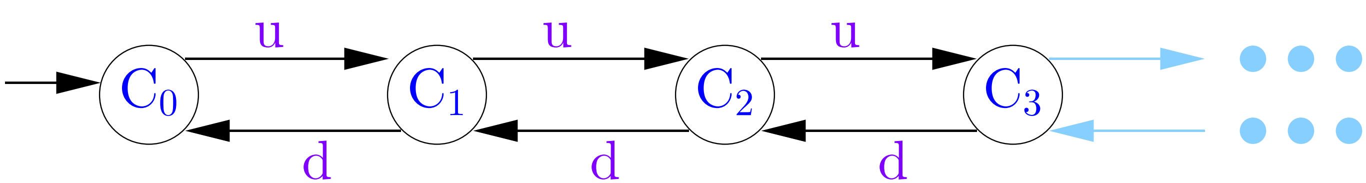
Counter

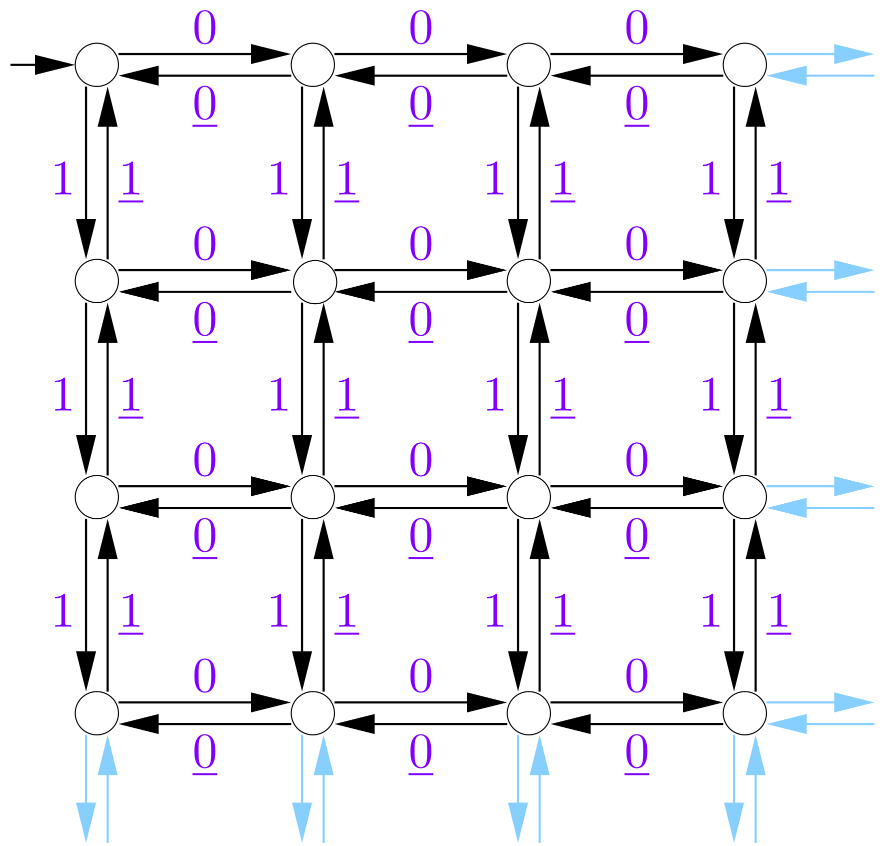
De procesgraaf



is een oplossing voor C in $\mathrm{C} = \mathrm{u}(\mathrm{d} \parallel \mathrm{C})$.

Bag **over** $\{0, 1\}$

De procesgraaf



is een oplossing voor B in $\mathrm{B} = 0(\underline{0} \parallel \mathrm{B}) + 1(\underline{1} \parallel \mathrm{B})$.

Deadlock

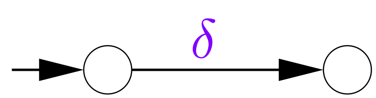
We introduceren de speciale constante

δ : **deadlock**;
het proces dat nog niet getermineerd is,
maar ook geen echte stappen meer kan doen.

Axioma's:

(A6) $x + \delta = x$ (δ is een 'eenheidselement' voor $+$)
(A7) $\delta \cdot x = \delta$ (δ is een 'links-nul' voor $\cdot$)

De procesgraaf $\mathbf{G}(\delta)$ is



Procesgrafen (8)

Een knoop s van $\mathrm{g} \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$ heet **onbereikbaar wegens deadlock** als elk pad van de wortel r van g naar s een δ-pijl bevat.

Twee *verschillende* pijlen $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t$ en $s \rightarrow_{\mathrm{b}} u$ met hetzelfde beginpunt s heten **zusterpijlen**.

Het δ**-schone overblijfsel** $\Delta(\mathrm{g})$ **van** g krijgen we door:

(i) pijlen $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t$ te verwijderen als s onbereikbaar is wegens deadlock;

(ii) vervolgens herhaaldelijk δ-pijlen te verwijderen, totdat geen enkele pijl nog een δ-pijl als zusterpijl heeft;

(iii) alle onbereikbare delen uit de ontstane graaf te verwijderen.

Procesgrafen (9)

Zij $\mathrm{g} = (N, E, r)$ en $\mathrm{g}' = (N', E', r')$ δ-schone procesgrafen.

Een relatie $\mathcal{R} \subseteq N \times N'$ is een **bisimulatie** tussen g en g' als

(i) $(r, r') \in \mathcal{R}$;

(ii) $\mathcal{R}$ eindknopen alleen met eindknopen relateert;

en voor alle $\mathrm{a} \neq \delta$:

(iii) $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t \;\&\; (s, s') \in \mathcal{R} \implies \exists t' \in N'.\; s' \rightarrow_{\mathrm{a}} t' \;\&\; (t, t') \in \mathcal{R}$;

(iv) $s' \rightarrow_{\mathrm{a}} t' \;\&\; (s, s') \in \mathcal{R} \implies \exists t \in N.\; s \rightarrow_{\mathrm{a}} t \;\&\; (t, t') \in \mathcal{R}$.

BPA$_\delta$: correctheid en volledigheid

De axioma's van BPA$_\delta$:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(A1)} & x + y & = y + x \\
\text{(A2)} & x + (y + z) & = (x + y) + z \\
\text{(A3)} & x + x & = x \\
\text{(A4)} & (x + y) \cdot z & = (x \cdot z) + (y \cdot z) \\
\text{(A5)} & x \cdot (y \cdot z) & = (x \cdot y) \cdot z \\
\text{(A6)} & x + \delta & = x \\
\text{(A7)} & \delta \cdot x & = \delta
\end{array}
$$

Stelling: Voor alle gesloten BPA$_\delta$-termen p en q:

$$\text{BPA}_\delta \vdash p = q \iff \Delta(\mathbf{G}(p)) \underline{\leftrightarrow} \Delta(\mathbf{G}(q)).$$

PA_δ: correctheid en volledigheid

De axioma's van PA_δ:

(A1)–(A7) (d.w.z., de axioma's van BPA_δ) plus

$$
\begin{array}{llll}
\text{(M1)} & x \parallel y & = (x \mathbin{\|\!\_} y) + (y \mathbin{\|\!\_} x) & \\
\text{(M2)} & a \mathbin{\|\!\_} x & = a \cdot x & \text{(voor alle } a \in A \cup \{\delta\}\text{)} \\
\text{(M3)} & (a \cdot x) \mathbin{\|\!\_} y & = a \cdot (x \parallel y) & \text{(voor alle } a \in A \cup \{\delta\}\text{)} \\
\text{(M4)} & (x + y) \mathbin{\|\!\_} z & = (x \mathbin{\|\!\_} z) + (y \mathbin{\|\!\_} x) &
\end{array}
$$

Stelling: Voor alle gesloten PA_δ-termen p en q:

$$\mathsf{PA}_\delta \vdash p = q \iff \Delta(\mathbf{G}(p)) \leftrightarrows \Delta(\mathbf{G}(q)).$$

Buffers koppelen (1)

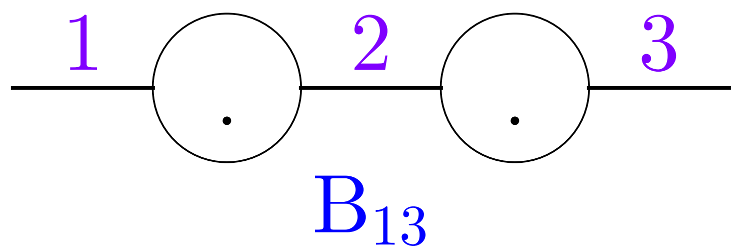
Beschouw twee buffers met plaats voor één bit

met respectievelijke specificaties

$$
\begin{aligned}
B_{12} &= \sum_{d \in \{0,1\}} r_1(d) \cdot s_2(d) \cdot B_{12} \\
&= r_1(0) \cdot s_2(0) \cdot B_{12} + r_1(1) \cdot s_2(1) \cdot B_{12}; \text{ en} \\
B_{23} &= \sum_{d \in \{0,1\}} r_2(d) \cdot s_3(d) \cdot B_{23} \\
&= r_2(0) \cdot s_3(0) \cdot B_{23} + r_2(1) \cdot s_3(1) \cdot B_{23}
\end{aligned}
$$

Buffers koppelen (2)

De tweebitsbuffer



kan worden verkregen door B_{12} en B_{23} 'te koppelen': het uitgaande kanaal van B_{12} wordt verbonden met het inkomende kanaal van B_{23}.

Om een dergelijke koppeling ook op specificatieniveau tot stand te brengen, willen we uitdrukken dat 'send-actie' $s_2(d)$ van B_{12} **communiceert** met de 'receive-actie' $r_2(d)$ van B_{23}.

ACP: de communicatiefunctie γ

Gegeven is een verzameling A van acties.

Een **communicatiefunctie** is een partiële functie

$$\gamma : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \rightharpoonup \mathrm{A}$$

zo dat voor alle $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{A}$:

$$\gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \gamma(\mathrm{b}, \mathrm{a}) \text{ en}$$
$$\gamma(\mathrm{a}, \gamma(\mathrm{b}, \mathrm{c})) = \gamma(\gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}), \mathrm{c}).$$

(De linkerkant van bovenstaande vergelijkingen is gedefinieerd dan, en slechts dan, als de rechterkant gedefinieerd is.)

Procesgrafen (10)

Zij $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2 \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$, d.w.z., g_1 en g_2 zijn samenhangende procesgrafen met een acyclische wortel.

Met een **communicatiediagonaal** van het cartesisch product $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2$ bedoelen we een tripel

$$(s_1, s_2) \rightarrow_{\mathrm{c}} (t_1, t_2)$$

zo dat

$$s_1 \rightarrow_{\mathrm{a}} t_1,\ \ s_2 \rightarrow_{\mathrm{b}} t_2 \text{ en } \gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{c}.$$

In het vervolg noteren we met $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2$ het cartesisch product van g_1 en g_2 waaraan de communicatiediagonalen zijn toegevoegd.

Procesgrafen (11)

Zij $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2 \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$, d.w.z., g_1 en g_2 zijn samenhangende procesgrafen met een acyclische wortel.

We definiëren $\mathrm{g}_1 \mid \mathrm{g}_2$ als de procesgraaf die uit $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2$ wordt verkregen door:

(i) alle pijlen van de vorm $(r_1, r_2) \rightarrow_{\mathrm{a}} (r_1, s_2)$ èn alle pijlen van de vorm $(r_1, r_2) \rightarrow_{\mathrm{a}} (s_1, r_2)$ met (r_1, r_2) de wortel van $\mathrm{g}_1 \mathbin{\|\!\_} \mathrm{g}_2$, s_1 een willekeurige knoop van g_1 en s_2 een willekeurige knoop van g_2, te verwijderen;

(ii) alle daardoor onbereikbaar geworden delen te verwijderen.

ACP: **de communicatiemerge** $|$

Axioma's ($\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A} \cup \{\delta\}$):

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{CF1}) & \mathrm{a} \mid \mathrm{b} = \gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}) & \text{als } \gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \text{ gedefinieerd} \\ (\mathrm{CF2}) & \mathrm{a} \mid \mathrm{b} = \delta & \text{als } \gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \text{ niet gedefinieerd} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{CM5}) & (\mathrm{a} \cdot \mathrm{x}) \mid \mathrm{b} & = (\mathrm{a} \mid \mathrm{b}) \cdot \mathrm{x} \\ (\mathrm{CM6}) & \mathrm{a} \mid (\mathrm{b} \cdot \mathrm{x}) & = (\mathrm{a} \mid \mathrm{b}) \cdot \mathrm{x} \\ (\mathrm{CM7}) & (\mathrm{a} \cdot \mathrm{x}) \mid (\mathrm{b} \cdot \mathrm{y}) & = (\mathrm{a} \mid \mathrm{b}) \cdot (\mathrm{x} \parallel \mathrm{y}) \\ (\mathrm{CM8}) & (\mathrm{x} + \mathrm{y}) \mid \mathrm{z} & = (\mathrm{x} \mid \mathrm{z}) + (\mathrm{y} \mid \mathrm{z}) \\ (\mathrm{CM9}) & \mathrm{x} \mid (\mathrm{y} + \mathrm{z}) & = (\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) + (\mathrm{x} \mid \mathrm{z}) \end{array}$$

LET OP: bovenstaande axioma's (CF1) en (CF2) **vervangen** de axioma's (C1), (C2) en (C3) in de syllabus!!!

ACP: de merge $\parallel$ en de left-merge $\mathbin{\|\!\!\_}$

Nieuwe axioma's ($a \in A \cup \{\delta\}$):

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{CM1}) & x \parallel y & = ((x \mathbin{\|\!\!\_} y) + (y \mathbin{\|\!\!\_} x)) + (x \mid y) \\
(\mathrm{CM2}) & a \mathbin{\|\!\!\_} x & = a \cdot x \\
(\mathrm{CM3}) & (a \cdot x) \mathbin{\|\!\!\_} y & = a \cdot (x \parallel y) \\
(\mathrm{CM4}) & (x + y) \mathbin{\|\!\!\_} z & = (x \mathbin{\|\!\!\_} z) + (y \mathbin{\|\!\!\_} z)
\end{array}
$$