Coordonate sferice în spaţiu,
proiecţia perspectivă în grafica 3D şi
Discretizarea suprafeţelor date parametric

Supliment la cursul 14

14.1 Coordonate sferice în spaţiul $\mathbb{E}^3$

Poziţia fiecărui punct M din spaţiul $\mathbb{E}^3$ raportat la sistemul de axe ortogonale $xOyz$ se dă prin coordonatele sale carteziene (x, y, z). Dacă A este punct de coordonate (x_0, y_0, z_0) atunci locul geometric al punctelor din spaţiu care au:

• aceeaşi abscisă ca şi A este planul de ecuaţie $x = x_0$;
• aceeaşi ordonată ca şi A este planul de ecuaţie $y = y_0$;
• aceeaşi cotă ca şi A este planul $z = z_0$.

Planele de ecuţii $x =$ cst, $y =$ cst, $z =$ cst se numesc plane de coordonate.

Poziţia unui punct $M \in \mathbb{E}^3$ se poate indica şi prin coordonatele (ρ, φ, θ), numite coordonate sferice şi care au următoarea semnificaţie geometrică (Fig. 14.1).

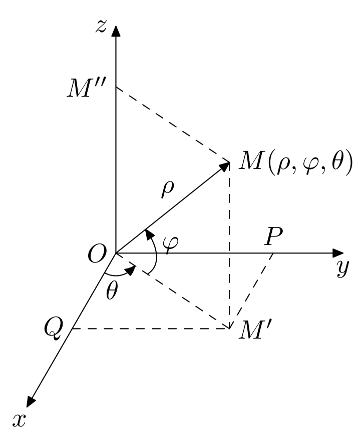


Fig.14.1: Coordonatele sferice ale unui punct $M \in \mathbb{E}^3$.

• ρ este distanţa de la punctul M la originea sistemului de axe xOyz, $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$;

• φ este măsura unghiului dintre $\overrightarrow{OM}$ şi planul xOy, adică măsura unghiului dintre $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM}$. Pentru punctele $M(x, y, z)$ cu $z > 0$, φ este pozitiv, iar când $z < 0$, $\varphi < 0$.

• θ este unghiul polar[1] al proiecţiei M' a punctului M pe planul xOy, adică θ este măsura unghiului orientat dintre e_1 versorul axei Ox şi $\overrightarrow{OM'}$ (Fig. 14.1).

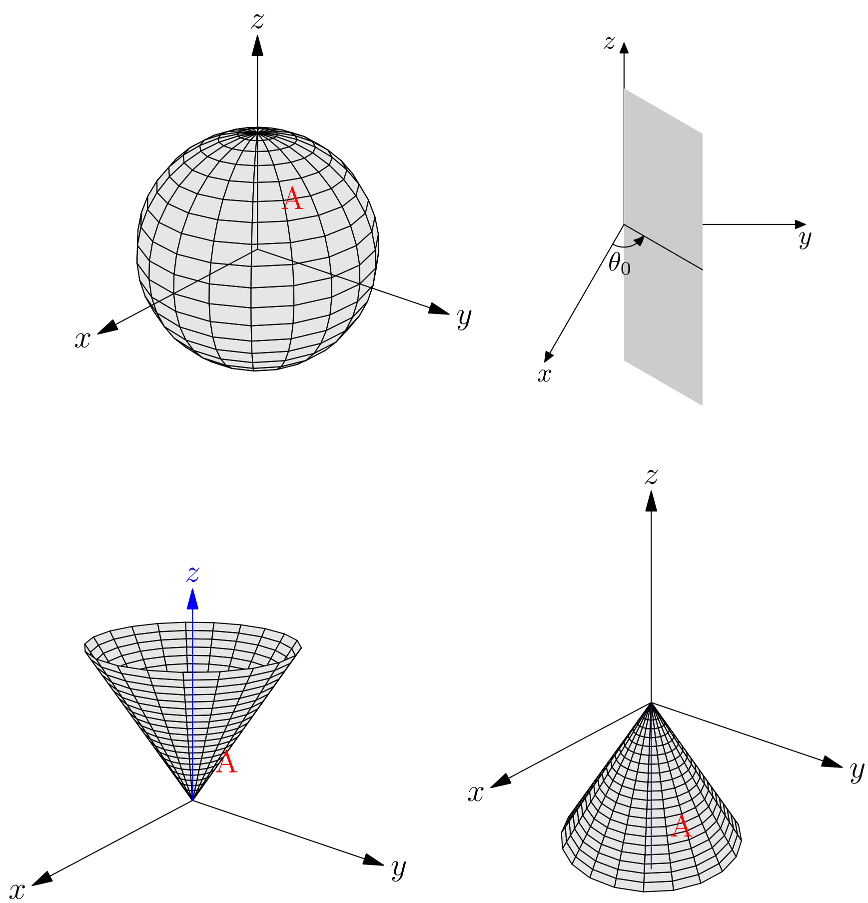


Fig.14.2: Sus: sfera de ecuaţie $\rho = \rho_0$ (stânga), semiplanul de ecuaţie $\theta = \theta_0$ (dreapta). Jos: conul de ecuaţie $\varphi = \varphi_0 > 0$ (stânga), şi de ecuaţie $\varphi = \varphi_0 < 0$ (dreapta).

Relaţia dintre coordonatele sferice şi coordonatele carteziene ale unui punct

Din triunghiurile OMM'', OMM' şi OQM' (Fig. 14.1) rezultă următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \tag{14.1}$$

Un punct din spaţiu are coordonatele sferice (ρ, φ, θ) restricţionate respectiv la următoarele intervale: $\rho \in (0, \infty)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Aplicaţia $r : (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \times$

[1]notaţia θ pentru această coordonată este justificată de faptul că este o coordonată polară în planul xOy, şi notaţia consacrată pentru unghiul polar este θ

$[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$r(\rho, \varphi, \theta) = (\underbrace{\rho \cos\theta \cos\varphi}_{x}, \underbrace{\rho \sin\theta \cos\varphi}_{y}, \underbrace{\rho \sin\varphi}_{z}) \tag{14.2}$$

se numeşte schimbare de coordonate.

Fie $A(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$ un punct fixat în $\mathbb{E}^3$. Locul geometric al punctelor din spaţiu ce au:

• aceeaşi coordonată ρ ca şi A, adică $\rho = \rho_0 > 0$ este sfera cu centrul în O şi de rază ρ_0 (Fig.14.2 sus-stânga).

• aceeaşi coordonată φ ca şi A, $\varphi = \varphi_0$, este conul infinit, drept, cu vârful în O şi unghiul dintre generatoare şi Oz egal cu φ_0 (Fig.14.2 jos-stânga pentru cazul $\varphi_0 > 0$). Dacă $\varphi_0 = 0$ atunci conul degenerează în planul xOy, iar dacă $\varphi_0 < 0$ atunci conul este poziţionat ca în Fig.14.2, jos-dreapta.

• aceeaşi coordonată θ ca şi A, $\theta = \theta_0$, este semiplanul mărginit de $z'Oz$ şi (unde Oz' are direcţia $-e_3$), perpendicular pe xOy. Intersecţia semiplanului cu planul xOy este o semidreaptă ce formează cu Ox unghiul θ (Fig.14.2 sus-dreapta).

Secţiunile următoare sunt opţionale. Ele ilustrează aplicaţiile în grafica 3D a unor noţiuni studiate.

14.2 Definiţia proiecţiei perspectivă

Pentru a vizualiza corpurile 3D pe ecranul unui PC sau al device-ului de ieşire al unui sistem grafic se folosesc diverse metode. Una dintre metodele care conduce la imagini realiste este proiecţia perspectivă sau proiecţia centrală.

Considerăm spaţiul afin euclidian $\mathbb{E}^3$ raportat la sistemul de axe ortogonale $xOyz$ şi planul π paralel cu planul xOy, având ecuaţia $z = d$, $d \neq 0$.

Definiţia 14.2.1 *Proiecţia perspectivă de centru O pe planul π este aplicaţia*

$$\mathcal{P}_O : \mathbb{E}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\} \to \pi$$

care asociază fiecărui punct $M(x, y, z)$ ce nu aparţine planului xOy, punctul M' de intersecţie a dreptei (OM) cu planul π.

• S-a exclus planul xOy din domeniul de definiţie deoarece dacă M este un punct din acest plan, atunci dreapta (OM) este paralelă cu planul π şi deci nu îl poate intersecta.

• Preimaginea punctului $M' \in \pi$, $\mathcal{P}_O^{-1}(M')$, adică mulţimea punctelor din spaţiu ce sunt proiectate în M' constă în dreapta (OM) minus punctul O. Deci proiecţia perspectivă nu este injectivă.

• **Expresia analitică aproiecţiei $\mathcal{P}_\mathbf{O}$**

Să determinăm coordonatele proiecţiei punctului $M(x, y, z)$, $z \neq 0$. Dreapta (OM) este mulţimea:

$$(OM) = \{P \in \mathbb{E}^3 \mid \overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} = t(x, y, z)^T, t \in \mathbb{R}\}$$

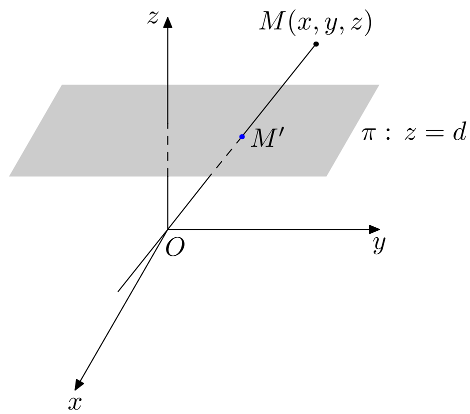


Fig.14.3: Ilustrarea proiecţiei perspectivă de centru O pe planul $\pi : \, z = d$.

Prin urmare un punct arbitrar de pe dreapta (OM) are coordonatele (tx, ty, tz). Punctul P aparţine planului π dacă coordonata a treia, $tz = d$, de unde rezultă că punctul proiecţie $M' = \mathcal{P}_O(M)$ corespunde parametrului $t = d/z$ şi deci:

$$\mathcal{P}_O(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}d, \frac{y}{z}d, d\right)$$

Identificând planul π cu $\mathbb{E}^2$ raportat la reperul ortonormat $(O'; e_1, e_2)$, unde $\{O'\} = Oz \cap \pi$ şi e_1, e_2 sunt versorii axelor Ox, respectiv Oy, proiecţia perspectivă are expresia analitică:

$$\mathcal{P}(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}d, \frac{y}{z}d\right)$$

În continuare vom construi un reper ortonormat cu originea într-un punct pe sferă, numit reperul observatorului (al persoanaei cu camera de luat vederi!).

Propoziţia 14.2.1 *Fie sfera centrată în originea sistemului de axe ortogonale, având în coordonate sferice ecuaţia $\rho = \rho_0$. Oricărui punct $E(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$, $\varphi \neq \pm\pi/2$, de pe această sferă i se asociază reperul ortonormat drept $\mathcal{R}_E = (E; v_1, v_2, v_3)$ unde v_1 este versorul tangentei la cercul paralel prin E, v_2 este versorul tangentei la (semi)cercul meridian prin E, iar v_3 este versorul direcţiei $\overrightarrow{OM}$.*

Demonstraţie: Cercul paralel prin punctul E este cercul de intersecţie al sferei $\rho = \rho_0$ cu conul $\varphi = \varphi_0$. Prin urmare el este parametrizat de $r_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $r_1(\theta) = r(\rho_0, \varphi_0, \theta)$ unde r este schimbarea de coordonate (14.2). Astfel vectorul tangent în punctul E la cercul paralel este:

$$\dot{r}_1(\theta_0) = \dot{r}_\theta(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$$

Dar

$$\begin{aligned} \dot{r}_\theta(\rho_0, \varphi_0, \theta) &= (-\rho_0 \sin\theta \cos\varphi_0, \rho_0 \cos\theta \cos\varphi_), 0)^T \\ \dot{r}_1(\theta_0) &= (-\rho_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \rho_0 \cos\theta_0 \cos\varphi_0, 0)^T \\ v_1 &= \frac{\dot{r}_1(\theta_0)}{\|\dot{r}_1(\theta_0)\|} = (-\sin\theta_0, \cos\theta_0, 0)^T \end{aligned}$$

Semicercul meridian prin punctul E este semicercul de intersecţie al sferei $\rho = \rho_0$ cu semiplanul $\theta = \theta_0$ şi este parametrizat de $r_2 : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$, $r_2(\varphi) = r(\rho_0, \varphi, \theta_0)$. Vectorul tangent la semicercul meridian prin E este vectorul:

$$\dot{r}_2(\varphi_0) = \dot{r}_\varphi(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$$

Calculăm derivata lui r în raport cu φ şi o evaluăm în $(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_\varphi(\rho_0, \varphi, \theta_0) &= (-\rho_0 \cos\theta_0 \sin\varphi, -\rho_0 \sin\theta_0 \sin\varphi, \rho_0 \cos\varphi)^T \\
\dot{r}_2(\varphi_0) &= (-\rho_0 \cos\theta_0 \sin\varphi_0, -\rho_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \rho_0 \cos\varphi_0)^T \\
v_2 &= \frac{\dot{r}_2(\varphi_0)}{\|\dot{r}_2(\varphi_0)\|} = (-\cos\theta_0 \sin\varphi_0, -\sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\varphi_0)^T
\end{aligned}$$

Evident că $v_1 \perp v_2$. Mai rămâne să determinăm v_3. Segmentul $(O, E]$ intersecţia conului $\varphi = \varphi_0$ cu semiplanul $\theta = \theta_0$ şi este parametrizat de $r_3 : (0, \rho_0] \to \mathbb{R}^3$, $r_3(\rho) = r(\rho, \varphi_0, \theta = \theta_0)$.

$$\begin{aligned}
\dot{r}_\rho(\rho, \varphi_0, \theta_0) &= (\cos\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\varphi_0)^T \\
v_3 &= \dot{r}_3(\rho_0) = \dot{r}_\rho(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = (\cos\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\varphi_0)^T
\end{aligned}$$

Se verifică prin calcul direct că $v_3 \perp v_1$ şi $v_3 \perp v_2$. Determinantul matricii de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c$ la baza ortonormată $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ este:

$$\det(T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}'}) = \det([v_1|v_2|v_3]) = \begin{vmatrix} -\sin\theta_0 & -\cos\theta_0 \sin\varphi_0 & \cos\theta_0 \cos\varphi_0 \\ \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \sin\varphi_0 & \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{vmatrix} = 1,$$

deci baza $\mathcal{B}'$ este o bază dreaptă. □

14.3 Reperul observatorului în grafica 3D şi gaming. Transformări de vizualizare

Un obiect 3D discretizat este reprezentat de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, N}$, şi de segmente (muchii) între diferite puncte, raportate la sistemul de coordonate al lumii reale $xOyz$. Centrul geometric al norului de puncte este punctul $C(X, Y, Z)$, unde:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\min_{i=\overline{1,N}}(x_i) + \max_{i=\overline{1,N}}(x_i)}{2} \\
Y &= \frac{\min_{i=\overline{1,N}}(y_i) + \max_{i=\overline{1,N}}(y_i)}{2} \\
Z &= \frac{\min_{i=\overline{1,N}}(z_i) + \max_{i=\overline{1,N}}(z_i)}{2}
\end{aligned}$$

Avem două cazuri:

1. Centrul geometric al norului coincide sau este foarte apropiat de origine;

2. Centrul geometric C este suficient de departe de origine. În acest caz se efectuează o translaţie a sistemului xOyz, cu originea în C.

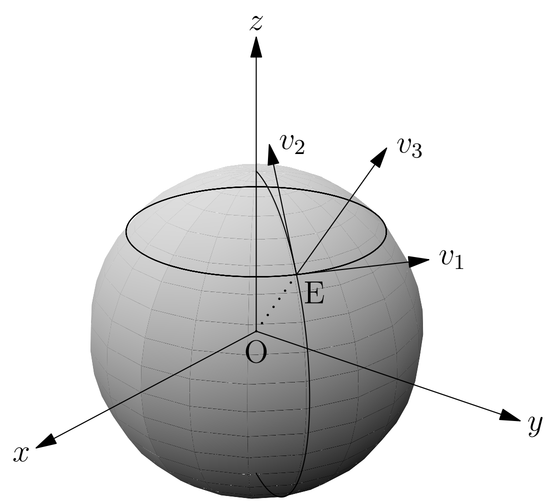


Fig.14.4: Reperul drept asociat unui punct pe o sferă cu centrul în originea axelor de coordonate.

Pentru unitatea prezentării presupunem cazul 1, cazul al doilea tratându-se similar dacă se notează C tot cu O.

Pentru a vizualiza obiectul 3D prin proiecţie perspectivă pe un plan ce conţine ecranul se parcurg următoarele etape:

• Se alege poziţia observatorului (a camerei de luat vederi) pe o sferă cu centrul în origine (centrul geometric al corpului) şi de rază mai mare decât:

$$R = \max\{\text{dist}(M_i, O), i = \overline{1, N}\}$$

Poziţia observatorului se dă în coordonate sferice[2] $E(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$, cu $\rho_0 >> R$. θ_0 indică cât se roteşte observatorul în jurul obiectului, iar φ_0 cât se înalţa sau coboară observatorul pe meridianul de ecuaţii $\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$. I se asociază observatorului un reper ortonormat stâng $\mathcal{R}_E = (E; (u_1, u_2, u_3)$ (Fig. 14.5) unde baza $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, -v_3)$, v_1, v_2, v_3 fiind vectorii bazei ortonormate drepte (Fig.14.4) ce se asociază punctului E de pe sfera $\rho = \rho_0$.

Notăm cu $Ex'y'z'$ sistemul de axe asociat acestui reper (Fig. 14.6). u_3 (deci axa Ez') are direcţia şi sensul vectorului de observare $\overrightarrow{EO}$, adică observatorul priveşte spre originea sistemului lumii reale (centrul geometric al corpului 3D). Din ochiul E al observatorului emană câte o rază prin fiecare punct al obiectului.

• Perpendicular pe direcţia de observare $\overrightarrow{EO}$, la distanţa d de observator, se plasează planul ecranului $\pi : z' = d$.

• pentru a aplica proiecţia perspectivă de centru E punctelor corpului 3D, trebuie să aflăm coordonatele punctelor M_i în reperul observatorului.

[2]Pentru un utilizator este mai simplu să dea coordonatele φ_0 şi θ_0 în grade. Apoi se transformă gradele în radiani: $\text{radiani} = \dfrac{\text{grade} * \pi}{180}$.

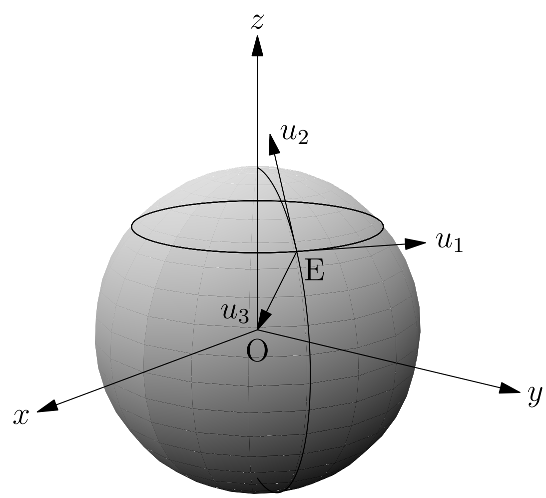


Fig.14.5: Reperul stâng al observatorului.

Transformările de coordonate din reperul lumii reale în reperul observatorului se numesc **transformări de vizualizare**.

Dacă punctul M aparţinând corpului 3D ce trebuie vizualizat are coorrdonatele (x, y, z) relativ la sistemul lumii reale, atunci coordonatele sale (x', y', z') relativ la sistemul observatorului se află din relaţia lui Chasles:

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OM}$$

Vectorul $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ (e_1, e_2, e_3 fiind versorii axelor Ox, Oy, Oz), iar $\overrightarrow{OE} = x_E e_1 + y_E e_2 + z_E e_3$, unde coordonatele carteziene (x_E, y_E, z_E) ale lui E se deduc din cele sferice conform relaţiei (14.1). Astfel vectorul $\overrightarrow{EM}$ are relativ la baza (e_1, e_2, e_3) exprimarea:

$$\overrightarrow{EM} = (x - x_E)e_1 + (y - y_E)e_2 + (z - z_E)e_3$$

Remarcăm că practic $(x - x_E, y - y_E, z - z_E)$ sunt coordonatele punctului M relativ la sistemul de coordonate obţinut printr-o translaţie a sistemului $xOyz$ cu originea în E (vezi relaţiile ce definesc translatia in cursul in care s-au definit) .

Pentru a afla coordonatele vectorului $\overrightarrow{EM}$ în baza ortonormată $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ ai cărei vectori dau direcţiile axelor observatorului exploatăm faptul că:

$$\overrightarrow{EM}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}_c}\overrightarrow{EM}_{\mathcal{B}_c} = T^T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}'}\overrightarrow{EM}_{\mathcal{B}_c}$$

Matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}'$ este $T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}'} = [u_1|u_2|u_3]$, deci:

$$\overrightarrow{EM} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ -\cos\theta_0\sin\phi_0 & -\sin\theta_0\sin\phi_0 & \cos\phi_0 \\ -\cos\theta_0\cos\phi_0 & -\sin\theta_0\cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \end{bmatrix}}_{T^T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}'}} \begin{bmatrix} x - x_E \\ y - y_E \\ z - z_E \end{bmatrix}$$

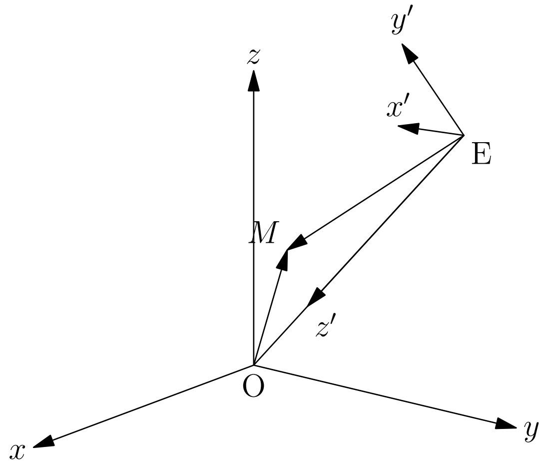


Fig.14.6: Poziţia relativă a sistemului de axe a observatorului şi a sistemului lumii reale.

Având relaţiile de transformare a coordonatelor unui punct din sistemul lumii reale în sistemul observatorului se poate efectua proiecţia perspectivă de centru E pe planul $z' = d$ (Fig.14.7):

$$\mathcal{P}_E(x', y', z') = (\frac{x'}{z'}d, \frac{y'}{z'}d)$$

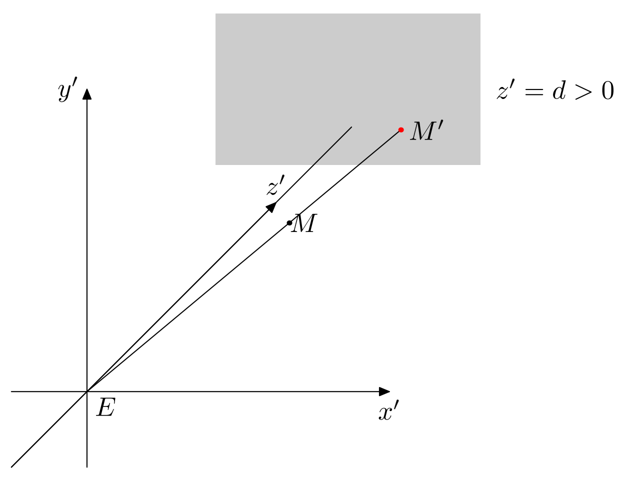
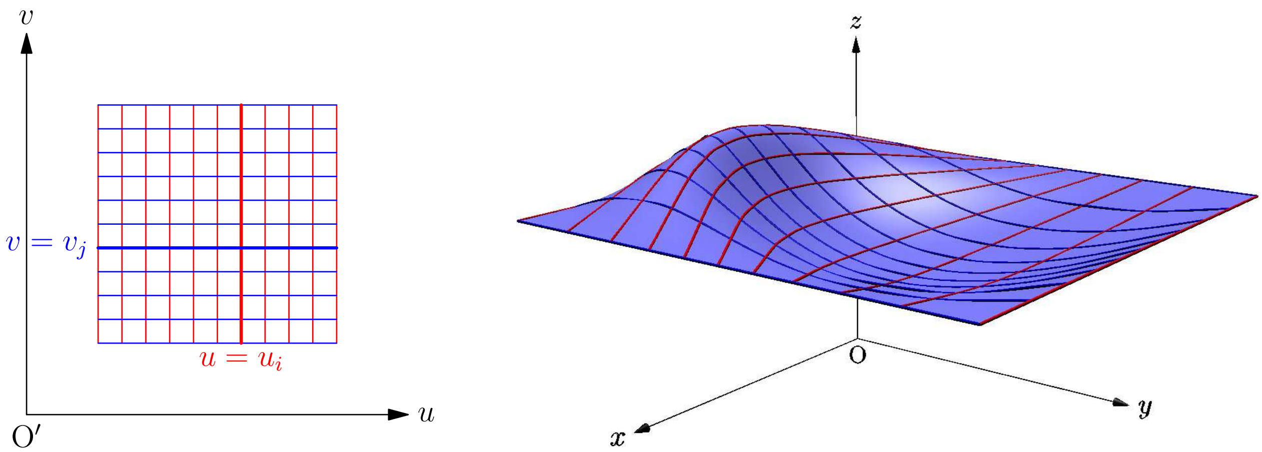


Fig.14.7: Proiecţia perspectivă a punctelor din sistemul de coordonate al observatorului, E.



14.4 Discretizarea suprafeţelor date parametric

Considerăm o suprafaţă parametrizată de $s : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$,
$s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

• Fixăm numerele întregi pozitive `Nu, Nv`. `Nu+1, Nv+1` indică numărul de curbe coordonate $u =$ cst, respectiv $v =$ cst ce dorim să le generăm;

• calculăm pasul de divizare `hu=(b-a)/Nu` a intervalului $[a, b]$ şi pasul de divizare `hv=(d-c)/Nv` pentru intervalul $[c, d]$;

• Pe suprafţa se vor genera două familii de curbe coordonate, transversale: o familie este contituită din imaginile prin aplicaţia parametrizare a segmentelor $\mathtt{u_i} = \mathtt{a} + \mathtt{i} * \mathtt{hu}$, $\mathtt{v} \in [\mathtt{c}, \mathtt{d}]$, $\mathtt{i} = \overline{0, \mathtt{Nu}}$, iar cealaltă familie din imaginile prin aplicaţia parametrizare a segmentelor $\mathtt{v_j} = \mathtt{c} + \mathtt{j} * \mathtt{hv}$, $\mathtt{u} \in [\mathtt{a}, \mathtt{b}]$, $\mathtt{j} = \overline{0, \mathtt{Nv}}$

• fixăm `nru, nrv` numărul de puncte ce va fi evaluat pe curbele $\mathtt{u} = \mathtt{u_i}$, $\mathtt{i} = \overline{0, \mathtt{Nu}}$, respectiv $\mathtt{v} = \mathtt{v_j}$, $\mathtt{j} = \overline{0, \mathtt{Nv}}$;

• Mai precis, pentru fiecare $\mathtt{u} = \mathtt{u_i}$, fixat, intervalul $[\mathtt{c}, \mathtt{d}]$ al parametrului v se divizează cu pasul $\mathtt{vv} = (\mathtt{d} - \mathtt{c})/\mathtt{nrv}$, şi imaginile prin aplicaţia parametrizare, s, a punctelor $(\mathtt{u_i}, \mathtt{v_k})$, $\mathtt{v_k} = \mathtt{c} + \mathtt{k} * \mathtt{vv}$, $\mathtt{k} = \overline{0, \mathtt{nrv}}$ reprezintă discretizarea arcului de curbă de pe suprafaţa, corespunzător lui $u = u_i$ (figura din stânga).

• Analog, pentru fiecare $\mathtt{v} = \mathtt{v_j}$, intervalul $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ al parametrului u se divizează cu pasul $\mathtt{uu} = (\mathtt{b} - \mathtt{a})/\mathtt{nru}$, şi imaginile prin aplicaţia parametrizare, s, a punctelor $(\mathtt{u_m}, \mathtt{v_j})$, $\mathtt{u_m} = \mathtt{a} + \mathtt{m} * \mathtt{uu}$, $\mathtt{m} = \overline{0, \mathtt{nru}}$ reprezintă discretizarea arcului de pe suprafaţă corespunzător lui $v = v_j$.