Algebră liniară, Probleme relativ la valori şi vectori proprii

1. Un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are relativ la baza canonică matricea:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Să se determine valorile proprii şi să se explice dacă A este similară sau nu cu o matrice diagonală.

Să se determine $L(e_2)$ şi $L(e_3)$, fără nici un calcul (e_2, e_3 sunt vectori din baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$).

2. Sa se verifice dacă matricea A este similară cu o matrice diagonală, să se exprime explicit relaţia de similaritate şi matricea $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ din relaţia de similaritate şi să se calculeze A^{1995}:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ştiind că ea are valorile proprii $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = \lambda_3$, să se determine $\lambda_2 = \lambda_3$ fără a calcula polinomul caracteristic al matricii A, ci doar urma matricii A. Calculaţi apoi determinantul matricii A.

4. Să se arate că matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

nu este similară cu o matrice diagonală.

5. Matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

are valoarea proprie $\lambda = 2$. Verificaţi folosind definiţia vectorilor proprii că vectorii $v_1 = (1, 0, 3)^T$, $v_2 = (0, 1, 3)^T$ sunt vectori proprii ai matricii A.

b) Fără a efectua calcule, ci doar argumentând precizaţi dacă versorul lui v_2 este şi el vector propriu al lui A şi dacă da, care este valoarea proprie corespunzătoare.

Dar suma $2v_1 + v_2$ este vector propriu al lui A. Dacă nu de ce, dacă da, de ce şi precizaţi valoarea lui proprie.

6. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice inversabilă. Să se deducă relaţia dintre valorile proprii ale lui A şi ale inversei sale A^{-1}. În ce relaţie sunt vectorii proprii ai lui A cu cei ai lui A^{-1}?

Indicaţie: $Av = \lambda v$, $A^{-1}A = I_n$.

7. Să se calculeze efectiv (adică manual pe caiet) indicele de popularitate a nodurilor reţelelor simple din figura (pe rând pt fiecare):