Divisie Wiskunde & Informatica — Tentamen Inleiding Logica
Vrije Universiteit — 18 december 2000

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $p \wedge \neg(q \vee r) \vdash p \wedge \neg r$,
(6 punten)

(b) $p \vee q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash p$.
(6 punten)

Opgave 2. Bepaal een CNV voor de formule $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p)$, en bepaal aan de hand van de CNV of de formule een tautologie is. Motiveer het antwoord. (6 punten)

Opgave 3. Bekijk deze figuur, die een boolse functie van vier variabelen weergeeft: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & x_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 1 \\
x_3 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & x_4 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 1 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

(a) Er volgen vijf beweringen. Geef van elke bewering aan of die waar is (ja of nee).

1. De figuur stelt een BDT (binary decision tree, beslisboom) voor.
2. De figuur stelt een BDD voor.
3. De figuur stelt een OBDD voor.
4. De figuur stelt een OBDD voor met ordening $[x_2, x_1, x_3, x_4]$.
5. De figuur stelt een gereduceerde (reduced) OBDD voor.

(6 punten)

(b) De volgende figuurgeeft een boolse functie $g(x, y, z)$ weer. Bepaal de gereduceerde OBDD van de functie g, met ordening $[x, y, z]$, door alle reductiestappen (C1-3) te geven, uitgaande van de BDT voor g. Had u het eindresultaat al eerder kunnen voorspellen?

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d, dashed] & y \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 1 \\
z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 & \\
1 & &
\end{tikzcd}$$

(6 punten)

Opgave 4. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

$$\forall x \forall y(Rxy \wedge Ryx) \vdash \neg \exists z \neg Rzz.$$

(6 punten)

Opgave 5. Van de volgende twee gevolgtrekkingen is er één geldig. Geef voor de geldige een ND-afleiding, en voor de ongeldige een tegenmodel.

(a) $\exists y(Py \rightarrow \forall x Rxy) \models \exists y Py \rightarrow \exists z \forall x Rxz$,

(6 punten)

(b) $\forall y(Py \rightarrow \forall x Rxy) \models \forall y Py \rightarrow \forall z \forall x Rxz$.

(6 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Neem als domein de verzameling van alle Nederlanders en gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

a:	Abe
b:	Bart
Kxy:	x kent y
Lx:	x is logica-student

(a) Wie alle logica-studenten kent, kent zichzelf niet.

(4 punten)

(b) Alle logica-studenten behalve Bart kennen Abe.

(6 punten)

(c) Abe kent hoogstens twee logica-studenten.

(6 punten)

Opgave 7. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_1, a_3)\} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] \arrow[dr] & a_2 \arrow[d] \\ a_4 \arrow[u] & a_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = L(a_2) = L(a_3) = \{p\}\ ,\ L(a_4) = \emptyset.$$

(a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box p \to \Box\Box p$.

(6 punten)

(b) Geef een alternatieve labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \vDash \Box p \to \Box\Box p$.

(4 punten)

(c) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\Box p \to \Diamond p$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule.

(4 punten)

(d) Geldt $\mathcal{F} \vDash \Box p \to \Diamond p$? Motiveer uw antwoord.

(4 punten)

Opgave 8.

(a) Beschouw de volgende instantie van het Post correspondance problem (PCP). Geef een oplossing, als die er is, of beredeneer dat er geen oplossing is.

((00,010),(1101,11)(0,00))

(4 punten)

(b) Geef kort aan wat de relevantie is van het PCP voor de predikatenlogica.

(4 punten)