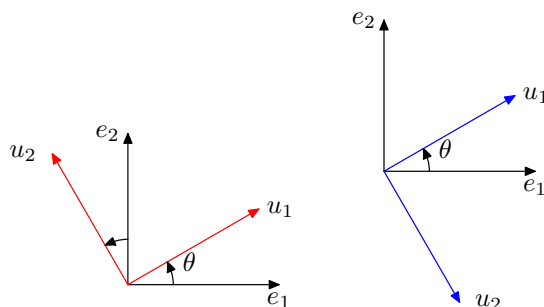
adică măsura unghiului dintre  $u_2$  și  $e_2$  este tot  $\theta$ . În acest caz matricea de trecere

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{are determinatul } \det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 > 0$$

Prin urmare baza ortonormată,  $\mathcal{B}' = (u_1 = (\cos \theta, \sin \theta)^T, u_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)^T)$  este o bază dreaptă.

Luând  $u_2$  vectorul opus celui din primul caz:

$$2. \quad u_2 = \sin \theta e_1 - \cos \theta e_2$$



**Fig.8.2:** Bază dreaptă (roșu), respectiv bază stângă (albastru) în  $\mathbb{R}^2$ .

avem  $\cos(\widehat{u_2, e_2}) = -\cos \theta = \cos(\pi - \theta)$ , adică măsura unghiului dintre  $u_2$  și  $e_2$  nu este  $\theta$ , ci  $\pi - \theta$  (vezi Fig.8.2 baza colorată în albastru). În acest caz matricea de trecere dintre cele două baze:

$$T_{BB'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{are determinantul } \det(T_{BB'}) = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1 < 0$$

și deci baza ortonormată:  $\mathcal{B}' = (u_1 = (\cos \theta, \sin \theta)^T, u_2 = (\sin \theta, -\cos \theta)^T)$  este o bază stângă.

Discuția de mai sus este valabilă, nu doar pentru perechea de baze  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ , unde  $\mathcal{B}$  este baza canonică, ci pentru orice două baze de aceeași orientare.

În concluzie **O bază ortonormată  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$  din  $\mathbb{R}^2$  are aceeași orientare ca baza ortonormată  $(e_1, e_2)$  (care în particular poate fi baza canonică), dacă măsura unghiului dintre  $u_1$  și  $e_1$  coincide cu măsura unghiului dintre  $u_2$  și  $e_2$  (Fig. 8.2, roșu). Baza  $\mathcal{B}'$  are orientare opusă bazei canonice, dacă cele două unghiuri au măsuri diferite (Fig. 8.2, albastru)**

Având această informație despre baze, să deducem o modalitate de a identifica când un reper (sistem de axe ortogonale) este drept, respectiv stâng.

Observăm că sistemul de axe  $xOy$  asociat reperului canonic

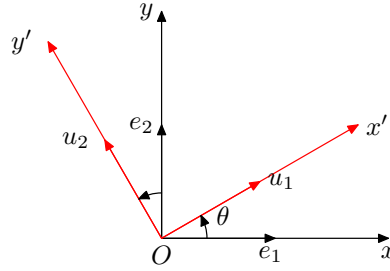
$$\mathcal{R} = (O; e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$$

are particularitatea că axa  $Oy$  se obține rotind pe  $Ox$  în jurul lui  $O$ , în sens trigonometric cu 90 de grade (Fig. 8.3).

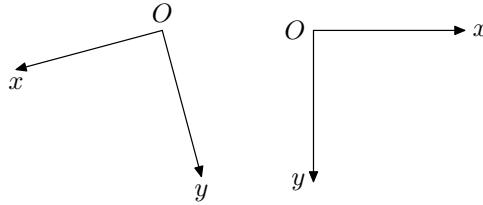
Un sistem de axe  $x'Oy'$  ale cărui axe sunt asociate unui reper ortonormat drept, cu aceeași origine,  $\mathcal{R}' = (O; (u_1, u_2))$ , are particularitatea că unghiul  $\theta$  dintre  $Ox'$  și  $Ox$  este egal cu unghiul dintre  $Oy'$  și  $Oy$  (Fig. 8.3). Astfel "structura sudată"  $x'Oy'$  se obține rotind cu unghiul  $\theta$  pe  $xOy$ . Deci și  $x'Oy'$  are aceeași particularitate ca  $xOy$  și anume axa a doua se obține rotind prima axă în sens trigonometric cu 90 de grade.

În concluzie, un reper ortonormat din plan având axele ortogonale asociate,  $Ox, Oy$ , astfel încât  $Oy$  se obține din  $Ox$  printr-o rotație de 90 de grade în sens trigonometric (*anti-clockwise*





**Fig.8.3:** Poziția unui sistem de axe drept,  $x'Oy'$  față de sistemul de axe canonic,  $xOy$



**Fig.8.4:** Sisteme de axe în  $\mathbb{E}^2$  asociate unui reper drept, respectiv stâng.

sau *counter-clockwise* în computer graphics!), în jurul lui  $O$ , este un reper drept. Dacă  $Oy$  se obține rotind  $Ox$  în sensul acelor ceasornicului, cu 90 de grade, atunci reperul este stâng.

În spațiul afin  $\mathbb{E}^n$  ( $n = 2$ , și  $n = 3$  fiind cazurile de interes pentru CS) nu există un singur reper ortonormat, ci o infinitate de repere. Orice alegere a unui punct, și a unei baze ortonormate ne conduce la alt reper ortonormat. Problema care se ridică este să determinăm relația dintre coordonatele unui punct relativ la un reper dat și apoi relativ la un reper nou. Cea mai simplă schimbare de repere este:

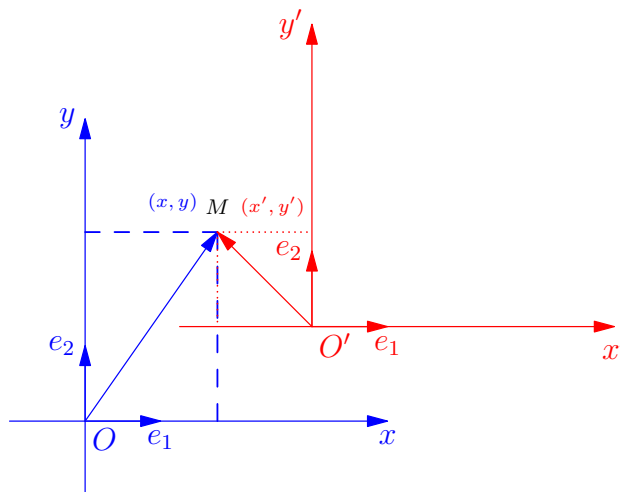
## 8.4 Schimbarea de reper prin translație

Dacă  $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2 | e_3)$  este un reper ortonormat drept în plan sau spațiul 3D<sup>1</sup> și  $O'$  un punct care are relativ la acest reper coordonatele  $(x_0, y_0 | z_0)$ , atunci reperul drept ce are aceeași bază, dar altă origine,  $O'$ ,  $\mathcal{R}' = (O'; e_1, e_2 | e_3)$ , se zice că s-a obținut din reperul  $\mathcal{R}$  printr-o translație pe direcția  $\overrightarrow{OO'}$ . Notând cu  $xOy|z$  sistemul de axe ortogonale asociat primului reper și cu  $x'O'y'|z'$  sistemul asociat celui de-al doilea reper, remarcăm că axele corespunzătoare din cele două repere sunt paralele, având aceeași direcție (de exemplu  $Ox$  și  $O'x'$  au direcția și

<sup>1</sup>Bara | între  $e_2$  și  $e_3$  este inclusă pentru a preciza că în cazul 2D baza conține doar vectorii  $e_1, e_2$ , iar în cazul 3D, pe  $e_1, e_2, e_3$ .

sensul lui  $e_1$ , etc).

Problema care se pune atunci când avem două repere este de a determina relația dintre coordonatele  $(x, y, z)$  ale unui punct  $M$  în primul reper și coordonatele  $(x', y', z')$  ale aceluiași punct în reperul al doilea.



**Fig.8.5:** Două sisteme de axe ortogonale drepte obținute unul din celălalt prin translație.

**Propoziția 8.4.1** Dacă originea  $O'$  a reperului  $\mathcal{R}'$ , obținut prin translație din reperul  $\mathcal{R}$ , are coordonatele  $(x_0, y_0, z_0)$  relativ la reperul inițial,  $\mathcal{R}$ , și un punct arbitrar  $M$  are coordonatele  $(x, y, z)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$  și respectiv coordonatele  $(x', y', z')$  relativ la reperul  $\mathcal{R}'$ , atunci relațiile dintre cele două tipuri de coordonate sunt:

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \\ z' &= z - z_0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

**Demonstrație:** Din regula lui Chasles (Fig.8.5 pentru cazul 2D) avem că

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$$

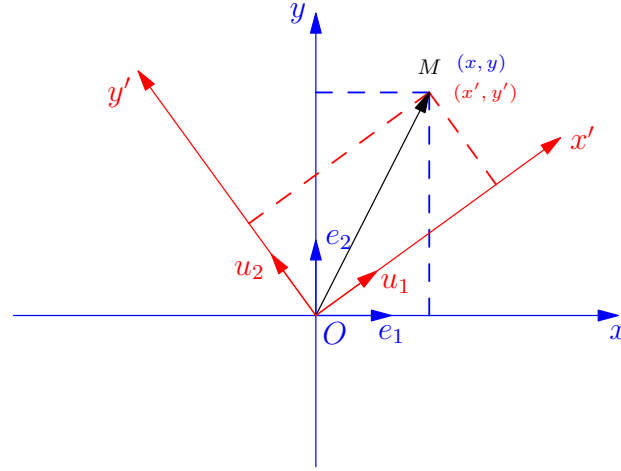
Din definiția coordonatelor relativ la un reper rezultă că:

$$\overrightarrow{OO'} = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3, \quad \overrightarrow{O'M} = x' e_1 + y' e_2 + z' e_3, \quad \overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

Înlocuind în relația Chasles de mai sus avem:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 & x' &= x - x_0 \\ y &= y' + y_0 & y' &= y - y_0 \\ z &= z' + z_0 & z' &= z - z_0 \end{aligned} \quad \text{sau}$$

□



**Fig.8.6:** Două sisteme de axe ortogonale drepte obținute unul din celălalt prin rotație în jurul originii comune.

## 8.5 Schimbarea de reper ortonormat în $\mathbb{E}^2$ prin rotație în jurul originii

În  $\mathbb{E}^2$  se consideră un reper ortonormat drept,  $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2))$  și sistemul de axe asociat  $xOy$  (cel mai adesea în aplicații  $\mathcal{R}$  este reperul asociat bazei canonice). Reperul ortonormat drept  $\mathcal{R}' = (O, (u_1, u_2))$ , ce are aceeași origine  $O$ , dar o altă bază ortonormată dreaptă, se zice că s-a obținut din reperul inițial printr-o rotație în jurul lui  $O$ , de unghi  $\theta = \text{măs}(\widehat{e_1, u_1}) = \text{măs}(\widehat{e_2, u_2})$ .

Un punct arbitrar  $M$  are coordonatele  $(x, y)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$  și respectiv coordonatele  $(x', y')$ , relativ la reperul  $\mathcal{R}'$  (Fig.8.6). Să deducem relația dintre cele două seturi de coordonate.

Conform definiției coordonatelor unui punct relativ la un reper, dat avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= xe_1 + ye_2 \\ \overrightarrow{OM} &= x'u_1 + y'u_2\end{aligned}$$

Dar aceste relații reprezintă de fapt exprimarea aceluiasi vector  $\overrightarrow{OM}$  în două baze ortonormate drepte, diferite,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ ,  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ . Din cursurile relativ la schimbări de baze știm că:

$$\overrightarrow{OM}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \overrightarrow{OM}_{\mathcal{B}'} \quad (8.2)$$

Dar am dedus mai sus că matricea de trecere dintre două baze ortonormate drepte, din  $\mathbb{R}^2$  este matricea:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta = \text{măs}(\widehat{e_1, u_1}) = \text{măs}(\widehat{e_2, u_2})$$

și deci relația (8.2) devine:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad (8.3)$$

iar relația inversă se obține ținând seama că  $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^T$ .

## 8.6 Schimbări arbitrare de repere

În afară de schimbarea de repere prin translație sau prin rotație, avem schimbări mai generale, atât în  $\mathbb{E}^2$  cât și în  $\mathbb{E}^3$ . Și anume, schimbarea de la un reper ortonormat  $\mathcal{R} = (O; \underbrace{(e_1|e_2|e_3)}_{\mathcal{B}})$

la un nou reper ortonormat,  $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$ , care are o altă origine și o altă bază.

Presupunem că  $\mathcal{R} = (O; \underbrace{(e_1|e_2|e_3)}_{\mathcal{B}})$  este un reper ortonormat de axe  $Oxy|z$ , asociat bazei canonice,  $O'$  are coordonatele  $(x_0, y_0|z_0)$  relativ la  $\mathcal{R}$ . Baza noului reper,  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2|u_3)$ , este o bază ortonormată, dreaptă sau strâmbă.

Pentru a determina relația dintre coordonatele  $(x, y, z)$  ale unui punct arbitrar  $M$  din  $\mathbb{E}^n$  ( $n=2,3$ ) relativ la reperul  $\mathcal{R}$ , respectiv coordonatele  $M(x', y', |z')$ , relativ la noul reper  $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$ , se procedează astfel:

- se efectuează mai întâi o translație a reperului inițial,  $\mathcal{R}$ , în reperul intermediar,  $\mathcal{R}_t = (O'; (e_1, e_2, |e_3))$ , ce are ca origine pe  $O'$ , dar aceeași bază ca reperul inițial. Notăm cu  $O'XY|Z$  sistemul de axe asociat. Punctul arbitrar  $M$  va avea relativ la acest reper, coordonatele:

$$\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \\ Z &= z - z_0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

- Se determină coordonatele  $(x', y', |z')$  ale punctului  $M$  relativ la reperul  $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$ , în funcție de coordonatele  $M(X, Y, Z)$  în reperul intermediar  $\mathcal{R}_t = (O'; (e_1, e_2, |e_3))$ , astfel:

★ Se exprimă  $\overrightarrow{O'M}$  în baza reperului  $\mathcal{R}_t$ , respectiv în baza reperului  $\mathcal{R}'$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}} &= Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \\ \overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}'} &= x'u_1 + y'u_2 + z'u_3 \end{aligned} \quad (8.5)$$

★ se scriu relațiile dintre cele două seturi de coordonate ale vectorului  $\overrightarrow{O'M}$ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad (8.6)$$

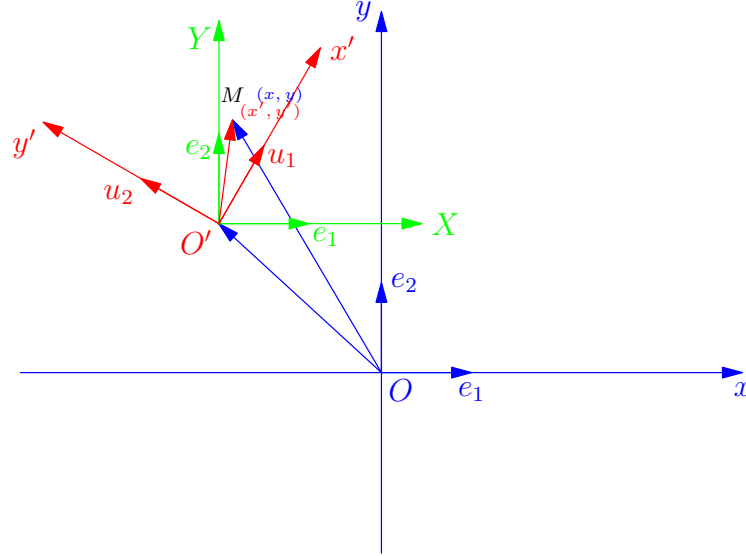
Înlocuind pe  $X, Y, Z$  cu expresia lor din (8.4) obținem:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{M=\text{punct}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{O'=\text{punct}} + \underbrace{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{\text{vector}} \quad (8.7)$$

Din aceste ultime relații se poate deduce exprimarea inversă, a coordonatelor  $(x', y'|z')$  în funcție de coordonatele  $(x, y, z)$ .

Pentru a ilustra problematica schimbărilor arbitrare de repere dăm un exemplu:

1. Fie  $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$  reperul canonic (al lumii reale 2D), de axe asociate  $xOy$  și  $O'(-2, 1)$  un punct raportat la acest reper. Construieți un reper ortonormat drept cu originea în  $O'$  și axe având versorii  $(u_1, u_2)$ , știind că măsura unghiului dintre  $u_1$  și  $e_1$  este  $\theta = \pi/3$ . Să se determine relația dintre coordonatele  $(x, y)$  ale unui punct  $M$  și coordonatele  $(x', y')$  relativ la reperul  $\mathcal{R}' = (O'; u_1, u_2)$ . Desenați cele două sisteme de axe.



Reperul fiind drept, înseamnă că baza ortonormată  $(u_1, u_2)$  este astfel încât  $\widehat{e_1, u_1} = \widehat{e_2, u_2} = \pi/3$ . Prin urmare, vectorii unitari  $u_1, u_2$  îi dăm prin cosinuşii directori:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos \alpha, \cos \beta)^T, \quad \beta = \pi/2 - \alpha \Leftrightarrow u_1 = (\cos(\pi/3), \cos(\pi/2 - \pi/3))^T = \\ &= (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))^T = (1/2, \sqrt{3}/2)^T \\ u_2 &= (-\sqrt{3}/2, 1/2)^T \end{aligned}$$

Noul reper are originea în  $O'$  și axe  $O'x', O'y'$ , de direcție și sens  $u_1, u_2$ .

Din datele problemei, cunoaștem coordonatele noii origini,  $O'$ , relativ la reperul  $\mathcal{R}$ , ceea ce înseamnă că vectorul său de poziție este:

$$\overrightarrow{OO'} = -2e_1 + e_2$$

Coordonatele punctului  $M$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$  sunt  $(x, y)$ , adică:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$$

Se cer coordonatele punctului  $M'$  relativ la noul reper,  $\mathcal{R}'$ .

1. Se efectuează o translație cu originea în  $O'_{\mathcal{R}}(x_0, y_0)$  și se obține reperul intermediar, de axe  $O'XY$  (axe colorate în verde). Coordonatele  $(X, Y)$  ale unui punct arbitrar  $M$  relativ la acest reper sunt:

$$\begin{aligned} X &= x - x_0 = x + 2 \\ Y &= y - y_0 = y - 1 \end{aligned} \tag{8.8}$$

2. Se consideră o nouă schimbare de reper, cu originea tot în  $O'$ , dar direcțiile axelor sunt date de  $u_1, u_2$  (axele colorate în roșu). Relația dintre coordonatele  $(X, Y)$  ale punctului  $M$  și coordonatele  $(x', y')$  relativ la noul reper sunt date de relațiile de schimbare de bază:

$$\overrightarrow{O'M_{B'}} = T_{B'B} \overrightarrow{O'M_B}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T_{BB'}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Ținând seama de relațiile (8.8), obținem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T_{BB'}^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Dar matricea  $T_{BB'}$  este:

$$T_{BB'} = [u_1|u_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

și deci avem ca, coordonatele unui punct în reperul  $\mathcal{R}'$ , în funcție de coordonatele aceluiași punct în reperul  $\mathcal{R}$  sunt:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$