Cursul 4

Baze într-un spaţiu vectorial (continuare). Schimbări de baze

4.1 Baze într-un spaţiu vectorial

În cursul precdent am definit o bază într-un spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$ şi am arătat că în $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, î sistemul de vectori:

$$\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_i = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0)^T e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T)$$

constiuie o bază, numită baza canonică sau standard.

În mod natural se ridică întrebarea: este baza canonică din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ unica bază din acest spaţiu? Nu, după cum se poate vedea din propoziţia urmatoare. Înainte de a o enunţa, reamintim din cursul precedent că dacă $v_1, v_2, \dots, v_k$ sunt k vectori din $\mathbb{R}^n$ şi rangul matricii $A = [v_1|v_2|\dots|v_k]$ este egal cu k, adică cu numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniar independenţi şi reciproc dacă vectorii $v_1, v_2, \dots, v_k$ sunt liniar independenţi, atunci rangul matricii $A = [v_1|v_2|\dots|v_k]$ este egal cu k.

Propoziţia 4.1.1 *Orice sistem de n vectori liniar independenţi, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ din $\mathbb{R}^n$ constituie o bază $\mathcal{B}'$ în acest spaţiu.*

Demonstraţie: Vectorii fiind liniar independenţi, matricea sociată $A = [v_1|v_2|\dots|v_n]$ are rangul n, adică $\det(A) \neq 0$.

Să arătăm că orice vector $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor liniar independenţi $v_1, v_2, \dots, v_n$, adică există scalarii $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem:

$$w = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$$

Această exprimare a lui w se poate scrie însă matricial astfel:

$$\underbrace{[v_1|v_2|\dots|v_n]}_{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Prin urmare problema demonstrării existenţei unor scalari unici $y_1, y_2, \dots y_n$ pentru vectorul w revine la a demonstra că oricare ar fi termenii liberi ai sistemului (4.1) (adică oricare ar fi w) sistemul (4.1) are o unică soluţie $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dar cum mai sus am argumentat că matricea $A = [v_1|v_2 \dots |v_n]$ este nesingulară, rezultă că SIGUR sistemul este compatibil determinat.

În concluzie, sistemul ordonat de vectori liniar independenţi , $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, formează o bază în $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemplul 1. Să se arate că sistemul de vectori

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 0)^T, u_2 = (2, 3, -2)^T, u_3 = (4, 1, 1)^T)$$

constituie o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Să se determine apoi coordonatele vectorului $v = (-3, 1, 5)^T$ relativ la această bază.

B1. Să arătăm că vectorii din sistem sunt liniar independenţi folosind criteriul practic:

$$A = [u_1|u_2|u_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantul matricii este det(A)=-7, deci rangul matricii este 3 şi egal cu numărul de vectori. Astfel vectorii sunt liniar independenţi şi conform Propoziţiei de mai sus ei formează o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

Să determinăm coordonatele vectorului $v = (-3, 1, 5)^T$ relativ la această bază, adică scalarii $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem:

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$$

Înlocuind fiecare vector cu coordonatele sale rezultă că trebuie să determinăm soluţia unică a sistemului:

$$\underbrace{[u_1|u_2|u_3]}_{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Înmulţind la stănga cu A^{-1} obţinem că:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

adică exprimarea vectorului v în baza $\mathcal{B}'$ este: $v = 3u_1 - 2u_2 + 1u_3$.

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ în care există o bază formată dintr-un număr finit, n, de vectori. Orice altă bază are acelaşi număr de vectori.

Numărul n, de vectori dintr-o bază a unui spaţiu vectorial $V/\mathbb{K}$ se numeşte dimesiunea spaţiului, iar spaţiul vectorial se numeşte spaţiu vectorial de dimensiune n.

Observaţia 4.1.1 *Algebra liniară studiază spaţii vectoriale de dimensiune finită.*

Exemplul 2. Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are dimensiunea 2, deoarece baza canonică $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T)$, conţine doi vectori. În mod analog, $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ are dimesiunea 3, iar $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ are dimesiunea n.

4.2 Matricea schimbării de bază

Fie $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ două baze în spaţiul vectoria $V_n/\mathbb{K}$ (indicele n al lui V indică dimensiunea spaţiului), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. $\mathcal{B}$ o numim *baza veche*, iar $\mathcal{B}'$, *baza nouă*.

Orice vector v din spaţiu se exprimă ca o combinaţie liniară unică a vectorilor unei baze. În baza $\mathcal{B}$, v are exprimarea $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, iar în baza $\mathcal{B}'$: $v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$, $y_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1,n}$. Notăm prin $v_\mathcal{B}$ matricea coloană a coordonatelor vectorului v în baza $\mathcal{B}$ şi cu $v_{\mathcal{B}'}$, matricea coloană a coordonatelor acestuia în baza $\mathcal{B}'$:

$$v_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\mathcal{B}, \quad v_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

În mod natural ne întrebăm în ce relaţie sunt cele două seturi de coordonate ale vectorului v.

Pentru a deduce o relaţie între ele, ţinem seama că $\mathcal{B}$ este o bază şi deci vectorii noii baze se pot exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ u_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \vdots \\ u_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

unde a_{ij} sunt scalari din $\mathbb{K}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Definiţia 4.2.1 *Matricea $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ce are pe coloane coordonatele vectorilor u_j, $j = \overline{1,n}$ în baza $\mathcal{B}$, se numeşte matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$:*

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [u_{1\mathcal{B}} \mid u_{2\mathcal{B}} \mid \dots \mid u_{n\mathcal{B}}]$$

sau detaliat:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{4.3}
$$

În mod analog se defineşte matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$. Adică dacă exprimăm vectorii vechii baze e_i, $i = \overline{1,n}$, ca şi combinaţii liniare a vectorilor noii baze,

$$
e_i = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \cdots c_{in}u_n, \quad i = \overline{1,n} \tag{4.4}
$$

matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ este:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & e_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{4.5}
$$

$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ fiind matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ realizează trecerea inversă, de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}$. Astfel ne este sugerată ideea că cele două matrici sunt inverse una alteia. În continuare vom arăta că:

Propoziţia 4.2.1 *Matricile de trecere între două baze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ale aceluiaşi spaţiu vectorial, $V_n/\mathbb{K}$, sunt inversabile şi*

$$
T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \tag{4.6}
$$

Demonstraţie: Vom demonstra că are loc una din relaţiile:

$$
T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I_n, \quad T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n
$$

unde I_n este matricea unitate.

În acest scop exprimăm relaţiile dintre vectorii celor două baze (4.2, 4.4) în formă matricială, şi anume:

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^T} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{4.7}
$$

respectiv

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{T^T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Astfel avem:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{T^T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Pe de altă parte, vectorii $u_1, u_2, \dots, u_n$ fiind liniar independenţi ei nu se pot exprima unii ca o combinaţie liniară de ceilalţi, singura exprimare fiind

$$u_i = u_i = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 1u_i + \cdots + 0u_n,\ i = \overline{1,n}$$

sau matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Observăm că ultimele două relaţii matriciale, exprimă vectorii bazei $\mathcal{B}'$ în funcţie de ei înşişi. Cum exprimarea este unică rezultă că obligatoriu avem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

sau echivalent:

$$T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} T^T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I_n$$

Aplicând transpunerea în fiecare membru al acestei ultime egalităţi matriciale, şi folosind proprietăţile transpunerii, $(AB)^T = B^T A^T$, respectiv $(A^T)^T = A$, obţinem:

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n$$

Prin urmare cele două matrici sunt matrici nesingulare şi

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

adică **matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ este inversa matricii de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$**.

□

Vom arăta în continuare că matricea de trecere dintre două baze intervine în relaţia dintre coordonatele aceluiaşi vector în cele două baze. Mai precis:

Propoziţia 4.2.2 *Dacă vectorul v are exprimarea $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ în baza $\mathcal{B}$, respectiv $v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$ în baza $\mathcal{B}'$, atunci între cele două seturi de coordonate există relaţia:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}, \tag{4.12}$$

Demonstraţie: Pornim de la exprimarea vectorului v în baza $\mathcal{B}'$, $v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_nu_n$ şi înlocuim vectorii bazei $\mathcal{B}'$ în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$ (conform (4.7)):

$$\begin{aligned} v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_nu_n &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \overset{4.7}{=} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pe de altă parte $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$, adică

$$v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Ultimul membru din (4.13) reprezintă de asemenea exprimarea vectorului v în baza $\mathcal{B}$. Deoarece exprimarea unui vector într-o bază este unică, rezultă că:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \tag{4.15}$$

Aplicând transpunerea în egalitatea ce constă din membrul stâng şi mebrul cel mai din dreapta al relaţiei (4.15), matricile linie devin matrici coloană şi conform proprietăţii $(AB)^T = B^T A^T$, obţinem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}, \tag{4.16}$$

adică exact ce ne-am propus să demonstrăm.

□

Observaţia 4.2.1 *Relaţia dintre coordonatele vectorului v în bazele $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ se exprimă concentrat astfel:*

$$v_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\, v_{\mathcal{B}'} \tag{4.17}$$

respectiv:

$$v_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} \tag{4.18}$$

Exemplul 3. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm baza canonica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi baza $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 1)^T, u_2 = (3, 0, -4)^T, u_3 = (2, 5, -1)^T)$

a) Să se determine matricile de trecere între cele două baze: $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

b) Să se exprime vectorii bazei canonice în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$.

c) Să se determine coordonatele vectorului $v = (0, 4, -3)^T$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

Rezolvare: a) Observăm că vectorii bazei $\mathcal{B}'$ sunt exprimaţi ca triplete de numere reale, deci în baza canonică:

$$\begin{aligned} u_1 &= (-1, 2, 1)^T &&= -1e_1 + 2e_2 + e_3 \\ u_2 &= (3, 0, -4)^T &&= 3e_1 + 0e_2 - 4e_3 \\ u_3 &= (2, 5, -1)^T &&= 2e_1 + 5e_2 - 1e_3 \end{aligned}$$

Astfel, fără nici un calcul prealabil putem da matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [u_{1\mathcal{B}} \mid u_{2\mathcal{B}} | \ u_{2\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matricea de trecere de la baza nouă la baza veche, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, este inversa matricii $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Pentru determinarea inversei calculăm:

- determinantul: $\det(A) = -90$;
- transpusa matricii $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$:

$$T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

- adjuncta:

$$T^*_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

Astfel inversa este:

$$T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \equiv T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \frac{-1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

b) Conform definiţiei matricii de trecere $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [e_{1\mathcal{B}'}|e_{2\mathcal{B}'}|\dots|e_{n\mathcal{B}'}|$ avem că coloana j conţine coordonatele vectorului e_j în baza $\mathcal{B}'$. Rezultă astfel că:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{90}(20u_1 - 18u_2 - 8u_3) \\ e_2 &= -\frac{1}{90}(-5u_1 + 9u_2 - 16u_3) \\ e_3 &= -\frac{1}{90}(15u_1 + 9u_2 - 6u_3) \end{aligned}$$

c) Vectorul v fiind dat ca un triplet de numere reale, $(0, 4, -3)^T$, este exprimat în baza canonică şi se cere să găsim descompunerea sa în baza $\mathcal{B}'$: $v = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Coordonatele y_1, y_2, y_3 se pot calcula în două moduri:

1. Metoda algoritmică dedusă mai sus, şi anume:

$$v_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}},$$

   adică:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{-1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. Metoda clasică (care se pretează în calculul ”pe caiet”, nu în calculul numeric, implementat într-un cod), al coordonatelor unui vector revine la a înlocui fiecare vector cu tripletul reprezentativ:

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ceea este echivalent cu sistemul liniar şi neomogen:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Deci coordonatele vectorului v în baza $\mathcal{B}'$ reprezintă soluţia acestui sistem.

Observăm că matricea sistemului este $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Această matrice fiind nesingulară, rezultă că sistemul are o unică soluţie (dacă nu observăm că matricea sistemului este $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, atunci trebuie să verificăm că ea este nesingulară):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{-1}{90} \begin{bmatrix} -65 \\ 9 \\ -46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65/90 \\ -1/10 \\ 46/90 \end{bmatrix}$$

Prin urmare, indiferent de metoda aplicată, obţinem că vectorul v se exprimă în baza $\mathcal{B}'$ astfel:

$$v = \frac{65}{90} u_1 - \frac{1}{10} u_2 + \frac{46}{90} u_3$$

Exemplul 4. În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^2$ se consideră baza canonică $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T)$ şi bazele $\mathcal{B}' = (u_1 = (2,-3)^T, u_2 = (-1,4)^T)$, $\mathcal{B}'' = (f_1 = (1,3)^T, f_2 = (-1,5)^T)$.
a) Să se determine matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$.
b) Să se determine descompunerea vectorului $v = 2u_1 - 7u_2$ după vectorii bazei $\mathcal{B}''$.

Rezolvare a) Vectorii celor două baze sunt exprimaţi în baza canonică. Prin urmare, din datele problemei putem determina matricile de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ şi $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$:
Din

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 2e_1 - 3e_2 \\ u_2 & = & -1e_1 + 4e_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

rezultă că

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

iar din

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & 1e_1 + 3e_2 \\ f_2 & = & -1e_1 + 5e_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

avem că:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pentru a determina matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}''$ trebuie să exprimăm vectorii bazei $\mathcal{B}''$ în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$. Din relaţia matricială (4.19), rezultă că vectorii bazei canonice se exprimă în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$ prin:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Din (4.20) şi (4.21) rezultă exprimarea matricială a vectorilor bazei $\mathcal{B}''$ în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Deci

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{7}{5}u_1 + \frac{9}{5}u_2 \\ f_2 &= \frac{1}{5}u_1 + \frac{7}{5}u_2 \end{aligned}$$

şi prin urmare matricea $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ este:

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Remarcăm că de fapt:

$$\boxed{T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}}$$

b) Descompunerea vectorului v după vectorii bazei $\mathcal{B}''$ este $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$, unde y_1, y_2 sunt numere reale. y_1, y_2 se pot determina direct din relaţia matricială de mai jos, datorită faptului că se cunoaşte exprimarea lui v în baza $\mathcal{B}'$, $v = 2u_1 - 7u_2$, :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}''} = T_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \tag{4.24}$$

Matricea $T_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$. Prin urmare rămâne doar să calculăm inversa matricei $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ şi să efectuăm inmulţirea în (4.24).

> **Observaţie:** În majoritatea aplicaţiilor practice orice bază din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ se exprimă în funcţie de baza canonică. Dacă intervin două baze $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$, diferite de cea canonică, relaţia dintre ele, adică matricile de trecere de la una la cealaltă se pot exprima doar explicitând în prealabil, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}, T_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$, unde $\mathcal{B}$ este baza canonică.

Precizăm că se foloseşte şi notaţia $\mathcal{B}_c$ pentru baza canonică. Noi vom folosi preponderent notaţia $\mathcal{B}$, nu $\mathcal{B}_c$!

4.3 Subspaţii vectoriale

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ şi S o submulţime nevidă a sa. Ne întrebăm în ce condiţii S are structură de spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$, relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari din $V \supset S$. Evident că dacă sunt verificate cele 8 condiţii din definiţia spaţiului vectorial pentru S, atunci S are structură de spaţiu vectorial peste K şi în acest caz spunem că S este **subspaţiu vectorial** sau **subspaţiu liniar** al lui V.

Propoziţia 4.3.1 *O submulţime nevidă S a spaţiului vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$ este subspaţiu vectorial sau subspaţiu liniar al lui V dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt verificate:*
SSV1. $\forall\ s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 + s_2 \in S$,;
SSV2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ ***şi*** $\forall\ s \in S \Rightarrow \alpha s \in S$.

• Presupunem că sunt verificate cele două condiţii. Atunci dacă $s \in S$, rezultă că şi $-1s = -s \in S$ şi deci $s - s = \theta \in S$. Evident, că în aceste condiţii $(S, +)$ este grup comutativ şi în plus sunt satisfăcute cele 4 condiţii din axiomele de spaţiu vectorial, relativ la înmulţirea cu scalari.

• Dacă S are structură de spaţiu vectorial faţă de operaţiile de adunare din V şi înmulţirea cu scalari din $\mathbb{K}$, atunci, evident că au loc relaţiile SSV1–SSV2.

!!!! Orice subspaţiu vectorial $S \subset V$ conţine vectorul nul din V.

Exemplul 5. Fie θ vectorul nul din spaţiul vectorial $V/\mathbb{K}$. Submulţimea $S = \{\theta\} \subset V$ este subspaţiu vectorial al lui V, numit *subspaţiul nul* sau subspaţiul trivial al lui V .

În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ avem două modalităţi de a da un subspaţiu vectorial:

1. Fixăm o matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen de m ecuaţii cu n necunoscute, de matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \theta\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$

Într-adevăr, fie sistemul liniar şi omogen $Ax = \theta$ exprimat în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Să arătăm că mulţimea soluţiilor sistemului, adică mulţimea vectorilor ce verifică sistemul, este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

SSV1: Fie x, y două soluţii, adică $Ax = \theta$ şi $Ay = \theta$. Atunci adunând membru cu membru cele două sisteme avem: $A(x+y) = Ax+Ay = \theta+\theta = \theta$, deci $x+y$ este soluţie a sistemului, adică $x + y \in S$.

SSV2: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi x o soluţie, adică $Ax = \theta$. Atunci $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\theta = \theta$, deci αx este soluţie a sistemului. Prin urmare S, mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen, de matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, numit **subspaţiul nul al matricii A şi notat Null(A)**. Ecuaţiile sistemului liniar şi omogen de matrice A se numesc **ecuaţiile subspaţiului Null(A)**.

4.3.1 Dimensiunea unui subspaţiu vectorial

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, de dimensiune n şi $S \subset V$ un subspaţiu vectorial al lui V. Dimensiunea lui S este mai mică sau egală cu n. Dacă dimensiunea lui S este n, atunci $S \equiv V$. Prin convenţie dimensiunea subspaţiului nul, $S = \{\theta\}$, este zero.

Ştiind că dimensiunea unui subspaţiu vectorial $S \subset V$ este dată de numărul de vectori dintr-o bază, ilustrăm în continuare cum se detemină o bază într-un subspatiu S al lui $\mathbb{R}^n$, de ecuaţii $Ax = \theta$.

Exemplul 6. Să se determine o bază în subspaţiul vectorial

$$S = \{v(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3y - 5z = 0\}$$

al lui $\mathbb{R}^3$ şi dimensiunea acestui subspaţiu.

S este conform definiţiei mulţimea soluţiilor sistemului format dintr-o ecuaţie liniară şi omogenă: $x - 3y - 5z = 0$. Pentru a determina mulţimea soluţiilor observăm că matricea sistemului este $A = [1 - 3 - 5]$. $\Delta_p = |1|$ este un determinant principal. Deci x este necunoscută principală, iar $\alpha := y, \beta := z$ sunt necunoscute secundare. Astfel $x = 3\alpha + 5\beta$ şi mulţimea soluţiilor se poate exprima astfel:

$$S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \begin{bmatrix} 3\alpha + 5\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Prin urmare subspaţiul S este generat de vectorii $s_1 = (3, 1, 0)^T, s_2 = (5, 0, 1)^T$. Deoarece aceşti vectori sunt liniar independenţi (matricea asociată are rangul 2), rezultă că o bază în S este $\mathcal{B}_S = (s_1, s_2)$, şi astfel dimensiunea subspaţiului S este 2 (numărul de vectori din bază).