Probleme de antrenament pentru lucarea de control nr 2

Pentru Lucrarea 2 a se parcurge problemele rezolvate din curs, seminar, teme şi pentru un antrenament mai riguros şi problemele de mai jos. Probleme relativ la plan şi dreaptă sunt incluse în arhiva postată ce mai conţine şi teoria aferentă planului şi dreptei.

1. Se consideră reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2))$ de axe xOy şi reperul ortonormat drept $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2))$ de axe $XO'Y$.

a) Ştiind că punctul O' are relativ la primul reper coordonatele $(2, 3)$ şi că u_2 formează cu e_2 unghiul de măsura $\theta = -\pi/4$, să se determine coordonatele vectorilor u_1, u_2 relativ la baza canonică şi să se deseneze cele două sisteme de axe.

b) Dacă punctul M are coordonatele $(X = -1, Y = 2)$ relativ la cel de-al doilea reper, să se deducă etapizat coordonatele lui M relativ la reperul iniţial.

2. O figură discretizată întră în dreptunghiul $[-1, 4] \times [0, 5]$ raportat la sistemul lumii reale xOy. Dorim să mapăm figura pe un viewport ce are coordonatele pixel, diagonal opuse $(100, 400)$, $(400, 150)$. Ştiind că punctele figurii din dreptunghiul iniţial sunt $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 350}$, să se determine transformarea ce aplică aceste puncte pe viewport, explicând fiecare etapă ca în curs.

3. În $\mathbb{R}^3$ se dă baza ortonormată

$$\mathcal{B}' = \left(u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^T, u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)^T, u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right)^T$$

a) Verificaţi prin două metode dacă baza $\mathcal{B}'$ este sau nu dreaptă (calculând $det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})$ şi respectiv $u_1 \times u_2$).

b) Dacă baza nu este pozitiv orientată ce modificare i-aţi aduce pentru a obţine o bază dreaptă?

4. Să se determine scalarea ce se aplică cel mai mic dreptunghi ce conţine punctele $A(1, 2), B(3, 0), C(4, -1), D(6, 4)$ pe viewportul de coordonate pixel $p_\ell = 100$, $p_r = 300$, $p_b = 300$, $p_t = 100$.

5. Fie $v = (2, 1, 1)^T$ şi $w = (-1, 3, 2)^T$. Pornind de la aceşti doi vectori şi efectuând produse vectoriale succesive să se construiască în $\mathbb{R}^3$ o bază ortonormată pozitiv orientată $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$, astfel încât $u_1 = v^0$ iar $u_3 = (v \times w)^0$.

6. Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Să se arate că T este un operator liniar.

b) Să se determine matricea lui T relativ la baza canonică explicitând expresia de mai sus matricial (vezi Cursul 1, calculul Ax).

c) Să se deducă matricea folosind definiţia ei, adică $M = [T(e_1)|T(e_2)]$.

7. Fie $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ un vector nenul fixat din $\mathbb{R}^3$ şi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operatorul liniar definit prin $T(v) = v \times a$ (produs vectorial). Să se determine matricea lui T relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi expresia analitică a lui T, adică regula dupa care T asociază unui vector $v = (x_1, x_2, x_3)^T$, vectorul $w = (y_1, y_2, y_3) = v \times a$ $(T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3))$.

Să se scrie această expresie analitică pentru $a = (-1, 2, 4)^T$.

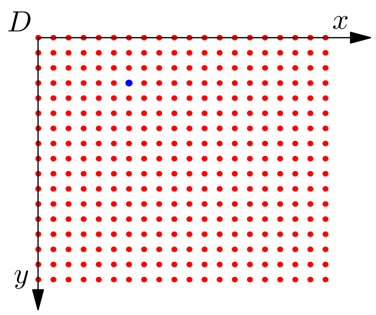
8. Ştiind că dacă $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sunt doi operatori liniari ce au relativ la o bază fixată în $\mathbb{R}^n$ matricea A (pt L) şi matricea M (pt T), atunci operatorul compus $L \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definit prin $(L \circ T)(v) = L(T(v))$, va avea relativ la aceeaşi bază matricea AM, să se deducă matricea operatorului liniar $S_a \circ R_\theta$, unde $S_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este scalarea de factor a (vezi fişierul **TransformariLiniareR2.pdf**), iar $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este rotaţia de unghi θ.

9. O culoare este reprezenată în grafică şi imagistică printr-un vector (r, g, b), **r=red** **g=green**, **b=blue**, unde $r, g, b \in [0, 1]$. Schimbarea culorilor într-o imagine presupune aplicarea unei transformări pe cubul $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Fie T_1 transformarea ce aplică (r, g, b) pe (g, b, r) şi T_2 ce aplică (r, g, b) în $(r, g, 0)$. Să se determine compusa acestor aplicaţii liniare.

10. Scrieţi matricea rotaţiei plane de unghi $\theta = 2\pi/3$ în sensul acelor ceasornicului.

11. Să se determine expresia analitică a rotaţiei R^x_θ în jurul axei Ox din $\mathbb{R}^3$, de unghi $\theta = -\pi/6$. Desenaţi in sistemul de axe $xOyz$, pozitia vectorilor $R^x_\theta(e_1), R^x_\theta(e_2), R^x_\theta(e_3)$, unde e_i sunt vectorii bazei canonice.

12. O imagine Img de rezoluţie 200×150 este raporată la un sistem strâmb de coordonate cu originea în colţul stânga, sus. $Img[i][j]$ este pixelul din linia i, coloana j, $i = \overline{0, 199}$, $j = \overline{0, 149}$.



În sistemul de coordonate xOy ales, pixelul $Img[i][j]$ este plasat în punctul de coordonate (j, i) (vezi punctul albastru din figură).

Definim transformarea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care restricţionată la imagine are ca efect generarea unei noi imagini, în oglindă, adică partea stângă a imaginii devine partea dreaptă şi viceversa (de exemplu coloana 0 a imaginii iniţiale trece în coloana 149 a noii imagini şi viceversa). Să se scrie expresia analitică a lui T, adică regula după care unui punct de coordonate (j, i) i se asociază în oglindă punctul de coordonate (J, I). Este T aplicaţie liniară?

13. Aplicând procedeul Gramm–Schmidt să se construiască din coloanele matricii

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o bază ortonormată $\mathcal{B}' = (q_1, q_2, q_3)$ şi fie $Q = [q_1|q_2|q_3]$. Precizaţi cât este produsul QQ^T fără a efectua calcule, ci argumentând pe baza cunoştinţelor teoretice.

14. a) Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Să se arate că $< Av, w >=< v, A^T w >$, $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$ (indicaţie folosiţi definitia produsului scalar sub forma: $< x, y >= x^T y$).

b) Fie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator liniar ce are relativ la baza canonică matricea Q care este o matrice ortogonală (un astfel de operator se numeşte operator ortogonal).

Folosind reprezentarea matricială a operatorului, adică $T(v) = Qv$, să se arate că:

i) $< T(v), T(w) >=< v, w >, \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$.

ii) $||T(v)|| = ||v||$.

Din cele două proprietăti rezultă că un operator ortogonal transformă un vector v într-un vector de aceeaşi normă şi dacă unghiul dintre v şi w este θ, atunci unghiul dintre $T(v)$ şi $T(w)$ este tot θ:

$$\cos\alpha = \frac{< Tv, Tw >}{||T(v)||\,||T(w)||} = \frac{< v, w >}{||v||\,||w||} = \cos\theta$$

Cu alte cuvinte un operator ortogonal nu modifică "lungimea" vectorilor şi nici unghiul dintre doi vectori.

c) Să se verifice că matricile de rotaţie în jurul lui Ox, Oy, Oz sunt matrici ortogonale şi deci operatorii liniari $R^x_\theta, R^y_\theta, R^z_\theta$ sunt operatori ortogonali.

15. Să se deducă expresia analitică relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ a rotaţiei cu unghiul $\theta = -\pi/4$ în jurul axei de direcţie $v = (1, 1, 1)^T$.

16. Fie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^3$, relativ la care un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Să se scrie expresia analitică a lui L relativ la baza $\mathcal{B}$, adică formula după care la orice vector $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ îi asociază un vector $w = L(v) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$.

b) Să se afle matricea lui L relativ la baza $\mathcal{B}' = (u_1 = v_1+v_3, u_2 = v_2+v_3, u_3 = v_1+v_2)$ şi expresia analitică a lui L relativ la această bază.

17. Fie S este un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, de dimensiune $m < n$, in care s-a determinat baza ortonormata $\overline{B} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Notăm prin $P_S : \mathbb{R}^n \to S$, aplicaţia care asociază la orice vector $v \in \mathbb{R}^n$ proiectia sa ortogonala pe subspaţiul S.

În Cursul 10 am demonstrat că proiecţia ortogonală unui vector $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$ pe subspaţiul S este vectorul $s = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_mu_m \in S$, unde:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]^T}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Această relaţie matricială se foloseşte pentru a implementa proiecţia ortogonală pe un subspaţiu, în care baza ortonormată este $(u_1, u_2, \dots, u_m)$.

a) Deduceţi matricea proiecţiei ortogonale a unui vector $v \in \mathbb{R}^2$ pe subspaţiul de ecuaţie $-x + 3y = 0$.

b) Calculaţi matricea proiecţiei ortogonale a unui vector v din $\mathbb{R}^3$ pe subspaţiul S de ecuaţie $2x - y + z = 0$.

Indicaţie: determinaţi mai întâi o bază în S, pe care o ortonormaţi cu metoda Gramm-Schmidt şi apoi deduceţi ca mai sus matricea proiecţiei.

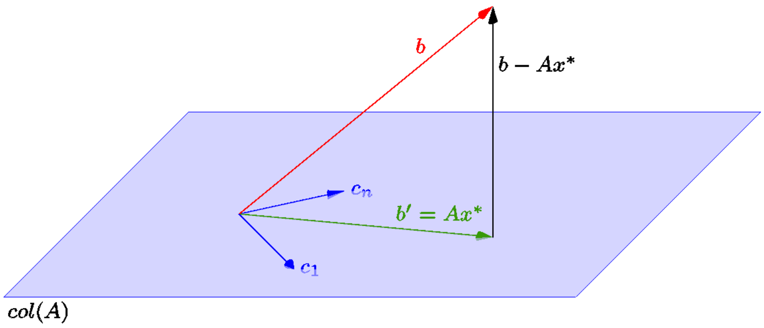
Proiecţia ortogonală pe un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, exprimată în baza canonică

Deducerea matricii a proiecţiei ortogonale, în acest caz, este opţională şi se adreseaza doar celor interesaţi. Celorlaţi le poate dăuna!

Calculul proiecţiei ortogonale a unui vector pe un subspaţiu intervine în numeroşi algoritmi din *machine learning*.

Uneori însă baza ortonormată nu mai intervine în alte etape ale algoritmului şi atunci este util să evităm determinarea ei şi să găsim matricea proiecţiei ortogonale pe un subspaţiu $S \subset \mathbb{R}^n$, relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^n$. Aceasta înseamnă să privim proiecţia ortogonală ca un operator liniar, $P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, care asociază unui vector $v \in \mathbb{R}^n$, proiecţia lui ortogonală, w, pe subspaţiul S şi vectorul proiecţie w să fie exprimat tot în baza canonică, nu în baza subspaţiului.

În acest caz matricea proiecţiei ortogonale pe un subspaţiu se poate determina din interpretarea geometrică a procedurii de aflare a soluţiei celor mai mici pătrate a unui sistem supradeterminat, $Ax = b$:



Descrierea etapelor de aflare a matricii operatorului $P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

• Se determină o bază arbitrară, $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ în subspaţiul S.

• Subspaţiul S poate fi atunci interpretat ca subspaţiul coloanelor matricii $A = [v_1|v_2|\dots|v_m]$. Matricea A are rangul m (egal cu nr de vectori liniar independenţi). Vectorul v pe care dorim sa-l proiectăm pe subspaţiul $S = col(A)$ este pe post de vectorul b din figura de mai sus.

• Atunci $P_S(v) = Ax^*$, unde x^* este soluţia celor mai mici pătrate a sistemului $Ax = v$. Dar x^* este soluţia unică a sistemului normal:

$$A^T Ax = A^T v$$

adică $x^* = (A^T A)^{-1} A^T v$ şi deci

$$P_S(v) = Ax^* = A(A^T A)^{-1} A^T v$$

În concluzie matricea proiecţiei ortogonale pe subspaţiul S în care avem baza arbitrară $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ este:

$$M = A(A^T A)^{-1} A^T$$

Remarcăm că dacă baza din S este ortonormată atunci $A = [u_1|u_2|\dots|u_m]$ şi $A^T A$ are elementele $< u_i, u_j >= \delta_{ij}$, adică $A^T A = I_m$ şi în acest caz matricea operatorului $P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este:

$$M = AA^T = \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]}_{A} \cdot \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]^T}_{A^T}$$

Atenţie!!!!! matricea A nu este patratică, ci de tip $n \times m$, deci nu pot spune că e matrice ortogonală (matricile ortogonale sunt patratice!!!). În acest caz deşi $A^T A = I_m$, $AA^T \neq I_n$.

În concluzie, avem 3 modalităti de a exprima proiecţia otogonală pe un subspaţiu S:

1) Cazul în care privim $P_S : \mathbb{R}^n \to S$ şi în S avem determinată baza ortonormată $u_1, u_2, \dots, u_m$. În acest caz matricea relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^n$ şi baza $\overline{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ din S este: $M = [u_1\|u_2\|\dots\|u_m]^T$

2) În S avem determinată o bază ortonormată $\overline{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ şi privim proiecţia ortogonală pe S ca un operator liniar $P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. În acest caz matricea relativ la baza canonică şi în domeniu şi în codomeniu este:

$$M = \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]}_{A} \cdot \underbrace{[u_1|u_2|\dots|u_m]^T}_{A^T}$$

3) În S avem determinată o bază oarecare $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ şi privim proiecţia ortogonală pe S ca un operator liniar $P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. În acest caz matricea relativ la baza canonică şi în domeniu şi în codomeniu este exprimată în funcţie de matricea $A = [v_1|v_2|\dots|v_m]$, astfel:

$$M = A(A^T A)^{-1} A^T$$

18. În problema (17), a) şi b), să se determine matricea proiecţiei ortogonale pe subspaţiul S dat si relativ la baza canonica din $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$ la problema a doua), considerând în S o baza ortonormată.

19. Să se determine matricea proiecţiei ortogonale $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pe subspaţiul $S = span(v_1(-1, 2, 1)^T, v_2 = (3, 0, 5)^T)$.