Tentamen Kansrekening I voor BWI

6 april 2004, 18.00-20.00

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn 36 punten te behalen, het eindcijfer wordt bepaald door (4 + behaalde punten)/4. Het gebruik van een rekenmachine en van formulebladen (maximaal 11 A4-tjes) is toegestaan. Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden!

1. Ik heb een zak met tien chocolade paaseitjes in twee smaken. Vijf zijn van witte chocolade gemaakt, de andere vijf zijn van melkchocolade. Telkens pak ik met mijn ogen dicht een willekeurig eitje uit de zak en eet het op. Neem aan dat alle mogelijke volgordes waarin ik de eitjes eet even waarschijnlijk zijn.
(a) *(3 punten)* Bereken de kans dat ik nooit twee eitjes van dezelfde smaak achter elkaar eet.
(b) *(3 punten)* Bereken de kans dat ik eerst alle eitjes van melkchocolade eet en daarna alle eitjes van witte chocolade.
(c) *(3 punten)* Bereken de (conditionele) kans dat het eerste eitje dat ik heb gegeten van melkchocolade was, als ik je vertel dat het tweede eitje dat ik heb gegeten van witte chocolade was gemaakt.

2. Mijn auto heeft een waarschuwingslampje dat hoort te gaan branden als bij het starten van mijn auto het oliepeil te laag is. Soms gaat het lampje echter branden terwijl er niets aan de hand is, terwijl het soms ook niet gaat branden terwijl het oliepeil wel degelijk te laag is. Neem aan dat de (conditionele) kans dat het lampje gaat branden als het oliepeil correct is gelijk is aan 0.02 en dat de (conditionele) kans dat het lampje gaat branden als het oliepeil te laag is gelijk is aan 0.99. Schrijf A voor de gebeurtenis dat het waarschuwingslampje gaat branden als ik vandaag mijn auto start en B voor de gebeurtenis dat het oliepeil van mijn auto vandaag te laag is. Neem aan dat dat $P(B) = 0.1$
(a) *(4 punten)* Bereken $P(A)$.
(b) *(5 punten)* Als het waarschuwingslampje vandaag gaat branden bij het starten van mijn auto, wat is dan de (conditionele) kans dat het oliepeil inderdaad te laag is?

3. We gooien 10 keer achter elkaar met een eerlijke dobbelsteen, de afzonderlijke worpen zijn onafhankelijk van elkaar.
(a) *(2 punten)* Wat is de kans dat we geen enkele zes zien?
(b) *(4 punten)* Laat Y het aantal worpen zijn waarbij het aantal ogen groter dan vier was. Geef de kansmassafunctie en de verwachting van Y.
(c) *(3 punten)* Schrijf A voor de gebeurtenis dat er precies twee keer drie wordt gegooid, B voor de gebeurtenis dat er nooit vier wordt gegooid. Zijn A en B onafhankelijk? Verklaar je antwoord.

4. Een boer heeft 1000 scharrelkippen, iedere kip legt elke dag 0, 1 of 2 eieren. We schrijven X_i voor het aantal eieren dat de $i$de kip vandaag legt. De X_is zijn onafhankelijk van elkaar en voor $1 \leq i \leq 1000$, $P(X_i = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$ en $P(X_i = 2) = \frac{1}{2}$.
(a) *(4 punten)* Laat zien dat $E(X_i) = \frac{4}{3}$ en dat $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{5}{9}$.
(b) *(5 punten)* Laat Y het totaal aantal eieren zijn dat vandaag gelegd wordt, dat wil zeggen $Y = X_1 + \cdots + X_{1000}$. Geef met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev een ondergrens voor $P(Y > 1100)$.