p^n en $p^{\underline{\underline{n}}}$

Zij p een PA-term zonder recursievariabelen.

We definiëren p^n en $p^{\underline{\underline{n}}}$ met inductie naar $n \geq 1$:

$$p^1 = p \qquad\qquad p^{\underline{\underline{1}}} = p$$

$$p^{n+1} = p \cdot p^n \qquad\qquad p^{\underline{\underline{n+1}}} = p \parallel p^{\underline{\underline{n}}}.$$

$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{a}^n = \mathrm{a}\,\underline{\underline{n}}$ (1)

Inductie naar n:

Basis: We bewijzen de gevallen $n = 1$ en $n = 2$: dat $\mathrm{a}^1 \overset{\text{(def)}}{=} \mathrm{a}\,\underline{\underline{1}}$ volgt direct uit de definitie en

$$\mathrm{a}^2 \overset{\text{(def)}}{=} \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \overset{\text{(M2)}}{=} \mathrm{a} \mathbin{⌊\!⌊} \mathrm{a} \overset{\text{(A3)}}{=} \mathrm{a} \mathbin{⌊\!⌊} \mathrm{a} + \mathrm{a} \mathbin{⌊\!⌊} \mathrm{a} \overset{\text{(M1)}}{=} \mathrm{a} \parallel \mathrm{a} \overset{\text{(def)}}{=} \mathrm{a}\,\underline{\underline{2}}.$$

Inductiestap: Stel $n > 2$; dan $n = m + 2$ voor zekere $m \geq 1$. Neem aan dat $\mathrm{a}^m = \mathrm{a}\,\underline{\underline{m}}$ en $\mathrm{a}^{m+1} = \mathrm{a}\,\underline{\underline{m+1}}$ (IH). We bewijzen, op de volgende slide, dat $\mathrm{a}^{m+2} = \mathrm{a}\,\underline{\underline{m+2}}$.

PA $\vdash \mathrm{a}^{n} = \mathrm{a}^{\underline{\underline{n}}}$ (2)

(We maken in onderstaande afleiding gebruik van de vergelijking (*) $\mathrm{x} \parallel \mathrm{y} = \mathrm{y} \parallel \mathrm{x}$; dat deze vergelijking afleidbaar is in PA is al bewezen bij Opgave (4) op blz. 41.)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}^{m+2} &= \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{m+1} && \text{(A3)} \\
&= \mathrm{a} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{m+1} && \text{(M2)} \\
&= \mathrm{a} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{\underline{\underline{m+1}}} && \text{(IH)} \\
&= \mathrm{a} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a} \cdot (\mathrm{a}^{\underline{\underline{m}}} \parallel \mathrm{a}) && \text{(*)} \\
&= \mathrm{a} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a} \cdot (\mathrm{a}^{m} \parallel \mathrm{a}) && \text{(IH)} \\
&= \mathrm{a} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a}^{m+1} + \mathrm{a}^{m+1} \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{a} && \text{(M3)} \\
&= \mathrm{a} \parallel \mathrm{a}^{m+1} && \text{(M1)} \\
&= \mathrm{a}^{\underline{\underline{m+2}}} && \text{(IH).}
\end{aligned}
$$

p^ω en $p^{\underline{\underline{\omega}}}$

Zij p een PA-term zonder recursievariabelen.
Hoe kunnen we p^ω en $p^{\underline{\underline{\omega}}}$ definiëren?

Intuïtie: "p^ω is een oplossing van $X = p \cdot X$", en
"$p^{\underline{\underline{\omega}}}$ is een oplossing van $X = p \parallel X$".

De vergelijking $X = p \cdot X$ is guarded en heeft dus een unieke oplossing in het graafmodel; we kunnen het proces p^ω dus formeel definiëren als de oplossing van deze vergelijking.

De vergelijking $X = p \parallel X$ heeft i.h.a. een aantal verschillende oplossingen: a^ω en $a^\omega \parallel b$ zijn twee verschillende oplossingen van $X = a \parallel X$.

Guardedness

Een voorkomen van een recursievariabele X in een PA-term p heet **guarded** als p een subterm $\mathrm{a} \cdot q$ (a een actie) zo dat q het betreffende voorkomen van X bevat; anders noemen we het voorkomen van X **unguarded**.

Een recursieve PA-specificatie is **guarded** als deze middels de axioma's van PA èn eventueel de vergelijkingen zelf kan worden herschreven tot een recursieve specificatie waarin elk voorkomen van een recursie-variabele in de rechterkant van een vergelijking guarded is.

Stelling: Elke *guarded* recursieve PA-specificatie heeft een oplossing in het graafmodel en deze oplossing is uniek modulo bisimulatie.

Definitie van $p^{\overset{\omega}{=}}$ (1)

Zij p een PA-term zonder recursievariabelen.

Definieer $p^{\overset{\omega}{=}}$ als de unieke oplossing van $\mathrm{X} = p \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{X}$.

Bovenstaande definitie is correct als

(i) de vergelijking $\mathrm{X} = p \mathbin{\|\!\!\lfloor} \mathrm{X}$ guarded is; en

(ii) $p^{\overset{\omega}{=}} = p \parallel p^{\overset{\omega}{=}}$.

Een formeel bewijs dat (i) en (ii) inderdaad waar zijn, valt buiten het bestek van deze cursus.

Buffers koppelen (1)

Beschouw twee buffers met plaats voor één bit

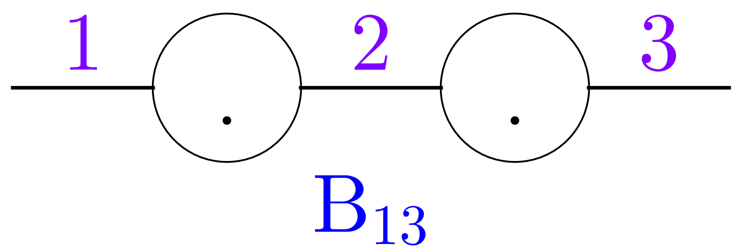
met respectievelijke specificaties

$$B_{12} = \sum_{d \in \{0,1\}} r_1(d) \cdot s_2(d) \cdot B_{12}; \text{ en}$$

$$B_{23} = \sum_{d \in \{0,1\}} r_2(d) \cdot s_3(d) \cdot B_{23}$$

Buffers koppelen (2)

De tweebitsbuffer



kan als volgt worden gespecificeerd:

$$
\begin{aligned}
B_{13} &= \textstyle\sum_{d \in \{0,1\}} r_1(d) \cdot c_2(d) \cdot B'_{13}(d);\\
B'_{13}(d) &= \textstyle\sum_{e \in \{0,1\}} r_1(e) \cdot s_3(d) \cdot c_2(e) \cdot B'_{13}(e) + s_3(d) \cdot B_{13}
\end{aligned}
$$

Buffers koppelen (3)

Communicaties: $\gamma(\mathrm{s}_2(\mathrm{d}), \mathrm{r}_2(\mathrm{d})) = \mathrm{c}_\mathrm{i}(\mathrm{d})$ (voor $\mathrm{d} \in \{0, 1\}$).

Vraag: $\mathrm{B}_{13} = \mathrm{B}_{12} \parallel \mathrm{B}_{23}$?

Nee, want $\mathrm{B}_{12} \parallel \mathrm{B}_{23}$ kan ook losse $\mathrm{r}_2(\mathrm{d})$ en $\mathrm{s}_2(\mathrm{d})$ acties doen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}_{12} \parallel \mathrm{B}_{23} = \\
&\quad \textstyle\sum_{\mathrm{d}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_1(\mathrm{d})(\mathrm{s}_2(\mathrm{d}) \cdot \ldots + \mathrm{c}_2(\mathrm{d}) \cdot \ldots + \sum_{\mathrm{e}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_2(\mathrm{e}) \cdot \ldots) \\
&\qquad + \\
&\quad \textstyle\sum_{\mathrm{d}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_2(\mathrm{d})(\sum_{\mathrm{e}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_1(\mathrm{e}) \cdot \ldots + \mathrm{s}_3(\mathrm{d}) \cdot \ldots).
\end{aligned}$$

We willen een mechanisme om communicatie af te dwingen!

Procesgrafen (12)

Zij $\mathrm{g} \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$, d.w.z., g is een samenhangende procesgraaf met een acyclische wortel en zij $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{A}$.

We definiëren de H-**encapsulatie** $\Delta_{\mathrm{H}}(\mathrm{g})$ als de procesgraaf die wordt verkregen door in g:

(i) iedere pijl $s \longrightarrow_{\mathrm{a}} t$ met $\mathrm{a} \in \mathrm{H}$ te vervangen door $s \longrightarrow_{\delta} t$; en

(ii) vervolgens de δ-opschoningsoperatie Δ uit te voeren.

Procesgrafen (8')

Een knoop s van $\mathrm{g} \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$ heet **onbereikbaar wegens deadlock** als elk pad van de wortel r van g naar s een δ-pijl bevat.

Twee *verschillende* pijlen $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t$ en $s \rightarrow_{\mathrm{b}} u$ met hetzelfde beginpunt s heten **zusterpijlen**.

Het δ**-schone overblijfsel** $\Delta(\mathrm{g})$ **van** g krijgen we door:

(i) pijlen $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t$ ($\mathrm{a} \in \mathrm{A} \cup \{\delta\}$) te verwijderen als s onbereikbaar is wegens deadlock;

(ii) vervolgens herhaaldelijk δ-pijlen te verwijderen, totdat geen enkele pijl nog een δ-pijl als zusterpijl heeft;

(iii) alle onbereikbare delen uit de ontstane graaf te verwijderen.

ACP: **de encapsulatie operatoren ∂_{H}**

Axioma's voor ∂_{H} ($\mathrm{a} \in \mathrm{A} \cup \{\delta\}$, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{A}$):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D1)} & \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{a}) = \mathrm{a} & \text{als } \mathrm{a} \notin \mathrm{H} \\
\text{(D2)} & \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{a}) = \delta & \text{als } \mathrm{a} \in \mathrm{H} \\
\text{(D3)} & \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{x}) + \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{y}) & \\
\text{(D4)} & \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{x}) \cdot \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{y}) &
\end{array}
$$

ACP: $+$, $\cdot$, δ en ∂_H

Axioma's ($a \in A \cup \{\delta\}$, $H \subseteq A$):

$$
\begin{array}{lll}
(A1) & x + y & = y + x \\
(A2) & x + (y + z) & = (x + y) + z \\
(A3) & x + x & = x \\
(A4) & (x + y) \cdot z & = (x \cdot z) + (y \cdot z) \\
(A5) & x \cdot (y \cdot z) & = (x \cdot y) \cdot z \\
(A6) & x + \delta & = x \\
(A7) & \delta \cdot x & = \delta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(D1) & \partial_H(a) & = a & \text{als } a \notin H \\
(D2) & \partial_H(a) & = \delta & \text{als } a \in H \\
(D3) & \partial_H(x + y) & = \partial_H(x) + \partial_H(y) & \\
(D4) & \partial_H(x \cdot y) & = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y) &
\end{array}
$$

ACP: $\parallel$, $\mathbin{\underline{\parallel}}$ en $\mid$

Axioma's ($a, b \in A \cup \{\delta\}$):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(CF1)} & a \mid b = \gamma(a,b) & \text{als } \gamma(a,b) \text{ gedefinieerd} \\
\text{(CF2)} & a \mid b = \delta & \text{als } \gamma(a,b) \text{ niet gedefinieerd}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(CM1)} & x \parallel y & = ((x \mathbin{\underline{\parallel}} y) + (y \mathbin{\underline{\parallel}} x)) + (x \mid y) \\
\text{(CM2)} & a \mathbin{\underline{\parallel}} x & = a \cdot x \\
\text{(CM3)} & (a \cdot x) \mathbin{\underline{\parallel}} y & = a \cdot (x \parallel y) \\
\text{(CM4)} & (x + y) \mathbin{\underline{\parallel}} z & = (x \mathbin{\underline{\parallel}} z) + (y \mathbin{\underline{\parallel}} z) \\
\text{(CM5)} & (a \cdot x) \mid b & = (a \mid b) \cdot x \\
\text{(CM6)} & a \mid (b \cdot x) & = (a \mid b) \cdot x \\
\text{(CM7)} & (a \cdot x) \mid (b \cdot y) & = (a \mid b) \cdot (x \parallel y) \\
\text{(CM8)} & (x + y) \mid z & = (x \mid z) + (y \mid z) \\
\text{(CM9)} & x \mid (y + z) & = (x \mid y) + (x \mid z)
\end{array}
$$

ACP: correctheid en volledigheid

$$\mathbf{G_c}(\mathrm{a}) = \to\bigcirc\xrightarrow{\mathrm{a}}\bigcirc \qquad \mathbf{G_c}(\delta) = \to\bigcirc\xrightarrow{\delta}\bigcirc$$

$$\mathbf{G_c}(\partial_{\mathrm{H}}(p)) = \Delta_{\mathrm{H}}(\mathbf{G_c}(p))$$

$$\mathbf{G_c}(p+q) = \Delta(\mathbf{G_c}(p)) + \Delta(\mathbf{G_c}(q))$$

$$\mathbf{G_c}(p \cdot q) = \Delta(\mathbf{G_c}(p)) \cdot \Delta(\mathbf{G_c}(q))$$

$$\mathbf{G_c}(p \parallel q) = \Delta(\mathbf{G_c}(p)) \parallel \Delta(\mathbf{G_c}(q))$$

$$\mathbf{G_c}(p \mathbin{\|\!\lfloor} q) = \Delta(\mathbf{G_c}(p)) \mathbin{\|\!\lfloor} \Delta(\mathbf{G_c}(q))$$

$$\mathbf{G_c}(p \mid q) = \Delta(\mathbf{G_c}(p)) \mid \Delta(\mathbf{G_c}(q))$$

Stelling: Voor alle gesloten ACP-termen p en q:

$$\text{ACP} \vdash p = q \iff \mathbf{G_c}(p) \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathbf{G_c}(q).$$

Buffers koppelen (4)

Communicaties: $\gamma(\mathrm{s}_2(\mathrm{d}), \mathrm{r}_2(\mathrm{d})) = \mathrm{c}_2(\mathrm{d})$ $(\mathrm{d} = 0, 1)$.

Encapsulaties: $\mathrm{H} = \{\mathrm{s}_2(\mathrm{d}), \mathrm{r}_2(\mathrm{d}) : \mathrm{d} = 0, 1\}$.

$$\begin{aligned}
&\partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{B}_{12} \parallel \mathrm{B}_{23}) \\
&\quad = \partial_{\mathrm{H}}\left(\sum_{\mathrm{d}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_1(\mathrm{d}) \cdot \mathrm{s}_2(\mathrm{d}) \cdot \mathrm{B}_{12} \parallel \sum_{\mathrm{e}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_2(\mathrm{e}) \cdot \mathrm{s}_3(\mathrm{e}) \cdot \mathrm{B}_{23}\right) \\
&\quad = \sum_{\mathrm{d}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_1(\mathrm{d}) \cdot \partial_{\mathrm{H}}\left(\mathrm{s}_2(\mathrm{d}) \cdot \mathrm{B}_{12} \parallel \sum_{\mathrm{e}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_2(\mathrm{e}) \cdot \mathrm{s}_3(\mathrm{e}) \cdot \mathrm{B}_{23}\right) \\
&\quad = \sum_{\mathrm{d}\in\{0,1\}} \mathrm{r}_1(\mathrm{d}) \cdot \mathrm{c}_2(\mathrm{d}) \cdot \partial_{\mathrm{H}}(\mathrm{B}_{12} \parallel \mathrm{s}_3(\mathrm{d}) \cdot \mathrm{B}_{23})
\end{aligned}$$

Buffers koppelen (5)

$$
\begin{aligned}
&\partial_H\,(B_{12} \parallel s_3(d)\cdot B_{23})\\
&\quad = \textstyle\sum_{e\in\{0,1\}} r_1(e)\cdot\partial_H\,(s_2(e)\cdot B_{12} \parallel s_3(d)\cdot B_{23})\\
&\qquad\quad + s_3(d)\cdot\partial_H\,(B_{12} \parallel B_{23})\\
&\quad = \textstyle\sum_{e\in\{0,1\}} r_1(e)\cdot s_3(d)\cdot\partial_H\,(s_2(e)\cdot B_{12} \parallel B_{23})\\
&\qquad\quad + s_3(d)\cdot\partial_H\,(B_{12} \parallel B_{23})\\
&\quad = \textstyle\sum_{e\in\{0,1\}} r_1(e)\cdot s_3(d)\cdot c_2(e)\cdot\partial_H\,(B_{12} \parallel s_3(e)\cdot B_{23})\\
&\qquad\quad + s_3(d)\cdot\partial_H\,(B_{12} \parallel B_{23})
\end{aligned}
$$

Buffers koppelen (6)

We hebben bewezen dat:

$$\partial_H(B_{12} \parallel B_{23}) = \sum_{d\in\{0,1\}} r_1(d) \cdot c_2(d) \cdot \partial_H(B_{12} \parallel s_3(d) \cdot B_{23}) \text{ en}$$

$$\begin{aligned} &\partial_H(B_{12} \parallel s_3(d) \cdot B_{23}) \\ &\quad = \sum_{e\in\{0,1\}} r_1(e) \cdot s_3(d) \cdot c_2(e) \cdot \partial_H(B_{12} \parallel s_3(e) \cdot B_{23}) \\ &\qquad + s_3(d) \cdot \partial_H(B_{12} \parallel B_{23}) \end{aligned}$$

Dus $\partial_H(B_{12} \parallel B_{23})$, $\partial_H(B_{12} \parallel s_3(d) \cdot B_{23})$ is een oplossing voor

$$\begin{aligned} B_{13} &= \sum_{d\in\{0,1\}} r_1(d) \cdot c_2(d) \cdot B'_{13}(d); \\ B'_{13}(d) &= \sum_{e\in\{0,1\}} r_1(e) \cdot s_3(d) \cdot c_2(e) \cdot B'_{13}(e) + s_3(d) \cdot B_{13} \end{aligned}$$