Inleiding Theoretische Informatica

Bas Luttik & Femke van Raamsdonk

4 februari 2003

Organisatie (1)

Deel I: procesalgebra (week 6–10)
hoorcollege: Bas Luttik (`luttik@cs.vu.nl`)
werkcollege: Joris Nederpelt Lazarom (`jrnederp@cs.vu.nl`)

Deel II: lambda calculus (week 11,12,14–16)
hoorcollege: Femke van Raamsdonk (`femke@cs.vu.nl`)
werkcollege: Joris Nederpelt Lazarom (`jrnederp@cs.vu.nl`)

Organisatie (2)

week 6–12:

hoorcollege: di 12:45–14:30 in KC159
werkcollege groep A–M: do 13:45–15:30 in S203
werkcollege groep N–Z: vr 12:45–14:30 in S203

week 14–16:

hoorcollege: wo 15:45–16:30 in Q105
werkcollege groep A–M: do 13:45–15:30 in S209
werkcollege groep N–Z: vr 10:45–12:30 in S201

Organisatie (3)

Webpagina: `http://www.cs.vu.nl/~tcs/iti`

Toetsing: Schriftelijk tentamen aan het eind van de cursus

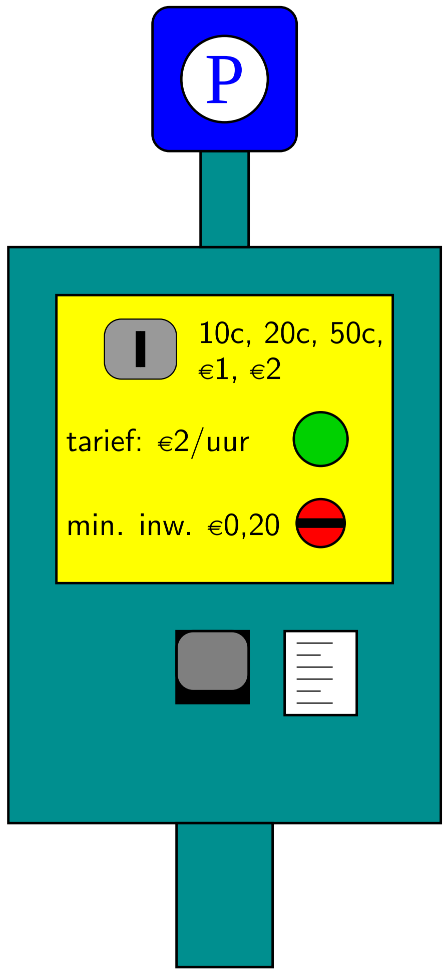
Materiaal

Dictaat “Inleiding Theoretische Informatica”
door prof.dr. J.W. Klop en dr. F. van Raamsdonk
VU boekhandel: €7,90

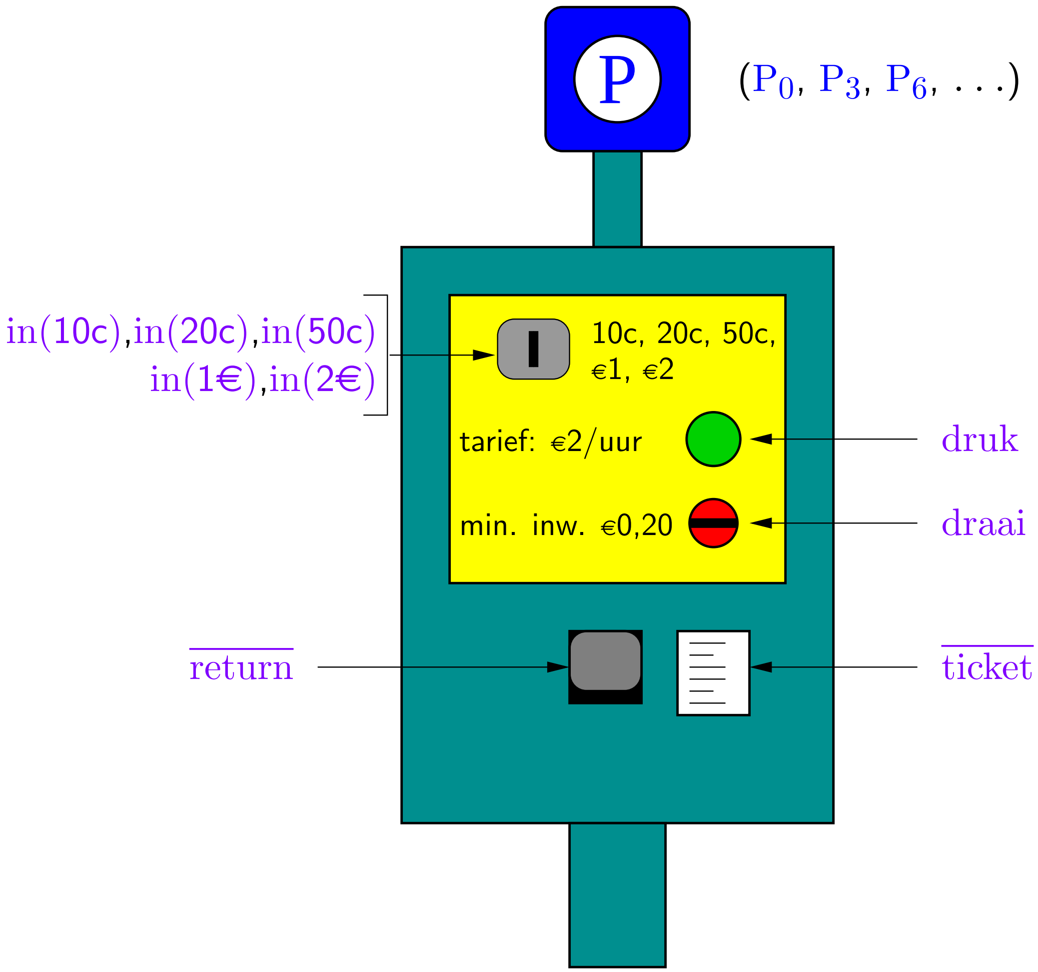
Daarnaast wordt er in de loop van de cursus misschien nog enig aanvullend materiaal beschikbaar gesteld via de webpagina.

Deel I: Procesalgebra

Parkeerautomaat (1)



Parkeerautomaat (2)



Parkeerautomaat (3)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0 &= \mathrm{in}(10\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_3 + \mathrm{in}(20\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_6 + \mathrm{in}(50\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_{15} + \mathrm{in}(1€) \cdot \mathrm{P}_{30} + \mathrm{in}(2€) \cdot \mathrm{P}_{60} \\ &\quad + \mathrm{druk} \cdot \mathrm{P}_0 + \mathrm{draai} \cdot \mathrm{P}_0; \\ \mathrm{P}_3 &= \mathrm{in}(10\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_6 + \mathrm{in}(20\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_9 + \mathrm{in}(50\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_{18} + \mathrm{in}(1€) \cdot \mathrm{P}_{33} + \mathrm{in}(2€) \cdot \mathrm{P}_{63} \\ &\quad + \mathrm{druk} \cdot \mathrm{P}_3 + \mathrm{draai} \cdot \overline{\mathrm{return}} \cdot \mathrm{P}_0; \end{aligned}$$

and for all $m = 3n$ with $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\mathrm{m} &= \mathrm{in}(10\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{m}+3} + \mathrm{in}(20\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{m}+6} + \mathrm{in}(50\mathsf{c}) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{m}+15} + \mathrm{in}(1€) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{m}+30} \\ &\quad + \mathrm{in}(2€) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{m}+60} + \mathrm{druk} \cdot \overline{\mathrm{ticket}} \cdot \mathrm{P}_0 + \mathrm{draai} \cdot \overline{\mathrm{return}} \cdot \mathrm{P}_0. \end{aligned}$$

BPA: **Basic Process Algebra (1)**

Zij A een verzameling van constantesymbolen.

De verzameling van **(gesloten)** BPA-**termen over** A wordt gedefinieerd door de volgende syntax:

$$p \; ::= \; \mathrm{a} \mid p \cdot p \mid p + p \qquad (\mathrm{a} \in \mathrm{A}).$$

Intuïtieve betekenis van de symbolen:

- a : een **actie**, een atomair proces;
- $\cdot$: **sequentiële compositie** van processen;
- $+$: **alternatieve compositie** (**keuze**) van processen;

BPA: **Basic Process Algebra (2)**

De axioma's van BPA zijn:

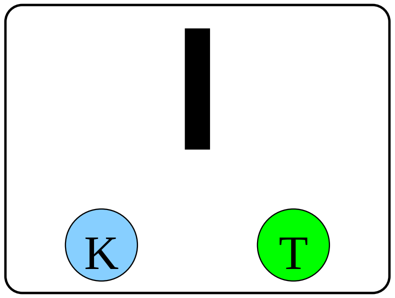
(A1)	$x + y = y + x$		(+ is commutatief)
(A2)	$x + (y + z) = (x + y) + z$		(+ is associatief)
(A3)	$x + x = x$		(+ is idempotent)
(A4)	$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$		($\cdot$ distribueert van rechts over +)
(A5)	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$		($\cdot$ is associatief)

We schrijven BPA $\vdash p = q$ als p door 'toepassing van bovenstaande axioma's' overgaat in q.[1]

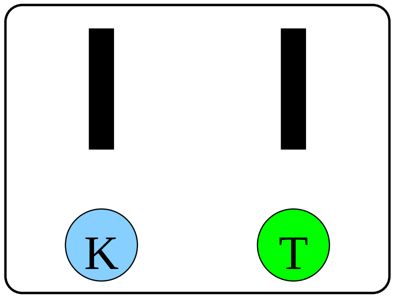
[1]formeel: als $p = q$ met equationele logica afleidbaar is uit de axioma's van BPA.

BPA: **Basic Process Algebra (3)**

In het algemeen distribueert $\cdot$ **niet** van links over $+$; bijvoorbeeld, als a, b en c verschillende acties zijn, dan $a \cdot (b + c) \neq (a \cdot b) + (a \cdot c)$.



Automaat 1



Automaat 2

Bovenstaande automaten hebben een verschillend **keuzemoment**. Bij de linkerautomaat ligt het keuzemoment *na* het inwerpen van een muntje; het valt samen met het indrukken van een knop. Bij de rechterautomaat valt het keuzemoment samen met het inwerpen van een muntje; het indrukken van de (goede) knop is een formaliteit.

BPA: **Basic Process Algebra (4)**

Notationele conventies:

1. "$\cdot$" bindt **sterker** dan "$+$": als we $p \cdot q + r$ schrijven, dan bedoelen we de BPA-term $(p \cdot q) + r$;
2. "$\cdot$" wordt vaak weggelaten: in plaats van $p \cdot q + r$ schrijven we dus vaak $pq + r$.

Volgens axioma $(\mathrm{A2})$ is $+$ associatief; het verschil tussen de BPA-termen $(p + q) + r$ en $p + (q + r)$ vinden we kennelijk onbelangrijk; we noteren daarom beide vaak als $p + q + r$.

Volgens axioma $(\mathrm{A5})$ is $\cdot$ ook associatief; het verschil tussen de BPA-termen $(p \cdot q) \cdot r$ en $p \cdot (q \cdot r)$ vinden we kennelijk onbelangrijk; we noteren daarom beide vaak als $p \cdot q \cdot r$.

Semantiek

Wat is een proces?

Iets dat verloopt met stappen in de tijd.

Procesgrafen (1)

Zij A een verzameling acties; een **procesgraaf** over A is een tripel $\mathrm{g} = (N, E, r)$ met

(i) N een verzameling **punten**/**knopen**;

(ii) $E \subseteq N \times \mathrm{A} \times N$ een verzameling met acties gelabelde **pijlen**; we schrijven $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t$ voor $(s, \mathrm{a}, t) \in E$;

(iii) een een speciale knoop $r \in N$, de **wortel** van g.

Procesgrafen (2)

Een procesgraaf is **samenhangend** als elke knoop vanuit de wortel bereikbaar is door pijlen te volgen.

Een knoop zonder uitgaande pijlen heet een **eindknoop**.

Een knoop s heet **cyclisch** als er een pad (van minimaal 1 pijl) van s naar zichzelf is; anders heet s **acyclisch**.

We noteren met $\mathbf{G}(\mathrm{A})$ de verzameling van alle samenhangende procesgrafen over A met een acyclische wortel.

Procesgrafen (3)

Zij $g_1, g_2 \in \mathbf{G}(\mathrm{A})$, d.w.z., g_1 en g_2 zijn samenhangende procesgrafen met een acyclische wortel. We definiëren:

(i) het **product** $g_1 \cdot g_2$ van g_1 en g_2 als de procesgraaf die ontstaat als we aan elke eindknoop van g_1 een kopie van g_2 vastplakken (waarbij “vastplakken” inhoudt dat de wortel van de kopie van g_2 wordt geïdentificeerd met de betreffende eindknoop);

(ii) de **som** $g_1 + g_2$ van g_1 en g_2 als de procesgraaf die ontstaat als we de wortels van g_1 en g_2 identificeren.

Procesgrafen (4)

We kunnen nu op een systematische manier met elke gesloten BPA-term p over A een procesgraaf $\mathbf{G}(p)$ in $\mathbf{G}(\mathrm{A})$ associëren:

(i) $\mathbf{G}(\mathrm{a})$ is de procesgraaf met behalve een wortel nog een andere knoop en een enkele met a gelabelde pijl van de wortel naar deze knoop;

(ii) $\mathbf{G}(p \cdot q) = \mathbf{G}(p) \cdot \mathbf{G}(q)$;

(iii) $\mathbf{G}(p + q) = \mathbf{G}(p) + \mathbf{G}(q)$.

We noemen de procesgraaf $\mathbf{G}(p)$ de **interpretatie van** p **in** $\mathbf{G}(\mathrm{A})$.

Procesgrafen (5)

Zij $\mathrm{g} = (N, E, r)$ en $\mathrm{g}' = (N', E', r')$ procesgrafen over A.

Een relatie $\mathcal{R} \subseteq N \times N'$ is een **bisimulatie** tussen g en g' als

(i) $(r, r') \in \mathcal{R}$;

(ii) $s \rightarrow_{\mathrm{a}} t \;\&\; (s, s') \in \mathcal{R} \implies \exists t' \in N'.\ s' \rightarrow_{\mathrm{a}} t' \;\&\; (t, t') \in \mathcal{R}$;

(iii) $s' \rightarrow_{\mathrm{a}} t' \;\&\; (s, s') \in \mathcal{R} \implies \exists t \in N.\ s \rightarrow_{\mathrm{a}} t \;\&\; (t, t') \in \mathcal{R}$.

We noemen twee procesgrafen g en g' **bisimilair** (notatie: $\mathrm{g} \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathrm{g}'$) als er een bisimulatie tussen g en g' bestaat.

Stelling: Voor alle gesloten BPA-termen p en q:

$$\mathsf{BPA} \vdash p = q \iff \mathbf{G}(p) \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathbf{G}(q).$$