Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2019/20

Тема № СИ20-П-100

26.06.2020

София

Изготвил: Ерик Здравков

Ф. No. 62511

Група 4

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1.Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семесътр, уч. год. 2019/20

Име...,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ20-П-100. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със следната смесена задача

$$\left| \begin{array}{l} u_t = \frac{4}{25} u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < 5\pi, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 100(1 - 4^{x^2 - 2\pi x})^3, & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & x \in (2\pi, 5\pi], \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=5\pi} = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 45-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на изменението на температурата в пръта за $t \in [0, 5]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на Задачата

2.1. Теоретична част

Тема СИ20-ПL-100

Ерик Здравков, СИ, 2 курс, група 4

ФН: 62511

$$\begin{cases} u_t = \frac{4}{25} u_{xx}, t>0, 0<x<5\pi \\ u(x,0) = \begin{cases} 100(1-4^{x^2-2\pi x})^3, & x \in [0,2\pi] \\ 0, & x \in (2\pi, 5\pi] \end{cases} \\ u(0,t)=0, u_x(5\pi,t)=0, t\geq 0 \end{cases}$$

1. Разделяне променливите:

$u(x,t) = X(x).T(t)$

$X(x).T'(t) = \frac{4}{25}.X''(x).T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)\frac{4}{25}} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x) = 0 \\ X(0)=0, X'(5\pi)=0 \end{cases}$$

Характеристичен полином: $P(\lambda) = \lambda^2+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\lambda$

Разглеждаме нетривиалния случай $\lambda>0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\lambda}$

ФСР е $\{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\}$

$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0)=0 \Rightarrow C_1\cos 0 = 0 \Rightarrow C_1=0$

$X'(5\pi)=0 \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x = C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}5\pi = 0$

Искаме $\cos\sqrt{\lambda}5\pi = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\lambda}\, 5\cancel{\pi} = \frac{2k+1}{2}\cancel{\pi} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{10}$

-2-

Собствените стойности са $\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{10}\right)^2, k=0,1,2,\dots$

Собствените функции са $X_k(x) = \sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right), k=0,1,2,\dots$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение от първи ред:

$\cancel{T'_k(t) + \lambda_k (t)}\; T'_k(t) + \lambda_k \frac{4}{25} T_k(t) = 0$

Характеристичният полином е

$Q(\alpha) = \alpha + \lambda_k.\frac{4}{25} \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{25}\lambda_k \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{25}\left(\frac{2k+1}{10}\right)^2$

ФСР е $\left\{e^{\frac{-4}{25}\left(\frac{2k+1}{10}\right)^2.t}\right\}$

$T_k(t) = C_k.e^{\frac{-4}{25}\left(\frac{2k+1}{10}\right)^2.t}$, C_k-произволно, $k=0,1,\dots$

Търсим решение по метода на Фурие от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x).T_k(t)$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k.e^{\frac{-4}{25}.\left(\frac{2k+1}{10}\right)^2.t}.\sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k.\sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)$$

$$C_k = \frac{2}{5\pi}\int_0^{5\pi} 100\left(1-4^{x^2-2\pi x}\right)^3.\sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{5\pi}\left(\int_0^{2\pi} 100\left(1-4^{x^2-2\pi x}\right)^3.\sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)dx + \underbrace{\int_{2\pi}^{5\pi} 100\left(1-4^{x^2-2\pi x}\right)^3.\sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)dx}_{=0}\right)$$

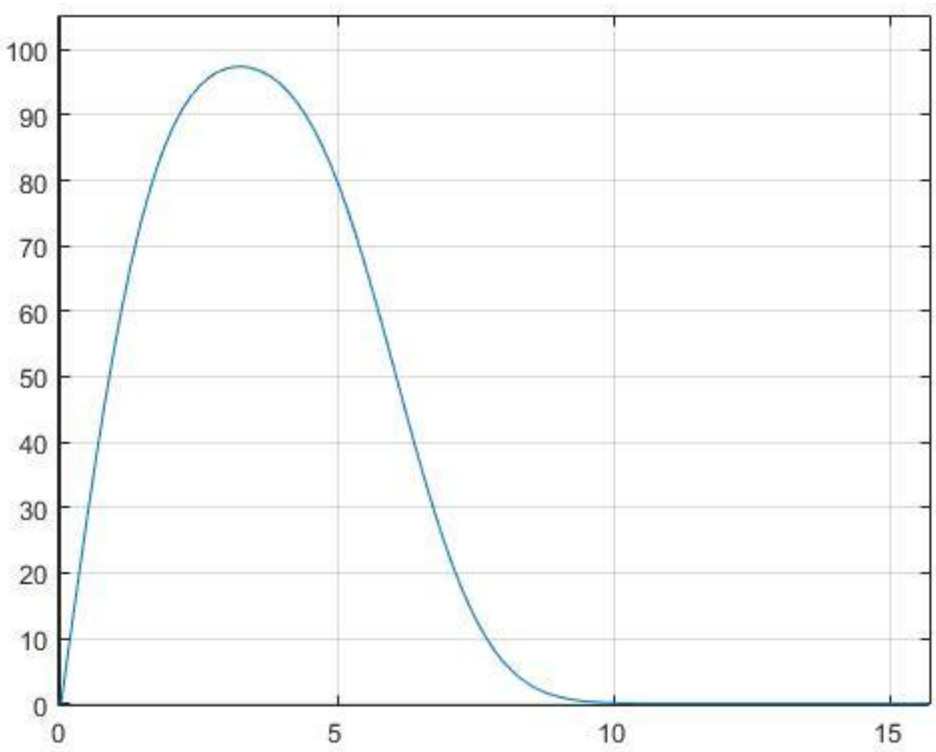
$$= \frac{2}{5\pi}\int_0^{2\pi} 100\left(1-4^{x^2-2\pi x}\right)^3 \sin\left(\frac{2k+1}{10}.x\right)dx$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function heatfourie1
L = pi*5;
a = 2/5;
tmax = 5;
steps = 50;
t=0:tmax/steps:tmax;
x=0:L/100:L;
    function y=phi(x)
        for i=1:length(x)
            if x(i)<=2*pi
                y(i)=100*(1-4^(x(i)^2-2*pi*x(i)))^3;
            else
                y(i)=0;
            end
        end
    end

    function y=heat(x,t)
        y=0;
        for k=0:45
            Xk=sin((2*k+1)*pi*x/(2*L));
            Ck=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
            Tk=Ck*exp(-(a*(2*k+1)*pi/(2*L))^2*t);
            y=y+Xk*Tk;
        end
    end

for n=1:length(t)
    plot(x,heat(x,t(n)));
    axis([0,L,-0.1,105]);
    grid on;
    M(n)=getframe;
end
movie(M,3);

subplot(3,1,1);
plot(x,phi(x));
title('t = 0');
axis([0,L,-0.1,105]);
grid on;

subplot(3,1,2);
plot(x,heat(x,t(round(steps/5))));
title(['t = ',num2str(t(round(steps/5)))]);
axis([0,L,-0.1,105]);
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(x,heat(x,t(length(t))));
title(['t = ',num2str(tmax)]);
axis([0,L,-0.1,105]);
grid on;

end
```

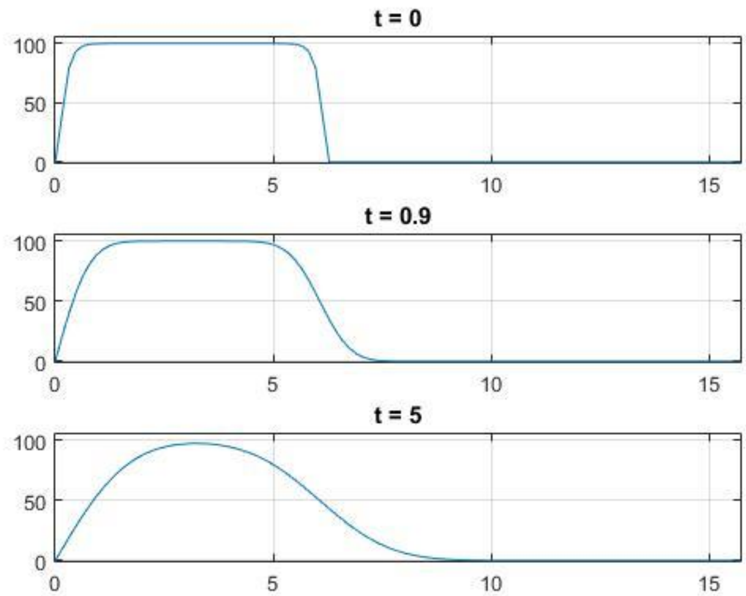
2.3. Графики (включително от анимация)

Графика от анимацията.



.

Графики в началния(t=0), крайния(t=5) и един междинен момент(t=0.9).


t = 0
100
50
0
0
5
10
15
t = 0.9
100
50
0
0
5
10
15
t = 5
100
50
0
0
5
10
15