

## Eindige recursieve specificaties

Zij  $V = \{X_1, \dots, X_n\}$  een eindige verzameling van *recursievariabelen*.

Een (eindige) **recursieve BPA-specificatie** over  $V$  is een rijtje vergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} X_1 &= p_1(X_1, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ X_n &= p_n(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

(De rechterkanten  $p_i(X_1, \dots, X_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) zijn BPA-termen waarin, behalve de acties en de symbolen  $+$  en  $\cdot$ , ook de recursievariabelen mogen voorkomen.)

## Interpretatie van $p(X_1, \dots, X_n)$ in $G(A)$

Als  $p(X_1, \dots, X_n)$  een BPA-term is en  $g_1, \dots, g_n \in G(A)$ , dan bedoelen we met  $p(g_1, \dots, g_n)$  de procesgraaf die we krijgen door in  $p(X_1, \dots, X_n)$

- (i) elk voorkomen van een recursievariabele  $X_i$  te interpreteren als de corresponderende procesgraaf  $g_i$ ;
- (ii) elk voorkomen van een actie  $a$  interpreteren als de corresponderende procesgraaf  $G(a)$ ;
- (iii) elk voorkomen van de operaties  $+$  en  $\cdot$  interpreteren als de corresponderende operaties  $+$  en  $\cdot$  op procesgrafen.

We noemen  $p(g_1, \dots, g_n)$  de **interpretatie van  $p(X_1, \dots, X_n)$  in  $G(A)$**  met  $g_1, \dots, g_n$  voor  $X_1, \dots, X_n$ .

# Oplossing van een recursieve specificatie

Een **oplossing** in  $\mathbf{G}(\mathbf{A})$  voor de recursieve specificatie

$$\begin{array}{lcl} X_1 & = & p_1(X_1, \dots, X_n) \\ & \vdots & \\ X_n & = & p_n(X_1, \dots, X_n) \end{array}$$

is een rijtje procesgrafen  $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}(\mathbf{A})$  zó dat

$$\begin{array}{lcl} g_1 & \Longleftrightarrow & p_1(g_1, \dots, g_n) \\ & \vdots & \\ g_n & \Longleftrightarrow & p_n(g_1, \dots, g_n) \end{array}$$

# Guardedness (1)

Een voorkomen van een recursievariabele  $X$  in een BPA-term  $p$  heet **guarded** als  $p$  een subterm  $a \cdot q$  ( $a$  een actie) zo dat  $q$  het betreffende voorkomen van  $X$  bevat; anders noemen we het voorkomen van  $X$  **unguarded**.

We noemen een BPA-term  $p$  **completely guarded** als alle voorkomens van recursievariabelen in  $p$  guarded zijn.

Een recursieve BPA-specificatie is **completely guarded** als alle rechterkanten van de vergelijkingen completely guarded zijn.

## Guardedness (2)

Een BPA-term  $p$  heet **guarded** als er een completely guarded BPA-term  $q$  bestaat zo dat  $\text{BPA} \vdash p = q$ , d.w.z., als  $p$  met behulp van de axioma's van BPA kan worden herschreven tot een completely guarded BPA-term.

Een recursieve BPA-specificatie heet **guarded** als het met behulp van de axioma's van BPA en eventueel de vergelijkingen zelf kan worden herschreven tot een completely guarded recursieve specificatie.

**Stelling:** Elke *guarded* recursieve BPA-specificatie heeft een oplossing in het graafmodel en deze oplossing is uniek modulo bisimulatie.

# Counter (een oneindige recursieve specificatie)

Gegeven zijn de acties **u** (up) en **d** (down).

De oneindige guarded recursieve BPA-specificatie

$$\begin{aligned} C_0 &= uC_1 \\ C_k &= dC_{k-1} + uC_{k+1} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

specificeert het proces **Counter**.

# Counter (een eindige recursieve specificatie)

Gegeven zijn de acties **u** (up) en **d** (down).

De eindige guarded recursieve BPA-specificatie

$$C = uDC$$

$$D = d + uDD$$

specificeert ook het proces **Counter**.