

Tentamen Kansrekening I

19 augustus 2002

1. Een kleine gemeenschap bestaat uit 20 gezinnen; 4 daarvan hebben één kind, 8 hebben twee kinderen, 5 hebben drie kinderen, 2 hebben vier kinderen, en 1 heeft vijf kinderen.

(a) Stel we kiezen een toevallig kind (elk kind heeft even grote kans om gekozen te worden). Wat is de kans dat dit kind uit een gezin komt met k kinderen, voor $k = 1, 2, 3, 4, 5$?

(b) Het totaal aantal broertjes en zusjes van het kind dat we in (a) gekozen hadden noemen we X . Bepaal $E(X)$.

2. Als we vier stellen op een rij zetten, in een willekeurige volgorde, wat is dan de kans dat niemand naast zijn of haar partner komt te staan?

3. Het aantal eitjes dat een bepaald insect legt op een eikenblad is Poisson verdeeld met parameter λ . We kunnen dit aantal eitjes echter alleen maar observeren als het positief is, want als er geen eitje op het blad ligt, dan kunnen we niet weten of er een insect op het blad was. We noteren het aantal geobserveerde eitjes met Y . Er geldt dan dat $P(Y = i) = (X = i | X > 0)$ waarbij X een Poisson verdeling met parameter λ heeft.

(a) Laat zien dat

$$P(Y = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!(1 - e^{-\lambda})},$$

voor $i = 1, 2, \dots$

(b) Bepaal $E(Y)$.

4. Stel we kiezen een toevallig nummer X uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Daarna kiezen we een nummer Y uit de verzameling $\{1, \dots, X\}$.

(a) Bepaal de gezamenlijke kansmassafunctie van (X, Y) .

(b) Bepaal de kansmassafunctie van Y .

(c) Bepaal $E(Y | X = x)$ voor alle mogelijke waarden van x .

(d) Bepaal $E(X | Y = y)$ voor alle mogelijke waarden van y .

(e) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

5. Stel we gooien herhaaldelijk met een dobbelsteen. Het aantal worpen dat we nodig hebben om een totaal aantal ogen van minstens 1000 te krijgen noemen we X . Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev om een bovengrens te vinden voor de kans $P(X \geq 300)$.