Antwoorden van het tentamen van 29 januari 2004

1 (a) Johan koopt 2 loten bij de sportclub. Elk van de n loten heeft een kans van $\frac{1}{n}$ om het winnende lot te zijn. Omdat Johan twee loten heeft, is zijn kans op de prijs (van 10 euro) dus $\frac{2}{n}$.
$P(X=10)=\frac{2}{n}$, $P(X=0)=1-P(X=10)=1-\frac{2}{n}$.
(b) Johan koopt 1 lot bij de sportclub en 1 lot bij de studievereniging. De kans dat hij 10 euro wint bij de sportclub is $\frac{1}{n}$, de kans dat hij 10 euro wint bij de studieclub is ook $\frac{1}{n}$. Johan kan in totaal dus 0, 10 of 20 euro winnen. $P(Y=20)=P(\text{hij wint bij de studieclub en bij de sportclub})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. (wegens onafhankelijkheid)
$P(Y=10)=P(\text{ hij wint bij precies een van de loterijen})=2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}$, (want hij moet winnen bij de sportclub en verliezen bij de studieclub of andersom).
$P(Y=0)=P(\text{hij verliest bij beide loterijen})=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}$.
(c) $E(X)=10\cdot\frac{2}{n}+0\cdot\frac{n-2}{n}=\frac{20}{n}$, $E(Y)=10\cdot 2\cdot\frac{n-1}{n^2}+\frac{20}{n^2}=\frac{20}{n}$. Hoewel de verwachtingen van X en Y hetzelfde zijn, maakt het wel uit wat Johan doet. De kansmassafuncties van X en Y zijn namelijk verschillend. Zo heeft Johan als hij bij beide loterijen een lot koopt kans om 20 euro te winnen, hetgeen onmogelijk is als hij 2 loten bij de studievereniging koopt.

2 (a) Ik schrijf H voor de gebeurtenis dat er 3 paarse krokussen opkomen, A voor de gebeurtenis dat ik pakket A heb gekozen en B voor de gebeurtenis dat ik pakket B heb gekozen.

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A)P(H|A)+P(B)P(H|B) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\binom{8}{3}}{\binom{24}{3}}+\frac{1}{2}\frac{\binom{12}{3}}{\binom{24}{3}} \\ &= \frac{3}{44}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A)P(G|A)+P(B)P(G|B) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{24}{3}}+\frac{1}{2}\frac{\binom{12}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{24}{3}} \\ &= \frac{59}{253} \end{aligned}$$

(c)

$$P(A|G) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)}=\frac{P(A)P(G|A)}{P(G)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{24}{3}}}{\frac{59}{253}} = \frac{32}{59}.$$

3 We gooien 4 keer met een eerlijke munt. $P(A) = P(\text{eerste worp kop, rest maakt niet uit}) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(\text{precies twee keer kop}) = \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = \frac{6}{16}$. $P(A \cap B)\frac{1}{2} \cdot \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{16}$, (want de eerste worp moet kop zijn en van de laatste drie worpen moet er precies 1 kop zijn). Merk nu op dat $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ en dat A en B daarom onafhankelijk zijn.

4 Er worden 0, 1, 2 of 3 mensen weggestuurd. Schrijf Y voor het aantal mensen dat komt opdagen. De stochast Y is binomiaal verdeeld met parameters $n = 33$ en $p = 0.85$. $P(Z = 3) = P(Y = 33) = 0.85^{33}$; $P(Z = 2) = P(Y = 32) = \binom{33}{32}0.85^{32} \cdot 0.15$; $P(Z = 1) = P(Y = 31) = \binom{33}{31}0.85^{31} \cdot 0.15^2$.

$$E(Z) = P(Z = 1) + 2P(Z = 2) + 3P(Z = 3) \approx 0.146$$

verder geldt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ &= P(Z = 1) + 4P(Z = 2) + 9P(Z = 3) - (E(Z))^2 \approx 0.21. \end{aligned}$$

5 Schrijf X_i voor het bedrag dat geclaimd wordt op de $i$de polis. De X_is zijn onafhankelijk, $E(X_i) = 75$, $\mathrm{Var}(X_i)$= 20.000.. Merk op dat

$$E(X_1 + \cdots + X_{20.000}) = 20.000 \cdot 75 = 1.500.000$$

en wegens onafhankelijkheid

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{20.000}) = 20.000 \cdot 140.000 = 2.800.000.000.$$

Nu geldt wegens de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\begin{aligned} P(X_1 + \cdots X_{20000} \geq 170.000) &= P(X_1 + \cdots + X_{20000} - 1.500.000 \geq 200.000) \\ &\leq P(|X_1 + \cdots + X_{20000} - 1.500.000| \geq 200.000) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(X_1 + \cdots X_{20000})}{200.000^2} \\ &= \frac{2.800.000.000}{200.000^2} = 0.07. \end{aligned}$$