Întrebări şi probleme de antrenament pentru examenul parţial

Întrebări

Pentru a putea raspunde la întrebările următoare trebuie să fi înţeles bine cursul, NU doar citit pe diagonală.

Invăţaţi în aşa fel încât la examen să ştiţi să argumentaţi (în scris) tot ceea ce faceţi. Lucrările care conţin doar calcule, fără argumente sunt mult depunctate.

1. Care din următoarele relaţii este adevărată:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} P_\pi = \begin{bmatrix} x_{\pi_1} & x_{\pi_2} & \dots & x_{\pi_n} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad P_\pi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\pi_1} \\ x_{\pi_2} \\ \vdots \\ x_{\pi_n} \end{bmatrix}?$$

2. Este o matrice permutare, matrice ortogonală? Argumentaţi!

3. Presupunem că pivoţii din forma scară redusă, S_A^0, a matricii $A = [v_1|v_2|\dots|v_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se găsesc în poziţiile:

$$(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$$

Care vectori din sistemul $\mathcal{S} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sunt liniar independenţi? Argumentaţi răspunsul!

4. Dacă $\mathcal{B} = (e_i)$, $\mathcal{B}' = (u_i)$, $i = \overline{1, n}$ sunt două baze în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ şi v se descompune după cele două baze, astfel: $v = \sum_{i=1} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^n y_j u_j$, care din relaţiile următoare este adevărată:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}?$$

5. Ce este subspaţiul nul al unei matricii $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$? În ce spaţiu vectorial este Null(A), subspaţiu?

Ce dimensiune are subspaţiul nul, Null(A)? Argumentaţi!

6. Dacă A este o matrice de 4 linii şi 3 coloane, ce dimensiune poate avea subspaţiul coloanelor? Câţi vectori există în subspaţiul coloanelor?

7. Când doi vectori $v, w \in \mathbb{R}^n$ sunt coliniari şi de acelaşi sens?

8. De ce este corect definită norma unui vector v dintr-un spaţiu cu produs scalar $(V, <, >)$?

9. Ce este versorul direcţiei şi sensului unui vector $v \in \mathbb{R}^n$? Deduceţi relaţia dintre versor şi vectorul v. Câţi versori se asociază unei direcţii definită de vectorul $v \neq \theta$? Desenaţi şi daţi modalitatea de calcul a versorilor pe care îi precizaţi.

10. Arătaţi că coordonatele unui versor relativ la o bază ortonormată sunt cosinuşii directori ai direcţiei versorului.

11. De ce are sens să numim prin definiţie:

$$\frac{< v, w >}{||v||||w||}$$

ca fiind cosinusul unghiului dintre vectorii nenuli v, w?

12. Care din afirmaţiile următoare este adevarată şi care falsă:
i) O matrice de determinat -1 este o matrice ortogonală;
ii) O matrice ortogonală poate avea determinatul -1;
iii) Dacă A este ortogonală, atunci $\det(A^T) = \pm 1$.
Argumentaţi răspunsul!

13. Prin ce se deosebeşte o bază ortogonală de una ortonormată? Desenaţi!
Dacă $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ este o bază ortogonală cum îi asociaţi o bază $\mathcal{B}'$, ortonormată?

14. Deduceţi exprimarea coordonatelor unui vector $v \in (V, <, >)$, relativ la o bază ortonormată. Folosind argumente similare, să se deducă coordonatele lui v într-o bază ortogonală, $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

15. Definiţi complementul ortogonal al unui vector $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \theta$, deduceţi ecuaţia subspaţiului $v^\perp$ şi argumentaţi de ce dimensiunea lui este $n - 1$.

16. Care din următoarele direcţii sunt date prin cosinuşii lor directori:
a) $v_1 = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha))^T$, $v_2 = (\cos(\alpha), \cos(\beta))^T$, $\beta = \pi - \alpha$, $v_3 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$? Argumentaţi raspunsurile.

17. Cum se defineşte proiecţia ortogonală a unui vector $v \neq \theta$ pe direcţia altui vector $w \in \mathbb{R}^n$? Ce sens poate avea vectorul $s = \mathrm{pr}_w(v)$ comparativ cu sensul lui w? Desenaţi!

18. Să se argumenteze de ce exprimarea unui vector v într-o bază ortonormată coincide cu suma proiecţiilor ortogonale ale vectorului v pe vectorii bazei.

19. Ce este cea mai bună aproximaţie a unui vector $v \in \mathbb{R}^n$ printr-un vector dintr-un subspaţiu $S \subset \mathbb{R}^n$.

20. descrieţi etapele de calcul necesar pentru a determina proiecţia ortogonală a unui vector $v \in \mathbb{R}^n$ pe un subspaţiu S de dimensiune $m < n$.

21. Demonstraţi că un sistem liniar $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, este compatibil dacă şi numai dacă vectorul b aparţine subspaţiului coloanelor lui A.

22. Ce este reziduul unui vector $x \in \mathbb{R}^n$ asociat unui sistem liniar $Ax = b$, incompatibil, cu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi $m > n$?

23. Definiţi soluţia celor mai mici pătrate pentru un sistem incompatibil $Ax = b$. E adevărat sau fals că soluţia celor mai mici pătrate este proiecţia ortogonală a vectorului b pe subspaţiul $\mathrm{col}(A)$?

24. Ce este sistemul normal asociat unui sistem incompatibil şi supradeterminat, $Ax = b$? Dacă sistemul normal are soluţie unică ce reprezintă ea?

Răspunsurile la întrebările de mai jos trebuie argumentate!!

25. Cine este subspaţiul nul al unei matrici ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

26. Dacă $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt matrici ortogonale, este şi $A^T B$ matrice ortogonală?

27. E adevărat că orice matrice $A = [v_1|v_2|\dots|v_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ce are coloanele vectori ortonormaţi este matrice ortogonală?

28. Un sistem de 3 vectori ortogonali din $\mathbb{R}^3$, formează o bază în acest spaţiu?

29. Dacă sistemul de vectori $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ din $\mathbb{R}^n$ este un sistem ortogonal, este şi sistemul $\mathcal{S}' = \{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_k, v_k\}$ ortogonal? $(\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n})$.

30. Dacă $A \in \mathbb{R}^{4\times 6}$, cum sunt coloanele lui A, independente sau dependente? De ce e aşa cum răspundeţi?

31. Fie $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ matricea de trecere dintre două baze $\mathcal{B} = (e_i)$, $\mathcal{B}' = (u_i)$, $i = \overline{1,n}$ din $\mathbb{R}^n$. Sunt coloanele lui $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ independente? De ce da sau de ce nu?

32. Dacă $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$, pentru ce valori ale scalarilor α_i, $i = \overline{1,n}$ este şi $\mathcal{B}' = (\alpha_1 u_1, \alpha_2, u_2, \dots, \alpha_n u_n)$ o bază ortonormată? Pe baza răpunsului dat asociaţi bazei canonice din $\mathbb{R}^4$ o nouă bază ortonormată.

33. Fie $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$ şi $A = [u_1|u_2|\dots|u_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ce valoare are determinantul matricii A?

34. Ce dimensiune are complementul ortogonal al vectorului $v = (1, 2, 3, 4, \dots, 100)^T$

35. Dacă un sistem de 10 ecuaţii cu 10 necunoscute are o infinitate de soluţii, şi $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ este matricea sistemului, atunci poate fi dimensiunea subspaţiului coloanelor lui A, $\mathrm{col}(A)$, egală cu 10?

36. Fie A matricea unui sistem liniar şi omogen de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute. Dacă dimensiunea subspaţiului nul al lui A, Null(A), este 0, câte soluţii are sistemul $Ax = 0$?

Probleme

37. Să se verifice dacă următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$, sunt subspaţii vectoriale:
a) $S = \{(x, y, z)^T \mid x, y, z \geq 0]\}$.
b)

$$S = \{v = \begin{bmatrix} a+3b \\ a-b \\ 2a+b \\ 4a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

38. Să se determine baza specială în subspaţiul null al matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

39. Fie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ o bază ortogonală din $(\mathbb{R}^n, <, >)$, dar nenormată. Să se arate că dacă exprimarea unui vector $v \in \mathbb{R}^n$ în baza $\mathcal{B}$ este:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

atunci $x_i = \dfrac{< v, v_i >}{< v_i, v_i >}$, $\forall\ i = \overline{1, n}$.

40. Să se determine o bază în subspaţiul Null al matricii:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

şi o bază în subspaţiul coloanelor col(A). Să se verifice relaţia dintre dimensiunile celor două subspaţii.

41. Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice pătratică şi v, w doi vectori din $\mathbb{R}^n$. Evident, atunci Av şi Aw sunt vecori din $\mathbb{R}^n$. Folosind definiţia produsului scalar sub forma $< v.w >= v^T w$ să se arate că:

$$< Av, w >=< v, A^T w >$$

Dacă matricea A este simetrică ce devine relaţia de mai sus?

42. Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $u = (2, 1, 3)^T$, pe vectorul $v = (8, 2, -4)^T$.

43. Să se aplice procedura Gramm–Schmidt sistemului de vectori $v_1 = (-1, 2)^T$, $v_2 = (3, 4)^T$.

44. Procedând analog ca în cazul unei baze, să se ortonormeze sistemul de vectori $v_1 = (1, 1, 2, 0)^T$, $v_2 = (-2, 1, 0, 3)^T \in \mathbb{R}^4$

45. În ce relaţie este proiecţia ortogonală a unui vector $v \in \mathbb{R}^n$ pe un vector nenul $w \in \mathbb{R}^n$, cu proiecţia lui v pe versorul lui w? După ce răspundeţi verificaţi-vă cu exemplul concret $v = (2, -1, 0)^T$, $w = (-1, 1, 3)^T \in \mathbb{R}^3$.

46. Să se determine cea mai bună aproximaţie a vectorului $v = (2, -5, 3)^T \in \mathbb{R}^3$ printr-un vector s din subspaţiul vectorial $S = \text{span}(v_1, v_2)$ şi eroarea aproximării, ştiind că $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (2, 0, 1)^T$.

47. Care din răspunsurile de mai jos este bun:
Subspaţiul nul al matricii

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

este a) vectorul nul din $\mathbb{R}^3$; b) vectorul nul din $\mathbb{R}^2$; c) Subspaţiul lui $\mathbb{R}^2$ de ecuaţie $x + y = 0$; d) Subspaţiul lui $\mathbb{R}^3$ de ecuaţie $-x + 4y + 7z = 0$.

48. Fie $u = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)^T$ un vector unitar din $\mathbb{R}^3$, Fără a efectua nici un calcul, precizaţi cât este cosinusul unghiului dintre $2u$ şi $e_2 = (0, 1, 0)^T$.

49. Se poate exprima vectorul $v = (1, 3, 4)^T$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $v_1 = (1, 1, 2)^T$, $v_2 = (0, 1, 1)^T$?

50. Fie S mulţimea vectorilor din $\mathbb{R}^5$ care sunt ortogonali pe vectorii $u_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ şi $u_2 = (1, 2, 3, 4, 5)^T$. Să se determine dimensiunea subspaţiului $S \subset \mathbb{R}^5$.
Indicaţie: Mulţimea vectorilor simulatn ortogonali pe u_1 şi u_2 este mulţimea
$\{v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \mid < v, u_1 >= 0, < v, u_2 >= 0\}$

51. Vectorul $v \in \mathbb{R}^2$ are versorul $v^0 = (-1/2, \sqrt{3}/2)^T$. Precizaţi făra a face nici un calcul, doar dând explicaţii, cât este $\sin(\widehat{v, e_2})$.

52. a) Care din matricile următoare este matrice ortogonală:

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Să se calculeze $A'A^{-1}$;
c) Presupunând că $A' = [w_1|w_2|w_3]$, este sistemul (w_1, w_2, w_3) bază ortonormată? Dacă nu, transformaţi-o într- bază ortonormată.

53. Exploatând faptul că produsul dintre o matrice $A = [\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\dots|\mathbf{c}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi un vector x este egal cu combinaţia liniară a coloanelor având drept coeficienţi coordonatele vectorului x:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n$$

să se arate că dacă $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice ortogonală, atunci:

a) $||Qv|| = ||v||, \forall\, v \in \mathbb{R}^n$;

b) $< Qv, Qw > = < v, w >, \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$;

Ce concluzie trageţi despre măsura unghiului dintre Qv şi Qw, comparat cu măsura unghiului dintre v şi w?

54. a) Să se arate că baza:

$$\mathcal{B}' = (u_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}})^T, u_2 = (\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})^T, u_3 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T)$$

este ortonormată.

b) Să se determine coordonatele vectorului $w = (-1, 5, 0)^T$ relativ la $\mathcal{B}'$ prin două metode: metoda de aflare directă a coordonatelor şi folosind matricea de trecere adecvată.

c) Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $v = (-5, 0, 1)^T$ pe subspaţiul generat de u_2, u_3.

55. a) Să se aplice procedura Gramm-Schmidt coloanelor v_1, v_2, v_3 ale matricii

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calculaţi determinantul matricii $Q = [q_1|q_2|q_3]$, unde (q_1, q_2, q_3) este baza ortonormată construită la punctul a)

56. Să se construiască o bază ortonormată în subspaţiul vectorial $S = \{v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, -3x + 2y - z = 0\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ şi apoi să se determine coordonatele vectorului $v = (1, 1, -1)^T$ relativ la baza construită (asiguraţi-vă în prealabil că v aparţine lui S!).

57. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 3 & -7 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad v = \begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului v pe subspaţiul Null(A).

58. Considerăm subspaţiul vectorial S al lui $\mathbb{R}^5$, $S = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$, unde:

$$v_1 = (1, 5, -1, 3, 2)^T, v_2 = (3, 3, 1, 1, -10)^T, v_2 = (7, 5, 13, -9, 4)^T$$

a) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt ortogonali. Ştiind acest lucru, ce dimensiune are S? Argumentaţi.

b) Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $v = (1, -2, 2, -3, 4)^T$ pe S.

59. Să se determine numerele reale a, b, c, d astfel încât matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & a \\ 1/2 & -1/2 & 0 & b \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & c \\ 1/2 & -1/2 & 0 & d \end{bmatrix}$$

să fie o matrice ortogonală.

60.

Fie $S = \text{span}(v_1, v_2)$, cu $v_1 = (2, 1, -1)^T, v_2 = (1, -1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$. Să se determine cea mai bună aproximaţie din S a vectorului $v = (1, 1, 0)^T$ şi distanţa de la v la S.

61. Fie matricea

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & ? & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & ? & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & ? & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Să se arate că $v_1 \perp v_3$ şi să se determine coordonatele vectorului v_2 astfel încât $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ să fie o bază ortonormată. şi apoi să se calculeze A^{-1} cât mai simplu.

62. Să se determine vectorul v din $\text{span}(v_1, v_2)$, care este cel mai apropiat de vectorul $w = (3, 4, 5, 1)^T \in \mathbb{R}^4$, ştiind că $v_1 = (1, 1, 1, 1)^T, v_2 = (-1, -1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^4$.

63. Să se determine cea mai bună aproximaţie a vectorului $v = (1, 3, 2)^T$ în subspaţiul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

64. Să se arate că rangul matricii $A^T A$ coincide cu rangul matricii $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (această proprietate am folosit-o la sistemul normal, din cursul 7).

Indicaţie. Se arată că Null($A^T A$)=Null(A) prin dublă incluziune. Dacă $v \in$ Null($A^T A$) atunci $A^T Av = \theta$. Înmulţim relaţia la stânga cu $v^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ şi avem $(v^T A^T)(Av) = \theta$ sau echivalent $(Av)^T(Av) = \theta$. Ţinând seama că produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ se exprimă şi prin $< v, w >= v^T w$, avem că $< Av, Av >= \theta$, adică $v = \theta$, etc.

65. Să se arate că sistemul:

$$\begin{aligned} -x - 7y &= 13 \\ 3x + 11y &= -19 \\ 4x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

este incompatibil şi să se determine soluţia celor mai mici pătrate.

66. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 20 \end{aligned}$$

Să se determine soluţia celor mai mici pătrate şi norma reziduului asociat acestei soluţii.

67. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x - y &= 2 \\ 2x + y - z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Matricea prelungită a sistemului are forma scară redusă: $S^0_{\overline{A}} = I_4$

a) Este sistemul incompatibil? b) Să se determine ecuaţiile subspaţiului coloanelor matricii A, adica subspatiul $S = span(c_1, c_2, c_3)$. Să se arate că coloana termenilor liberi, $b = (1, 2, 2, 1)^T$, nu aparţine subspaţiului coloanelor, verificănd că coordonatele lui b nu verifică ecuaţiile subspaţiului.

c) Să se determine soluţia celor mai mici pătrate, x^*, a acestui sistem şi eroarea ce se produce, adică $||r(x^*)|| = ||b - Ax^*||$

În experimentele de laborator sau într-o observaţie statistică se inregistreaza valorile a două variabile X si Y, monitorizate: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Pentru a putea face predictii relativ la valorile variabilei Y pe baza valorilor lui X, se determina din datele de observaţie, o relaţie funcţionala, $Y = f(X)$, intre cele doua variabile, care aproximează într-un anume sens datele observate (x_i, y_i), prin $(x_i, \hat{y}_i = f(x_i))$. Pentru o valoare $X = a$, valoarea predictionata pentru Y este atunci $\hat{y} = f(a)$.

Determinarea unei relatii funcţionale din date se numeste în statistica şi machine learning, ajustarea unui model la date *fitting a model to data*.

Cel mai simplu model pentru un set de date (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, $n > 2$, este modelul liniar, $y = ax + b$.

Daca punctele (x_i, y_i) nu sunt coliniare, atunci nu exista o dreapta care să le conţina şi prin urmare sistemul rezultat impunând ca aceste puncte sa verifice ecuatia $y = ax + b$:

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n \end{aligned}$$

este un sistem incompatibil supradeterminat, în necunoscutele a, b, care sunt parametrii dreptei.

Solutia celor mai mici patrate a acestui sistem este (a^*, b^*) si ea defineste o dreapta de ecuatie $y = a^*x + b^*$, numita dreapta celor mai mici patrate, deoarece (vezi Cursul 7) aproximand valorile y_i prin $\hat{y}_i = a^*x_i + b^*$, suma erorilor la patrat este minima:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a^*x_i + b^*))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},$$

adica dintre toate dreptele din plan, de ecuatie $y = ax + b$, dreapta $y = a^*x + b^*$ aproximeaza cel mai bine datele.

In Machine learning în locul erorii globale la pătrat, $Er = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$ se analizeaza media aritmetică a erorilor la pătrat, calculate in fiecare punct (x_i, y_i):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Daca aceasta medie este "rezonabila", atunci modelul functional dedus este considerat adecvat pentru date şi se poate folosi pentru predicţii.

68. Să se determine dreapta celor mai mici pătrate pentru datele următoare:

$$(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$$

După ce dreapta $y = \alpha x + \beta$ a fost determinată să se calculeze eroarea ce se produce, aproximând fiecare punct (x_i, y_i) prin punctul de pe dreaptă de coordonate $(x_i, \alpha x_i + \beta)$ (eroarea $e(x_i) = |y_i - \alpha x_i + \beta|$, adică distanţa pe verticală dintre cele două puncte şi eroarea globală, $Err = \sum_{k=1}^{4}(y_i - (ax_i + b))^2$.

69. Într-o problemă de predicţii pe baza datelor înregistrate pe site-ul Bancii Nationale:

$$(1, 1), (2, 10), (3, 9), (4, 16)$$

se presupune că datele urmează un model pătratic, adică există o funcţie $y = ax^2 + bx + c$ care aproximează foarte bine aceste date în sensul celor mai mici pătrate. Să se afle ecuaţia modelului pătratic şi să se predicţioneze care este valoarea aşteptată pentru $x = 7$.

Indicaţie: Exact ca în cazul dreptei celor mai mici pătrate, se înlocuiesc coordonatele celor 4 puncte în ecuaţia modelului şi se obţine un sistem de 4 ecuaţii cu 3 necunoscute, a,b, c, care este incompatibil. Apoi scrieţi sistemul normal şi vedeţi dacă este compatibil determinat. Dacă da soluţia lui va da coeficienţii modelului.

70. Un tânar absolvent de CTI a pornit o afacere acum 7 ani. In fiecare din primii 6 ani şi-a facut publicitate online în valoare de x_i mii euro, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Profitul anual înregistrat, în mii euro a fost y_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Pentru a putea face predicţii asupra nivelului profitului, pe baza sumelor cheltuite pentru publicitate işi propune să verifice dacă datele înregistrate în cei 6 ani reflectă o dependenţa aproximativ liniară, de forma $y = ax + b$, între profitul y şi cheltuiala pentru publicitate, x. În acest scop determină dreapta celor mai mici pătrate asociată datelor înregistrate (x_i, y_i), $i = \overline{1, 6}$ şi decide să stabilească cheltuielile de publicitate din următorul an conform acestui model, dacă media aritmetică a erorilor la pătrat este mai mică decât un prag.

Datele pentru cei 6 ani sunt următoarele:

x_i	y_i
12	60
14	70
17	90
21	100
26	98
30	120

a) Să se determine parametrii dreptei celor mai mici pătrate şi eroarea aproximării datelor prin punctele aferente de pe dreaptă.

b) Dacă pentru anul al 7-lea doreşte să atingă un nivel al profitului de 150 mii euro, ce cheltuieli de publicitate ar trebui să facă conform acestui model?