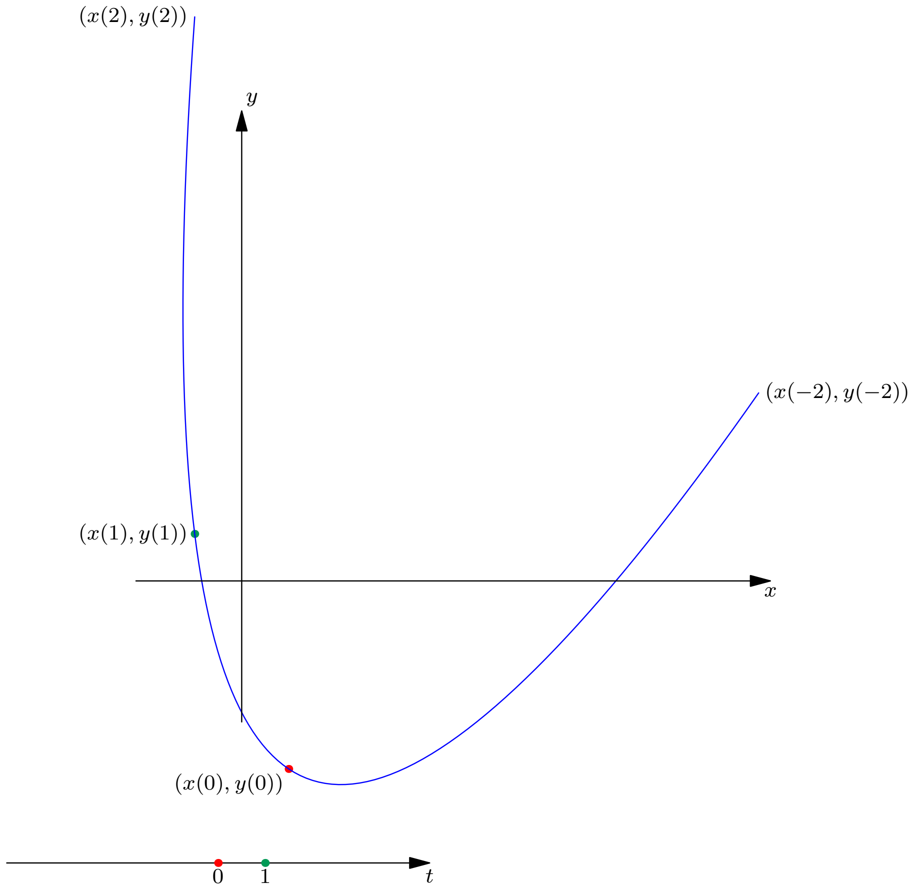
Algebră liniară-Geometrie, Probleme relativ curbe

I Probleme rezolvate

1. Se dă curba plană parametrizată de $r : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (\underbrace{t^2 - 3t + 1}_{x(t)}, \underbrace{3t^2 + 2t - 4}_{y(t)})$$



a) Să se determine panta tangentei în punctul A corespunzător parametrului $t = 0$ şi să se scrie ecuaţia normalei în acest punct;
b) Să se determine vectorul director al tangentei în punctul $P(-1, 1)$ al curbei şi versorul acestui vector.

Rezolvare: Remarcăm că la a) un punct de pe curbă este precizat prin momentul $t = 0$ în care un punct în mişcare l-ar atinge. Pentru a putea scrie ecuaţia tangentei şi normalei în acest punct avem nevoie de cooordonatele sale carteziene (x, y). Acestea vor fi $(x(0), y(0))$. Înlocuind pe $t = 0$ în $x(t) = t^2 - 3t + 1$ obţinem $x(0) = 1$, iar în $y(t) = 3t^2 + 2t - 4$, obţinem $y(0) = -4$. Deci punctul A corespunzător parametrului $t = 0$ are coordonatele $A(1, -4)$.

Panta tangentei în acest punct este $y'(0)/x'(0)$. Calculăm mai întâi:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2t - 3 \\ y'(t) &= 6t + 2 \end{aligned}$$

Astfel $x'(0) = -3$, iar $y'(0) = 2$ şi panta tangentei în A este $m = 2/(-3)$. Deci panta normalei în acelaşi punct este $m' = -1/m = 3/2$ iar ecuaţia normalei în punctul $A(1, -4)$:

$$y + 4 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

b) Punctul $P(1, -1)$ de pe curbă este dat prin coordonatele sale carteziene. Vectorul tangent în P însă este $\vec{\dot{r}}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$, unde t este parametrul corespunzător punctului P, adică t cu proprietatea că:

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 \\ y(t) &= 1 \end{aligned}$$

sau echivalent:

$$\begin{aligned} t^2 - 3t + 1 &= -1 \\ 3t^2 + 2t - 4 &= 1 \end{aligned}$$

Dacă există un t care satisface ambele ecuaţii atunci acesta este t-ul corespunzător punctului P. Dacă nu există, atunci înseamnă că punctul P nu este pe curbă, adică ”nu e atins în nici un moment al mişcării”.

Rezolvând prima ecuaţie obţinem rădăcinile $t_1 = 1, t_2 = 2$, iar a doua: $t_1 = 1$, $t_2 = -5/3$. $t = 1$ fiind rădăcină comună, rezultă că $P(x(1), y(1))$. Deci vectorul director al tangentei în P este:

$$\vec{\dot{r}}(1) = x'(1)\mathbf{i} + y'(1)\mathbf{j}$$

Dar $x'(1) = -1$, $y'(1) = 8$ şi deci vectorul tangent este:

$$\vec{\dot{r}}(1) = -\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

iar versorul său:

$$v^0 = \frac{\vec{\dot{r}}(1)}{\|\vec{\dot{r}}(1)\|} = \frac{-\mathbf{i} + 8\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 64}} = -\frac{-1}{\sqrt{65}}\mathbf{i} + \frac{8}{\sqrt{65}}\mathbf{j}$$

2. Se dă curba în spaţiu parametrizată de:

$$r(t) = (\underbrace{2\cos t}_{x(t)}, \underbrace{2\sin t}_{y(t)}, \underbrace{3t}_{z(t)}) \quad t \in [0, 4\pi] \tag{1}$$

şi punctul P corespunzător parametrului $t = \pi/2$.

a) Să se determine direcţia tangentei şi acceleraţiei în punctul P şi ecuaţiile tangentei în acest punct;

b) Să se determine reperul lui Frenet în P;

Rezolvare a) Pentru a determina direcţia vectorului tangent, respectiv a vectorului acceleraţie într-un punct fixat (în cazul nostru $P(t_0 = \pi/2)$, determinăm vectorul tangent într-un punct arbitrar:

$$\dot{\vec{r}}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} = -2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

şi vectorul acceleraţie într-un punct arbitrar:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k} = -2\cos t\mathbf{i} - 2\sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Astfel:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(\pi/2) &= -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \ddot{\vec{r}}(\pi/2) &= 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned}$$

Pentru a putea scrie ecuaţiile tangentei în punctul P, corespunzător parametrului $t_0 = \pi/2$, determinăm coordonatele carteziene ale lui P, adică $(x(\pi/2), y(\pi/2), z(\pi/2))$. Înlocuind în expresiile funcţiilor $x(t), y(t), z(t)$ pe $t = \pi/2$ obţinem $P(0, 2, 3\pi/2)$. Astfel ecuaţiile tangentei în P sunt ecuaţiile dreptei determinată de $(P; \dot{\vec{r}}(\pi/2))$:

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3\pi/2}{3}$$

b) Calculăm mai întâi cele trei direcţii, tangenta, $\vec{T}(t)$, normala principală, $\vec{N}(t)$, şi binormala, $\vec{B}(t)$, ce definesc reperul Frenet. Apoi evaluăm aceşti vectori în punctul P: $\vec{T}(\pi/2) = \dot{\vec{r}}(\pi/2), \vec{N}(\pi/2), \vec{B}(\pi(2)$.

Direcţia tangentei, $\vec{T}(\pi/2)$ a fost deja calculată, deci rămâne să determinăm direcţia binormalei $\vec{B}$ şi a normalei principale $\vec{N}$:

$$\vec{B}(\pi/2) = \dot{\vec{r}}(\pi/2) \times \ddot{\vec{r}}(\pi/2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} + 4k \parallel 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

$$\vec{N}(\pi/2) = \vec{B}(\pi/2) \times \vec{T}(\pi/2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -13\mathbf{j}$$

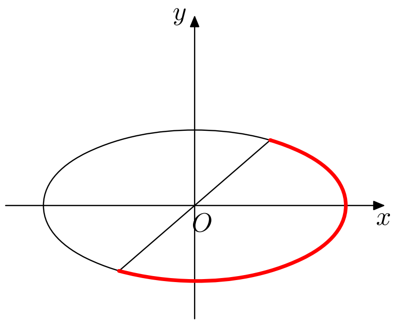
Versorii celor trei direcţii sunt:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}(\pi/2) &= \frac{-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{13}} \\ \vec{n}(\pi/2) &= \frac{-13\mathbf{j}}{13} = -\mathbf{j} \\ \vec{b}(\pi/2) &= \frac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

II Probleme propuse

3. Să se parametrizeze arcul de cerc $x^2 + y^2 = 64$, $y \leq 0$, parcurs în sens trigonometric şi apoi în sensul acelor ceasornicului.

4. Să se determine parametrizarea arcului de elipsă: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$, cuprins între punctele de intersecţie cu dreapta $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}x$, şi anume arcul în lungul căruia $y - \dfrac{3\sqrt{3}}{5}x < 0$ (adică arcul roşu din figură).



Indicaţie: Se determină coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă şi t-ul corspunzător fiecărui punct.

5. Să se determine vectorul director al tangentei şi panta tangentei în punctul $M(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ al curbei

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= 2\cos^3 t \\ y(t) &= 2\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Scrieţi ecuaţia normalei la curbă în acest punct.

6. Să se găsească punctele de pe curba Γ parametrizată de $r(t) = (t^3, 6t, \frac{5}{2}t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, în care tangentele la curbă sunt paralele cu planul $\pi : x + 3y - 3z + 1 = 0$.

Indicaţie: o dreaptă este paralelă cu un plan dacă este perpendiculară pe normala la plan. Desenaţi!).

7. Se dă curba în spaţiu parametrizată de $r(t) = (e^{2t}, e^{-2t}, \sqrt{2}t)$, $t \in [-10, 10]$. Să se determine direcţia binormalei în punctul $A(t = 0)$.

8. Să se scrie ecuaţiile tangentei în punctul $A(t = 0)$ al curbei parametrizată de $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$

9. Se dă curba în spaţiu parametrizată de $r(t) = (2t, \ln t, t^2)$, $t \geq 1$.

Să se determine direcţia normalei principale într-un punct arbitrar al curbei.

10. Se dă curba în spaţiu parametrizată de $r(t) = (1 - \cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Să se determine reperul lui Frenet în punctul $A(t = 0)$.

11. Să se determine aplicând schema de Casteljau, punctul curbei corespunzător parametrului $t = 1/3$, de pe curba Bézier de puncte de control:

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2),\ \mathbf{b}_1 = (1, 3),\ \mathbf{b}_2 = (4, 5),\ \mathbf{b}_3 = (4, 0)$$

precum şi vectorul director al tangentei în acest punct.