Uitwerkingen van het tentamen kansrekening I voor BWI
6 april 2004

1 Er zijn $\frac{10!}{5!\,5!}$ mogelijke volgordes om de eitjes op te eten (als ik geen onderscheid maak tussen verschillende eitjes van dezelfde smaak), deze mogelijkheden hebben allemaal dezelfde kans. Er zijn twee mogelijkheden om nooit twee eitjes van dezelfde smaak achter elkaar te eten (melk wit melk wit etc. of wit melk wit melk etc.) dus de gevraagde kans is $2\frac{5!\,5!}{10!}$.
(b) Dit kan maar op een volgorde, de gevraagde kans is dus $\frac{5!\,5!}{10!}$.
(c) Schrijf A voor de gebeurtenis dat het eerste eitje wit was, B voor de gebeurtenis dat het tweede eitje van melkchocolade was gemaakt. Nu geldt:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)} \\ &= \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

2(a)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c) \\ &= 0,1\cdot 0,99+0,9\cdot 0,02 \\ &= 0,117. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0,1\cdot 0,99}{0,117}. \end{aligned}$$

3 (a) Per worp is de kans dat er geen zes gegooid wordt $\frac{5}{6}$. Aangezien de uitkomsten van de afzonderlijke worpen onafhankelijk zijn geldt dat de kans om bij tien worpen geen enkele zes te zien gelijk is aan $(\frac{5}{6})^{10}$.
(b)Y is binomiaal verdeeld met parameters $\frac{1}{3}$ en 10. $P(Y=i)=\binom{10}{i}\frac{1}{3}^i\frac{2}{3}^{10-i}$ voor $i\in\{0,\ldots,10\}$. $E(Y)=10\cdot\frac{1}{3}$.
(c) $P(A)=\binom{10}{2}\frac{1}{6}^2\frac{5}{6}^8$, $P(B)=\frac{5}{6}^{10}$ en $P(A\cap B)=\binom{10}{2}\frac{1}{6}^2\frac{2}{3}^8$. Aangezien $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ geldt dat A en B niet onafhankelijk zijn.

4 (a) $E(X_i)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$.
$E(X_i^2)=1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$, dus $\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=\frac{7}{3}-\frac{16}{9}=\frac{5}{9}$.
(b) Merk op dat $E(Y)=1000\cdot\frac{4}{3}$ en wegens onafhankelijkheid $\mathrm{Var}(Y)=1000\cdot\frac{5}{9}$. Nu geldt dat

$$P(Y>1100) = 1-P(Y\leq 1100)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(Y - \frac{4000}{3} \leq -233\frac{1}{3}) \\
&\geq 1 - P(|Y - \frac{4000}{3}| \geq 233\frac{1}{3}) \\
&\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(Y)}{(233\frac{1}{3})^2} \\
&= 1 - \frac{\frac{5000}{9}}{(233\frac{1}{3})^2}.
\end{aligned}
$$