Antwoorden van de tentamens van 19 augustus 2002 en 30 januari 2003

Deze antwoorden zijn bedoeld om na te kijken of je zelf de juiste antwoorden hebt gevonden. Niet alle details zijn uitgewerkt en rekenfouten zijn niet uitgesloten. Maak de tentamens eerst zelf!

19 augustus 2002

1 (a) Er zijn 4 kinderen uit een "een-kind gezin", 16 kinderen uit een "2-kinderen gezin", 15 kinderen uit een "drie-kinderen gezin", 8 kinderen uit een "4-kinderen gezin", 5 kinderen uit een "5-kinderen gezin". Er zijn in totaal dus 48 kinderen, ieder kind heeft kans $\frac{1}{48}$ om gekozen te worden. De kans dat het gekozen kind uit een gezin komt met 1 kind is dus $\frac{4}{48}$, uit een gezin met 2 kinderen $\frac{16}{48}$, uit een gezin met 3 kinderen $\frac{15}{48}$, uit een gezin met 4 kinderen $\frac{8}{48}$ en de kans dat het gekozen kind uit een gezin van 5 kinderen komt is $\frac{5}{48}$.
(b) Merk op dat $P(X = i)$ gelijk is aan de kans dat het kind uit een gezin met $i + 1$ kinderen komt.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{48} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{48} = \frac{90}{48}.$$

2 We zetten drie stellen op een rij in willekeurige volgorde. Ik duid de mensen aan met A, A, B, B, C, C. (ik doe alsof er geen verschil is tussen de partners, de vraag is dan equivalent met de vraag wat de kans is dat er geen twee dezelfde letters naast elkaar staan als ik de letters A, A, B, B, C, en C in een willekeurige volgorde zet). Er zijn $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ mogelijke ordeningen. Ik ga het aantal manieren tellen waarbij geen twee dezelfde letters naast elkaar staan. Ik bekijk alle opties met een A als eerste en een B als tweede letter, het totale aantal is 6 keer zo groot (ik had ook BA, AC, CA, BC of CB aan het begin kunnen zetten). Ik vind (maak zelf een boomdiagram) ABACBC, ABCABC, ABCACB, ABCBAC, ABCBCA, dus 5 opties met AB vooraan. Het totaal aantal opties is dus 30 en de gevraagde kans $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

3 (a) Voor $i = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} P(Y = i) &= P(X = i | X > 0) = \frac{P(X = i \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X = i)}{P(X > 0)} = \\ &= \frac{P(X = i)}{1 - P(X = 0)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!(1 - e^{-\lambda})}, \end{aligned}$$

want $P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$.
(b)

$$E(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} iP(Y=i)=\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!(1-e^{-\lambda})}=\frac{E(X)}{1-e^{-\lambda}}=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}.$$

5 Schrijf X_i voor de uitkomst van de i de worp. De X_is zijn onafhankelijk, $E(X_i)=\frac{7}{2}$, Var(X_i)= $\frac{35}{12}$. Merk op dat $E(X_1+\cdots+X_{300})=1050$, en wegens onafhankelijkheid Var($X_1+\cdots+X_{300}$)= $300\cdot\frac{35}{12}$. Nu geldt wegens de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\begin{aligned}
P(X\geq 300) &= P(X_1+\cdots+X_{300}\leq 1000)=P(X_1+\cdots+X_{300}-1050\leq -50)=\\
&\leq P(X_1+\cdots+X_{300}-1050\leq -50)+P(X_1+\cdots+X_{300}-1050\geq 50)=\\
&= P(|X_1+\cdots+X_{300}-1050|\geq 50)\leq \frac{\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_{300})}{50^2}\\
&= \frac{300\cdot\frac{35}{12}}{2500}.
\end{aligned}$$

30 januari 2003

1 (a) aantal manieren om een rode en een witte te pakken gedeeld door het totaal aantal manieren om twee blokken te pakken:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{8}{12\cdot 11}.$$

(b) Er zijn $\frac{12!}{6!\,4!}$ torens mogelijk. En merk op dat elke toren dezelfde kans heeft om gebouwd te worden door de kleuter.
(c) Er zijn 4! mogelijkheden om een volgorde van de kleuren te kiezen (en dus ook 4! torens waarbij alle rode en alle zwarte blokken bij elkaar komen. De gevraagde kans is $\frac{4!\cdot 6!\cdot 4!}{12!}$.
(d) De kans dat het onderste blok wit is: de rest maakt niet uit dus $\frac{11!}{6!4!}$ mogelijke torens waarbij dit het geval is. De kans op zo'n toren is dus $\frac{1}{12}$. Idem voor bovenste blok wit.
(e) $\frac{6!\cdot 4!}{12!}$

2 (Ik geef niet overal een toelichting) (a) $P(X=1)=P(3\text{ harten})+P(3\text{ ruiten})+P(3\text{ ruiten})+P(3\text{ klaveren})=4\cdot\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}$.
$P(X=2)=4\cdot 3P(2\text{ harten en 1 ruiten})=12\cdot 3\cdot\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{13}{50}$. (De 12 is van het aantal manieren waarop je de denominatie kunt kiezen die je een keer en de denominatie die je twee keer ziet de 3 is het aantal manieren waarop

je 2 harten en 1 ruiten kunt hebben.)
$P(X=3) = 4 \cdot P(\text{een ruiten, een klaveren, een harten}) = 4 \cdot 3! \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50}$.
(b) $E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3)$, reken zelf uit. $E(X^2) = 1 \cdot P(X=1) + 4P(X=2) + 9P(X=3)$, $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, reken zelf uit.
(c): zelfde manier als onderdeel a, doe zelf.
(d) $P(X=1|Y=3) = \frac{P(X=1 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{P(X=1)}{P(Y=3)}$.

3 (a) Laat W de gebeurtenis dat er alleen witte ballen getrokken worden, Laat X het aantal ogen dat gegooid wordt. Dan geldt:

$$P(W) = \sum_{i=1}^{6} P(X=i)P(W|X=i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{5}{i}}{\binom{15}{i}}.$$

(b)$P(X=3|W) = \frac{P(X=3 \cap W)}{P(W)}$. De kans $P(W)$ is bij onderdeel a uitgerekend, $P(X=3 \cap W) = P(X=3)P(W|X=3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}$. Vul zelf verder in.

4 (a) Schrijf Y_i voor de verandering in de prijs van het aandeel op de $i$de dag, dan geldt dat

$$X = 100 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{10}.$$

Wegens lineariteit van de verwachting geldt:

$$E(X) = 100 + E(Y_1) + \cdots + E(Y_{10}) = 100 + 10 \cdot 0 = 100.$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1 + \cdots Y_{10}) = \text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}(Y_{10}) = 10,$$

wegens de onafhankelijkheid van de dagelijkse veranderingen.
(b)Met de ongelijkheid van Chebyshev krijgen we

$$\begin{aligned} P(X \geq 105) &= P(X - 100 \geq 5) \leq P(|X - 100| \geq 5) \\ &\leq \frac{\text{Var}(X)}{5^2} = \frac{10}{25}. \end{aligned}$$